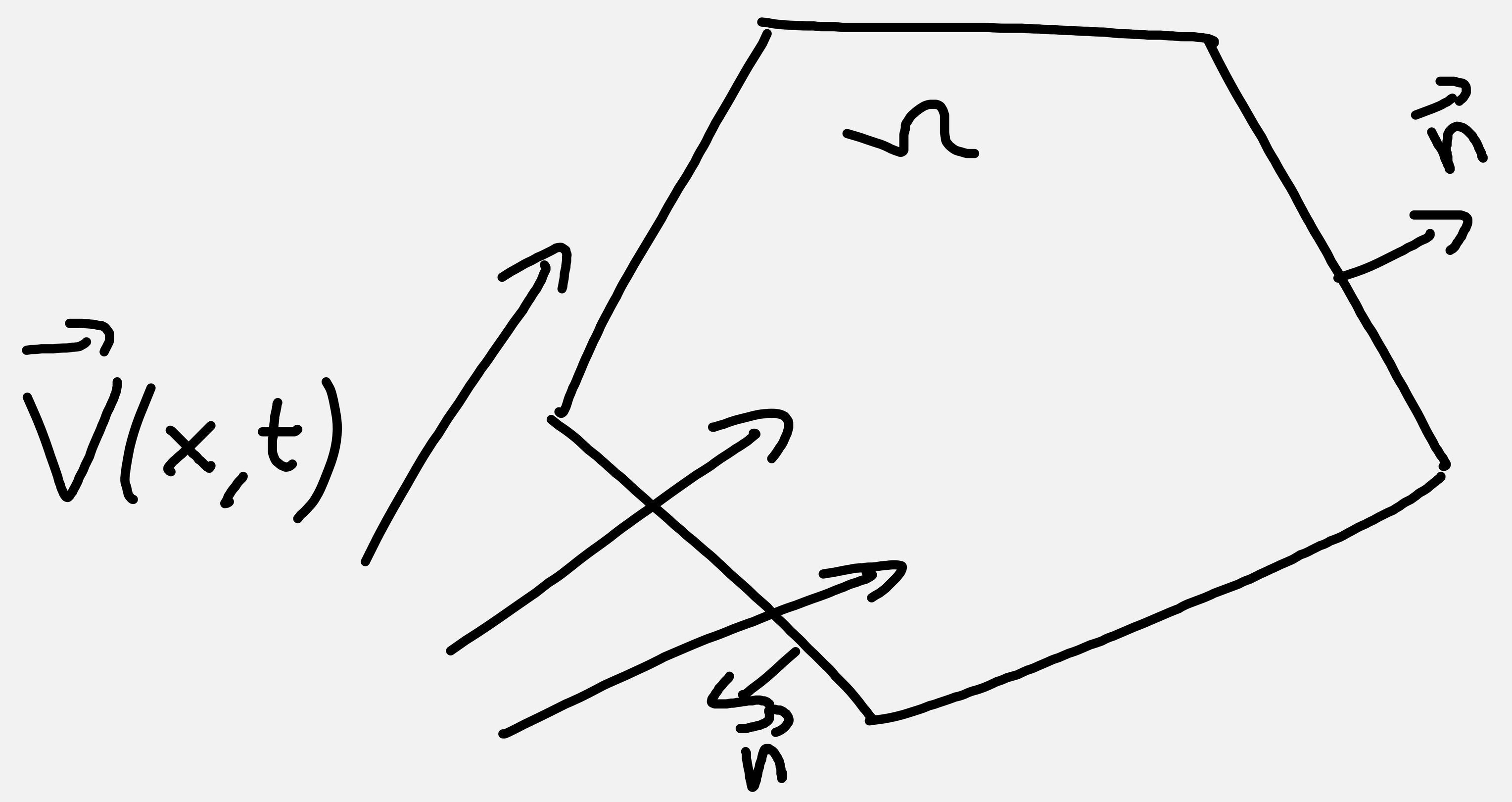
Schémas VF pour les équations hyperboliques scalaires en dimension d



$$\operatorname{div} \vec{V}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \operatorname{Div}\left(f(u(x,t))\, \vec{V}(x,t) \right) = 0 & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = u^D(x,t) & (x,t) \in \Sigma^-(T) \subset \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$\Sigma^-(t) = \left\{ (x,s) \in \partial\Omega \times (0,t) \ \text{t.q.}\ f'(u(x,s))\, \underline{\vec{V}(x,s) \cdot \vec{n}} < 0 \right\}$$

