

Discretisation Volume Fini (FV) des EDP's

I

Discretisation VF de éq. elliptiques/paraboliques en dimension 1
→ TP/TD

II

Discretisation VF de éq. hyperboliques scalaires en dimension 1
→ TD
→ TP

III

Extension à la dimension $d=3,3$ des schémas VF pour les éqs elliptiques/
paraboliques
→ TD
→ Modélisation stratigraphique (sédimentologie) TP 1^{re} partie

IV

Extension des éqs hyperboliques à la dimension $d=2,3$
→ TD
→ TP sédimentologie { 1^{re} partie}

I Cas elliptique/parabolique en dimension 2

$$(E) \begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$$H_0^1(0, L) = \left\{ v \in L^2(0, L) \text{ tel que } \int_0^L |v'|^2 dx < +\infty, \quad u(0) = u(L) = 0 \right\}$$

$$L^2(0, L) = \left\{ v: (0, L) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_0^L |v(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

Formulation variationnelle (à faible) de (E)

$$v \in H_0^1(0, L)$$

$$\text{formulation conservative: } (-u'(x))' = f(x)$$

$$\int_0^L (-u'(x))' v(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx$$

$$\int_0^L [(-u'(x)v(x))' + u'(x)v'(x)] dx = \int_0^L f(x) v(x) dx$$

$$-u'(L)\underbrace{v(L)}_0 + u'(0)\underbrace{v(0)}_0 + \int_0^L u'(x)v'(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx$$

(FV) Formulation variationelle: from $u \in H_0^1(0, L)$ to q .

$$\int_0^L u'(x)v'(x) dx = \int_0^L f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(0, L)$$

Prop: (FV) admit une solution unique d'après Lax Milgram

$L^2(0, L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_0^L u(x) v(x) dx$$

avec la norme associée $\|v\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^L |v(x)|^2 dx} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{L^2}}$

$H_0^1(0, L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_0^L u'(x) v'(x) dx$$

avec la norme associée

$$\|v\|_{H_0^1} = \sqrt{\int_0^L |v'(x)|^2 dx} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H_0^1}}$$

Inégalité de Poincaré: $\forall v \in H_0^1(0, L), \|v\|_{L^2} \leq L \|v\|_{H_0^1}$

prove : $u(x) = \int_0^x u'(y) dy$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \int_0^x |u'(y)| dy \leq \int_0^L |u'(y)| dy$$

$$\leq \left(\sqrt{\int_0^L 1^2 dx} \right) \left(\sqrt{\int_0^L |u'(y)|^2 dy} \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^L |u(x)|^2 dx \leq L \|u\|_{H_0^1}^2 \int_0^L 1^2 dx = L \|u\|_{H_0^1}^2$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2} \leq \sqrt{L} \|u\|_{H_0^1}$$

Stabilité de la solution : la solution de (EV) vérifie
 l'estimation à priori $\|u\|_{H_0^1} \leq L \|f\|_L^2$

Pruve : on pose $N = n$ dans (EV)

$$\begin{aligned}
 \int_0^L u'(x) u'(x) dx &= \int_0^L f(x) u(x) dx \\
 \|u\|_{H_0^1}^2 &\leq \|f\|_L^2 \|u\|_L^2 \\
 &\leq \|f\|_L^2 L \|u\|_{H_0^1} \\
 \Rightarrow \|u\|_{H_0^1} &\leq L \|f\|_L^2
 \end{aligned}$$

✓ C.S.

Rq : l'estimation a priori + la linéarité de (EV) implique l'unicité de la solution

en effet supposons qu'il existe deux solutions $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ de EV

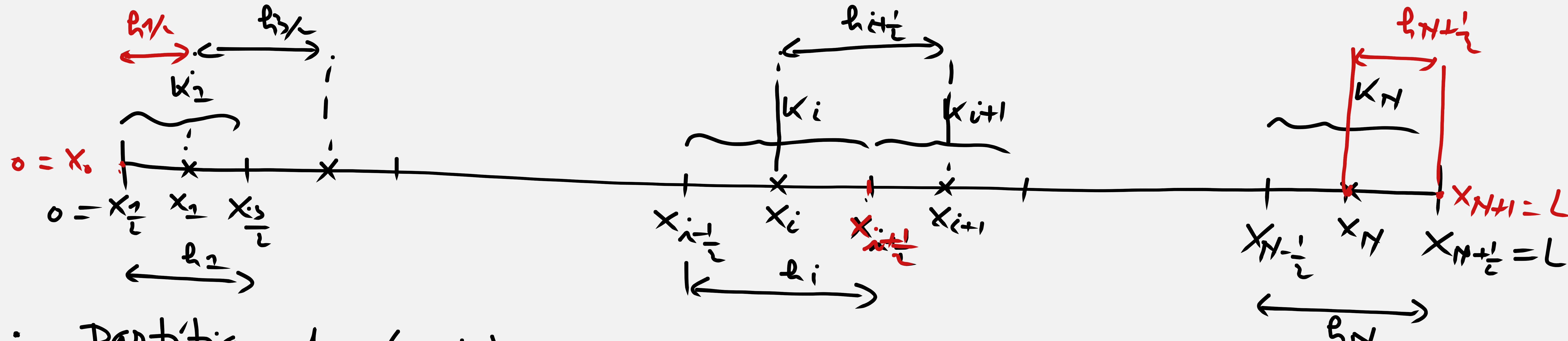
$$\Rightarrow \int_0^L (u^{(1)})' v' dx = \int_0^L f v \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\int_0^L (u^{(2)})' v' dx = \int_0^L f v \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^L (\underbrace{(u^{(2)} - u^{(1)})'}_{w \in H_0^1}) v' = 0 \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\Rightarrow \|u^{(2)} - u^{(1)}\|_{H_0^1} \leq C \overline{\|\phi\|} = 0 \Rightarrow u^{(2)} = u^{(1)}$$

