Schémas VF pour les équations elliptique en dimension $d = 1, 2, 3$

problème modèle :
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ω polytope borné :
- segment si $d = 1$
- polygone si $d = 2$
- polyèdre si $d = 3$

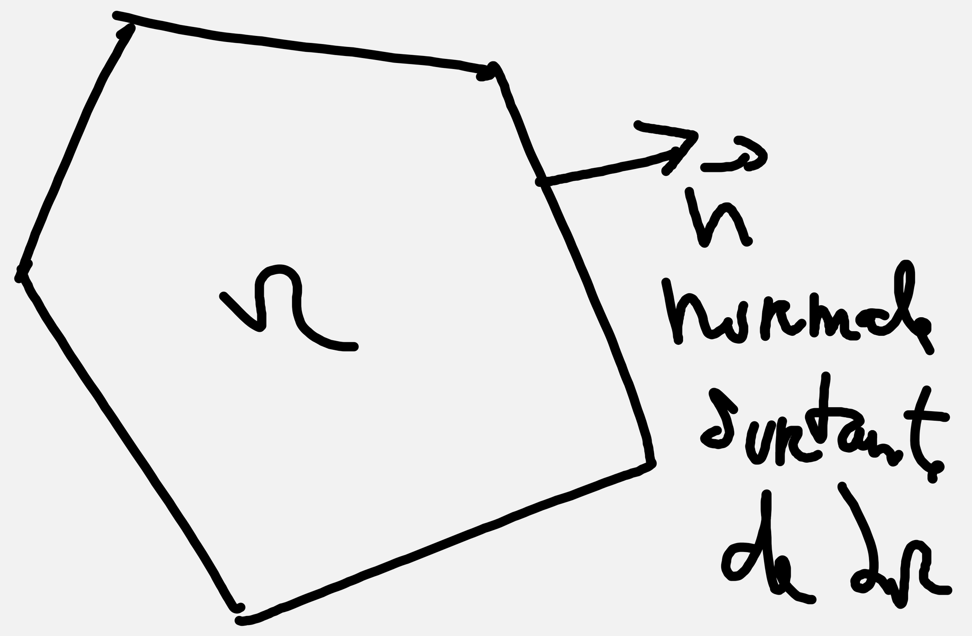
Espace des solutions : $H^1_0(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega |\nabla u|^2(x)\, dx < +\infty \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$

Formulation variationnelle : fonction test $v \in H^1_0(\Omega)$

$$(-\Delta u)\, v = + \mathrm{Div}(-\nabla u\, v) + \nabla u \cdot \nabla v$$

formule de Stokes : $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\vec{F}(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(x) \cdot \vec{n}\, d\sigma(x)$$



$$\int_\Omega -\Delta u\, v\, dx = \int_\Omega \left(\operatorname{div}(-\nabla u\, v) + \nabla u \cdot \nabla v\right) dx = \int_{\partial\Omega} (-\nabla u \cdot \vec{n}) \underbrace{v}_{0} \, d\sigma(x) + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

car $v \in H^1_0(\Omega)$

$$= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

On obtient donc la formulation variationnelle :

(V) $\left| \; u \in H^1_0(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \right.$

<u>Proposition</u> : par Lax-Milgram, il existe une solution unique $u \in H^1_0(\Omega)$ de (V)

<u>Inégalité de Poincaré</u> : $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \operatorname{diam}(\Omega) \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \operatorname{diam}(\Omega) = \max_{x,y \in \Omega} |y-x|$

avec $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx} = \sqrt{\langle \nabla v, \nabla v \rangle_{H^1_0}}$

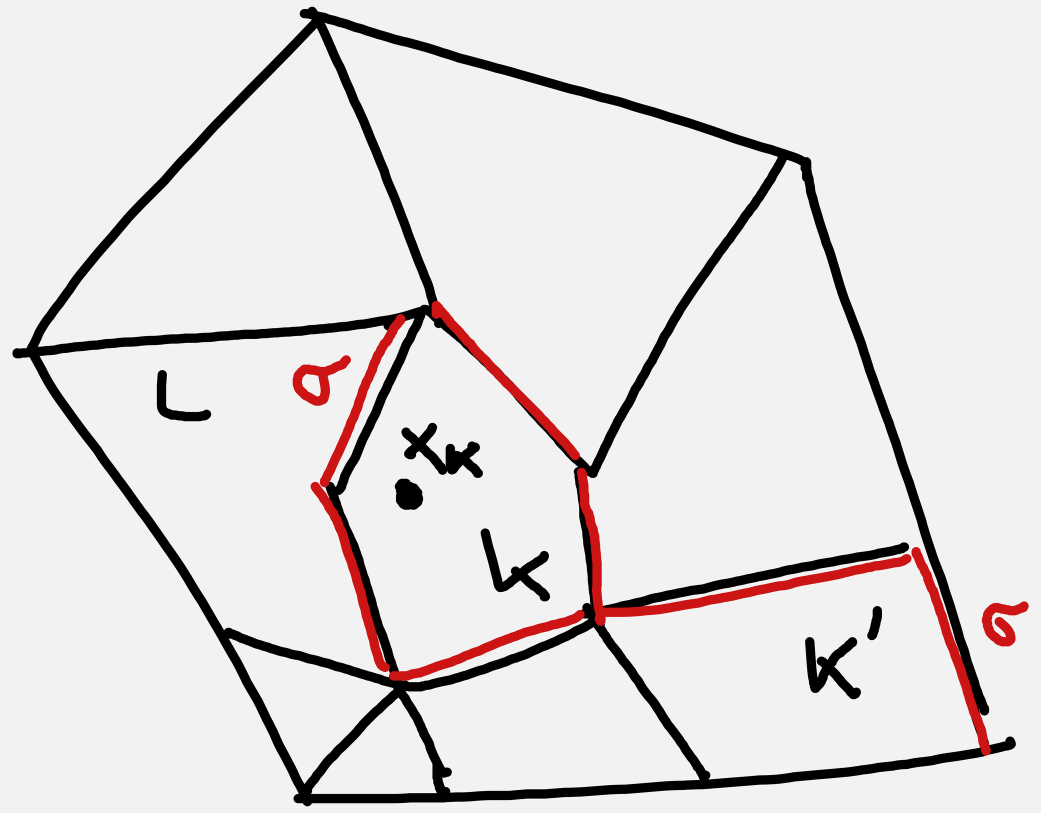
$\langle u, v \rangle_{H^1_0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

Estimation a priori : $v = u \Rightarrow \|u\|^2_{H^1_0} = \int_\Omega f u \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$

$$\leq \mathrm{diam}(\Omega) \|u\|_{H^1_0} \|f\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^1_0} \leq \mathrm{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2}$$

Discrétisation du domaine Ω :



- on partitionne le domaine en mailles $K \in \mathcal{M}_h$
- on note $x_K \in K$ "le centre de maille"
- on définit l'ensemble des faces $\sigma \in \mathcal{F}_h$ des mailles qui sont les intersection $\partial K \cap \partial L$ des mailles voisines contraintes à être planes.

