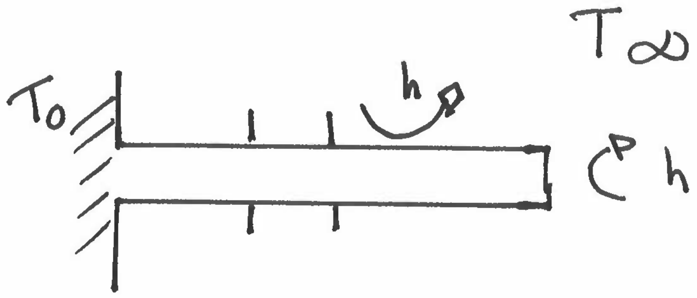
TD Ailette



barre de section S de longueur L

quelques définitions.

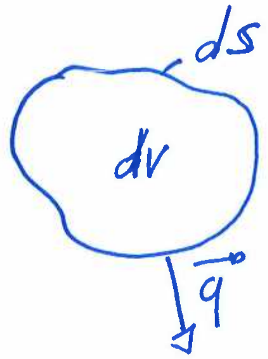
i) quantité de chaleur Q [J]

énergie sous forme d'agitation thermique d'un volume dV

Pour un solide : $\boxed{\delta Q = m \, c_p \, \delta T}$

$[kg] \; [J K^{-1} kg^{-1}] \; [K]$.

ii) En l'absence de production de chaleur dans un volume dV, la variation de Q ~~est~~ due causé par les échanges thermiques au travers de la surface $\oint dS$ de dV.

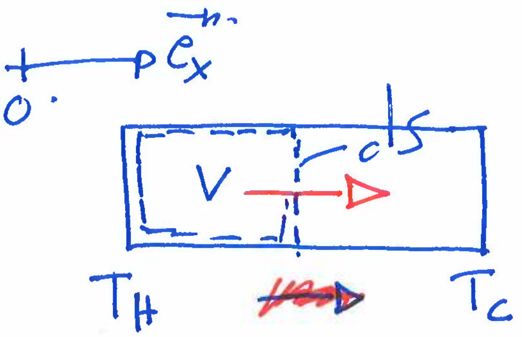


$$\frac{\delta Q}{\delta t} = m \, c_p \frac{\delta T}{\delta t} = \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS$$

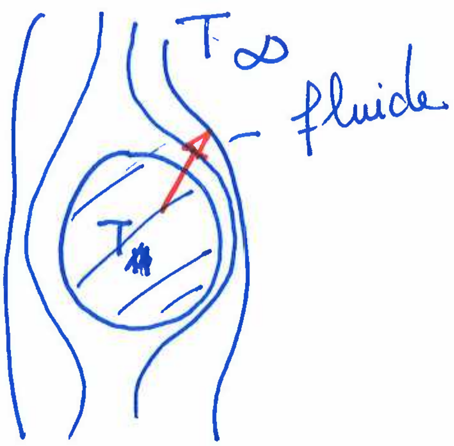
iii) On considère deux échanges thermiques.
transferts.

a) par conduction $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$ · [ ]

b) par convection $\vec{q} = h(T - T_\infty)\vec{n}$ [ ]



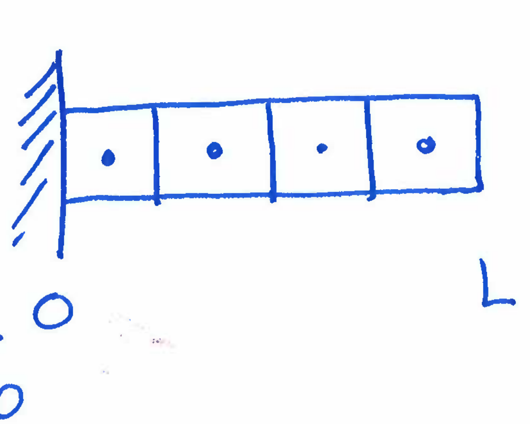
$$q_{cd} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$



$$q_{cv} = h(T - T_\infty)$$

⚠ attention aux valeurs algébriques!

