Partie 1

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A - (B+1)X + X^2 Y \\ BX - X^2 Y \end{pmatrix} = F(X,Y). \quad PC$$

F est $C^1$

On cherche $(X_c, Y_c)$ tq $\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix}' = 0$.

$$\begin{cases} A - (B+1) X_c + X_c^2 Y_c = 0 & (i) \\ B X_c - X_c^2 Y_c = 0. & (ii) \end{cases}$$

$(i) + (ii) \Rightarrow A - X_c = 0$

$X_c = A$.

$(ii) \Rightarrow Y_c = B/A$

Le point critique vérifiant $(X_c, Y_c)' = 0$ est

$$U_c = \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B/A \end{pmatrix}$$

On cherche à linéariser autour de ce pt.

(1) $F(U) = F(U_c) + \nabla F|_{U_c} (U - U_c) + O(\|U - U_c\|^2)$

mail mail

mail

Pour rappel :

$$f_x(x,y) = f_x(x_0,y_0) + (x-x_0)\,\partial_x f_0 + o((x-x_0)^2)$$
$$+ (y-y_0)\,\partial_y f_0 + o((y-y_0)^2)$$

$$f_y(x,y) = f_y(x_0,y_0) + (x-x_0)\,\partial_x f_y(x_0,y_0)$$
$$+ (y-y_0)\,\partial_y f_y(x_0,y_0) + o(\dots)$$

$$\begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \nabla f \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\dots).$$

En utilisant (1) pour (PC) il vient :

$$U' = F(U) = F(U_c) + \nabla F_{U_c}\,(U-U_c) + O(\|U-U_c\|^2)$$

or $F(U_c) = 0$ par définition.

il vient donc à l'ordre 2. (c'est un modèle linéaire).

$$U' = \nabla F_{U_c}(U-U_c)$$

$$(U-U_c)' = \nabla F_{U_c}(U-U_c)$$

En posant $\delta U = U - U_c$ on obtient :

$$\delta U' = \nabla F_{U_c}\,\delta U$$

$\delta U$ s'interprète comme l'écart à la position d'équilibre $U_c$.

Notons $J = \nabla F_{U_c}$ si $|J| \neq 0 \Rightarrow J = P \Lambda P^{-1}$

où $\Lambda$ est la matrice diagonale des valeurs propres.

$$\delta U' = (P \Lambda P^{-1}) \delta U$$

$$P^{-1} \delta U' = \Lambda P^{-1} \delta U$$

Posons ~~Z~~ $Z = P^{-1} \delta U$ alors

$$P^{-1} \delta U' = \Lambda P^{-1} \delta U \Leftrightarrow Z' = \Lambda Z$$

ceci la formulat° dans l'espace des vecteurs propres permet de découpler les equations différ.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

d'où $\delta U = PZ = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

$$\delta U = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$$

où $V_1$ et $V_2$ sont les vecteurs propres de $P$.

$$P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$$

Quels renseignements tirent donc de tout ceci ?

$$\text{EDO - Non linéaire} \xrightarrow{} \simeq \text{EDO linéaire}$$

Taylor si $\|U - U_c\| \ll 1$

~~donc~~ On on peut analyser une EDO linéaire (premier au TD 1)

ici $\Rightarrow$ si $\lambda_1$ ~~et~~ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $> 0$ instable

si $\lambda_1$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $< 0$ stable

si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ~~et~~ + $Re\,\lambda_1$ et $Re\,\lambda_2 < 0$ stable oscillant

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $Re\,\lambda_1$ et $Re\,\lambda_2 > 0$ instable oscillant.

Pour nous convaincre considérer $\boxed{z' = \lambda z}$ + $z_0 = 1$.

Application

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2XY - (B+1) & X^2 \\ B - 2XY & -X^2 \end{pmatrix}^t.$$

Évaluée au point $U_c = (A, B/A)$

$$J = \nabla F_{U_c} = \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}$$

$|J| = A^2 \Rightarrow \boxed{A \neq 0}$

supposons $|A| \neq 0$ alors calcul Val. Propre.

$$(J - \lambda I)V = 0$$

$$\begin{vmatrix} (B-1)-\lambda & A^2 \\ -B & -A^2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(B-1-\lambda)(-A^2-\lambda) + A^2B = 0$$

$$\cancel{-A^2B} + A^2 + \lambda A^2 - \lambda B + \lambda + \lambda^2 + \cancel{A^2B} = 0$$

$$\lambda^2 + (A^2 - B + 1)\lambda + A^2 = 0$$

$$\lambda^2 + (A^2 - B + 1)\lambda + A^2 = 0.$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}(A^2 - B + 1)\right)^2 + A^2 - \frac{1}{4}(A^2 - B + 1)^2 = 0$$

si $\boxed{0 > A^2 - \frac{1}{4}(A^2 - B + 1)^2}$ deux racines $\in \mathbb{R}$.

