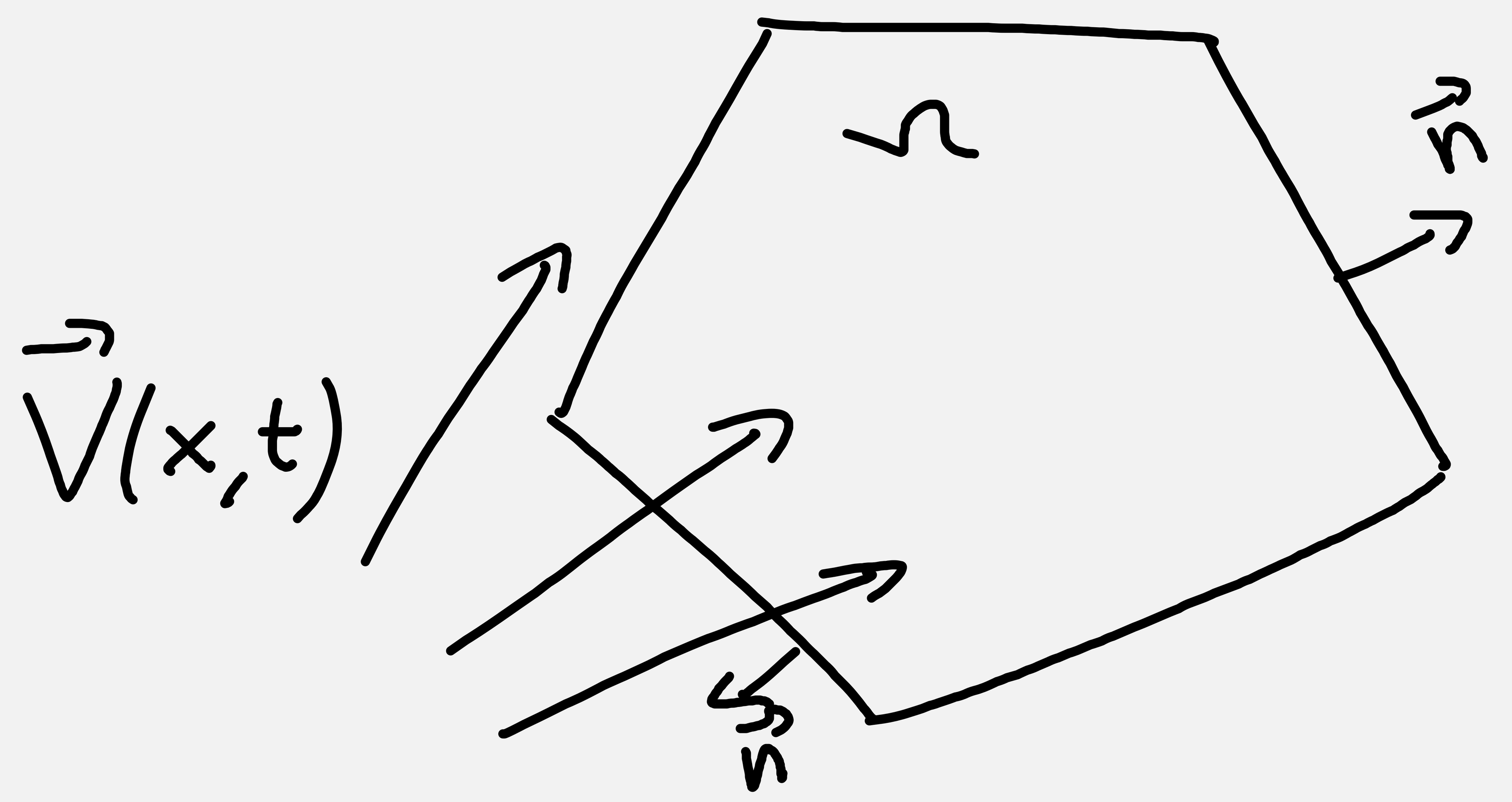
Schémas VF pour les équations hyperboliques scalaires en dimension d



$$\operatorname{div} \vec{V}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \operatorname{Div}\left(f(u(x,t)) \vec{V}(x,t) \right) = 0 & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = u^D(x,t) & (x,t) \in \Sigma^-(T) \subset \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$\Sigma^-(t) = \left\{ (x,s) \in \partial\Omega \times (0,t) \ \text{t.q.} \ f'(u(x,s)) \underline{\vec{V}(x,s) \cdot \vec{n}} < 0 \right\}$$