On considère pour la suite une ailette de section rectangulaire.



la longueur de l'ailette est L, la section S.
le fluide est à une température $T_\infty < T_0$.
T_0 est la température du socle.

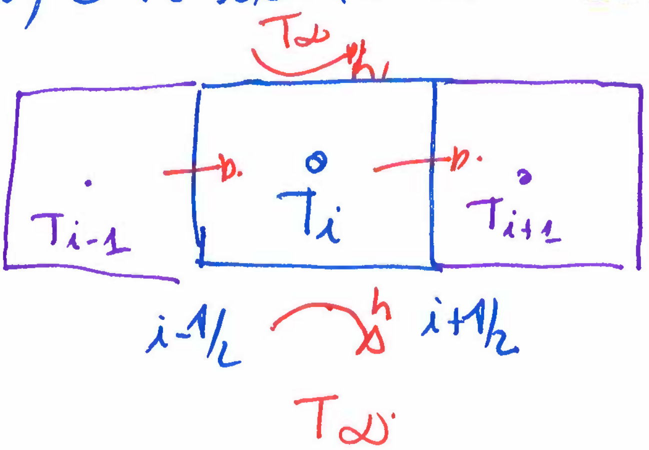
~~En sup~~ les échanges thermiques entre le fluide et le solide se font par convection caractérisé par un coefficient d'échange h.

Dans le bloc solide les échanges se font par conduction.

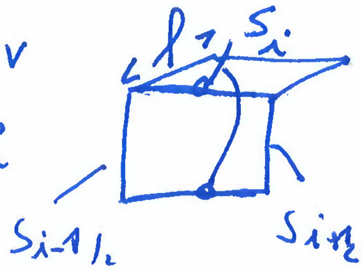
Q.1.
En décompant l'ailette en 4 cellules et en ~~assimant~~ considérant la température constante sur une cellule déterminer le profil de température approché.

R.1

a) On isole une cellule intérieure pour en réaliser un bilan.



$$0 = -q^{cd}_{i+1/2} + q^{cd}_{i-1/2} - q^{cv}_{i}$$



$$0 = -\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2} S_{i+1/2} + \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2} S_{i-1/2} - \left(h\left(T_i - T_\infty\right)\right) S_i$$

$$0 = \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} S_{i+1/2} - \lambda \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} S_{i-1/2} - h\left(T_i - T_\infty\right) S_i$$

$\Rightarrow$ on $S_{i+1/2} = S_{i-1/2} = S \times l.$

$S_i = \Delta x \times l$

$$0 = \frac{\lambda S l}{\Delta x}\left(T_{i+1} - T_i\right) - \frac{\lambda S l}{\Delta x}\left(T_i - T_{i-1}\right) - h\left(T_i - T_\infty\right)\Delta x \cdot l$$

$$0 = \frac{\lambda S}{\Delta x^2} T_{i+1} - 2\frac{\lambda S}{\Delta x^2} T_i + \frac{\lambda S}{\Delta x^2} T_{i-1} - h\left(T_i - T_\infty\right)$$

Soit encore

$$\boxed{\lambda S \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} - hT_i = -hT_\infty}$$

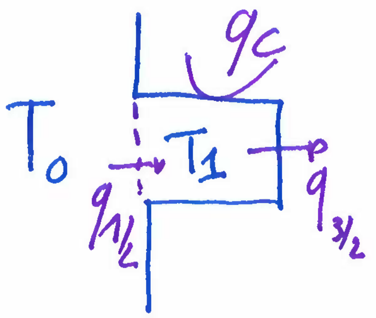
Remarque

* on reconnait $T'' \simeq \dfrac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$.

