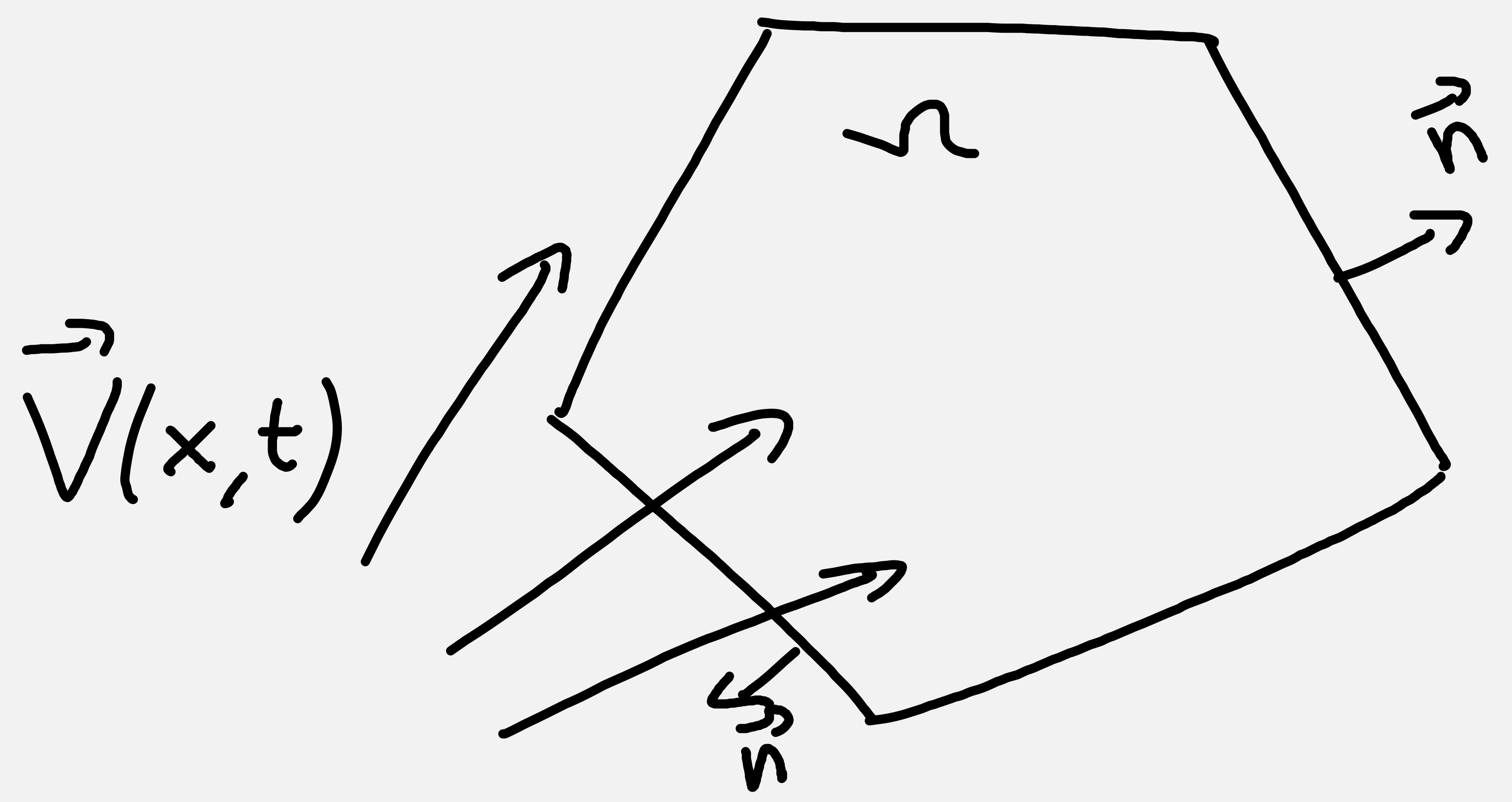
Schémas VF pour les équations hyperboliques scalaires en dimension d



$$\operatorname{div} \vec{V}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \operatorname{Div}\left(f(u(x,t))\, \vec{V}(x,t) \right) = 0 & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = u^D(x,t) & (x,t) \in \Sigma^-(T) \subset \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$\Sigma^-(t) = \left\{ (x,s) \in \partial\Omega \times (0,t) \text{ t.q. } f'(u(x,s))\, \underline{\vec{V}(x,s) \cdot \vec{n}} < 0 \right\}$$

