II Schémas VF pour les équations hyperboliques scalaires en dimension 1

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}\times(0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $I^0 = [\min\limits_{x\in\mathbb{R}} u^0(x), \max\limits_{x\in\mathbb{R}} u^0(x)]$
- f est supposée Lipschitz sur I^0 : $\exists\, \mathrm{Lip}_f$

$$|f(v_2) - f(v_1)| \leq \mathrm{Lip}_f \, |v_2 - v_1| \quad \forall (v_2, v_1) \in I^0 \times I^0$$

nb: si $f \in C^1(I^0)$ il est équivalent de supposer que $\max\limits_{u\in I^0} |f'(u)| = \mathrm{Lip}_f$

<u>Prop</u>: il existe une unique solution faible entropique dans $L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$. De plus elle vérifie le principe du maximum $u(x,t)\in I^0 \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)$.

<u>Prop</u>: La solution entropique est la limite pour $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon>0)$ des solutions $u_\varepsilon(x,t)$ de l'équation parabolique

$$\left|\begin{array}{l} \partial_t u_\varepsilon(x,t) + \partial_x f(u_\varepsilon(x,t)) \underbrace{- \varepsilon\, \partial_{x^2} u(x,t)}_{\text{terme diffusif}} = 0 \\ u_\varepsilon(x,0) = u^0(x) \quad x\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

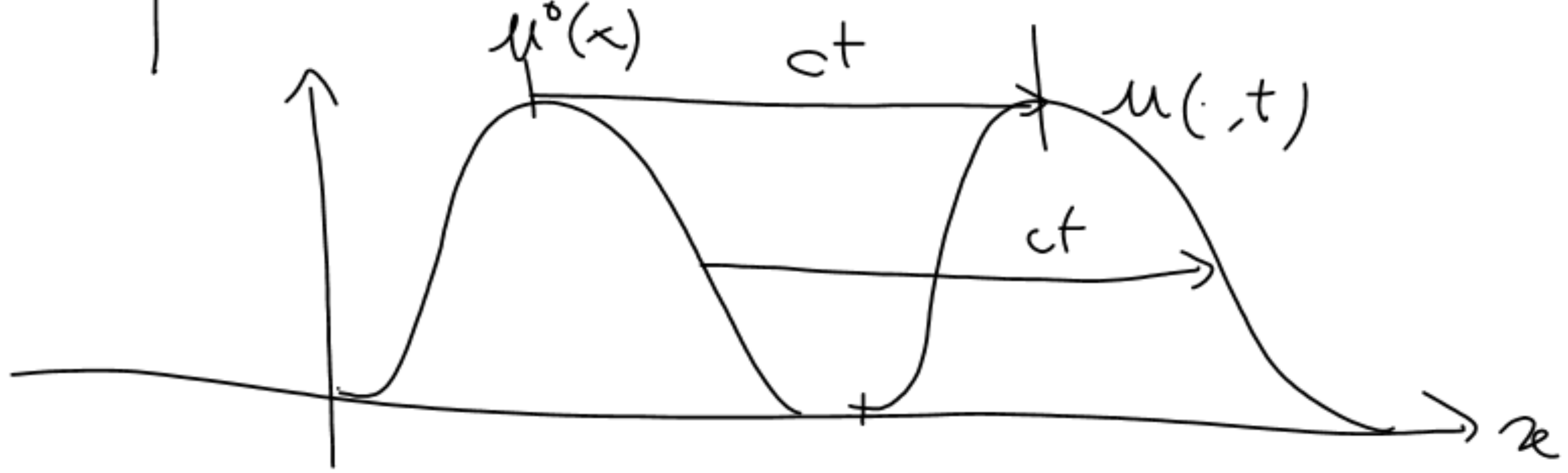
Exemple : $f(u) = cu$, $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

