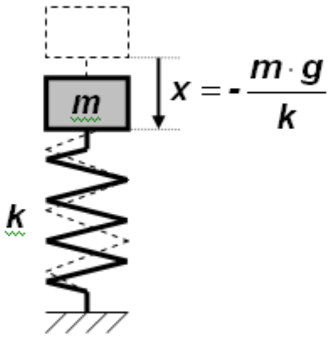
Mécanique du point

Deuxième loi de Newton (Notes manuscrites)
Quelques aspects énergétiques (Notes manuscrites)
Le formalisme de Lagrange & Hamilton (Notes manuscrites)

Equation du mouvement

On s'intéresse à la mise en équations du système *masse/ressort vertical.*



On considére le déplacement vertical d'une masse m soumise à l'action de la gravité et de la force de rappel du ressort.

Montrer que le mouvement de la masse satisfait à l'équation.

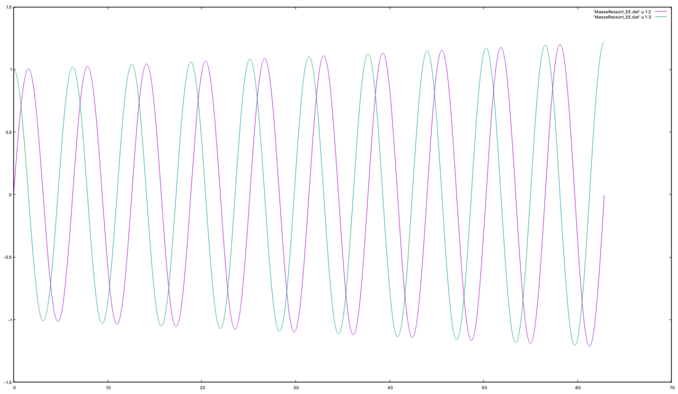
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

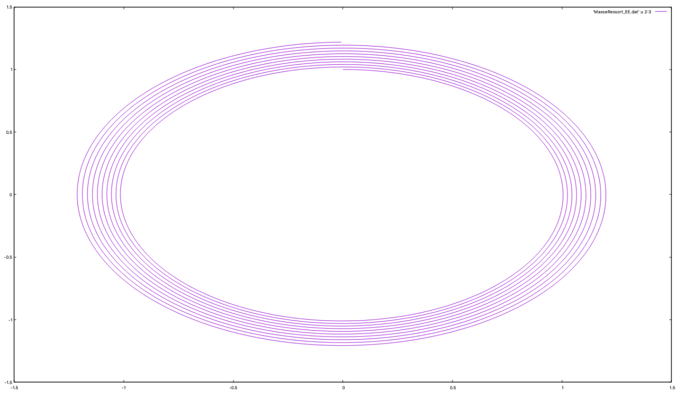
Donner la signification de la variable x et l'expression de ω_0 en fonction des paramétres du modéle.

Résolution numérique Euler explicite

On se propose d'intégrer numériquement cette équation avec la méthode **d'Euler explicite**.

