

La position optimale d'une charge

Mohamad SAMMAN

July 8, 2024

1 Introduction

On considère une corde tendue attachée à ses deux extrémités et initialement en position horizontale à laquelle on suspend une charge. L'objectif est que sa présence n'entraîne pas la rupture des points d'attache. Pour cela, on cherche donc à déterminer sa position le long de la corde pour minimiser la force de tension que l'on va retrouver aux extrémités de celle-ci.

On se place dans le cas monodimensionnel et avec une corde de longueur 1 ; les abscisses sont décrites par $x \in]0, 1[$ et $x \mapsto u(x)$ représente le déplacement vertical de la corde par rapport au repos lorsque la charge y est suspendue. Le champ de forces exercé sur la corde par le poids de la charge est représenté par une densité linéique $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

On supposera de plus que la corde est fixée à ses extrémités, ce que l'on traduit par les conditions $u(0) = u(1) = 0$. Pour décrire le modèle, on va faire un bilan d'énergie sur un élément de longueur dx , en faisant l'hypothèse de petits déplacements. Pour cela on procède en deux étapes :

1. L'énergie infinitésimale due à l'étirement de l'élément de corde est proportionnelle à l'augmentation de la longueur entre la situation au repos et la corde en tension :

$$\xi_1 = k(x) \left(\sqrt{(u(x+dx) - u(x))^2 + dx^2} - dx \right) \approx k(x) \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)^2 + 1} - 1 \right) dx. \quad (1)$$

Le coefficient de proportionnalité $k(x) > 0$ s'appelle la raideur de la corde au point x .

2. L'énergie potentielle due au poids de l'objet et qui est l'opposée du travail de ce poids au cours du déplacement décrit par u vaut :

$$\xi_2 = -f(x)u(x)dx. \quad (2)$$

L'énergie globale $E(u)$ est donnée par :

$$E(u) = \int_0^1 k(x) \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)^2} - 1 \right) dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx. \quad (3)$$

ce qui, en supposant que le déplacement u et sa dérivée sont petits, donne en première approximation :

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx.^1 \quad (4)$$

La configuration u de la corde à l'équilibre est l'unique fonction vérifiant les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ et qui minimise l'énergie E .

Théorème 1. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $k \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\inf_{[0, 1]} k > 0$ alors :

$$\exists ! u \in V, \forall v \in V, E(u) \leq E(v), \quad (5)$$

avec $V = \{v \in C^2([0, 1]) / v(0) = v(1) = 0\}$.

¹ $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ pour x petit

Corollaire 2. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1, l'unique solution du problème est aussi solution du problème aux limites:*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) = f(x), \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Démonstration formelle:

On écrit, pour tout $\phi \in C^\infty$ à support compact et $t \in \mathbb{R}$,

$$E(u + t\phi) = \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) \left(\frac{d}{dx}(u(x) + t\phi(x)) \right)^2 dx - \int_0^1 f(x)(u(x) + t\phi(x)) dx \quad (7)$$

Par linéarité de l'intégrale le terme de droite donne

$$\frac{1}{2} \int_0^1 k(x) u'(x)^2 dx - \int_0^1 f(x) u(x) dx + 2t \left(\int_0^1 k(x) u'(x) \phi'(x) dx - \int_0^1 f(x) \phi(x) dx \right) + \frac{t^2}{2} \int_0^1 k(x) (\phi'(x))^2 dx \quad (8)$$

On reconnaît $E(u)$

$$E(u + t\phi) = E(u) + 2t \left(\int_0^1 k(x) u'(x) \phi'(x) dx - \int_0^1 f(x) \phi(x) dx \right) + \frac{t^2}{2} \int_0^1 k(x) (\phi'(x))^2 dx. \quad (9)$$

Ce qui donne, pour $t \neq 0$,

$$\frac{E(u + t\phi) - E(u)}{2t} = \int_0^1 k(x) u'(x) \phi'(x) dx - \int_0^1 f(x) \phi(x) dx + \frac{t}{4} \int_0^1 k(x) (\phi'(x))^2 dx. \quad (10)$$

