

Mise en œuvre des Eléments finis

B. Nkonga, 2024-2025

On considère la formulation faible suivante :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in \mathcal{V}(\Omega) \text{ tel que } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega)} \quad (1)$$

On considère maintenant la formulation faible approchée associée :

$$\boxed{\text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_h) \text{ tel que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_h)} \quad (\text{Pv})$$

Contexte de ce cours.

1. Le problème variationnel (1) est bien posé au sens d'Hadamard :
(1) admet une solution unique stable.
2. On cherche à construire un espace approché $\mathcal{V}_h(\Omega_h) \subset \mathcal{V}(\Omega)$ pour lequel le problème variationnel (Pv) est bien posé au sens d'Hadamard.
3. L'espace fonctionnel $\mathcal{V}_h(\Omega_h)$ de dimension finie N_v avec $\mathcal{V}_h(\Omega_h) \subset \mathcal{V}(\Omega)$
Pour des exemples d'espaces fonctionnels $\mathcal{V}(\Omega)$ voir chapitre 2 "Espaces fonctionnels" de https://www.academia.edu/36497995/Les_éléments_finis_de_la_théorie_à_la_pratique
4. On construira une base de $\mathcal{V}_h(\Omega_h)$: φ_i pour $i = 1, \dots, N_v$.
5. Toute fonction $u \in \mathcal{V}_h$ s'exprime dans la base précédente par

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_v} u_j \varphi_j(x)$$

6. Le domaine $\Omega_h \subset \mathbb{R}^d$ est défini par un Maillage Conforme et non singulier. C'est à dire que la mesure de chaque éléments est non nulle ($\neq 0$).

$$\Omega_h = \bigcup_1^{N_e} e \quad \text{avec} \quad \text{Mesure}(e) \neq 0, \quad \text{et} \quad e \cap e' = \emptyset \quad \text{si} \quad e \neq e'$$

7. $a(u_h, v_h)$ forme linéaire en v_h et continue. On a

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \mathcal{A}(u_h, v_h) d\mathbf{x} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_e \mathcal{A}(u_h, v_h) d\mathbf{x} = \sum_{e=1}^{N_e} a^e(u_h, v_h)$$

8. $\ell(v_h)$ forme linéaire continue.

$$\begin{aligned}\ell(v_h) &= \int_{\Omega_h} \mathcal{L}(\mathbf{x}, v_h) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, v_h) dS \\ &= \sum_{e=1}^{Ne} \left(\int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, v_h) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial\Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, v_h) dS \right) = \sum_{e=1}^{Ne} \ell^e(v_h)\end{aligned}$$

9. Galerkin Continue : $\mathcal{V}_h(\Omega_h) \subset C^0(\Omega_h) \cap \mathcal{P}(\Omega_h)$. \mathcal{P} est l'espace des fonctions polynômiales sur chaque élément (e) du maillage..

Objectifs du cours.

Le cours consiste à

- détailler la construction des espaces \mathcal{V}_h ,
- donner une formulation algébrique du problème variationnel,
- proposer des algorithmes de construction et de résolution numérique du problème algébrique.

Chapter 1

Interpolation de Lagrange sur $e \subset \mathbb{R}^d$.

On considère un élément géométrique $e \subset \mathbb{R}^d$ compacte, connexe et d'intérieur non vide. Il est défini par un ensemble \mathcal{G}^e (fini) de points géométriques distincts. Les éléments finis de Lagrange sont eux définis par un ensemble \mathcal{D}^e de points d'interpolation et par un espace de fonctions \mathcal{P}^e de dimension finie.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^e &= \{\mathbf{x}_1^e, \dots, \mathbf{x}_{\text{Npe}}^e\} & \mathbf{x}_g^e &\neq \mathbf{x}_{g'}^e, & \mathbf{x}_g &\in e \subset \mathbb{R}^d \\ \mathcal{D}^e &= \{\mathbf{x}_1^e, \dots, \mathbf{x}_{\text{Nve}}^e\} & \mathbf{x}_d^e &\neq \mathbf{x}_{d'}^e & \mathbf{x}_d &\in e \subset \mathbb{R}^d\end{aligned}$$

En toute généralité, le choix de l'espace de fonctions \mathcal{P}^e peut tout à fait être quelconque. En pratique, on se limite très souvent à des espaces de fonctions polynomiales. La formulation générale des espaces de fonctions polynomiales, de dimension finie, peut se mettre sous la forme suivante

$$\mathcal{P}^e = \text{span} \left\{ \mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}, \quad \mathbf{m} \subset \mathbb{N}^d \quad \text{avec} \quad |\mathbf{m}| = \sum_{i=1}^d m_i < \infty \right\}$$

Quelques exemples :

- Les espaces \mathcal{P}_k^e avec $k \in \mathbb{N}$ et $k < \infty$:

$$\mathcal{P}_k^e \equiv \left\{ \mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}, \quad \mathbf{m} \subset \mathbb{N}^d \quad \text{avec} \quad 0 \leq |\mathbf{m}| \leq k \right\} \quad \text{Dim}(\mathcal{P}_k^e) = \frac{1}{d!} \prod_{i=1}^d (k + i)$$

- Les espaces \mathcal{Q}_k^e avec $k \in \mathbb{N}$ et $k < \infty$:

$$\mathcal{Q}_k^e \equiv \left\{ \mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}, \quad \mathbf{m} \subset \mathbb{N}^d, \quad \text{pour } i = 1, \dots, d \quad 0 \leq m_i \leq k \right\} \quad \text{Dim}(\mathcal{Q}_k^e) = (k + 1)^d$$

Remarque 1.0.1. Dans le cadre général, \mathcal{D}^e est un ensemble de Nve formes linéaires $\Psi_d(p)$ indépendantes définies sur l'espace de fonctions \mathcal{P}^e . Dans le contexte des EF de Lagrange, les formes linéaires sont données par

$$\begin{aligned}\Psi_d &: \mathcal{P}^e &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow p(\mathbf{x}_d)\end{aligned}$$

et on peut alors identifier la forme linéaire Ψ_d directement avec le point \mathbf{x}_d . Pour les éléments finis d'Hermite on a deux familles de formes linéaires

$$\begin{aligned}\Psi_d^0 &: \mathcal{P}^e &\longrightarrow \mathbb{R} & \Psi_d^1 &: \mathcal{P}^e &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\longrightarrow p(\mathbf{x}_d) & & p &\longrightarrow \nabla p(\mathbf{x}_d)\end{aligned}$$

$$\Psi_d^0(p) = p(\mathbf{x}_d) \quad \text{et} \quad \Psi_d^1(p) = \nabla p(\mathbf{x}_d)$$

Propriété 1.0.1 (Unisolvance). On dit que \mathcal{D}^e est \mathcal{P}^e -unisolvant Ssi pour des réels $\alpha_1^e, \dots, \alpha_{\text{Nve}}^e$ donnés, il existe un unique élément $p_\alpha^e \in \mathcal{P}^e$ tel que

$$p_\alpha^e(\mathbf{x}_\ell^e) = \alpha_\ell^e \quad \text{pour} \quad \ell = 1, \dots, \text{Nve}$$

Ce qui est équivalent à dire que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^e : \mathcal{P}^e &\longrightarrow \mathbb{R}^{\text{Nve}} \\ p &\longrightarrow (p(\mathbf{x}_\ell)), \quad \ell = 1, \dots, \text{Nve} \end{aligned}$$

est bijective.

Propriété 1.0.2 (Unisolvance de la trace : Continuité). On décompose le bord de l'élément e en un ensemble de faces ∂e_f . On note $\mathcal{D}_f^e \subset \mathcal{D}^e$ l'ensemble des points $\mathbf{x}_d \in \partial e_f$. Chaque face f est définie par une équation (polynomiale) de la forme $f(\mathbf{x}) = 0$. Enfin, définissons par \mathcal{P}_f^e l'ensemble des fonctions qui sont les traces sur ∂e_f de fonctions de \mathcal{P}^e .

$$\partial e = \bigcup_{f=1}^{N_f} \partial e_f \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial e_f$$

On a l'unisolvance de la trace Ssi $\forall f$, \mathcal{D}_f^e est \mathcal{P}_f^e -unisolvant

Définition 1.0.1 (Base Canonique de \mathcal{P}^e). Les fonctions canoniques $\varphi_\ell^e(\mathbf{x})$ de l'élément fini $(\mathcal{G}^e, \mathcal{D}^e, \mathcal{P}^e)$ sont définies par

$$\varphi_\ell^e(\mathbf{x}_{\ell'}^e) = \delta_{\ell\ell'} \quad 1 \leq \ell, \ell' \leq \text{Nve}$$

Les fonctions $\varphi_\ell^e(\mathbf{x})$ forment la base canonique de \mathcal{P}^e

Définition 1.0.2 (Interpolation). Considérons une fonction $F(\mathbf{x})$ définie sur l'élément e . On note $\Pi_e F(\mathbf{x})$ interpolé de F sur e défini par

$$\Pi_e F(\mathbf{x}) \equiv F^e(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{\text{Nve}} F(\mathbf{x}_\ell^e) \varphi_\ell^e(\mathbf{x})$$

Définition 1.0.3 (Erreur d'interpolation sur \mathcal{P}^e). Considérons une fonction $F(\mathbf{x})$ définie sur l'élément e . On définit l'erreur d'interpolation $\mathcal{E}^e(F)$, pour une norme donnée $\mathcal{H}(e)$, par

$$\mathcal{E}^e(F) = \|F - \Pi_e F\|_{\mathcal{H}(e)}$$

Pour la norme $L^2(e)$ on a

$$\mathcal{E}^e(F) = \|F - \Pi_e F\|_{L^2(e)} = \left(\int_e \left| F(\mathbf{x}) - \Pi_e F(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.0.4 (Espace fonctionnel local $\mathcal{V}_h(e)$). L'espace fonctionnel $\mathcal{V}_h(e)$ est engendré par les fonctions φ_ℓ^e de la base canonique. Pour tout $\mathbf{v}_h^e \in \mathcal{V}_h(e)$ on a

$$\mathbf{v}_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{\text{Nve}} \mathbf{v}_\ell^e \varphi_\ell^e(\mathbf{x})$$

Les \mathbf{v}_ℓ^e sont les "coordonnées" de \mathbf{v}_h^e dans la base canonique.

Définition 1.0.5 (Problème Variationnel local). Trouver $u_h^e \in \mathcal{V}_h(e)$ tq

$$\int_e \mathcal{A}(u_h^e, v_h^e) d\mathbf{x} = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, v_h^e) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, v_h^e) dS, \quad \forall v_h^e \in \mathcal{V}_h(e) \quad (1.1)$$

Ce qui est équivalent, lorsque $\mathcal{A}(u, v)$ est linéaire par rapport à v , à trouver $u_h \in \mathcal{V}_h(e)$ tq

$$\int_e \mathcal{A}(u_h, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x} = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) dS, \quad \ell = 1, \dots, N_{ve} \quad (1.2)$$

Cette formulation reste valide même lorsque $\mathcal{A}(u, v)$ est nonlinéaire par rapport à u .

Exercice 1.0.1. Montrez que lorsque $\mathcal{A}(u, v)$ est linéaire par rapport à v , la formule (1.1) implique (1.2) et vice versa.

□

En toute généralité, le système local (1.2) est un système algébrique (linéaire ou nonlinéaire) dont le vecteur des variables est

$$\underline{\mathbf{u}}^e = (u_1^e, \dots, u_\ell^e, \dots, u_{N_{ve}}^e)^T \in \mathbb{R}^{N_{ve}}. \quad (1.3)$$

Dans le cas particulier d'une forme linéaire par rapport à u , le système algébrique local est linéaire $N_{ve} \times N_{ve}$ de la forme

$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e \underline{\mathbf{u}}^e = \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e \quad (1.4)$$

avec comme composantes $\hat{A}_{\ell'\ell}^e$ de la matrice $\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e$

$$\hat{A}_{\ell'\ell}^e = \int_e \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (1.5)$$

et les composantes \hat{b}_ℓ^e du vecteur $\underline{\hat{\mathbf{b}}}^e$

$$\hat{b}_\ell^e = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) dS \quad (1.6)$$

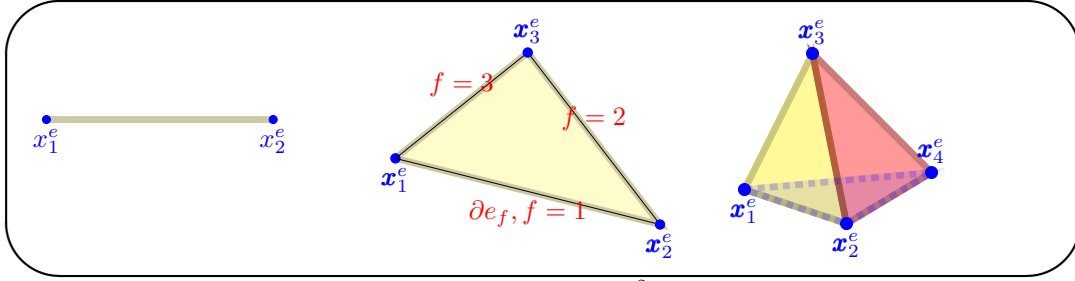
Remarque 1.0.2.