Prop : Soient $u^D \in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$, $\vec{V} \in C^1(\Omega \times (0,T))$

$f \in C^1(\mathbb{R})$

alors il existe une solution faible entropique unique $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$. De plus elle vérifie le principe du maximum

$$\min\left(\min_{y \in \Omega} u^0(y), \min_{(y,s) \in \Sigma^-(t)} u^D(y,s)\right) \leq u(x,t) \leq \max\left(\max_{y \in \Omega} u^0(y), \max_{(y,s) \in \Sigma^-(t)} u^D(y,s)\right)$$

Rq : lien avec le modèle en dimension 1 : $\vec{V} = \vec{e}_x$

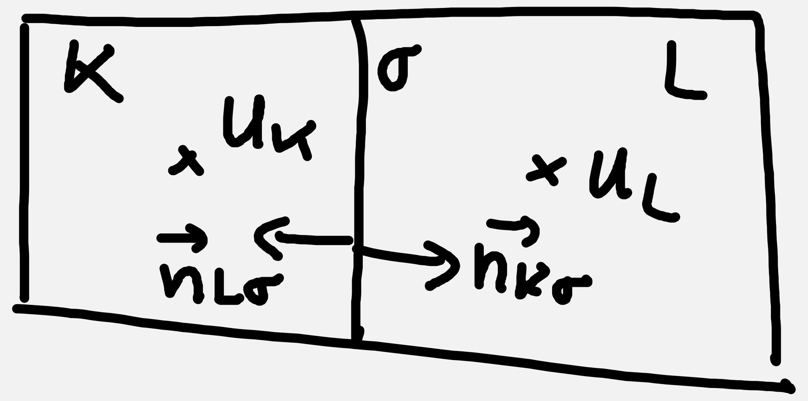
$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$$

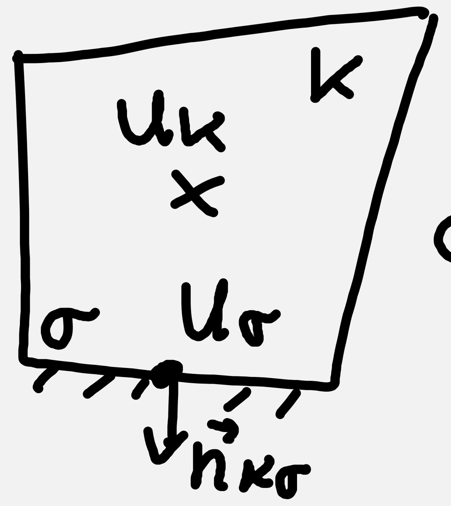
Discrétisation VF

$$V_h = \{ u_h \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } u_h(x) = u_K \quad \forall x \in K, \forall K \in \mathcal{M}_h \}$$