On fait tendre t vers 0^+ et on déduit que

$$\int_0^1 k(x) u'(x) \phi'(x) dx - \int_0^1 f(x) \phi(x) dx \geq 0. \quad (11)$$

Ensuite, on fait tendre t vers 0^- et on déduit que

$$\int_0^1 k(x) u'(x) \phi'(x) dx - \int_0^1 f(x) \phi(x) dx \leq 0. \quad (12)$$

On obtient pour tout $\phi \in C^\infty$ à support compact,

$$\int_0^1 k(x) u'(x) \phi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi(x) dx. \quad (13)$$

Par densité de l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans L^2 , le résultat est vrai pour L^2 et donc en particulier pour notre espace V

2 Optimisation de la position de la charge avec la méthode des différences finies

On se donne $p \in C_c^0(\mathbb{R})$ à support dans $[-l, l]$ avec $0 < l < \frac{1}{2}$ qui représente le poids de la charge de longueur $2l$ avec laquelle on va travailler. La charge ne doit pas déborder et donc sa longueur doit être inférieure à 1 d'où $2l < 1$ et donc $l < 0.5$. On choisira typiquement des fonctions p négatives ce qui correspond à l'orientation usuelle de la gravité "vers le bas". On repère alors par $a \in [l, 1-l]$ la position du centre de la charge, ce qui revient à dire que la corde est soumise au champ de force f^a défini par $f^a(x) = p(x - a)$. Pour que la charge soit dans l'intervalle $[0, 1]$, son centre a doit être à une distance supérieure à l du bord. Sachant qu'on translate p vers la droite de a on veut que $a \in [l, 1-l]$. Ainsi,

à chaque valeur de a on associe, par le théorème 1, une unique solution notée u^a du problème (6) avec pour second membre, la fonction f^a . On peut alors, toujours pour chaque valeur de a , calculer l'énergie de rupture associée :

$$R(a) = \frac{1}{2} \left| k(0) \frac{\partial u^a}{\partial x}(0) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| k(1) \frac{\partial u^a}{\partial x}(1) \right|^2 \quad (14)$$

L'objectif est de trouver la valeur de a qui va minimiser la fonctionnelle R et ainsi les risques de rupture des attaches de la corde.

2.1 Calcul approché de la position de la corde

Pour tout paramètre $a \in]l, 1-l[$, on utilise une méthode de différences finies pour l'équation (6) avec second membre f^a . Plus précisément, pour un entier N fixé et $h = \frac{1}{N+1}$, on pose $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N+1$, on cherche une approximation u_i^a de la valeur de u^a au point x_i , définie par le schéma :

$$\begin{cases} u_0^a = u_{N+1}^a = 0, \\ \frac{-1}{h} \left(k_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^a - u_i^a}{h} - k_{i-1/2} \frac{u_i^a - u_{i-1}^a}{h} \right) = f^a(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{cases} \quad (15)$$

avec $k_{i-1/2} = k((i-1/2)h)$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Une telle approximation $U^a = (u_1^a, \dots, u_N^a)^T$ existe de façon unique et s'obtient par la résolution du système linéaire :

$$MU^a = F^a, \quad (16)$$

avec $F^a = (f^a(x_1), \dots, f^a(x_N))^T$ et $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ où

$$\begin{cases} m_{i,j} = 0, & \text{pour tout } (i,j) \in \{1, \dots, N\}^2 \text{ tel que } |i-j| > 1, \\ m_{i,i+1} = -\frac{k_{i+1/2}}{h^2}, & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N-1\}, \\ m_{i,i-1} = -\frac{k_{i-1/2}}{h^2}, & \text{pour tout } i \in \{2, \dots, N\}, \\ m_{i,i} = \frac{k_{i+1/2} + k_{i-1/2}}{h^2}, & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N\}. \end{cases} \quad (17)$$