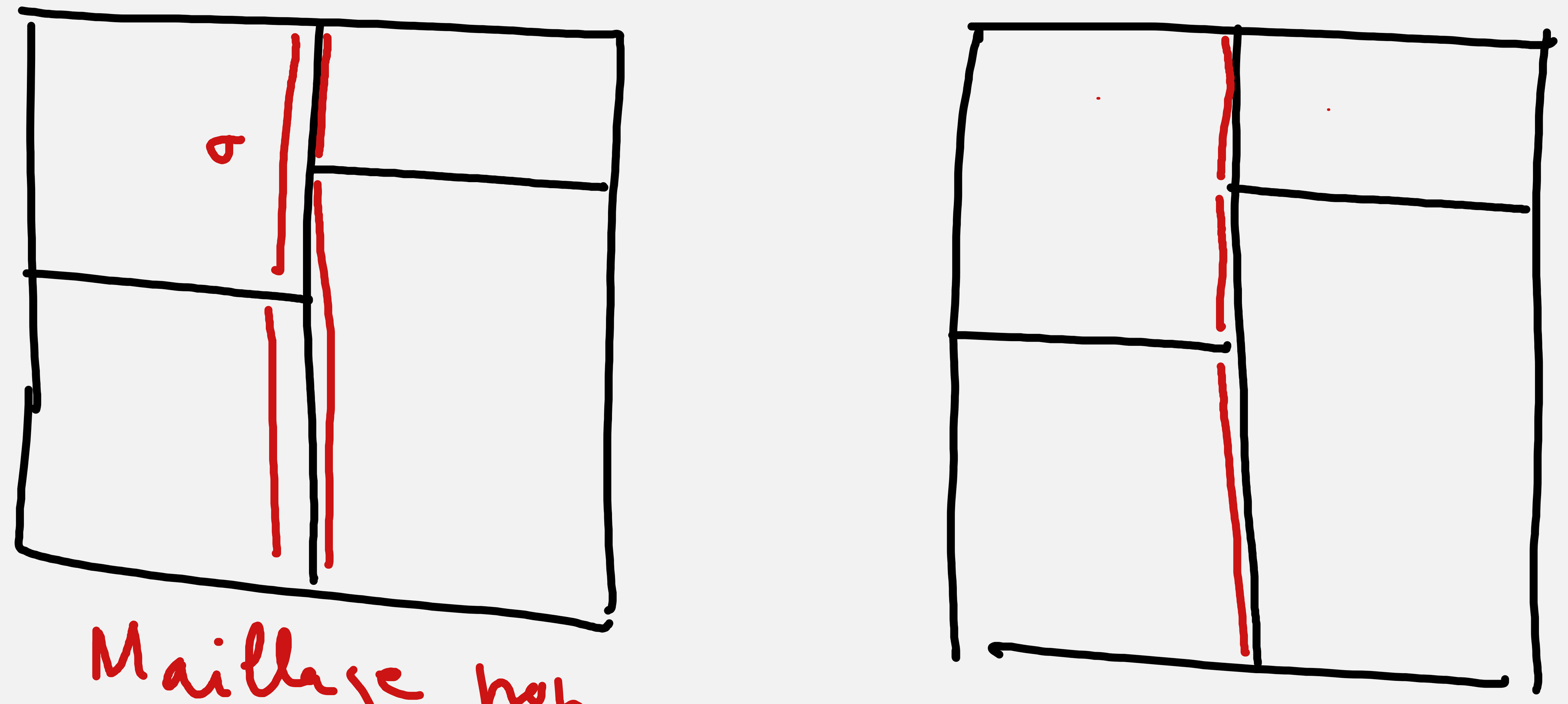
- on note $\mathcal{M}_\sigma = \{ K \in \mathcal{M}_h$ tq. $\sigma \cap \partial K$ est de mesure surfacique (d-1 dimension) non nulle $\}$

- on suppose que soit $\mathcal{M}_\sigma = \{K, L\}$ $\longrightarrow$ σ est une face intérieure

  soit $\mathcal{M}_\sigma = \{K\}$ $\longrightarrow$ σ est une face de bord

Contre exemple :

mauvaise définition des faces.



Maillage non conforme interdit

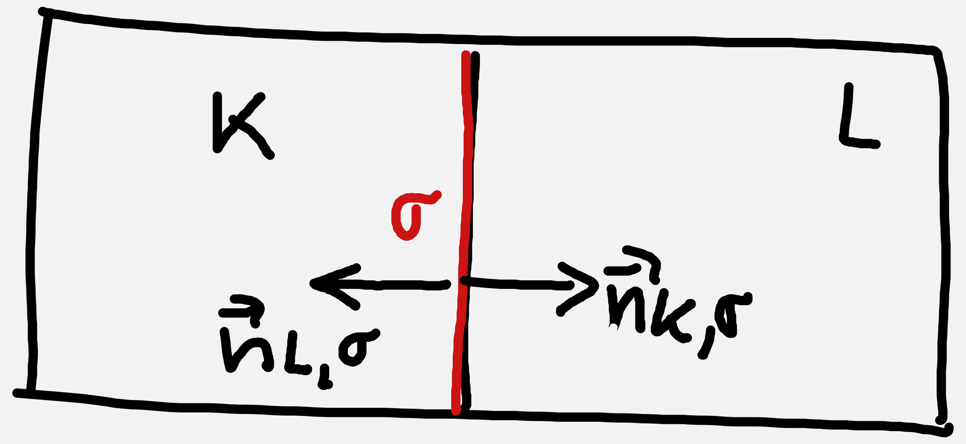
$$F_h^{int} = \{ \sigma \in F_h \text{ tq. } \mathcal{M}_\sigma = \{K, L\} \}$$

$$F_h^{ext} = \{ \sigma \in F_h \text{ tq } \mathcal{M}_\sigma = \{K\} \}$$

on notera $\sigma = K|L$ pour $\sigma \in F_h^{int}$

on notera $\sigma = K|$. pour $\sigma \in F_h^{ext}$

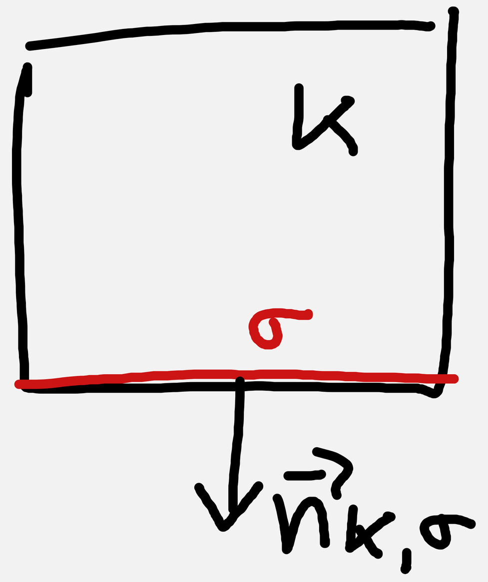
- normales aux faces :



$\sigma \in \mathcal{F}_h^{int}$

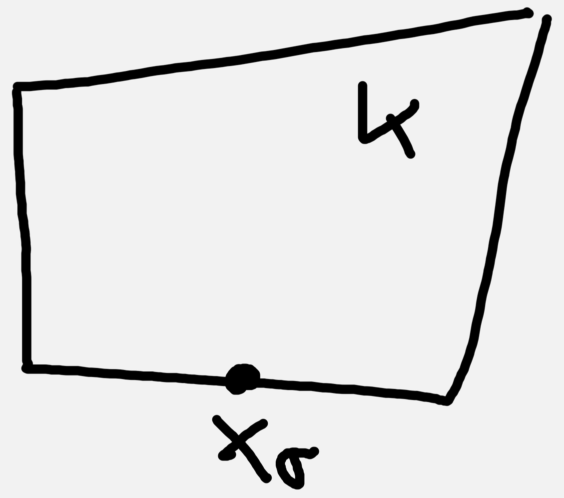
$\vec{n}_{K,\sigma} + \vec{n}_{L,\sigma} = 0$

$\vec{n}_{K,\sigma}$: sortante de K ; $\vec{n}_{L,\sigma}$: sortante de L



$\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$

normale sortante de K

- 

x_σ, $\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$ est "le centre de face"

- on note $|K|$ le volume de la maille
- on note $|\sigma|$ la <u>surface</u> de la face | "surface = mesure en dimension d-1"
- $h = \max\limits_{K \in \mathcal{M}_h} \big(\mathrm{diam}(K)\big)$

• Discrétisation des fonctions : $V_h = \{ v_h \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } v_h(x) = v_K \ \forall x \in K \ \forall K \in \mathcal{M}_h \}$

