Quelques Éléments en Mécanique du pt.

0. Introduction.

▷ Mécanique du point → objets soumis à un champ de force
⇒ détermine sa trajectoire

▷ Outils de base PFD :

description cinématique et cinétique.

\+ description.

1. Le principe Fondamental de la dynamique.

Définition.

Dans un référentiel galiléen, l'accélération du centre d'inertie d'un système de masse m constante est proportionnelle à la résultante.

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

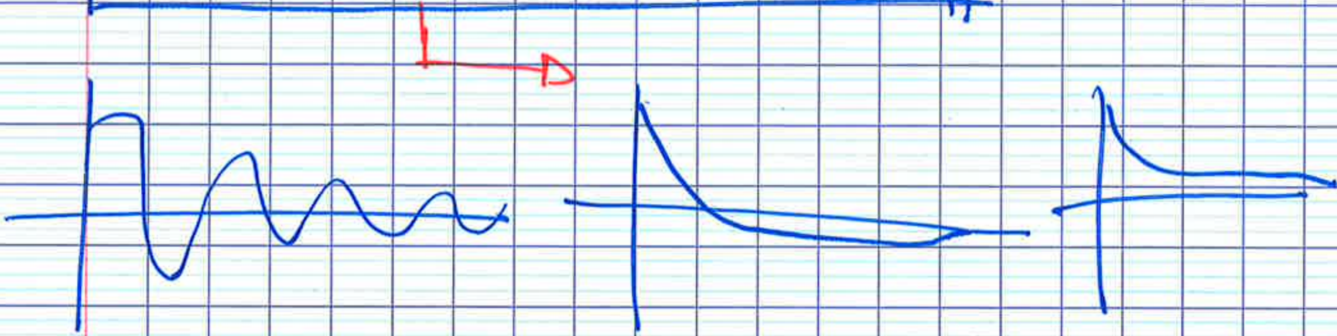
$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. A et φ dépend des conditions initiales !

On tiendra parfois compte de frottements dits visqueux. i.e.

$$\vec{F}_v = -\alpha \vec{v}.$$

On dissipe de l'énergie.

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

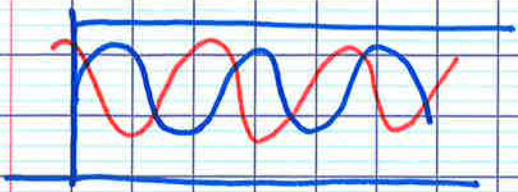


2. Le point de vue énergétique.

On considère ci-dessous un système matériel composé de N masses m_k.

(x_k, y_k, z_k) pour $1 \le k \le N$.

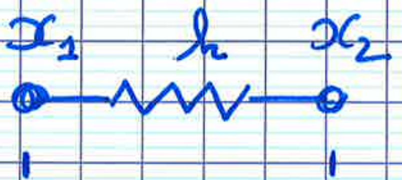
* Un système est dit conservatif lorsque toutes les forces appliquées dérivent d'un potentiel.

* 

~~d'un point de vue~~

En pratique cela se traduit par la conservation de l'énergie mécanique.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_c + E_M\right) = 0}$$



$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

$E_p =$

Solution oscillateur harmonique.

Pour un système à un DDL masse/Ressort.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad (EQ\ 1)$$

on calcule les VP ~~et~~ de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M$.

$$M' = M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

où $|M'| = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{+-} = \pm i$

Pour $\lambda = i$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

$$-iu + v = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = -i$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ui + v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

$$P = \cancel{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$\cancel{P^{-1} = \frac{1}{2}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & i \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & i \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & \cancel{1}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{array}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & i/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}}_{P}.$$

la solution de EQ 1 est :

$$\frac{d}{dt} X = + P^{-1} \Lambda P^{-1} X$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{P^{-1}X}_{Z} = \Lambda \underbrace{P^{-1}X}_{Z} \qquad \dot{Z} = \Lambda Z$$

$$Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$P^{-1} X = Z = e^{\Lambda t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$X = P Z = P e^{\Lambda t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ i e^{it} & -i e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ e^{it+\pi/2} & e^{-it-\pi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a e^{it} + b e^{-it} \right)$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a e^{it+\pi/2} + b e^{-(it+\pi/2)} \right)$$

