محمد مهدی عمری   ۸۱۰۱۰۱۴۹۵   بخش کتبی

Bayesian Nets

الف) ابتدا $P(W,O)$ را از طریق $P(O)$ و $P(W|O)$ میسازیم و سپس $P(W)$ را از روی آن حساب می‌کنیم.

$P(W,O) = P(O)P(W|O)$

$P(W,O)$	0.45	0.1	0.05	0.4
O	+	−	+	−
W	+	+	−	−

$P(W) = \sum_{O_i} P(O_i, W)$

$P(W+) = 0.45 + 0.1 = 0.55$

$P(W-) = 0.05 + 0.4 = 0.45$

$P(W)$	0.55	0.45
W	+	−

ب) باید احتمال joint همه متغیرها را حساب کنیم. از chain rule استفاده می‌کنیم

$$P(O,W,F,R,A) = P(O)P(W|O)P(F|O,W)\underbrace{P(R|F,O,W)}_{P(R)}\underbrace{P(A|F,R,O,W)}_{P(A|F,R)} = 0.5\times0.1\times0.6\times0.8\times0.7 = 0.0168$$

ج)

1: درست. با مشخص بودن پدر (F)، فرزند (A) از تمام اجدادی که از طریق آن پدر هستند (W و O) مستقل است.

2: غلط. با مشخص بودن فرزند (A)، پدران از هم مستقل نمی‌شوند (F و R)

3: غلط. متغیرها (F) به شرط مشخص بودن پدرانشان (O و W)، از فرزندانشان (A) مستقل نمی‌شوند

4: درست. هیچ ارتباط علت و معلولی یا زنجیره‌ای میان R و F وجود ندارد.

د)

در ابتدا $P(O)$ را داریم. از آنجایی که در نهایت $P(O+|A-)$ را می‌خواهیم بخش $P(O-)$ را دور می‌ریزیم. حالا با ضرب آن در $P(W|O+)$ به $P(W,O+)$ می‌رسیم ($P(W|O+)$ از روی $P(W|O)$ به دست می‌آید). حالا با ضرب $P(W,O+)$ در $P(F|W,O+)$ که از روی $P(F|W,O)$ با جدا سازی سطرهایی که O مثبت است به دست آمده به $P(F,W,O+)$ می‌رسیم. در این مرحله می‌توانیم Elimination انجام دهیم و W را دور بریزیم تا به $P(F,O+)$ برسیم. از آنجایی که R از F و O مستقل است با ضرب $P(F,O+)$ در $P(R)$ به $P(R,F,O+)$ می‌رسیم. حالا A از O مستقل می‌شود و با ضرب $P(R,F,O+)$ در $P(A|R,F,O+)$ به $P(A,R,F,O+)$ می‌رسیم. در این مرحله نیازی به A های مثبت نداریم و با دور ریختن آن‌ها به $P(-A,+O,F,R)$ می‌رسیم. حالا می‌توانیم بار دیگر Elimination انجام داده و F,R را حذف کنیم تا به $P(-A,+O)$ برسیم و سپس $P(+O|-A)$ را پیدا کنیم.

$\text{(II)}\ P(A,F,R) \leftarrow \text{(I)}\ P(F,R)$

$$P(O) \rightarrow P(O,W) \rightarrow P(F,O,W) \rightarrow P(F,O) \rightarrow P(F,O,R) \rightarrow P(A,F,O,R) \xrightarrow{\text{II}} P(O|A,F,R) \xrightarrow{\text{I}} P(O|A)$$

محمد مهدی حمدی 810101465 بخش کتبی

HMM

ج) در این بخش به هر ۳ رابطه smoothing نیاز داریم. پس آن‌ها را تعریف می‌کنیم.

