Correction projet/TD du 30/12

On souhaite à présent résoudre le pb instationnaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f$$

avec en plus des conditions ~~init~~ limites.
les conditions ~~de bords~~ initiales.

CL : u imposé sur $\partial\Omega = \Gamma$.

CI : $u(0,x,y) = g(x,y)$

~~Ex~~

* Rappels $\Rightarrow$

Euler explicite	$O(\Delta t)$	C.S.
Euler implicite	$O(\Delta t)$	I.S.
Cranck Nicol	$O(\Delta t^2)$	I.S.

S ≠ stable

C/I ≠ conditionnellement stable.

Incon———— stable.

Ces résultats se déduisent de Von Neumann.

Euler Explicite. * facile !.

Le schéma est :

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + \Delta t \nu \left(\delta_x^2 u^n + \delta_y^2 u^n\right)_{ij}$$

$$\begin{cases} \delta_x^2 u_{ij} = \dfrac{1}{h_x^2}\left(u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right). \\ \delta_y^2 u_{ij} = \dfrac{1}{h_y^2}\left(u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}\right). \end{cases}$$

On conserve la disposition entrelacée !
staggered.

On traite alors le problème de manière identique au TD de la semaine dernière !.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(u_{-1,j} + u_{0,j}\right) = u_j^{\ell}}_{\text{CL sur le bord gauche.}}$$

Euler implicite.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = S$$

$$\delta_t u^{n+1} - \nu \underbrace{\left(\delta_x^2 u^{n+1} + \delta_y^2 u^{n+1} \right)}_{L(u)_{ij}^{n+1}} = s$$

$$L u_{ij}^{n+1} \# \frac{1}{h_x^2} \left(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1} \right) + \frac{1}{h_y^2} \left(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1} \right)$$

~~suppos~~ s'il n'y a pas de cellule voisine de la ~~condi~~ frontière ~~alors on cas~~ cela ne pose pas de problème.

Sinon il faut tenir compte de CL.

Exemple : on formule pour $(i,j) = (0,0)$.

$$L u_{ij}^{n+1} \# \frac{1}{h_x^2} \left(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + 2u_j^{a} - u_{ij}^{n+1} \right)$$

$$+ \frac{1}{h_y^2} \left(u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + 2u_i^{b} - u_{ij}^{n+1} \right).$$

④

$$Lu_{ij}^{n+1} = \frac{1}{h_x^2}\left(u_{i+1,j}^{n+1} - 3u_{ij}^{n+1}\right) + \frac{2u_j^f}{h_x^2}$$

$$+ \frac{1}{h_y^2}\left(u_{i,j+1}^{n+1} - 3u_{ij}^{n+1}\right) + \frac{2u_i^b}{h_{\cancel{x}}^2}$$

on a 2 contributions ⟹ une implicite.

⟹ au second membre car connues.

u_j^f et u_i^b

Le schéma est donc.

$$Iu^{n+1} - \Delta t\, \nu\, \tilde{L}u_{ij}^{n+1} = \Delta t\, S_{ij}.$$

$$- \Delta t\, \nu\, Cl^{n+1}$$

On note $\tilde{L}u_{ij}^{n+1}$ le système linéaire modifié par les cl.

Les θ schéma !

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \theta L_{ij}^{n+1} + (1-\theta) L_{ij}^{n} = s_{ij}$$

$$u_{ij}^{n+1} - \Delta t\, \theta \nu L_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + \Delta t (1-\theta) \nu L_{ij}^{n} + \Delta t\, s_{ij}$$

En tenant comptes des CL.

$$u_{ij}^{n+1} - \Delta t \theta \nu \tilde{L}_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + \Delta t (1-\theta) \nu \tilde{L}_{ij}^{n} + \Delta t \theta \nu\, Cl_{ij}^{n+1} + \Delta t (1-\theta) \nu\, Cl_{ij}^{n}$$

mise en oeuvre :

le script ailette_2d_staggered_tim.py implimente le θ schéma.

$\boxed{\text{Q. Comment démontrer que cette implémentat° est correcte ?}}$

1- Rappeler les propriétés de stabilité du θ schema pour $\theta = 0, \frac{1}{2}$ et 1.

~~2- Pour $\theta = 1$ proposer deux solutions analytiques pour vérifier l'erreur de troncature. (le cas le plus général possible).~~

3- illustrer la notion de stabilité pour $\theta = 0$. (Euler explicite).

4- utiliser sympy pour verifier la bonne implémentat° du code.

4- Remplacer la condition aux limite de bord droite par du Neumann.

~~Éléments de correction.~~

~~Q1~~

R1

Le θ schéma est d'ordre 2 pour $\theta = 1/2$

1 sinon. .

$\theta = 0$ # euler explicite CS

$$\Delta t \propto \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\nu}$$

$\theta = 1/2$ et $\theta = 1$ sont stables.

R2

On va utiliser la méthode des solutions manufacturées... .

soit $u(x,y,t)$ une solution que l'on se donne. par exemple

$$u(x,y,t) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

alors $\partial_t u - \nu(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u)$

$$= 0 - \nu\left(-(2\pi)^2 \times 2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)\right)$$

$$= \nu (2\pi)^2 \times 2 \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y).$$

$$= f(x,y)$$

donc si on pose

$$f(t,x,y) = \nu 8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

alors.

$$u(t,x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

alors u est solution de :

$$\partial_t u - \nu\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) = f$$

avec u fixé sur le bord $\partial\Omega$.

Donc en pratique on va utiliser du calcul symbolique pour calculer f connaissant u.

→ Voir script calcul solution.

Je donne le code pour dépendre en x, y puis aux étudiants de gérer le temps !.

R3

Pour remplacer une condition limite de bord ~~on utili~~ Neuman.
on écrit la CL de Neuman :

$$\partial_x u = g.$$

$$\frac{u_{n_x} - u_{n_x - 1}}{h_x} = g.$$

Virtuelle !

$$u_{n_x} = g h_x + u_{n_x - 1}. \quad (1)$$

~~On~~ lorsque le noeud de frontière intervient, ~~on~~ il suffit de substituer la cellule phantôme par la relation (1).

Il faut penser à utiliser les mms pour debugger.