<u>prop</u> : Soient $u^D \in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$, $\vec{V} \in C^1(\Omega \times (0,T))$

$f \in C^1(\mathbb{R})$

alors il existe une solution faible entropique unique $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$. De plus elle vérifie le principe du maximum

$$\min\left(\min_{y\in\Omega} u^0(y), \min_{(y,s)\in\Sigma^-(t)} u^D(y,s)\right) \leq u(x,t) \leq \max\left(\max_{y\in\Omega} u^0(y), \max_{(y,s)\in\Sigma^-(t)} u^D(y,s)\right)$$

<u>Rq</u> : lien avec le modèle en dimension 1 : $\vec{V} = \vec{e}_x$

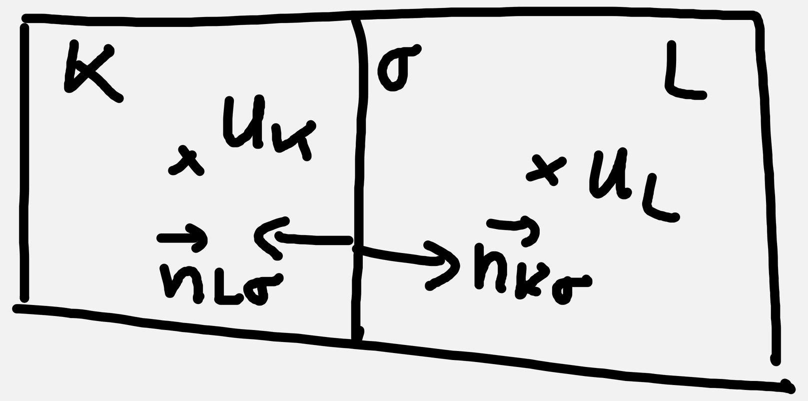
$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$$

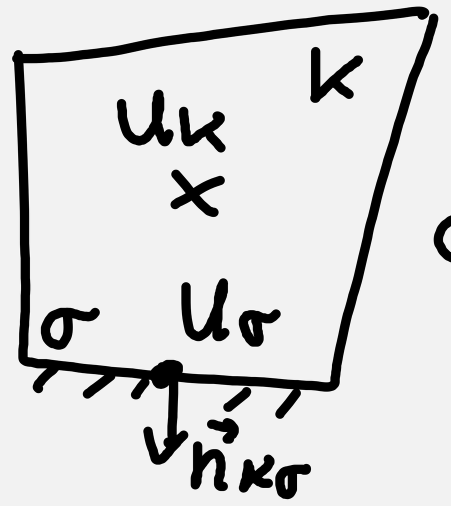
Discrétisation VF

$$V_h = \{ u_h \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } u_h(x) = u_K \ \forall x \in K, \forall K \in M_h \}$$