Prop : Soient $u^D \in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$, $\vec{V} \in C^1(\Omega \times (0,T))$

$f \in C^1(\mathbb{R})$

alors il existe une solution faible entropique unique $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$. De plus elle vérifie le principe du maximum

$$\min\left(\min_{y\in\Omega} u^0(y), \min_{(y,s)\in\Sigma^-(t)} u^D(y,s)\right) \leq u(x,t) \leq \max\left(\max_{y\in\Omega} u^0(y), \max_{(y,s)\in\Sigma^-(t)} u^D(y,s)\right)$$

Rq : lien avec le modèle en dimension 1 : $\vec{V} = \vec{e}_x$

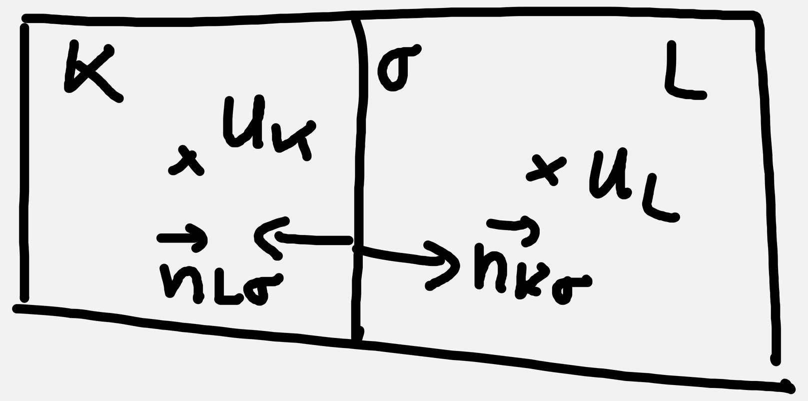
$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$$

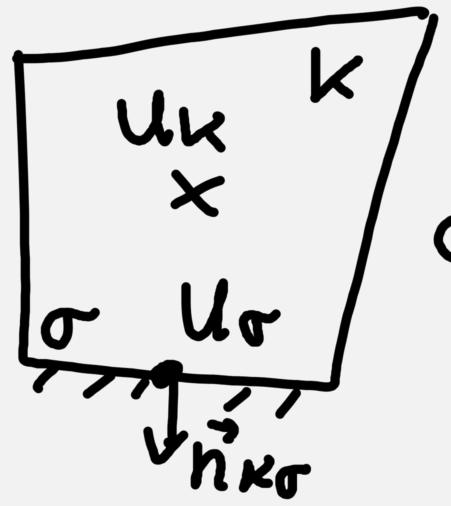
Discrétisation VF

$$V_h = \{ u_h \in L^2(\Omega) \ \text{ t.q. } \ u_h(x) = u_K \quad \forall x \in K, \ \forall K \in \mathcal{M}_h \}$$

on note u_K^n l'inconnue discrète dans la maille K au temps t^n

$\sigma \in \mathcal{F}_h^{int}$





$\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$

$$u_\sigma^* = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u^D(x, t^*)\, d\sigma(x)$$