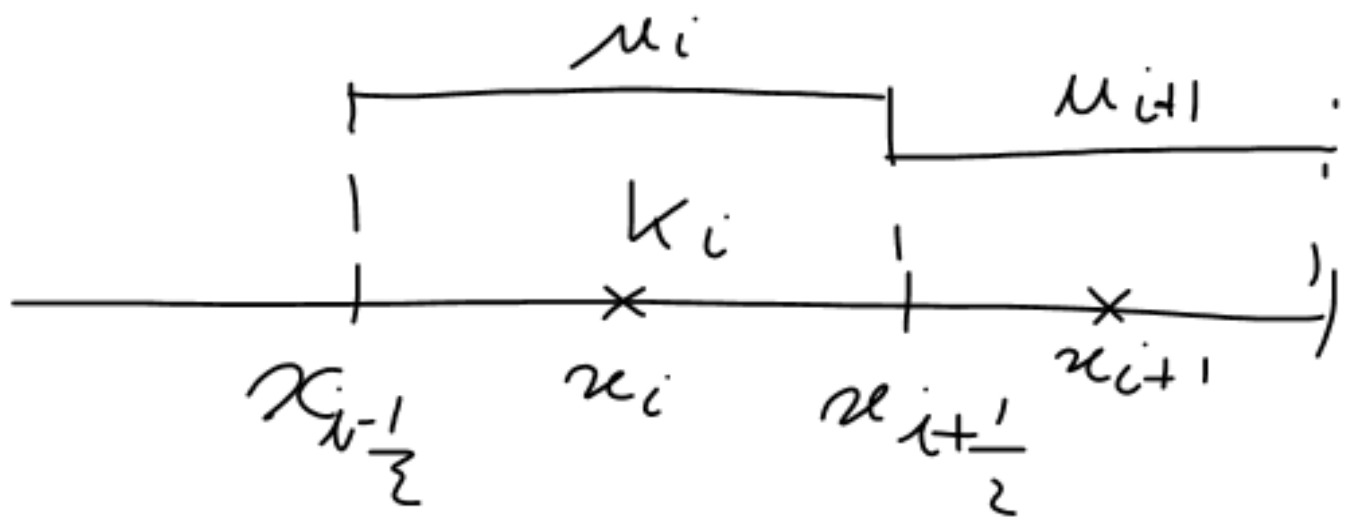
Solution : $\boxed{u(x,t) = u^0(x-ct)}$

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) = -c\,(u^0)'(x-ct) \\ \partial_x u(x,t) = (u^0)'(x-ct) \end{array}\right) \Rightarrow \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0$$

$u(x,0) = u^0(x)$



1 Semi-discrétisation VF en espace



mailles $K_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$, $i \in \mathbb{Z}$

$$x_i = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}$$

$$h_i = |x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}|$$

$$h_{i+\frac{1}{2}} = |x_{i+1} - x_i|$$

Espace des solutions discrètes :

$$V_h = \{ v_h \in L^\infty(\mathbb{R}),\ v_h(x) = v_i \quad \forall x \in K_i,\ \forall i \in \mathbb{Z} \}$$

$$\left| \begin{array}{l} u_h(t) \in V_h \quad \forall t \in (0,T) \\ u_h(x,t) = u_i(t) \quad \forall x \in K_i,\ \forall t \in (0,T) \end{array} \right.$$

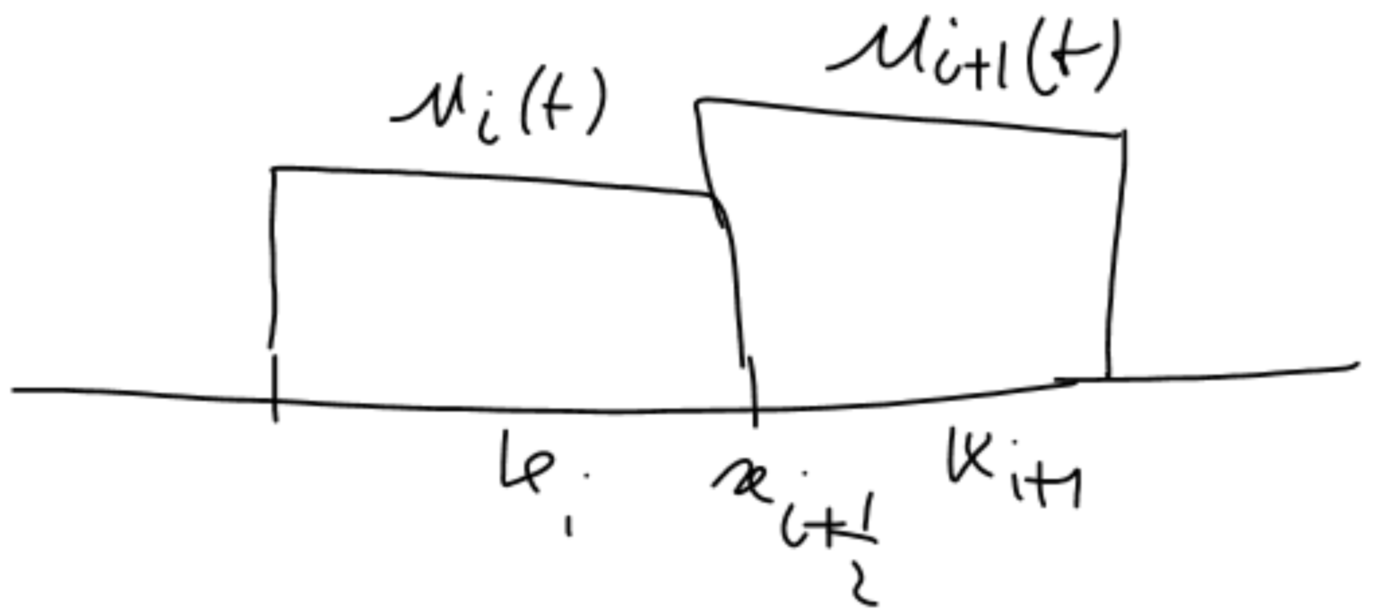
Lois de conservation discrète dans la maille K_i :

$$\int_{K_i} \partial_t u(x,t)\,dx + \int_{x_{i-\frac12}}^{x_{i+\frac12}} \partial_x f(u(x,t))\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_t \int_{K_i} u(x,t)\,dx + \underbrace{\boxed{f(u(x_{i+\frac12},t))}}_{\text{flux continu en } x_{i+\frac12}} - \underbrace{f(u(x_{i-\frac12},t))}_{\text{flux continu en } x_{i-\frac12}} = 0$$