on note u_K^n l'inconnue discrète dans la maille K au temps t^n

$\sigma \in F_h^{int}$





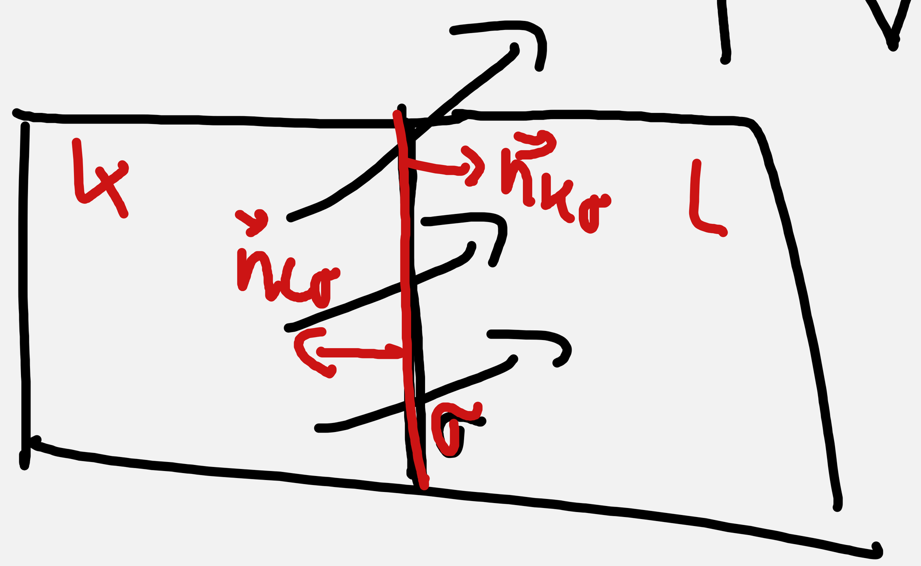
$\sigma \in F_h^{ext}$

$$u_\sigma^* = \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma u(x,t^*)\, d\sigma(x)$$

$$u_K^* = \begin{cases} u_K^n & \text{si Euler implicite} \\ u_K^{n-1} & \text{si — explicite} \end{cases}$$

$$t^* = \begin{cases} t^n & \text{si Euler implicite} \\ t^{n-1} & \text{si — explicite} \end{cases}$$

on note



$$V_{K\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma \vec V(x,t)\cdot\vec n_{K\sigma}\, d\sigma$$

$$V_{L\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma \vec V(x,t)\cdot\vec n_{L\sigma}\, d\sigma = -V_{K\sigma}^n$$

Rq : on a $V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0$

car $\vec n_{K\sigma} + \vec n_{L\sigma} = 0$

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \Big(\partial_t u(x,t) + \mathrm{Div}\big(f(u(x,t))\,\vec{V}(x,t)\big)\Big)\,dx\,dt = 0$$

$$\underbrace{\int_K \frac{u(x,t^n)-u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n}\,dx}_{} + \sum_{\sigma\in F_K}\underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma f(u(x,t))\,\vec{V}(x,t)\cdot\vec{n}_{K\sigma}\,d\sigma\,dt\right]}_{} = 0$$

discrétisation $|K|\,\dfrac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n}$

flux "continu" sur la face σ, sortant de K noté $\overline{F}^n_{K\sigma}(u)$

$\rightarrow$ discrétisation : flux numérique sur la face σ sortant de K noté $F^n_{K\sigma}(u_h^*)$ pour le schéma en temps d'Euler implicite si $* = n$ et d'Euler explicite si $* = n-1$.

$\Longrightarrow$ Equation du schéma VF dans la maille K au pas de temps n :

$$\left\{ |K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} F^n_{K\sigma}(u_h^*) = 0 \right.$$

$\forall K \in \mathcal{M}_h$

$\forall n = 1,\dots,m$

Flux monotone deux points :

$$F^n_{K\sigma}(u_h) = \begin{cases} F^n_{K\sigma}(u_K, u_L) & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int} \\ F^n_{K\sigma}(u_K, u_\sigma) & \text{si } \sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext} \end{cases}$$

Propriétés : ① Conservativité du flux : $F^n_{K\sigma}(v,w) + F^n_L(w,v) = 0$ $\forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int}$ $\forall v, w \in \mathbb{R}$

② Consistance : $F^n_{K\sigma}(v,v) = f(v)\, V^n_{K\sigma}$ $\forall K \in \mathcal{M}_h$ $\forall \sigma \in \mathcal{F}_K$ $\forall v \in \mathbb{R}$

"exact sur les constants"

③ Monotonie $F^n_{K\sigma}(v,w)$ est croissante par rapport à v

décroissante ——— à w

$\Rightarrow$ Schéma VF :

C.I. $u^0_K = \frac{1}{|K|}\int_K u^0(x)\,dx$ $K \in \mathcal{M}_h$

$$\left(|K| \frac{u^n_K - u^{n-1}_K}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int} \cap \mathcal{F}_K} F^n_{K\sigma}(u^*_K, u^*_L) + \sum_{\sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext} \cap \mathcal{F}_K} F^n_{K\sigma}(u^*_K, u^*_\sigma) = 0 \right.$$