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2}(A^2 - B + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(A^2 - B + 1)^2 - A^2}$$

Remarque $\lambda_+ + \lambda_- = -(A^2 - B + 1)$

$$\lambda_+\lambda_- = \frac{1}{4}(A^2 - B + 1)^2 - \left(\frac{1}{4}(A^2 - B + 1)^2 - A^2\right)$$

$$\lambda_+\lambda_- = A^2 > 0.$$

donc si $\lambda_- \lambda_+ > 0$ $\lambda_-$ et $\lambda_+$ sont de m̂ signe.

de plus $\lambda_-$ et $\lambda_+ \in \mathbb{R}$ car $-A^2 + \frac{1}{4}(A^2 - B + 1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow$ dans ce cas

on a $\lambda_+ + \lambda_- = -1 - A^2 + B$

d'où $\lambda_+ + \lambda_- < 0$ si $-1 - A^2 + B < 0$

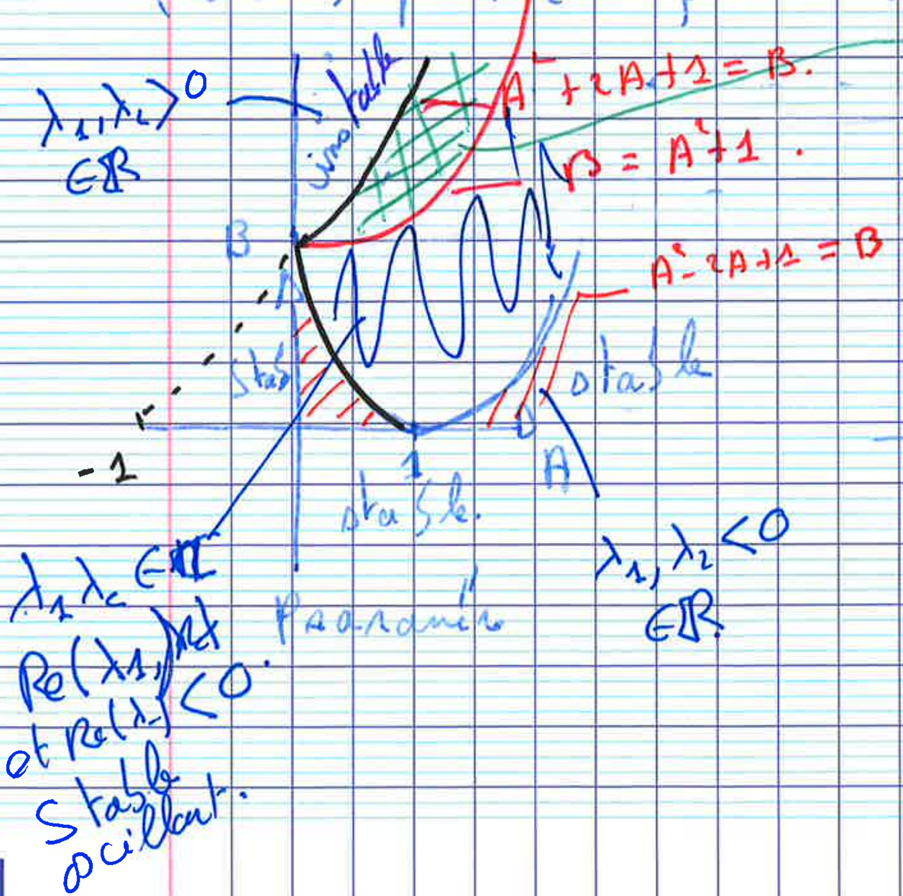
La condition $-A^2 + \frac{1}{4}(A^2 - B + 1)^2 > 0$