* si $h \gg 1 \Rightarrow T_i = T_\infty$.

en effet si l'échange thermique par convection est efficace alors la température ailette égale celle du fluide.

b) Sur la frontière de gauche $x = 0$



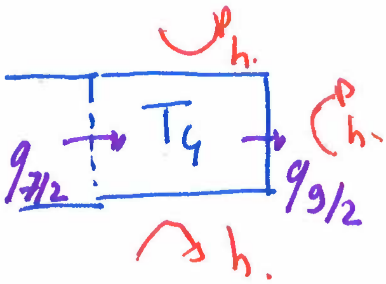
le bilan donne :

$$\overbrace{\frac{\lambda S\ell}{\Delta x}(T_2 - T_1)}^{q_{3/2}} - \overbrace{\frac{\lambda S\ell}{\Delta x}(T_1 - T_0)}^{q_{1/2}}$$

$$- \underbrace{h(T_i - T_\infty)\Delta x\,\ell}_{q_c} = 0$$

$$\boxed{\lambda S \frac{T_2 - 2T_1}{\Delta x^2} - hT_1 = -hT_\infty - \frac{\lambda S}{\Delta x^2}T_0}$$

c) sur la frontière droite $x = L$.



$$\overbrace{-\ell S h(T_4 - T_\infty)}^{q_{9/2}} - \overbrace{\frac{\lambda S \ell}{\Delta x}(T_4 - T_3)}^{q_{7/2}} - h(T_4 - T_\infty)\,\Delta x\,\ell = 0$$

Soit
$$-\frac{\lambda S}{\Delta x^2}(T_4 - T_3) - \frac{S h}{\Delta x}(T_4 - T_\infty) - h(T_4 - T_\infty) = 0.$$

$$\boxed{\begin{aligned} &-\frac{\lambda S}{\Delta x^2}(T_4 - T_3) - \frac{Sh}{\Delta x}T_4 - hT_4 = \\ &-hST_\infty - hT_\infty \end{aligned}}$$

On obtient un système de 4 équations.
4 inconnues.

Q2. Assembler ce système linéaire et le résoudre pour tracer le profil de température.

R.2 La réponse est donnée par le script ailette_4elem.py.

Q.3 * Généraliser le script pour ~~sion~~ utiliser un nombre N de cellules.

* faire varier le paramètre h et commenter.
* faire varier N et commenter.

Q.4

On s'intéresse au phénomène transitoire. Réaliser le bilan thermique d'une cellule en tenant compte du terme d'inertie thermique.

Principe

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \underbrace{m c_p}\frac{\delta T}{\delta t} = \underbrace{\int_S \vec{q}\cdot\vec{n}\,dS}_{\text{questions précédentes.}}$$

$$m = \rho \cdot dV = \rho \cdot \underbrace{\Delta x S \ell}_{dV}$$ élément de volume

$$\frac{\delta T}{\delta t} \simeq \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t} \simeq O(\Delta t)$$

~~On supposera par la~~ On supposera pour la suite que l'ensemble des conditions aux limites ne dépende pas du temps.

Première discrétisation temporelle

Euler implicite.

$$\rho c_p \Delta x S \ell \times \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t} =$$

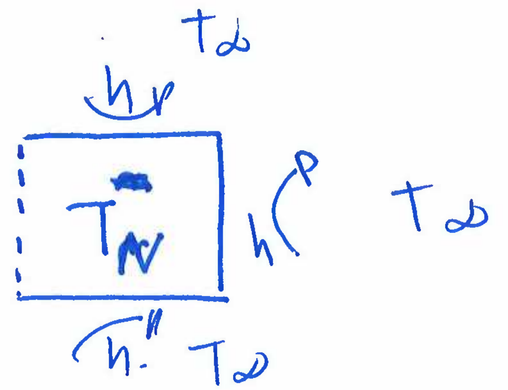
$$\frac{\lambda S \ell}{\Delta x}\left(T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}\right) - \frac{\lambda S \ell}{\Delta x}\left(T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}\right)$$

$$- h\left(T_i^{n+1} - T_\infty\right) \Delta x \ell$$

$$\boxed{\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{h/S}{\rho c_p}\left(T_i^{n+1} - T_\infty\right)}$$

on traite alors les conditions aux limites de manière identique.