$\forall K \in \mathcal{M}_h$

$\forall n = 1, \dots, m$

Rappel du cas $d=1$ pour l'équation

$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$ $\rightarrow$ flux exact $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(u^*) = f(u^*(x_{i+\frac{1}{2}}))$

flux numérique : $F(v,w)$, flux monotone deux points

- Consistant : $\underline{F(v,v) = f(v)}$ $\forall v \in \mathbb{R}$ (ou I°)
- monotone : $F(\overset{\nearrow}{v}, \underset{\searrow}{w})$
- Lipschitz par rapport à v et w avec des constantes de Lipschitz notés Lip_{F_1}, Lip_{F_2}

ex : si f est croissant $\rightarrow$ $F(v,w) = f(v)$

si f est décroissant $\rightarrow$ $F(v,w) = f(w)$

$$F(v,w) = \underbrace{\frac{f(v)+f(w)}{2}}_{\text{Centré}} + \underbrace{D(v-w)}_{\text{Diffusion}} \quad \text{avec } D \geq \frac{Lip_f}{2}$$

proposition : soit $F(v,w)$ un flux monotone deux points pour $f(v)$, alors

$$F_{K\sigma}^{n}(v,w) = \begin{cases} F(v,w)\,\underbrace{V_{K\sigma}^{n}}_{\geqslant 0} & \text{si } V_{K\sigma}^{n} \geqslant 0 \\ F(w,v)\,\underbrace{V_{K\sigma}^{n}}_{\leqslant 0} & \text{si } V_{K\sigma}^{n} \leqslant 0 \end{cases}$$

est un flux monotone deux points hyperbolique en dimension d. " $f(v,\vec{V})$ "

on note $a^{+} = \max(a,0)$, $a^{-} = \min(a,0)$, $a^{+} + a^{-} = a$

avec ces notations :

$$F_{K\sigma}^{n}(v,w) = F(v,w)\left(V_{K\sigma}^{n}\right)^{+} + F(w,v)\left(V_{K\sigma}^{n}\right)^{-}$$

Preuve : Conservativité :

$$F_{K\sigma}^n(v,w) + F_{L\sigma}^n(w,v) = F(v,w)\,V_{K\sigma}^+ + F(w,v)\,V_{K\sigma}^- + F(w,v)\,V_{L\sigma}^+ + F(v,w)\,V_{L\sigma}^-$$

on a $\boxed{V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0}$

$$(V_{K\sigma}^n)^+ = (-V_{L\sigma}^n)^+ = -(V_{L\sigma}^n)^-$$

$$(V_{K\sigma}^n)^- = (-V_{L\sigma}^n)^- = -(V_{L\sigma}^n)^+$$

$$= \left(\cancel{-F(v,w)} + \cancel{F(v,w)}\right)(V_{L\sigma}^n)^- + \left(\cancel{-F(w,v)} + \cancel{F(w,v)}\right)(V_{L\sigma}^n)^+ = 0$$

Consistance : $\underline{F_{K\sigma}^n(v,v)} = F(v,v)\,V_{K\sigma}^+ + F(v,v)\,V_{K\sigma}^-$

$$= f(v)\left(V_{K\sigma}^+ + V_{K\sigma}^-\right) = \underline{f(v)\,V_{K\sigma}^n}$$

Monotonie : par construction avec permutation de variable v et w en fonction du signe de $V_{K\sigma}^n$

Principe du maximum discret.

$$(1)\quad |K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=K|L} \underbrace{\boxed{F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_L^*)}} + \sum_{\sigma=K|.} \underbrace{F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_\sigma^*)} = 0$$

$$0 = \int_K (\operatorname{div} \vec{V})\,dx = \sum_{\sigma\in F_K} \int_\sigma \vec{V}\cdot\vec{n}_{K\sigma}\,d\sigma = 0 \Rightarrow \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma \vec{V}(x,t)\cdot\vec{n}_{K\sigma}\,d\sigma\,dt\right)}_{V_{K\sigma}^n} = 0$$

donc $\boxed{\sum_{\sigma\in F_K} V_{K\sigma}^n = 0} \Rightarrow \boxed{\sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{f(u_K^*)}_{F(u_K^*, u_K^*)} V_{K\sigma}^n = 0}$ (2)

