Schémas VF pour les équations elliptique en dimension $d=1,2,3$

problème modèle : $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u(x)=0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$

Ω polytope borné $\begin{cases} \text{segment si } d=1 \\ \text{polygone si } d=2 \\ \text{polyèdre si } d=3 \end{cases}$

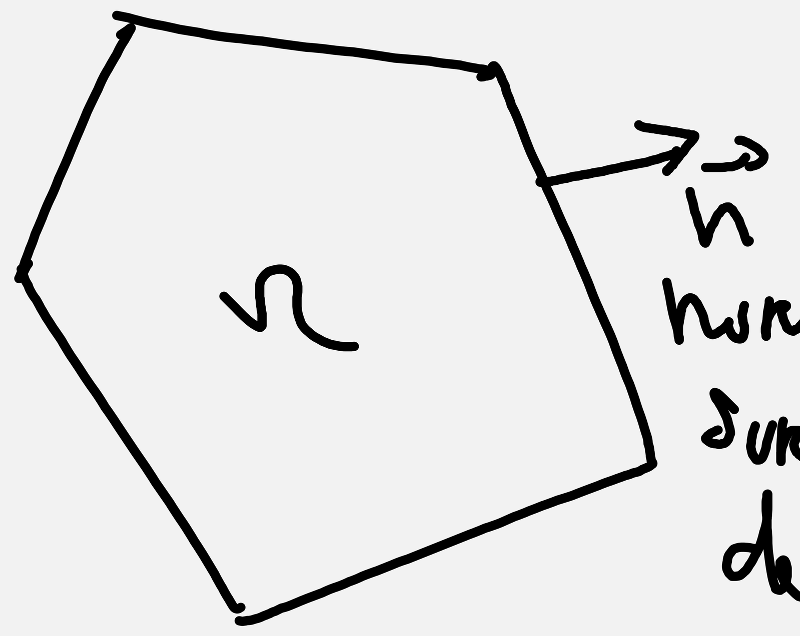
Espace des solutions : $H^1_0(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega |\nabla u|^2(x)\,dx < +\infty \text{ et } v=0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$

Formulation variationnelle : fonction test $v \in H^1_0(\Omega)$

$$(-\Delta u)v = +\mathrm{Div}(-\nabla u\, v) + \nabla u \cdot \nabla v$$

formule de Stokes : $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\vec{F}(x))\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(x)\cdot\vec{n}\,d\sigma(x)$$



$\vec{n}$ normale sortant de $\partial\Omega$

$$\int_\Omega -\Delta u \, v \, dx = \int_\Omega \left(\operatorname{div}(-\nabla u \, v) + \nabla u . \nabla v\right) dx = \int_{\partial\Omega} (-\nabla u . \vec{n}) \underbrace{v}_{0} \, d\sigma(x) + \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx$$

car $v \in H_0^1(\Omega)$

$$= \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx$$

(V) On obtient donc la formulation variationnelle :

$u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\displaystyle\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

<u>Proposition</u> : par Lax-Milgram, il existe une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de (V)

<u>Inégalité de Poincaré</u> : $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \operatorname{diam}(\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \operatorname{diam}(\Omega) = \max\limits_{x,y \in \Omega} |y - x|$

avec $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx} = \sqrt{\langle \nabla v, \nabla v \rangle_{H_0^1}}$

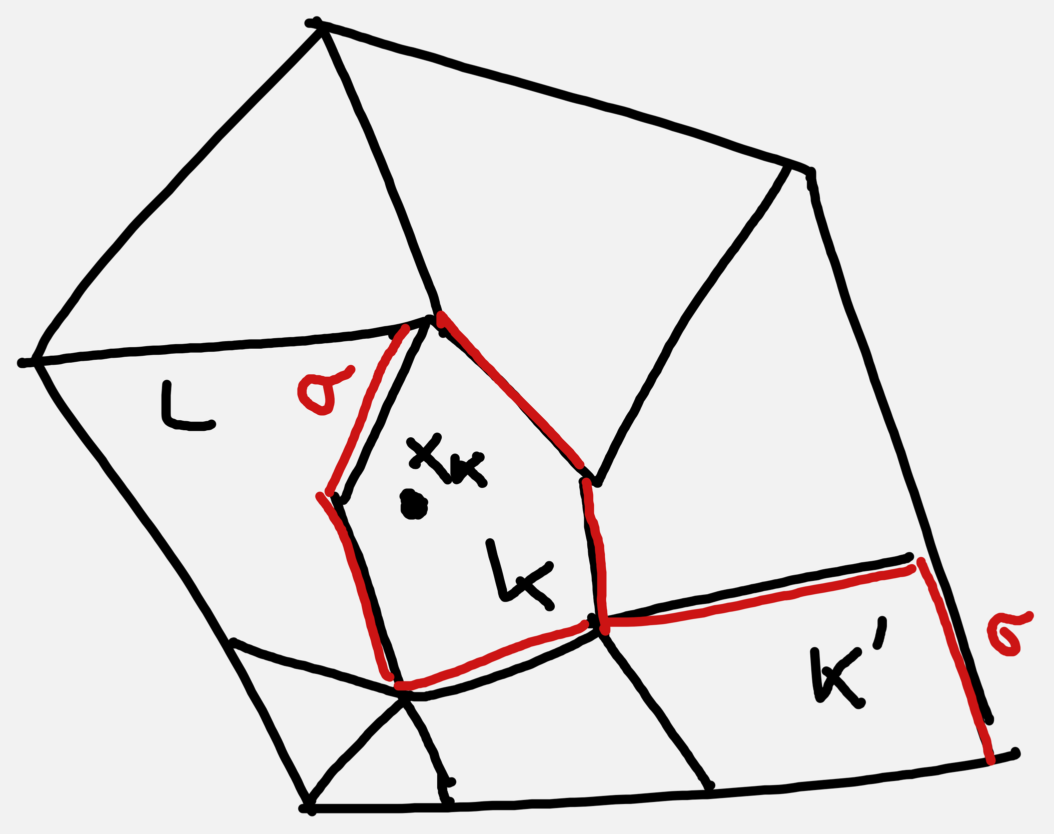
$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \displaystyle\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx$

Estimation a priori : $v = u \Rightarrow \|u\|^2_{H^1_0} = \int_\Omega f u \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$

$$\leq \operatorname{diam}(\Omega) \|u\|_{H^1_0} \|f\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^1_0} \leq \operatorname{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2}$$

Discrétisation du domaine Ω :