on note u_K^n l'inconnue discrète dans la maille K au temps t^n

$\sigma \in \mathcal{F}_h^{int}$





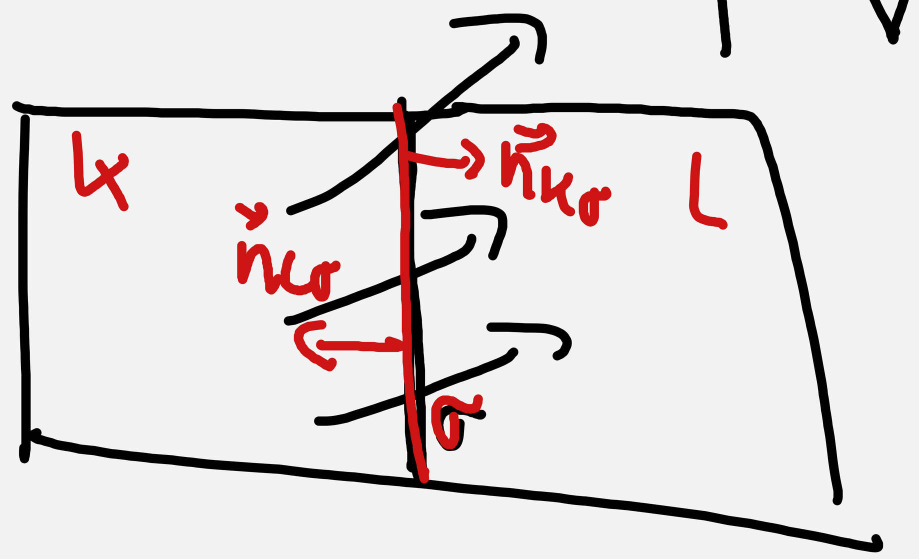
$\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$

$$u_\sigma^* = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u(x, t^*)\, d\sigma(x)$$

$$u_K^* = \begin{cases} u_K^n & \text{si Euler implicite} \\ u_K^{n-1} & \text{si — explicite} \end{cases}$$

$$t^* = \begin{cases} t^n & \text{si Euler implicite} \\ t^{n-1} & \text{si — explicite} \end{cases}$$

on note



$$V_{K\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma$$

$$V_{L\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{L\sigma}\, d\sigma = -V_{K\sigma}^n$$

Rq : on a $V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0$

car $\vec{n}_{K\sigma} + \vec{n}_{L\sigma} = 0$

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_K \Big(\partial_t u(x,t) + \mathrm{Div}\big(f(u(x,t)) \vec{V}(x,t) \big) \Big) dx\, dt = 0$$

$$\underbrace{\int_K \frac{u(x,t^n) - u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n} dx}_{\text{discrétisation } |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n}} + \sum_{\sigma \in F_K} \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma f(u(x,t)) \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma\, dt \right]}_{} = 0$$

flux "continu" sur la face σ, sortant de K noté $\overline{F}_{K\sigma}^n(u)$

$\rightarrow$ discrétisation : flux numérique sur la face σ sortant de K noté $F_{K\sigma}^n(u_h^*)$ pour le schéma en temps d'Euler implicite si $* = n$ et d'Euler explicite si $* = n-1$.

$\Rightarrow$ Equation du schéma VF dans la maille K au pas de temps n :

$$\left\{ |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}^n(u_h^*) = 0 \right.$$

$\forall K \in \mathcal{M}_h$

$\forall n = 1, \dots, m$

Flux monotone deux points :

$$F_{K\sigma}^n(u_h) = \begin{cases} F_{K\sigma}^n(u_K, u_L) & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int} \\ F_{K\sigma}^n(u_K, u_\sigma) & \text{si } \sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext} \end{cases}$$

Propriétés : ① Conservativité du flux : $F_{K\sigma}^n(v,w) + F_L^n(w,v) = 0$ $\quad \forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int}$, $\forall v, w \in \mathbb{R}$

② Consistance : $F_{K\sigma}^n(v,v) = f(v)\, V_{K\sigma}^n$ $\quad \forall K \in \mathcal{M}_h$, $\forall \sigma \in \mathcal{F}_K$, $\forall v \in \mathbb{R}$

"exact sur les constants"

③ Monotonie $F_{K\sigma}^n(v,w)$ est croissante par rapport à v

décroissante ——— à w

⇒ schéma VF :

C.I. $u_K^0 = \frac{1}{|K|}\int_K u^0(x)\,dx$ $\quad K \in \mathcal{M}_h$

$$|K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in \mathcal{F}_h^{int} \cap \mathcal{F}_K}} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_L^*) + \sum_{\sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext} \cap \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_\sigma^*) = 0$$