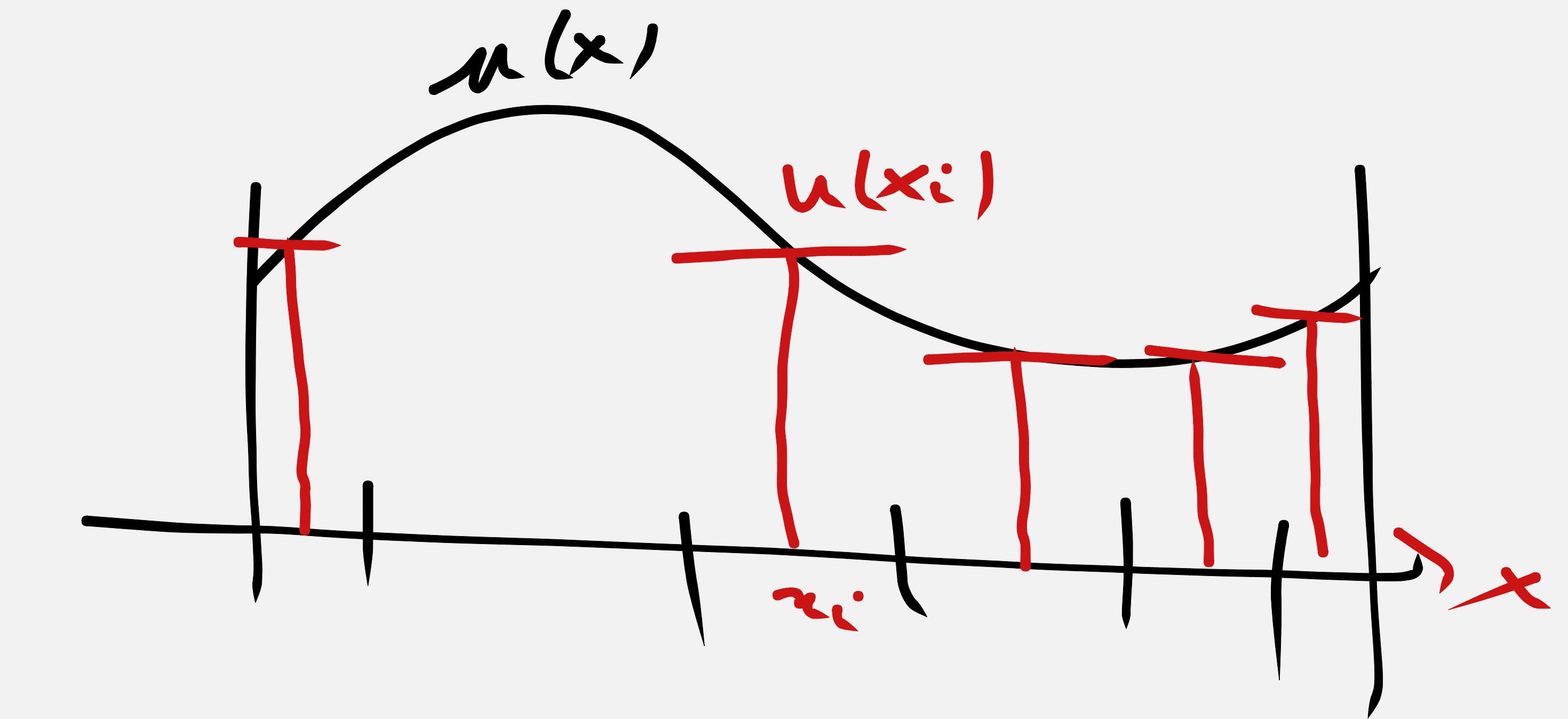
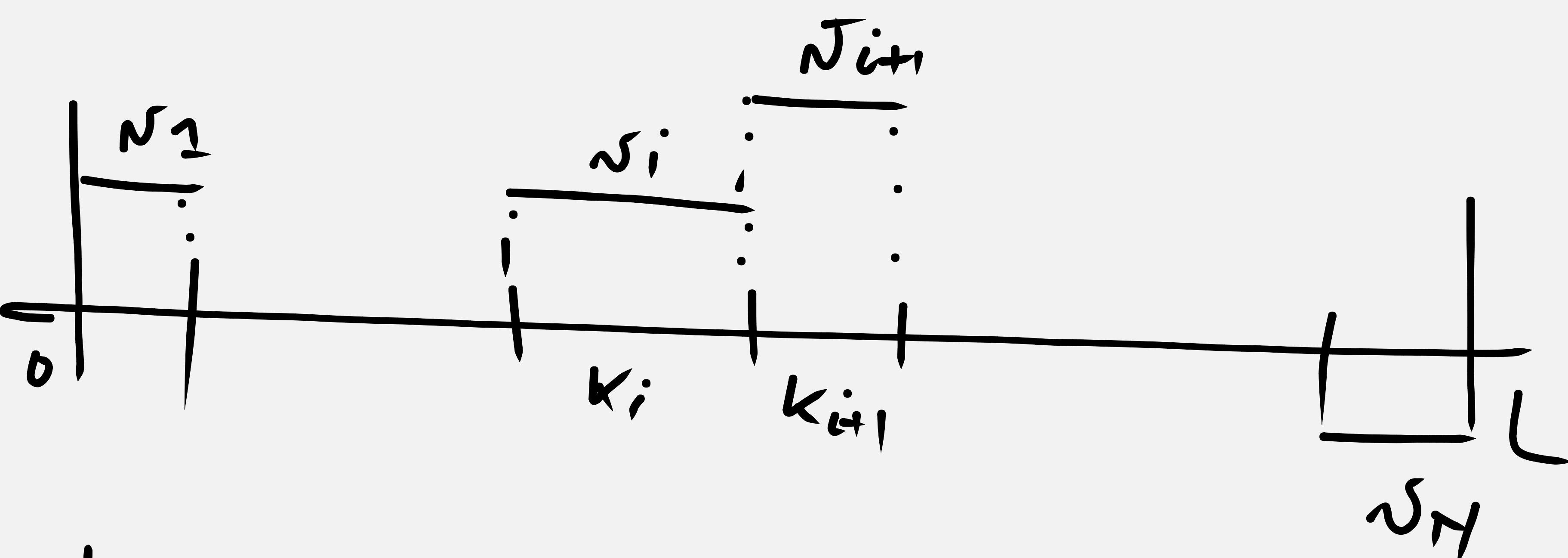
Discretisation du domaine $(0, L)$ "maillage"