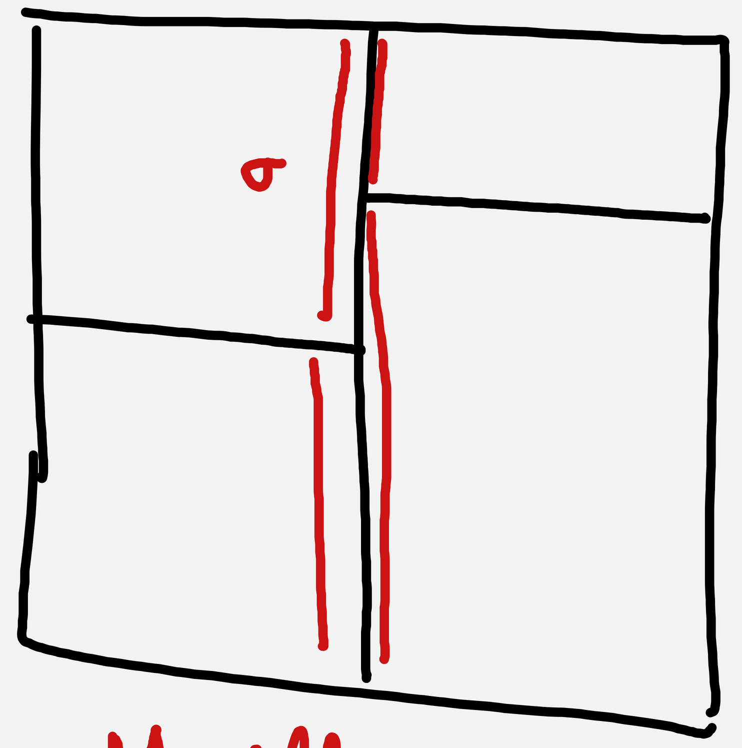


- on partitionne le domaine en mailles $K \in \mathcal{M}_h$
- on note $x_K \in K$ "le centre de maille"
- on définit l'ensemble des faces $\sigma \in \mathcal{F}_h$ des mailles qui sont les intersection $\partial K \cap \partial L$ des mailles voisines contraintes à être planes.

- on note $M_\sigma = \{ K \in M_h \text{ tq. } \sigma \cap \partial K$ est de mesure surfacique (d-1 dimension) non nulle $\}$

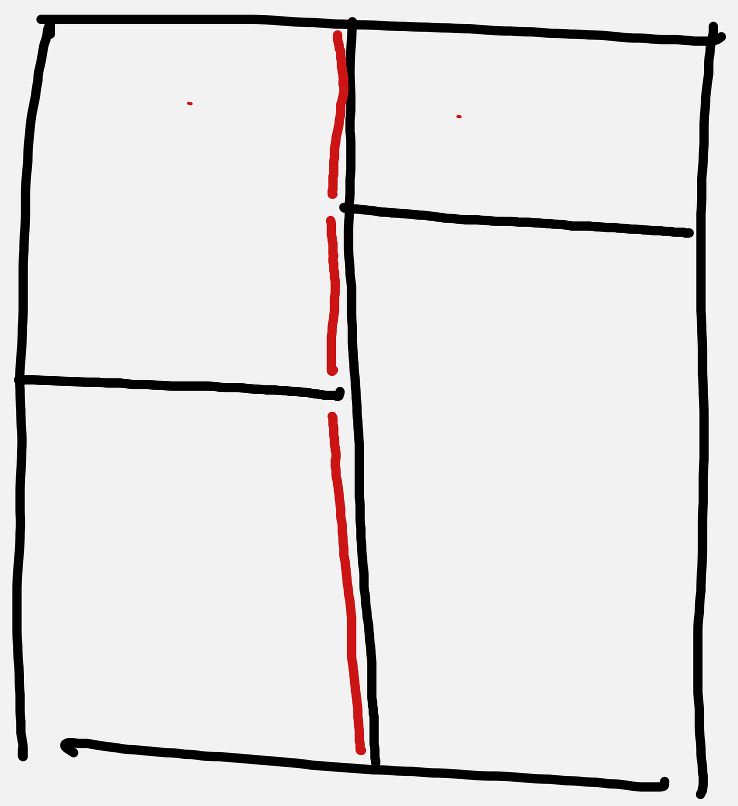
- on suppose que soit $M_\sigma = \{K, L\}$ $\rightarrow$ σ est une face intérieure
  soit $M_\sigma = \{K\}$ $\rightarrow$ σ est une face de bord

Contre exemple :



mauvaise définition des faces.

Maillage non conforme interdit



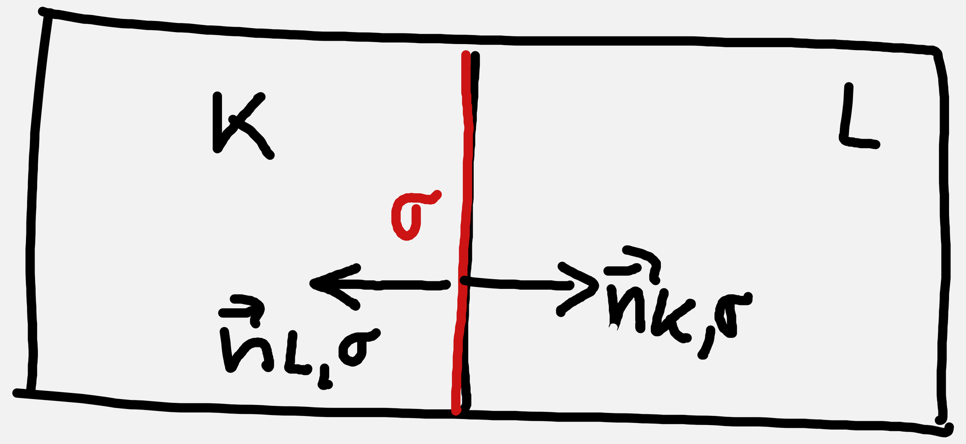
$$F_h^{int} = \{ \sigma \in F_h \text{ tq. } M_\sigma = \{K, L\} \}$$

$$F_h^{ext} = \{ \sigma \in F_h \text{ tq } M_\sigma = \{K\} \}$$

on notera $\sigma = K|L$ pour $\sigma \in F_h^{int}$

on notera $\sigma = K|$ pour $\sigma \in F_h^{ext}$

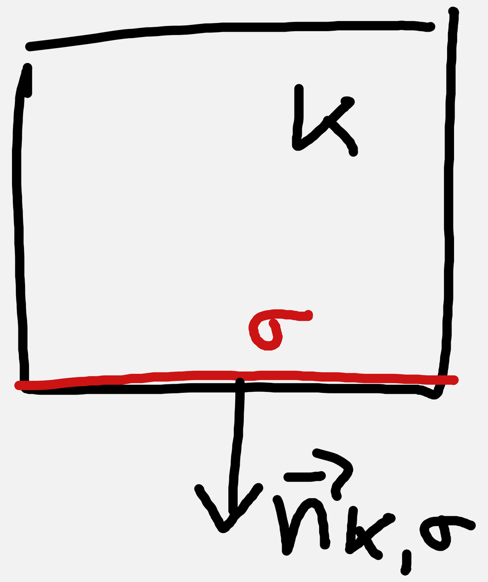
• normales aux faces :