(1) − (2)

$$\Rightarrow |K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma=K|L} \left(\underbrace{F(u_K^*, u_L^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + F(u_L^*, u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^-} - F(u_K^*, u_K^*)\,\overbrace{\left((V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^-\right)}^{V_{K\sigma}^n} \right)$$

$$+ \sum_{\sigma=K|.} \left(F(u_K^*, u_\sigma^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + F(u_\sigma^*, u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^- - F(u_K^*, u_K^*)\left((V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^-\right) \right) = 0$$

$$|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} \left[\underbrace{\frac{F(u_K^*, u_L^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_K^* - u_L^*}}_{a_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^+ (u_K^* - u_L^*) + \underbrace{\frac{F(u_L^*, u_K^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_L^* - u_K^*}}_{b_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^- (u_L^* - u_K^*) \right.$$

$$0 \leq a_{K\sigma} \leq Lip_{F_2}$$

$$0 \leq b_{K\sigma} \leq Lip_{F_1}$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.} \left[\underbrace{\frac{F(u_K^*, u_\sigma^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_K^* - u_\sigma^*}}_{a_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^+ (u_K^* - u_\sigma^*) + \underbrace{\frac{F(u_\sigma^*, u_K^*) - F(u_K^*, u_K^*)}{u_\sigma^* - u_K^*}}_{b_{K\sigma}} (V_{K\sigma}^n)^- (u_\sigma^* - u_K^*) \right.$$

$$|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} a_{K\sigma} (u_K^* - u_L^*) V_{K\sigma}^+ + b_{K\sigma} (u_L^* - u_K^*) V_{K\sigma}^- + \sum_{\sigma = K|.} a_{K\sigma} (u_K^* - u_\sigma^*) V_{K\sigma}^+ + b_{K\sigma} (u_\sigma^* - u_K^*) V_{K\sigma}^- = 0$$

__Cas implicite :__

$$\left(\frac{|K|}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{a_{K\sigma}}_{\geqslant 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geqslant 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}_{\geqslant 0}\right) u_K^n = \frac{|K|}{\Delta t^n}\, u_K^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma = K|L}\left(\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geqslant 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geqslant 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}_{\geqslant 0}\right) u_L^n$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.}\left(\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geqslant 0}\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+}_{\geqslant 0} + \underbrace{b_{K\sigma}}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}_{\geqslant 0}\right) \underline{\underline{u_\sigma^n}}$$

$\Rightarrow$ Combinaison convexe

$\Rightarrow$ principe du maximum.

__Cas explicite :__

$$\frac{|K|}{\Delta t^n}\, u_K^n = \left(\frac{|K|}{\Delta t^n} - \sum_{\sigma\in F_K}\underbrace{\left(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right)}_{\geqslant 0}\right) u_K^{n-1} + \sum_{\sigma=K|L}\overbrace{\left(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right)}^{\geqslant 0} u_L^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.}\underbrace{\left(a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right)}_{\geqslant 0} u_\sigma^{n-1}$$

Condition de positivité $\Rightarrow$ Condition CFL :

$$\Delta t^n \leqslant \min_{K\in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma\in F_K} a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)} \;\not\Leftarrow\; \boxed{\Delta t^n \leqslant \min_{K\in M_h}\frac{|K|}{\sum_{\sigma\in F_K} \mathrm{Lip}_{F_2}(V_{K\sigma}^n)^+ + \mathrm{Lip}_{F_1}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)}}$$

exercice :

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \partial_t u(x,t) + \mathrm{Div}\left(f(u(x,t))\,\vec{V}(x)\right)dx\,dt = \frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \left(h^+(x)\, f(c(x)) + h^-(x)\, f(u(x,t))\right) dx\,dt$$

$$\int_K \frac{u(x,t^n)-u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K}\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_\sigma f(u(x,t))\,\vec{V}(x)\cdot\vec{n}_{K\sigma}\,d\sigma\,dt}_{\overline{F}_{K\sigma}(u)}\right) = \text{———}$$

Discrétisation avec Euler explicite + VF :

$$|K|\,\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} F_{K\sigma}(u_h^{n-1}) = \text{“}\int_K h^+(x)\, f(c(x)) + h^-(x)\, f(u_h^{n-1})\text{”}\,dx$$

à discrétiser

Quel flux ?