- Partition de $(0, L)$ en N mailles (Volume de contrôle) $K_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ $i=1, \dots, N$
- Centres des mailles $x_i = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}}}{2}, i=1, \dots, N$
- $h_i = |x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}|$ $i=1, \dots, N$
- $\rho_{i+\frac{1}{2}} = |x_{i+1} - x_i|$ $i=0, \dots, N$
- $h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$

Discretisation de l'espace de solutions

$$V_h = \{ v(x) = v_i \in R \quad \forall x \in K_i, \forall i=1,\dots,N \}$$



Discretisation non conforme car $V_h \notin H_0^1(0, L)$
 $\dim V_h = N$

Interpolant $I_h : C^0(0, L) \rightarrow V_h$

$$u \mapsto u_h \in V_h \text{ tel que } u_i = u(x_i)$$

Discretisation de l'équation :

- * on part de la forme conservative $(-u'(x))' = f(x)$

- * on intègre dans chaque maille

$$\begin{array}{c} -u'(x_{i+1}) \\ \rightarrow \\ + \\ x_{i-1} \quad x_{i+1} \\ \{ \quad \} \\ k_i \end{array}$$

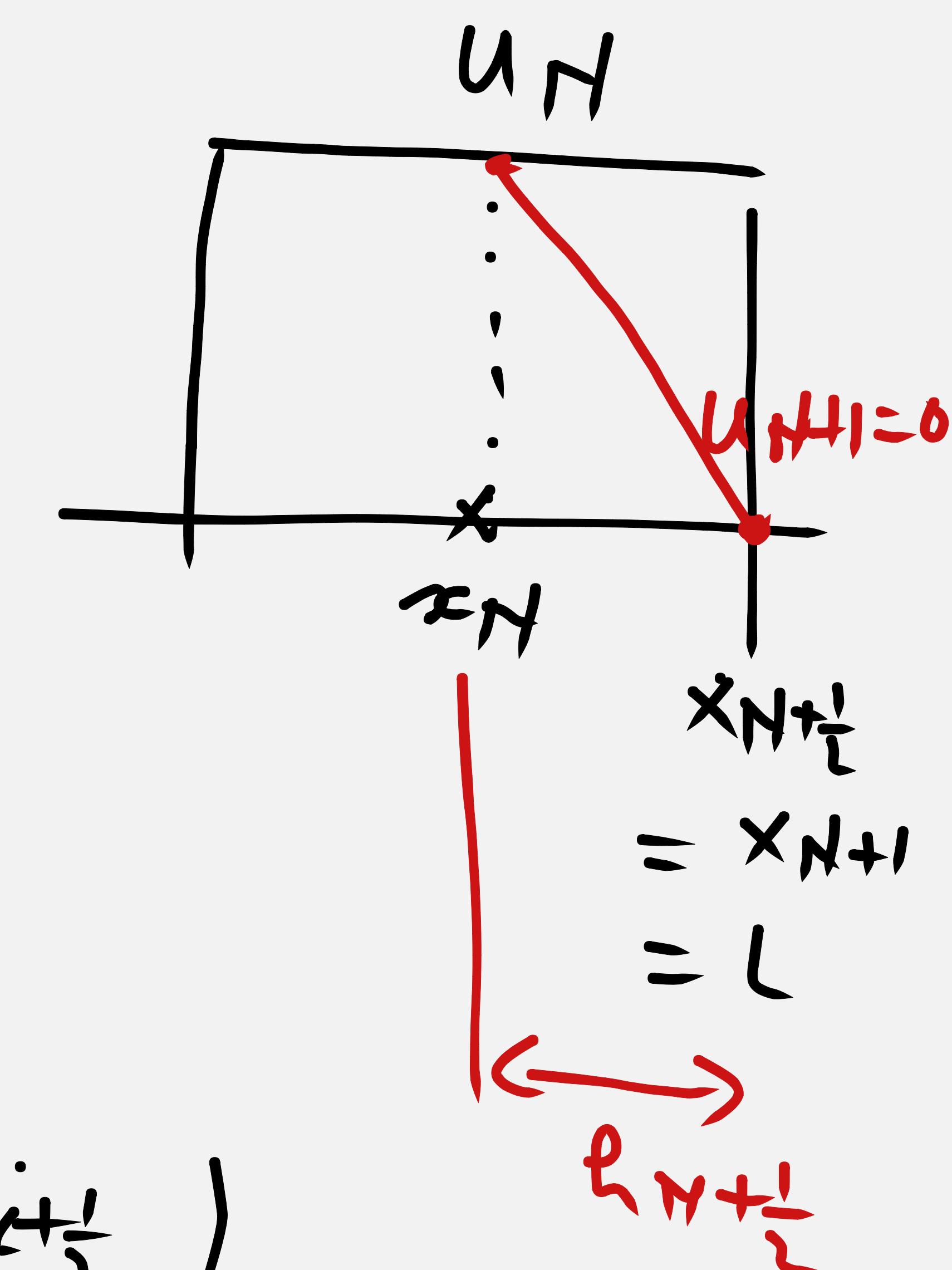
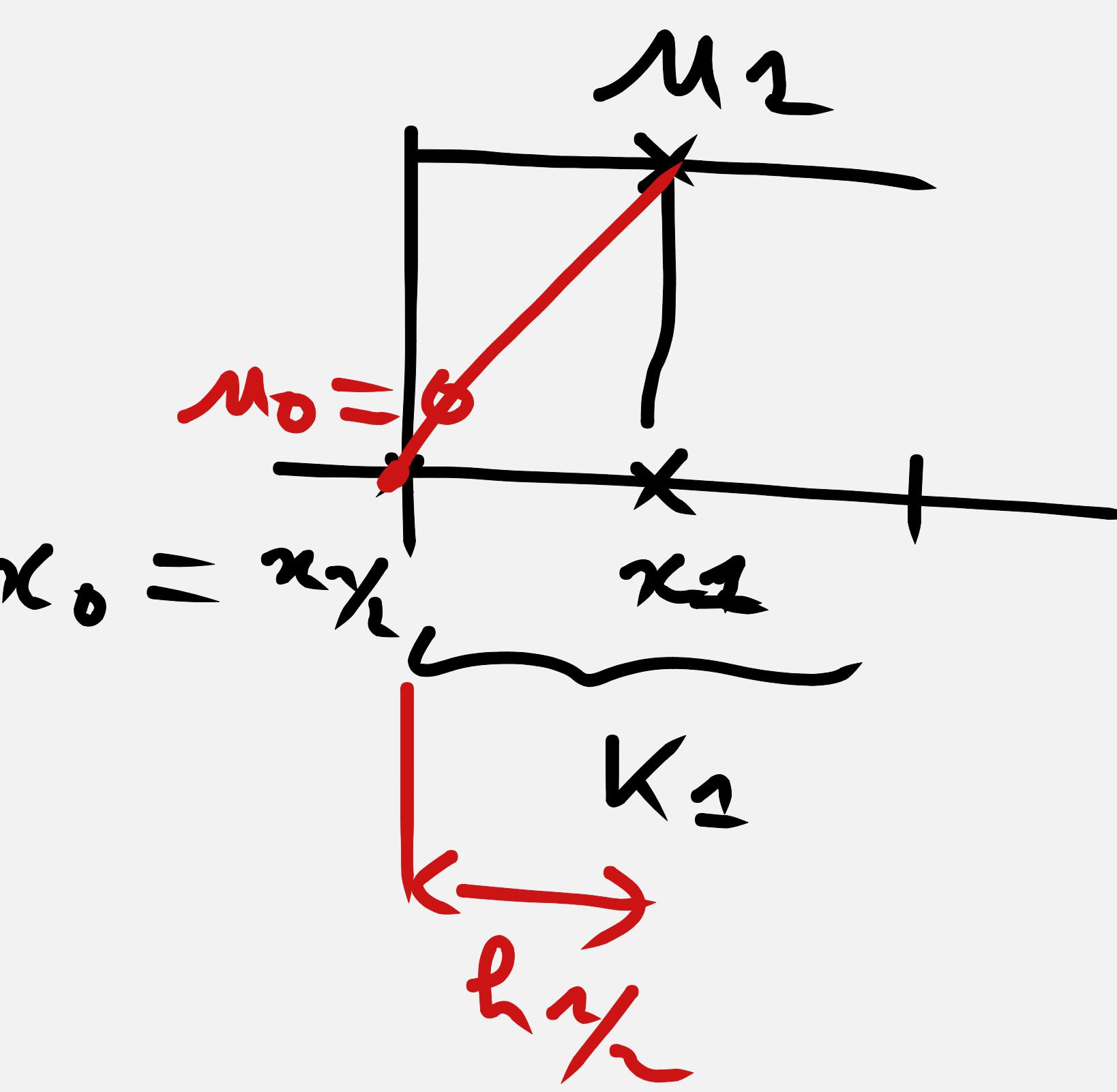
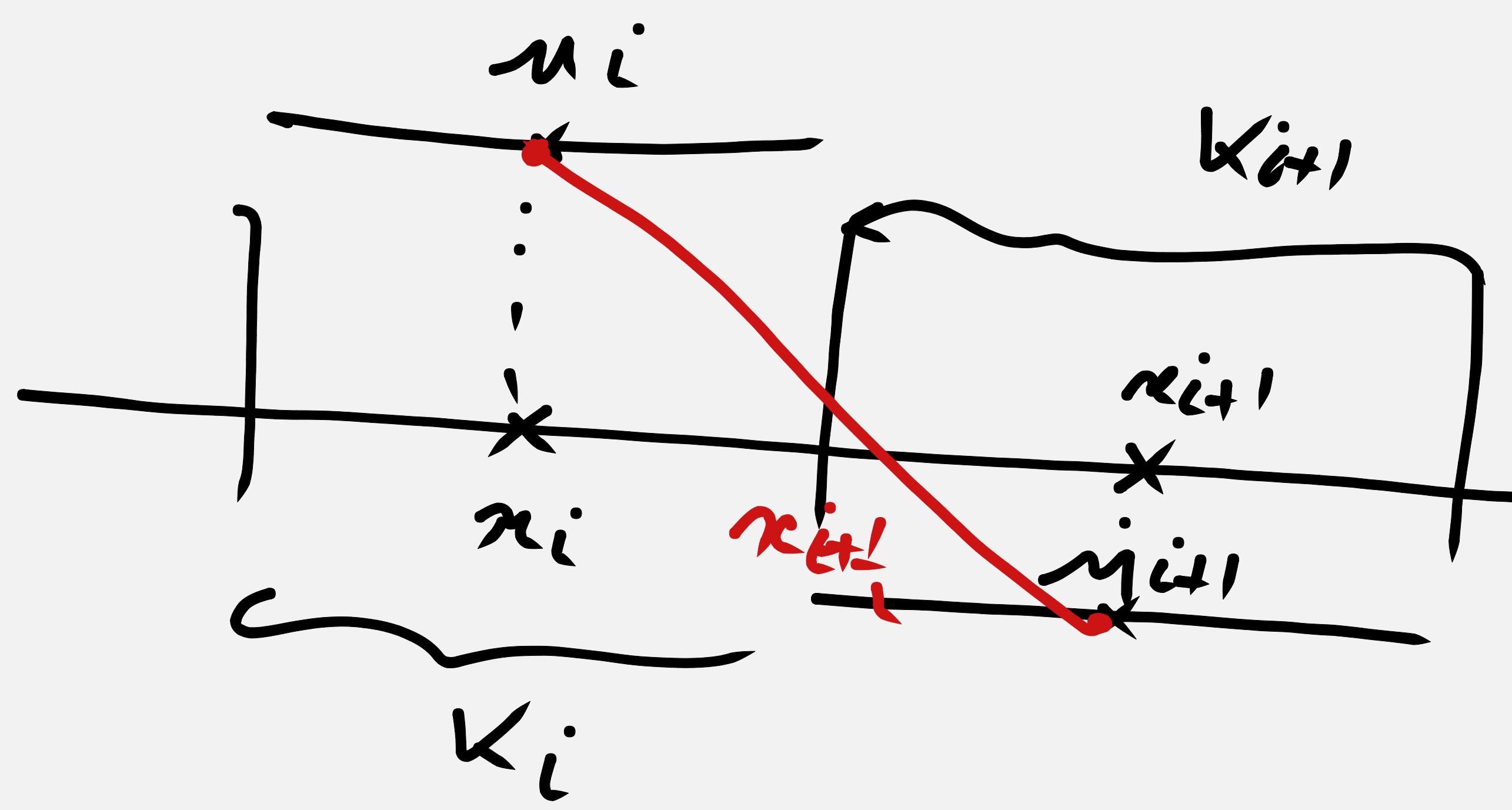
on passe à l'intégrale de had