Discrétisation

$$\begin{cases} h_i \dfrac{d u_i(t)}{dt} + \underbrace{\boxed{F_{i+\frac12}(u_h(t))}}_{\text{flux numérique en } x_{i+\frac12}} - \underbrace{F_{i-\frac12}(u_h(t))}_{\text{flux numérique en } x_{i-\frac12}} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\[2ex] u_i(0) = \dfrac{1}{h_i} \displaystyle\int_{K_i} u^0(x)\,dx \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Flux monotone deux point $\longrightarrow$ flux en $x_{i+\frac{1}{2}}$ fonction de la valeur à gauche u_i et à droite u_{i+1}

$$F_{i+\frac{1}{2}}(v,w) = F(v,w)$$

valeur à gauche

valeur à droite

F ne dépend pas de i car f ne dépend que de u et pas de x.

$F(v,w)$ est un flux monotone deux point si il vérifie les 3 propriétés

(i) Consistance : $F(v,v) = f(v)$ (flux exact sur les fonctions constantes) $\forall v \in \mathbb{R}$

(ii) $F(v,w)$ est croissante par rapport à v et décroissante par rapport à w

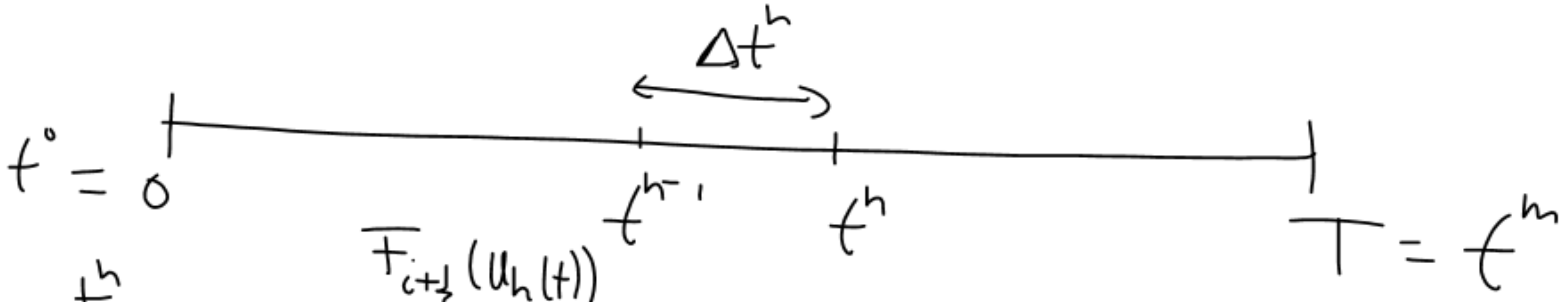
$\longrightarrow$ donnera la stabilité des solutions

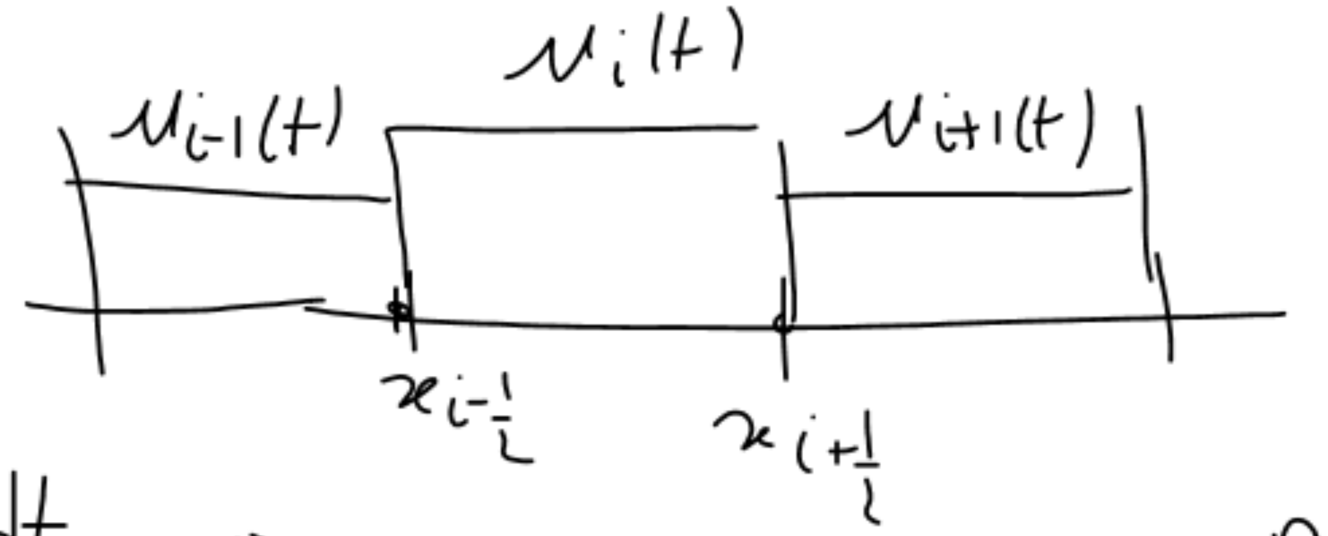
(iii) $F(v,w)$ est Lipschitz sur $I^\circ \times I^\circ$

$$|F(v_2,w) - F(v_1,w)| \leq \underline{Lip_1 F}\, |v_2 - v_1| \quad \forall\, v_1, v_2, w \in I^\circ$$

$$|F(v,w_2) - F(v,w_1)| \leq \underline{Lip_2 F}\, |w_2 - w_1| \quad \forall\, w_1, w_2, v \in I^\circ$$