avec $F_{K\sigma}(u_h)$ flux deux point décentré amont : $F_{K\sigma}(v,w) = F(v,w)\,V_{K\sigma}^+ + F(w,v)\,V_{K\sigma}^-$

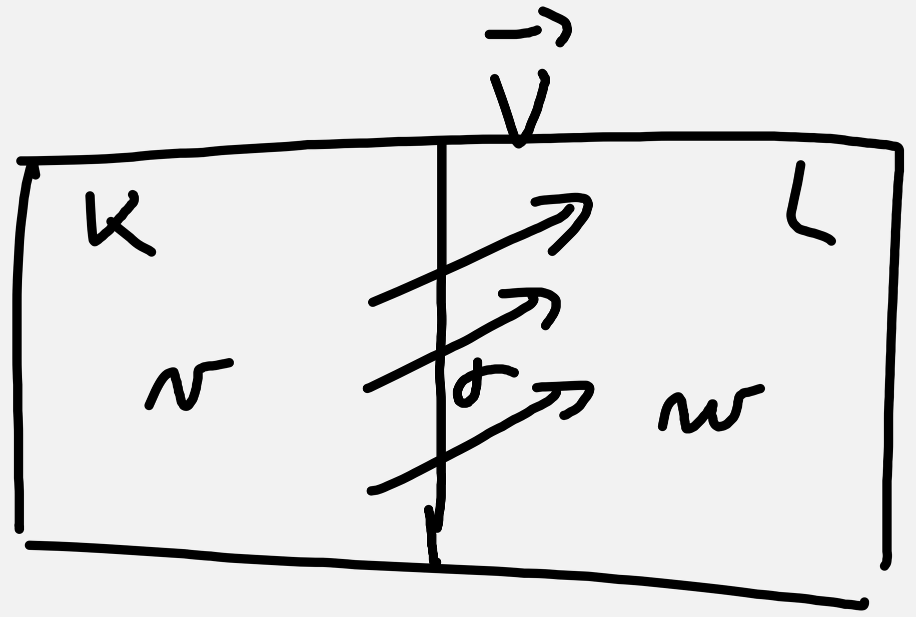
$F(v\nearrow, w\searrow) = f(v)$

$F(v,v) = f(v)$

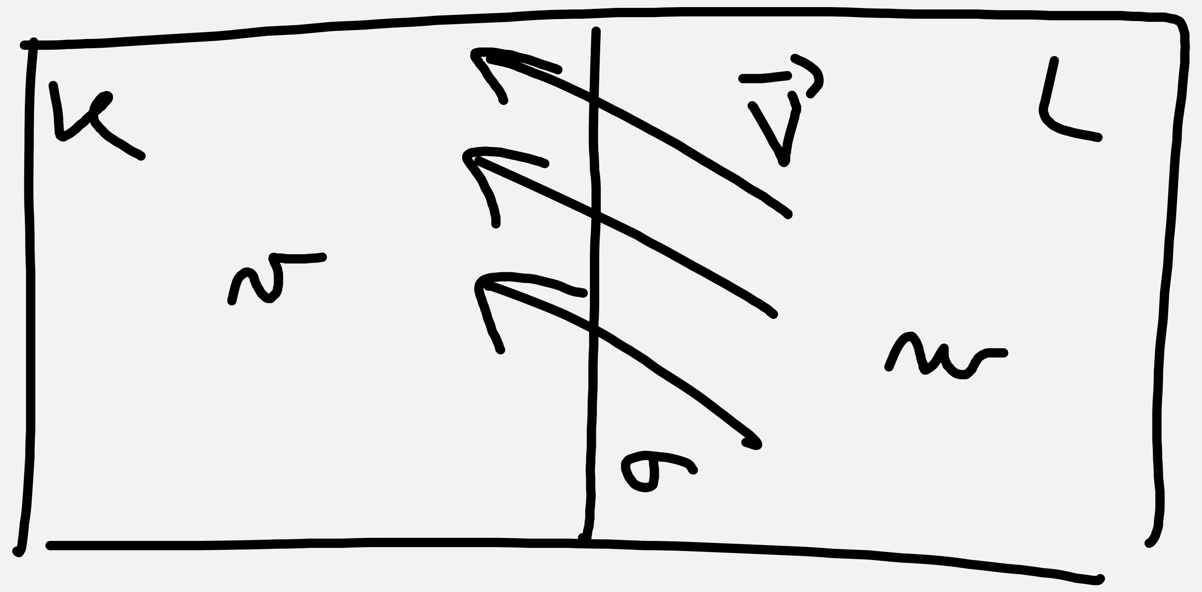
est un flux consistant monotone pour f croissante.