- En général, on réserve le terme "éléments finis (FE)" pour les cas où on vérifie à la fois l'unisolvance et l'unisolvance de la trace.
- Lorsque la propriété d'unisolvance est vérifiée, mais pas celle de l'unisolvance de la trace, on utilise plutôt la terminologie de "Galerkin Discontinue (DG)"

Chapter 2

Eléments finis P_k -Lagrange.

Dans ce contexte, \mathcal{P}^e est l'espace des polynômes de degré $\leq k$. (Base complète) C'est le cadre des éléments géométriques qui sont des d -simplexes : segments en 1D, triangles en 2D, tétraèdres en 3D ... La construction, des différentes bases ca sera faite de manière à satisfaire la contrainte d'Unisolvance dans e et l'Unisolvance de la trace sur chaque élément du bord ∂e_f . Les ∂e_f sont des points en 1D, des segments en 2D, des faces en 3D,...



Dans ce contexte, l'erreur d'Interpolation, en norme $L^2(e)$, est de l'ordre $k + 1$:

$$\mathcal{E}^e(F) = \|F - \Pi_e F\|_{L^2(e)} = \left(\int_e \left(F(\mathbf{x}) - \Pi_e F(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} = O(h_e^{k+1})$$

avec h_e une mesure de élément e . Par exemple h_e peut être le rayon du cercle inscrit dans e .

2.1 Eléments finis P_k -Lagrange en 1D.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ x_1^e \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ x_2^e \end{array} \quad d = 1. \quad e \equiv [x_1^e, x_2^e] \quad \text{ou bien} \quad [x_2^e, x_1^e] \longrightarrow \mathcal{G}^e = \{x_1^e, x_2^e\}$$

2.1.1 Eléments finis P_1 -Lagrange 1D

$$\mathcal{P}^e \equiv P_1 = \{1, x\}, \quad \mathcal{D}^e = \{\mathbf{x}_1^e = x_1^e, \mathbf{x}_2^e = x_2^e\}.$$

Avec ce choix des points d'interpolation, on vérifie les propriétés d'unisolvance et d'unisolvance de la trace. On a alors

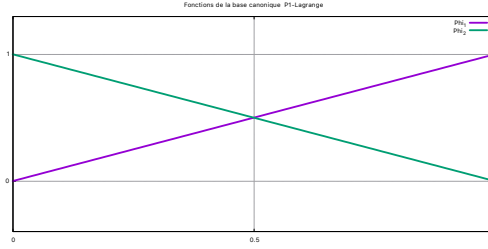
$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \mathbf{x}_1^e \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \mathbf{x}_2^e \end{array} \quad \varphi_1^{p1}(x) = \lambda_1(x) = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \quad \text{et} \quad \varphi_2^{p1}(x) = \lambda_2(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}$$

Remarque

$$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1$$

Gradient des fonctions de la base canonique

$$\frac{\partial \varphi_1^{p1}}{\partial x} \equiv \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{1}{x_1^e - x_2^e} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_2^{p1}}{\partial x} \equiv \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e}$$



Exercice 2.1.1. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) + u(x)v(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(x, v) = xv(x)$$

Pour les éléments finis P_1 -Lagrange 1D, construire analytiquement la matrice et le second membre local pour un élément qui ne touche pas la frontière de Ω_h , défini par

$$x_1^e = 2, \quad x_2^e = 3$$

Faire le même calcul cette fois pour

$$x_1^e = 3, \quad x_2^e = 2$$

Qu'en déduisez-vous?

□

Solution:

$$\hat{\underline{\mathbf{A}}}^e \underline{\mathbf{u}}^e = \hat{\underline{\mathbf{b}}}^e, \quad \hat{A}_{\ell'\ell}^e = \int_e \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad \hat{b}_\ell^e = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x}$$

On introduit alors le changement de variable suivant

$$\mathbf{x}(\lambda_1) = \lambda_1 \mathbf{x}_1^e + (1 - \lambda_1) \mathbf{x}_2^e \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda_1} = \mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e \quad \text{et} \quad \lambda_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^e}{\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e}$$

On rappelle aussi que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Alors

$$\hat{A}_{\ell'\ell}^e = \int_{\mathbf{x}_2^e}^{\mathbf{x}_1^e} \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\lambda_1$$

et

$$\hat{b}_\ell^e = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x} = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\lambda_1$$

Dans le présent context on a $\varphi_\ell^e = \varphi_\ell^{p1} = \lambda_\ell$ et $\frac{d\varphi_1^{p1}}{dx} = -\frac{d\varphi_2^{p1}}{dx} = \frac{1}{\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11}^e &= \frac{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|}{(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e)^2} + |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \lambda_1^2 d\lambda_1 &= \frac{1}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} + \frac{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|}{3} \\ \hat{A}_{22}^e &= \frac{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|}{(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e)^2} + |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 (1 - \lambda_1)^2 d\lambda_1 &= \frac{1}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} + \frac{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|}{3} \\ \hat{A}_{12}^e = \hat{A}_{12}^e &= -\frac{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|}{(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e)^2} + |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \lambda_1 (1 - \lambda_1) d\lambda_1 &= \frac{-1}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} + \frac{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|}{6} \\ \hat{b}_1^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 (\lambda_1^2 \mathbf{x}_1^e + \lambda_1 (1 - \lambda_1) \mathbf{x}_2^e) d\lambda_1 &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \frac{2\mathbf{x}_1^e + \mathbf{x}_2^e}{6} \\ \hat{b}_2^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 (\lambda_1 (1 - \lambda_1) \mathbf{x}_1^e + (1 - \lambda_1)^2 \mathbf{x}_2^e) d\lambda_1 &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \frac{\mathbf{x}_1^e + 2\mathbf{x}_2^e}{6} \end{aligned}$$

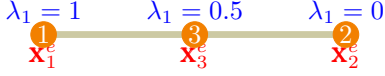
$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -5/6 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 8/6 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 8/6 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

L'ordre entre \mathbf{x}_1^e et \mathbf{x}_2^e ne change pas le résultat final de la matrice $\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e$. Néanmoins il faut au moins que $\mathbf{x}_1^e \neq \mathbf{x}_2^e$.

Fin

2.1.2 Éléments finis P₂-Lagrange 1D

$$\mathcal{P}^e \equiv \mathcal{P}_2 = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e = x_1^e, \mathbf{x}_2^e = x_2^e, \mathbf{x}_3^e = \frac{x_1^e + x_2^e}{2} \right\}.$$



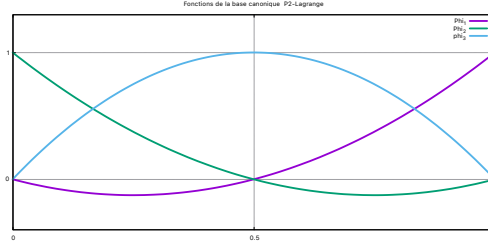
On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \varphi_1^{p_2}(x) &= \lambda_1(x)(2\lambda_1(x) - 1) && \equiv \hat{\varphi}_1^{p_2}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\ \varphi_2^{p_2}(x) &= \lambda_1(x)(2\lambda_1(x) - 1) && \equiv \hat{\varphi}_2^{p_2}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\ \varphi_3^{p_2}(x) &= 4\lambda_1(x)\lambda_2(x) && \equiv \hat{\varphi}_3^{p_2}(\lambda_1, \lambda_2) = 4\lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

Et les gradients

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^{p_2}}{\partial x} &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(2\lambda_1 - 1) + \lambda_1(2\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(4\lambda_1 - 1) = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(4\lambda_2 - 3) \\ \frac{\partial \varphi_2^{p_2}}{\partial x} &= \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(2\lambda_2 - 1) + \lambda_2(2\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(4\lambda_1 - 3) = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(4\lambda_2 - 1) \\ \frac{\partial \varphi_3^{p_2}}{\partial x} &= 4\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\lambda_2 + 4\lambda_1\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = -4\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(2\lambda_1 - 1) = -4\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(2\lambda_2 - 1) \end{aligned}$$

Dans la dernière relation on utilise le fait que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et $\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{d\lambda_2}{dx}$.



Exercice 2.1.2. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(v) = (x - 1)v(x)$$

Pour les éléments finis P₂-Lagrange 1D, construire analytiquement la matrice et le second membre local pour un élément qui ne touche pas la frontière de Ω_h , défini par

$$x_1^e = 2, \quad x_2^e = 3$$

Faire le même calcul cette fois pour

$$x_1^e = 3, \quad x_2^e = 2$$

Qu'en déduisez-vous?

□

Solution:

$$\widehat{\underline{\underline{A}}}^e \underline{\underline{u}}^e = \widehat{\underline{\underline{b}}}^e, \quad \widehat{A}_{\ell'\ell}^e = \int_e \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad \widehat{b}_\ell^e = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x}$$

On introduit alors les deux changements de variable suivant

$$\mathbf{x}(\lambda_1) = \lambda_1 \mathbf{x}_1^e + (1 - \lambda_1) \mathbf{x}_2^e \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda_1} = \mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e \quad \text{et} \quad \lambda_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^e}{\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e}$$

et

$$\mathbf{x}(\lambda_2) = \lambda_2 \mathbf{x}_2^e + (1 - \lambda_2) \mathbf{x}_1^e \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda_2} = \mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e \quad \text{et} \quad \lambda_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^e}{\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e}$$

Alors

$$\widehat{A}_{\ell'\ell}^e = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\lambda_1 = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\lambda_2$$

et

$$\widehat{b}_\ell^e = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\lambda_1 = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\lambda_2$$

Suivant la convenance on peut utiliser l'intégration dans l'élément de référence soit par rapport à λ_1 , soit par rapport à λ_2 . Dans le présent contexte, les fonctions $\varphi_\ell^e = \varphi_\ell^{p2}$ (pour $\ell = 1, 2, 3$) s'expriment en fonction des λ_1 et λ_2 avec $\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{d\lambda_2}{dx} = \frac{1}{\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{11}^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right)^2 (4\lambda_1 - 1)^2 d\lambda_1 = \frac{1}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \int_0^1 (4\lambda_1 - 1)^2 d\lambda_1 \\ &= \left[\frac{(4\lambda_1 - 1)^3}{12} \right]_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=1} = \frac{27 - 1}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} = \frac{7}{3} \frac{1}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \\ \widehat{A}_{22}^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right)^2 (4\lambda_2 - 1)^2 d\lambda_2 = \widehat{A}_{11}^e \\ \widehat{A}_{33}^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 16 \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right)^2 (2\lambda_1 - 1)^2 d\lambda_1 = \frac{16}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \int_0^1 (2\lambda_1 - 1)^2 d\lambda_1 \\ &= 16 \left[\frac{(2\lambda_1 - 1)^3}{6} \right]_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=1} = 16 \frac{1 - 1 + 1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \frac{1}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \\ \widehat{A}_{12}^e = \widehat{A}_{21}^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right)^2 (4\lambda_1 - 1)(4\lambda_1 - 3) d\lambda_1 = \frac{1}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \int_0^1 (16\lambda_1^2 - 16\lambda_1 + 3) d\lambda_1 \\ &= \frac{\frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 3}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{\frac{32 - 48 + 18}{6}}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{\frac{2}{6}}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{1}{3|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \\ \widehat{A}_{13}^e = \widehat{A}_{31}^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 -4 \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right)^2 (2\lambda_1 - 1)(4\lambda_1 - 1) d\lambda_1 = \frac{-4}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \int_0^1 (8\lambda_1^2 - 6\lambda_1 + 1) d\lambda_1 \\ &= \frac{-4 \left(\frac{8}{3} - \frac{6}{2} + 1 \right)}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{-4 \left(\frac{16 - 18 + 6}{6} \right)}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{-4 \left(\frac{4}{6} \right)}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{-8}{3|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \\ \widehat{A}_{23}^e = \widehat{A}_{32}^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 -4 \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right)^2 (2\lambda_1 - 1)(4\lambda_1 - 3) d\lambda_1 = \frac{-4}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \int_0^1 (8\lambda_1^2 - 10\lambda_1 + 3) d\lambda_1 \\ &= \frac{-4 \left(\frac{8}{3} - \frac{10}{2} + 3 \right)}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{-4 \left(\frac{16 - 30 + 18}{6} \right)}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{-4 \left(\frac{4}{6} \right)}{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} = \frac{-8}{3|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|} \end{aligned}$$

