# Discrétisation Volume Fini (FV) des EDPs

I Discrétisation VF des éq. elliptiques/paraboliques en dimension 1
→ TP/TD

II Discrétisation VF des éqs. hyperboliques scalaires en dimension 1
→ TD
→ TP

III Extension à la dimension $d = 2, 3$ des schémas VF pour les eqs elliptiques/paraboliques
→ TD
→ Modélisation stratigraphique (sédimentologie) TP 1re partie

IV Extension du cas hyperbolique à la dimension $d = 2, 3$
→ TD → TP sédimentologie 2ème partie

# I Cas elliptique/parabolique en dimension 1

$$(E)\quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0,L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$$H^1_0(0,L) = \left\{ v \in L^2(0,L) \text{ t.q. } \int_0^L |v'|^2 dx < +\infty,\ u(0) = u(L) = 0 \right\}$$

$$L^2(0,L) = \left\{ v : (0,L) \to \mathbb{R} \text{ mesurable t.q. } \int_0^L |v(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

Formulation variationnelle (ou faible) de $(E)$

$v \in H^1_0(0,L)$

formulation conservative : $\left(-u'(x)\right)' = f(x)$

$$\int_0^L \left(-u'(x)\right)' v(x)\, dx = \int_0^L f(x) v(x)\, dx$$

$$\int_0^L \left[\left(-u'(x)v(x)\right)' + u'(x)v'(x)\right] dx = \int_0^L f(x) v(x)\, dx$$

$$-u'(L)\underbrace{v(L)}_{0} + u'(0)\underbrace{v(0)}_{0} + \int_0^L u'(x)v'(x)\, dx = \int_0^L f(x)v(x)\, dx$$

(FV) Formulation variationnelle : trouver $u \in H_0^1(0,L)$ t.q.

$$\int_0^L u'(x)v'(x)\, dx = \int_0^L f(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(0,L)$$

Prop : (FV) admet une solution unique d'après LAX Milgram

$L^2(0,L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_0^L u(x)\, v(x)\, dx$$

avec la norme associée $\|v\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^L |v|^2 dx} = \sqrt{\langle v, v\rangle_{L^2}}$

$H_0^1(0,L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} = \int_0^L u'(x)\, v'(x)\, dx$$

avec la norme associée $\|v\|_{H_0^1} = \sqrt{\int_0^L |v'(x)|^2 dx} = \sqrt{\langle v, v\rangle_{H_0^1}}$

<u>Inégalité de Poincaré</u> : $\forall v \in H_0^1(0,L)$, $\|v\|_{L^2} \leq L\, \|v\|_{H_0^1}$

preuve :

$$u(x) = \int_0^x u'(y)\,dy$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \int_0^x |u'(y)|\,dy \leq \int_0^L 1 \times |u'(y)|\,dy$$

$$\leq \underbrace{\left(\sqrt{\int_0^L (1)^2\,dx}\right)}_{\sqrt{L}} \underbrace{\left(\sqrt{\int_0^L |u'(y)|^2\,dy}\right)}_{\|u\|_{H^1_0}}$$

$$\Rightarrow \int_0^L |u(x)|^2\,dx \leq L\,\|u\|^2_{H^1_0} \int_0^L 1\,dx = L^2\,\|u\|^2_{H^1_0}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2} \leq L\,\|u\|_{H^1_0}$$

Stabilité de la solution : la solution de (EV) vérifie l'estimation a priori $\|u\|_{H_0^1} \leq L \, \|f\|_{L^2}$

Preuve : on pose $v = u$ dans (EV)

$$\int_0^L u'(x)\, u'(x)\, dx = \int_0^L f(x)\, u(x)\, dx$$

$$\|u\|^2_{H_0^1} \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2} \, \|u\|_{L^2}$$

$$\leq \|f\|_{L^2} \, L \, \|u\|_{H_0^1}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H_0^1} \leq L \, \|f\|_{L^2}$$

<u>Rq</u> : l'estimation a priori + la linéarité de (EV) implique l'unicité de la solution

en effet supposons qu'il existe deux solutions $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ de EV

