

TP d'évaluation : Modélisation et Analyse de Sensibilité d'un Forage

Mohamad SAMMAN

March 18, 2025

Contents

1	Introduction	2
2	Mise en place du modèle et calculs initiaux	2
2.1	Résultats des évaluations	2
3	Propagation d'incertitudes par Monte Carlo	2
3.1	a) Moyenne, variance et histogramme	2
3.2	b) Comparaison de la moyenne	3
3.3	c) Quantile d'ordre 95% et intervalle de confiance	3
3.4	d) Probabilité de dépassement du seuil de 250 m ³ /an	4
4	Analyse de sensibilité	4
4.1	a) Criblage avec la méthode de Morris	4
4.2	b) Indices basés sur la régression	5
4.3	c) Indices de Sobol	6
5	Conclusion	7

1 Introduction

Ce travail pratique vise à analyser un modèle de forage en utilisant une approche par simulation de Monte Carlo pour la propagation des incertitudes, ainsi qu'à réaliser une analyse de sensibilité des paramètres d'entrée. La fonction `borehole` est utilisée pour simuler le débit d'eau en fonction de 13 paramètres d'entrée. Nous allons appliquer plusieurs techniques statistiques pour analyser la propagation des incertitudes et la sensibilité du modèle.

2 Mise en place du modèle et calculs initiaux

Nous avons commencé par tester la fonction de forage `borehole()` en évaluant la sortie pour des valeurs minimales, moyennes et maximales des paramètres d'entrée. Les valeurs minimales et maximales ont été choisies directement à partir des plages spécifiées dans l'énoncé, tandis que la valeur moyenne de la loi lognormale a été calculée à partir des paramètres $\mu = 7.71$ et $\sigma = 1.0056$, en utilisant la formule :

$$\text{Moyenne de X} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (1)$$

Nous avons ensuite évalué le débit pour les valeurs minimales, moyennes et maximales des paramètres.

2.1 Résultats des évaluations

Les résultats des évaluations du débit pour les valeurs minimales, moyennes et maximales sont présentés ci-dessous :

$$\text{Débit pour les valeurs minimales} = 6.308688 \quad (2)$$

$$\text{Débit pour les valeurs moyennes} = 50.331380 \quad (3)$$

$$\text{Débit pour les valeurs maximales} = 150.145626 \quad (4)$$

3 Propagation d'incertitudes par Monte Carlo

3.1 a) Moyenne, variance et histogramme

Nous avons utilisé un échantillonnage Monte Carlo avec une taille d'échantillon de 1000 pour calculer la moyenne et la variance de la sortie. Un histogramme des valeurs de débit a également été tracé pour visualiser la distribution de la sortie.

Le graphique suivant montre l'histogramme des débits obtenus :

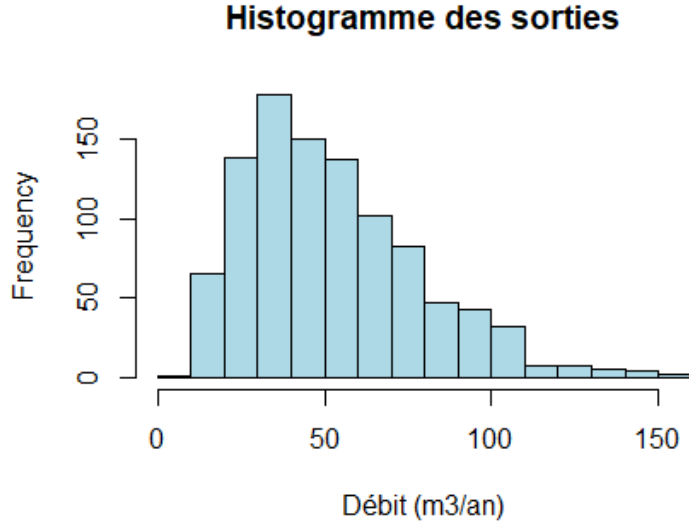


Figure 1: Histogramme des débits obtenus par échantillonnage Monte Carlo (1000 échantillons)

La moyenne et la variance calculées sont les suivantes :

$$\text{Moyenne} = 52.336676 \quad (5)$$

$$\text{Variance} = 678.4250205 \quad (6)$$

3.2 b) Comparaison de la moyenne

Nous avons comparé la moyenne de la sortie obtenue par Monte Carlo avec celle de la sortie évaluée à la moyenne des paramètres d'entrée. Les résultats sont les suivants :

$$\text{Moyenne Monte Carlo} = 52.336676 \quad (7)$$

$$\text{Moyenne de la sortie avec les entrées moyennes} = 50.331380 \quad (8)$$

La différence observée suggère que la fonction n'est pas strictement linéaire, ce qui est attendu pour ce type de modèle complexe.