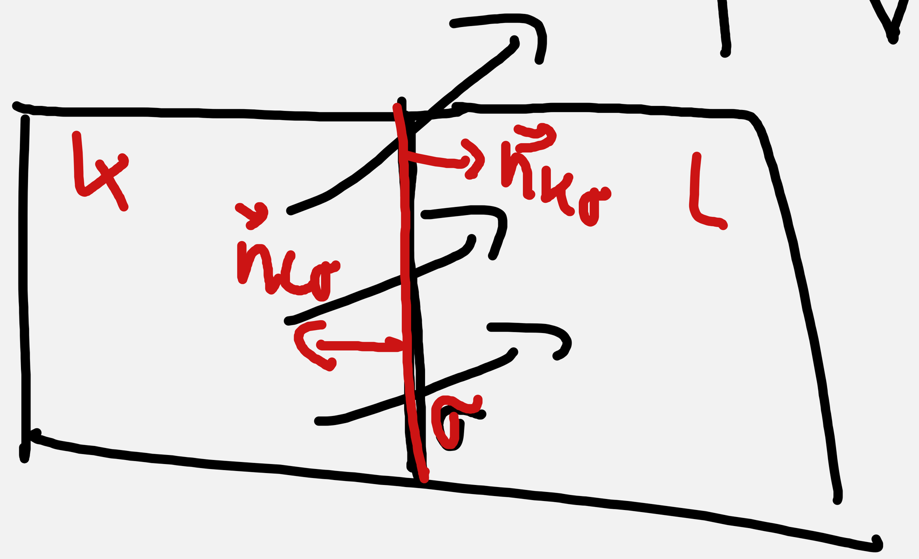
$$u_K^* = \begin{cases} u_K^n & \text{si Euler implicite} \\ u_K^{n-1} & \text{si — explicite} \end{cases}$$

$$t^* = \begin{cases} t^n & \text{si Euler implicite} \\ t^{n-1} & \text{si — explicite} \end{cases}$$

on note

$$V_{K\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma$$

$$V_{L\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{L\sigma}\, d\sigma = - V_{K\sigma}^n$$



Rq : on a $V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0$

car $\vec{n}_{K\sigma} + \vec{n}_{L\sigma} = 0$

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \Big(\partial_t u(x,t) + \mathrm{Div}\big(f(u(x,t))\,\vec{V}(x,t)\big)\Big)\,dx\,dt = 0$$

$$\underbrace{\int_K \frac{u(x,t^n)-u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n}\,dx}_{} + \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma f(u(x,t))\,\vec{V}(x,t)\cdot\vec{n}_{K\sigma}\,d\sigma\,dt\right]}_{} = 0$$

discrétisation $|K|\,\dfrac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n}$

flux "continu" sur la face σ, sortant de K noté $\overline{F}^n_{K\sigma}(u)$

→ discrétisation : flux numérique sur la face σ sortant de K noté $F^n_{K\sigma}(u_h^*)$ pour le schéma en temps d'Euler implicite si $*=n$ et d'Euler explicite si $*=n-1$.

⟹ Equation du schéma VF dans la maille K au pas de temps n :

$$\left\{ |K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} F^n_{K\sigma}(u_h^*) = 0 \right.$$

$\forall K \in \mathcal{M}_h$

$\forall n = 1,\dots,m$

Flux monotone deux points :

$$F_{K\sigma}^n(u_h) = \begin{cases} F_{K\sigma}^n(u_K, u_L) & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int} \\ F_{K\sigma}^n(u_K, u_\sigma) & \text{si } \sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext} \end{cases}$$

Propriétés : ① Conservativité du flux : $F_{K\sigma}^n(v,w) + F_L^n(w,v) = 0$ $\forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int}$ $\forall v, w \in \mathbb{R}$

② Consistance : $F_{K\sigma}^n(v,v) = f(v)\, V_{K\sigma}^n$ $\forall K \in \mathcal{M}_h$ $\forall \sigma \in \mathcal{F}_K$ $\forall v \in \mathbb{R}$

"exact sur les constants"

③ Monotonie $F_{K\sigma}^n(v,w)$ est croissante par rapport à v

décroissante ——— à w

$\Rightarrow$ Schéma VF :

C.I. $u_K^0 = \frac{1}{|K|}\int_K u^0(x)\,dx$ $K \in \mathcal{M}_h$

$$|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int} \cap \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_L^*) + \sum_{\sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext} \cap \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_\sigma^*) = 0$$