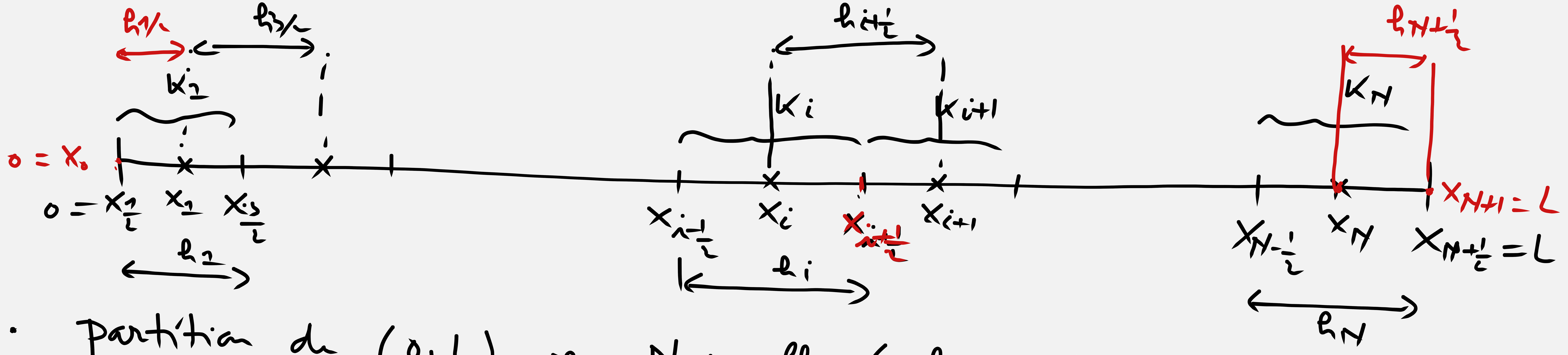
$$\Rightarrow \quad \int_0^L (u^{(1)})' v' \, dx = \int_0^L f v \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$\int_0^L (u^{(2)})' v' \, dx = \int_0^L f v \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^L (\underbrace{u^{(2)} - u^{(1)}}_{w \in H^1_0})' v' = 0 \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$\Rightarrow \quad \|u^{(2)} - u^{(1)}\|_{H^1_0} \leq C \overbrace{\|0\|}^{\delta} = 0 \Rightarrow u^{(2)} = u^{(1)}$$

Discrétisation du domaine $(0, L)$ " maillage "



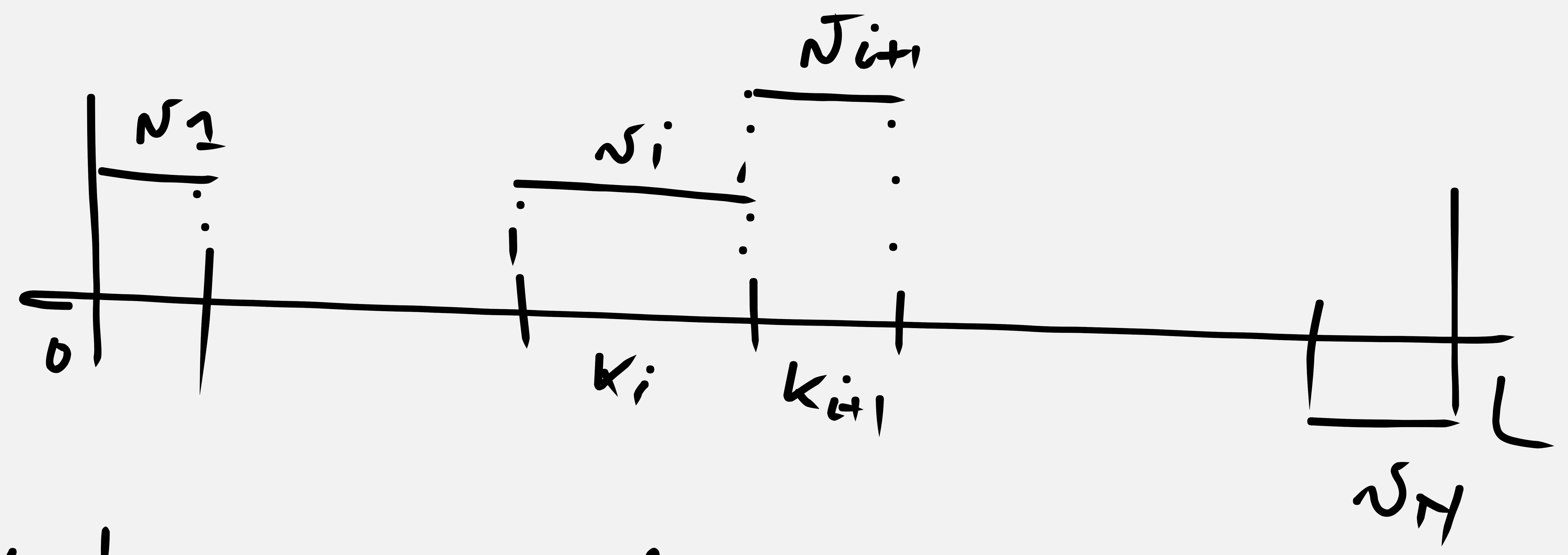

- partition de $(0, L)$ en $N$ mailles (volume de contrôle) $K_i = [x_{i-\frac12}, x_{i+\frac12}]$