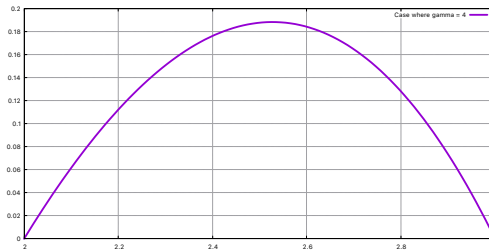
$$\begin{aligned}
\widehat{b}_1^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \left(\lambda_1 (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \mathbf{x}_2^e - 1 \right) \lambda_1 (2\lambda_1 - 1) d\lambda_1 \\
&= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \lambda_1 \left(2\lambda_1^2 (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \lambda_1 (3\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 2) - \mathbf{x}_2^e + 1 \right) d\lambda_1 \\
&= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \left(2\lambda_1^3 (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \lambda_1^2 (3\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 2) - \lambda_1 (\mathbf{x}_2^e - 1) \right) d\lambda_1 \\
&= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \left(\frac{1}{2} (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \frac{1}{3} (3\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 2) - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_2^e - 1) \right) \\
&= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \frac{3(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + 2(3\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 2) - 3(\mathbf{x}_2^e - 1)}{6} = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \frac{\mathbf{x}_1^e - 1}{6} \\
\widehat{b}_2^e &= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 (\lambda_2 (\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) + \mathbf{x}_1^e) \lambda_2 (2\lambda_2 - 1) d\lambda_2 = |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \frac{\mathbf{x}_2^e - 1}{6} \\
\widehat{b}_3^e &= -4 |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \left(\lambda_1 (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \mathbf{x}_2^e - 1 \right) \lambda_1 (\lambda_1 - 1) d\lambda_1 \\
&= -4 |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \lambda_1 \left(\lambda_1^2 (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \lambda_1 (2\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 1) - (\mathbf{x}_2^e - 1) \right) d\lambda_1 \\
&= -4 |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \int_0^1 \left(\lambda_1^3 (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \lambda_1^2 (2\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 1) - \lambda_1 (\mathbf{x}_2^e - 1) \right) d\lambda_1 \\
&= -4 |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \left(\frac{1}{4} (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + \frac{1}{3} (2\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 1) - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_2^e - 1) \right) \\
&= -\frac{|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e|}{3} \left(3(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e) + 4(2\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e - 1) - 6(\mathbf{x}_2^e - 1) \right) \\
&= |\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e| \frac{\mathbf{x}_1^e + \mathbf{x}_2^e - 2}{3} \\
\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e &= \begin{pmatrix} 7/3 & 1/3 & -8/3 \\ 1/3 & 7/3 & -8/3 \\ -8/3 & -8/3 & 16/3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \widehat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 2/6 \\ 1/6 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'ordre entre \mathbf{x}_1^e et \mathbf{x}_2^e ne change pas le résultat final de la matrice $\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e$. Néanmoins il faut au moins que $\mathbf{x}_1^e \neq \mathbf{x}_2^e$. On suppose maintenant que la solution exacte est de la forme

$$u(x) = -\frac{1}{6}(x-3)(x^2 - \gamma) \quad \text{vérifiant, pour tout } \gamma \text{ donné,} \quad -\frac{d^2 u}{dx^2} = x - 1$$

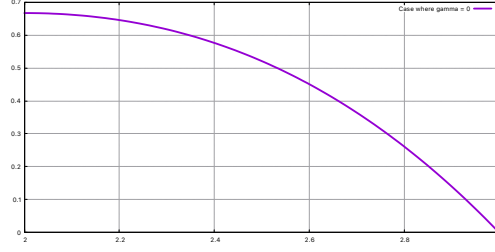
Pour $\gamma = 4$ on trouve : $u(2) = 0$, $u(3) = 0$ qui sont des conditions de Dirichlet homogène au bord de l'élément. De plus,

$$u\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{48} = \frac{3}{16} = \frac{\widehat{b}_3^e}{\widehat{A}_{33}^e}$$



Pour $\gamma = 0$ on trouve $u(3) = 0$ (condition de Dirichlet homogène), $\frac{du}{dx}(2) = 0$ (condition de Neumann homogène). De plus on a

$$u(2) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad u\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{48}$$



Fin

2.1.3 Éléments finis P_k -Lagrange 1D

$$\mathcal{P}^e \equiv P_k = \{1, x, x^2, \dots, x^k\},$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e = x_1^e, \quad \mathbf{x}_2^e = x_2^e, \quad \mathbf{x}_\ell^e = x_1^e + (\ell - 2) \frac{x_2^e - x_1^e}{k} \text{ pour } 3 \leq \ell \leq k + 1 \right\}.$$

Ce qui se met aussi sous la forme

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{1,1} = 1, \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{1,\ell} = 1 - \frac{(\ell-2)}{k} \text{ pour } 3 \leq \ell \leq k + 1 \right\}. \text{ Au final}$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{1,1} = 1, \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{1,\ell} = \frac{m(\ell)}{k} \text{ pour } 1 \leq m(\ell) \leq k - 1 \right\}. \text{ Avec } m(\ell) = k - \ell + 2.$$

De même

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{2,1} = 0, \quad \lambda_{2,2} = 1, \quad \lambda_{2,\ell} = \frac{n(\ell)}{k} \text{ pour } 1 \leq n(\ell) \leq k - 1 \right\}. \text{ Avec } n(\ell) = \ell - 2.$$

Exemple pour $k = 4$:

$$\begin{array}{cccccc} & \lambda_1 = 1 & & \lambda_1 = \frac{3}{4} & & \lambda_1 = \frac{2}{4} & & \lambda_1 = \frac{1}{4} & & \lambda_1 = 0 \\ \text{---} & \textcircled{1} & \text{---} & \textcircled{3} & \text{---} & \textcircled{4} & \text{---} & \textcircled{5} & \text{---} & \textcircled{2} \\ & \mathbf{x}_1^e & & \mathbf{x}_3^e & & \mathbf{x}_4^e & & \mathbf{x}_5^e & & \mathbf{x}_2^e \end{array}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi_1^{pk}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_1^{pk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \prod_{m=1}^{k-1} \left(\lambda_1 - \frac{m}{k} \right)}{\lambda_{1,1} \prod_{m=1}^{k-1} \left(\lambda_{1,1} - \frac{m}{k} \right)} = \beta_1 \lambda_1 \prod_{m=1}^{k-1} (k\lambda_1 - m) \\ \varphi_2^{pk}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_2^{pk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2 \prod_{n=1}^{k-1} \left(\lambda_2 - \frac{n}{k} \right)}{\lambda_{2,2} \prod_{n=1}^{k-1} \left(\lambda_{2,2} - \frac{n}{k} \right)} = \beta_2 \lambda_2 \prod_{n=1}^{k-1} (k\lambda_2 - n) \end{aligned}$$

et pour $3 \leq \ell \leq k + 1$ on a

$$\varphi_\ell^{pk}(x) \equiv \widehat{\varphi}_\ell^{pk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} \left(\lambda_1 - \frac{m}{k} \right)}{\lambda_{1,\ell} \lambda_{2,\ell} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} \left(\lambda_{1,\ell} - \frac{m}{k} \right)} = \beta_\ell \lambda_1 \lambda_2 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} (k\lambda_1 - m)$$

avec

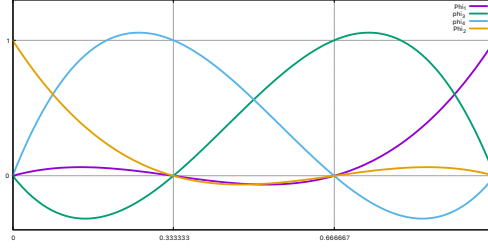
$$\beta_1 = \frac{1}{(k-1)!}, \quad \beta_2 = \frac{1}{(k-1)!}, \quad \beta_\ell = \frac{k^2}{m(\ell)n(\ell) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} (m(\ell) - m)}$$

En effet $\lambda_1(x_\ell) = \frac{k-\ell+2}{k} = \frac{m(\ell)}{k}$ et $\lambda_2(x_\ell) = \frac{\ell-2}{k} = \frac{n(\ell)}{k}$

Exercice 2.1.3. Faire le calcul explicite des $\varphi_\ell^{p3}(x)$ en fonction de $\lambda_1 \equiv \lambda_1(x)$ et $\lambda_2 \equiv \lambda_2(x)$.
Calculer les gradients $\frac{\partial \varphi_\ell^{p3}}{\partial x}(x)$ en fonction de x_1^e, x_2^e $\lambda_1 \equiv \lambda_1(x)$ et $\lambda_2 \equiv \lambda_2(x)$.
 \square

Réponse 1.

$$\begin{aligned} \varphi_1^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_1^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\lambda_1}{2} (3\lambda_1 - 1) (3\lambda_1 - 2) \\ \varphi_2^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_2^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\lambda_2}{2} (3\lambda_2 - 2) (3\lambda_2 - 1) \\ \varphi_3^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_3^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{9}{2} \lambda_1 \lambda_2 (3\lambda_1 - 1) \\ \varphi_4^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_4^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{9}{2} \lambda_1 \lambda_2 (3\lambda_2 - 1) \end{aligned}$$



2.1.4 Intégration numérique.

Changement de variable :

$$\begin{aligned} \lambda_1 : e &\longrightarrow \widehat{e} = [0, 1] & x : \widehat{e} &\longrightarrow e \\ x &\longrightarrow \lambda_1(x) & \text{et} & \lambda_1 &\longrightarrow x(\lambda_1) = \lambda_1 x_1^e + (1 - \lambda_1) x_2^e \\ & & & &= \lambda_1 x_1^e + \lambda_2 x_2^e \end{aligned}$$

En utilisant ce changement de variable, pour toute fonction intégrable $F(x)$ sur e , on a

$$\int_e F(x) d\mathbf{x} = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}| F(x(\lambda_1)) d\lambda_1 = \int_0^1 \left| \frac{dx}{d\lambda_1} \right| F(x(\lambda_1)) d\lambda_1$$

Ce changement de variable restera valide pour tous les éléments donnés par $\mathcal{G}^e = \{x_1^e, x_2^e\}$.
On considère N_g points de quadratures $\lambda_{1,g}$ avec les poids ω_g sur l'élément de référence \widehat{e} . Alors

$$\int_e F(x) d\mathbf{x} = |x_1^e - x_2^e| \int_0^1 F(x(\lambda_1)) d\lambda_1 \simeq |x_1^e - x_2^e| \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g F(x(\lambda_{1,g})) \quad (2.1)$$

Pour des fonctions $F(x(\lambda_1))$ polynomiales (en λ_1), on peut choisir les points de quadratures pour lesquels l'intégration numérique est exacte. En pratique, il suffit d'utiliser des points de quadrature pour lesquels l'erreur d'intégration numérique est plus petite que l'erreur d'interpolation.

Formules de quadrature 1D sur [0,1]

$$\int_0^1 F(\xi) d\xi \simeq \sum_{g=1}^{Ng} \omega_g F(\xi_g) \quad \xi = 0 \bullet \text{---} \bullet \xi = 1$$

$$Ng = 1, \quad \xi_1 = 0.5, \quad \omega_1 = 1 \quad \xi = 0 \bullet \text{---} \textcircled{1} \text{---} \bullet \xi = 1$$

$$Ng = 2, \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, & \omega_1 = \frac{1}{2} \\ \xi_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}, & \omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \xi = 0 \bullet \text{---} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \bullet \xi = 1$$

$$Ng = 3, \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, & \omega_1 = \frac{5}{18} \\ \xi_2 = \frac{1}{2}, & \omega_2 = \frac{8}{18} \\ \xi_3 = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, & \omega_3 = \frac{5}{18} \end{cases} \quad \xi = 0 \bullet \text{---} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \bullet \xi = 1$$

Exercice 2.1.4. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(x, v) = (x-1)v(x)$$

- Pour les éléments finis P₂-Lagrange 1D, écrire un programme *scilab* pour construire la matrice et le second membre local pour un élément (qui ne touche pas la frontière de Ω_h), défini par des valeurs données x_1^e et x_2^e . On utilisera différentes formules de quadrature pour évaluer les intégrales. Valider votre programme en utilisant les données suivantes

$$x_1^e = 2, \quad x_2^e = 3$$

Ng=1

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} 1. & -1. & 0. \\ -1. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Ng=2 et Ng=3

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} 2.3333333 & 0.3333333 & -2.6666667 \\ 0.3333333 & 2.3333333 & -2.6666667 \\ -2.6666667 & -2.6666667 & 5.3333333 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.1666667 \\ 0.3333333 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$$

Faire le même calcul cette fois pour

$$x_1^e = 3, \quad x_2^e = 2$$

Ng=2 et Ng=3

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} 2.3333333 & 0.3333333 & -2.6666667 \\ 0.3333333 & 2.3333333 & -2.6666667 \\ -2.6666667 & -2.6666667 & 5.3333333 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.3333333 \\ 0.1666667 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$$

Qu'en déduisez-vous?