<u>Discrétisation en temps</u> : schéma d'intégration, exemples de Euler explicite et implicite





$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left(h_i \frac{d}{dt} u_i(t) + \overbrace{F(u_i(t), u_{i+1}(t))}^{F_{i+\frac{1}{2}}(u_h(t))} - \overbrace{F(u_{i-1}(t), u_i(t))}^{F_{i-\frac{1}{2}}(u_h(t))} \right) dt = 0$$

$$h_i \frac{u_i(t^n) - u_i(t^{n-1})}{\Delta t^n} + \frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\Big(F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t))\Big)\, dt = 0$$

<u>notations</u>

$$u_i(t^n) = u_i^n$$

$$u_i^* = \begin{cases} u_i^n & \text{si implicite} \\ u_i^{n-1} & \text{si explicite} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h_i \dfrac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall n = 1, \dots, m \\ u_i^0 = \dfrac{1}{h_i} \displaystyle\int_{K_i} u^0(x)\,dx \quad \forall i \in \mathbb{Z} \qquad * = \begin{cases} n & \text{si implicite} \\ n-1 & \text{si explicite} \end{cases} \end{array}}$$

<u>Exemple du cas linéaire $f(u) = cu$</u> $\longrightarrow$ flux centré $F(v,w) = c\left(\dfrac{v+w}{2}\right)$

<u>non monotone</u>

$F(v,w) = \alpha v + \beta w + \gamma$ flux linéaire général

- Consistance du flux : exact sur les constants $v = w \in \mathbb{R}$

$$F(v,v) = (\alpha+\beta)v + \gamma = f(v) = cv \quad \forall v \in \mathbb{R} \iff \left|\begin{array}{l} \alpha+\beta = c \\ \gamma = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad F(v,w) = \alpha v + (c-\alpha) w = \overline{c\left(\frac{v+w}{2}\right)} \underbrace{- c\left(\frac{v+w}{2}\right) + \alpha v + (c-\alpha) w}_{\overline{(\alpha - \frac{c}{2})(v-w)}^{D}}$$

$$= c\left(\frac{v+w}{2}\right) + D(v-w)$$

flux consistants pour $f(u) = c\,u$

$$F(v,w) = \underbrace{\frac{c(v+w)}{2}}_{\text{flux centré}} + \underbrace{D(v-w)}_{\text{flux diffusif}} \quad , D \in \mathbb{R}$$

qui approxime $- \boxed{D h_{i+\frac{1}{2}}} \, u'(x_{i+\frac{1}{2}})$

$\downarrow$ coefficient de Diffusion

<u>Rappel</u> : on a discrétisé le flux diffusif

$-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ par $F_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \dfrac{v-w}{h_{i+\frac{1}{2}}}$

<u>Critère de flux monotone</u> $\rightarrow$ condition sur D.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{c}{2} + D \geq 0 \\ \frac{c}{2} - D \leq 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} D \geq -\frac{c}{2} \\ D \geq \frac{c}{2} \end{array} \right.$$

(F <u>croissant par rapport v</u>)

(F <u>décroissant par rapport à w</u>)