2.2 Calcul de l'énergie de rupture et de sa dérivée

Dans un deuxième temps, à N fixé, on propose de minimiser, par rapport à a , la fonctionnelle approchant R définie par :

$$R_N(a) = \frac{1}{2} \left(k_{1/2} \frac{u_1^a}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(k_{N+1/2} \frac{u_N^a}{h} \right)^2 \quad (18)$$

Pour déterminer une valeur approchée du minimum, on se propose d'utiliser une méthode de gradient à pas constant ρ , ce qui suppose de pouvoir évaluer la dérivée de R_N en tout point. Pour cela, on suppose dorénavant que p est une fonction de classe C^1 et on remarque que la dérivée de R_N s'écrit de la façon suivante :

$$R'_N(a) = \frac{k_{1/2}^2}{h^2} u_1^a v_1^a + \frac{k_{N+1/2}^2}{h^2} u_N^a v_N^a \quad (19)$$

où $V^a = (v_1^a, \dots, v_N^a)^T$ est l'unique solution du système linéaire

$$MV^a = G^a, \quad (20)$$

avec

$$G^a = \left(\frac{\partial f^a(x_1)}{\partial a}, \dots, \frac{\partial f^a(x_N)}{\partial a} \right)^T = - (p'(x_1 - a), \dots, p'(x_N - a))^T. \quad (21)$$

2.3 Minimisation par l'algorithme de gradient à pas constant

La méthode de gradient à pas constant pour minimiser R_N est décrite par :

$$\begin{cases} a^0 \text{ donné,} \\ a^{k+1} = a^k - \rho R'_N(a^k), \forall k \in \mathbb{N}, \\ \text{s'arrêter quand } |R_N(a^k)| \leq 10^{-6}. \end{cases} \quad (22)$$

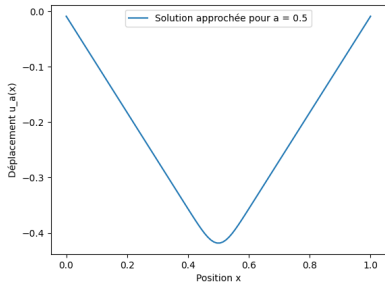
3 Un premier exemple simple, $k=1$

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à un cas simple où la raideur est constante égale à 1. On s'attend donc à que la corde prenne une forme paraboloidale et que l'énergie de rupture soit minimale lorsque la charge se trouve au centre de la corde.

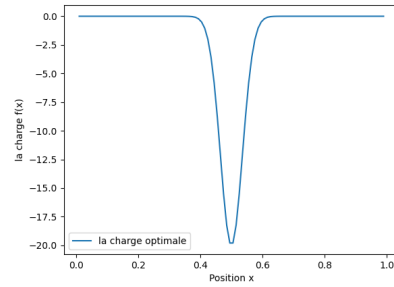
3.1 Implémentaion avec la méthode des différences finies

Dans le fichier Differences-fini.py on trouve trois algorithmes. Le premier permet de construire le vecteur F^a , la matrice M et son inverse M^{-1} . Étant donné que la matrice M ne change pas au cours des itérations il est plus efficace de trouver M^{-1} matrice en étape de précalcul. Le deuxième algorithme permet de calculer l'énergie de rupture ainsi que sa dérivée. Le dernier algorithme, gradient-pas-constant permet de minimiser l'énergie de rupture. Dans le fichier resultats-DF.py, en choisissant $k(x) = 1$ et $p(x) = -20\exp(-(20x)^2)$. La fonction p sera la même pour toutes les courbes.

On trouve bien ce que l'on espérait. L'Énergie de rupture est minimale pour $a = 0.5000$.



(a) le déplacement



(b) La position optimale de la charge

Figure 1: Différences finies

Par ailleurs, en traçant le graph de R_N pour des valeurs de a dans $]0.1, 0.9]$, il semble que R_N est quadratique en a .