$\forall K \in \mathcal{M}_h$

$\forall n = 1, \dots, m$

Rappel du cas $d=1$ pour l'équation

$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$ $\rightarrow$ flux exact $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(u^*) = f(u^*(x_{i+\frac{1}{2}}))$

flux numérique : $F(v,w)$, flux monotone deux points

- Consistant : $\underline{F(v,v) = f(v)}$ $\forall v \in \mathbb{R}$ (v I°)
- monotone : $F(\overset{\nearrow}{v}, \underset{\searrow}{w})$
- Lipschitz par rapport à v et w avec des constantes de Lipschitz notés Lip_{F_1}, Lip_{F_2}

__ex__ : si f est croissant $\rightarrow$ $F(v,w) = f(v)$

si f est décroissant $\rightarrow$ $F(v,w) = f(w)$

$$F(v,w) = \underbrace{\frac{f(v)+f(w)}{2}}_{\text{Centré}} + \underbrace{D(v-w)}_{\text{Diffusion}} \quad \text{avec } D \geq \frac{Lip_f}{2}$$

Proposition : soit $F(v,w)$ un flux monotone deux points pour $f(v)$, alors

$$F_{K\sigma}^n(v,w) = \begin{cases} F(v,w)\, \underbrace{V_{K\sigma}^n}_{\geq 0} & \text{si } V_{K\sigma}^n \geq 0 \\ F(w,v)\, \underbrace{V_{K\sigma}^n}_{\leq 0} & \text{si } V_{K\sigma}^n \leq 0 \end{cases}$$

est un flux monotone deux points hyperbolique en dimension d. pour le modèle " $f(v,\vec{V})$ "

On note $a^+ = \max(a,0)$, $a^- = \min(a,0)$, $a^+ + a^- = a$

avec ces notations :

$$F_{K\sigma}^n(v,w) = F(v,w)\left(V_{K\sigma}^n\right)^+ + F(w,v)\left(V_{K\sigma}^n\right)^-$$

Preuve : Conservativité :

$$F_{K\sigma}^n(v,w) + F_{L\sigma}^n(w,v) = F(v,w)\, V_{K\sigma}^+ + F(w,v)\, V_{K\sigma}^-$$
$$+ F(w,v)\, V_{L\sigma}^+ + F(v,w)\, V_{L\sigma}^-$$

on a $\boxed{V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0}$

$$(V_{K\sigma}^n)^+ = (-V_{L\sigma}^n)^+ = -(V_{L\sigma}^n)^-$$
$$(V_{K\sigma}^n)^- = (-V_{L\sigma}^n)^- = -(V_{L\sigma}^n)^+$$

$$= \left(\cancel{-F(v,w)} + \cancel{F(v,w)}\right)(V_{L\sigma}^n)^-$$
$$+ \left(\cancel{-F(w,v)} + \cancel{F(w,v)}\right)(V_{L\sigma}^n)^+ = 0$$

Consistance : $\underline{F_{K\sigma}^n(v,v)} = F(v,v)\, V_{K\sigma}^+ + F(v,v)\, V_{K\sigma}^-$

$$= f(v)\left(V_{K\sigma}^+ + V_{K\sigma}^-\right) = \underline{f(v)\, V_{K\sigma}^n}$$

Monotonie : par construction avec permutation des variable v et w en fonction du signe de $V_{K\sigma}^n$

Principe du maximum discret.

$$① \quad |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} \underbrace{\boxed{F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_L^*)}} + \sum_{\sigma = K|.} \underbrace{F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_\sigma^*)} = 0$$

$$0 = \int_K (\operatorname{div} \vec{V}) dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \int_\sigma \vec{V} \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma = 0 \Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma \, dt \right)}_{V_{K\sigma}^n} = 0$$

donc $\boxed{\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} V_{K\sigma}^n = 0} \Rightarrow \boxed{\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \underbrace{f(u_K^*)}_{F(u_K^*, u_K^*)} V_{K\sigma}^n = 0}$ ②