On impose $q(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{(a-b)}_{= -Bi} \in \mathbb{R} i$

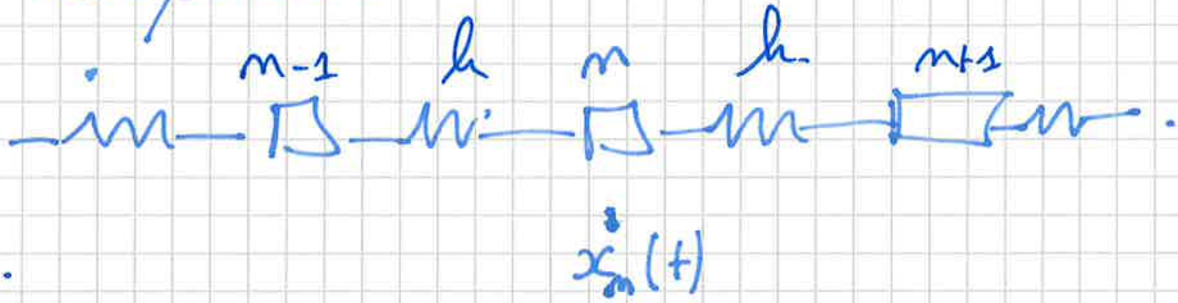
$$\begin{cases} q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(a+b) \cos t + (a-b) \sin(t) \right] \\ p(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(a+b) \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + (a-b) \sin\left(t + \pi/2\right) \right] \end{cases}$$

~~a+b ∈~~

$$\boxed{\begin{aligned} q(t) &= c \cos(t + \varphi) \\ p(t) &= c \cos(t + \varphi + \pi/2) \end{aligned}}$$

Chaine d'oscillateurs.

Mise en equation



PFD.

$$\ddot{x}_n = \frac{1}{m}\left[-k\,(x_n - x_{n-1}) - k\,(x_n - x_{n+1})\right]$$

$$\ddot{x}_n = \omega_0^2\left(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}\right).$$

$\forall\, n \in (2, N-1)$

pour le bord on suppose les bords fixes.

$$\boxed{x_0 = x_{N+1} = 0}$$

Une formulation est :

$$\ddot{X} = -\,\omega_0^2\, V\, X\,.$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Onpose $q_i = x_i$ et $p_i = \dot{x}_i$ (2)

· Le système est conservatif !

donc conservation de l'énergie mécanique.

$$E_m = \frac{1}{2} m \sum_i p_i^2 + \frac{1}{2} k \sum_{i=2}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} x_N^2$$

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{i=2}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_N^2 .$$

$$H(q,p) = \underbrace{\frac{1}{2} p^T p}_{\text{fonction que de } p} + \frac{\omega_0^2}{2} \underbrace{q^t V q}_{\text{fonction que de } q} .$$

l'Hamiltonien est séparable !

Problèmes Hamiltoniens.

Il existe de nombreux problèmes ~~dont~~ conduisant à un système différentiel de la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p H(q,p) \\ -\nabla_q H(q,p) \end{pmatrix}$$

on dit que $H(q,p) \in \mathbb{R}$ avec $q,p \in \mathbb{R}^N$ est.
l'Hamiltonien du système.

Les notations sont :

$$\nabla_p H(q,p) = \left(\partial_{p_1} H, \ldots\ldots \partial_{p_N} H \right) \in \mathbb{R}^N.$$

$$\nabla_q H(q,p) = \left(\partial_{q_1} H, \ldots\ldots, \partial_{q_N} H \right) \in \mathbb{R}^N.$$

On va supposer que H est C^2 sur $U \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ donc d'après Cauchy-Lipschitz on a existence et unicité locale.