$$(-u'(x))' dx = \int_{k_i} f(x) dx$$

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - (-u'(x_{i-\frac{1}{2}})) = \int_{k_i} f(x) dx$$

flux à l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$: $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}(u) = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$

- * on définit un flux numérique $\hat{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_\theta)$



Trouver un flux numérique $\bar{F}_{i+1/2}(u_\epsilon)$ qui approxime $-u'(x_{i+1/2})$

$$\bar{F}_{i+1/2}(u_\epsilon) = \frac{u_i - u_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+1/2}} \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$\bar{F}_{1/2}(u_\epsilon) = \frac{u_0 - u_1}{x_1 - x_0} = \frac{0 - u_1}{h_{1/2}}$$

$$\bar{F}_{N+1/2}(u_\epsilon) = \frac{u_N - u_{N+1}}{x_{N+1} - x_N} = \frac{u_N - 0}{h_{N+1/2}}$$

Schéma VF : $u_h \in V_h$ tq.

$$\left| \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}(u_h) = \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N \right.$$

$$\left| \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} = \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N \right.$$

ou sur un point

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

Consistance des flux :

Soit $u \in C^2([0, L])$, on pose $u_h = I_h u$, i.e.

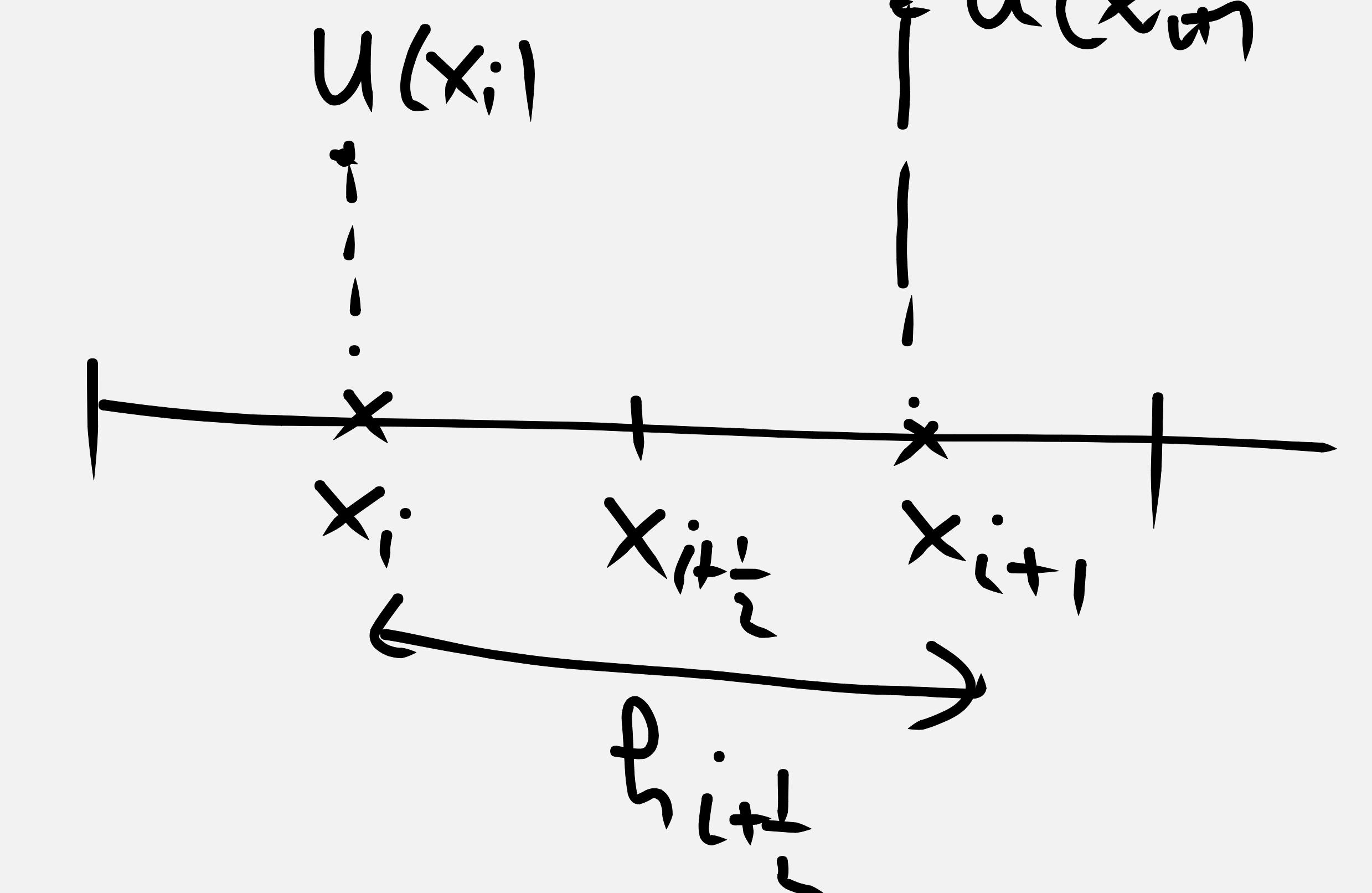
$$u_h(x) = u_i = u(x_i) \quad \forall x \in K_i \quad \forall i=1, \dots, N$$

on définit l'erreur de consistance des flux

accroissements finis

$$\begin{aligned} \|r_{i+\frac{1}{2}}(u)\| &= -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(I_h u) \\ &= -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}} \\ |u'(x) - u'(x_{i+\frac{1}{2}})| &\leq \max_{y \in [x_i, x_{i+1}]} |u''(y)| h_{i+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x)) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |r_{i+\frac{1}{2}}(u)| \leq \max_{y \in [x_i, x_{i+1}]} |u''(y)| h_{i+\frac{1}{2}}$$