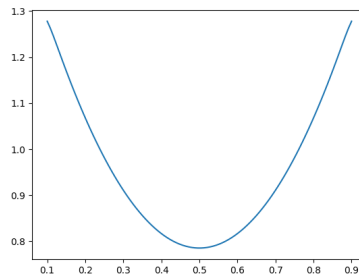


Figure 2: le risque de rupture en fonction de la position du centre de la charge

4 k non constante

Après avoir traité le cas simple, nous allons faire varier la raideur le long de la corde. Nous choisissons la fonction suivante $k(x) = 1 + 0.8\sin(10x)\cos(5x)$. Cela nous donne des variations importante de la raideur le long de la corde.

La position optimale du centre de la charge se situe vers 0.6666. L'effet de la raideur se voit avec la déformation Figure 4 (a). On remarque que l'énergie de rupture n'est plus quadratique dans la Figure (5) On obtient les résultats suivants avec N=100 un pas de 0.4 .

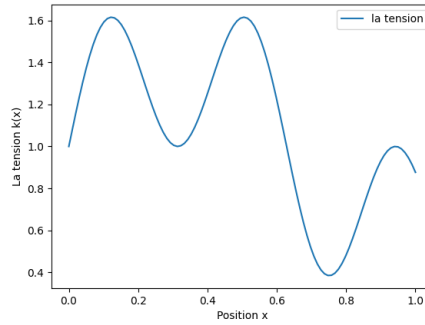
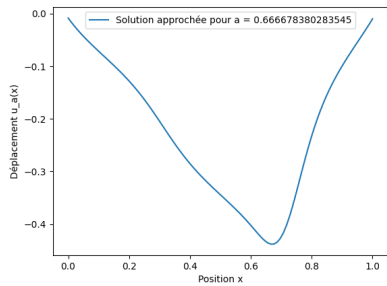
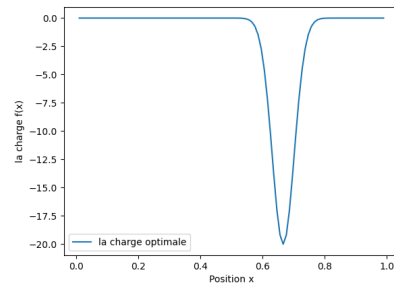


Figure 3: la raideur



(a) le déplacement



(b) La position optimale de la charge

Figure 4: Différences finies

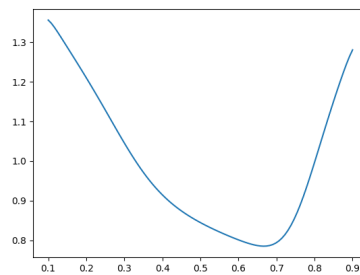
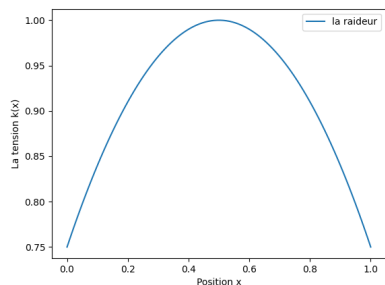


Figure 5: Énergie de rupture

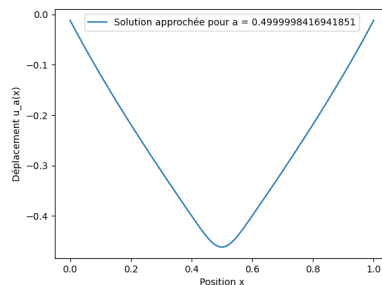
5 D'autres raideurs

5.1 $k(x) = 1 - (x - 0.5)^2$

La raideur étant symétrique, la charge se retrouve au centre de la corde 0.4999. La corde a une forme concave de chaque côté due à la raideur moins importante aux extrémités. (Figure 6)