↳ discrétisation non conforme car $V_h \not\subset H^1_0(\Omega)$

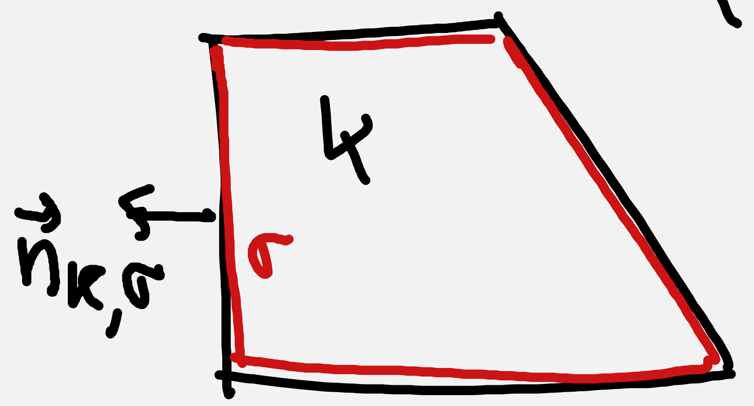
• Discrétisation de l'équation :

→ on écrit l'équation sous forme conservative : $\mathrm{Div}(-\nabla u) = f$

$-\nabla u$ est le vecteur flux

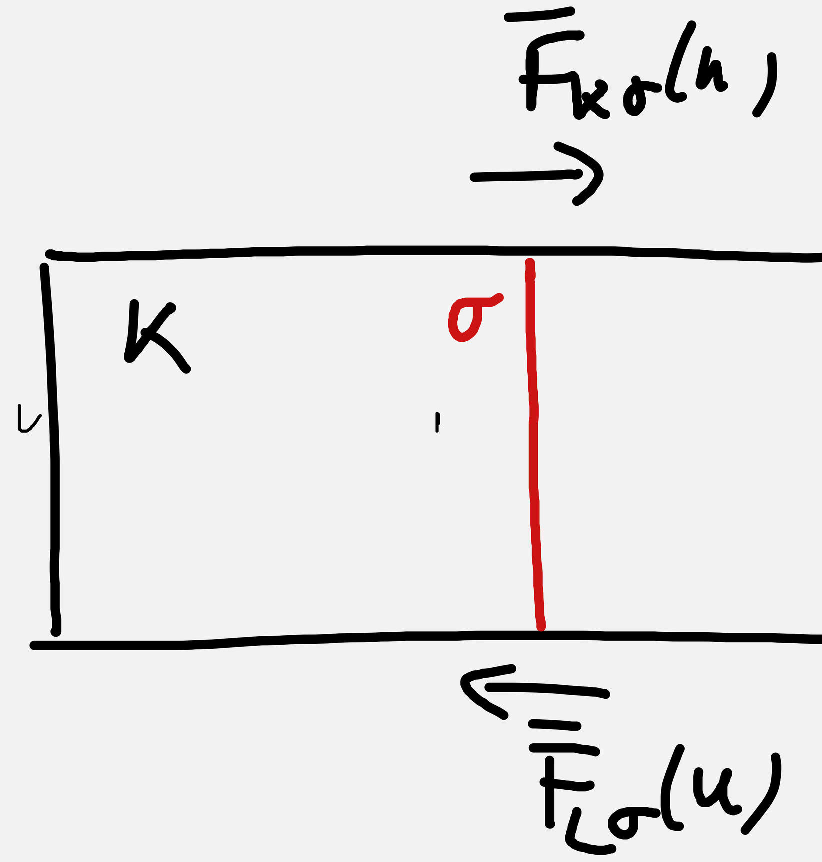
→ on intègre l'équation dans la maille et on applique la formule de Stokes

$$\int_K f\,dx = \int_K \mathrm{div}(-\nabla u)\,dx = \int_{\partial K} -\nabla u \cdot \vec{n}_K(x)\,d\sigma(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \underbrace{\int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K,\sigma}\,d\sigma(x)}_{\text{flux noté } F_{K\sigma}(u) \text{ sur la face } \sigma \text{ sortant de } K}$$



où $\mathcal{F}_K$ est l'ensemble des face de K

$\underline{\sigma \in \mathcal{F}_h^{int}}$



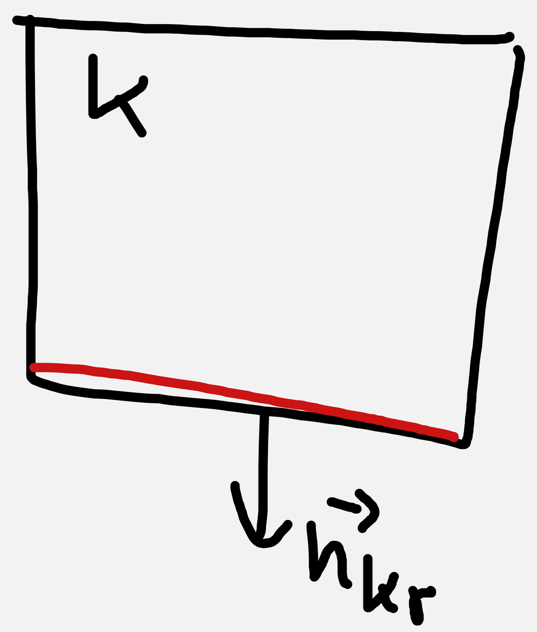
$$\overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x)$$

$$\overline{F}_{L\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{L\sigma} \, d\sigma(x)$$

on la conservativité du flux $\boxed{\overline{F}_{K\sigma}(u) + \overline{F}_{L\sigma}(u) = 0}$

$$\int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x) + \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{L\sigma} \, d\sigma(x) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \overbrace{(\vec{n}_{K\sigma} + \vec{n}_{L\sigma})}^{0} \, d\sigma = 0$$

$\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$

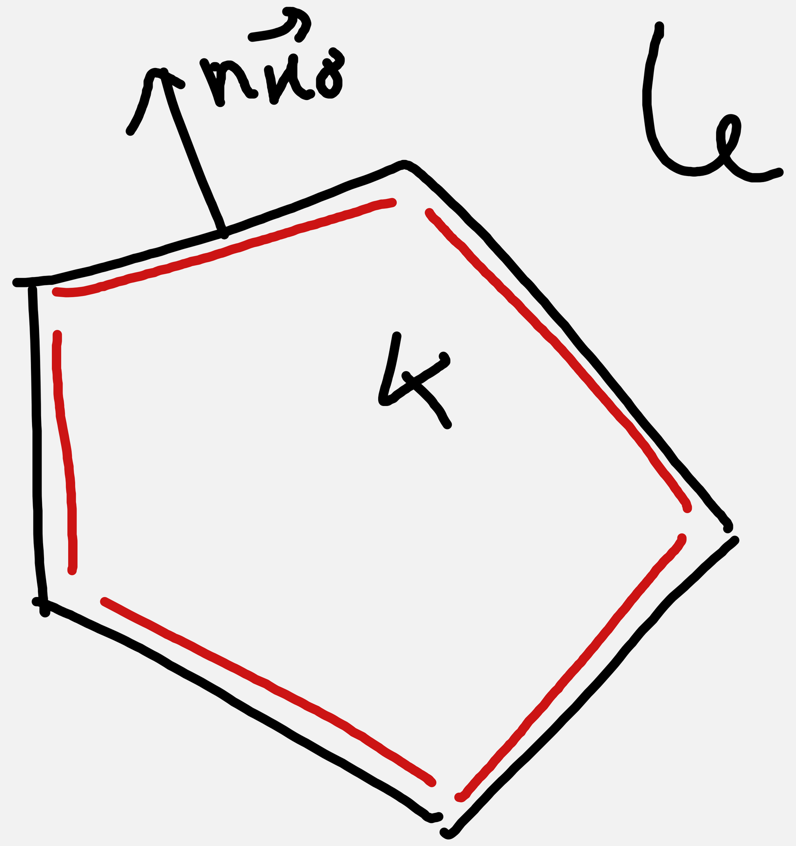


$$\overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x)$$

Equation de conservation dans la maille :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_K f\,dx \qquad \text{avec} \qquad \underline{\overline{F}_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma(x)}$$

