Activité ailette

Une ailette est un dispositif pour faciliter les échanges de chaleur d'un domaine à un autre. On l'utilise pour réguler les flux de chaleur dans un bloc solide par exemple.

La figure de cette slide représente le champ de température dans l'ailette lorsque celle-ci est immergée dans un fluide plus froid. Ce problème est un problème introductif. Il va vous permettre de découvrir la notion de conservation appliquée aux transferts thermiques. Cet outil est simple mais suffisament puissant pour retrouver un ensemble de modéles qui conduisent à des EDP.

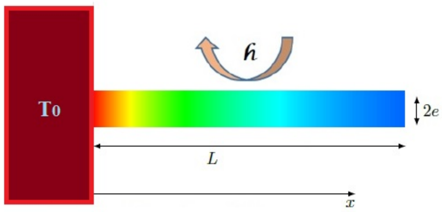

Figure: Champ de température d'une ailette.

Le travail à réaliser est présenté en cours. des notes manuscrites seront disponibles à la correction.

Plan

Bilan pour un champ scalaire I

En mécanique des milieux continus, l'équation d'évolution d'une quantité physique $W(t, x, y, z)$ par unité de masse (température, concentration, énergie ...) traduit un **principe de conservation**, et donc un bilan effectué sur un petit élément de volume $dV = dxdydz$ fixe par rapport à l'observateur (formulation eulérienne).

En notant ρ, la masse volumique du milieu, la quantité de W dans l'élément dV est $dm = \rho W dV$. La variation temporelle de W est donc égale à la somme des flux de W à travers des face élémentaires dS à laquelle on ajoute les termes sources volumiques T_s. L'équation de bilan peut s'écrire sous forme générique:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho W)dV}_{\text{variation temporelle}} = \sum_{\text{facette}} \underbrace{(\phi_c dS + \phi_d dS)}_{\text{flux}} + \underbrace{T_s dV}_{\text{source}}$$

Cette équation contient:

1. un terme instationnaire $\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho W)$,
2. des termes de **flux surfaciques** ϕ, traduisant un bilan à travers les surfaces dS du

Bilan pour un champ scalaire II

volume dV

3. des termes **sources volumiques** T_s.

Pour les flux, on distingue des flux par diffusion moléculaire ϕ_d, qui sont proportionnels au gradient de W dans la direction normale à la facette dS:

$$\phi_d = -\lambda \nabla W \text{ loi de Fourier,} \tag{1}$$

et des flux de convection ϕ_c, qui traduisent le transport de W par le milieu et sont proportionnels à la vitesse $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ dans la direction normale à la facette dS:

$$\phi_c = \rho W \, \overrightarrow{\mathbf{V}}.\overrightarrow{n} \tag{2}$$

En considérant un milieu homogène suivant l'axe z , avec un champ de vitesse bidimensionnel $\overrightarrow{V} = (v_1, v_2)$ (figure ci-dessous)

Bilan pour un champ scalaire III

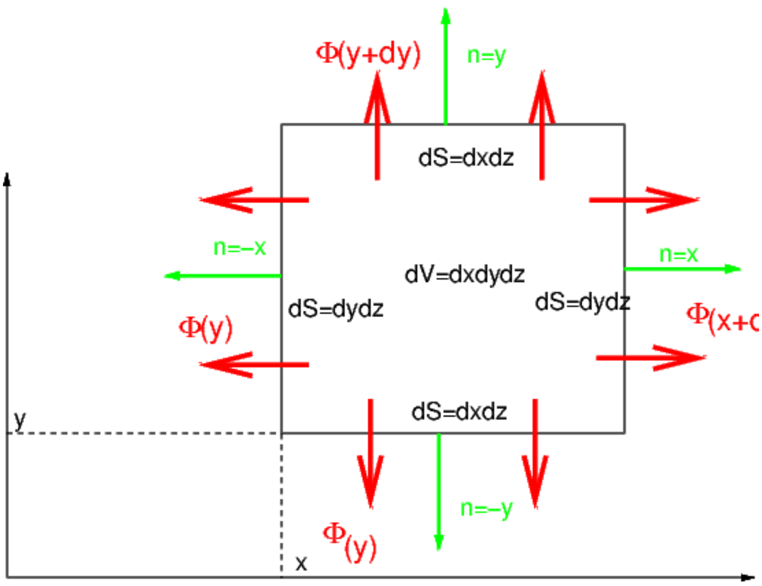

Figure: Volume de contrôle, ou volume élémentaire.