si $c \geq 0 \Rightarrow D \geq \frac{c}{2} = \frac{|c|}{2}$

si $c \leq 0 \Rightarrow D \geq \frac{|c|}{2}$

$\iff \boxed{D \geq \frac{|c|}{2}}$

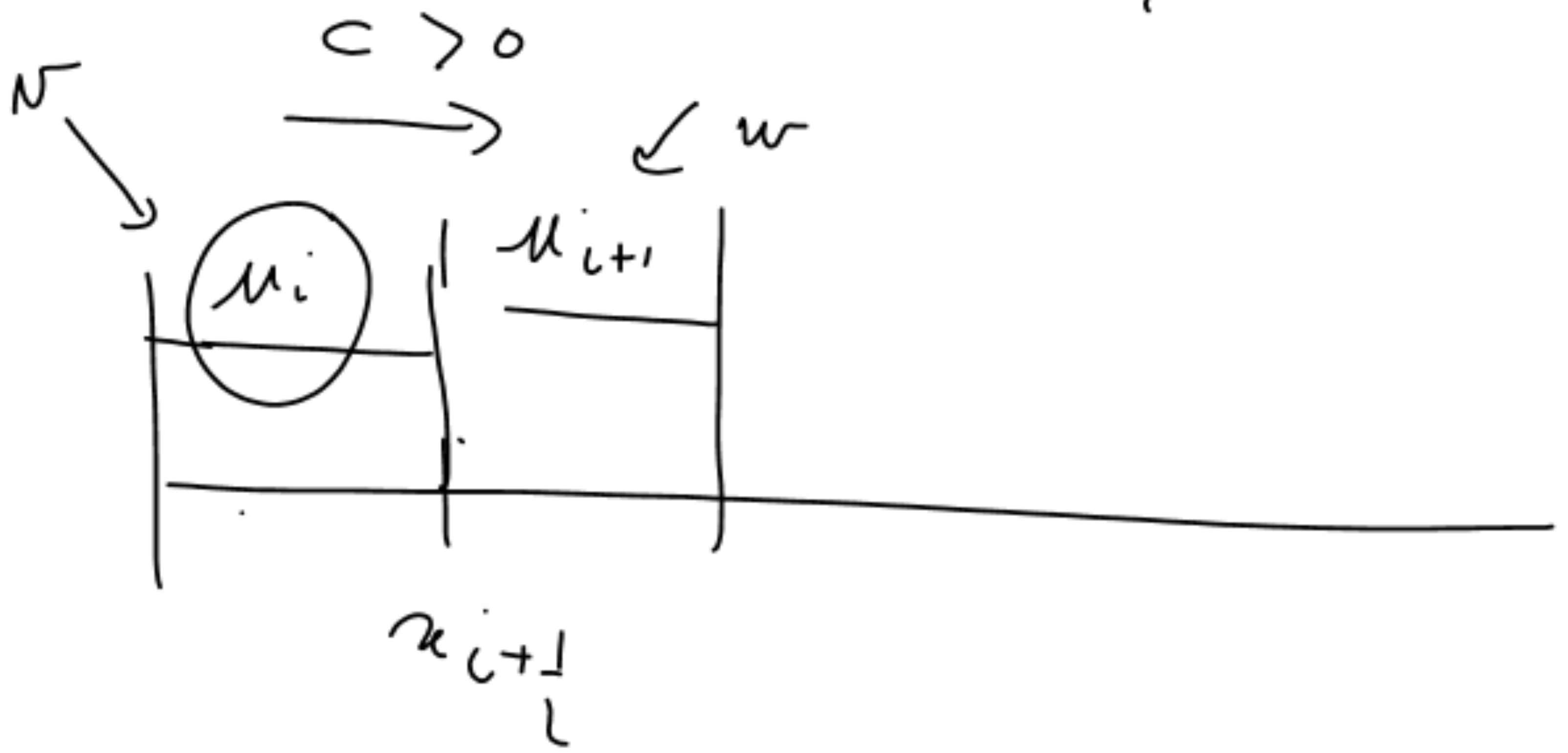
Le meilleur choix correspond au flux monotone le plus proche du flux centré : $D = |c|/2$

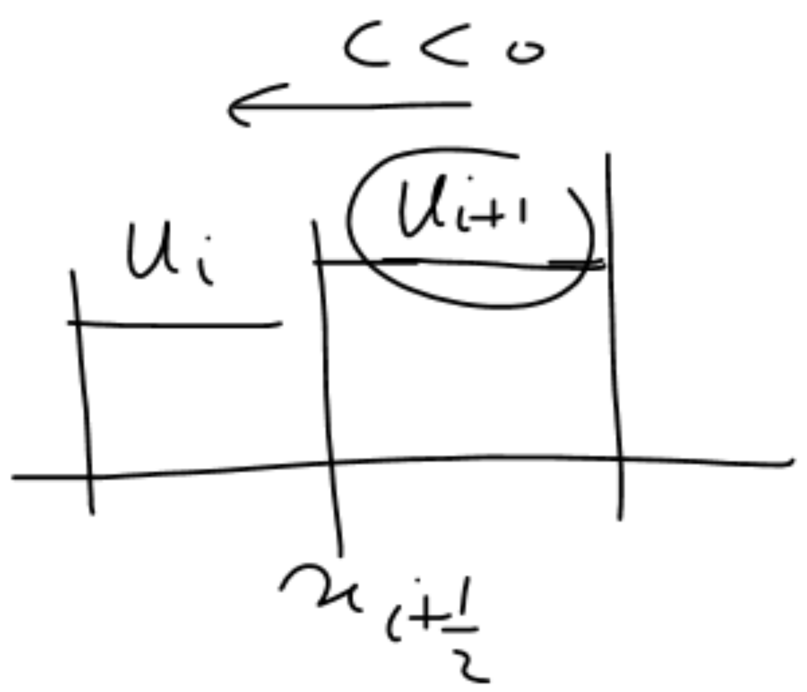
Flux de Godunov = flux
- upwind
- décentré amont

pour $f(u) = cu$

obtenu avec $D = \frac{|c|}{2}$ (flux monotone le moins diffusif)

$$F(\overset{\text{à g}}{v}, \overset{\text{à d}}{w}) = c\,\frac{(v+w)}{2} + \frac{|c|}{2}(v-w) = \begin{cases} c\,v & \text{si } c \geq 0 \\ c\,w & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$$





$$F(v,w) = c\,\frac{(v+w)}{2} + D(v-w)$$ flux linéaire consistants $D \in \mathbb{R}$.