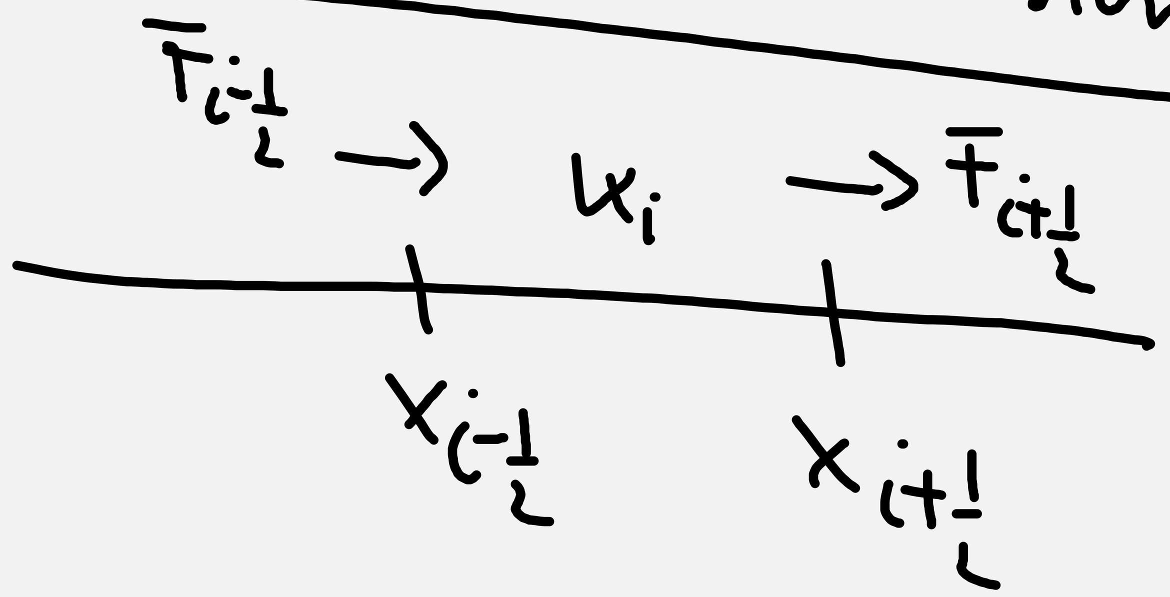
On est donc ramené à construire des flux numériques notés $\underline{F_{K\sigma}(u_h)}$



Le schéma VF s'écrit

$$\boxed{\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}(u_h) = \int_K f(x)\,dx \qquad \underline{\forall K \in \mathcal{M}_h}}$$

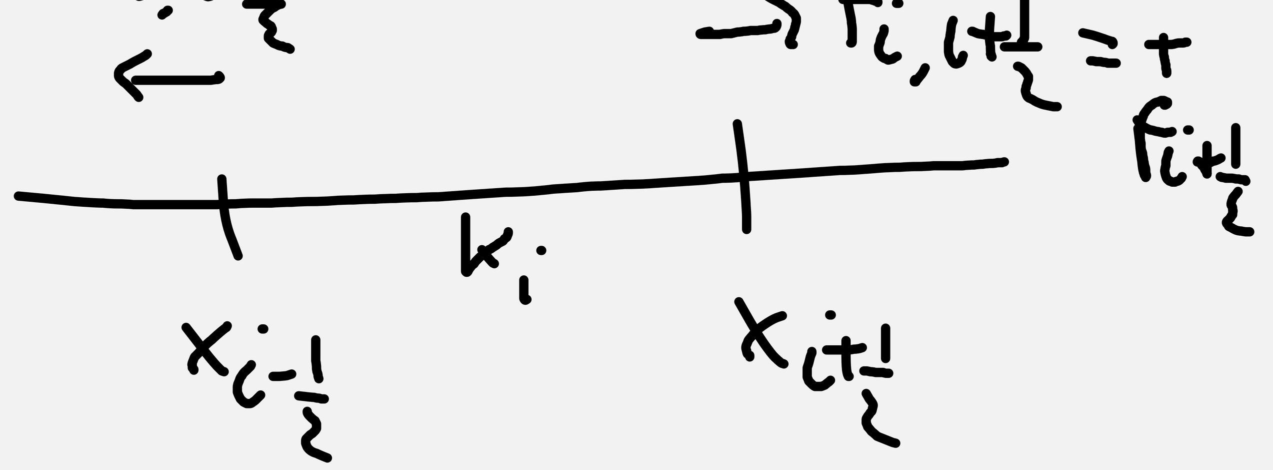
<u>lien avec la dimension 1</u> :



$$F_{i+\frac12}(u_h) - F_{i-\frac12}(u_h) = \int_{K_i} f(x)\,dx$$

$$\overbrace{F_{i,i+\frac12}}^{F_{i+\frac12}} + \overbrace{F_{i,i-\frac12}}^{-F_{i-\frac12}} = \int_{K_i} f\,dx$$

$$-F_{i-\frac12} = F_{i,i-\frac12}$$



propriétés des <u>flux numériques</u> $F_{K\sigma}(u_h)$

① flux linéaires par rapport à u_h + <u>u_σ</u> aux bords

② Conservativité des flux $F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}_h^{int}$
$\forall u_h \in V_h$

③ Consistance des flux

<u>erreur de consistance</u>: $R_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma(x) - F_{K\sigma}(I_h u)$

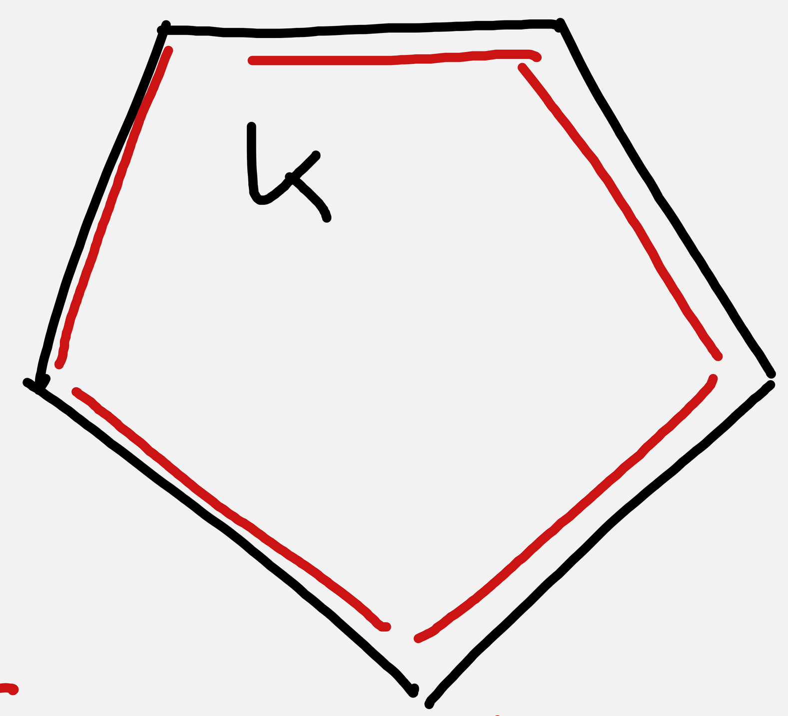
<u>interpolant</u> $I_h : C^0(\bar{\Omega}) \to V_h$

$u \mapsto (I_h u)_K = u(x_K) \quad \forall K \in \mathcal{M}_h.$

on dit le flux est consistant si $|R_{K\sigma}(u)| \leq C(u)\,|\sigma|\,h \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega})$

④ Coercivité des flux :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in M_h} \left(\sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h) \right) v_K$$



F_K = ensemble des faces de K.