• formulation variationnelle discrète

$$\boxed{F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_h) = \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N n_i (F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_h)) &= \sum_{i=1}^N n_i \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall u_h \in V_h \\
 \underbrace{\sum_{i=1}^N n_i F_{i+\frac{1}{2}}(u_h)}_{\text{on pose } n_0 = 0} - \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} F_{j+\frac{1}{2}}(u_h) n_{j+1}}_{n_{N+1} = 0} &= \sum_{i=1}^N \int_{K_i} f(x) n_h(x) dx = \int_0^L f(x) n_h(x) dx \\
 &= \sum_{i=0}^N n_i F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - \sum_{i=0}^N F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) n_{i+1} \\
 &= \sum_{i=0}^N (n_i - n_{i+1}) F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) = \sum_{i=0}^N \frac{(n_i - n_{i+1})(u_i - u_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

Schema VF

$$\sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \int_0^L f(x) v(x) dx \quad \forall v \in V_h$$

c'est la formulation variationnelle directe du schéma.

Définition: produit scalaire H'_0 discut sur V_h :

$$\langle u_h, v_h \rangle_{1,h} = \sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

norme associée:

$$\|u_h\|_{1,h} = \sqrt{\sum_{i=0}^N \left(\frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^2}$$

en posant

$$\sum_{i=0}^N \left(\frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{v_i - v_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) h_{i+\frac{1}{2}}$$

Inégalité de Poincaré discrète : $\forall v_\xi \in V_h$ on a

$$\|v_\xi\|_L^2 \leq L \|v_\xi\|_{1,h}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ v_{N+1} = 0 \end{array} \right. \\
 & v_i = \sum_{j=0}^{i-1} |v_{j+1} - v_j| \\
 & |v_i| \leq \sum_{j=0}^N \underbrace{\frac{|v_{j+1} - v_j|}{\sqrt{h_{j+1}}}}_{\sqrt{h_{j+1}}} \leq \sqrt{\sum_{j=0}^N \frac{(v_j - v_{j+1})^2}{h_{j+1}}} \quad \sqrt{\sum_{j=0}^N h_{j+1}} \\
 & \|v_\xi\|_L^2 = \int_0^N (v_\xi(x)) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i)^2 dx = \sum_{i=1}^N h_i (v_i)^2 \\
 & \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N h_i \right)}_L \|v_\xi\|_{1,h}^2 \leq L \|v_\xi\|_{1,h}^2
 \end{aligned}$$

Estimation a priori : tate solution $u_h \in V_h$ du schéma VF
 vérifie $\|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_L^2$

Preuve: on pose $v_h = u_h$ dans la formulation variationnelle discrète

$$\langle u_h, u_h \rangle_{1,h} = \int_0^L f(x) u_h(x) dx$$

C.S. \Rightarrow

$$\|u_h\|_{1,h}^2 \leq \|f\|_L^2 \|u_h\|_L$$

inégalité Poincaré-discrète \Rightarrow

$$\|u_h\|_{2,h}^2 \leq \|f\|_L^2 + \|u_h\|_0^2$$

$$\Rightarrow \|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_L$$

Rq : implique l'unicité de la solution car le schéma est linéaire

\Rightarrow comme le schéma s'écrit comme un système linéaire

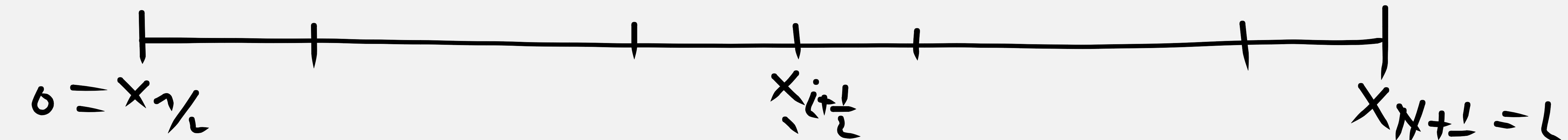
$$A_h U_h = S_h \quad \text{avec} \quad U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

et A_h une matrice carrée de taille N

l'unicité de solution implique que $\text{Ker } A_h = \{0\}$ donc
 A_h est inversible et donc le schéma admet une solution unique.

Rq: A_h est SOP $\langle A_h U_h, V_h \rangle = \langle U_h, S_h \rangle_{\mathbb{Z}_h}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x) = f(x) \quad x \in (0, L) \\ u(0) = u_D \in \mathbb{R} \\ -u'(L) = g \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$



① Schéma : $\boxed{F_{i+1/2}(u_h) - F_{i-1/2}(u_h) = \int_{k_i} f(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N}$

Écrire les flux numériques $F_{i+1/2}(u_h)$, $i=0, \dots, N$ approximant le flux $-u'(x_{i+1/2})$

$$F_{i+1/2}(u_h) = \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+1/2}}, \quad i=1, \dots, N-1$$

$$F_0(u_h) = \frac{u_D - u_1}{h_{1/2}}$$

$$F_{N+1/2}(u_h) = g$$

②

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

Ecriv le schéma sur la forme d'un système linéaire $A_h U_h = S_h$

$$\underset{i=1}{\frac{u_1 - u_2}{h_{3/2}}} - \frac{u_3 - u_1}{h_{1/2}} = \int_{K_1} f(x) dx$$

$$\vdots$$

$$\underset{i=2, \dots, N-1}{\frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} = \int_{K_i} f(x) dx}$$

$$\underset{i=N}{g - \frac{u_{N-1} - u_N}{h_{N-\frac{1}{2}}} = \int_{K_N} f(x) dx}$$