On étudie la stabilité du schéma par le principe du maximum en imposant le critère de combinaison convexe.

valeur à gauche, valeur à droite

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + c\,\frac{u_i^* + u_{i+1}^*}{2} + D(u_i^* - u_{i+1}^*) \underbrace{- c\,\frac{(u_{i-1}^* + u_i^*)}{2} - D(u_{i-1}^* - u_i^*)}_{-F_{i-\frac12} = F(u_{i-1},u_i)} = 0$$

<u>Cas implicite $* = n$</u> : $\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} + \cancel{\frac{c}{2}} + D - \cancel{\frac{c}{2}} + D\right) u_i^n = \frac{h_i}{\Delta t_n} u_i^{n-1} + \left(D - \frac{c}{2}\right) u_{i+1}^n + \left(\frac{c}{2} + D\right) u_{i-1}^n$

Combinaison Convexe $\iff$ $D - \frac{c}{2} \geq 0$, $D + \frac{c}{2} \geq 0$ $\iff$ $\boxed{D \geq \frac{|c|}{2}}$ Condition de monotonie

$\Rightarrow$ Sous cette condition le schéma implicite vérifie le principe du maximum $u_i^n \in I^0$ $\forall$ $i \in \mathbb{Z}$, $n = 0, \ldots, m$ $\forall\, \Delta t_n > 0$

Cas explicite :

$$h_i \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t_n} + C\left(\frac{U_i^{n-1} + U_{i+1}^{n-1}}{2}\right) + D\left(U_i^{n-1} - U_{i+1}^{n-1}\right) - \frac{C}{2}\left(U_{i-1}^{n-1} + U_i^{n-1}\right) - D\left(U_{i-1}^{n-1} - U_i^{n-1}\right) = 0$$

$$\frac{h_i}{\Delta t_n} U_i^n = \underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} - \cancel{\frac{C}{2}} - D + \cancel{\frac{C}{2}} - D\right)} U_i^{n-1} + \underbrace{\left(D - \frac{C}{2}\right)} U_{i+1}^{n-1} + \underbrace{\left(\frac{C}{2} + D\right)} U_{i-1}^{n-1}$$

Combinaison Convexe
$$\left|\begin{array}{l} D - \frac{C}{2} \geqslant 0 \\ D + \frac{C}{2} \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \boxed{D \geqslant \frac{|C|}{2}}$$
la même condition fournie par la monotonie

Condition de stabilité en temps : $\frac{h_i}{\Delta t_n} - 2D \geqslant 0 \iff \Delta t_n \leqslant \frac{h_i}{2D} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

"Condition CFL"

$$\boxed{\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / 2D}$$

Pour le schéma monotone le moins diffusif $D = \frac{|C|}{2}$: $\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / |C| \implies$ "on ne peut propager le signal de plus d'1 maille en 1 pas de temps"

Avec un schéma explicite

le schéma explicite vérifie le principe du maximum $u_i^n \in I^\circ$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall n = 0, \dots, m$

si $D \geq \frac{|c|}{2}$ (monotonie) et sous la condition CFL

$$\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / 2D \quad \forall n = 1, \dots, m$$

Exemples de flux monotones :

"schéma décentré amont" ou "schéma de Godunov en tant que cas particulier"

- Cas où f est croissante : $F(v,w) = f(v)$ est un flux consistant monotone.
- Cas où f est décroissante : $F(v,w) = f(w)$
- $F(v,w) = \frac{f(v)+f(w)}{2} + D(v-w)$, $D \geq \frac{1}{2} \max_{z \in I^\circ} |f'(z)|$ si $f \in C^1(I^\circ)$; $D \geq \frac{1}{2} \mathrm{Lip}\, f$

- si $f(v) = \overset{\nearrow}{f^1}(v) + \overset{\searrow}{f^2}(v)$; $F(v,w) = f^1(v) + f^2(w)$ est un flux consistant monotone

- schéma de Godunov :

$$F(v,w) = \begin{cases} \displaystyle\min_{s \in [v,w]} f(s) & \text{si } v \leq w \\[2ex] \displaystyle\max_{s \in [w,v]} f(s) & \text{si } v \geq w . \end{cases}$$

Prop : Soit $F(v,w)$ un flux consistant monotone. Sous la condition CFL $\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / (Lip F_1 + Lip F_2)$ $\forall n = 1, \dots, m$, alors le schéma d'Euler explicite admet une solution unique et elle vérifie le principe du maximum $u_i^n \in I^0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ $\forall n = 1, \dots, m$.

Prop : Soit $F(v,w)$ un flux consistant monotone, alors le schéma d'Euler implicite admet une solution unique. De plus elle vérifie le principe du maximum $\forall \Delta t_n > 0$ avec $u_i^n \in I^0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ $\forall n = 1, \dots, m$

preuve :

$$h_i \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} + F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_i^*, u_i^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*) + F(u_i^*, u_i^*) = 0$$

$$\underline{0} \leqslant \overbrace{\frac{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_i^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i+1}^*}}^{b_i^*} \leqslant \underline{\mathrm{Lip}_{F_2}}$$

$$\underline{0} \leqslant \underbrace{\frac{-F(u_{i-1}^*, u_i^*) + F(u_i^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i-1}^*}}_{a_i^*} \leqslant \underline{\mathrm{Lip}_{F_1}}$$

$$h_i \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t_n} + b_i^*(u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) = 0$$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + b_i^*(u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) = 0$$