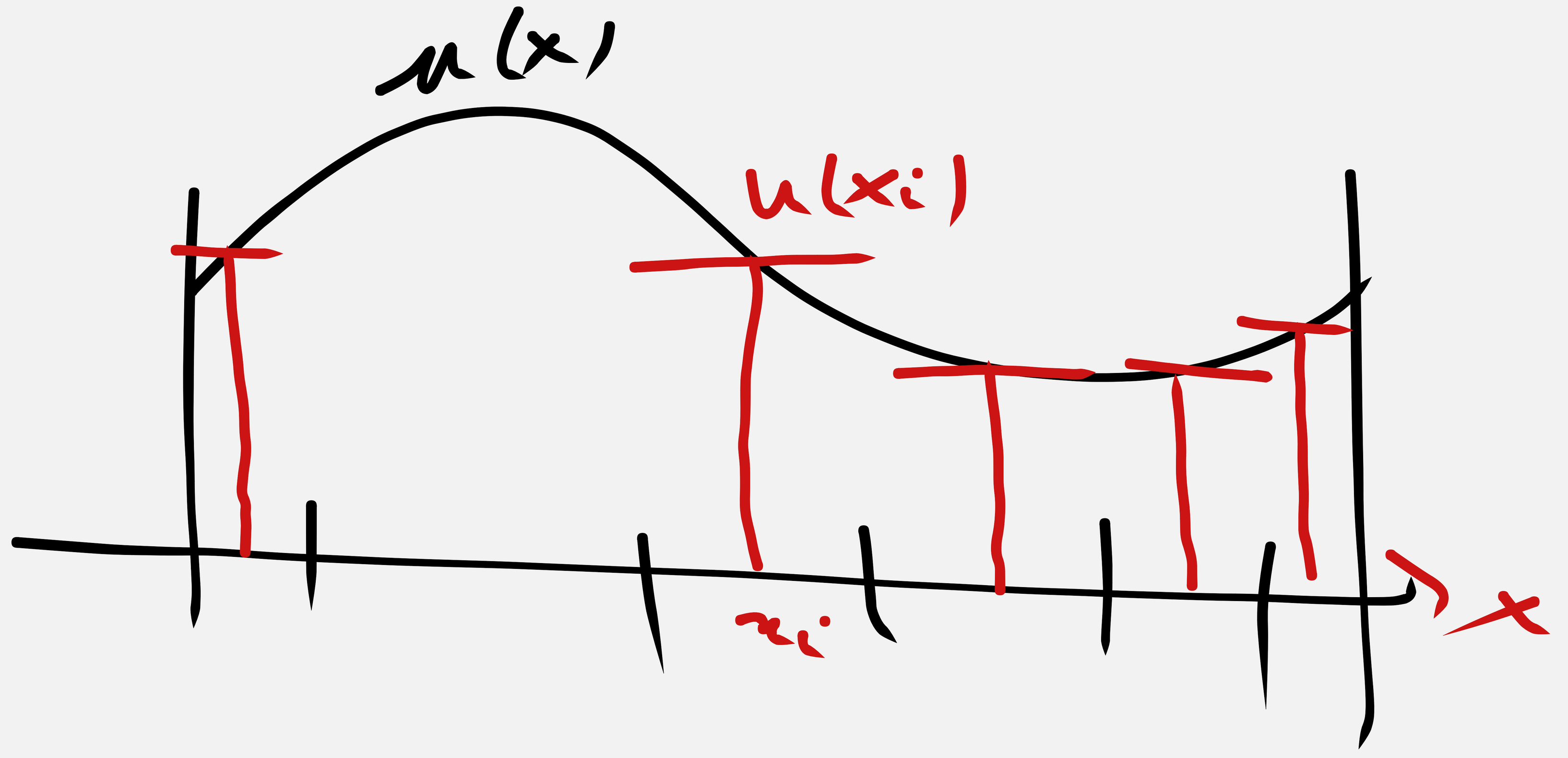
$$0 = x_{\frac12} < x_{\frac32} < \cdots < x_{i-\frac12} < x_{i+\frac12} < \cdots < x_{N+\frac12} = L \qquad i = 1, \dots, N$$

- Centres des mailles $x_i = \dfrac{x_{i+\frac12} + x_{i-\frac12}}{2}$, $i = 1, \dots, N$
- $h_i = |x_{i+\frac12} - x_{i-\frac12}| \quad i = 1, \dots, N$
- $h_{i+\frac12} = |x_{i+1} - x_i| \quad i = 0, \dots, N$
- $h = \max\limits_{i=1,\dots,N} h_i$

Discrétisation de l'espace des solutions

$$V_h = \{ v(x) = v_i \in \mathbb{R} \quad \forall x \in K_i \ , \ \forall i = 1, \dots, N \}$$