$\forall K \in \mathcal{M}_h$

$\forall n = 1, \dots, m$

Rappel du cas $d=1$ pour l'équation

$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0 \quad \rightarrow$ flux exact $\quad \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(u^*) = f(u^*(x_{i+\frac{1}{2}}))$

flux numérique : $F(v,w)$, flux monotone deux points

- Consistant : $\underline{F(v,v) = f(v)}$ $\forall v \in \mathbb{R}$ (v I°)
- monotone : $F(\overset{\nearrow}{v}, \underset{\searrow}{w})$
- Lipschitz par rapport à v et w avec des constantes de Lipschitz notées Lip_{F_1}, Lip_{F_2}

ex : si f est croissante $\rightarrow F(v,w) = f(v)$

si f est décroissante $\rightarrow F(v,w) = f(w)$

$$F(v,w) = \underbrace{\frac{f(v)+f(w)}{2}}_{\text{Centré}} + \underbrace{D(v-w)}_{\text{Diffusion}} \quad \text{avec } D \geq \frac{Lip_f}{2}$$

<u>proposition</u> :

soit $F(v,w)$ un flux monotone deux points pour $f(v)$, alors

$$F_{K\sigma}^{n}(v,w) = \begin{cases} F(v,w)\,\underbrace{V_{K\sigma}^{n}}_{\geq 0} & \text{si } V_{K\sigma}^{n} \geq 0 \\ F(w,v)\,\underbrace{V_{K\sigma}^{n}}_{\leq 0} & \text{si } V_{K\sigma}^{n} \leq 0 \end{cases}$$

est un flux monotone deux points hyperbolique en dimension d. pour le modèle " $f(v,\vec{V})$ "

on note $a^{+} = \max(a,0)$, $a^{-} = \min(a,0)$, $a^{+} + a^{-} = a$

avec ces notations :

$$F_{K\sigma}^{n}(v,w) = F(v,w)\left(V_{K\sigma}^{n}\right)^{+} + F(w,v)\left(V_{K\sigma}^{n}\right)^{-}$$

Preuve : Conservativité :

$$F^n_{K\sigma}(v,w) + F^n_{L\sigma}(w,v) = F(v,w)\,V^+_{K\sigma} + F(w,v)\,V^-_{K\sigma} + F(w,v)\,V^+_{L\sigma} + F(v,w)\,V^-_{L\sigma}$$

on a $\boxed{V^n_{K\sigma} + V^n_{L\sigma} = 0}$

$$(V^n_{K\sigma})^+ = (-V^n_{L\sigma})^+ = -(V^n_{L\sigma})^-$$

$$(V^n_{K\sigma})^- = (-V^n_{L\sigma})^- = -(V^n_{L\sigma})^+$$

$$= \left(\cancel{-F(v,w)} + \cancel{F(v,w)}\right)(V^n_{L\sigma})^- + \left(\cancel{-F(w,v)} + \cancel{F(w,v)}\right)(V^n_{L\sigma})^+ = 0$$

Consistance : $\underline{F^n_{K\sigma}(v,v)} = F(v,v)\,V^+_{K\sigma} + F(v,v)\,V^-_{K\sigma}$

$$= f(v)\left(V^+_{K\sigma} + V^-_{K\sigma}\right) = \underline{f(v)\,V^n_{K\sigma}}$$

Monotonie : par construction avec permutation de variable v et w en fonction du signe de $V^n_{K\sigma}$

Principe du maximum discret.

$$(1)\quad |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} \boxed{F_{K\sigma}^n (u_K^*, u_L^*)} + \sum_{\sigma = K|.} F_{K\sigma}^n (u_K^*, u_\sigma^*) = 0$$

$$0 = \int_K (\mathrm{div}\, \vec{V})\, dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \int_\sigma \vec{V} \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma = 0 \Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma\, dt \right)}_{V_{K\sigma}^n} = 0$$

donc $\boxed{\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} V_{K\sigma}^n = 0} \Rightarrow \boxed{\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \underbrace{f(u_K^*)}_{F(u_K^*, u_K^*)} V_{K\sigma}^n = 0}$ (2)