<u>Cas explicite</u> :

$$\frac{h_i}{\Delta t_n} u_i^n = \underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} - b_i^{n-1} - a_i^{n-1}\right)}\, u_i^{n-1} + \underbrace{b_i^{n-1}}_{\geq 0} u_{i+1}^{n-1} + \underbrace{a_i^{n-1}}_{\geq 0} u_{i-1}^{n-1}$$

"Combinaison convexe" $\Rightarrow$ On obtient la condition CFL : $\frac{h_i}{\Delta t_n} - b_i^{n-1} - a_i^{n-1} > 0 \iff \Delta t_n \leq \frac{h_i}{a_i^{n-1} + b_i^{n-1}}$

si $\Delta t_n \leq \frac{h_i}{Lip_{F_1} + Lip_{F_2}}$ ce sera vérifié

donc on obtient la condition CFL $\Delta t_n \leq \min\limits_{i \in \mathbb{Z}} h_i \Big/ (Lip_{F_1} + Lip_{F_2})$

<u>Cas implicite</u> :

$$\underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} + a_i^n + b_i^n\right)}_{>0} u_i^n = \underbrace{b_i^n}_{\geq 0} u_{i+1}^n + \underbrace{a_i^n}_{\geq 0} u_{i-1}^n + \underbrace{\frac{h_i}{\Delta t_n}}_{>0} u_i^{n-1}$$

on a la combinaison convexe <u>$\forall \Delta t_n > 0$</u>

$\boxed{c \geq 0}$

<u>Equation équivalente</u> : $f(u) = cu$, $h_i = h \ \forall i \in \mathbb{Z}$, $\Delta t_n = \Delta t \ \forall n$

On va injecter $u_i^n = u(x_i, t_n)$ avec $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,T))$ dans le schéma

on cherche une équation "équivalente" vérifiée par u en (x_i, t_n) à l'ordre $h^2 + \Delta t^2 + h\Delta t$.

<u>Cas implicite</u> : $$\partial_t u + \partial_x(cu) - \frac{hc}{2}\left(1 + CFL\right)\partial_x^2 u = O(h^2 + \Delta t^2 + h\Delta t)$$

CFL = nombre "CFL"

$= \dfrac{c\,\Delta t}{h}$

<u>Cas explicite</u> : $$\partial_t u + \partial_x(cu) - \frac{hc}{2}\left(1 - CFL\right)\partial_x^2 u = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Exercice :

$\boxed{c \geq 0}$

$\nu > 0$

$$\begin{cases} \overbrace{\boxed{c\,u'(x)}}^{\text{Convection}} \; \underbrace{\boxed{-\,\nu\, u''(x)}}_{\text{Diffusion}} = 0 \quad \text{sur } (0,1) \\ u(0) = U_D^0 \\ u(1) = U_D^1 \end{cases}$$