Discrétisation non conforme car $V_h \not\subset H^1_0(0,L)$

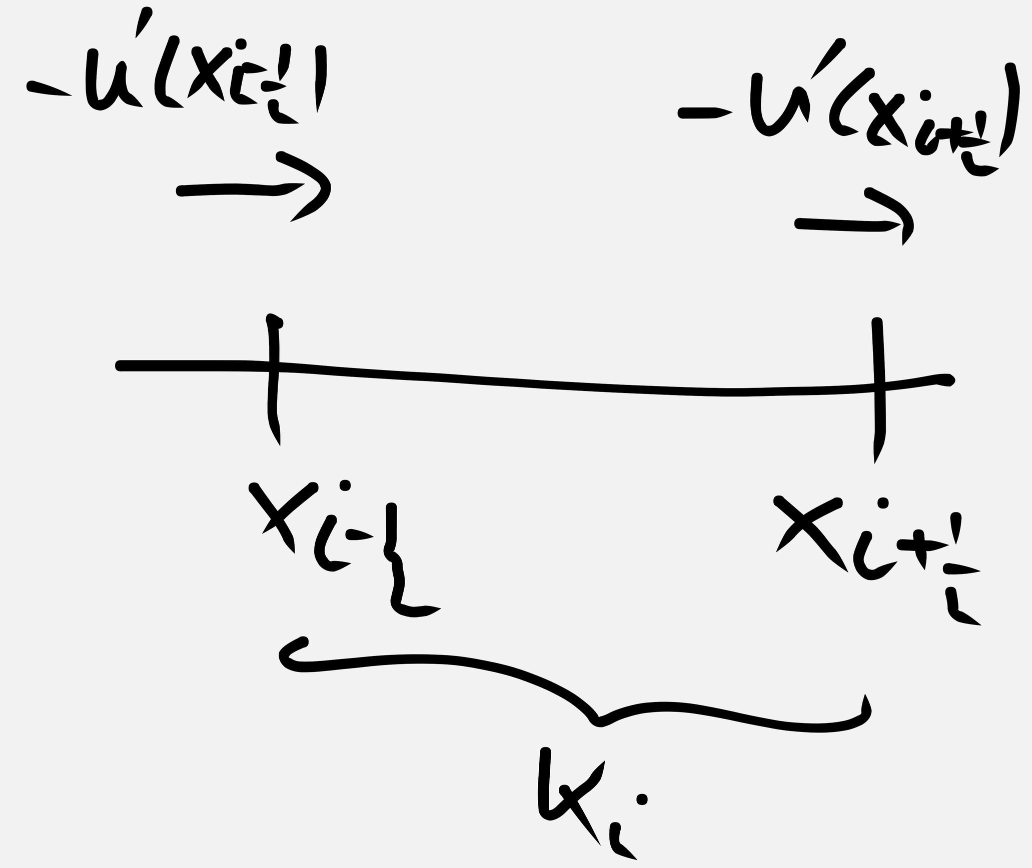
$\dim V_h = N$

Interpolant $I_h : C^0(0,L) \to V_h$

$$u \mapsto u_h \in V_h \quad \text{t.q.} \quad u_i = u(x_i)$$

Discrétisation de l'équation :

