

II Schémas VF pour les équations hyperboliques scalaires
en dimension 1

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u^0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $I^0 = \left[\min_{x \in \mathbb{R}} u^0(x), \max_{x \in \mathbb{R}} u^0(x) \right]$
- f est supposée Lipschitz sur I^0 : $\exists \text{Lip} f$

$$|f(v_2) - f(v_1)| \leq \text{Lip} f |v_2 - v_1| \quad \forall (v_2, v_1) \in I^0 \times I^0$$

nb: si $f \in C^1(I^0)$ il est équivalent de supposer que $\max_{u \in I^0} |f'(u)| = \text{Lip} f$

Prop: il existe une unique solution faible entropique dans $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$. De plus elle vérifie le principe du maximum $u(x, t) \in I^0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$.

Prop: La solution entropique est la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) des solutions $u_\varepsilon(x, t)$ de l'équation parabolique

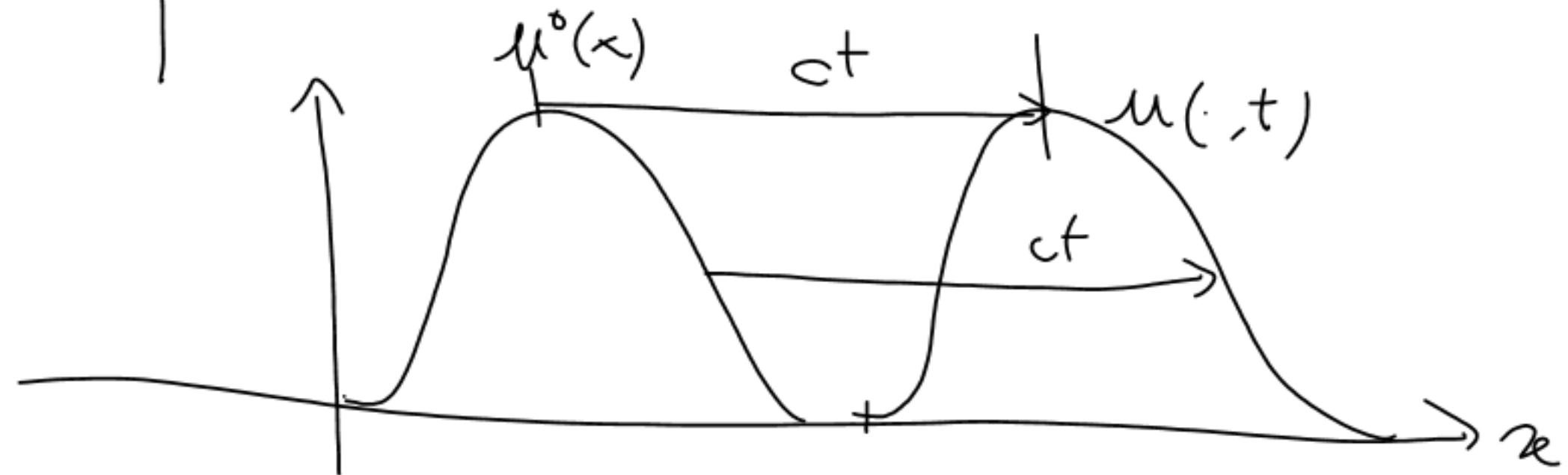
$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x, t) + \partial_x f(u_\varepsilon(x, t)) - \underbrace{\varepsilon \partial_x^2 u_\varepsilon(x, t)}_{\text{terme diffusif}} = 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) = u^0(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Example: $f(u) = cu$, $c \in \mathbb{R}$