(1) - (2)

$$\Rightarrow |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma = K|L} \Big(\underbrace{F(u_K^*, u_L^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + F(u_L^*, u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^-} - F(u_K^*, u_K^*) \overbrace{((V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^-)}^{V_{K\sigma}^n} \Big)$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.} \Big(F(u_K^*, u_\sigma^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + F(u_\sigma^*, u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^- - F(u_K^*, u_K^*) ((V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^-) \Big) = 0$$

$$|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} \left[\underbrace{\left(\frac{F(u_K^*, u_L^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_K^* - u_L^*}\right)}_{a_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^+ (u_K^* - u_L^*) + \underbrace{\frac{F(u_L^*, u_K^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_L^* - u_K^*}}_{b_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^- (u_L^* - u_K^*) \right.$$

$$0 \leq a_{K\sigma} \leq Lip_{F_2}$$

$$0 \leq b_{K\sigma} \leq Lip_{F_1}$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.} \left[\underbrace{\frac{F(u_K^*, u_\sigma^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_K^* - u_\sigma^*}}_{a_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^+ (u_K^* - u_\sigma^*) + \underbrace{\frac{F(u_\sigma^*, u_K^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_\sigma^* - u_K^*}}_{b_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^- (u_\sigma^* - u_K^*) \right.$$

$$|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} a_{K\sigma} (u_K^* - u_L^*) V_{K\sigma}^+ + b_{K\sigma} (u_L^* - u_K^*) V_{K\sigma}^- + \sum_{\sigma = K|.} a_{K\sigma} (u_K^* - u_\sigma^*) V_{K\sigma}^+ + b_{K\sigma} (u_\sigma^* - u_K^*) V_{K\sigma}^- = 0$$

Cas implicite :

$$\Big(\frac{|K|}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geq 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(-(V_{K\sigma}^n)^-)}_{\geq 0}\Big) u_K^n = \frac{|K|}{\Delta t^n} u_K^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma=K|L}\Big(\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geq 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(-(V_{K\sigma}^n)^-)}_{\geq 0}\Big) u_L^n$$

$$+ \sum_{\sigma=K|.}\Big(\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geq 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(-(V_{K\sigma}^n)^-)}_{\geq 0}\Big) u_\sigma^n$$

$\Rightarrow$ Combinaison convexe

$\Rightarrow$ principe du maximum.

Cas explicite :

$$\frac{|K|}{\Delta t^n} u_K^n = \Big(\frac{|K|}{\Delta t^n} - \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{\big(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}(-(V_{K\sigma}^n)^-)\big)}_{\geq 0}\Big) u_K^{n-1} + \sum_{\sigma=K|L} \overbrace{\big(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}(-(V_{K\sigma}^n)^-)\big)}^{\geq 0} u_L^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma=K|.} \underbrace{\big(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}(-(V_{K\sigma}^n)^-)\big)}_{\geq 0} u_\sigma^{n-1}$$

Condition de positivité $\Rightarrow$ Condition CFL :

$$\Delta t^n \leq \min_{K\in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma\in F_K} a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}(-(V_{K\sigma}^n)^-)} \quad \Leftarrow \quad \boxed{\Delta t^n \leq \min_{K\in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma\in F_K} Lip_{F_2}(V_{K\sigma}^n)^+ + Lip_{F_1}(-(V_{K\sigma}^n)^-)}}$$

exercice :

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \partial_t u(x,t) + \mathrm{Div}\left(f(u(x,t))\,\vec{V}(x)\right) dx\,dt = \frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \left(h^+(x)\, f(c(x)) + h^-(x)\, f(u(x,t))\right) dx\,dt$$

$$\int_K \frac{u(x,t^n) - u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K}\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma f(u(x,t))\,\vec{V}(x)\cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma\, dt}_{\overline{F}_{K\sigma}(u)}\right) = \underline{\qquad\qquad}$$

Discrétisation avec Euler explicite + VF :

$$|K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} F_{K\sigma}(u_h^{n-1}) = \text{“}\int_K h^+(x)\, f(c(x)) + h^-(x)\, f(u_h^{n-1})\, dx\text{”}$$