3.3 c) Quantile d'ordre 95% et intervalle de confiance

Nous avons calculé le quantile d'ordre 95% de la sortie, ainsi qu'un intervalle de confiance à 95% basé sur 1000 répétitions de l'échantillonnage Monte Carlo. Le quantile et l'intervalle de confiance sont les suivants :

$$\text{Quantile d'ordre } 95\% = 100.8539 \quad (9)$$

$$\text{Intervalle de confiance à } 95\% = [15.71709, 114.63988] \quad (10)$$

3.4 d) Probabilité de dépassement du seuil de 250 m³/an

Nous avons également calculé la probabilité que le débit dépasse 250 m³/an en augmentant progressivement la taille de l'échantillon. Nous sommes parti de 2×10^6 avec un pas de 2×10^6 . On converge après 8 itération avec une taille d'échantillon de $1,8 \times 10^7$. Le graphique suivant montre la convergence de la probabilité avec l'augmentation de la taille de l'échantillon :

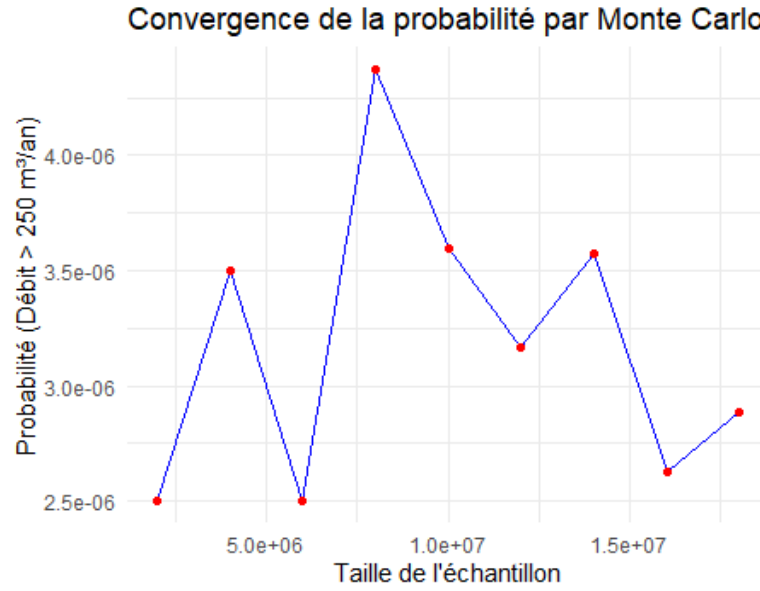


Figure 2: Convergence de la probabilité que le débit dépasse 250 m³/an en fonction de la taille de l'échantillon

4 Analyse de sensibilité

4.1 a) Criblage avec la méthode de Morris

Nous avons utilisé la méthode de Morris pour réaliser un criblage des paramètres d'entrée, en limitant le coût à moins de 100 évaluations de la fonction. Les résultats obtenus, présentés à la Figure 3, permettent d'identifier les variables ayant un impact significatif sur la sortie: K_w , r_w , H_l , H_0 , et L . Avec K_w et r_w ayant un

impact plus important que les trois autres. Nous verrons avec sobol qu'on aurait pu négliger H_l , H_0 , et L .

Les variables présentant des valeurs élevées de μ^* (moyenne des effets absolus) et de σ (dispersion des effets) sont considérées comme influentes et devront être conservées pour les analyses ultérieures. En revanche, les variables avec des valeurs faibles de μ^* et σ sont considérées comme peu influentes ; elles peuvent donc être fixées à leur moyenne pour simplifier les analyses suivantes.

Criblage des variables d'entrée - Méthode de Morris

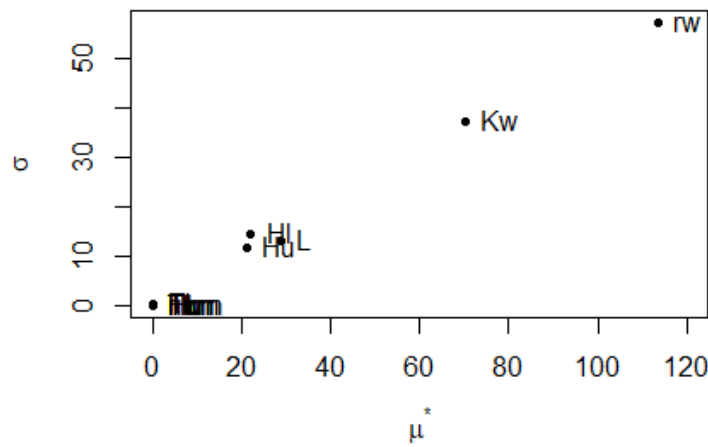


Figure 3: Indices de Sobol pour la fonction de forage

4.2 b) Indices basés sur la régression

Nous pouvons observer le scatterplot Figure 4. Le comportement n'est pas linéaire (sauf potentiellement pour L). Chose qu'on savait déjà puisque la moyenne des sorties n'est pas égale à la sortie des valeurs moyennes. Donc la régression que nous allons faire n'est forcément pertinente mais elle fait partie des question du TP :)