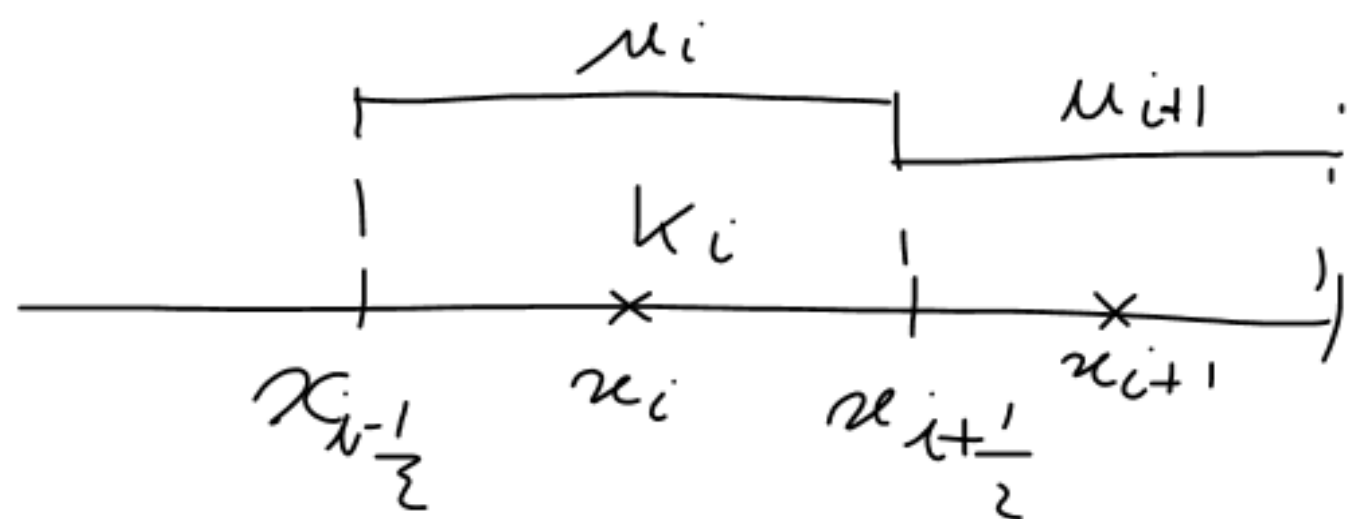
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c \partial_x u(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solution: $u(x,t) = u^0(x-ct)$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = -c (u^0)'(x-ct) \\ \partial_x u(x,t) = (u^0)'(x-ct) \\ u(x,0) = u^0(x) \end{cases} \Rightarrow \partial_t u(x,t) + c \partial_x u(x,t) = 0$$



1 Semi-diskrétisation VF en espace



$$\text{mailles } K_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \quad i \in \mathbb{Z}$$

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$$

$$h_i = |x_{i+1/2} - x_{i-1/2}|$$

$$h_{i+1/2} = |x_{i+1} - x_i|$$

Espace des solutions discrètes :

$$V_h = \left\{ v_h \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad v_h(x) = v_i \quad \forall x \in K_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left| \begin{array}{l} u_h(t) \in V_h \quad \forall t \in (0, T) \\ u_h(x, t) = u_i(t) \quad \forall x \in K_i, \quad \forall t \in (0, T) \end{array} \right.$$

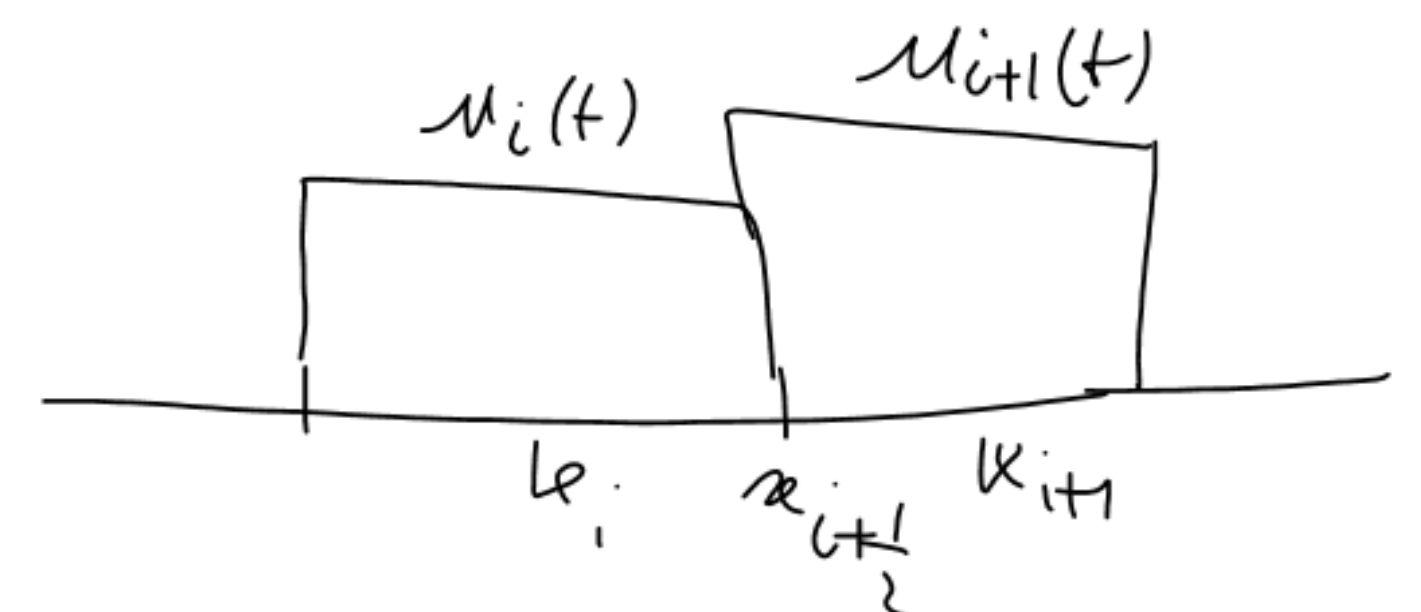
Lois de conservation discrètes dans la maille K_i :