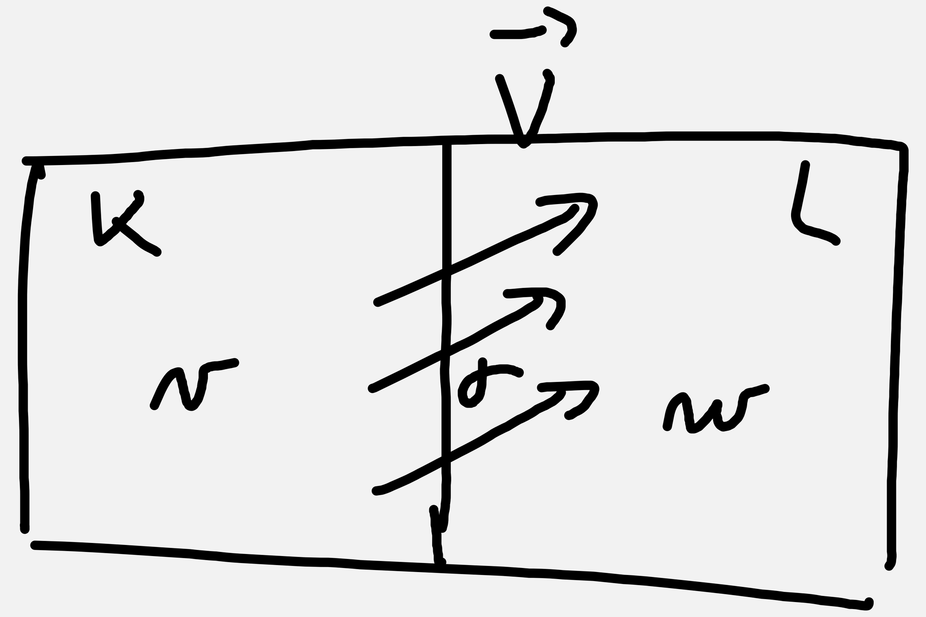
à discrétiser

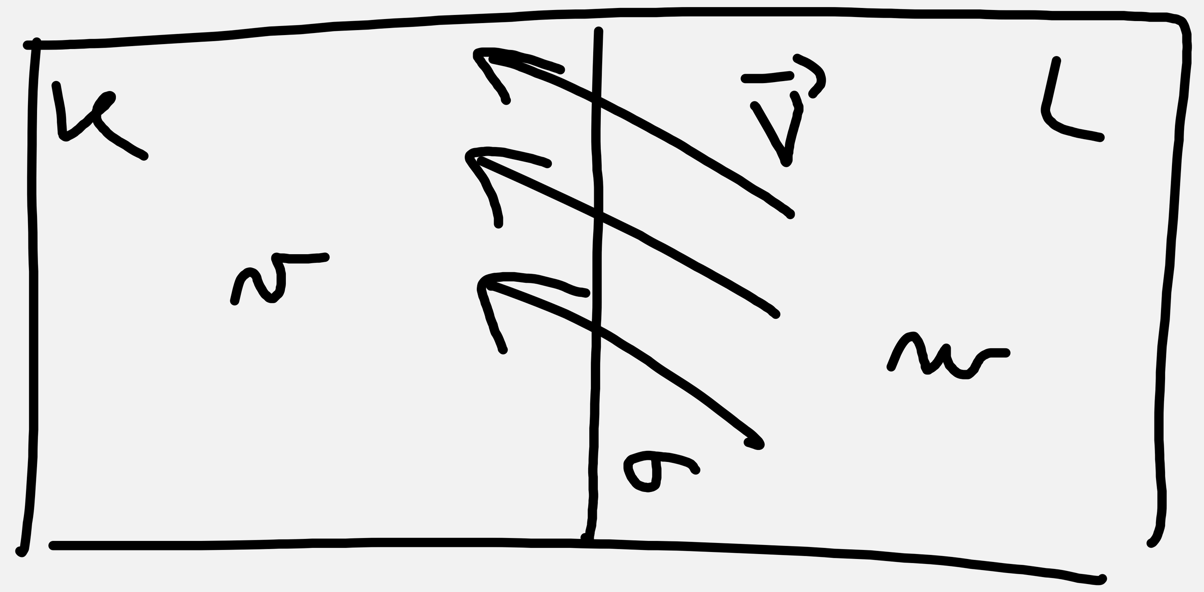
Quel flux ?