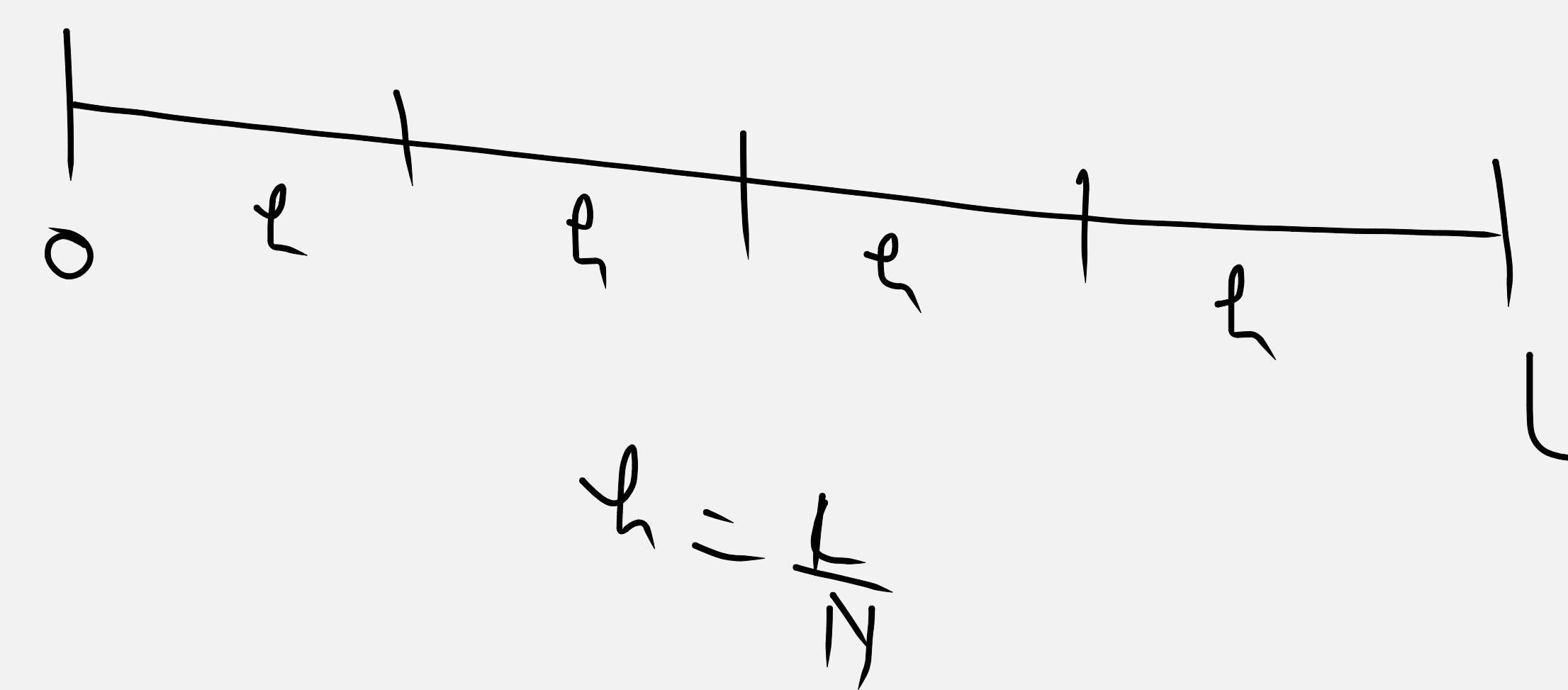
$$A_h = i \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & & \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \\ & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ & & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

$$S_h = i \cdot \begin{pmatrix} \frac{u_0}{h} + \int_{K_1} f(x) dx \\ \vdots \\ \int_{K_i} f(x) dx \\ \vdots \\ -g + \int_{K_N} f(x) dx \end{pmatrix}$$

Quadratur à 2 pts (et milieu)

$$\int_{K_i} f(x) \approx h_i f(x_i)$$

Mailage uniforme :



$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{3}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{3}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & -\frac{1}{h^2} & \frac{3}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{3}{h^2} & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$S_h = \begin{pmatrix} h f(x_2) + u_0 \cdot \frac{2}{h} \\ h f(x_2) \\ \vdots \\ h f(x_{N-1}) \\ h f(x_N) - g \end{pmatrix}$$

Équation parabolique 1D

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = f(x,t) & \text{sur } (0,L) \times (0,T) \\ u(0,t) = 0 & t \in (0,T) \\ u(L,t) = 0 & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in (0,L) \end{cases}$$

Semi-discretisation en espace

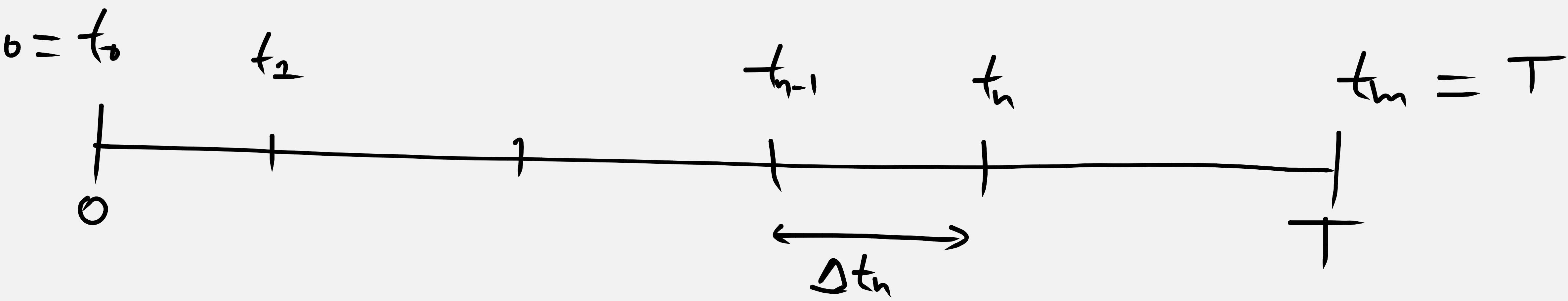
$$\begin{cases} u_h(t) \in V_h & \forall t \in (0,T) \\ u_h(x,t) = u_i(t) & \forall x \in K_i, \forall t \in (0,T) \\ & \forall i=1, \dots, N \end{cases}$$

$$\int_{K_i} \partial_t u(x,+) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} -\partial_x u(x,+) dx = \int_{K_i} f(x,+) dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} u(x,+) dx - \partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}},+) - (-\partial_x u(x_{i-\frac{1}{2}},+)) = \int_{K_i} f(x,+) dx$$