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t f(t^n, x^n)$$

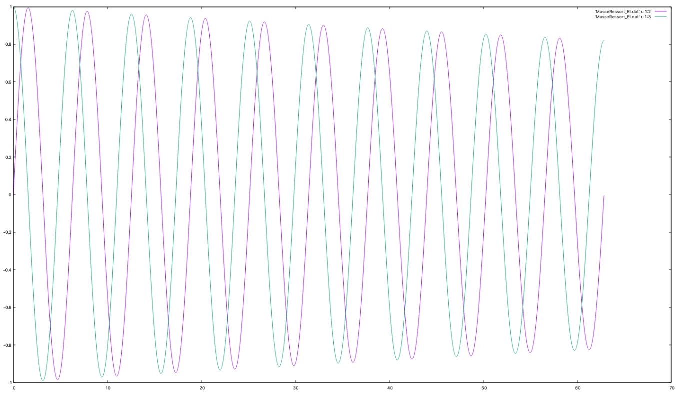


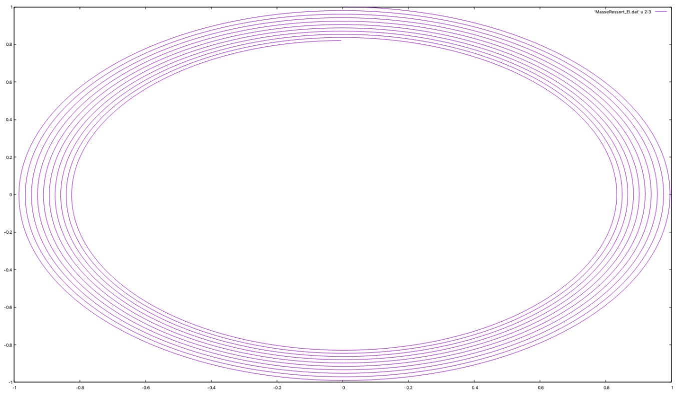


Euler implicite

On se propose d'intégrer numériquement cette équation avec la méthode **d'Euler implicite**.

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t f(t^{n+1}, x^{n+1})$$

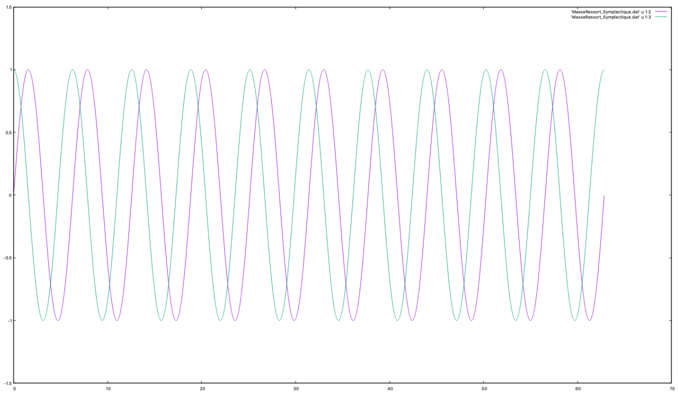


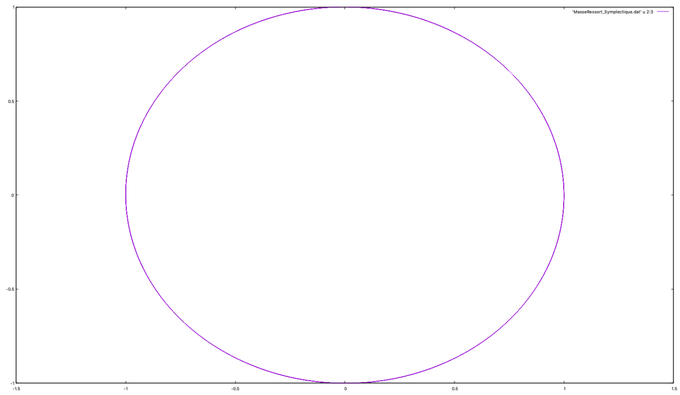


Crank-Nicholson

On se propose d'intégrer numériquement cette équation avec la méthode de **Crank-Nicolson**.

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\Delta t}{2} \left(f(t^n, x^n) + f(t^{n+1}, x^{n+1}) \right)$$





Quelques Commentaires

Quelles observations faites vous sur le comportement de l'énergie mécanique ?
Démontrer ce comportement ?

