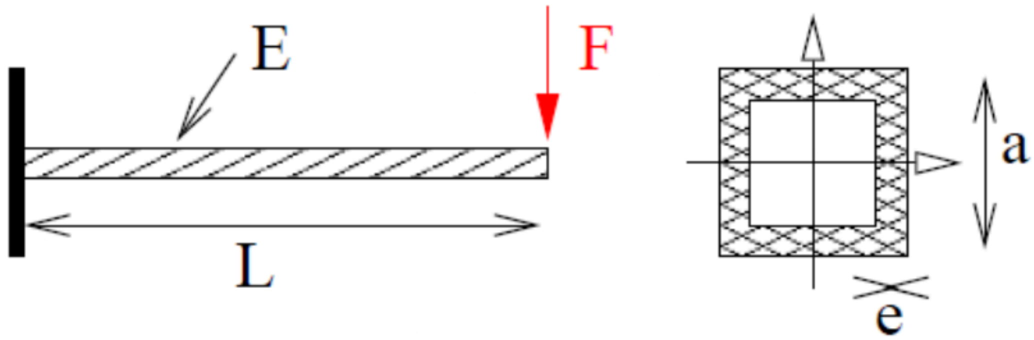
## TD 2 – Quantification et propagation d’incertitudes

**Bertrand Iooss**
**Polytech Nice Sophia**

Vous écrirez vos instructions dans un fichier R afin de les sauvegarder.

### 1. Modèle du plongeoir

On s’intéresse à la déviation verticale d’une poutre encastrée en une extrémité et soumise en l’autre extrémité à une charge ponctuelle verticale.




La déviation verticale de l’extrémité (ou flèche) de la poutre s’exprime comme suit :

$$y(E,F,L,I) = \frac{FL^3}{3EI}$$

où :

- E est le module d’Young du matériau
- F est la charge ponctuelle appliquée
- L est la longueur de la poutre
- I est le moment quadratique, que l’on peut écrire :

$$I = \frac{a^4 - (a-e)^4}{12}$$

Les valeurs utilisées pour les études déterministes sont :

F = 300 $N$
E = 3.0e9 $Pa$
L = 2.5 $m$
I = 4.0e-6 $m^4$

ce qui correspond au point nominal (30000, 3.0e7, 250, 400) lorsque la longueur est exprimée en cm et non en m. Ces valeurs correspondent à une planche en plastique, longue de 2.5m, à l’extrémité de laquelle une charge de 30kg est posée. On pourrait imaginer par exemple un plongeoir de piscine en matière plastique, sur lequel se tient un enfant de 30kg.

Les incertitudes qui entachent les variables (E, F, L, I) sont dues, par exemple, à :

E : fabrication de l’acier (incertitude stochastique),
F : incertitude de mesure de la charge (incertitude épistémique),
L et I : défaut géométrique de fabrication (incertitude stochastique).

## 2 Etape C - Propagation d’incertitudes, étude en tendance centrale

On considère dans la suite que les variables d’entrée sont indépendantes et suivent le modèle probabiliste ci-après :

| Variable | Loi | Paramètres |
|---|---|---|
| F | Normale | mu = 30000 ; sigma = 9000 |
| E | Triangulaire | a = 2.8e7 ; b = 4.8e7 ; c = 3.0e7 |
| L | Uniforme | a = 250 ; b = 260 |
| I | Triangulaire | a = 310 ; b = 450 ; c = 400 |

On souhaite désormais *propager* ces incertitudes à travers le modèle de calcul de flèche, afin d’étudier la variabilité de la sortie. On souhaite par exemple obtenir la valeur moyenne de la flèche, l’écart-type, le minimum, le maximum, …, afin d’avoir une bonne idée de l’impact des incertitudes en entrée sur les incertitudes en sortie du modèle.

1. Visualisez les graphes des densités de probabilité des lois des variables. Pour la loi triangulaire, on utilisera le package triangle.