- Faire le même travail pour les éléments finis P₁-Lagrange 1D.
Ng=2 et Ng=3

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} 1. & -1. \\ -1. & 1. \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.6666667 \\ 0.8333333 \end{pmatrix}$$

- Faire le même travail dans le cadre général des éléments finis P_3 -Lagrange 1D, (P_k -Lagrange 1D avec k comme paramètre de votre programme).

$N_g = 2$

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} 2.6875 & 0.6875 & -1.6875 & -1.6875 \\ 0.6875 & 2.6875 & -1.6875 & -1.6875 \\ -1.6875 & -1.6875 & 1.6875 & 1.6875 \\ -1.6875 & -1.6875 & 1.6875 & 1.6875 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.1666667 \\ 0.2083333 \\ 0.7500000 \\ 0.3750000 \end{pmatrix}$$

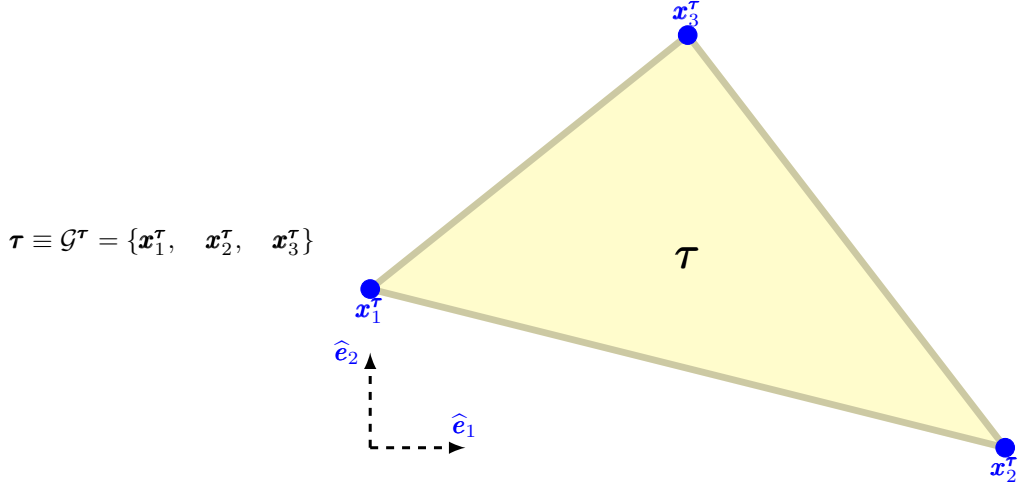
$N_g = 3$

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} 3.7 & -0.325 & 1.35 & -4.725 \\ -0.325 & 3.7 & -4.725 & 1.35 \\ 1.35 & -4.725 & 10.8 & -7.425 \\ -4.725 & 1.35 & -7.425 & 10.8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.1416667 \\ 0.2333333 \\ 0.6750000 \\ 0.4500000 \end{pmatrix}$$

- En comparant vos résultats avec les formules analytiques, que remarquez-vous quand vous utilisez une formule de quadrature à un point avec $k \geq 2$? Qu'en concluez-vous?

□

2.2 Eléments finis P_k -Lagrange 2D-triangle : $\tau \in \mathbb{R}^2$



$$\tau \equiv \mathcal{G}^\tau = \{x_1^\tau, x_2^\tau, x_3^\tau\}$$

Pour tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2$$

(\hat{e}_1, \hat{e}_2) est une base orthonormée de l'espace physique.

Les coordonnées Barycentriques : $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$ et $\lambda_3(\mathbf{x})$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^\tau) \times (\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau) \cdot \hat{e}_3}{(\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_2^\tau) \times (\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau) \cdot \hat{e}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau)}{\det(\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_2^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau)} \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3^\tau) \times (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) \cdot \hat{e}_3}{(\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) \times (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) \cdot \hat{e}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)}{\det(\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)} \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^\tau) \times (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau) \cdot \hat{e}_3}{(\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_1^\tau) \times (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau) \cdot \hat{e}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau)}{\det(\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_1^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau)} \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs $\mathbf{p} = p_1 \hat{e}_1 + p_2 \hat{e}_2$ et $\mathbf{q} = q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2$ la fonction $\det(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ est définie par

$$\det(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = p_1 q_2 - p_2 q_1$$

On vérifie alors que

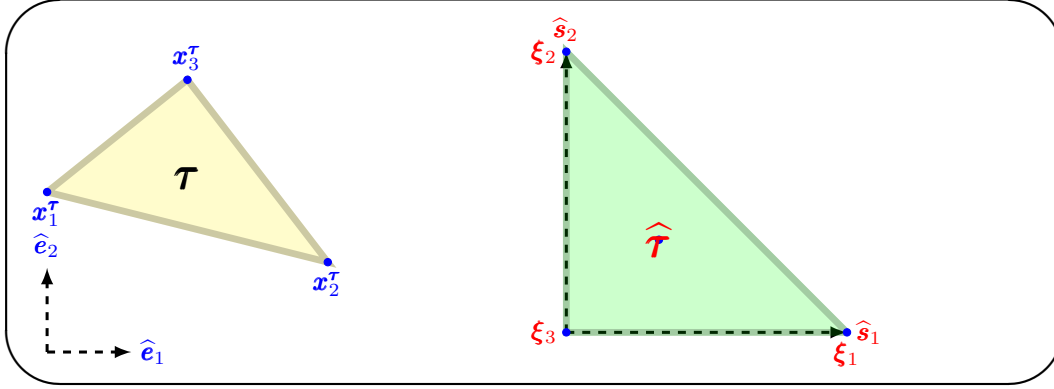
1. les $\lambda_k(\mathbf{x})$ sont des fonctions linéaires de \mathbf{x} .
2. $\lambda_k(\mathbf{x}_\ell) = \delta_{k\ell}$.
3. $\forall \mathbf{x} \in \tau, \lambda_k(\mathbf{x}) \geq 0$ et $\lambda_1(\mathbf{x}) + \lambda_2(\mathbf{x}) + \lambda_3(\mathbf{x}) = 1$

2.2.1 Intégration Numérique.

Le passage d'un élément τ vers l'élément de référence $\hat{\tau}$ s'exprime par le changement de variable :

$$\begin{aligned} \xi &: \tau \longrightarrow \hat{\tau} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{s}}_1 + \lambda_2(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{s}}_2 \end{aligned}$$

avec $(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2)$, une base orthonormée de l'espace de référence.



La transformation inverse $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ s'exprime par

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: \hat{\boldsymbol{\tau}} \longrightarrow \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\xi} &\longrightarrow \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_1 \mathbf{x}_1^\tau + \lambda_2 \mathbf{x}_2^\tau + \lambda_3 \mathbf{x}_3^\tau = \lambda_1 (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) + \lambda_2 (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) + \mathbf{x}_3^\tau \end{aligned}$$

avec $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. On peut vérifier que le jacobien \mathcal{J} est une constante.

$$\mathcal{J} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_1}; \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_2} \right) = \det (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)$$

Ce changement de variable permet d'évaluer les intégrales sur chaque élément $\boldsymbol{\tau}$ avec des points d'intégration sur l'élément de référence $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. En effet, pour toute fonction $F(\mathbf{x})$ on a

$$\int_{\boldsymbol{\tau}} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} |\mathcal{J}| F(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi} = |\mathcal{J}| \int_0^1 \int_0^{1-\lambda_1} F(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.2)$$

Exercice 2.2.1. L'aire $a_{\boldsymbol{\tau}}$ d'un triangle $\boldsymbol{\tau}$ est donnée par

$$a_{\boldsymbol{\tau}} = \int_{\boldsymbol{\tau}} 1 d\mathbf{x} \equiv \int_{\boldsymbol{\tau}} d\mathbf{x}$$

- Montrez que $|\mathcal{J}| = 2a_{\boldsymbol{\tau}}$ et en déduire que

$$a_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{2} |\det (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_1^\tau)| = \frac{1}{2} |\det (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_2^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau)| = \frac{1}{2} |\det (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)|$$

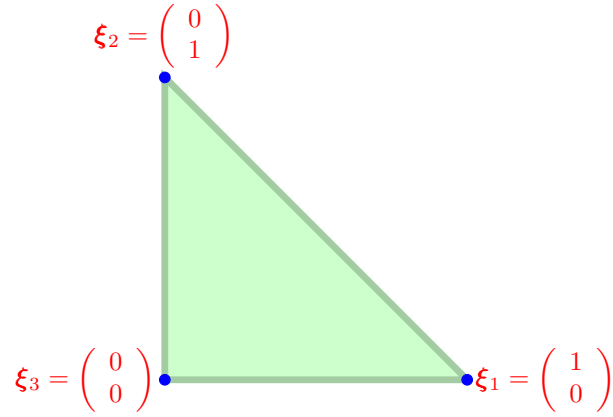
□

Formules de quadrature : 2D Triangles.

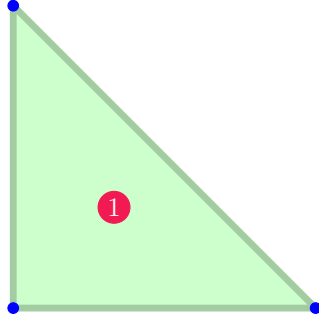
En général on utilise une quadrature pour évaluer les intégrales sur l'élément de référence :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\eta \simeq \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g f(\boldsymbol{\xi}_g), \quad \boldsymbol{\xi} = \xi \hat{\mathbf{e}}_1 + \eta \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Les poids ω_g et les points ξ_g de quadrature sur l'élément de référence.

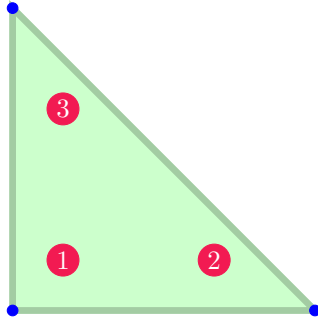


Formule de quadrature à un point, d'ordre deux $O(2)$: $N_g = 1$



$$\textcircled{1} \quad \omega_g = \frac{1}{2}, \quad \xi_g = \frac{1}{3} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

Formule de quadrature à trois points, d'ordre deux $O(2)$: $N_g = 3$

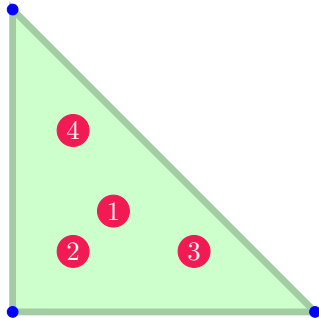


$$\textcircled{1} \quad \omega_g = \frac{1}{6}, \quad \xi_g = \frac{1}{6} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_g = \frac{1}{6}, \quad \xi_g = \frac{1}{6} (4\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{3} \quad \omega_g = \frac{1}{6}, \quad \xi_g = \frac{1}{6} (\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2)$$

Formule de quadrature à quatre points, d'ordre trois $O(3)$: $N_g = 3$



$$\textcircled{1} \quad \omega_g = \frac{-27}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{3} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_g = \frac{25}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{5} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

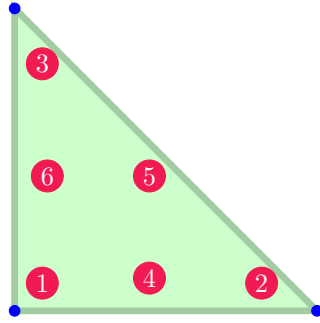
$$\textcircled{3} \quad \omega_g = \frac{25}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{5} (3\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{4} \quad \omega_g = \frac{25}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{5} (\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2)$$

Formule de quadrature à six points, d'ordre quatre $O(4)$: $N_g = 6$

$$\mu_1 = 0.11169079483905, \quad \mu_2 = 0.0549758718227661,$$

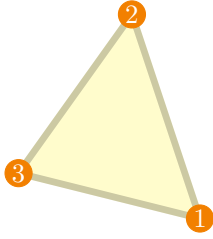
$$\alpha = 0.445948490915965, \quad \beta = 0.091576213509771.$$