Système différentiel hamiltonien I

On considère un système dynamique à N_v degrés de libertés. On note q les *coordonnées généralisées* (un vecteur de N_v variables), et p les *variables conjuguées*. L'hamiltonien $H(q,p)$ est une fonction des $2N_v$ variables $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$. Les équations du mouvement de Hamilton s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\nabla_q H(\mathbf{q},\mathbf{p}) \\ -\nabla_p H(\mathbf{q},\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

Pour les systèmes mécaniques conservatifs, l'hamiltonien est séparable en une partie énergie cinétique et une partie énergie potentielle :

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = K(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$$

L'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à une dimension est :

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$$

Système différentiel hamiltonien II

Les équations du mouvement s'écrivent alors (q vitesse, p position):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

dont la solution est :

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \cos(t+\varphi) \\ \cos(t+\varphi+\pi/2) \end{pmatrix}$$

De ce résultat on déduit la conservation de l'Hamiltonien

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(\cos^2(t+\varphi) + \cos^2(t+\varphi) + \pi/2) = 1/2$$

Schémas symplectiques I

La méthode d'Euler A est définie par :

$$q_{n+1} = q_n + h\partial_p H(q_{n+1}, p_n)$$
$$p_{n+1} = p_n - h\partial_q H(q_{n+1}, p_n)$$

Dans le cas d'un système conservatif il vient:

$$q_{n+1} = q_n + h\partial_p K(p_n)$$
$$p_{n+1} = p_n - h\partial_q V(q_{n+1})$$

Ce schéma est consistant d'ordre 1, stable et explicite du fait que le Hamiltonien soit séparable.
La méthode d'Euler B est définie par :

$$q_{n+1} = q_n + h\partial_p H(q_n, p_{n+1})$$
$$p_{n+1} = p_n - h\partial_q H(q_n, p_{n+1})$$

Schémas symplectiques II

pour un sytème conservatif pour lequel Hamiltonien est séparable.

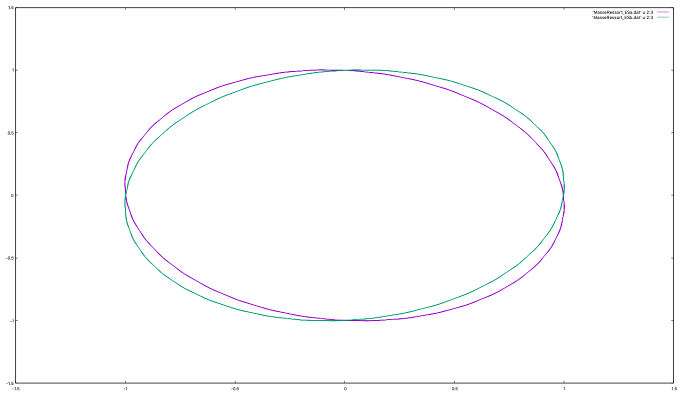
$$q_{n+1} = q_n + h\partial_p K(p_{n+1})$$
$$p_{n+1} = p_n - h\partial_q V(q_n)$$

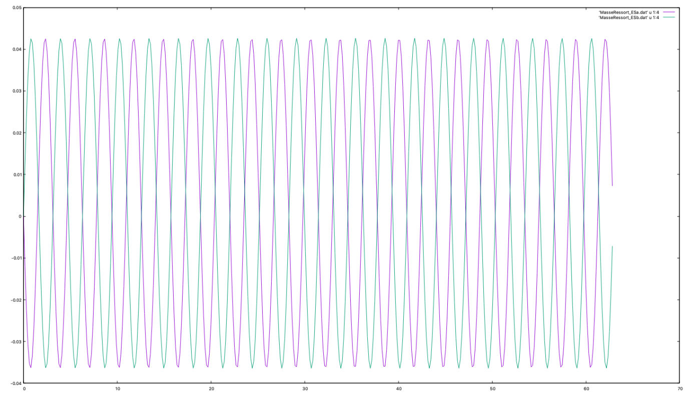
Ce schéma est aussi consitant d'ordre 1 et stable. On notera que l'on met à jour en premier la variable p_{n+1} avant q_{n+1}.

> Ces deux schémas possédent une propriété importante... ils conservent à peu prés l'Hamiltonien tout en étant explicite!