Diskretisierung von f :

$$\left\{ \begin{array}{l} h; \frac{d}{dt} u_i(t) + F_{i+\frac{1}{2}}(u_h(t)) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_h(t)) = \int_{K_i} f(x,+) dx \\ u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T) \\ u_i(0) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u^0(x) dx \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right.$$



$$0 = t_0 < t_1 \dots < t_{n-1} < t_n < \dots < t_m = T$$

$$y(t) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$H(y, t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = H(y(t), t)$$

$$y(t_n) = y_n$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dy(t)}{dt} dt}_{y(t_n) - y(t_{n-1})} = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(y(t), t) dt$$

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{\Delta t_n} = \begin{cases} H(y(t_n), t_n) & \text{Euler implizite} \\ H(y(t_{n-1}), t_{n-1}) & - \text{explizite} \end{cases}$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_n} = \begin{cases} H(y_n, t_n) & \text{Euler implicite} \\ H(y_{n-1}, t_{n-1}) & \text{Euler explicite} \end{cases}$$

notation : $y_* = \begin{cases} y_n \text{ si implicite} \\ y_{n-1} \text{ si explicite} \end{cases}$

$$t_* = \begin{cases} t_n \text{ si implicite} \\ t_{n-1} \text{ si explicite} \end{cases}$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_n} = H(y_*, t_*)$$

Application à la semi-discretisation VF du pb parabolique :

$$\left| \begin{array}{l} u_i^n = u_i(t_n) \\ u_{\eta}^n = u_{\eta}(t_n) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i \frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_i^{n-1}}{\Delta t_h} + F_{i+\frac{1}{2}}(\bar{u}_h^*) - F_{i-\frac{1}{2}}(\bar{u}_h^+) = \int_{K_i} f(x, t^*) dx \quad \forall i=1, \dots, N \\ \forall n=1, \dots, m \\ \bar{u}_0^* = \bar{u}_{N+1}^* = 0 \\ \bar{u}_i^n = \frac{1}{\rho_i} \int_{K_i} u_i(x) dx \quad i=1, \dots, N \end{array} \right.$$

Crank Nicolson

$$\hookrightarrow \rho_i \frac{\bar{u}_i^n - \bar{u}_i^{n-1}}{\Delta t_h} + F_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\bar{u}_h^n + \bar{u}_h^{n-1}}{2}\right) - F_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{\bar{u}_h^n + \bar{u}_h^{n-1}}{2}\right) = \int_{K_i} f(x, \frac{t^n + t^{n-1}}{2})$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_h} = H\left(\frac{y_n + y_{n-1}}{2}, \frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right)$$

$$U_e^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

$$S_e^n = \begin{pmatrix} \int_{x_1} f(x, t^n) dx \\ \vdots \\ \int_{x_N} f(x, t^n) dx \end{pmatrix}$$

$$D_e = \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & -h_N \\ & & & C \end{pmatrix}$$

$$D_e \frac{U_e^n - U_e^{n-1}}{\Delta t_n} + A_e U_e^* = S_e^*$$

Cas Euler implicite:

$$(D_e + \Delta t_n A_e) U_e^n = D_e U_e^{n-1} + \Delta t_n S_e^n$$

Cas Euler explicite:

$$D_e U_e^n = D_e U_e^{n-1} - \Delta t_n A_e U_e^{n-1} + \Delta t_n S_e^{n-1}$$

Principe du maximum pour $f = 0$:

La solution de l'équation parabolique vérifie $\forall m \in (0, L), \forall t \in (0, T)$

$$\min_{\text{CL}}(u^*(y), y \in (0, L), 0, 0) \leq u(x, t) \leq \max_{\text{CL}}(u^*(y), y \in (0, L), 0, 0)$$

Lemme : $N_i^n = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^n N_j^{n-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \beta_{ij}^n U_j^n + \gamma_i^n \bar{N}_0 + \delta_i^n \bar{N}_{N+1}$

$\forall i = 1, \dots, N$
 $\forall n = 1, \dots, m$

Si $\alpha_{ij}^n \geq 0, \beta_{ij}^n \geq 0, \gamma_i^n \geq 0, \delta_i^n \geq 0 \quad \forall i, j, n$ \Rightarrow principe du maximum discret
et $\alpha_{ii}^n > 0$ et $\boxed{\sum_j \alpha_{ij}^n + \sum_j \beta_{ij}^n + \gamma_i^n + \delta_i^n = 1 \quad \forall i}$

$$\min(u_j, j=1, N, \bar{u}_0, \bar{u}_{N+1}) \leq u_i^n \leq \max(u_j, j=1, N, \bar{u}_0, \bar{u}_{N+1}) \quad \forall i, n$$

Application au pb parabolique

① Cas Euler implicite :

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_{i-\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) u_i^n = \frac{h_i}{\Delta t_n} u_i^{n-1} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} u_{i+1}^n + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} u_{i-1}^n$$

\Rightarrow le schéma le principe du maximum
quelque soit le pas de temps Δt_n \Rightarrow Schéma inconditionnellement stable

Cas Euler explicite

$$\underline{D > 0}$$

$$h_i \frac{\tilde{u}_i - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + D \frac{u_i^{n-1} - \tilde{u}_{i+1}^{n-1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} + D \frac{u_i^{n-1} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\frac{h_i}{\Delta t_n} \tilde{u}_i = \left(\frac{h_i}{\Delta t_n} - \frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) u_i^{n-1} + \frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{u}_{i+1}^{n-1} + \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}} \tilde{u}_{i-1}^{n-1}$$

Condition suffisante pour le principe du maximum :

$$\frac{h_i}{\Delta t_n} > \frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \Delta t_n < \frac{h_i}{\frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}}}$$

Schéma conditionnellement stable