$\sigma \in \mathcal{F}_h^{int}$

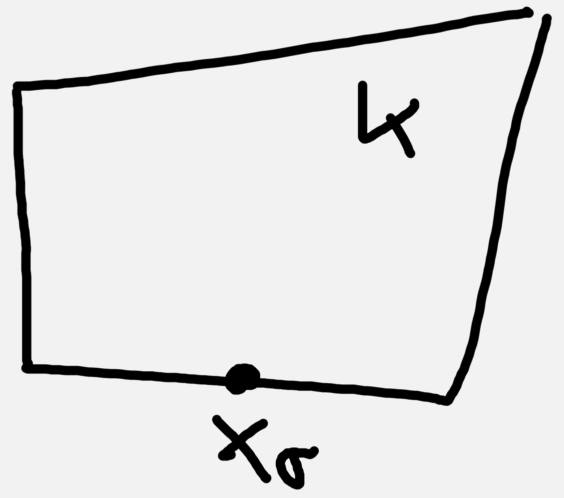
$\vec{n}_{K,\sigma} + \vec{n}_{L,\sigma} = 0$

$\vec{n}_{K,\sigma}$: sortante de K ; $\vec{n}_{L,\sigma}$: sortante de L



$\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$

$\vec{n}_{K,\sigma}$ normale sortante de K

• 

x_σ, $\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$ est "le centre de face"

• on note $|K|$ le volume de la maille
• on note $|\sigma|$ la <u>surface</u> de la face | "surface = mesure en dimension $d-1$"
• $h = \max_{K \in \mathcal{M}_h} \left(\mathrm{diam}(K) \right)$

• Discrétisation des fonctions : $V_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \text{ tq. } v_h(x) = v_K \ \forall x \in K \ \forall K \in \mathcal{M}_h \right\}$

↳ discrétisation non conforme car $V_h \not\subset H^1_0(\Omega)$

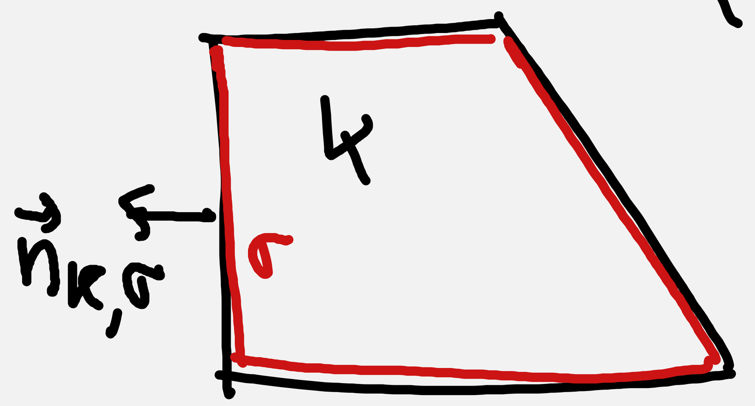
• Discrétisation de l'équation :

→ on écrit l'équation sous forme conservative : $\operatorname{Div}(-\nabla u) = f$

$-\nabla u$ est le vecteur flux

→ on intègre l'équation dans la maille et on applique la formule de Stokes

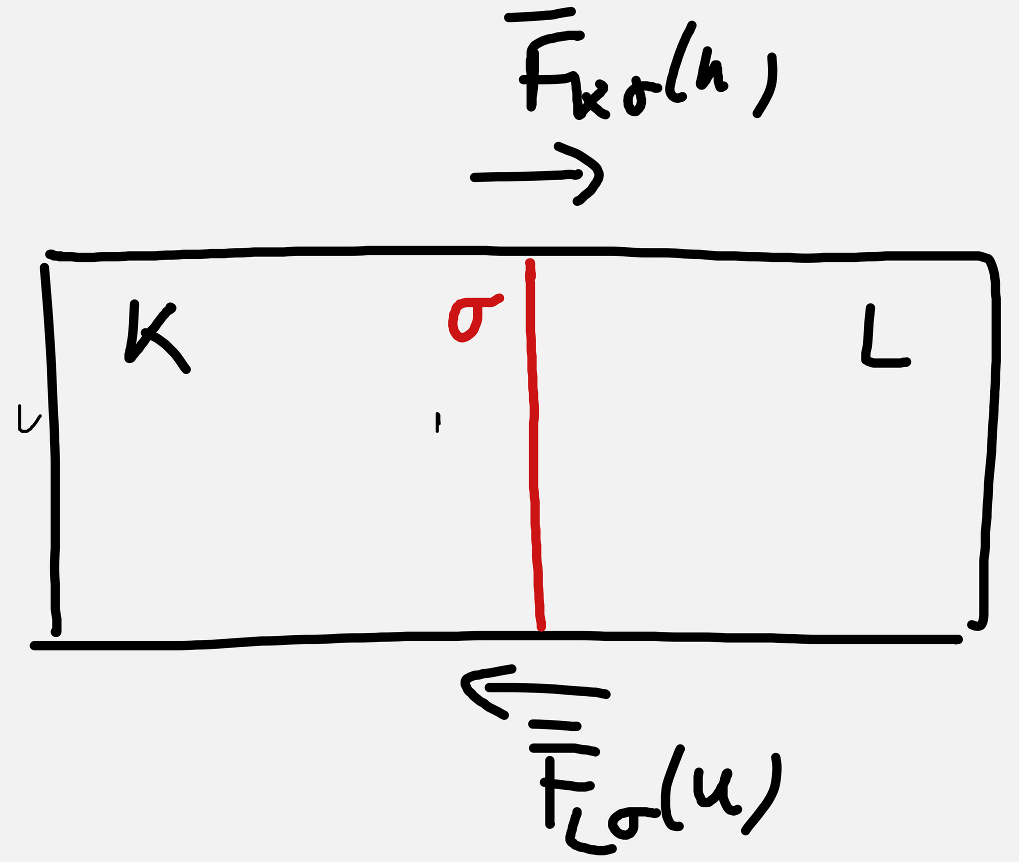
$$\int_K f\,dx = \int_K \operatorname{div}(-\nabla u)\,dx = \int_{\partial K} -\nabla u \cdot \vec{n}_K(x)\,d\sigma(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \underbrace{\int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K,\sigma}\,d\sigma(x)}_{}$$



où $\mathcal{F}_K$ est l'ensemble des faces de K

flux noté $F_{K\sigma}(u)$ sur la face σ sortant de K.