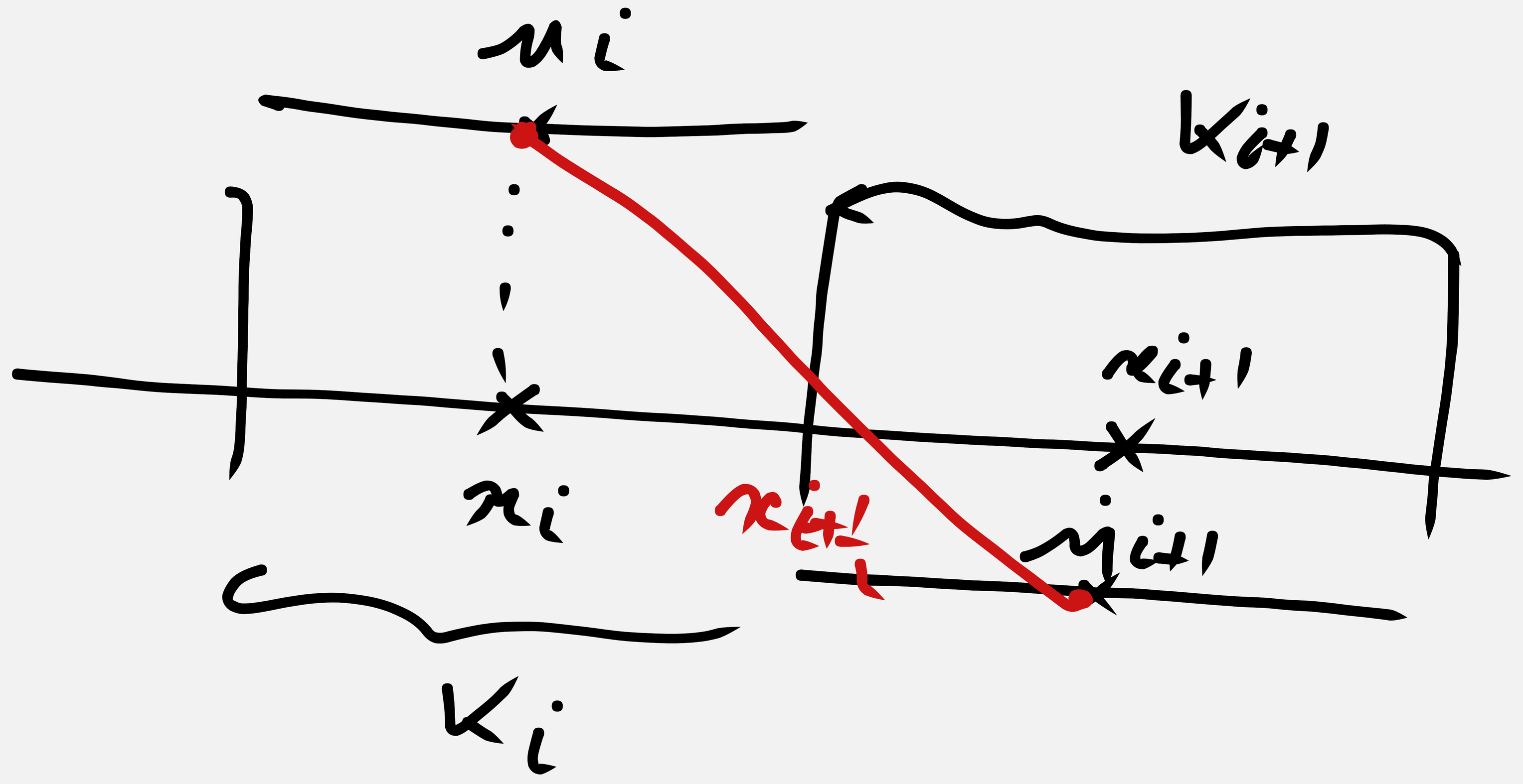
* on part de la forme conservative $(-u'(x))' = f(x)$
* on intègre dans chaque maille $\displaystyle\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (-u'(x))' \, dx = \int_{K_i} f(x) \, dx$
* on passe à l'intégrale de bord