Expérimentations numériques I

Durée simulée $T = 20\pi$ avec un pas de temps $h = 0.05\pi$



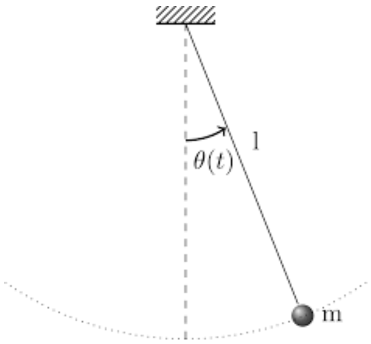


Erreur sur la propriété de conservation de l'Hamiltonien.

N	$E_m - E_m(0)$
400	0.0426
800	0.0204
1600	0.0100

Pendule pesant : à vous de jouer!

On appelle un pendule pesant une masse m suspendue à un fil et en oscillation autour de la position verticale.



L'état du système est caractérisé par l'angle θ. C'est le degrès de liberté.

Pour cet exemple il vous est démandé de réaliser une étude complète:

Equations du mouvement

Simulation numérique Euler Explicite/Implicite

Simulation numérique Crank-Nicholson et sympléctique

Équations du mouvement I

L'équation différentielle du mouvement d'un pendule pesant conservatif est : La vitesse angulaire est définie par $\omega = \dot{\theta}$. On définit un système différentiel du premier ordre pour θ et ω :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\omega_0^2 \sin\theta \end{aligned}$$

L'espace à deux dimensions correspondant à l'angle et à la vitesse angulaire est appelé l'espace des phases. L'énergie mécanique du sytème mécanique :

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos\theta$$

On peut à partir de cette expression définir la fonction Hamiltonien :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= +\partial_\omega H(\theta, \omega) \\ \dot{\omega} &= -\partial_\theta H(\theta, \omega) \end{aligned}$$

Résolution numérique II

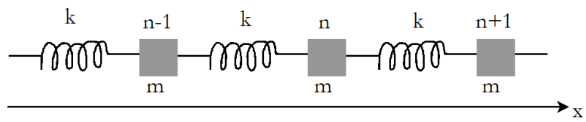
```
rtol,atol = 1e-8,1e-8
y0=[0.8*math.pi,0]
y = scipy.integrate.odeint(equation,y0,t,rtol=rtol,atol=atol)
```

et le traitement des résultats pour l'interprétation :

```
yt = y.transpose()
theta = yt[0]
omega = yt[1]
```

Equations du mouvement I

La chaîne d'oscillateurs est constituée de N points de masse m reliés par des ressorts identiques, de raideur k.



Le déplacement du point $i = 1..N$ par rapport à sa position d'équilibre est noté $x_i(t)$.
Pour un point autre que les bords $1 < k < N$, l'équation du mouvement est :

$$\ddot{x}_i = -\omega_0^2(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$$

avec

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il faut faire attention à spécifier la condition suivante sur les bords $x_0 = x_{N+1} = 0$.

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2(-2x_1 + x_2) \quad , \ddot{x}_N = -\omega_0^2(-2x_N + x_{N-1})$$

Equations du mouvement II

On notera X le vecteur colonne des N déplacements, le système différentiel devient alors:

$$\ddot{X} = -\omega_0^2 V X$$

où V est une matrice carrée (symétrique) définie par :

$$\begin{array}{c} V_{1,1} = 2, V_{1,2} = -1 \\ V_{k,k-1} = -1, V_{k,k} = 2, V_{k,k+1} = -1 \\ V_{N,N-1} = -1, V_{N,N} = 2 \end{array}$$

On définit les moments $\dot{x}_i$ comme les dérivées par rapport au temps des déplacements x_i . L'hamiltonien du système (énergie par unité de masse) s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} H(p,q) & = & \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 \sum_k \sum_l q_k v_{k,l} q_l \\ & = & \frac{1}{2} p^T p + \frac{1}{2}\frac{1}{2} q^T V q \end{array}$$

Les équations du mouvement s'écrivent:

$$\begin{array}{rcl} \dot{q} & = & +\nabla_p H(p,q) \\ \dot{p} & = & -\nabla_q H(p,q) \end{array}$$