① - ②

$$\Rightarrow |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma = K|L} \Big(\underbrace{F(u_K^*, u_L^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + F(u_L^*, u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^-} - F(u_K^*, u_K^*) \big(\overbrace{(V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^-}^{V_{K\sigma}^n} \big) \Big)$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.} \Big(F(u_K^*, u_\sigma^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + F(u_\sigma^*, u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^- - F(u_K^*, u_K^*) \big((V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^- \big) \Big) = 0$$

$$
|K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} \left[\underbrace{\frac{F(u_K^*, u_L^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_K^* - u_L^*}}_{a_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^+ \,(u_K^* - u_L^*) + \underbrace{\frac{F(u_L^*, u_K^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_L^* - u_K^*}}_{b_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^- \,(u_L^* - u_K^*) \right.
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq a_{K\sigma} \leq Lip_{F_2} \\ 0 \leq b_{K\sigma} \leq Lip_{F_1} \end{array}}
$$

$$
+ \sum_{\sigma = K|.} \left[\underbrace{\frac{F(u_K^*, u_\sigma^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_K^* - u_\sigma^*}}_{a_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^+ \,(u_K^* - u_\sigma^*) + \underbrace{\frac{F(u_\sigma^*, u_K^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_\sigma^* - u_K^*}}_{b_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^- \,(u_\sigma^* - u_K^*) \right.
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} |K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} &+ \sum_{\sigma = K|L} a_{K\sigma}(u_K^* - u_L^*)\, V_{K\sigma}^+ + b_{K\sigma}(u_L^* - u_K^*)\, V_{K\sigma}^- \\ &+ \sum_{\sigma = K|.} a_{K\sigma}(u_K^* - u_\sigma^*)\, V_{K\sigma}^+ + b_{K\sigma}(u_\sigma^* - u_K^*)\, V_{K\sigma}^- = 0 \end{aligned}}
$$

Cas implicite :

$$\Big(\frac{|K|}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}\,\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geq 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geq 0}\,\underbrace{\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}_{\geq 0}\Big)\, u_K^n = \frac{|K|}{\Delta t^n}\, u_K^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma=K|L}\Big(\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geq 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}_{\geq 0}\Big)\, u_L^n$$

$$+ \sum_{\sigma=K|.}\Big(\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geq 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}_{\geq 0}\Big)\, u_\sigma^n$$

$\Rightarrow$ Combinaison convexe

$\Rightarrow$ principe du maximum.

Cas explicite :

$$\frac{|K|}{\Delta t^n}\, u_K^n = \Big(\frac{|K|}{\Delta t^n} - \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{\left(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right)}_{\geq 0}\Big)\, u_K^{n-1} + \overbrace{\sum_{\sigma=K|L}\left(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right)}^{\geq 0}\, u_L^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma=K|.} \underbrace{\left(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right)}_{\geq 0}\, u_\sigma^{n-1}$$

↳ Condition de positivité $\Rightarrow$ Condition CFL :

$$\Delta t^n \leq \min_{K\in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma\in F_K} a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)} \quad \Longleftarrow \quad \boxed{\Delta t^n \leq \min_{K\in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma\in F_K} \mathrm{Lip}_{F_2}(V_{K\sigma}^n)^+ + \mathrm{Lip}_{F_1}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}}$$

exercice :

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \partial_t u(x,t) + \mathrm{Div}\big(f(u(x,t))\,\vec{V}(x)\big)\,dx\,dt = \frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \big(h^+(x)\,f(c(x)) + h^-(x)\,f(u(x,t))\big)\,dx\,dt$$

$$\int_K \frac{u(x,t^n)-u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K}\Big(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma f(u(x,t))\,\vec{V}(x)\cdot\vec{n}_{K\sigma}\,d\sigma\,dt}_{\overline{F}_{K\sigma}(u)}\Big) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Discrétisation avec Euler explicite + VF :

à discrétiser

$$|K|\,\frac{U_K^n-U_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K}\overline{F}_{K\sigma}(U_h^{n-1}) = \text{``}\int_K h^+(x)\,f(c(x)) + h^-(x)\,f(U_h^{n-1})\,dx\text{''}$$

Quel flux ?