Examen du cours MAM5 : schémas volume fini pour les EDPs, 20 février 2024, durée 2h, documents du cours autorisés.

Discrétisation volume fini de modèles de diffusion et de convection diffusion non linaires

Soit Ω un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$. On considère l'équation elliptique non linéaire du second ordre suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\Big(-\nabla\varphi(u(\mathbf{x}))\Big) = h(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ -\nabla\varphi(u(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n} = g(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega_N, \end{cases}$$

avec $\mathbf{n}$ la normale unitaire sortante du domaine, φ une fonction **strictement croissante** et C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La frontière du domaine $\partial\Omega$ est partionnée en $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$. On suppose que la fonction $d \in C^0(\partial\Omega_D)$, que la fonction $g \in L^2(\partial\Omega_N)$ et que le terme source h est dans $L^2(\Omega)$.

On considère un maillage volume fini conforme de Ω avec les notations du cours. On suppose que les frontières $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ sont respectivement engendrées par les sous ensembles de faces de bord notés $\mathcal{F}_D$ et $\mathcal{F}_N$ tels que

$$\partial\Omega_D = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{F}_D}\sigma, \qquad \partial\Omega_N = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{F}_N}\sigma.$$

Le maillage est supposé vérifier les conditions d'orthogonalité suivantes : $\sigma \perp \mathbf{x}_K\mathbf{x}_L$ pour toute face intérieure $\sigma = K|L \in \mathcal{F}_{int}$ et $\sigma \perp \mathbf{x}_K\mathbf{x}_\sigma$ pour toute face de bord $\sigma \in \mathcal{F}_D \cap \mathcal{F}_K$.

L'inconnue discrète est notée $u_h \in V_h$, avec $u_h(\mathbf{x}) = u_K$ pour tout $\mathbf{x} \in K$ et $K \in M_h$.
Pour chaque maille $K \in M_h$ on note

$$h_K = \int_K h(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Pour chaque face de bord $\sigma \in \mathcal{F}_D$ on note

$$d_\sigma = \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma d(\mathbf{x})d\sigma,$$

et pour chaque face de bord $\sigma \in \mathcal{F}_N$ on définit

$$g_\sigma = \int_\sigma g(\mathbf{x})d\sigma.$$

(1) On note $F_{K,\sigma}(u_K, u_L)$ pour les faces intérieures et $F_{K,\sigma}(u_K, d_\sigma)$ pour les faces de bord de $\mathcal{F}_D$, les flux numériques deux points approchant le flux exact

$$\int_\sigma -\nabla\varphi(u(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}d\sigma.$$

Ecrire ce flux numérique pour les faces de bord $\sigma \in \mathcal{F}_D \cap \mathcal{F}_K$ et pour les faces intérieures $\sigma = K|L \in \mathcal{F}_{int} \cap \mathcal{F}_K$. Précisez également le flux numérique $F_{K\sigma}$ pour les faces de bord $\sigma \in \mathcal{F}_N \cap \mathcal{F}_K$.

(2) Montrer que le flux numérique $F_{K,\sigma}(u_K, u_L)$ aux faces intérieures est conservatif

(3) En utilisant ces flux numériques, écrire la discrétisation volume fini en espace de l'EDP dans chaque maille $K \in M_h$, en prenant bien en compte les conditions limites.

(4) On note N le nombre de mailles et $U \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des $(u_K)_{K\in\mathcal{M}}$. On note $R(U) = \Big(R_K(U)\Big)_{K\in\mathcal{M}}$ la fonction non linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ telle que $R_K(U) = 0$ représente l'équation du schéma volume fini dans la maille K.

Ecrire l'algorithme de Newton pour résoudre le système non linéaire $R(U) = 0$.

(5) En utilisant les notations de la question précédente, écrire l'algorithme d'assemblage du résidu $R(U)$ en utilisant une boucle sur les mailles, une boucle sur les faces intérieures, une boucle sur les faces de bord de $\mathcal{F}_D$ et une boucle sur les faces de bord $\mathcal{F}_N$.

(6) En utilisant les notations des deux questions précédentes, écrire l'algorithme d'assemblage de la Jacobienne $\frac{DR}{DU}(U)$.

(7) On considère dans cette question et les suivantes l'équation de convection diffusion non linéaire

$$\begin{cases} \mathrm{div}\Big(-\nabla\varphi(u(\mathbf{x})) + f(u(\mathbf{x}))\mathbf{V}(\mathbf{x})\Big) = h(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ \Big(-\nabla\varphi(u(\mathbf{x})) + f(u(\mathbf{x}))\mathbf{V}(\mathbf{x})\Big)\cdot\mathbf{n} = g(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega_N. \end{cases}$$

La fonction f est supposée **strictement décroissante** et C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ est une fonction C^1 de Ω dans $\mathbb{R}^2$. Elle est supposée vérifier la condition d'incompressibilité

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0.$$

On utilisera la notation

$$V_{K\sigma} = \int_\sigma \mathbf{V}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}_{K\sigma}d\sigma,$$

pour $\sigma \in \mathcal{F}_K$ avec la propriété suivante liée à l'incompressibilité de $\mathbf{V}$:

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{F}_K} V_{K\sigma} = 0.$$

Ecrire pour toutes les faces intérieures et de bord les flux numériques deux points approchant le flux exact

$$\int_\sigma \Big(-\nabla\varphi(u(\mathbf{x})) + f(u(\mathbf{x}))\mathbf{V}(\mathbf{x})\Big)\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}d\sigma.$$

On utilisera un flux monotone deux points pour la partie convective.

(8) En utilisant ces flux numériques, écrire la discrétisation volume fini en espace de l'EDP dans chaque maille $K \in M_h$, en prenant bien en compte les conditions limites.

(9) Dans cette question on considère que $g(\mathbf{x}) = 0$, que $h(\mathbf{x}) = 0$ et que $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega_N$. Démontrer que la solution du schéma vérifie le principe du maximum discret suivant

$$\min_{\sigma \in \mathcal{F}_D} d_\sigma \leq u_K \leq \max_{\sigma \in \mathcal{F}_D} d_\sigma.$$

On montrera pour cela que u_K s'exprime comme une combinaison convexe des u_L dans les mailles voisines de K et des d_σ sur les faces de bord de $\mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_D$. Notez que les coefficients de cette combinaison vont dépendre de la solution u_h.