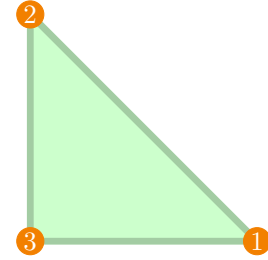
| | |
|---|--|
| ① | $\omega_g = \mu_1, \quad \xi_g = \beta \hat{\mathbf{e}}_1 + \beta \hat{\mathbf{e}}_2$ |
| ② | $\omega_g = \mu_1, \quad \xi_g = (1 - 2\beta) \hat{\mathbf{e}}_1 + \beta \hat{\mathbf{e}}_2$ |
| ③ | $\omega_g = \mu_1, \quad \xi_g = \beta \hat{\mathbf{e}}_1 + (1 - 2\beta) \hat{\mathbf{e}}_2$ |
| ④ | $\omega_g = \mu_2, \quad \xi_g = \alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + (1 - 2\alpha) \hat{\mathbf{e}}_2$ |
| ⑤ | $\omega_g = \mu_2, \quad \xi_g = \alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + \alpha \hat{\mathbf{e}}_2$ |
| ⑥ | $\omega_g = \mu_2, \quad \xi_g = (1 - 2\alpha) \hat{\mathbf{e}}_1 + \alpha \hat{\mathbf{e}}_2$ |

2.2.2 Éléments finis P_1 -Lagrange Triangles.

$$\mathcal{P}^e \equiv P_1 = \{1, x, y\}, \quad \mathcal{D}^e = \{\mathbf{x}_1^e = \mathbf{x}_1^e, \quad \mathbf{x}_2^e = \mathbf{x}_2^e, \quad \mathbf{x}_3^e = \mathbf{x}_3^e\}.$$



Nve = 3 et



$$\hat{\varphi}_1^{p1}(\xi(\mathbf{x})) = \lambda_1(\mathbf{x}(\xi)), \quad \hat{\varphi}_2^{p1}(\xi(\mathbf{x})) = \lambda_2(\mathbf{x}(\xi)), \quad \hat{\varphi}_3^{p1}(\xi(\mathbf{x})) = \lambda_3(\mathbf{x}(\xi)).$$

Exercice 2.2.2. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \sin(x) \cos(y) \mathbf{v}$$

- Pour les éléments finis P_1 -Lagrange, écrire programme *scilab* pour construire la matrice et le second membre local pour un élément (qui ne touche pas la frontière de Ω_h), défini par des valeurs données \mathbf{x}_1^e , \mathbf{x}_2^e et \mathbf{x}_3^e . On utilisera différentes formules de quadrature pour évaluer les intégrales. Valider votre programme en utilisant les données suivantes

$$\mathbf{x}_1^e = (0, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2^e = (2, 0)^T, \quad \mathbf{x}_3^e = (0, 2)^T$$

$$\hat{\mathbf{A}}^e = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8. & -2. & -2. \\ -2. & 5. & 1. \\ -2. & 1. & 5. \end{pmatrix}$$

- Faire le même travail pour les éléments finis P_2 -Lagrange 2D.

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 96. & 14. & 14. & -60. & -4. & -60. \\ 14. & 51. & -1. & -60. & 4.213\text{D-}10 & -4. \\ 14. & -1. & 51. & -4. & 4.213\text{D-}10 & -60. \\ -60. & -60. & -4. & 272. & -104. & 16. \\ -4. & 4.213\text{D-}10 & 4.213\text{D-}10 & -104. & 272. & -104. \\ -60. & -4. & -60. & 16. & -104. & 272. \end{pmatrix}$$

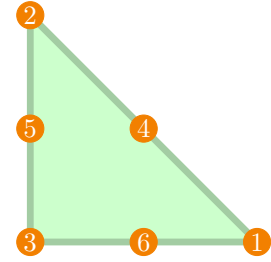
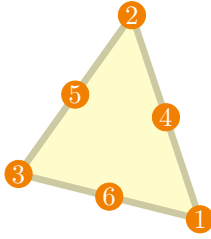
- En comparant vos résultats avec les formules analytiques de la matrice locale $\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e$, que remarquez-vous? Qu'en concluez-vous?

□

2.2.3 Éléments finis P_2 -Lagrange Triangles.

$$\mathcal{P}^e \setminus P_2 = \{1, \quad x, \quad y, \quad x^2, \quad xy, \quad y^2\},$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e = \mathbf{x}_1^e, \quad \mathbf{x}_2^e = \mathbf{x}_2^e, \quad \mathbf{x}_3^e = \mathbf{x}_3^e, \quad \mathbf{x}_4^e = \frac{\mathbf{x}_1^e + \mathbf{x}_2^e}{2}, \quad \mathbf{x}_5^e = \frac{\mathbf{x}_2^e + \mathbf{x}_3^e}{2}, \quad \mathbf{x}_6^e = \frac{\mathbf{x}_3^e + \mathbf{x}_1^e}{2} \right\}.$$



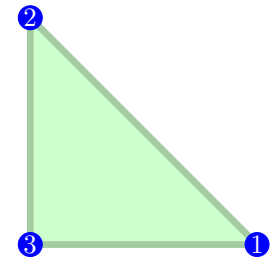
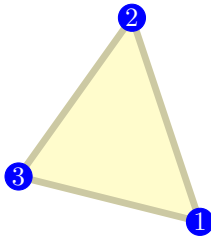
Nve = 6 et

$$\hat{\varphi}_1^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1), \quad \hat{\varphi}_2^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1), \quad \hat{\varphi}_3^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = \lambda_3(2\lambda_3 - 1).$$

$$\hat{\varphi}_4^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = 4\lambda_1\lambda_2, \quad \hat{\varphi}_5^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = 4\lambda_2\lambda_3, \quad \hat{\varphi}_6^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = 4\lambda_3\lambda_1.$$

2.2.4 Éléments finis P_K -Lagrange Triangles.

Les éléments triangles linéaires sont définis avec une numérotation locale des points géométriques



Les coordonnées barycentriques $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$, $\lambda_3(\mathbf{x})$ sont associées à cette numérotation locale des points géométriques.

Dans le contexte des éléments finis P_K -Lagrange sur des triangles linéaires on a $Nve = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$. Sur l'élément de référence, les points d'interpolation sont

$$\boldsymbol{\xi}_{\ell_1, \ell_2} = \frac{\ell_1}{K} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\ell_2}{K} \hat{\mathbf{e}}_2, \quad 0 \leq \ell_2 \leq K, \quad 0 \leq \ell_1 \leq K - \ell_2$$

Les fonctions de base PK-Lagrange $\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi})$ sont des polynômes de degré κ telsque

$$\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi}_{\ell'_1, \ell'_2}) = \delta_{\ell_1, \ell'_1} \delta_{\ell_2, \ell'_2}$$

Ce qui revient à dire que la fonction $\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi})$ prend la valeur 1 au point d'interpolation $\boldsymbol{\xi}_{\ell_1, \ell_2}$ et zéro sur tous les autres points d'interpolation. Comme les points d'interpolations sont tous différents, la fonction $\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi})$ ainsi définie est unique et l'ensemble de ces fonctions forment une base complète des polynômes de degré κ sur l'élément de référence.

On a plusieurs bijections entre l'ensemble des couples (ℓ_1, ℓ_2) et l'ensemble des entiers $\{1, \dots, Nve\}$.

$$\vartheta(\ell_1, \ell_2) = k \in \{1, \dots, Nve\}$$

Pour une bijection donnée, il est plus pratique d'utiliser l'équivalence

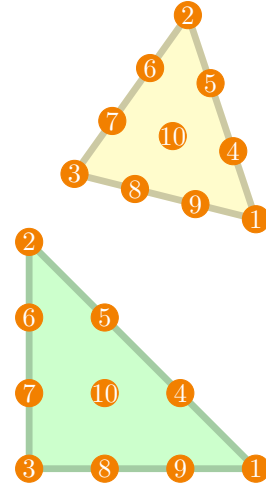
$$0 \leq \ell_2 \leq \kappa, \quad 0 \leq \ell_1 \leq \kappa - \ell_2, \quad \widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}) \quad k \equiv \vartheta(\ell_1, \ell_2) \in \{1, \dots, Nve\}$$

Les bijections choisies dans ce cours, pour définir les numérotations locales des points d'interpolations sont telles qu'il y a coïncidence avec la numérotation locale des points géométriques :

$$\vartheta(\kappa, 0) = 1, \quad \vartheta(0, \kappa) = 2, \quad \vartheta(0, 0) = 3$$

- Pour $\kappa = 3$ (Éléments finis P3-Lagrange), les couples sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ et $(0, 3)$ et la bijection choisie ici est

$$\begin{aligned} (0, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,0} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 0) = 3 \\ (1, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{1,0} = \frac{1}{3}(1\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(1, 0) = 8 \\ (2, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{2,0} = \frac{1}{3}(2\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(2, 0) = 9 \\ (3, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{3,0} = \frac{1}{3}(3\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(3, 0) = 1 \\ (0, 1) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,1} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 1\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 1) = 7 \\ (1, 1) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{1,1} = \frac{1}{3}(1\widehat{\mathbf{e}}_1 + 1\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(1, 1) = 10 \\ (2, 1) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{2,1} = \frac{1}{3}(2\widehat{\mathbf{e}}_1 + 1\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(2, 1) = 4 \\ (0, 2) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,2} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 2\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 2) = 6 \\ (1, 2) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{1,2} = \frac{1}{3}(1\widehat{\mathbf{e}}_1 + 2\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(1, 2) = 5 \\ (0, 3) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,3} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 3\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 3) = 2 \end{aligned}$$

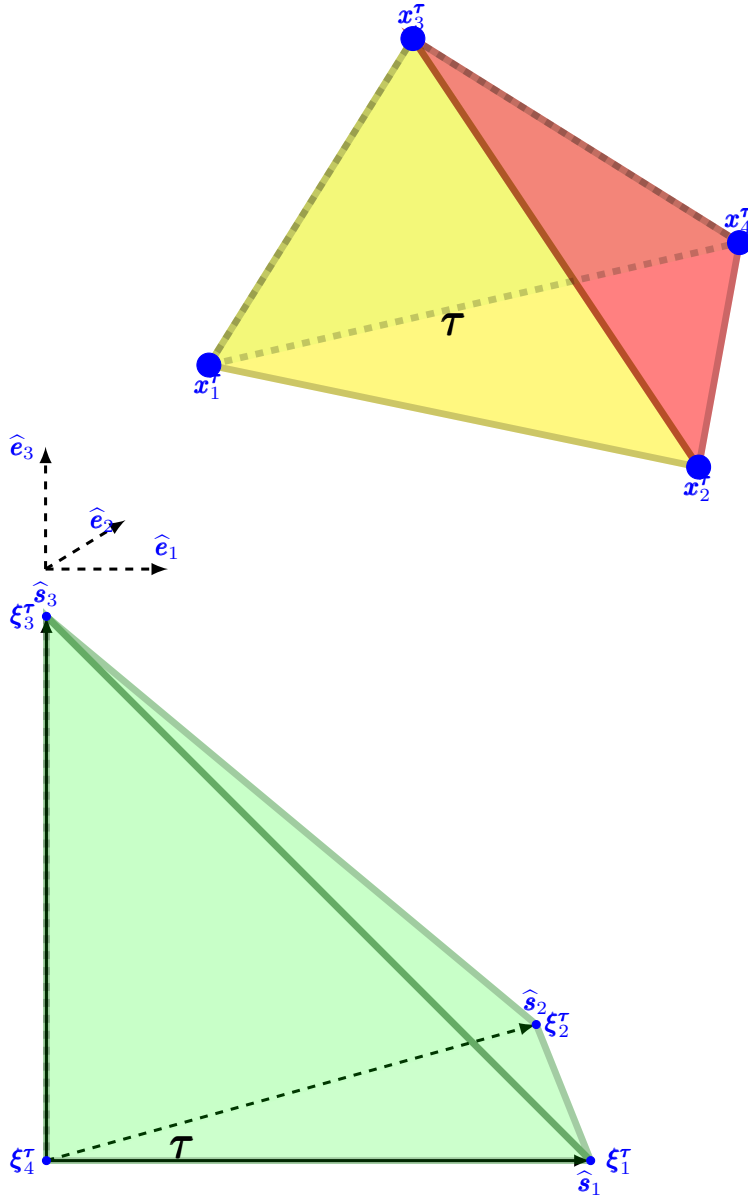


Nve = 10 et

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_1^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{\lambda_1(3\lambda_1 - 2)(3\lambda_1 - 1)}{2}, \\
\widehat{\varphi}_4^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{9\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1 - 1)}{2}, \\
\widehat{\varphi}_5^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{9\lambda_1\lambda_2(3\lambda_2 - 1)}{2}, \\
\widehat{\varphi}_2^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{\lambda_2(3\lambda_2 - 2)(3\lambda_2 - 1)}{2}, \\
\widehat{\varphi}_6^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= . \\
\widehat{\varphi}_7^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= , \\
\widehat{\varphi}_3^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{\lambda_3(3\lambda_3 - 2)(3\lambda_3 - 1)}{2}, \\
\widehat{\varphi}_8^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= , \\
\widehat{\varphi}_9^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= , \\
\widehat{\varphi}_{10}^{p3}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) &= .
\end{aligned}$$

2.2.5 Éléments finis P_1 -Lagrange 3D : $\tau \in \mathbb{R}^3$

$$\tau \equiv \mathcal{G}^\tau = \{x_1^\tau, \quad x_2^\tau, \quad x_3^\tau, \quad x_4^\tau\}$$



Pour tout point $\mathbf{x} \in \tau \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$(\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2, \widehat{\mathbf{e}}_3)$ est une base orthonormée de l'espace physique.