$$\int_{K_i} \partial_t u(x,t) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x f(u(x,t)) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \int_{K_i} u(x,t) dx + \underbrace{\overline{f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t))}}_{\text{flux continu en } x_{i+\frac{1}{2}}} - \underbrace{f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))}_{\text{flux continu en } x_{i-\frac{1}{2}}} = 0$$

Discretisation

$$\left\{ \begin{aligned} h_i \frac{du_i(t)}{dt} + \underbrace{\overline{F_{i+\frac{1}{2}}(u_R(t))}}_{\text{flux numérique en } x_{i+\frac{1}{2}}} - \underbrace{\overline{F_{i-\frac{1}{2}}(u_R(t))}}_{\text{flux numérique en } x_{i-\frac{1}{2}}} &= 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ u_i(0) &= \frac{1}{\alpha_i} \int_{K_i} u^0(x) dx \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right.$$



Flux monotone deux point



flux en $x_{i+\frac{1}{2}}$ fonction de la valeur \bar{a} gauche u_i et \bar{a} droite u_{i+1}

$$F_{i+\frac{1}{2}}(v, w) = F(v, w)$$

↑
valeur \bar{a}
gauche

↓
valeur \bar{a}
droite

→ F ne dépend pas de i car f ne dépend que de u et pas de x .

$F(v, w)$ est un flux monotone deux point si il vérifie les 3 propriétés

(i) Consistance : $F(v, v) = f(v)$ (f flux exact sur les fonctions constantes)
 $\forall v \in \mathbb{R}$

(ii) $F(v, w)$ est croissante par rapport à v et décroissante par rapport à w
→ donnera la stabilité des solutions

(iii) $F(v, w)$ est Lipschitz sur $\mathbb{I}^\circ \times \mathbb{I}^\circ$

$$|F(v_1, w) - F(v_2, w)| \leq \underline{\text{Lip}_1 F} |v_1 - v_2| \quad \forall v_1, v_2, w \in \mathbb{I}^\circ$$

$$|F(v, w_1) - F(v, w_2)| \leq \underline{\text{Lip}_2 F} |w_1 - w_2| \quad \forall w_1, w_2, v \in \mathbb{I}^\circ$$

Discretisation en temps: schéma d'intégration, exemple de Euler explicite et implicite

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\rho_i \frac{d}{dt} u_i(t) + \overline{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_h(t)) - \overline{F}_{i-\frac{1}{2}}(u_h(t)) \right) dt = 0$$

$$\rho_i \frac{u_i(t^n) - u_i(t^{n-1})}{\Delta t^n} + \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t)) \right) dt = 0$$

notations

$$u_i(t^n) = u_i^n$$

$$u_i^* = \begin{cases} u_i^n & \text{si implicite} \\ u_i^{n-1} & \text{si explicite} \end{cases}$$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ \forall n=1, \dots, m$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u^0(x) dx \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$* = \begin{cases} n & \text{si implicite} \\ n-1 & \text{si explicite} \end{cases}$$