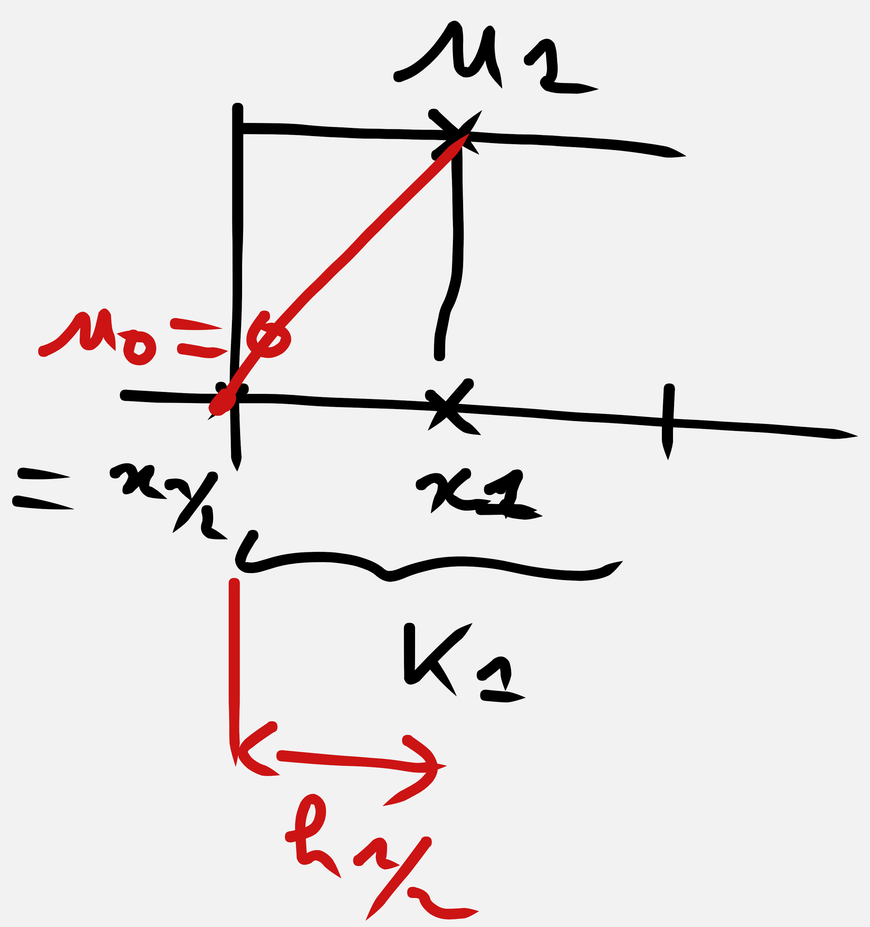


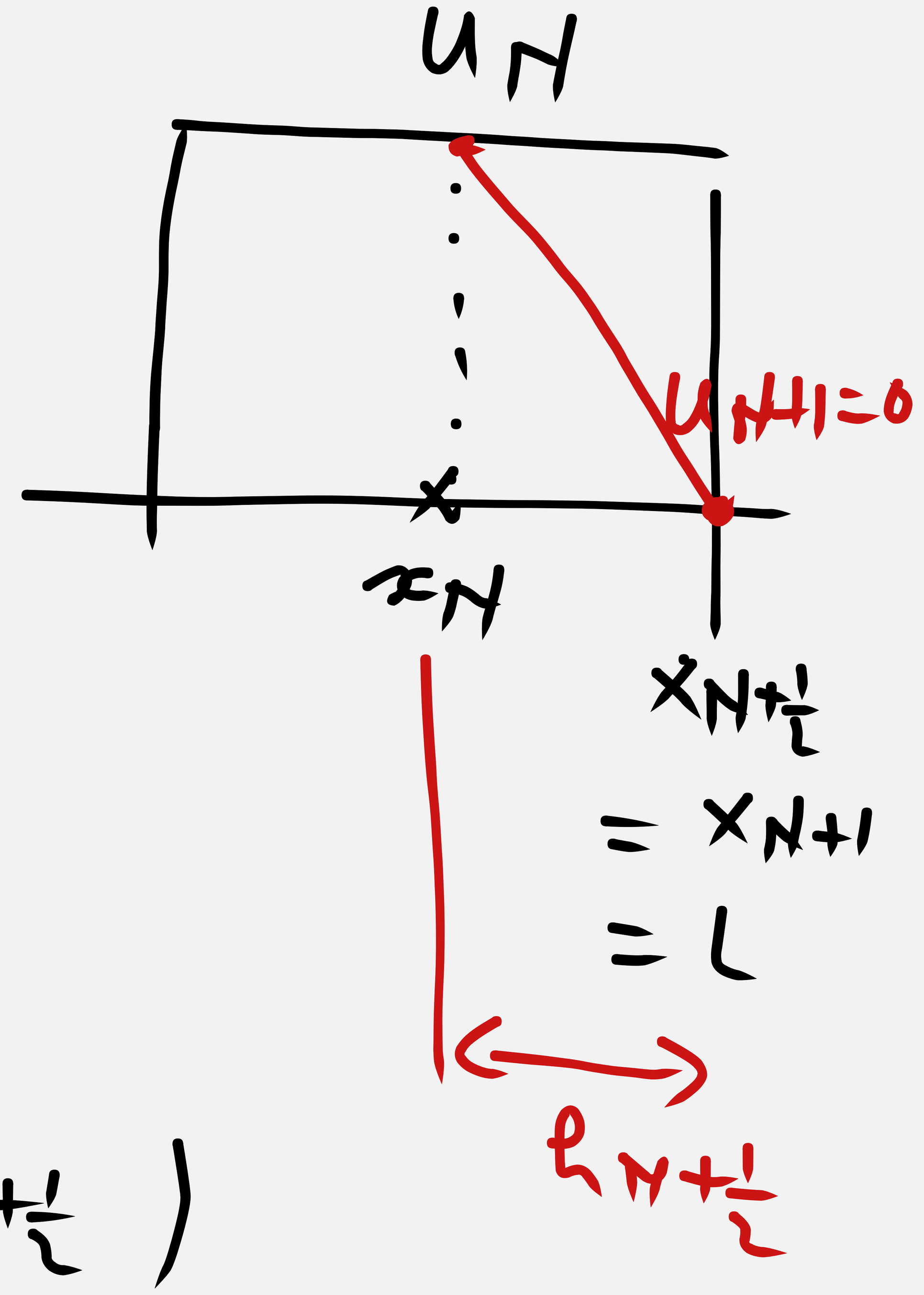

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - (-u'(x_{i-\frac{1}{2}})) = \int_{K_i} f(x) \, dx$$

flux à l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$ : $F_{i+\frac{1}{2}}(u) = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$

* on définit un <u>flux numérique</u> $F_{i+\frac{1}{2}}(u_h)$




Trouver un flux numérique $F_{i+\frac12}(u_e)$ qui approxime $-u'(x_{i+\frac12})$

$$\left\{\begin{array}{l}
F_{i+\frac12}(u_e) = \dfrac{u_i - u_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac12}} \qquad i = 1, \dots, N-1 \\[2ex]
F_{1/2}(u_e) = \dfrac{u_0 - u_1}{x_1 - x_0} = \dfrac{0 - u_1}{h_{1/2}} \\[2ex]
F_{N+\frac12}(u_e) = \dfrac{u_N - u_{N+1}}{x_{N+1} - x_N} = \dfrac{u_N - 0}{h_{N+\frac12}}
\end{array}\right.$$