$\underline{\sigma \in \mathcal{F}_h^{int}}$



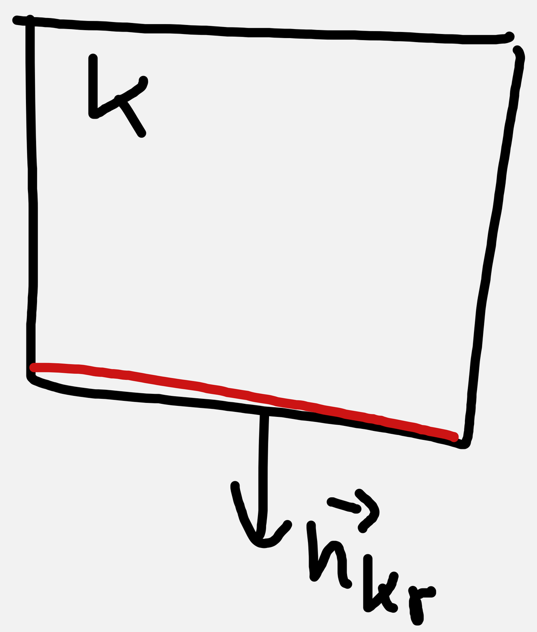
$$\overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x)$$

$$\overline{F}_{L\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{L\sigma} \, d\sigma(x)$$

on la conservativité du flux $\boxed{\overline{F}_{K\sigma}(u) + \overline{F}_{L\sigma}(u) = 0}$

$$\int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x) + \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{L\sigma} \, d\sigma(x) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \overbrace{(\vec{n}_{K\sigma} + \vec{n}_{L\sigma})}^{0} \, d\sigma = 0$$

$\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$

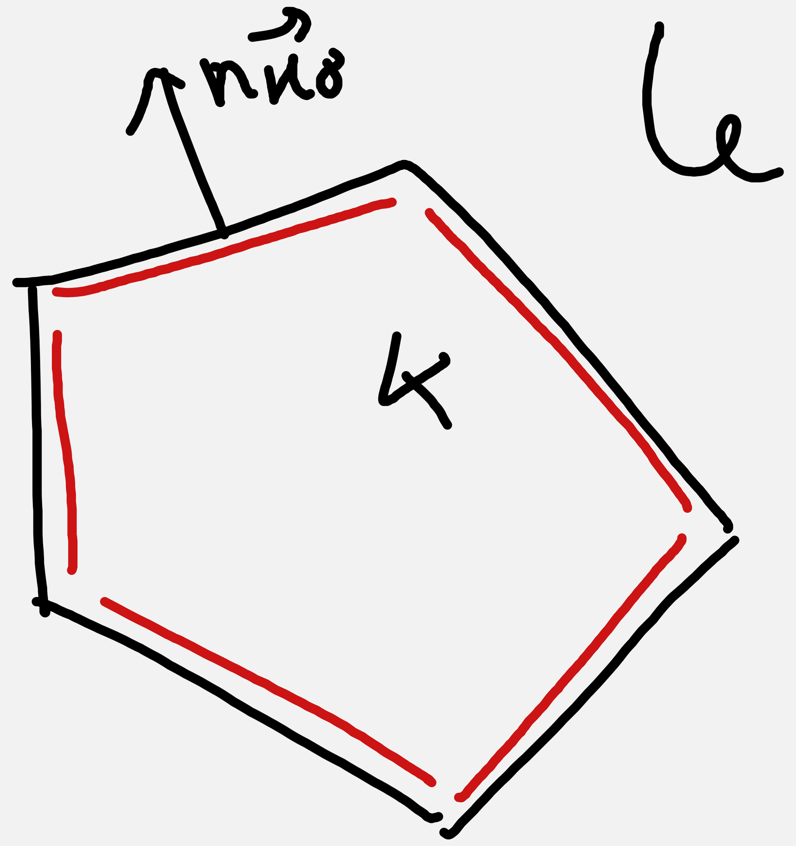


$$\overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x)$$

Equation de conservation dans la maille :

$$\sum_{\sigma\in F_K} \overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_K f\,dx \qquad \text{avec} \qquad \underline{\overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u\cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma(x)}$$

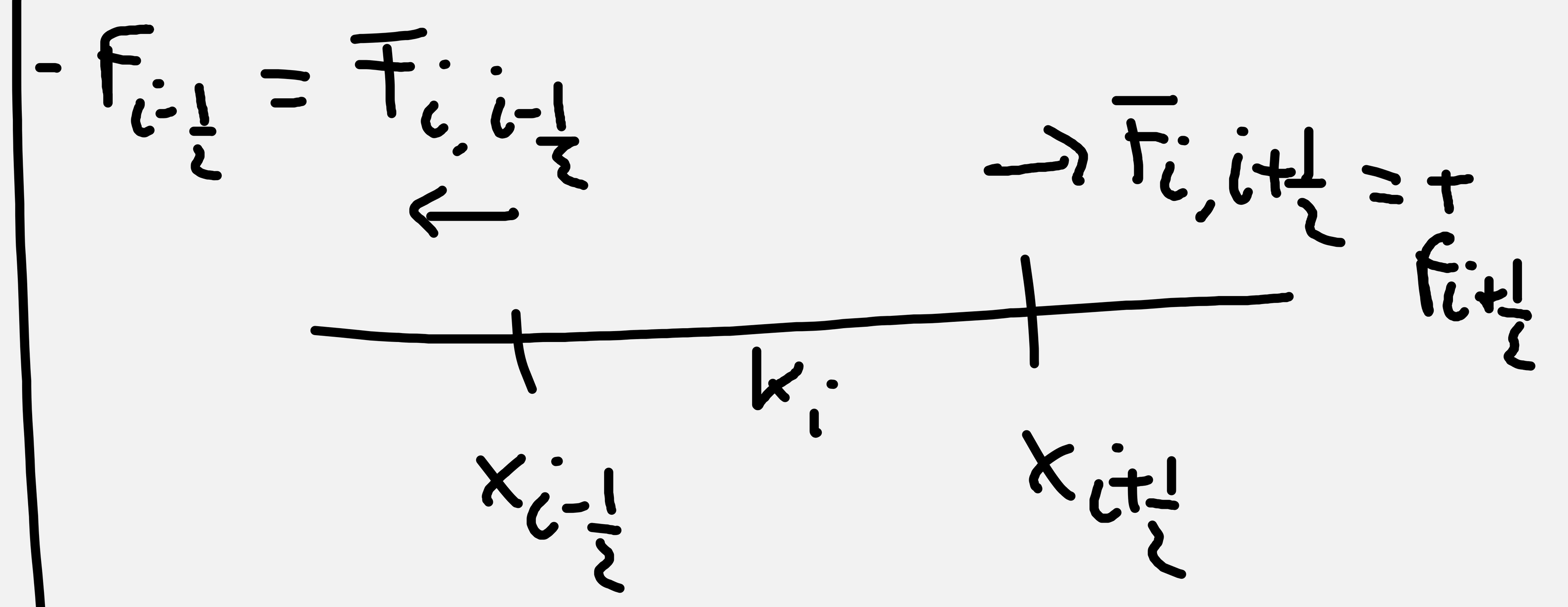
On est donc ramené à construire des flux numériques notés $\underline{F_{K\sigma}(u_h)}$