(a) la raideur

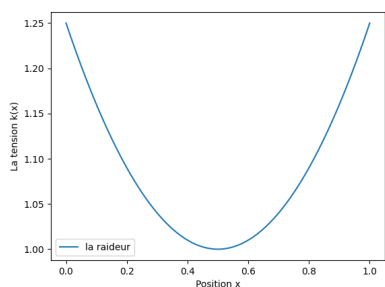


(b) le déplacement

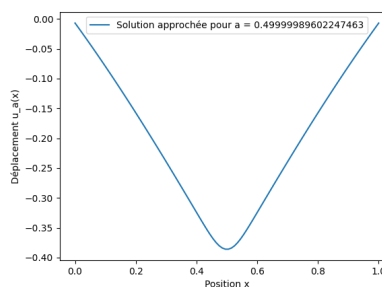
Figure 6: 5.1

5.2 $k(x) = 1 + (x - 0.5)^2$

La charge se retrouve au centre de la corde 0.4999 et la corde est cette fois convexe sur chaque côté (Figure 7)



(a) la raideur

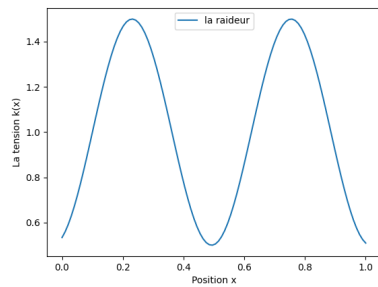


(b) le déplacement

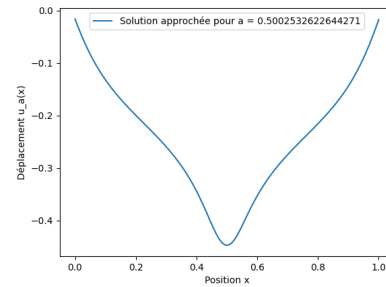
Figure 7: 5.2

5.3 $k(x) = 0.5\sin(12(x - 0.1)) + 1$

Avec cette raideur la corde se déforme moins autour de 0.2 et 0.8 ce qui donne une forme particulière. (Figure 8)



(a) la raideur

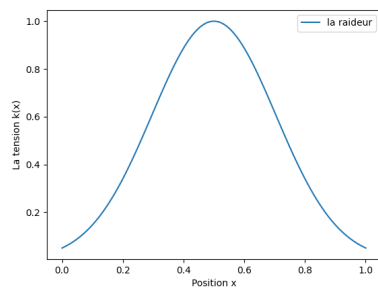


(b) le déplacement

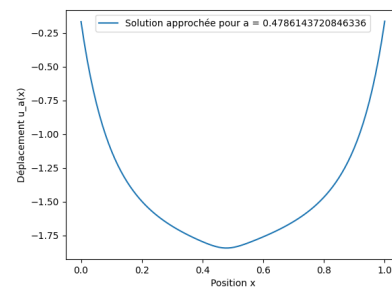
Figure 8: 5.3

5.4 $k(x) = \exp(-12(x - 0.5)^2)$

La corde est plus raide au centre ce qui donne la forme Figure 9. La corde se déforme donc moins au centre.



(a) la raideur



(b) le déplacement

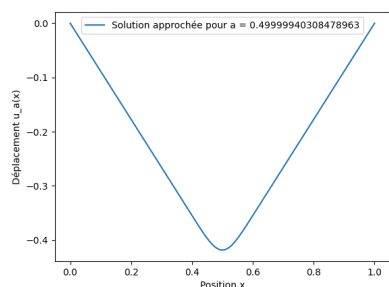
Figure 9: 5.4

6 Implémentaion avec la méthode des éléments finis

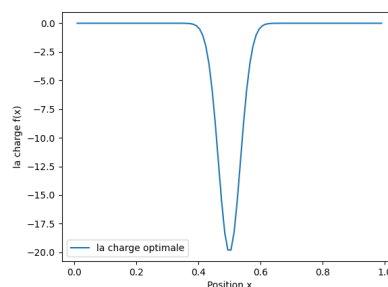
Dans le fichier Elements-finis.py on retrouve l'implémentation de la méthode des éléments finis à l'ordre 1 et 2 pour résoudre les systèmes linéaires (16) et (20). Ensuite deux algorithmes quasi-identiques à la partie différences finies dont le premier permet de calculer le risque de rupture et son gradient. Le deuxième permet de minimiser le risque de rupture par la méthode du gradient à pas constant. Les résultats trouvés sont très proches de ceux des différences finies.