Les coordonnées Barycentriques : $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$, $\lambda_3(\mathbf{x})$ et $\lambda_4(\mathbf{x})$ sont définies par :

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^T) \times (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_2^T) \cdot (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_2^T)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2^T) \times (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_2^T) \cdot (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_2^T)} \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3^T) \times (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_3^T) \cdot (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_3^T)}{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3^T) \times (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_3^T) \cdot (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_3^T)} \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_4^T) \times (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_4^T) \cdot (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_4^T)}{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4^T) \times (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_4^T) \cdot (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_4^T)} \\ \lambda_4(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^T) \times (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_1^T) \cdot (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_1^T)}{(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1^T) \times (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_1^T) \cdot (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_1^T)}\end{aligned}$$

Les fonctions λ_k sont linéaires et vérifient les relations suivantes :

$$\lambda_1(\mathbf{x}) + \lambda_2(\mathbf{x}) + \lambda_3(\mathbf{x}) + \lambda_4(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_k(\mathbf{x}_p) = \delta_{kp}$$

Pour tout point $\mathbf{x} \in \widehat{\tau} \subset \mathbb{R}^3$, le changement de variable permettant de passer d'un élément donné à l'élément de référence est donnée par

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{e}}_2 + \lambda_3(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{e}}_3$$

De même, la transformation inverse s'écrit

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 + \lambda_4\mathbf{x}_4$$

Exercice 2.2.3. Montez que, pour un élément tétraédrique τ , $(\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \lambda_3(\mathbf{x}), \lambda_4(\mathbf{x}))$ est la base canonique de $P_1(\tau)$. On montrera que les fonctions $\lambda_k(\mathbf{x})$ sont linéaires, sont linéairement indépendants, vérifient $\lambda_k(\mathbf{x}_p) = \delta_{kp}$ avant de conclure

□

Exercice 2.2.4. On considère les fonctions de Base suivantes :

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_1^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_1(\mathbf{x})(2\lambda_1(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_2^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_2(\mathbf{x})(2\lambda_2(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_3^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_3(\mathbf{x})(2\lambda_3(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_4^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_4(\mathbf{x})(2\lambda_4(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_5^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_6^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_7^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_3(\mathbf{x})\lambda_4(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_8^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_4(\mathbf{x})\lambda_1(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_9^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_{10}^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_4(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Trouvez les points d'interpolation \mathbf{x}_ℓ pour lesquels les fonctions de base $\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_{10}$ définissent la base canonique de $P_2(\tau)$.

□

Chapter 3

Eléments finis : Assemblage par éléments.

3.1 Données Géométriques de Ω_h .

On considère un domaine Ω_h défini par un ensemble de points géométriques \mathcal{G}_h et un ensemble d'éléments \mathcal{T}_h constitué de formes géométriques équivalentes au même élément de référence $\hat{\tau}$ défini par N_s points.

$$\mathcal{G}_h = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_s}\} \equiv \text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s)$$

$$\mathcal{T}_h = \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuS}(1,e)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuS}(N_{se},e)}) \text{ pour } e = 1, \dots, N_e \text{ / } \mathbf{x}_{\text{NuS}(k,e)} \in \mathcal{G}_h \right\}$$

$$\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s) \\ \text{NuS}(1 : N_{se}, 1 : N_e) \end{cases}$$

Exemples 3.1. *Contexte 1D avec deux éléments : $d = 1$, $N_s = 3$ et $N_e = 1$*

$$\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s) = [2, 2.5, 3] \\ \text{NuS}(1 : N_{se}, 1 : N_e) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

On admet que les données $\text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s)$ et $\text{NuS}(1 : N_{se}, 1 : N_e)$ définissent un maillage conforme et non singulier de Ω_h . C'est-à-dire que la mesure de chaque élément est non nulle ($\neq 0$) et

$$\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_e} e \quad \text{avec} \quad \text{Mesure}(e) \neq 0, \quad \text{et} \quad e \cap e' = \emptyset \quad \text{si} \quad e \neq e'$$

3.2 Données Géométriques de $\partial\Omega_h$.

$$\partial\Omega_h = \bigcup_{f=1}^{N_f} \partial\Omega_f$$

$$\partial\mathcal{T}_h = \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuB}(1,e)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuB}(N_{bf},f)}) \text{ pour } f = 1, \dots, N_f \text{ / } \mathbf{x}_{\text{NuB}(k,f)} \in \mathcal{G}_h \right\}$$

Pour toute surface de bord f , $\text{NubS}(1 : \text{Nbl}, f)$ donne les numéros globaux des points constituant f et $\text{LogF}(f)$ donne un nombre caractérisant le type de condition aux limites à appliquer à la frontière f .

$$\partial\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{NubS}(1 : \text{Nbl}, 1 : \text{Nf}) \\ \text{LogF}(1 : \text{Nf}) \end{cases}$$

Exemples 3.2. *Contexte 1D avec deux éléments : $d = 1$, $\text{Nbl} = 1$ et $\text{Nf} = 2$*

$$\partial\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{NubS}(1 : \text{Nbl}, 1 : \text{Nf}) = [1, 3] \\ \text{LogF}(1 : \text{Nf}) = [20, 50] \end{cases}$$

3.3 Données d'interpolation sur Ω_h .

On considère aussi un ensemble \mathcal{D}_h de points d'interpolation

$$\mathcal{D}_h = \left\{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\text{Nv}} \right\} \equiv \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuV}(1,e)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuV}(\text{Ns},e)}) \text{ pour } e = 1, \dots, \text{Ne} \right\}$$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorV}(1 : d, 1 : \text{Nv}) \\ \text{NuV}(1 : \text{Nve}, 1 : \text{Ne}) \end{cases}$$

On suppose que les points d'interpolation sont définis de manière à assurer la continuité de l'interpolation entre des éléments voisins. Les fonctions de base, sur le domaine dans son entier, coïncide sur chaque élément, soit avec la fonction nulle, soit avec une fonction de la base canonique locale à l'élément.

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in e \notin \vartheta(i) \\ \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in e \in \vartheta(i) \end{cases} \quad \text{avec } i = \text{NuV}(k, e) \equiv \text{D}(k, e) \quad (3.1)$$

On note ici $\vartheta(i)$ l'ensemble des éléments sur lesquels la fonction de base $\varphi_i(\mathbf{x})$ est non nulle. De même, $\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x})$ est la transformation de l'élément e (du maillage) vers l'élément de référence \widehat{e} . Pour simplifier la présentation on utilisera parfois des notations moins explicites : $\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\xi}$. En définitive

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \varphi_i^e(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \varphi_{\text{D}(k,e)}^e(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x})) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.2)$$

$k \equiv k(i, e)$ est la numérotation locale sur l'élément e associée à la numérotation globale i . Par construction de la base canonique, on a

$$\varphi_i^e(\mathbf{x}_\ell) = \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x}_\ell)) = \delta_{k\ell}, \quad \forall \ell = 1, \dots, \text{Nve}$$

L'interpolation globale de toute fonction $v(\mathbf{x})$ (sans la prise en compte des conditions aux limites) prend la forme suivante

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\text{Nv}} v_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Les v_i sont des réels qui constituent les "coordonnées" de la projection (interpolation) de la fonction $v(\mathbf{x})$ dans la base $\varphi_i(\mathbf{x})$.

Exemples 3.3. *Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis P1 : $d = 1$, $k = 1$, $\text{Nv} = \text{Ns}$ et $\text{Nve} = k + 1$*

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorV}(1 : d, 1 : \text{Nv}) = [2, 2.5, 3] \\ \text{NuV}(1 : \text{Nve}, 1 : \text{Ne}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemples 3.4. Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis P2 : $d = 1$, et $k = 2$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{Coor}V(1 : d, 1 : Nv) = [2, 2.5, 3, 2.5 - \frac{0.5}{2}, 3 - \frac{0.5}{2}] \\ \text{Nu}V(1 : Nve, 1 : Ne) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemples 3.5. Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis P3 : $d = 1$, et $k = 3$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{Coor}V(1 : d, 1 : Nv) = [2, 2.5, 3, 2.5 - \frac{0.5}{3}, 2.5 - \frac{1}{3}, 3.0 - \frac{0.5}{3}, 3.0 - \frac{1}{3}] \\ \text{Nu}V(1 : Nve, 1 : Ne) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemples 3.6. Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis Pk : $d = 1$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{Coor}V(1 : d, 1 : Nv) = [2, 2.5, 3, 2.5 - \frac{0.5}{k} \dots, 2.5 - \frac{0.5(k-1)}{k}, 3.0 - \frac{0.5}{k} \dots, 3.0 - \frac{0.5(k-1)}{k}] \\ \text{Nu}V(1 : Nve, 1 : Ne) = \text{à Compléter} \end{cases}$$

3.4 Données d'interpolation sur $\partial\Omega_h$.

$$\partial\mathcal{D}_h = \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuF}(1,f)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuF}(\text{Ndf},f)}) \text{ pour } f = 1, \dots, \text{Nf} / \mathbf{x}_{\text{NuF}(k,f)} \in \mathcal{D}_h \right\}$$

$$\partial\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{NuF}(1 : \text{Ndf}, 1 : \text{Nf}) \\ \text{LogF}(1 : \text{Nf}) \end{cases}$$

Pour toute surface de bord f , $\text{NuF}(1 : \text{Ndf}, f)$ donne les numéros globaux des variables locales à f et $\text{LogF}(f)$ donne un nombre caractérisant le type de condition aux limites à appliquer à la frontière f .

3.5 Formulation Algébrique du problème variationnel.

On pose $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_{Nv})^T$. Lorsque $a(u_h, v_h)$ est linéaire en v_h et $\ell(v_h)$ une forme linéaire, Le problème variationnel approché revient à résoudre le problème algébrique suivant.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{Nv} \text{ tel que} \\ & \bullet \quad u_h(x) = \sum_{j=1}^{Nv} u_j \varphi_j(x) \\ & \bullet \quad a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i), \quad \text{pour tous les } i = 1, \dots, Nv. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.5.1 Contexte avec $a(u_h, v_h)$ forme bilinéaire.

Lorsque $a(u_h, v_h)$ est une forme bilinéaire (pas forcément symétrique) sur $\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ et que $\ell(v_h)$ est une forme linéaire sur \mathcal{V}_h . Le problème variationnel approché se met sous la forme d'un système algébrique linéaire :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

avec

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_e a^e(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{ij}^e = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\text{D}(k,e)\text{D}(k',e)}^e = \sum_e \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{kk'}^e$$

et

$$\underline{\mathbf{b}}_i = \ell(\varphi_i) = \sum_e \ell^e(\varphi_i) = \sum_e \underline{\mathbf{b}}_i^e = \sum_e \underline{\mathbf{b}}_{\text{D}(k,e)}^e = \sum_e \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e$$

La matrices $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est de dimension $\text{Nv} \times \text{Nv}$. Les vecteurs $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ sont de dimlension Nv .

Algorithme d'assemblage par éléments

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.

★ Pour chaque élément $e : 1, \dots, \text{Ne}$

- Pour $k = 1, \dots, \text{Nve}$

$$i \equiv \text{NuV}(k, e)$$

$$\widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{L}^e(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e$$
- Pour $k' = 1, \dots, \text{Nve}$

$$j \equiv \text{NuV}(k', e)$$

$$\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e = a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k) = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{A}^e(\widehat{\varphi}_{k'}(\boldsymbol{\xi}), \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} + \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e$$
- Fin (k')
- Fin (k)

★ Fin (e)

Algorithme d'assemblage par éléments : PK-Lagrange

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.

★ Pour chaque élément $e : 1, \dots, \text{Ne}$

Extraire les $\mathbf{x}_\ell^e \equiv \text{CoorS}(1 : \text{d}, \text{NuS}(\ell, e))$ pour $\ell = 1, \dots, \text{Nse}$

Calculer les gradients $\nabla \lambda_s$, pour $s = 1, \dots, \text{Nse}$, en fonction des \mathbf{x}_ℓ^e

- Pour $k = 1, \dots, \text{Nve}$

$$i \equiv \text{NuV}(k, e)$$

$$\widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{L}_k^e(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \lambda_s(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e$$
- Pour $k' = 1, \dots, \text{Nve}$

$$j \equiv \text{NuV}(k', e)$$

$$\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e = a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k) = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{A}_{kk'}^e(\lambda_s(\boldsymbol{\xi}), \nabla \lambda_s) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} + \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e$$
- Fin (k')
- Fin (k)

★ Fin (e)

Algorithme d'assemblage avec intégration numérique.