2. Ecrire une fonction pour le calcul de flèche, la déviation maximale de la poutre.

3. **Cumul quadratique.** On souhaite obtenir les moments du premier et du second ordre (moyenne et variance) de la fonction *fleche()* via la méthode du cumul quadratique autour du point nominal (point correspondant aux moyennes des variables).

   Pour ce faire, on a besoin des variances de chacune des entrées : celles-ci sont données dans le fichier R du TP. Il faut aussi calculer les dérivées de la sortie par rapport à chacune des entrées (au point correspondant aux moyennes des variables). Dans le fichier R du TP, on effectue une différentiation formelle (à l’aide de la fonction *deriv()*) de la formule analytique du modèle flèche. Cela permet d’utiliser les dérivées exactes en récupérant les dérivées par la fonction *eval()*.

4. **Méthode de Monte Carlo**. On souhaite à présent estimer les moments du premier et du second ordre de la fonction *fleche()* par une méthode de Monte Carlo. Pour ce faire, on propose de générer des échantillons de taille n = 200 des variables d’entrée du modèle afin d’obtenir un échantillon de 200 valeurs de la sortie Y.

   A partir de cet échantillon :
   (a) Calculer une estimation de sa moyenne. Calculer aussi une estimation de sa variance. Tracer l’histogramme de l’échantillon de la flèche. Comparer les résultats de moyenne et variance de la sortie du modèle de flèche avec ceux obtenus par la méthode du cumul quadratique. Les résultats obtenus par cumul quadratique sont-ils satisfaisants ?
   (b) On souhaite avoir une idée de la précision de l’estimateur de la moyenne de la fonction *fleche()*. Calculer les intervalles de confiance (IC) à 95% sur sa moyenne.
   (c) Visualisez la convergence des estimations de la moyenne (avec ses IC à 95%) et du coefficient de variation (rapport de l’écart type sur la moyenne) en fonction de la taille de l’échantillon (exemple : n=10 à n=5000).

5. **Exercice optionnel : bootstrap**. Estimez, à partir d'un échantillon de 20 valeurs (puis de 200), un IC de la moyenne de la déviation de la flèche. Comparez-le à celui obtenu en 3.b).

## 3 Calculs de probabilités de défaillance

On étudie à présent le risque de rupture de la poutre. Ici, le critère de rupture est : « La déviation verticale de la poutre dépasse la valeur de 30 cm ». Notons que la valeur seuil est nettement supérieure au quantile à 95%. La fonction de défaillance (il y a défaillance si la valeur est négative) et la fonction de simulation des entrées s'écrivent :

```
defaill = function(x){
 if (is.vector(x)){x = matrix(x,nrow=1)}
 res = 30 - (x[,1]*x[,3]^3)/(3*x[,2]*x[,4])
 return(res)
}

Simul_def = function(n) {
  F = rnorm(n,3e4,9e3)
  E = rtriangle(n,2.8e7,4.8e7,3e7)
  L = runif(n,250,260)
  I = rtriangle(n,310,450,400)
  data = cbind(F,E,L,I)
  return(defaill(data))
}
```

1. Calculez tout d'abord la probabilité de défaillance $P_f$ par un tirage de Monte-Carlo de taille 100000. Calculez le coefficient de variation de cette estimation. Calculez également un intervalle de confiance à 95% de $P_f$ . On rappelle que, pour une loi normale de moyenne $m$ et d'écart-type $s$, un intervalle à 95% vaut approximativement [ $m$ – 1.96 $s$ ; $m$ + 1.96 $s$ ].

2. On étudie à présent la convergence de l'estimateur de $P_f$. On fixe pour l'algorithme deux critères d'arrêt : un nombre maximal de tirages et un coefficient de variation de l'estimateur. Choisissez des valeurs qui vous semblent pertinentes, par exemple 100 millions (par pas de 2 millions) et 1%. Itérez jusqu'à obtenir un résultat qui vous semble satisfaisant. Quel critère a été atteint en premier ? Combien de simulations a-t-on réalisé ? Quel est le coefficient de variation de notre estimateur ?