6.1 $k(x)=1$

La courbe semble identique mais nous verrons plus loin que les deux méthodes ne donnent pas exactement les mêmes résultats.



(a) le déplacement

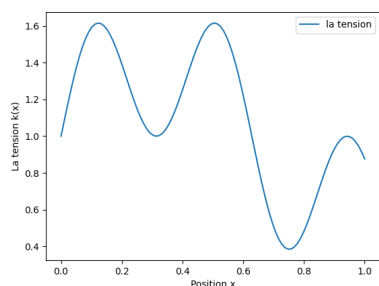


(b) La position optimale de la charge

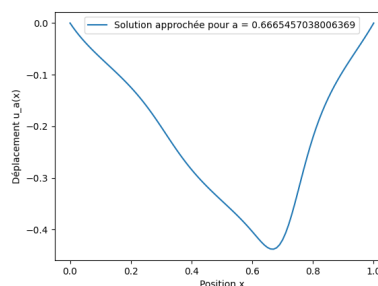
Figure 10: Eléments finis

Les autres raideurs donnent des résultats très similaires également:

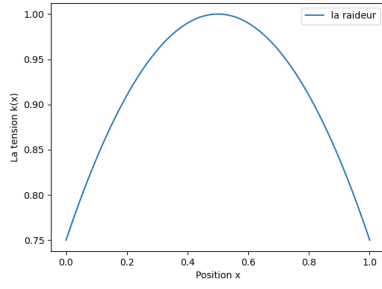
6.2 k non constante



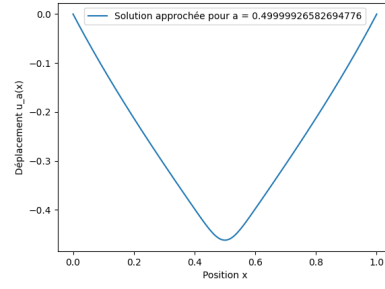
(a) la raideur



(b) le déplacement

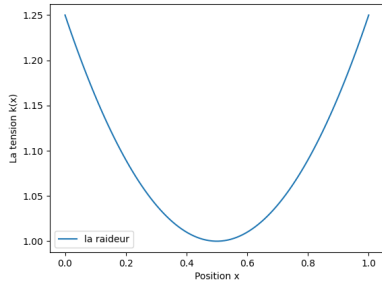


(a) la raideur

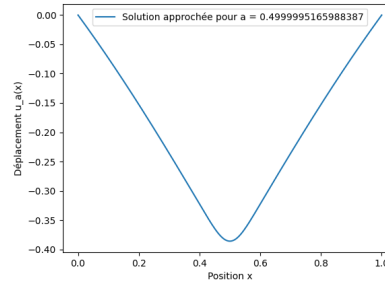


(b) le déplacement

Figure 12: $k(x) = 1 - (x - 0.5)^2$

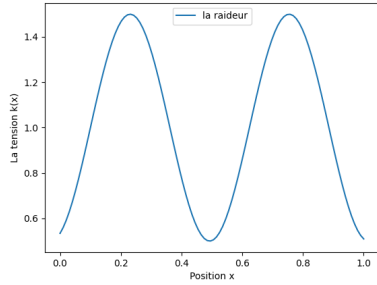


(a) la raideur

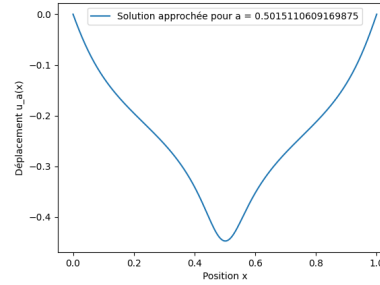


(b) le déplacement

Figure 13: $k(x) = 1 + (x - 0.5)^2$



(a) la raideur



(b) le déplacement

Figure 14: $k(x) = 0.5\sin(12(x - 0.1)) + 1$

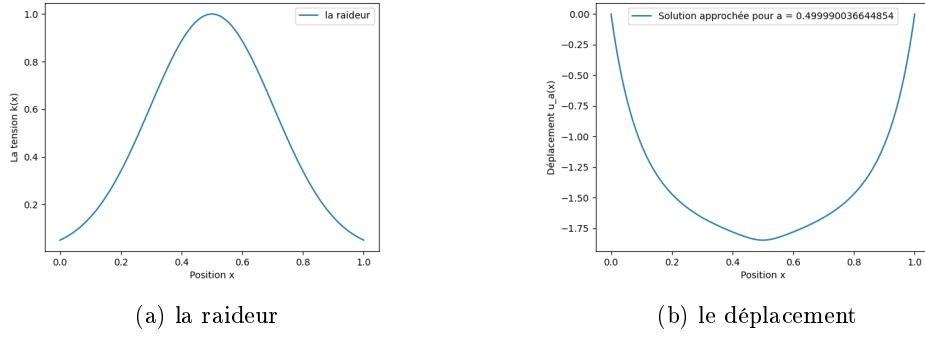


Figure 15: $k(x) = \exp(-12(x - 0.5)^2)$

	k(x)	1	$1-(x-0.5)^2$	$1+(x-0.5)^2$	$0.5\sin(12(x-0.1))+1$	$\exp(-12(x-0.5)^2)$	$1+0.8\sin(10x)\cos(5x)$
DF	centre charge	0.499999	0.499999	0.499999	0.500253	0.499997	0.666677
	Risque rupture	0.785398	0.785398	0.785398	0.785398	0.785398	0.7853981
	iterations	47	57	40	13	353	32
	temps de calcul	0.013244	0.014352	0.008785	0.003225	0.078349	0.010867
EF	centre charge	0.499999	0.499999	0.499999	0.500234	0.499997	0.666545
	Risque rupture	0.801184	0.80108	0.801247	0.800886	0.800242	0.800714
	iterations	46	56	39	13	347	32