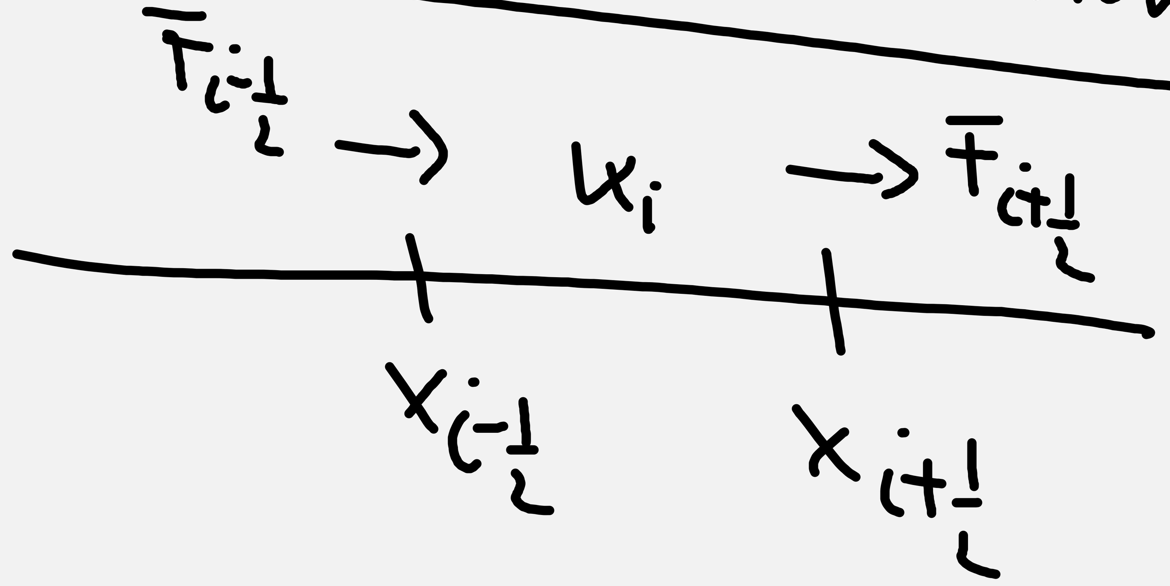
Le schéma VF s'écrit

$$\boxed{\sum_{\sigma\in F_K} F_{K\sigma}(u_h) = \int_K f(x)\,dx \qquad \underline{\forall K \in M_h}}$$

$$\overbrace{F_{i,i+\frac12}}^{F_{i+\frac12}} + \overbrace{F_{i,i-\frac12}}^{-F_{i-\frac12}} = \int_{K_i} f\,dx$$



Lien avec la dimension 1 :



$$F_{i+\frac12}(u_h) - F_{i-\frac12}(u_h) = \int_{K_i} f(x)\,dx$$

propriétés des <u>flux numériques</u> $F_{K\sigma}(u_h)$

① flux linéaires par rapport à u_h + <u>u_σ</u> aux bords

② Conservativité des flux $F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}_h^{int}$
$\forall u_h \in V_h$

③ Consistance des flux

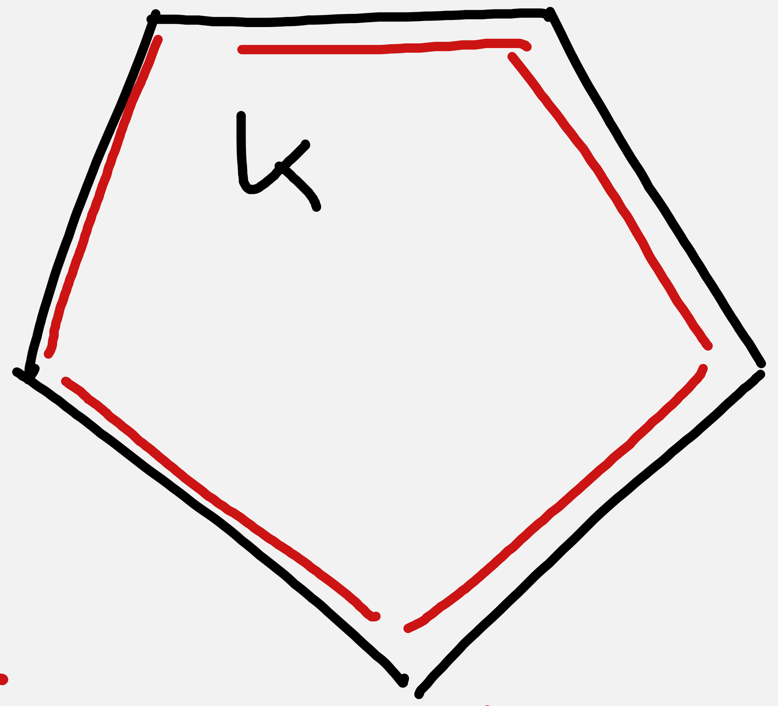
<u>erreur de consistance</u>: $R_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x) - F_{K\sigma}(I_h u)$

<u>interpolant</u> $I_h : C^0(\bar{\Omega}) \to V_h$
$u \mapsto (I_h u)_K = u(x_K) \quad \forall K \in \mathcal{M}_h.$

on dit le flux est consistant si $|R_{K\sigma}(u)| \leq C(u)|\sigma| h \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega})$

④ Coercivité des flux :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in M_h} \left(\sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h) \right) v_K$$



F_K = ensemble des faces de K.

