Feuille 1

Simulation numérique des EDO

Exercice 1. Pour démarrer

1. Est que 2. Donner 3. Résoudre

Exercice 2. hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz et résolution approchée.
On considère l'équation différentielle :

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}\ ,\ t > 0 \tag{1}$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$.

1. Est que ce problème satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz ?
2. Donner une solution analytique à ce problème.
3. Résoudre numériquement ce problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$ en utilisant la méthode d'Euler explicite sur une grille uniforme.
4. Expérimenter numériquement la non-unicité de la solution.

Exercice 3. équation raide et stabilité absolue On cherche à approcher numériquement la solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = -50\ (x(t) - \cos(t))\ ,\ t > 0,\ \text{ et } x(0) = 0, \tag{2}$$

sur l'intervalle [0,2].

1. Utiliser la méthode d'Euler explicite pour résoudre le problème avec un pas h constant successivement choisie à : a. strictement supérieure à 0,04,
   b. comprise entre 0,02 et 0,04,
   c. strictement inférieure à 0,02.

Qu'observe-t-on et quelle explication peut-on fournir ? 2. Effectuer les calculs précédents avec la méthode d'Euler implicite. Conduire les mêmes simulations qu'à la question précédente.

Exercice 4. hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz et résolution approchée.
On considère le système du modèle SIR de Kermack-McKendrick, décrivant l'évolution d'une population touchée par une maladie infectieuse,

$$\begin{aligned} S'(t) &= -r\,S(t)I(t), \\ I'(t) &= r\,S(t)I(t) - a\,I(t), \\ R'(t) &= a\,I(t), \end{aligned}$$

associé à la condition initiale $S(0) = S_0,\ I(0) = I_0,\ R(0) = R_0$. On rappelle que les fonctions S, I et R représentent le nombre au cours du temps de personnes respectivement susceptibles de contracter la maladie, infectées et immunisées après avoir été malades, le réel r est le taux d'infection et le réel a est le taux de guérison. On utilisera les valeurs suivantes des paramètres du problème :

$$S_0 = 762,\ I_0 = 1,\ R_0 = 0,\ r = 0.00218,\ a = 0.44036,\ T = 14,$$

obtenues par un étalonnage du modèle effectué à partir des données d'une épidémie de grippe dans une école de garçons publiées dans la revue médicale britannique The Lancet le 4 mars 1978.

1. Calculer une solution approchée du système sur l'intervalle de temps $[0, T]$ en utilisant la méthode d'Euler explicite. Représenter l'évolution des valeurs des approximations obtenues des nombres $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ au cours du temps.
2. On note N le nombre de pas de discrétisation employés. Vérifier théoriquement et numériquement que l'approximation obtenue vérifie, pour tout $0 \leq n \leq N$, $S_n + I_n + R_n = S_0 + I_0 + R_0$.
3. Proposer deux démarches pour expérimenter l'ordre de précision du schéma numérique.