Schéma VF : $u_h \in V_h$ t.q.

$$\left| \; F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_h) = \int_{K_i} f(x)\,dx \quad \forall i = 1, \dots, N \right.$$

$$\left| \; \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} = \int_{K_i} f(x)\,dx \quad \forall i = 1, \dots, N \right.$$

où on a posé $\left| \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{array} \right.$

## Consistance des flux :

Soit $u \in C^2([0,L])$, on pose $u_h = I_h u$, i.e.

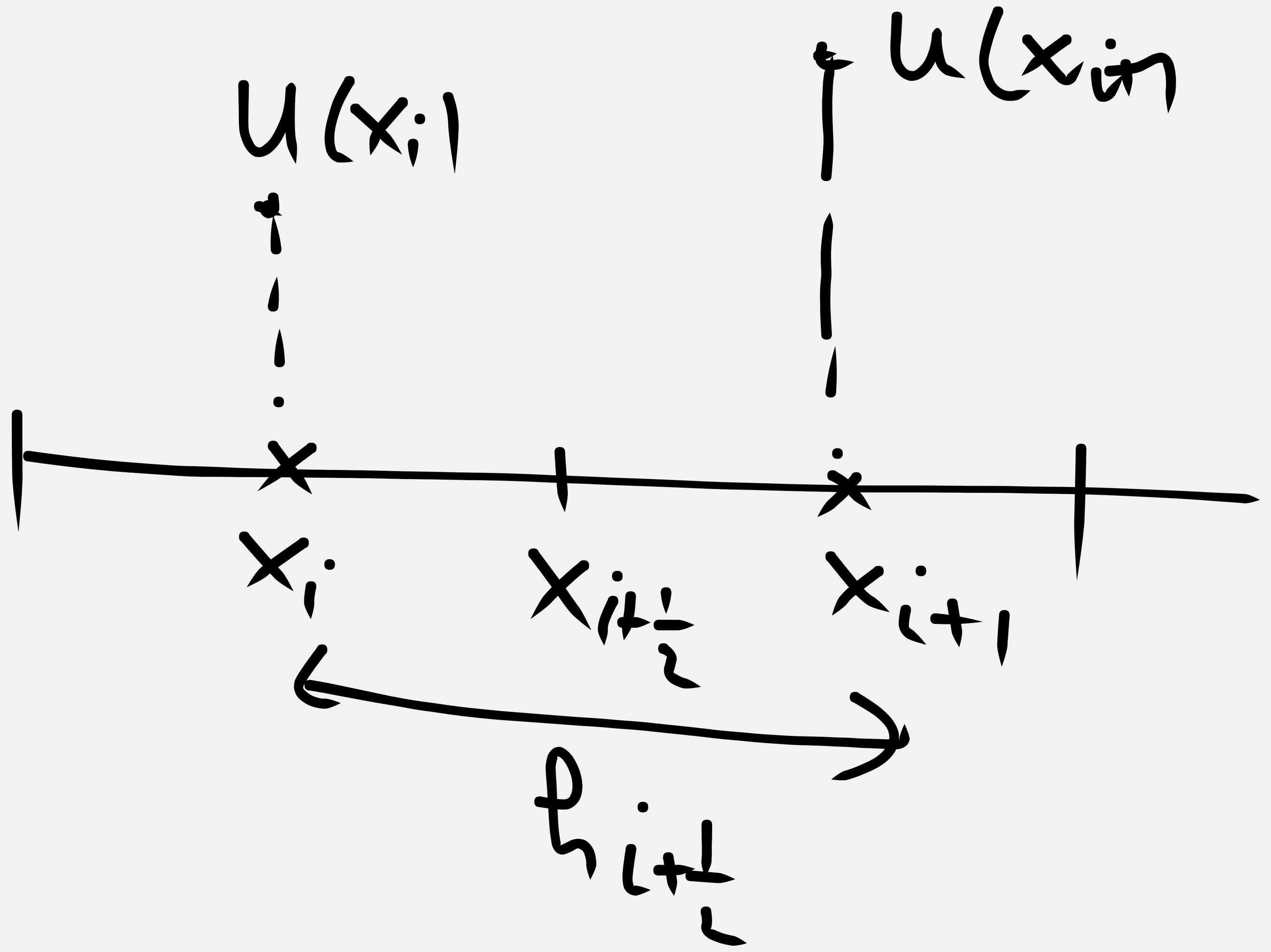
$u_h(x) = u_i = u(x_i)$ $\forall x \in K_i$
$\forall i = 1, \dots, N$

on définit l'erreur de consistance des flux

$$r_{i+\frac{1}{2}}(u) = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - F_{i+\frac{1}{2}}(I_h u)$$

$$= -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x)\right) dx$$




accroissements finis

$$|u'(x) - u'(x_{i+\frac{1}{2}})| \leq \max_{y \in [0,L]} |u''(y)|\, h_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|r_{i+\frac{1}{2}}(u)| \leq \max_{y \in [0,L]} |u''(y)|\, h_{i+\frac{1}{2}}}$$