On se donne les points et les poids de Gauss dans l'élément de référence \hat{e} .
 $\Rightarrow \text{Ng}, \omega_g$ et $\lambda_{s,g}$ pour $g = 1, \dots, \text{Ng}$ et $s = 1, \dots, \text{Nse}$

On obtient les ξ_g comme fonction des $\lambda_{s,g}$ pour $g = 1, \dots, \text{Ng}$.

Pour les P_k -Lagrange on a $\xi = \sum_{\ell=1}^d \lambda_{\ell} \hat{e}_{\ell}$ et $\sum_{\ell=1}^d \lambda_{\ell} = 1$.

Initialisations : matrice et second membre globaux : $\underline{\mathbf{A}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.

★ Pour chaque élément $e : 1, \dots, \text{Ne}$

Extraire les $\mathbf{x}_{\ell}^e \equiv \text{CoorS}(1 : d, \text{NuS}(\ell, e))$ pour $\ell = 1, \dots, \text{Nse}$

Pour des transformations linéaires \mathcal{J}^e est constant sur e :

Calculer $|\mathcal{J}^e|$ en fonction des \mathbf{x}_s^e

Calculer les gradients $\nabla \lambda_s$, pour $s = 1, \dots, \text{Nse}$, en fonction des \mathbf{x}_{ℓ}^e

- Pour chaque point de gauss : $g=1, \dots, \text{Ng}$

Calculer $\mathbf{x}_g = \mathbf{x}(\xi_g) = \sum_{s=1}^{\text{Nse}} \lambda_{s,g} \mathbf{x}_s^{\tau}$

 - Pour $k = 1, \dots, \text{Nve}$

$i \equiv \text{NuV}(k, e)$

$\hat{\mathbf{b}}_k^e = |\mathcal{J}^e| \mathcal{L}_k^e(\mathbf{x}_g, \lambda_{s,g})$

$\mathbf{b}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \omega_g \hat{\mathbf{b}}_k^e$

 - Pour $k' = 1, \dots, \text{Nve}$

$j \equiv \text{NuV}(k', e)$

$\hat{\underline{\mathbf{A}}}_{k,k'}^e = |\mathcal{J}^e| \mathcal{A}_{kk'}^e(\lambda_{s,g}, \nabla \lambda_s)$

$\underline{\mathbf{A}}_{i,j} = \underline{\mathbf{A}}_{i,j} + \omega_g \hat{\underline{\mathbf{A}}}_{k,k'}^e$

 - Fin (k')
 - Fin (k)
- Fin de la boucle sur les points de Gauss(g)

★ Fin de la boucle sur les éléments (e)

3.6 Prise en compte des conditions aux limites.

3.6.1 Conditions de Dirichlet.

Les conditions aux limites, de type Dirichlet (), sont prises en compte en modifiant le système linéaire de manière à prendre en compte la contrainte sur les différents "degrés de liberté" du bord. La ligne associée à la variable du bord à zéro partout sauf sur la diagonale qui est mise à la valeur "1". À la même ligne, le second membre est remplacé par la valeur à imposer (qu'elle soit nulle ou pas). On effectue alors une boucle sur les éléments frontières (∂e_f , $f = 1, \dots, \text{Ndf}$) et on applique la condition aux limites, en fonction de la caractérisation $\text{LogF}(f)$, sur les "degrés de liberté" $\text{NuF}(\ell, f)$ pour $\ell = 1, \dots, \text{Ndf}$.

Imposition des conditions aux limites de Dirichlet.

- ★ Pour chaque élément $\partial e_f : f = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - Si $(\text{LogF}(f) == \text{Dirichlet})$ alors
 - Pour $\ell = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - $i = \text{NuF}(\ell, f)$
 - $\mathbf{x}_i \equiv \text{CoorS}(1 : d, i)$
 - $\underline{\mathbf{A}}_{ij} = 0.0$ pour $j = 1, \dots, \text{Nv}$
 - $\underline{\mathbf{A}}_{ii} = 1.0$ et $\underline{\mathbf{b}}_i = D_f(\mathbf{x}_i)$
 - Fin de la boucle sur les ddl de la face (f)
 - Fin de la condition (Si)
- ★ Fin de la boucle sur les faces (f)

3.6.2 Conditions de Neumann homogènes.

Rien à faire

3.6.3 Conditions de Neumann non homogènes.

Modifier le second membre en ajoutant une intégrale de bord.

- ★ Pour chaque élément $\partial e_f : f = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - Si $(\text{LogF}(f) == \text{Neumann})$ alors
 - Pour $\ell = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - $i = \text{NuF}(\ell, f)$
 - $\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) dS$
 - Fin de la boucle sur les ddl de la face (f)
 - Fin de la condition (Si)
- ★ Fin de la boucle sur les faces (f)

Chapter 4

Applications.

4.1 Solutions manufacturées : Exemples 2D

La mise en œuvre passe par la validation des algorithmes. On dispose pour cela des résultats mathématiques d'analyse de convergence. En particulier, la convergence d'ordre $k + 1$ quand on utilise des éléments finis PK-Lagrange. La validation numérique de cette propriété passe par la construction d'une solution exacte analytique. On se donne d'abord un profil analytique de la solution exacte et on cherche le second membre qui permet de satisfaire une équation donnée.

Diffusion isotrope Le problème ici est de trouver la fonction $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$-\nabla \cdot (\beta \nabla u) = f(\mathbf{x})$$

avec $\beta > 0$ et des conditions aux limites données par la solution exacte $u(\mathbf{x})$ qui est encore à construire. On se donne le profil de solution exacte suivant

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. On peut choisir des profils variés selon la validation visée. Le profil choisi définira une solution exacte du problème de diffusion isotrope, pour un second membre adéquat. Dans le cas présent, on trouve

$$f(\mathbf{x}) = \beta (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

Par conséquent, la forme faible associée est définie avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\hat{\varphi}_l, \hat{\varphi}_{l'}) \equiv \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \beta \nabla \hat{\varphi}_{l'} \cdot \nabla \hat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_l) \equiv \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \beta (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \hat{\varphi}_l(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \end{array} \right.$$

Pour plus de clarté, on a utilisé $x \equiv x(\boldsymbol{\xi})$ et $y \equiv y(\boldsymbol{\xi})$. C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(\mathbf{x})$ par éléments finis.

Diffusion anisotrope Problème de diffusion anisotrope utilise une matrice de diffusion $\underline{\beta}$ symétrique défini positive. Nous considérons ici une matrice de diffusion diagonale donnée par

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta_x > 0 \quad \text{et} \quad \beta_y > 0$$

Le problème ici est de trouver $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$-\nabla \cdot (\underline{\beta} \nabla u) = f(\mathbf{x})$$

avec les conditions aux limites données par la solution exacte qui est encore à construire. On se donne un profil de $u(\mathbf{x})$ de la forme

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. Le profil choisi définira une solution exacte du problème de diffusion anisotrope, pour le second membre

$$f(\mathbf{x}) = (\beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

La forme faible associée au problème de diffusion anisotropique est définie avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\widehat{\varphi}_l, \widehat{\varphi}_{l'}) \equiv \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_l \widehat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\underline{\beta} \nabla \widehat{\varphi}_{l'}) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \widehat{\varphi}_l) \equiv \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \widehat{\varphi}_l(\mathbf{x}(\xi)) \end{cases}$$

C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(x, y)$ du problème de diffusion anisotrope, par éléments finis.

Convection-réaction-diffusion On se donne un vecteur de convection $\mathbf{C} = c_x \widehat{\mathbf{e}}_x + c_y \widehat{\mathbf{e}}_y$, un coefficient de réaction α et une matrice de diffusion $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{pmatrix}$. Le problème ici est de trouver une fonction scalaire $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$\nabla \cdot (u \mathbf{C}) + \alpha u - \nabla \cdot (\underline{\beta} \nabla u) = f(\mathbf{x})$$

avec les conditions aux limites données par la solution exacte qui est encore à construire. On se donne un profil de $u(\mathbf{x})$ de la forme

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. Le profil choisi définira une solution exacte du problème Convection-réaction-diffusion, pour le second membre donné par

$$f(\mathbf{x}) = (\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) + c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y)$$

La forme faible associée au problème de Convection-réaction-diffusion est définie avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_l \widehat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\underline{\beta} \nabla \widehat{\varphi}_{l'}) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi}_{l'} \mathbf{C} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_l + \alpha \widehat{\varphi}_{l'} \widehat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \widehat{\varphi}_l(\xi) \\ &\quad + (c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y)) \widehat{\varphi}_l(\xi) \end{cases}$$

C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(x, y)$ du problème de diffusion anisotrope, par éléments finis.

4.2 Analyse de la convergence numérique (pratique).

L'analyse de convergence se fait à partir de l'erreur (en norme p)

$$\mathcal{E}_p(h) = \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_p = \left(\int_{\Omega_h} |\mathbf{u}_h(x, y) - \mathbf{u}(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec h le pas du maillage. Les éléments finis PK, dans le contexte du problème de diffusion isotrope, on a l'estimation suivante :

$$\mathcal{E}_p(h) = Ch^{k+1}$$

Pour des maillages de pas h_ℓ , $\ell = 1, \dots, N_\ell$ avec par exemple $h_{\ell+1} > h_\ell$, on a un ordre de convergence numérique $k + 1$

$$\log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)} \right) = (k + 1) \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell} \right)$$

On obtient alors l'ordre de convergence pratique (de la mise en œuvre) par

$$(k + 1) = \log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)} \right) / \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell} \right)$$

On a validé la stratégie numérique lorsque l'ordre de convergence pratique est proche de l'ordre de convergence analytique:

$$k + 1 \simeq k + 1$$

L'évaluation de l'erreur $\mathcal{E}_p(h)$ se fait en utilisant les points de quadrature :

$$\mathcal{E}_p(h) = \left(\int_{\Omega_h} |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_e |\mathcal{J}^e| \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g)) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g))|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice 4.2.1. Eléments droits 2D Triangles : $d = 2$ et $N_{pl} = 3$. On considère un élément triangle droit (e) défini par ($N_{pl}=3$) points **non alignés et orientés dans le sens trigonométrique par rapport à la numérotation locale**:

$$\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}_{G(1,e)} \equiv \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_j \equiv \mathbf{x}_{G(2,e)} \equiv \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}_{G(3,e)} \equiv \mathbf{x}_3.$$

avec, pour tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \equiv x \hat{\mathbf{e}}_1 + y \hat{\mathbf{e}}_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$ est une base orthonormée de l'espace physique.

Les coordonnées Barycentriques : $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$ et $\lambda_3(\mathbf{x})$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)}{\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)} \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs $\mathbf{p} = p_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + p_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ et $\mathbf{q} = q_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + q_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ la fonction $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q})$ est définie par

$$\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}) = p_1 q_2 - p_2 q_1$$

- Montrez que $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q})$ est une forme bilinéaire antisymétrique avec $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{p}) = 0$, $\forall \mathbf{p}$.

Solution: On a $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}) = p_1 q_2 - p_2 q_1 = -(q_1 p_2 - q_2 p_1) = -\det(\mathbf{q} ; \mathbf{p})$, par conséquent, la forme est antisymétrique, c'est à dire

$$\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}) = -\det(\mathbf{q} ; \mathbf{p}).$$

Soient α et β deux réels

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{p} + \alpha \mathbf{p}' ; \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}') &= (p_1 + \alpha p'_1)(q_2 + \beta q'_2) - (p_2 + \alpha p'_2)(q_1 + \beta q'_1) \\ &= (p_1 q_2 - p_2 q_1) + \alpha (p'_1 q_2 - p'_2 q_1) \\ &\quad + \beta (p_1 q'_2 - p_2 q'_1) + \alpha \beta (p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1) \\ &= \det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}) + \alpha \det(\mathbf{p}' ; \mathbf{q}) + \beta \det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}') + \alpha \beta \det(\mathbf{p}' ; \mathbf{q}') \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{p} + \alpha \mathbf{p}' ; \mathbf{q} + \beta \mathbf{q}') = \det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}) + \alpha \det(\mathbf{p}' ; \mathbf{q}) + \beta \det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}') + \alpha \beta \det(\mathbf{p}' ; \mathbf{q}')$$

Enfin

$$\det(\mathbf{p} ; \mathbf{p}) = -\det(\mathbf{p} ; \mathbf{p}) \implies \det(\mathbf{p} ; \mathbf{p}) = 0$$

Fin

- Vérifiez que les fonctions $\lambda_\ell(\mathbf{x})$, pour $\ell = 1, 2, 3$, sont affines et que

$$\lambda_\ell(\mathbf{x}_{G(\ell',e)}) = \delta_{\ell\ell'}.$$

Solution: On a

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} = \frac{\det(\mathbf{x} ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) - \det(\mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}$$

La forme $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q})$ est bilinéaire, la fonction $\lambda_1(\mathbf{x})$ est affine. De la même manière on montre que $\lambda_2(\mathbf{x})$ et $\lambda_3(\mathbf{x})$ sont affines. On a $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{0}) = 0 = \det(\mathbf{0} ; \mathbf{p})$ et que $\lambda_\ell(\mathbf{x}_{G(\ell',e)}) = 1$, on en déduit le résultat.