Exemple du cas linéaire $f(u) = cu \rightarrow$ flux centré $F(v, w) = c \frac{(v+w)}{2}$
non monotone

$$F(v, w) = \alpha v + \beta w + \gamma \quad \text{flux linéaire général}$$

• Consistance du flux : exact sur les constantes $v=w \in \mathbb{R}$

$$F(v, v) = (\alpha + \beta)v + \gamma = f(v) = cv \quad \forall v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = c \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(v, w) = \alpha v + (c - \alpha)w = \overbrace{c \frac{(v+w)}{2}}^{D} - \overbrace{c \frac{(v+w)}{2}}^{D} + \alpha v + (c - \alpha)w \\ = \frac{c(v+w)}{2} + D(v-w)$$

$$\begin{matrix} D \\ \hline (\alpha - \frac{c}{2})(v-w) \end{matrix}$$

flux constants
from $f(u) \in u$

$$F(v, w) = \underbrace{\frac{c(v+w)}{2}}_{\text{flux centre}} + \underbrace{D(v-w)}_{\text{flux diffusion}} \quad , D \in \mathbb{R}$$

qui approxime $- \boxed{D h_{i+\frac{1}{2}}} u'(x_{i+\frac{1}{2}})$
 \downarrow
 Coefficient de Diffusion

Rappel: on a discrétisé le flux diffusif

$-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ par $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{v-w}{h_{i+\frac{1}{2}}}$

Critère de flux monotone \rightarrow condition sur D .

$$\left| \begin{array}{l} \frac{c}{2} + D \geq 0 \\ \frac{c}{2} - D \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \geq -\frac{c}{2} \\ D \geq \frac{c}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (F \text{ croissant par rapport } v) \\ (F \text{ décroissant par rapport } w) \end{array}$$

si $c \geq 0 \Rightarrow D \geq \frac{c}{2} = \frac{|c|}{2}$

si $c \leq 0 \Rightarrow D \geq \frac{|c|}{2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{D \geq \frac{|c|}{2}}$$

Le meilleur choix correspond au flux monotone le plus proche du flux centre: $D = |c|/2$

Flux de Godunov ou flux \times
 | * upwind
 | * décentré
 | * avant

par $f(u) = cu$

obtenu avec $D = \frac{|c|}{2}$

(flux monotone le moins diffusif)

