Correction Projet/TD du 22/11

Enoncé

Soit à résoudre $\partial_t u - \nu(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = 0$

$\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ $u|_{\Gamma = \partial\Omega} = 0$

$= \{x_{min}, x_{max}\} \times \{y_{min}, y_{max}\}$ $u(\vec{x}, 0) = g(x, y)$ donnée.

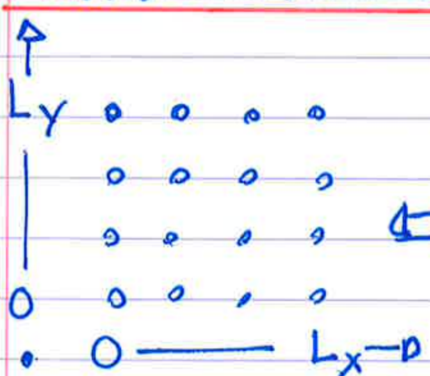
~~On~~ Etape 1

On commence à résoudre $\begin{cases} -\nu(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = \cancel{0}\ 1 \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$

2 techniques à maîtriser !

M1/ Distribution collocative.

(a)



$\Leftrightarrow$

12	13	14	15
8	9	10	11
4	5	6	7
0	1	2	3

(c)

(b) n_y

(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)

$n_x \longrightarrow$

On cherche à calculer les inconnues $u_{ij} = u(x_i, y_j)$.

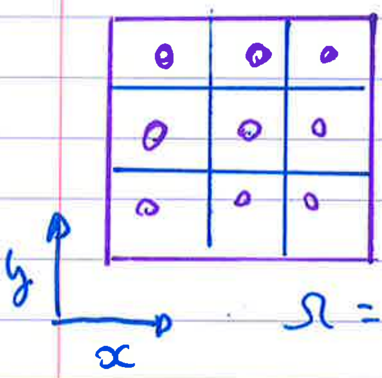
3

Le code source est donné en correction ~~dans~~ ~~ce~~ Poisson_2d_cd.py.

On passe à la méthode 2 ; disposition décalée ~~de~~ (staggered).

M2/ Distribution staggered.

On est souvent amené à considérer une disposition décalée des variables. Cela signifie que l'inconnue est au centre des cellules.



(0,2)	(1,2)	(2,2)	7	8	9.
(0,1)	(1,1)	(2,1)	4	5	6
(0,0)	(1,0)	(2,0)	1	2	3

$\Omega = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$.

Donc on constate que les coordonnées de la position des inconnues ~~sont~~ données par :

$$(x_{ij}, y_{ij}) = \left(x_{min} + \left(i + \frac{1}{2}\right) h_x, \; y_{min} + \left(j + \frac{1}{2}\right) h_y\right)$$

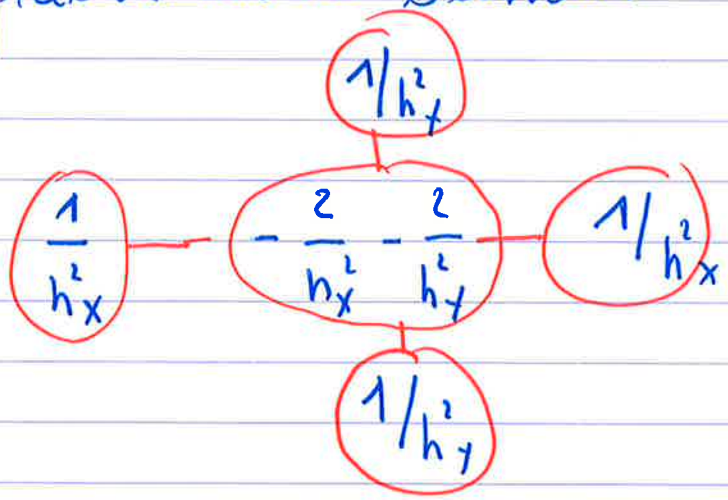
avec $h_x = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{N_x}$. et $0 \leq i \leq m_x - 1$.

$h_y = \dfrac{1}{N_y}(y_{max} - y_{min})$ et $0 \leq j \leq m_y - 1$.

Reprenons maintenant le schéma DF :

$$-\frac{1}{h_x^2}\left(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right)$$
$$-\frac{1}{h_y^2}\left(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}\right)=S_{ij}$$

Quelques fois vous trouverez la représentation suivante :



c'est la molécule de calcul ou stencil.

* Que se passe t'il en frontière ?

Exactement de la même façon que l'ailette.

* Regardons la cellule $(0,0)$

et pour simplifier prenons $h_x=h_y=h$.

Il en vient donc pour le maillage 3X3 :

$$
\begin{pmatrix}
-6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & -5 & & & \\
 & 0 & & & & & -6 & & \\
 & & & & & & & -5 & \\
 & & & & & & 0 & 1 & -6
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} S_0 \\ \vdots \\ S_9 \end{pmatrix}
+2
\underbrace{\begin{pmatrix} U_0^L + U_0^S \\ U_1^S \\ U_2^S + U_0^R \\ \vdots \end{pmatrix}}_{CL}
$$

Je vous laisse remplir !

La correction est donnée par le script ailette_2d_staggered.py.