Le schéma est dit coercif si $\exists \; \| \; \|_{1,h}$ norme H^1_0 discrète et une constante α indépendante h pour une famille de maillages t.q

$$a_h(u_h, u_h) \geqslant \alpha \|u_h\|_{1,h}^2 \quad \forall u_h \in V_h.$$

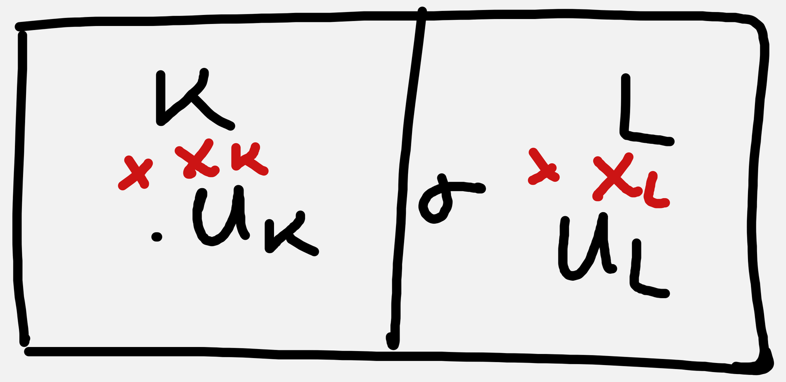
Proposition : si le flux satisfait les condition (1) à (4) alors le schéma admet une solution unique u_h qui vérifie l'estimation a priori $\|u_h\|_{1,h} \leqslant \frac{1}{\alpha} \tilde{C}_p \|f\|_{L^2}$

De plus si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ alors on a l'estimation d'erreur :

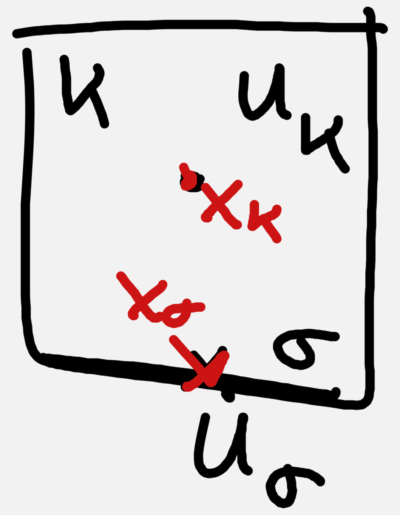
$$\|I_h u - u_h\|_{1,h} \leqslant \frac{1}{\alpha} C(u) h$$

Schéma Volume Fini deux points "TPFA"

par "Two-point Flux Approximation".



$$F_{K\sigma}(u_h) = \begin{cases} |\sigma| \dfrac{u_K - u_L}{|x_K x_L|} & \forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_e^{int} \\[2em] |\sigma| \dfrac{u_K - u_\sigma}{|x_K x_\sigma|} & \forall \sigma = K|. \in \mathcal{F}_e^{ext} \end{cases}$$



① flux linéaire → ok

② Conservativité $F_{L\sigma}(u_h) = |\sigma| \dfrac{u_L - u_K}{|x_L x_K|} = -F_{K\sigma}(u_h)$ → OK

④ Coercivité $\quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}(u_h)\, v_K$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{F}_h^{int} \\ \sigma = K|L}} \Big(F_{K\sigma}(u_h)\, v_K + \underbrace{F_{L\sigma}(u_h)}_{-F_{K\sigma}(u_h)} v_L \Big) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext} \\ \sigma = K|.}} F_{K\sigma}(u_h)\, v_K$$

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in \mathcal{F}_h^{int}}} F_{K\sigma}(u_h)(v_K - v_L) + \sum_{\substack{\sigma = K|. \\ \in \mathcal{F}_h^{ext}}} F_{K\sigma}(u_h)(v_K - 0)$$

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in \mathcal{F}_h^{int}}} \frac{|\sigma|}{|x_K x_L|} (u_K - u_L)(v_K - v_L) + \sum_{\substack{\sigma = K|. \\ \in \mathcal{F}_h^{ext}}} \frac{|\sigma|}{|x_K x_\sigma|} (u_K - 0)(v_K - 0)$$

<u>on définit</u> $\quad \| u_h \|_{1,h} = \sqrt{a_h(u_h, u_h)} = \left(\sum_{\sigma = K|L} \frac{|\sigma|}{|x_K x_L|} (u_K - u_L)^2 + \sum_{\sigma = K|.} (u_K - 0)^2 \frac{|\sigma|}{|x_K x_\sigma|} \right)^{1/2}$

$\Rightarrow$ ok avec $\underline{\alpha = 1}$

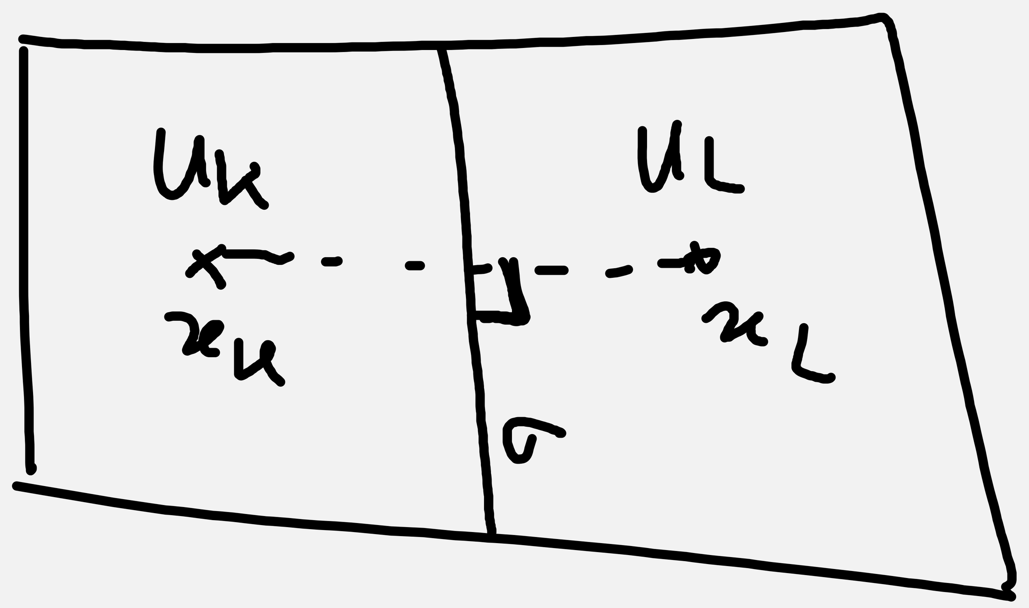
La norme $\|\cdot\|_{1,h}$ vérifie une inégalité de Poincaré pour les "bons maillages" :