$F_{K\sigma}(u_h)$ flux deux point décentré amont : $F_{K\sigma}(v,w) = F(v,w)\,V_{K\sigma}^+ + F(w,v)\,V_{K\sigma}^-$

avec $\left|\begin{array}{l} F(v,w) = f(v) \\ F(w,v) = f(w) \end{array}\right.$ est un flux consistant monotone pour f croissant.

$$F_{K\sigma}(v,w) = f(v)\,V_{K\sigma}^{+} + f(w)\,V_{K\sigma}^{-} = \begin{cases} f(v)\,V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} \geq 0 \\ f(w)\,V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} \leq 0 \end{cases}$$





Cas $f \nearrow$

$F_{K\sigma}(v,w) = f(v)\,V_{K\sigma}$

$F_{K\sigma}(v,w) = f(w)\,V_{K\sigma}$ — Cas f croissante

$F_{K\sigma}(v,w) = f(w)\,V_{K\sigma}$

$F_{K\sigma}(v,w) = f(v)\,V_{K\sigma}$ — Cas f décroissante

Discrétisation du terme source :

$$\int_K \left(h^+(x)\, f(c(x)) + h^-(x)\, f(u_K^{n-1})\right) dx \simeq \int_K h^+(x)\, f(c_K)\, dx + \int_K h^-(x)\, f(u_K^{n-1})\, dx$$

$$= f(c_K) \underbrace{\int_K h^+(x)\, dx}_{h_K^+} + f(u_K^{n-1}) \underbrace{\int_K h^-(x)\, dx}_{h_K^-}$$

$$= \boxed{f(c_K)\, h_K^+ + f(u_K^{n-1})\, h_K^-}$$

Schéma VF :

$$(1) \begin{cases} |K| \dfrac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \displaystyle\sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{int} \cap F_K}} f(u_K^{n-1})\, V_{K\sigma}^+ + f(u_L^{n-1})\, V_{K\sigma}^- + \displaystyle\sum_{\substack{\sigma = K| \\ \in F_h^{ext} \cap F_K}} f(u_K^{n-1})\, V_{K\sigma}^+ + f(d_\sigma)\, V_{K\sigma}^- \\ \quad = f(c_K)\, h_K^+ + f(u_K^{n-1})\, h_K^- \qquad K \in M_h,\ n = 1, \dots, m \\ u_K^0 \text{ donné } \forall K \in M_h \end{cases}$$

Principe du maximum :

- on exploite la contrainte sur le champ $\vec{V}$ qui donne le principe du maximum dans le cas continu : $\mid \operatorname{div} \vec{V} = h$

$$\int_K \operatorname{div} \vec{V} = \int_K h(x)\, dx$$

$$\sum_{\sigma \in F_K} \underbrace{\int_\sigma \vec{V} \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma}_{V_{K\sigma}} = \int_K \left(h^+(x) + h^-(x)\right) dx = h_K^+ + h_K^-$$

(2) $$\boxed{\sum_{\sigma \in F_K} V_{K\sigma} = h_K^+ + h_K^-} \times f(u_K^{n-1}) \Rightarrow \left[\sum_{\sigma \in F_K} V_{K\sigma}^+ f(u_K^{n-1}) + V_{K\sigma}^- f(u_K^{n-1}) = h_K^+ f(u_K^{n-1}) + h_K^- f(u_K^{n-1}) \right.$$

on fait (1) − (2)

$$|K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} V_{K\sigma}^- \underbrace{\left(\frac{f(u_L^{n-1}) - f(u_K^{n-1})}{u_L^{n-1} - u_K^{n-1}}\right)}_{a_{K\sigma}} (u_L^{n-1} - u_K^{n-1}) + \sum_{\sigma = K|.} V_{K\sigma}^- \underbrace{\left(\frac{f(d_\sigma) - f(u_K^{n-1})}{d_\sigma - u_K^{n-1}}\right)}_{a_{K\sigma}} (d_\sigma - u_K^{n-1})$$

$$= h_K^+ \underbrace{\left(\frac{f(c_K) - f(u_K^{n-1})}{c_K - u_K^{n-1}}\right)}_{b_K} (c_K - u_K^{n-1})$$