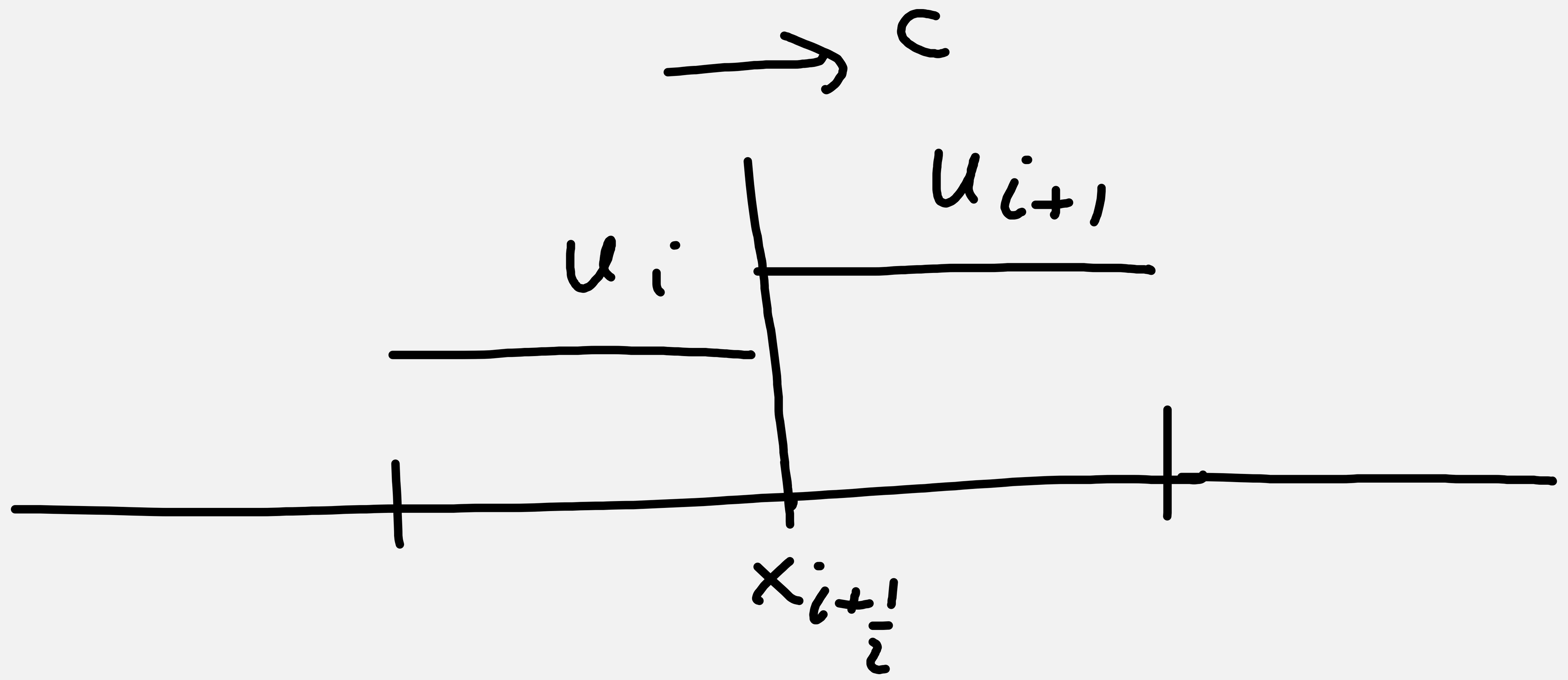


Schéma : $\boxed{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} = 0}$ $\qquad \boxed{\theta_{i+\frac{1}{2}} \in [\tfrac{1}{2}, 1]}$

avec
$$f_{i+\frac{1}{2}} = \underbrace{\boxed{\nu\, \frac{U_i - U_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}}}}_{\text{Diffusion}} + \overbrace{\boxed{c\left(\theta_{i+\frac{1}{2}} U_i + (1-\theta_{i+\frac{1}{2}})U_{i+1}\right)}}^{\text{flux convectif}}, \quad i = 0, \dots, N$$

$U_0 = U_D^0$, $U_{N+1} = U_D^1$

1

$\theta_{i+\frac{1}{2}} = 1 \longrightarrow$ schéma décentré amont, = schéma de Godunov

$\boxed{\theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}} \longrightarrow$ schéma centré

$$c u' - \nu u'' = 0 \iff (\underbrace{c u - \nu u'})' = 0$$

fonction flux = | flux convectif $c u$
flux diffusif $-\nu u'$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (c u - \nu u')'(x)\, dx$$

$$= \underbrace{c u(x_{i+\frac{1}{2}}) - \nu u'(x_{i+\frac{1}{2}})}_{\text{flux continu en } x_{i+\frac{1}{2}}} - \Big[\overbrace{c u(x_{i-\frac{1}{2}}) - \nu u'(x_{i-\frac{1}{2}})}^{\text{flux continu en } x_{i-\frac{1}{2}}}\Big] = 0$$

$$\underline{f_{i+\frac{1}{2}}(u_i, u_{i+1})} - \underline{f_{i-\frac{1}{2}}(u_{i-1}, u_i)} = 0$$

$$\nu \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac12}} + c\left(\theta_{i+\frac12} u_i + (1-\theta_{i+\frac12}) u_{i+1}\right) - \nu \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-\frac12}} - c\left(\theta_{i-\frac12} u_{i-1} + (1-\theta_{i-\frac12}) u_i\right) = 0$$

$$\Big(\underbrace{\frac{\nu}{h_{i+\frac12}} + \frac{\nu}{h_{i-\frac12}}}_{>0} + \underbrace{c\,\theta_{i+\frac12} + c(\theta_{i-\frac12} - 1)}_{\geq 0}\Big) u_i = \underbrace{\Big(\frac{\nu}{h_{i+\frac12}} - c(1-\theta_{i+\frac12})\Big)}\, u_{i+1} + \Big(\underbrace{\frac{\nu}{h_{i-\frac12}} + c\,\theta_{i-\frac12}}_{>0}\Big) u_{i-1}$$

On a supposé $\underline{\theta_{i+\frac12} \in [\frac12, 1]}$

$\Rightarrow \quad c(\theta_{i+\frac12} + \theta_{i-\frac12} - 1) \geq 0$

Critère de combinaison convexe : $\Rightarrow \quad \dfrac{\nu}{h_{i+\frac12}} - c(1-\theta_{i+\frac12}) \geq 0 \iff \boxed{\theta_{i+\frac12} \geq 1 - \boxed{\dfrac{\nu}{c\, h_{i+\frac12}}}}$

Condition de stabilité

$\dfrac{\nu}{c\, h_{i+\frac12}} = \dfrac{1}{Pe_h}$

Nombre de Peclet local à la maille :

$$\boxed{Pe_h = \frac{c}{\frac{\nu}{h_{i+\frac12}}}}$$

<u>on prend</u> $\boxed{\theta_{i+\frac12} = \max\left(\frac12,\ 1 - \frac{\nu}{c\, h_{i+\frac12}}\right)}$ "le plus petit stable plus grand que $\frac12$".

On peut choisir $\theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ "schéma centré"

Si $1 - \frac{1}{Pe_h} \leqslant \frac{1}{2} \iff \boxed{Pe_h \leqslant 2}$

$$Pe_h = \frac{c\, h_{i+\frac{1}{2}}}{\nu}$$