Les variables identifiées comme influentes par la méthode de Morris ont été utilisées pour ajuster un modèle de régression linéaire. Les indices de sensibilité calculés à partir de cette régression montrent l'importance relative de chaque variable Table 1. Les variables influentes pour cette méthode sont H_l , L et r_w alors que H_u et K_w ont une influence négligable sur la sortie. Ce qui n'est pas en accord avec ce

qu'on trouve avec Monte-Carlo et sobol. Ceci n'est pas surprenant car le modèle n'est pas linéaire.

erplots entre les variables influentes et la sortie (C

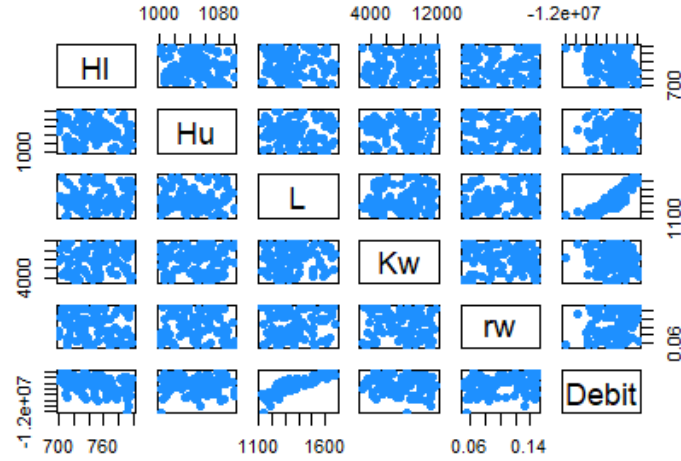


Figure 4: Scatterplots entre les variables influentes et la sortie

Variable	Indice de sensibilité SRC ²
HI	0.420
Hu	0.000006
L	0.102
Kw	0.000022
rw	0.478

Table 1: Indices de sensibilité SRC² des variables influentes

4.3 c) Indices de Sobol

Enfin, nous avons calculé les indices de Sobol pour toutes les variables en utilisant un échantillon adapté. Les résultats des indices de Sobol sont présentés Figure 5, ce qui permet d'identifier les contributions des variables influentes: K_w et r_w .

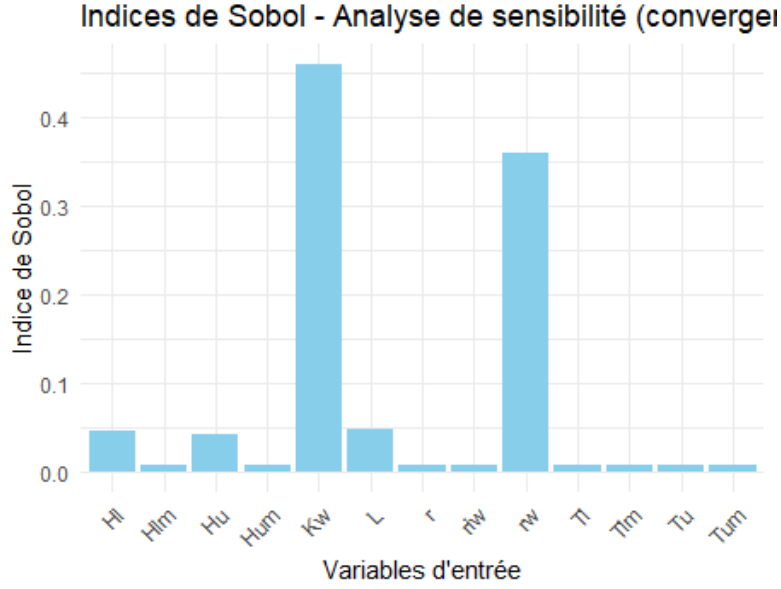


Figure 5: Indices de Sobol pour la fonction de forage

5 Conclusion

Ce travail a permis d'analyser un modèle de forage en utilisant la simulation de Monte Carlo pour évaluer la propagation des incertitudes et réaliser une analyse de sensibilité des paramètres d'entrée. Les résultats ont montré une non-linéarité du modèle, confirmée par les analyses de sensibilité. La méthode de Morris a mis en évidence les variables les plus influentes (K_w , r_w , H_l , H_0 , L), tandis que les indices de Sobol ont révélé que la conductivité hydraulique du forage K_w et le rayon du forage r_w étaient les plus impactantes. La régression linéaire n'a pas permis d'identifier toutes les influences de manière satisfaisante, ce qui est cohérent avec la non-linéarité du modèle.