Bilan pour un champ scalaire IV

le bilan précédent s'écrit:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho W}{\partial t} dxdydz = \quad & \left(\left(\lambda \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\lambda \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x} \right) dydz + \left(- (v_1 \rho W)_{x+dx} + (v_1 \rho W)_x \right) dydz \\
+ \quad & \left(\left(\lambda \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\lambda \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{y} \right) dxdz + \left(- (v_2 \rho W)_{y+dy} + (v_2 \rho W)_y \right) dxdz \\
+ \quad & T_s(W) dxdydz
\end{aligned}
$$

En effectuant les développements limités des termes en $x + dx$ et $y + dy$ et un passage à la limite, on obtient l'équation classique de bilan pour un scalaire W:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho W}{\partial t} = \quad & \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial W}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial W}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1 W) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_2 W) + T_s(W) \\
= \quad & div(\lambda \overrightarrow{grad} W) - div(\overrightarrow{\mathbf{V}} \rho W) + T_s(W)
\end{aligned}
$$

Equation de diffusion pure I

$$div(\lambda \overrightarrow{grad} W) = 0$$

l'exemple type est l'équation de la chaleur stationnaire, qui donne la répartition stationnaire de la température dans un solide homogène:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

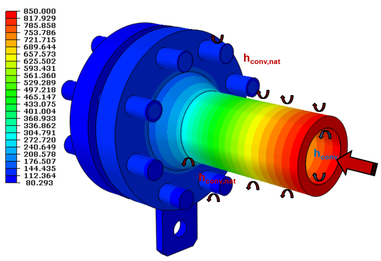

Figure: Champ de température en régime permanent.

Equation de diffusion instationnaire I

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} = div(\lambda \overrightarrow{grad} W)$$

l'exemple type est l'équation de la chaleur instationnaire, qui traduit l'évolution temporelle de la température dans un solide homogène:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T = K(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2})$$

Equation de convection pure I

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} + div(\overrightarrow{\mathbf{V}} \rho W) = 0$$

l'exemple type est l'équation de transport, qui traduit le transport d'un scalaire C par le champ de vitesse d'un fluide incompressible ($\rho = cste$, $div\overrightarrow{\mathbf{V}} = 0$):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overrightarrow{\mathbf{V}}\,\overrightarrow{grad}C = 0$$

Equation de convection/diffusion I

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} + div(\overrightarrow{\mathbf{V}} \rho W) = div(\lambda \overrightarrow{grad} W)$$

l'exemple type est l'équation de convection diffusion de la température dans un fluide incompressible ($\rho = cste$, $div \overrightarrow{\mathbf{V}} = 0$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\mathbf{V}}\, \overrightarrow{grad}\, T = K \Delta T$$

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} + div(\overrightarrow{\mathbf{V}} \rho W) = 0$$

l'exemple type est l'équation de transport, qui traduit le transport d'un scalaire C par le champ de vitesse d'un fluide incompressible ($\rho = cste$, $div \overrightarrow{\mathbf{V}} = 0$):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overrightarrow{\mathbf{V}}\, \overrightarrow{grad} C = 0$$

Equation de convection/diffusion II

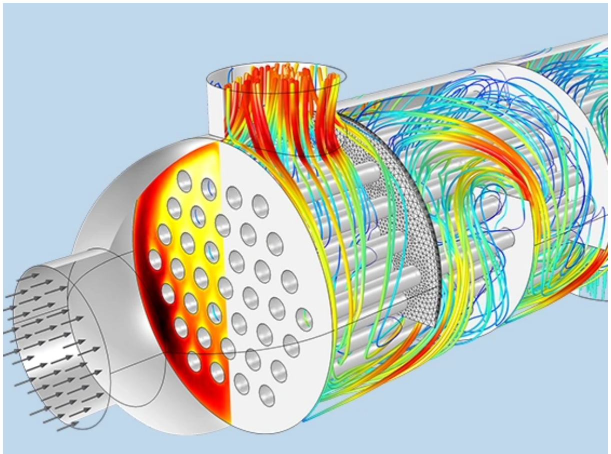

Figure: Champ de température dans un échangeur de chaleur.

En coordonnées cylindriques

Etablir l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques.

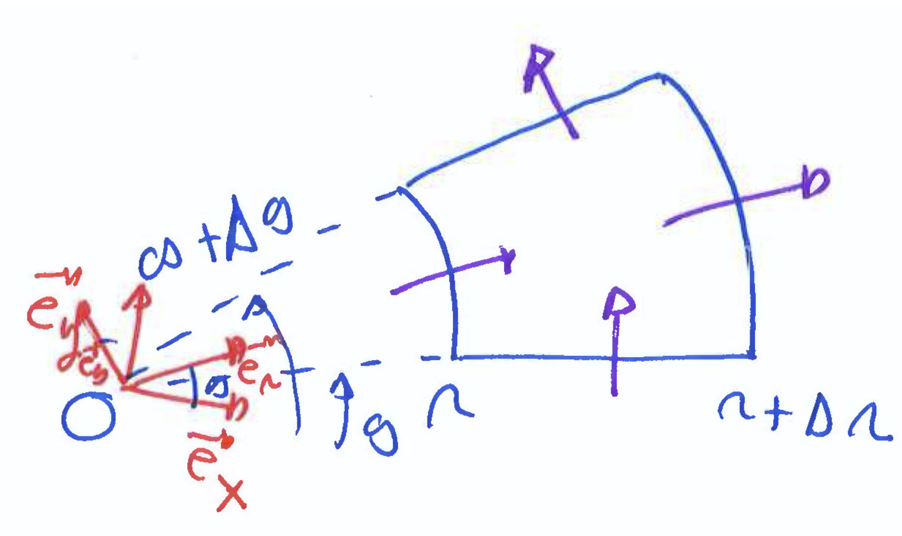

Figure: Volume de contrôle en coordonnées cylindriques.