$$F_{K\sigma}(v,w) = f(v)\, V_{K\sigma}^{+} + f(w)\, V_{K\sigma}^{-} = \begin{cases} f(v)\, V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} \geq 0 \\ f(w)\, V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} \leq 0 \end{cases}$$

Cas $f \nearrow$



$F_{K\sigma}(v,w) = f(v)\, V_{K\sigma}$



$F_{K\sigma}(v,w) = f(w)\, V_{K\sigma}$ Cas f croissante

$F_{K\sigma}(v,w) = f(w)\, V_{K\sigma}$

$F_{K\sigma}(v,w) = f(v)\, V_{K\sigma}$ Cas f décroissante

Discrétisation du terme source :

$$\int_K \left(h^+(x) f(c(x)) + h^-(x) f(u_K^{n-1}) \right) dx \simeq \int_K h^+(x) f(c_K)\, dx + \int_K h^-(x) f(u_K^{n-1})\, dx$$

$$= f(c_K) \underbrace{\int_K h^+(x)\, dx}_{h_K^+} + f(u_K^{n-1}) \underbrace{\int_K h^-(x)\, dx}_{h_K^-}$$

$$= \boxed{f(c_K)\, h_K^+ + f(u_K^{n-1})\, h_K^-}$$

<u>Schéma VF</u> :

$$(1) \begin{cases} |K| \dfrac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \displaystyle\sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in \mathcal{F}_h^{int} \cap \mathcal{F}_K}} \underbrace{f(u_K^{n-1}) V_{K\sigma}^+} + f(u_L^{n-1}) V_{K\sigma}^- + \displaystyle\sum_{\substack{\sigma = K| \\ \in \mathcal{F}_h^{ext} \cap \mathcal{F}_K}} \underbrace{f(u_K^{n-1}) V_{K\sigma}^+} + f(d_\sigma) V_{K\sigma}^- \\ \quad = f(c_K) h_K^+ + \underbrace{f(u_K^{n-1}) h_K^-} \qquad K \in \mathcal{M}_h,\ n = 1, \dots, m \\ u_K^0 \text{ donné } \forall K \in \mathcal{M}_h \end{cases}$$

Principe du maximum :

- on exploite la contrainte sur le champ $\vec{V}$ qui donne le principe du maximum dans le cas continu : $\mid \operatorname{div} \vec{V} = h$

$$\int_K \operatorname{div} \vec{V} = \int_K h(x)\,dx$$

$$\sum_{\sigma \in F_K} \underbrace{\int_\sigma \vec{V} \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma}_{V_{K\sigma}} = \int_K \left(h^+(x) + h^-(x)\right) dx = h_K^+ + h_K^-$$

② $\boxed{\sum_{\sigma \in F_K} V_{K\sigma} = h_K^+ + h_K^-} \times f(u_K^{n-1}) \Rightarrow \left[\sum_{\sigma \in F_K} V_{K\sigma}^+ f(u_K^{n-1}) + V_{K\sigma}^- f(u_K^{n-1}) = h_K^+ f(u_K^{n-1}) + h_K^- f(u_K^{n-1}) \right.$

on fait ① − ②

$$|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma = K|L} V_{K\sigma}^- \underbrace{\left(\frac{f(u_L^{n-1}) - f(u_K^{n-1})}{u_L^{n-1} - u_K^{n-1}} \right)}_{a_{K\sigma}} (u_L^{n-1} - \underline{u_K^{n-1}}) + \sum_{\sigma = K|.} V_{K\sigma}^- \underbrace{\left(\frac{f(d_\sigma) - f(u_K^{n-1})}{d_\sigma - u_K^{n-1}} \right)}_{a_{K\sigma}} (d_\sigma - \underline{u_K^{n-1}})$$