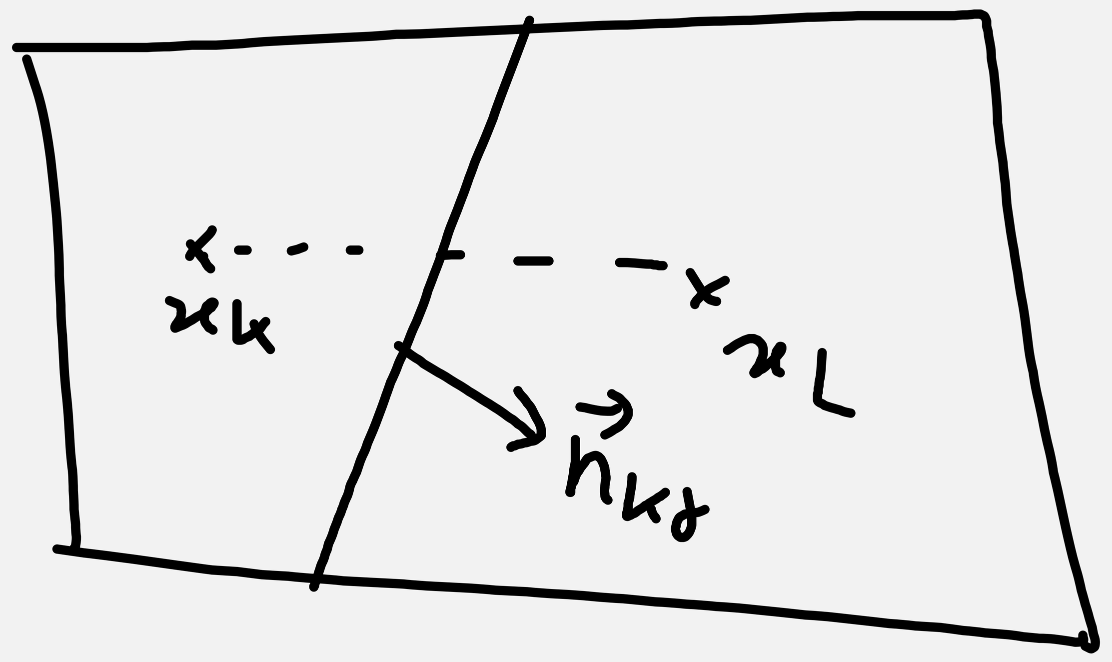
$$\|u_h\|_h^2 \leq \tilde{C}_p \|u_h\|_{1,h} \quad \forall u_h \in V_h$$

(3)

$$R_{K\sigma}(u) = \int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma - \underbrace{F_{K\sigma}(I_h u)}_{\frac{|\sigma|}{|x_K x_L|}\left(u(x_K) - u(x_L)\right)}$$

$$-\nabla u(x) \cdot \vec{n}_{K\sigma} = -\frac{d}{ds} u(x + s\,\vec{n}_{K\sigma})$$





Consistant ssi

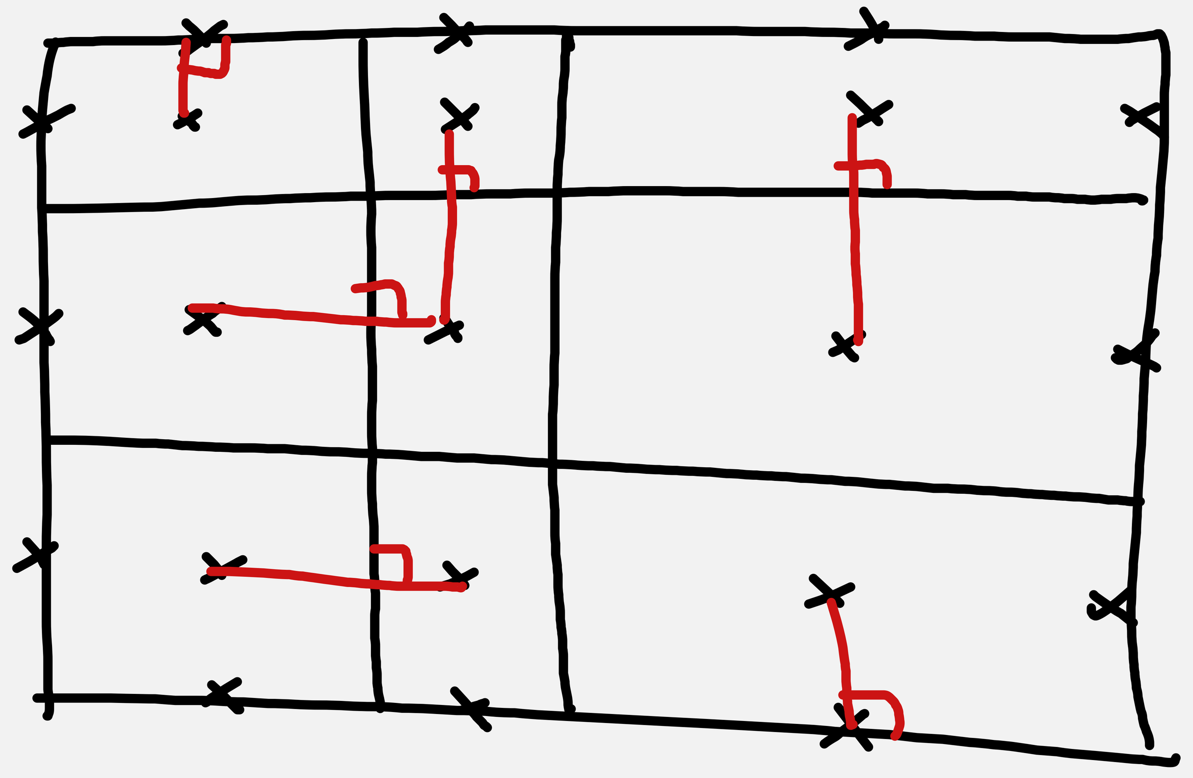
$$x_K x_L \parallel \vec{n}_{K\sigma}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma \perp x_K x_L$$

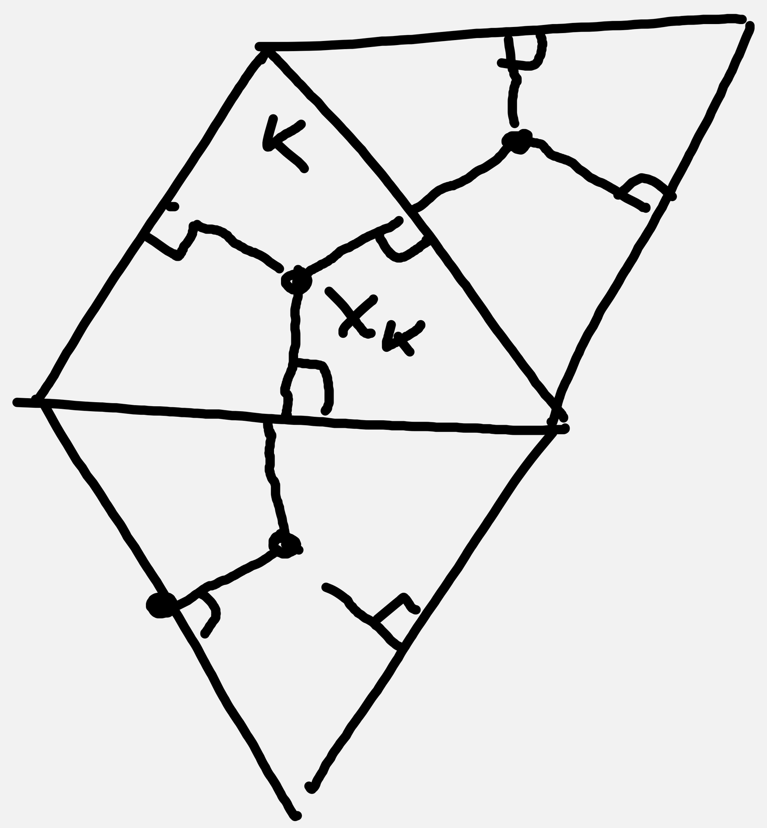
$$|x_K x_L| = \mathrm{dist}(x_K, x_L)$$

Exemples de maillages orthogonaux :