$$F(\overset{\bar{a}_g}{\underset{\bar{a}_d}{v}}, w) =$$

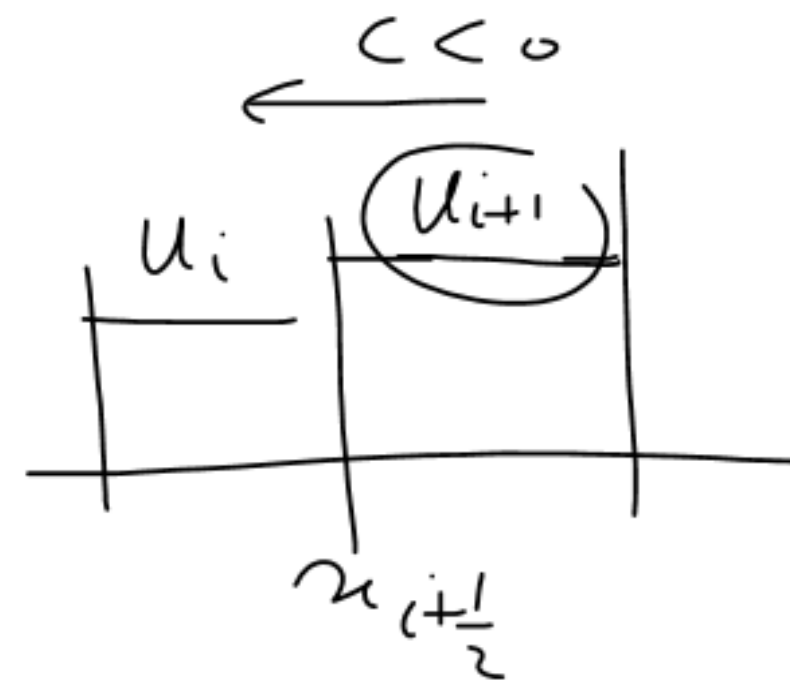
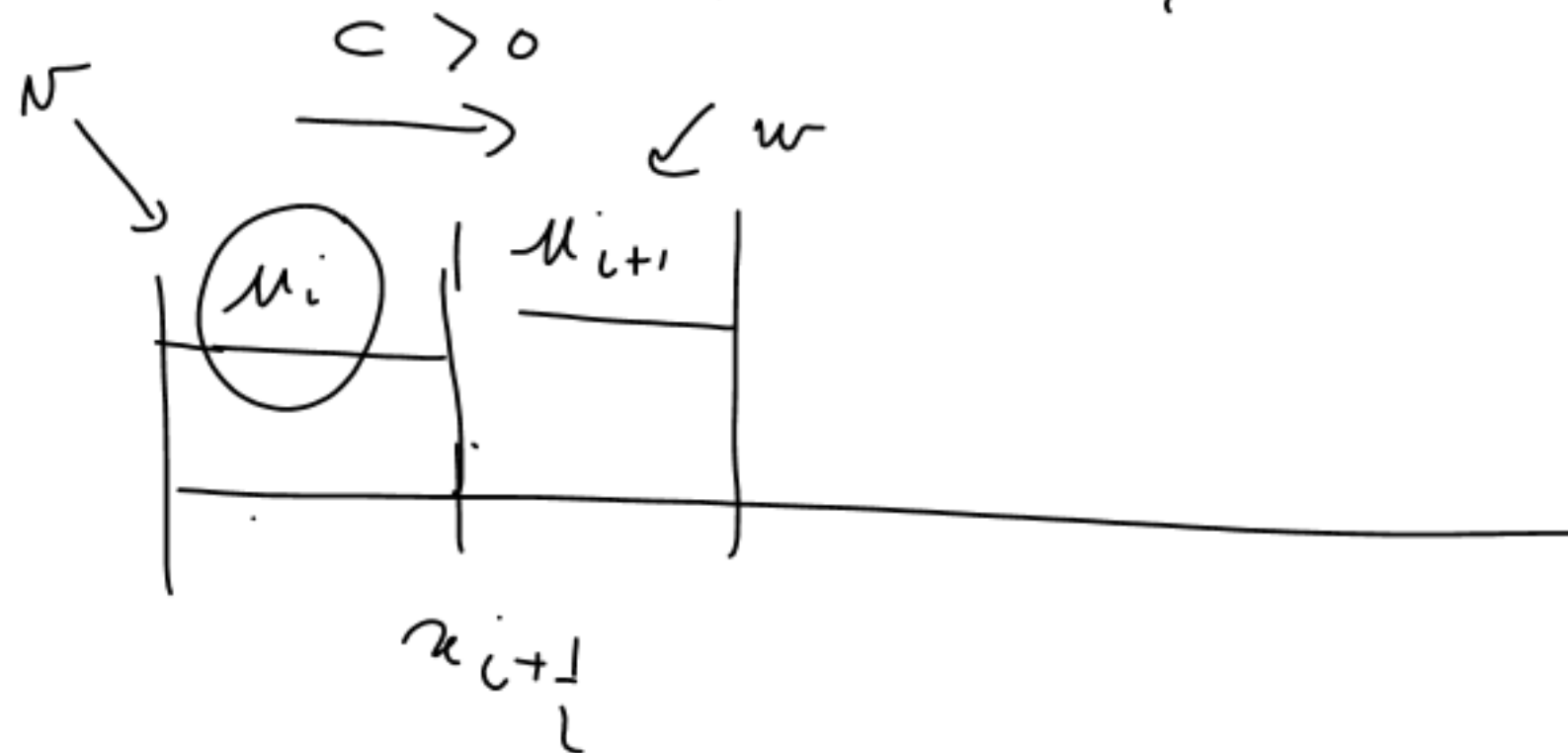
$$c \frac{(v+w)}{2} + \frac{|c|}{2} (v-w) =$$

$$cv$$

$$\text{si } c \geq 0$$

$$cw$$

$$\text{si } c \leq 0$$



$$F(v, w) = C \frac{(v+w)}{2} + D(v-w)$$

flux linéaire constant
 $D \in \mathbb{R}$.