* T_0 donnée
* $$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_L = h S \left(T - T_\infty\right)\Big|_L.$$



$$\rho c_p \Delta x S l \frac{T_N^{n+1} - T_N^{n}}{\Delta t} =$$

$$- h S (T_N^{n+1} - T_\infty) - \frac{\lambda S l}{\Delta x}(T_N^{n+1} - T_{N-1}^{n+1})$$

$$- h \Delta x l (T_N^{n+1} - T_\infty)$$

OK.

on applique une démarche similaire :

$$\frac{T_N^{n+1} - T_N^{n}}{\Delta t} = - \frac{h \cancel{S}}{\rho c_p \Delta x \cancel{S} l}(T_N^{n+1} - T_\infty) - \frac{\lambda \cancel{S l}}{\Delta x(\rho c_p \Delta x \cancel{S l})} \times \dots$$

$$\dots \times (T_N^{n+1} - T_{N-1}^{n+1}) - \frac{h \cancel{\Delta x l}}{\rho c_p \cancel{\Delta x} S \cancel{l}}(T_N^{n+1} - T_\infty)$$

de l'ailette vers l'équation de la chaleur.

sur ~~la~~ une cellule i on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_i}(\rho\, c_p T)\, dV = \int_{\Sigma_i} \vec{q}_{cd}\, d\vec{n}.$$

$\cancel{\rho c_p \frac{\partial T_i}{\partial t} dx} =$

en 1 d et en supposant qu'il n'y ait pas de transferts lemique ~~au~~ par la paroi horizontal. $h = 0$. on a.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, c_p T_i)\,\Delta x\, S\ell = -\left(-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} S\ell\right) + \left(-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x} S\ell\right)$$

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \lambda \frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

~~on~~ En prenant $\Delta x \to 0$ il vient :

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \lambda \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

on retrouve notre équat° de la chaleur.
les conditions aux limites sont :

$$T_0 = T(t, 0) \quad \forall t \geq 0$$

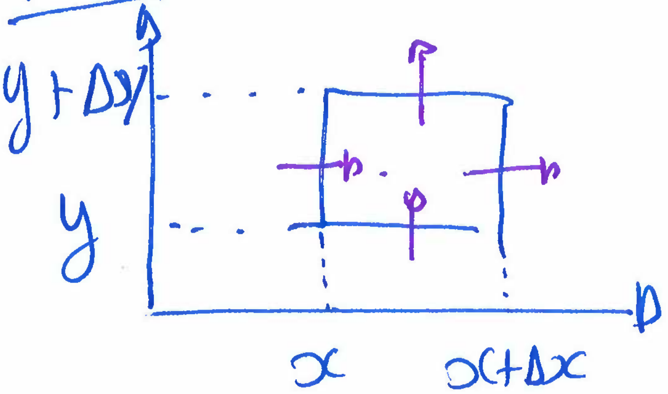
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(t,L)} = -h(T - T_\infty) \quad \forall t \geq 0$$

Remarque dans le cadre ~~général~~ de l'activité des approximat° ~~ont~~ été ~~commises~~ commises dans leur traitement...

Q.5

généraliser le raisonnement précédent pour une géométrie en dimension 2

R.5



$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_p T \times dV\right) = +\left(+\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\right) \times \Delta y$$

$$+\left(\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+\Delta x} - \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y}\right) \times \Delta x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$+ \frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+\Delta y} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y}\right) . \frac{1}{\Delta x}$$

il vient $\Delta x, \Delta y \to 0$

$$\partial_t T = \lambda\left(\partial_x^2 T + \partial_y^2 T\right)$$