* Montrer que le Hamiltonien est conservé.

$$N=1 \Rightarrow \frac{d}{dt} H(q,p) = \frac{d}{dt} q\, \partial_q H + \frac{d}{dt} p\, \partial_p H$$

$$= \cancel{\frac{d}{dt} q}\; \partial_p H\, \partial_q H + -\partial_q H\, \partial_p H$$

$$= 0$$

soit $p = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ et $q\,(x_1, x_2)$.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t)/m \\ \nabla_q \phi(q(t)) \end{pmatrix}$$

il vient donc naturellement :

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{p^t p}{m} + \phi(q).}$$

ceci est l'energie mécanique par unité de masse.

Conservation discrète de l'énergie.

①

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Euler Explicite

$$\begin{pmatrix} X^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$x^{n+1} = x^n + \Delta t v^n.$

$v^{n+1} = v^n - \Delta t x^n.$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t & 1 \end{pmatrix}$$

$(1-\lambda)^2 + h^2 = 0$

$(1-\lambda-ih)(1-\lambda+ih) = 0$

$\lambda = 1-ih \quad \lambda = 1+ih.$

Recherche des v.p.

$$\begin{pmatrix} X^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1+ih & 0 \\ 0 & 1-ih \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ih & 0 \\ 0 & 1-ih \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$\rho(J) = \sqrt{1+h^2} > 1$ diverge.

Euler implicite

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} - \Delta t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ v^{n} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\phi^1} \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{n}$$

~~c'est bon~~

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{n} = J \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{n}$$

$$\text{or } \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1+ih & 0 \\ 0 & 1-ih \end{pmatrix} P \cancel{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{n}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{1+ih} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-ih} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc $\rho(J) = \max\left\{ \left|\frac{1}{1+ih}\right|, \left|1/1-ih\right| \right\}$

$\lambda_1 = \frac{1-ih}{1+h^2}$ $\quad |\lambda_1| = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}$ $\quad \forall h < 1.$

$\lambda_2 = \frac{1+ih}{1+h^2}$ $\quad |\lambda_2| = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} < 1$

donc le schéma est A-stable.

Euler explicite   Énergie.

$\cancel{x_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 =}$

$$X^{n+1} = (I + hJ)\,X^n.$$

$$X^{n+1}\cdot X^{n+1} = \left((I+hJ)X^n\right)\cdot\left((I+hJ)X^n\right)$$

$$= (X^n + hJX^n)\cdot(X^n + hJX^n).$$

$$= X^n\cdot X^n + 2h\,JX^n\cdot X^n$$
$$+ h^2\,JX^n\cdot J\cdot X^n.$$

or $\boxed{JX^n\cdot X^n = 0}$ $\forall X\in\mathbb{R}^2.$

et $JX\cdot JX = X\cdot X$ $\forall X\in\mathbb{R}.$

d'où $X^{n+1}\cdot X^{n+1} = (1+h^2)\,X^n\cdot X^n.$

Euler implicite.

$$(I - hJ)\,X^{n+1} = X^n.$$

$$(I-hJ)X^{n+1}\cdot(I-hJ)X^{n+1} = X^n\cdot X^n.$$

$$X^{n+1}\cdot X^{n+1} + h^2\,J X^{n+1}\,JX^{n+1} = X^n\cdot X^n.$$

$$(1+h^2)\,X^{n+1}\,X^{n+1} = X^n\cdot X^n.$$

Pour le Crank Nicholson.

$$\left(I \pm \frac{h}{2} J\right) X^{n+1} = \left(I + \frac{h}{2} J\right) X^{n}.$$

$$X^{n+1} \cdot X^{n+1} \pm 2 \frac{h}{2} J X^{n+1} X^{n+1} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 X^{n+1} \cdot X^{n+1}.$$

$$= X^{n} \cdot X^{n} + 2 \frac{h}{2} J X^{n} \cdot X^{n} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 X^{n} \cdot X^{n}.$$

$$\left(1 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) X^{n+1} \cdot X^{n+1} = \left(1 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) X^{n} \cdot X^{n}.$$

$$\boxed{X^{n+1} \cdot X^{n+1} = X^{n} \cdot X^{n}.}$$

d'où Euler explicit $\nearrow$.

Euler Implicite $\searrow$

Avec CN on Em constant