On étudie la stabilité du schéma par le principe du maximum en imposant le critère de combinaison convexe.

valen \bar{x} gauche
 valen \bar{x} droite

$$\left| h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + C \frac{u_i^* + u_{i+1}^*}{2} + D(u_i^* - u_{i+1}^*) - \underbrace{C \frac{u_{i-1}^* + u_i^*}{2} + D(u_{i-1}^* - u_i^*)}_{-F_{i-\frac{1}{2}} = F(u_{i-1}, u_i)} = 0 \right.$$

Cas implicite $*=n$: $\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} + \cancel{\frac{C}{2}} + D - \cancel{\frac{C}{2}} + D \right) u_i^n = \frac{h_i}{\Delta t_n} u_i^{n-1} + \underbrace{(D - \frac{C}{2})}_{\geq 0} u_{i+1}^n + \underbrace{(\frac{C}{2} + D)}_{\geq 0} u_{i-1}^n$

Combinaison

Convexe

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D - \frac{C}{2} \geq 0 \\ D + \frac{C}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{D \geq \frac{|C|}{2}}$$

Condition de monotonie

\Rightarrow Sous cette condition le schéma implicite vérifie le principe du maximum $u_i^n \in I^0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{n \geq 0, \dots, m}$
 $\forall \Delta t_n > 0$

Cas explicite:

$$h_i \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t_n} + \frac{c}{2} (U_i^{n-1} + U_{i+1}^{n-1}) + D(U_i^{n-1} - U_{i+1}^{n-1}) - \frac{c}{2} (U_{i-1}^{n-1} + U_i^{n-1}) - D(U_{i-1}^{n-1} - U_i^{n-1}) = 0$$

$$\frac{h_i}{\Delta t_n} U_i^n = \underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} - \cancel{\frac{c}{2}} - D + \cancel{\frac{c}{2}} - D \right)}_{\text{coefficient of } U_i^{n-1}} U_i^{n-1} + \underbrace{\left(D - \frac{c}{2} \right)}_{\text{coefficient of } U_{i+1}^{n-1}} U_{i+1}^{n-1} + \underbrace{\left(\frac{c}{2} + D \right)}_{\text{coefficient of } U_{i-1}^{n-1}} U_{i-1}^{n-1}$$

Combinaison
Convexe

$$\left| \begin{array}{l} D - \frac{c}{2} \geq 0 \\ D + \frac{c}{2} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \boxed{D \geq \frac{|c|}{2}} \text{ la m\u00eame condition fournie par la monotonie}$$

Condition de stabilit\u00e9 en temps: $\frac{h_i}{\Delta t_n} - 2D \geq 0 \Leftrightarrow \Delta t_n \leq \frac{h_i}{2D} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

"Condition CFL"

$$\boxed{\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / 2D}$$

Pour le sch\u00e9ma monotone
le moins difficile
 $D = \frac{|c|}{2}$

Avec un sch\u00e9ma explicite
 $\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / |c| \Rightarrow$ "on ne peut propager le signal de plus d'1 maille en 1 pas de temps"

le schéma explicite vérifie le principe du maximum $u_i^n \in I^0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$
 $\forall n = 0, \dots, m$

Si $D \geq \frac{|c|}{2}$ et sous la condition CFL $\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / 2D$
 (monotonie) $\forall n = 1, \dots, m$

Exemples de flux monotones:

"schéma décentré avant" ou schéma de Godunov en tant que cas particulier

- Cas où f est croissante: $F(v, w) = f(v)$ est un flux constant monotone.
- Cas où f est décroissante: $F(v, w) = f(w)$
- $F(v, w) = \frac{f(v) + f(w)}{2} + D(v - w)$, $|D| \geq \frac{1}{2} \max_{z \in I^0} |f'(z)|$ si $f \in C^1(I^0)$
 $|D| \geq \frac{1}{2} \text{Lip } f$

• si $f(v) = \overset{\nearrow}{f^1(v)} + \overset{\searrow}{f^2(v)}$; $F(v, w) = \overset{\nearrow}{f^1(v)} + \overset{\searrow}{f^2(w)}$ est un flux constant monotone

• schéma de Godunov :
$$F(v, w) = \begin{cases} \min_{s \in [v, w]} f(s) & \text{si } v \leq w \\ \max_{s \in [w, v]} f(s) & \text{si } v \geq w. \end{cases}$$

Prop:

Soit $F(v, w)$ un flux consistant monotone.