• formulation variationnelle discrète

$$\left|\ F_{i+\frac12}(u_h) - F_{i-\frac12}(u_h) = \int_{K_i} f(x)\,dx \quad \forall i = 1,\dots,N\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} v_i \left( \underbrace{F_{i+\frac12}(u_h)} - \underset{\substack{\downarrow \\ i=j+1}}{F_{i-\frac12}}(u_h)\right) = \sum_{i=1}^{N} v_i \int_{K_i} f(x)\,dx \quad \forall v_h \in V_h$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} f(x)\, v_h(x)\,dx = \int_0^L f(x)\, v_h(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_i F_{i+\frac12}(u_h) - \sum_{j=0}^{N-1} F_{j+\frac12}(u_h)\, v_{j+1}$$

on pose $\left| \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ v_{N+1} = 0 \end{array}\right.$

$$\sum_{i=0}^{N} v_i F_{i+\frac12}(u_h) - \sum_{i=0}^{N} F_{i+\frac12}(u_h)\, v_{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} (v_i - v_{i+1})\, F_{i+\frac12}(u_h) = \sum_{i=0}^{N} \frac{(v_i - v_{i+1})(u_i - u_{i+1})}{h_{i+\frac12}}$$

schéma VF $\iff$ $$\sum_{i=0}^{N} \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac12}} = \int_0^L f(x)\, v_h(x)\, dx \quad \forall v_h \in V_h$$

en posant $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{N+1} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$

c'est la formulation variationnelle discrète du schéma.

Définition : produit scalaire $H^1_0$ discret sur $V_h$ :

$$\langle u_h, v_h \rangle_{1,h} = \sum_{i=0}^{N} \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac12}}$$

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac12}}\right)\left(\frac{v_i - v_{i+1}}{h_{i+\frac12}}\right) h_{i+\frac12}$$

norme associée : $$\|u_h\|_{1,h} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac12}}}$$

Inégalité de Poincaré discrète : $\forall v_h \in V_h$ on a

$$\|v_h\|_{L^2} \leq L \, \|v_h\|_{1,h}$$

Preuve :

$v_0 = 0$
$v_{N+1} = 0$

$$v_i = \sum_{j=0}^{i-1} |v_{j+1} - v_j|$$

$$|v_i| \leq \sum_{j=0}^{N} \frac{|v_{j+1} - v_j|}{\sqrt{h_{j+\frac{1}{2}}}} \sqrt{h_{j+\frac{1}{2}}} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{j=0}^{N} \frac{(v_j - v_{j+1})^2}{h_{j+\frac{1}{2}}}}}_{\|v_h\|_{1,h}} \underbrace{\sqrt{\sum_{j=0}^{N} h_{j+\frac{1}{2}}}}_{\sqrt{L}}$$

$$\|v_h\|_{L^2}^2 = \int_0^L (v_h(x))^2 dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} (v_i)^2 dx = \sum_{i=1}^{N} h_i (v_i)^2$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)}_{L} L \, \|v_h\|_{1,h}^2 \leq L^2 \|v_h\|_{1,h}^2$$

Estimation a priori : toute solution $u_h \in V_h$ du schéma VF vérifie $\|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_{L^2}$

<u>Preuve</u> : on pose $v_h = u_h$ dans la formulation variationnelle discrète

$$\langle u_h, u_h \rangle_{1,h} = \int_0^L f(x) u_h(x)\, dx$$

C.S. $\Rightarrow$ $\|u_h\|_{1,h}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u_h\|_{L^2}$

inégalité Poincaré discrète $\Rightarrow$ $\|u_h\|_{1,h}^2 \leq \|f\|_{L^2}\, L\, \|u_h\|_{1,h}$

$\Rightarrow$ $\|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_{L^2}$

<u>Rq</u> : implique l'unicité de la solution car le schéma est linéaire

$\Rightarrow$ Comme le schéma s'écrit comme un système linéaire

$A_h U_h = S_h$ avec $U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

et $A_h$ une matrice carré de taille $N$

l'unicité de solution implique que $\operatorname{Ker} A_h = \{0\}$ donc $A_h$ est inversible et donc le schéma admet une solution unique.

<u>Rq</u> : $A_h$ est SDP $\langle A_h U_h, V_h \rangle = \langle u_h, v_h \rangle_{1,h}$