Le schéma est dit coercif si $\exists \; \| \; \|_{1,h}$ norme H^1_0 discrète et une constante α indépendante h pour une famille de maillages t.q

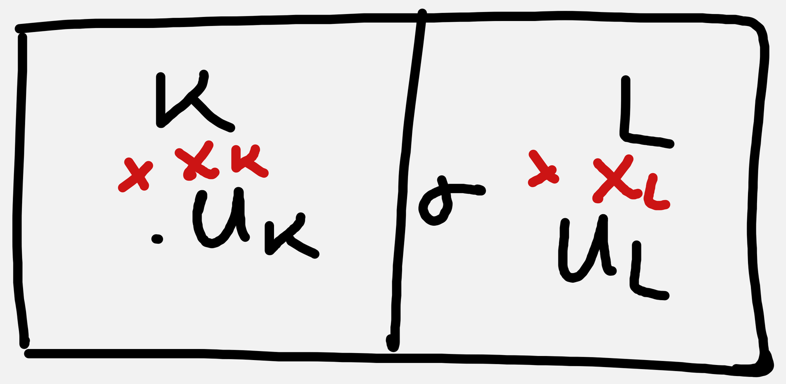
$$a_h(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|^2_{1,h} \quad \forall u_h \in V_h.$$

Proposition : si les flux satisfont les conditions (1) à (4) alors le schéma admet une solution unique u_h qui vérifie l'estimation a priori $\|u_h\|_{1,h} \leq \frac{1}{\alpha} \tilde{C}_p \|f\|_{L^2}$.
De plus si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ alors on a l'estimation d'erreur :

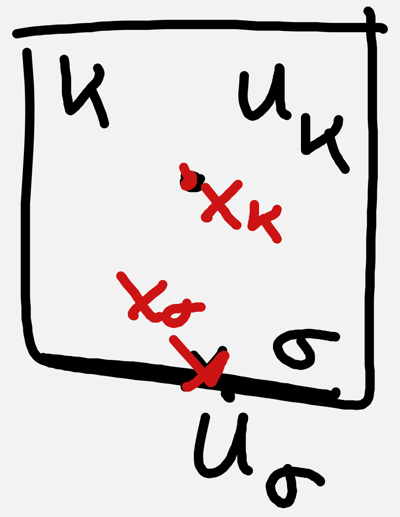
$$\|I_h u - u_h\|_{1,h} \leq \frac{1}{\alpha} C(u) h$$

Schéma Volume Fini deux points "TPFA"

par "Two-point Flux Approximation".



$$F_{K\sigma}(u_h) = \begin{cases} |\sigma| \dfrac{u_K - u_L}{|x_K x_L|} & \forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_e^{int} \\[2em] |\sigma| \dfrac{u_K - u_\sigma}{|x_K x_\sigma|} & \forall \sigma = K|. \in \mathcal{F}_e^{ext} \end{cases}$$



① flux linéaire → ok

② Conservativité $F_{L\sigma}(u_h) = |\sigma| \dfrac{u_L - u_K}{|x_L x_K|} = -F_{K\sigma}(u_h)$ → OK

④ Coercivité $\quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h)\, v_K$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in F_h^{int} \\ \sigma = K|L}} \Big(F_{K\sigma}(u_h)\, v_K + \underbrace{F_{L\sigma}(u_h)}_{-F_{K\sigma}(u_h)} v_L \Big) + \sum_{\substack{\sigma \in F_h^{ext} \\ \sigma = K|.}} F_{K\sigma}(u_h)\, v_K$$

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{int}}} F_{K\sigma}(u_h)(v_K - v_L) + \sum_{\substack{\sigma = K|. \\ \in F_h^{ext}}} F_{K\sigma}(u_h)(v_K - 0)$$

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{int}}} \frac{|\sigma|}{|x_K x_L|}(u_K - u_L)(v_K - v_L) + \sum_{\substack{\sigma = K|. \\ \in F_h^{ext}}} \frac{|\sigma|}{|x_K x_\sigma|}(u_K - 0)(v_K - 0)$$

<u>on définit</u> $\quad \|u_h\|_{1,h} = \sqrt{a_h(u_h, u_h)} = \left(\sum_{\sigma = K|L} \frac{|\sigma|}{|x_K x_L|}(u_K - u_L)^2 + \sum_{\sigma = K|.} (u_K - 0)^2 \frac{|\sigma|}{|x_K x_\sigma|} \right)^{1/2}$

$\Rightarrow$ ok avec <u>$\alpha = 1$</u>

La norme $\|\cdot\|_{1,h}$ vérifie une inégalité de Poincaré pour les "<u>bons maillages</u>" : $\|u_h\|_h^2 \leqslant \tilde{C}_P \|u_h\|_{1,h} \quad \forall u_h \in V_h$

③ $$R_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma - \underbrace{F_{K\sigma}(I_h u)}_{\frac{|\sigma|}{|x_K x_L|}\left(u(x_K) - u(x_L)\right)}$$

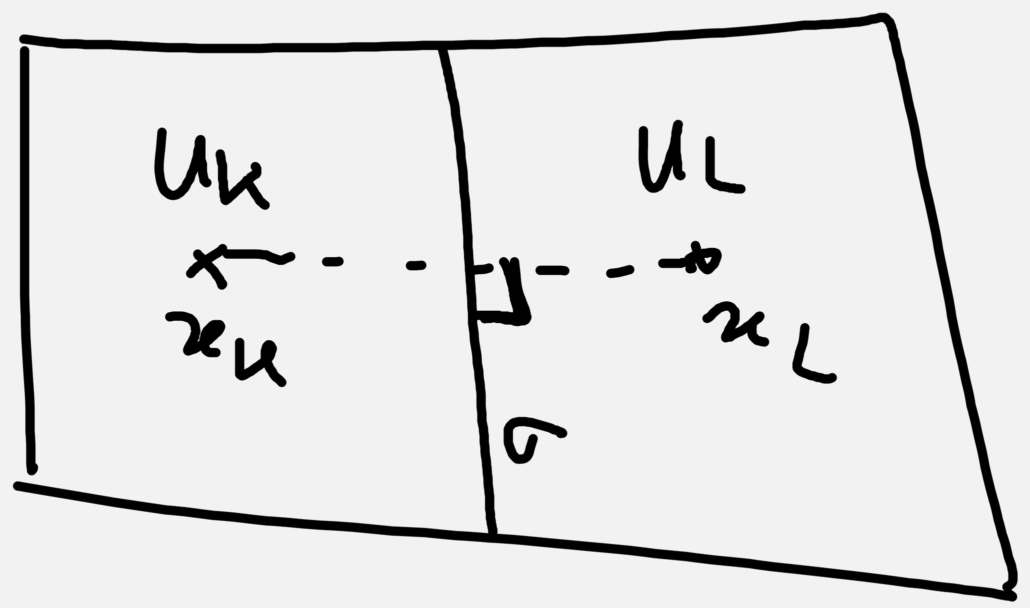
$$-\nabla u(x) \cdot \vec{n}_{K\sigma} = -\frac{d}{ds} u(x + s\,\vec{n}_{K\sigma})$$