Fin

- Montrez que pour tout $\mathbf{x} \in e$ on a $0 \leq \lambda_\ell \leq 1$; Il faudra montrer que les relations sont vraies sur le bord de (e) , puis conclure.

Solution: A faire

Fin

- Vérifiez que les gradients (par rapport à \mathbf{x} , des coordonnées barycentriques sont données par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_1 &= \frac{\det(\widehat{\mathbf{e}}_1; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)\widehat{\mathbf{e}}_1 + \det(\widehat{\mathbf{e}}_2; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)\widehat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} = \frac{(y_k - y_j)\widehat{\mathbf{e}}_1 - (x_k - x_j)\widehat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} \\ \nabla \lambda_2 &= \frac{\det(\widehat{\mathbf{e}}_1; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)\widehat{\mathbf{e}}_1 + \det(\widehat{\mathbf{e}}_2; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)\widehat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)} = \frac{(y_i - y_k)\widehat{\mathbf{e}}_1 - (x_i - x_k)\widehat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)} \\ \nabla \lambda_3 &= \frac{\det(\widehat{\mathbf{e}}_1; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\widehat{\mathbf{e}}_1 + \det(\widehat{\mathbf{e}}_2; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\widehat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} = \frac{(y_j - y_i)\widehat{\mathbf{e}}_1 - (x_j - x_i)\widehat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}\end{aligned}$$

avec

$$\nabla \lambda_l = \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_1} \widehat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_2} \widehat{\mathbf{e}}_2 \equiv \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \widehat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \widehat{\mathbf{e}}_2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Solution: Il suffit d'utiliser le fait que $\mathbf{x} = x\widehat{\mathbf{e}}_1 + y\widehat{\mathbf{e}}_2$ pour obtenir :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \widehat{\mathbf{e}}_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \widehat{\mathbf{e}}_2$$

Fin

- En utilisant la propriété $\det(\mathbf{p}; \mathbf{p}) = 0$ pour $\mathbf{p} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j$, Montrez que

$$\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) = \det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$$

Solution: Comme $\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) = 0$ on a

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) &= \det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) - \det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \\ &= \det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j); \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \\ &= \det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \\ &= -\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \quad \text{par l'antisymétrie} \\ &= \det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \quad \text{par la linéarité}\end{aligned}$$

Fin

- On définit maintenant la transformation

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \xi \widehat{\mathbf{s}}_1 + \eta \widehat{\mathbf{s}}_2, \quad \forall \mathbf{x} \in e$$

$(\widehat{\mathbf{s}}_1, \widehat{\mathbf{s}}_2)$ est une base orthonormée de l'espace de référence,

$$\xi \equiv \lambda_1(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \eta \equiv \lambda_2(\mathbf{x})$$

Calculez la valeur absolue du déterminant du Jacobien (de la transformation)

$$|\mathcal{J}^e| = \frac{1}{|\det(\nabla \xi; \nabla \eta)|}.$$

En déduire que la transformation $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ est inversible.

Solution: En utilisant le résultat précédent $\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) = \det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$ on a

$$\begin{aligned}
\det(\nabla \xi ; \nabla \eta) &= \frac{\det((y_k - y_j)\hat{\mathbf{e}}_1 - (x_k - x_j)\hat{\mathbf{e}}_2 ; (y_i - y_k)\hat{\mathbf{e}}_1 - (x_i - x_k)\hat{\mathbf{e}}_2)}{(\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k))^2} \\
&= \frac{-(y_k - y_j)(x_i - x_k)\det(\hat{\mathbf{e}}_1 ; \hat{\mathbf{e}}_2) - (x_k - x_j)(y_i - y_k)\det(\hat{\mathbf{e}}_2 ; \hat{\mathbf{e}}_1)}{(\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k))^2} \\
&= \frac{-(y_k - y_j)(x_i - x_k) + (x_k - x_j)(y_i - y_k)}{(\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k))^2} \\
&= \frac{(x_k - x_j)(y_i - y_k) - (y_k - y_j)(x_i - x_k)}{(\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k))^2} \\
&= \frac{-\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)}{(\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k))^2}
\end{aligned}$$

Soit

$$|\mathcal{J}^e| = \frac{1}{|\det(\nabla \xi ; \nabla \eta)|} = |\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)| = 2\text{Aire}(e)$$

Fin

- On a

$$\frac{a^e(\varphi_{D(l',e)}, \varphi_{D(l,e)})}{\ell^e(\varphi_{D(k,e)})} = \frac{a^e(\hat{\varphi}_{l'}, \hat{\varphi}_l) = \int_e \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\ell^e(\hat{\varphi}_k) = \int_e \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

Pour des triangles droits (e), la transformation est affine et $|\mathcal{J}^e|$ est une constante. Vérifiez que

$$\frac{a^e(\varphi_{D(l',e)}, \varphi_{D(l,e)})}{\ell^e(\varphi_{D(k,e)})} = \frac{|\mathcal{J}^e| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) d\xi d\eta}{|\mathcal{J}^e| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(\mathbf{x}(\xi)) d\xi d\eta}$$

Solution:

$$\begin{aligned}
a^e(\varphi_{D(l',e)}, \varphi_{D(l,e)}) &= a^e(\hat{\varphi}_{l'}, \hat{\varphi}_l) = \int_e \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\hat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) d\xi \\
&= |\mathcal{J}^e| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) d\xi d\eta \\
\ell^e(\varphi_{D(k,e)}) &= \ell^e(\hat{\varphi}_k) = \int_e \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\hat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(\mathbf{x}(\xi)) d\xi \\
&= |\mathcal{J}^e| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(\mathbf{x}(\xi)) d\xi d\eta
\end{aligned}$$

Fin

□

Devoir Maison: mise en œuvre des éléments finis

A rendre le ?? Février 2025 avant 12:00 par e-mail à l'adresse nkongka@unice.fr

Mise en œuvre et validation des éléments finis P3-Lagrange sur des triangles.

Définition du problème Convection-réaction-diffusion 2D.

On se donne un coefficient de réaction α , un vecteur de convection $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$ et une matrice de diffusion $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{pmatrix}$. Le problème ici est de trouver une fonction scalaire $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$-\nabla \cdot (\underline{\beta} \nabla u) + \alpha u + \nabla \cdot (u \mathbf{c}) = f(\mathbf{x})$$

avec les conditions aux limites données par la solution exacte qui est encore à construire. On se donne un profil de $u(\mathbf{x})$ de la forme

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. Le profil choisi définira une solution exacte du problème Convection-réaction-diffusion, pour le second membre donné par

$$f(\mathbf{x}) = \left(\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2 \right) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) + c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y)$$

La forme faible associée au problème de Convection-réaction-diffusion est définie avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}(\hat{\varphi}_l, \hat{\varphi}_{l'}) \equiv \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) & = & (\underline{\beta} \nabla \hat{\varphi}_{l'}) \cdot \nabla \hat{\varphi}_l + \alpha \hat{\varphi}_{l'} \hat{\varphi}_l - \hat{\varphi}_{l'} \mathbf{c} \cdot \nabla \hat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_l) \equiv \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\xi)) & = & \left(\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2 \right) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \hat{\varphi}_l(\xi) \\ & & + \left(c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y) \right) \hat{\varphi}_l(\xi) \end{array} \right.$$

C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(x, y)$ du problème de Convection-réaction-diffusion anisotrope, par éléments finis.

Travail à faire.

L'objectif est de modifier (compléter) le programme scilab qui vous a été transmis, de manière à :

- Ajouter les éléments finis P3-Lagrange : en complétant les fonctions `Phi_Pk` et `GradPhi_Pk` pour le cas `pk=3`.
- Résoudre le problème de Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D. Il faudra

- ★ Modifier la fonction `f(X, kx, ky, Mu, Cm)` en une fonction `f(X, gamx, gamy, betx, bety, cx, cy, alpha)` pour que la solution exacte du problème de Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D soit :

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \equiv \text{Exact}(x, y, \text{gamx}, \text{gamy})$$

avec $\gamma_x \equiv \text{gamx}$ et $\gamma_y \equiv \text{gamy}$.

- ★ Modifier la sortie de la fonction `Composite_Mat(Xg)` pour avoir en sortie les valeurs de `betax`, `betay`, `cx`, `cy` et `alpha`.
- ★ Modifier la définition des variables `Be_k` et `Ae_k_kp` pour prendre en compte la physique du problème de Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D.

Validations avec à chaque fois : $Lx=1$, $Ly=1$, $gamx = \pi/Lx$, $gamy = 2*\pi/Ly$

- **Problème de réaction:** Pour un problème de réaction on a :

$$\text{betx} = 0, \quad \text{bety} = 0, \quad \text{cx} = 0, \quad \text{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \neq 0.$$

La convergence optimale est elle obtenue? (c.ad. avoir l'ordre $k+1$ avec les éléments finis Pk-Lagrange : pour $k=1, 2$ et 3 soit ($EF_Pk= 1$, $EF_Pk= 2$ et $EF_Pk= 3$)).

- **Problème de diffusion isotrope:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\text{betx} = \text{bety} > 0, \quad \text{cx} = 0, \quad \text{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

La convergence optimale est elle obtenue?

- **Problème de diffusion anisotrope:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\text{betx} > 0, \quad \text{betx} \neq \text{bety} > 0, \quad \text{cx} = 0, \quad \text{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

La convergence optimale est elle obtenue? Qu'observez vous quand $\text{betx} > 0$ et $\text{bety} = 0$? Qu'observez vous quand soit $\text{betx} = 10^{-8}$ et $\text{bety} = 1$. Qu'en concluez vous?

- **Problème de convection:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\text{betx} = 0, \quad \text{bety} = 0, \quad \text{cx} \neq 0, \quad \text{cy} \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

La convergence optimale est elle toujours obtenue? Comment évolue la convergence quand on utilise $\text{betx} = \text{bety} = dh^m$ avec $dh = \sqrt{Lx * Ly / Ne}$ et pour $m = 1, 2, 3$?

- pour un problème de diffusion anisotrope ($\text{cx} = \text{cy} = 0$, $\alpha = 0$, ($\text{betx} = 0$ et $\text{bety} > 0$ ou bien ($\text{betx} > 0$ et $\text{bety} = 0$)), on n'a pas la convergence à l'ordre $k+1$ avec les éléments finis Pk-Lagrange : pour $k=1, 2$ et 3 .
- **Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D.** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\text{betx} = 1, \quad \text{bety} = 2, \quad \text{cx} = 1, \quad \text{cy} = 0.5 \quad \text{et} \quad \alpha = -5.$$

La convergence optimale est elle obtenue?

Analyse de la convergence numérique (pratique).

L'analyse de convergence se fait à partir de l'erreur (en norme p)

$$\mathcal{E}_p(h) = \|u_h - u\|_p = \left(\int_{\Omega_h} |u_h(x, y) - u(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec h le pas du maillage. Les éléments finis PK, dans le contexte du problème de diffusion isotrope, on a l'estimation suivante :

$$\mathcal{E}_p(h) = Ch^{k+1}$$

Pour des maillages de pas h_ℓ , $\ell = 1, \dots, N_\ell$ avec par exemple $h_{\ell+1} > h_\ell$, on a un ordre de convergence numérique $K + 1$

$$\log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)} \right) = (K + 1) \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell} \right)$$

On obtient alors l'ordre de convergence pratique (de la mise en œuvre) par

$$(\mathbf{K} + 1) = \log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_{\ell})} \right) \bigg/ \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_{\ell}} \right)$$

On a validé la stratégie numérique lorsque l'ordre de convergence pratique est proche de l'ordre de convergence analytique:

$$\mathbf{K} + 1 \simeq k + 1$$

L'évaluation de l'erreur $\mathcal{E}_p(h)$ se fait en utilisant les points de quadrature :

$$\mathcal{E}_p(h) = \left(\int_{\Omega_h} |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_e |\mathcal{J}^e| \sum_{g=1}^{\text{Ng}} \omega_g |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g)) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g))|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$