Sous la condition CFL $\Delta t_n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / (\text{Lip} F_1 + \text{Lip} F_2)$

$\forall n = 1, \dots, m$, alors le schéma d'Euler explicite admet une solution unique et elle vérifie le principe du maximum $u_i^n \in I^0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

$\forall n = 1, \dots, m$.

Prop:

Soit $F(v, w)$ un flux consistant monotone, alors le schéma d'Euler implicite admet une solution unique. De plus elle vérifie le principe du maximum $\forall \Delta t_n > 0$ avec $u_i^n \in I^0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$
 $\forall n = 1, \dots, m$

prove:

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ F(u_i^*, u_{i+1}^*) \\ &- F(u_i^*, u_i^*) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &- F(u_{i-1}^*, u_i^*) \\ &+ F(u_i^*, u_i^*) \end{aligned} \right\} = 0$$

$$\left| \frac{F(u_i^*, \widehat{u_{i+1}^*}) - F(u_i^*, \widehat{u_i^*})}{u_i^* - u_{i+1}^*} \right| \leq \text{Lip}_{F_2}$$

b_i^*

$$\left| \frac{-F(u_{i-1}^*, u_i^*) + F(u_i^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i-1}^*} \right| \leq \text{Lip}_{F_1}$$

a_i^*

$$\left| h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + b_i^* (u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^* (u_i^* - u_{i-1}^*) = 0 \right.$$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + b_i^* (u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^* (u_i^* - u_{i-1}^*) = 0$$

Cas explicite: $\frac{h_i}{\Delta t_n} u_i^n = \underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} - b_i^{n-1} - a_i^{n-1} \right)}_{\geq 0} u_i^{n-1} + \underbrace{b_i^{n-1}}_{\geq 0} u_{i+1}^{n-1} + \underbrace{a_i^{n-1}}_{\geq 0} u_{i-1}^{n-1}$

"Combinaison" \Rightarrow On obtient la condition CFL : $\frac{h_i}{\Delta t_n} - b_i^{n-1} - a_i^{n-1} > 0 \Leftrightarrow \Delta t_n \leq \frac{h_i}{a_i^{n-1} + b_i^{n-1}}$
Convexe

Si $\Delta t_n \leq \frac{h_i}{\text{Lip} F_1 + \text{Lip} F_2}$ ce sera vérifié

donc on obtient la condition CFL $\Delta t_n \leq \frac{\min_{i \in \mathcal{I}} h_i}{(\text{Lip} F_1 + \text{Lip} F_2)}$

Cas implicite: $\underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} + a_i^n + b_i^n \right)}_{> 0} u_i^n = \underbrace{b_i^n}_{\geq 0} u_{i+1}^n + \underbrace{a_i^n}_{\geq 0} u_{i-1}^n + \underbrace{\frac{h_i}{\Delta t_n}}_{> 0} u_i^{n-1}$

on a la combinaison convexe $\forall \Delta t_n > 0$

$\boxed{c \geq 0}$
Equation équivalente : $f(u) = cu$, $h_i = h \quad \forall i \in \mathbb{Z}$, $\Delta t_n = \Delta t \quad \forall n$
 On va injecter $u_i^n = u(x_i, t_n)$ avec $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T))$ dans le schéma
 on cherche une équation "équivalente" vérifiée par u en (x_i, t_n) à l'ordre
 $h^2 + \Delta t^2 + h \Delta t$.

Cas implicite : $\partial_t u + \partial_x(cu) - \frac{hc}{2} (1 + CFL) \partial_x^2 u = O(h^2 + \Delta t^2 + h \Delta t)$

$$\begin{aligned}
 CFL &= \text{nombre "CFL"} \\
 &= \frac{c \Delta t}{h}
 \end{aligned}$$

Cas explicite : $\partial_t u + \partial_x(cu) - \frac{hc}{2} (1 - CFL) \partial_x^2 u = \underline{\hspace{2cm}}$