f croissante :

$$\begin{cases} 0 \leq a_{K\sigma} \leq \mathrm{Lip}_f \\ 0 \leq b_K \leq \mathrm{Lip}_f \end{cases}$$

$$|K|\,\frac{u_K^n}{\Delta t^n} = \left(\frac{|K|}{\Delta t^n} - \sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma}(-V_{K\sigma}^-) - h_K^+ b_K\right) u_K^{n-1} + \sum_{\sigma = K|L} \overbrace{a_{K\sigma}(-V_{K\sigma}^-)}^{\geq 0} u_L^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.} \underbrace{a_{K\sigma}(-V_{K\sigma}^-)}_{\geq 0} d_\sigma + \underbrace{h_K^+ b_K}_{\geq 0} c_K$$

positif ssi

$$\Delta t^n \leq \min_{K \in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma}(-V_{K\sigma}^-) - h_K^+ b_K} \Longleftarrow \boxed{\Delta t^n \leq \frac{1}{\mathrm{Lip}_f} \min_{K \in M_h} \frac{|K|}{\left(\sum_{\sigma \in F_K} -V_{K\sigma}^- + h_K^+\right)}}$$

$$F_-^{ext} = \left\{ \sigma \in F_h^{ext} \text{ t.q. } V_{K\sigma} < 0 \right\}$$
$\sigma = K|.$

$$M_h^+ = \left\{ K \in M_h \text{ t.q. } f_K^+ > 0 \right\}$$

le principe du maximum (sous la condition CFL précédente) s'écrit

$$\min\left(\min_{L \in M_h} u_L^0, \min_{\sigma \in F_-^{ext}} d_\sigma, \min_{K \in M_h^+} c_K\right) \leq u_K^n \leq \max\left(\max_{L \in M_h} u_L^0, \max_{\sigma \in F_-^{ext}} d_\sigma, \max_{K \in M_h^+} c_K\right)$$

$$\left|\begin{array}{l} \partial_t h_i + \mathrm{Div}\,(c_i^s k_i \nabla \psi) = 0 \qquad i = 1,2 \\ c_1^s + c_2^s = 1 \qquad\qquad c^s = c_1^s \;,\quad c_2^s = 1 - c^s \end{array}\right.$$

$$h_i = \int_0^{h(x,t)} c_i(x,z,t)\, dz$$

$$\partial_t h_i = \int_0^{h(x,t)} \underbrace{\partial_t c_i(x,z,t)}_{0}\, dz + c_i(x, h(x,t), t)\, \partial_t h(x,t)$$

$$\left|\, \partial_t h_i = c_i(x, h(x,z), t)\, \partial_t h\right.$$

$$\partial_t h_1 + \partial h_2 = \partial_t h$$

$$\boxed{\partial_t h + \mathrm{Div}\left(\underbrace{\boxed{c^s k_1 + (1 - c^s) k_2}}_{> \min(k_1, k_2) > 0} \nabla \underline{\underline{\psi}} \right) = 0}$$

$$\left|\begin{array}{l} \psi(b) \\ b = H^m - h \end{array}\right.$$

↳ équation parabolique à c^s donné

$$C_1(x, h(x,t), t)\, \partial_t h \quad + \mathrm{Div}(C^s k_1 \nabla \Psi) = 0$$

$$\vec{V} = (C^s k_1 + (1-C^s) k_2) \nabla \Psi$$ vitesse du mélange

$$\underbrace{C_1(x, h(x,t), t)\, \partial_t h}_{\text{terme source}} \quad + \mathrm{Div}\Big(\underbrace{\frac{C^s k_1}{C^s k_1 + (1-C^s) k_2}}_{f(C^s)} \vec{V} \Big) = 0$$

flux associé à $f(C^s)\, \vec{V}$

$$F_{K\sigma}(v,w) = \begin{cases} f(v)\, V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} > 0 \\ f(w)\, V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} \leq 0 \end{cases}$$

Rq : f croissante sur $(0,1)$

↪ décentrer C^s par rapport à $V_{K\sigma}$