Cartésiens

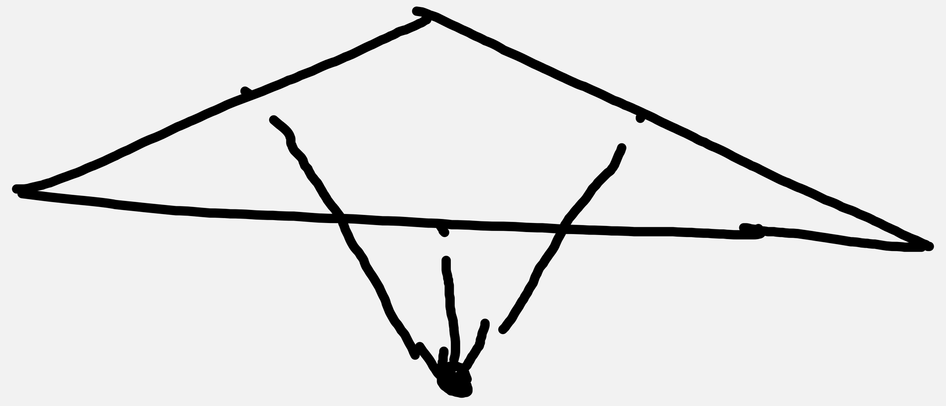


triangulaires

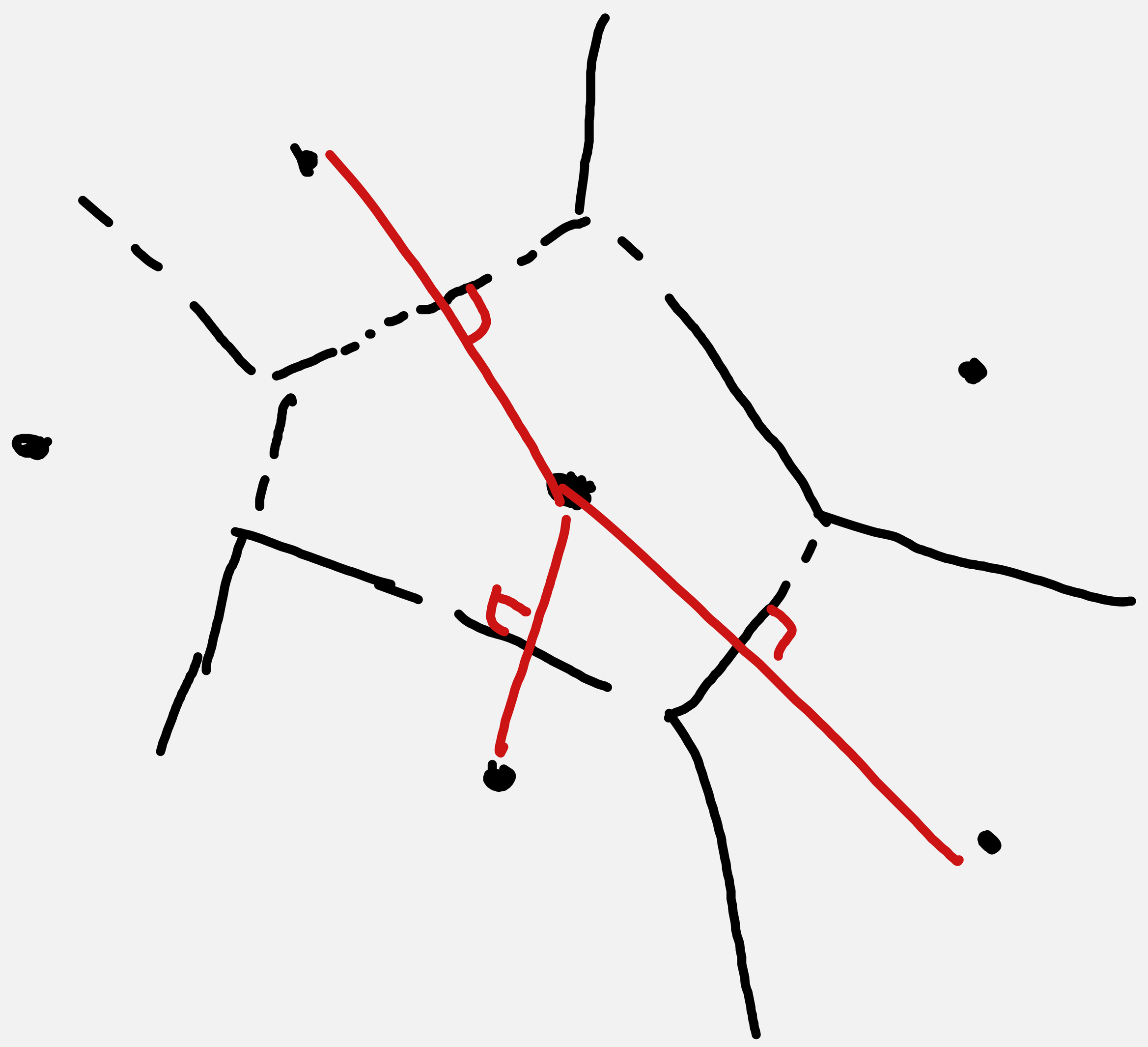


x_K : intersection des médiatrices.