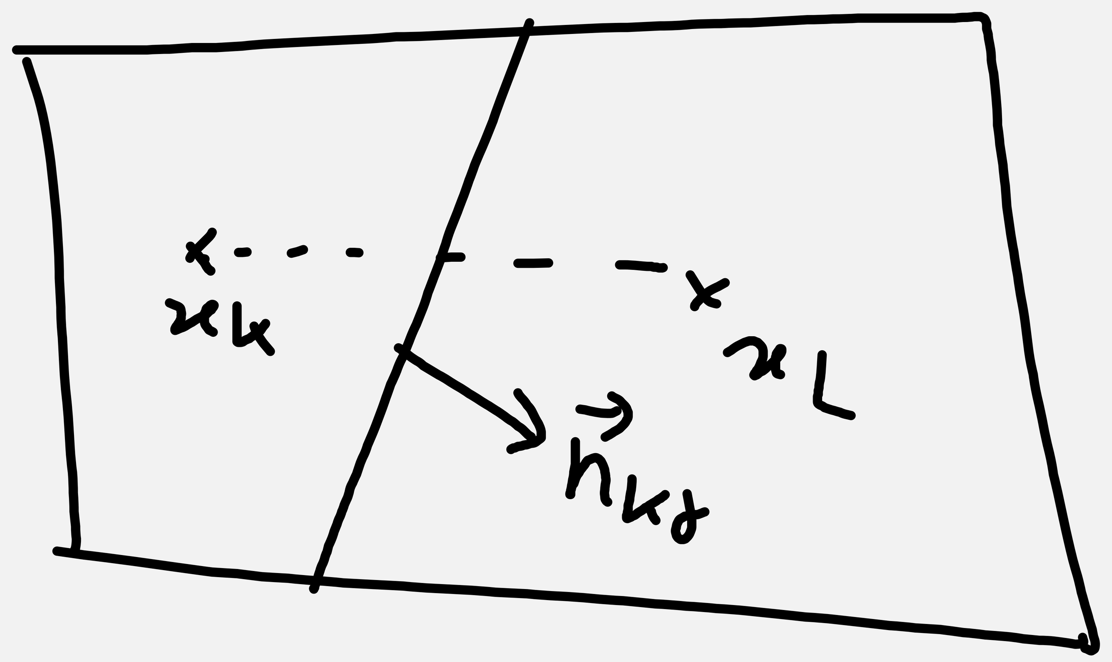
Consistant ssi

$$x_K x_L \,//\, \vec{n}_{K\sigma}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma \perp x_K x_L$$