$\alpha_t(i)$: در زمان t در استیت i باشیم با مشاهده تمام O_j ها از O_1 تا O_t.

$$\alpha_t(i)=\Big(\sum_{j=1}^{N}\alpha_{t-1}(j)A_{ji}\Big)B_i(O_t)$$

$\beta_t(i)$: در زمان t در استیت i باشیم با مشاهده تمام O_j ها از O_{t+1} تا O_T.

$$\beta_t(i)=\sum_{j=1}^{N}\beta_{t+1}(j)A_{ji}B_j(O_{t+1})$$

$\gamma_t(i)$: احتمال اینکه در زمان t در استیت i باشیم به شرط مشاهده کامل O.

$$\gamma_t(i)=\frac{\alpha_t(i)\,\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\,\beta_t(j)}$$

در بخش قبل ماتریس α را حساب کردیم. کافیست ماتریس β را حساب کنیم.

حالات پایه: $\beta_T(S)=1 \quad \beta_T(a)=1 \quad \beta_T(h)=1 \quad \beta_T(r)=1 \qquad T=4$

$\beta_3(S)=0.4\times0+0.4\times1+0.2\times0=0.4 \qquad \beta_3(a)=0.4+0.1\times0.1=0.41 \qquad \beta_3(h)=0.2+0.5\times0.1=0.25 \qquad \beta_3(r)=0.04$

$\beta_2(S)=0.0376 \qquad \beta_2(a)=0.008 \qquad \beta_2(h)=0.0056 \qquad \beta_2(r)=0.0568$

$\beta_1(S)=0.014304 \qquad \beta_1(a)=0.003008 \qquad \beta_1(h)=0.002272 \qquad \beta_1(r)=0.021856$

دو ماتریس آلفا و بتا را در جدول‌های زیر مشاهده می‌کنید:

α:

t \ state	s	a	h	r
1	0.2	0	0	0.05
2	0.072	0	0	0.024
3	0.0068	0	0	0.03912
4	0	0.00068	0.000724	0

β:

t \ state	s	a	h	r
1	0.014304	0.003008	0.002272	0.021856
2	0.0376	0.008	0.0056	0.0568
3	0.4	0.41	0.25	0.04
4	1	1	1	1

$$P(O|\lambda)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\,\beta_t(j)=0.004184$$

$$P(S_2=Sad\,|\,O_1,\dots,O_4,\lambda)=\frac{P(S_2=Sad,O_1,\dots,O_4|\lambda)}{P(O_1,\dots,O_4|\lambda)}\simeq 0.647$$

د) مخرج کسر در بخش ب محاسبه شد. پس باید صورت را حساب کنیم.

$$P(Q|O,\lambda)=\frac{P(Q,O|\lambda)}{P(O|\lambda)}$$

از آنجایی که مقدار مخرج برای تمام مجموعه Q ها یکسان است و به دنبال بیشترین احتمال هستیم، فقط صورت را محاسبه می‌کنیم.

$$P(Q,O|\lambda)=\delta \rightarrow P(q_1,q_2,\dots,q_t=S_i,O_1,\dots,O_t|\lambda)\xRightarrow{\max}\delta_t(i)=\max_{j=1,\dots,N}\big(\delta_{t-1}(j)A_{ji}\big)\times B_i(O_t)$$

در واقع $\delta_t(i)$ محتمل‌ترین مسیر تا زمان t را نشان می‌دهد که $q_t=i$ باشد. حالات پایه $\leftarrow$ $\delta_1(i)=\pi_i\times B_i(O_1)$

$\delta_1(s)=0.25\times0.8=0.2 \qquad \delta_1(a)=0.25\times0=0 \qquad \delta_1(h)=0.25\times0=0 \qquad \delta_1(r)=0.25\times0.2=0.05$

$\delta_2(S)=0.2\times0.4\times0.8=0.064 \qquad \delta_2(a)=(\dots)\times0=0 \qquad \delta_2(h)=(\dots)\times0=0 \qquad \delta_2(r)=0.2\times0.1=0.02$

$\delta_3(S)=0.00512 \quad \delta_3(a)=(\dots)\times0=0 \quad \delta_3(h)=0 \quad \delta_3(r)=0.00224 \quad \delta_4(S)=0 \quad \delta_4(a)=0.000512 \quad \delta_4(h)=0.000448 \quad \delta_4(r)=0$

پس محتمل‌ترین دنباله استیت‌ها که مجموعه O را بسازد به صورت $S \leftarrow S \leftarrow S \leftarrow a$ است.