	temps de calcul (s)	0.418034	0.494751	0.324465	0.115156	2.89721	0.274322
erreur	norme sup	0.328485	0.349846	0.311023	0.3149079	0.801416	0.437366
	Moindres Carrés	3.394167	4.019448	2.93654	2.63712	32.58507	6.528858
DF-EF /DF	delta_a	0	0	0	3.798078E-05	0	0.000198
	delta_R	0.020099	0.019967	0.020180	0.019720	0.018900	0.019501

Figure 16: Tableau de comparaison

7 Comparaison des deux méthodes

Les valeurs du tableau(Figure 16) sont obtenues pour 101 points de maillage, un pas de 0.04 (sauf pour la fonction $\exp(-12(x - 0.5)^2)$ ou c'est 0.08), une tolérance de 10^6 dans la méthode du gradient à pas constant, une position initiale à 0.4.

La méthode des éléments finis est plus lente. Les calculs sont environ 30 fois plus longs. Ceci est probablement dû à la façon dont le décalage dans la fonction p (le poids) est implémenter pour la méthode des éléments finis. En effet, on redéfinie la fonction à chaque itération.

La position du centre de la charge est presque identique pour toute les raideurs.

L'erreur relative du risque de rupture est d'environ 2%.

Le nombre d'itérations nécessaires est légèrement inférieur pour la méthode des éléments finis (−1 itération) sauf pour la fonction $\exp(-12(x - 0.5)^2)$ où il y a 6 itération de moins.

Malgré que les courbes sont très similaires, les valeurs ne sont pas égales (cf Figure 16 erreur).

References

- [1] Sujet oral d'agrégation en modélisation session 2014 option B
- [2] Code des TP d'optimisation partie éléments finis, S. Minjeaud