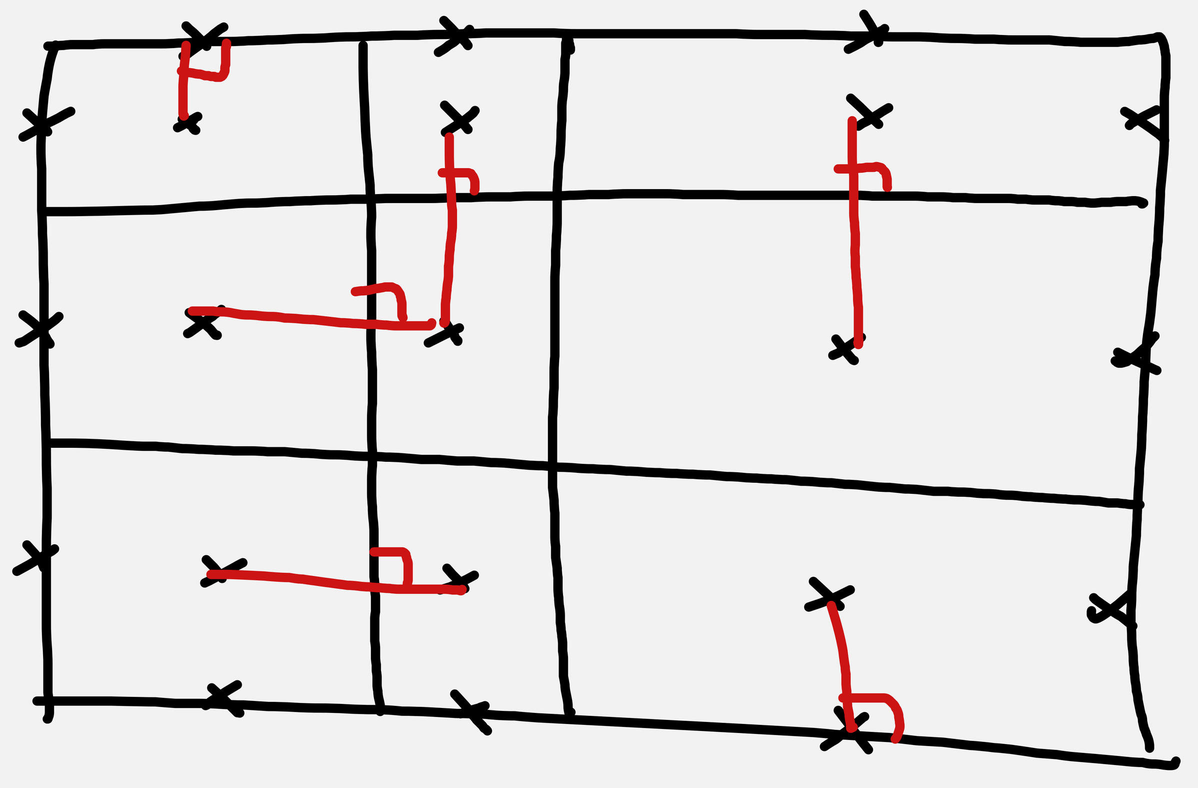
$$|x_K x_L| = \mathrm{dist}(x_K, x_L)$$



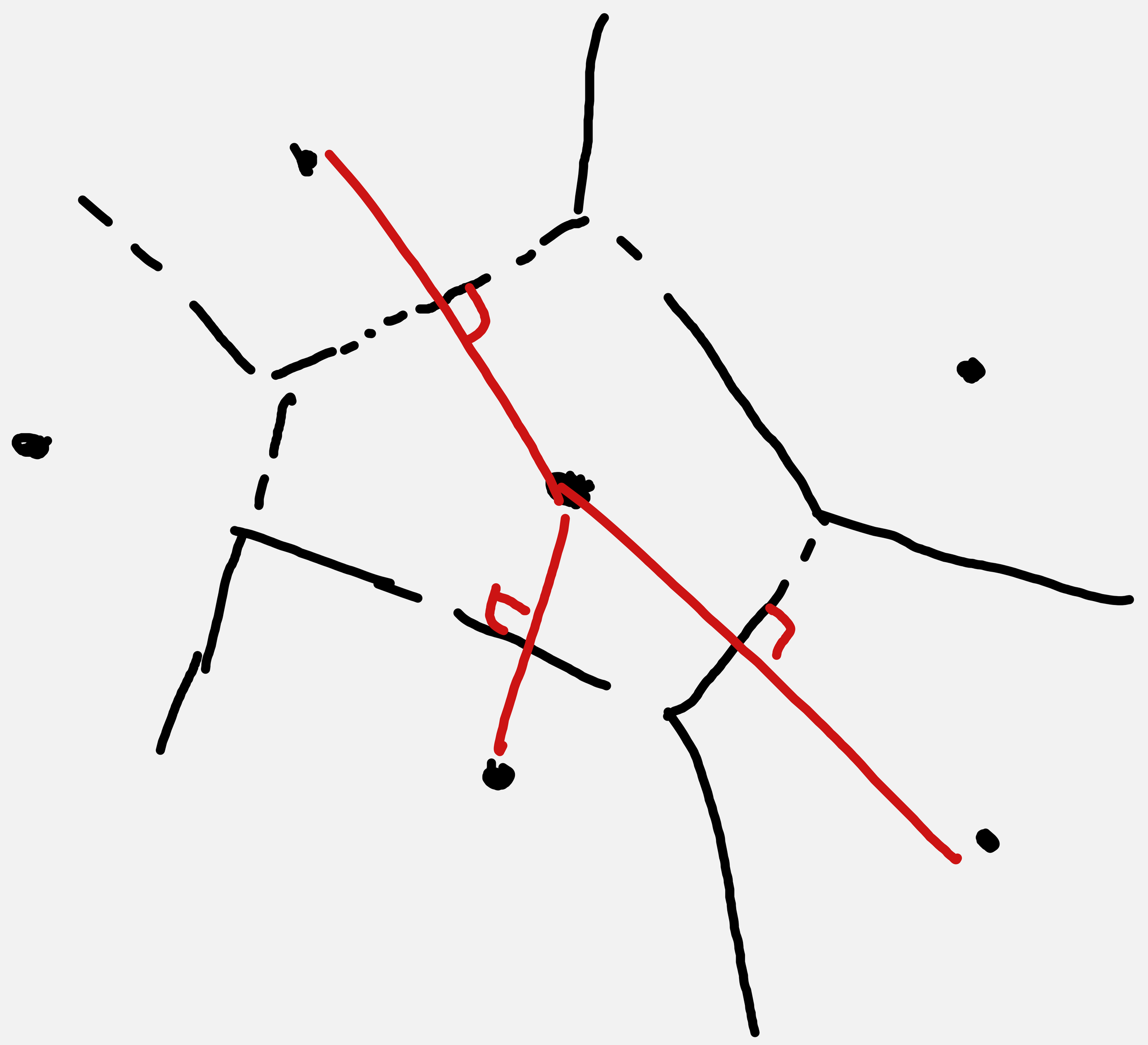


Exemples de maillages orthogonaux :

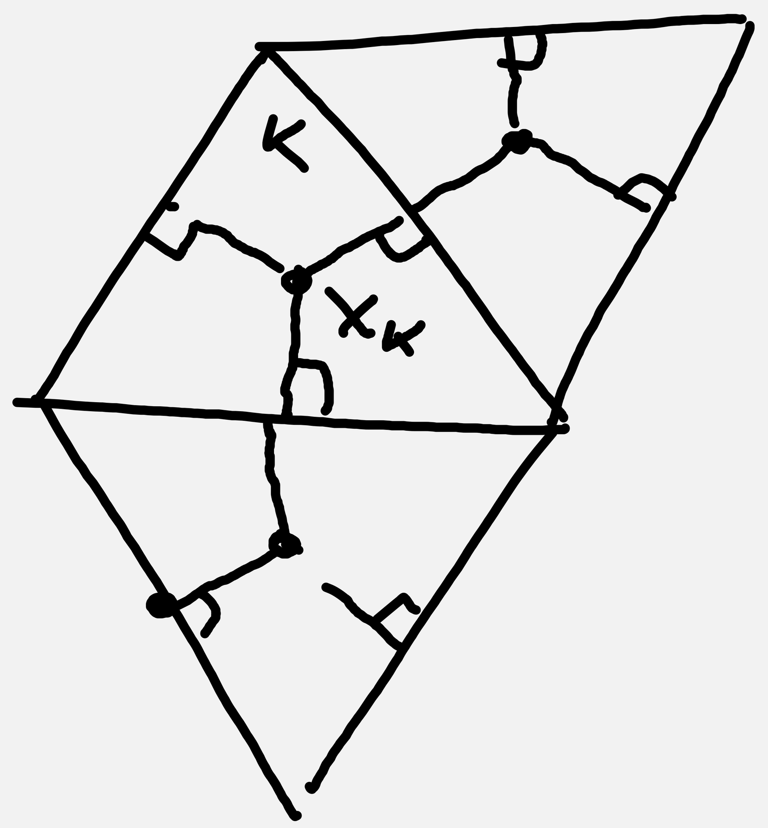
Cartésiens



Voronoï

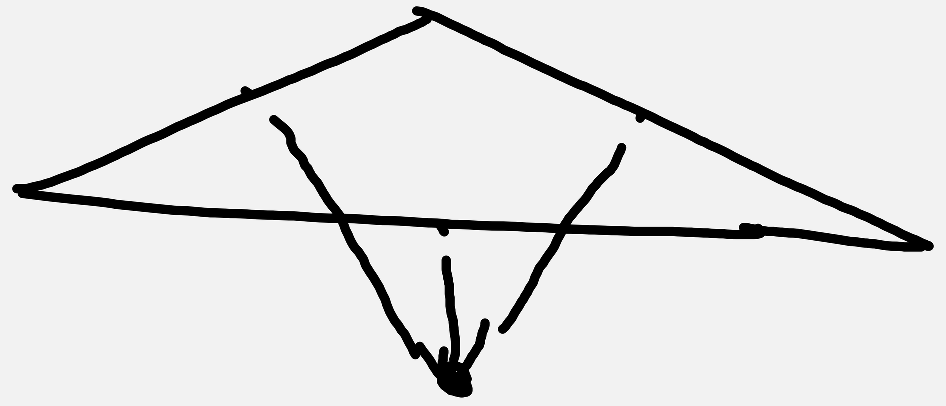


triangulaires



x_K : intersection des médiatrices.

ok si angles aigus



Schémas MPFA "Multi-point flux approximation"