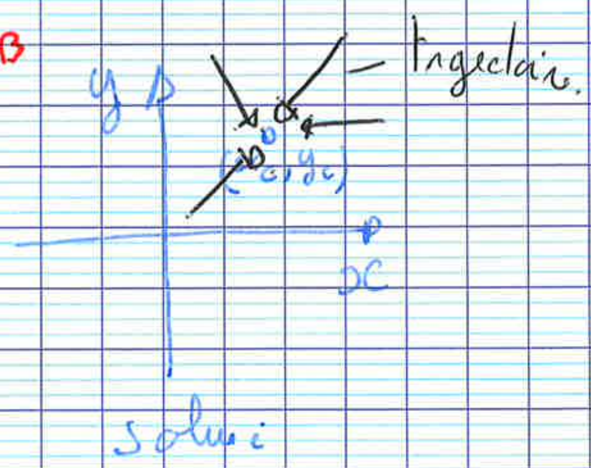
$\Leftrightarrow (A^2 - 2A - B + 1)(+A^2 + 2A - B + 1) > 0$

$((A-1)^2 - B)((A+1)^2 - B) > 0$ $A > 0, B > 0$

alors le système linéarisé est stable si $-1 - A^2 + B < 0$ sinon instable

(cond 1) peut être formulée comme suit.



## Partie 3.

9.

L'étude de stabilité démarre par la recherche d'un point critique soit :

$$\begin{cases} 1-(z+1)x+x^2y=0 \\ xz-x^2y=0 \\ \quad -xz+\nu=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-\overset{\nu}{xz}-x+\overset{\nu}{x^2y}=0 \\ x^2y=\nu \\ xz=\nu \end{cases}$$

pt critique $\Rightarrow U_c=\begin{pmatrix}1\\ \nu\\ \nu\end{pmatrix}$

Le jacobien.

$$J(x,y,z)=\begin{pmatrix} -z-1+2xy & x^2 & -x \\ z-2xy & -x^2 & x \\ -z & 0 & -x \end{pmatrix}$$

évalué en $U_c$

$$J(x_c,y_c,z_3)=\begin{pmatrix} -1+\nu & 1 & -1 \\ -\nu & -1 & 1 \\ -\nu & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la stabilité dépend des valeurs propres de $J(x_c,y_c,z_c)$

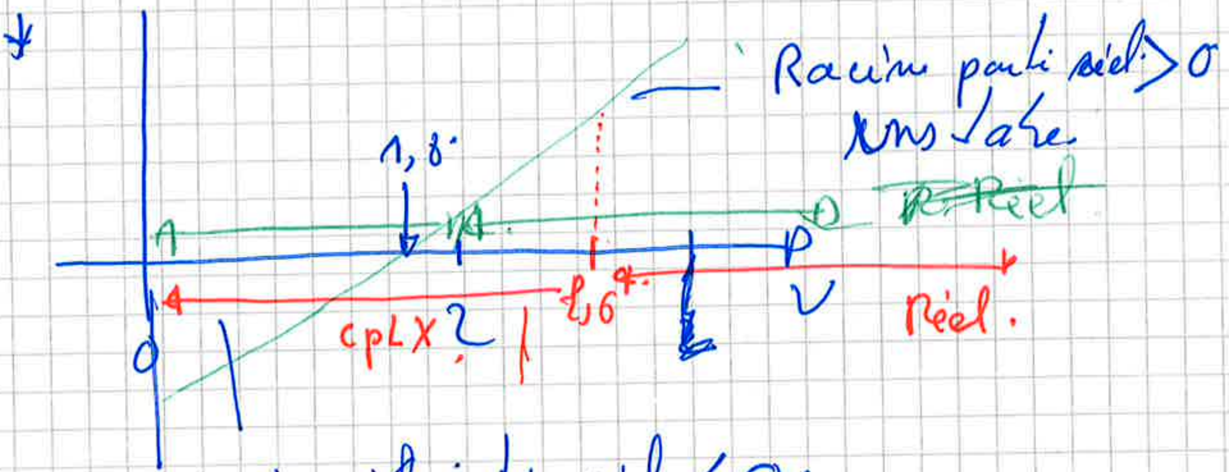
on se propose de les calculer numérique sur un intervalle donné $0\leq\nu<10$.

10

le script d'analyse de valeurs propre indique 1.

* les valeurs propres sont au nombre de 3.

*




racine ~~réel~~ partie réel < 0
stable.

s pour $0 < V < 1,8$ stable oscillant.
$1,8 < V < 2,6$ instable oscillant
$2,6 < V$ instable