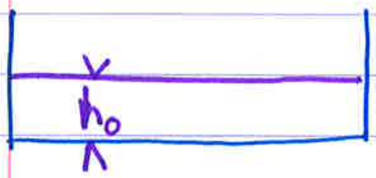
Correction Projet/TD du 30/12

Equation d'onde.

A contexte physique.

On s'intéresse aux oscillations d'une surface libre d'un liquide dans un réservoir.



Au repos la hauteur d'eau est notée h_0.

La répartition de la pression est

$$P_0 = P_0 + \rho g (h_0 - z)$$

si on perturbe la surface (avec une pierre)

la surface oscille!

$\rightarrow$ les equations $\Rightarrow$ principe de bilan...

En notant $\vec{u} = [u(x,y,t), v(x,y,t)]$

la vitesse moyenne (suivant z) et ρ

Il vient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta h + h_0 \frac{\partial}{\partial x} u + h_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (i)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\,\frac{\partial \delta h}{\partial x} = 0 \qquad (ii)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\,\frac{\partial \delta h}{\partial y} = 0 \qquad (iii)$$

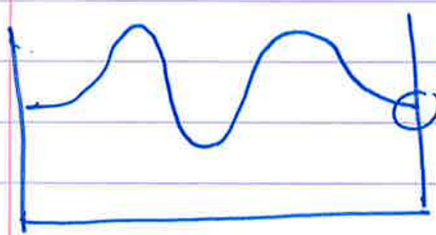
En dérivant (i) par rapport à t.

et (ii) // à x et (iii) // y. on a.

$$\frac{\partial^2}{\partial t}\,\delta h - g h_0 \left(\frac{\partial^2 \delta h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta h}{\partial y^2} \right) = 0.$$

* La condition aux limites.

Sur la frontière du réservoir la vitesse est nulle !



$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. elle se déduit de ii et iii

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + g\, \nabla \delta h \right) \cdot \vec{n} = 0.$$

B. Méthodes numériques.

On considère un domaine circulaire Ω de rayon $r=1$.

le pb s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c_0^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

$(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ en } r=1.$$

$$u(t=0) = w \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = 0.$$

Schéma explicite.

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^{n} + u_{ij}^{n-1}\right) = c_0^2\,\Delta u_{ij}^{n}$$

$$= c_0^2\left[\frac{1}{\Delta r^2}\left(u_{i-1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i+1,j}^n\right) + \frac{1}{r_i}\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta \theta^2}\right]$$