$$= h_K^+ \underbrace{\left(\frac{f(c_K) - f(u_K^{n-1})}{c_K - u_K^{n-1}} \right)}_{b_K} (c_K - \underline{u_K^{n-1}})$$

f croissante :

$$\begin{cases} 0 \leq a_{K\sigma} \leq \underline{Lip_f} \\ 0 \leq b_K \leq \underline{Lip_f} \end{cases}$$

$$|K| \frac{u_K^n}{\Delta t^n} = \left(\frac{|K|}{\Delta t^n} - \sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma} (-V_{K\sigma}^-) - h_K^+ b_K \right) u_K^{n-1} + \sum_{\sigma = K|L} \overbrace{a_{K\sigma} (-V_{K\sigma}^-)}^{\geq 0} u_L^{n-1}$$

$$+ \sum_{\sigma = K|.} \underbrace{a_{K\sigma} (-V_{K\sigma}^-)}_{\geq 0} d_\sigma$$

$$+ \underbrace{h_K^+ b_K}_{\geq 0} c_K$$

positif ssi

$$\Delta t^n \leq \min_{K \in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma} (-V_{K\sigma}^-) - h_K^+ b_K} \Longleftarrow \boxed{\Delta t^n \leq \frac{1}{Lip_f} \min_{K \in M_h} \frac{|K|}{\left(\sum_{\sigma \in F_K} -V_{K\sigma}^- + h_K^+ \right)}}$$

$$F_-^{ext} = \{ \sigma \in F_h^{ext} \text{ t.q. } V_{K\sigma} < 0 \}$$
$$\sigma = K|.$$

$$M_h^+ = \{ K \in M_h \text{ t.q. } f_K^+ > 0 \}$$

le principe du maximum (sous la condition CFL précédente) s'écrit

$$\left| \min\left(\min_{L \in M_h} u_L^0, \min_{\sigma \in F_-^{ext}} d_\sigma, \min_{K \in M_h^+} c_K\right) \leq u_K^n \leq \max\left(\max_{L \in M_h} u_L^0, \max_{\sigma \in F_-^{ext}} d_\sigma, \max_{K \in M_h^+} c_K\right)\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\partial_t h_i + \mathrm{Div}\left(c_i^s k_i \nabla \psi\right) = 0 \qquad i = 1, 2 \\ c_1^s + c_2^s = 1 \end{array}\right. \qquad c^s = c_1^s \ , \quad c_2^s = 1 - c^s$$

$$h_i = \int_0^{h(x,t)} c_i(x,z,t)\,dz$$

$$\partial_t h_i = \int_0^{h(x,t)} \underbrace{\partial_t c_i(x,z,t)}_{0}\,dz + c_i(x, h(x,t), t)\,\partial_t h(x,t)$$

$$\left|\ \partial_t h_i = c_i(x, h(x,z), t)\,\partial_t h\right.$$

$$\partial_t h_1 + \partial h_2 = \partial_t h$$

$$\boxed{\partial_t h + \mathrm{Div}\left(\left(\boxed{c^s k_1 + (1 - c^s) k_2}\right) \nabla \underline{\underline{\psi}}\right) = 0}$$

$\hookrightarrow$ équation parabolique à $\underline{c^s \text{ donné}}$

$> \min(k_1, k_2) > 0$

$$\left|\begin{array}{l}\psi(b) \\ b = H^m - h\end{array}\right.$$

$$C_1(x, h(x,t), t)\, \partial_t h + \mathrm{Div}(C^s k_1 \nabla \Psi) = 0$$

$$\vec{V} = (C^s k_1 + (1-C^s) k_2) \nabla \Psi$$ vitesse du mélange

$$\underbrace{C_1(x, h(x,t), t)\, \partial_t h}_{\text{terme source}} + \mathrm{Div}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{C^s k_1}{C^s k_1 + (1-C^s) k_2}}}_{f(C^s)} \vec{V} \Big) = 0$$

flux associé à $f(C^s)\vec{V}$

$$F_{K\sigma}(v,w) = \begin{cases} f(v) V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} > 0 \\ f(w) V_{K\sigma} & \text{si } V_{K\sigma} \leq 0 \end{cases}$$

Rq : f croissante sur $(0,1)$

↪ décentrer C^s par rapport à $V_{K\sigma}$