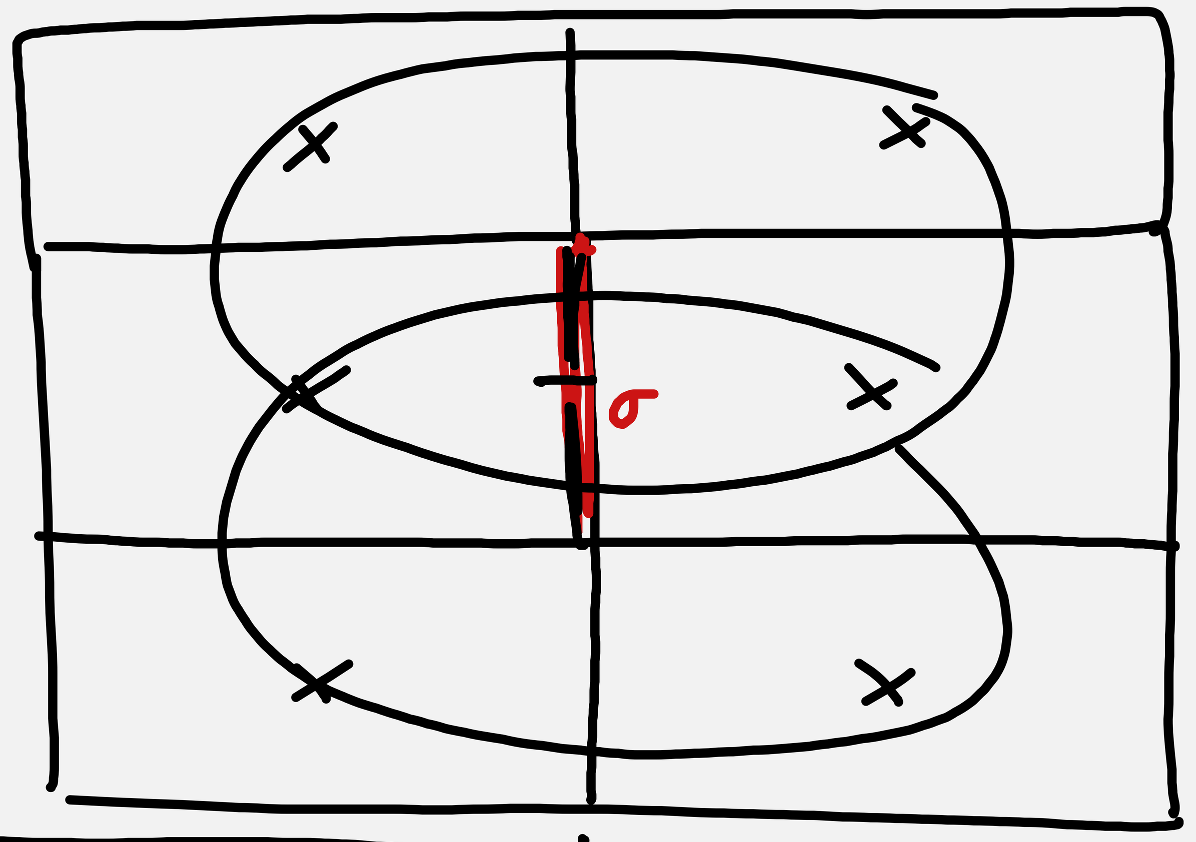
ok si angles aigus

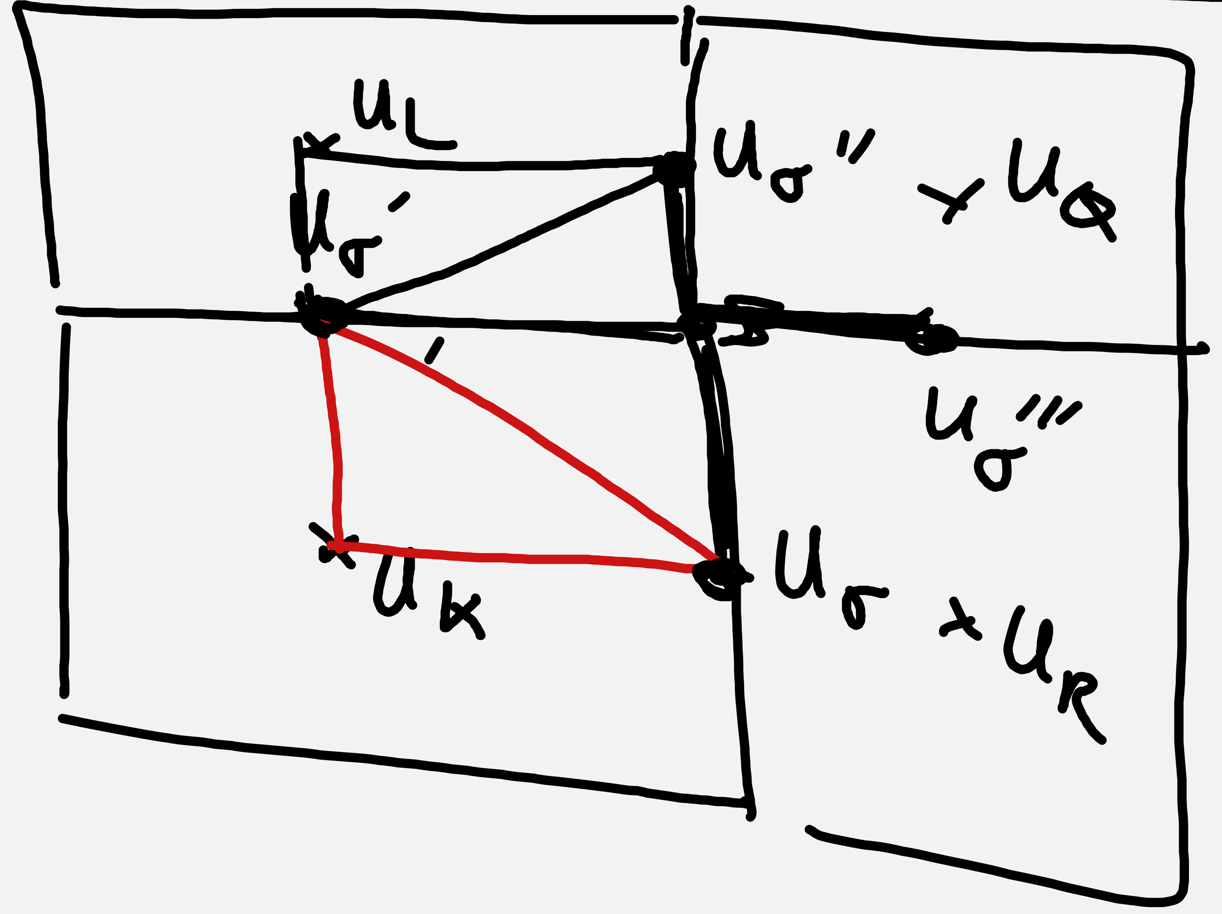


Voronoï



Schémas MPFA "Multi-point flux approximation"





Exercice : extension du schéma TPFA à l'équation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = \underline{u^0(x)} & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

Question 1 : écrire le schéma VF semi-discrétisé en espace (continu en temps) avec les flux TPFA

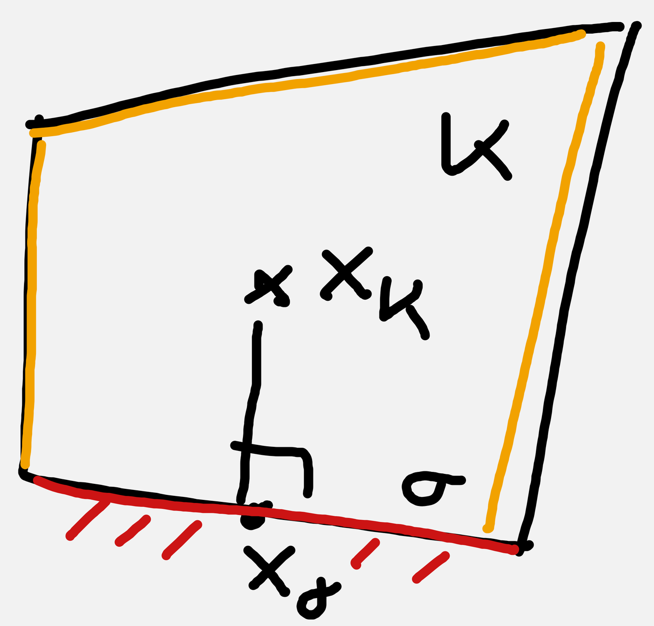
Question 2 : Écrire le schéma VF en espace et Euler implicite en temps

$$\int_K \partial_t u \, dx + \int_K \mathrm{Div}(-\nabla u)\, dx = \int_K f \, dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_K u(x)\, dx + \sum_{\sigma \in F_K} \underbrace{\int_\sigma -\nabla u \cdot \vec{n}_{K\sigma} \, d\sigma(x)}_{\text{flux sur } \sigma \text{ sortant de } K} = \int_K f(x,t)$$

discrétisation : $\left| \begin{array}{l} u_h(t) \in V_h \\ u_h(x,t) = \underline{u_K(t)} \text{ pour } x \in K \end{array} \right.$

$$\left| \begin{array}{l} |K| \dfrac{d}{dt} u_K(t) + \displaystyle\sum_{\sigma \in F_K} \underline{F_{K\sigma}(u_h(t))} = \int_K f(x,t)\, dx \quad \forall K \in M_h \quad \forall t \in (0,T) \\ u_K(0) = \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\int_K u^0(x)\, dx \quad \forall K \in M_h \end{array} \right.$$



$$|K| \frac{d}{dt} u_K(t) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_h^{int} \\ \sigma = K|L}} |\sigma| \frac{u_K(t) - u_L(t)}{|x_K x_L|} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_h^{ext} \\ \sigma = K|\cdot}} \frac{|\sigma|}{|x_K x_\sigma|} (u_K(t) - 0) = \int_K f(x,t)\, dx$$

$$u_K(0) = \frac{1}{|K|} \int_K u^0(x)\, dx \qquad \forall K \in \mathcal{M}_h$$

Question : rajouter la discrétisation en temps d'Euler implicite

$u_K^n = u_K(t^n)$

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |K| \frac{d u_K(t)}{dt} + \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}(u_h(t)) - \int_K f(x,t)\, dx \Big)\, dt$$

schéma d'Euler implicit

$$\boxed{|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}(u_h^n) = \int_K f(x, t^n)}$$

$$\begin{cases} |K| \dfrac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \displaystyle\sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_h^{int}}} \frac{|\sigma|}{|x_K x_L|} \left(u_K^n - u_L^n \right) + \sum_{\substack{\sigma = K|\cdot \\ \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_h^{ext}}} \frac{|\sigma|}{|x_K x_\sigma|} \left(u_K^n - 0 \right) = \int_K f(x, t^n)\, dx \\ u_K^0 = \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\int_K u^0(x)\, dx \qquad \forall K \in \mathcal{M}_\ell \qquad \forall n = 1, \dots, m \end{cases}$$