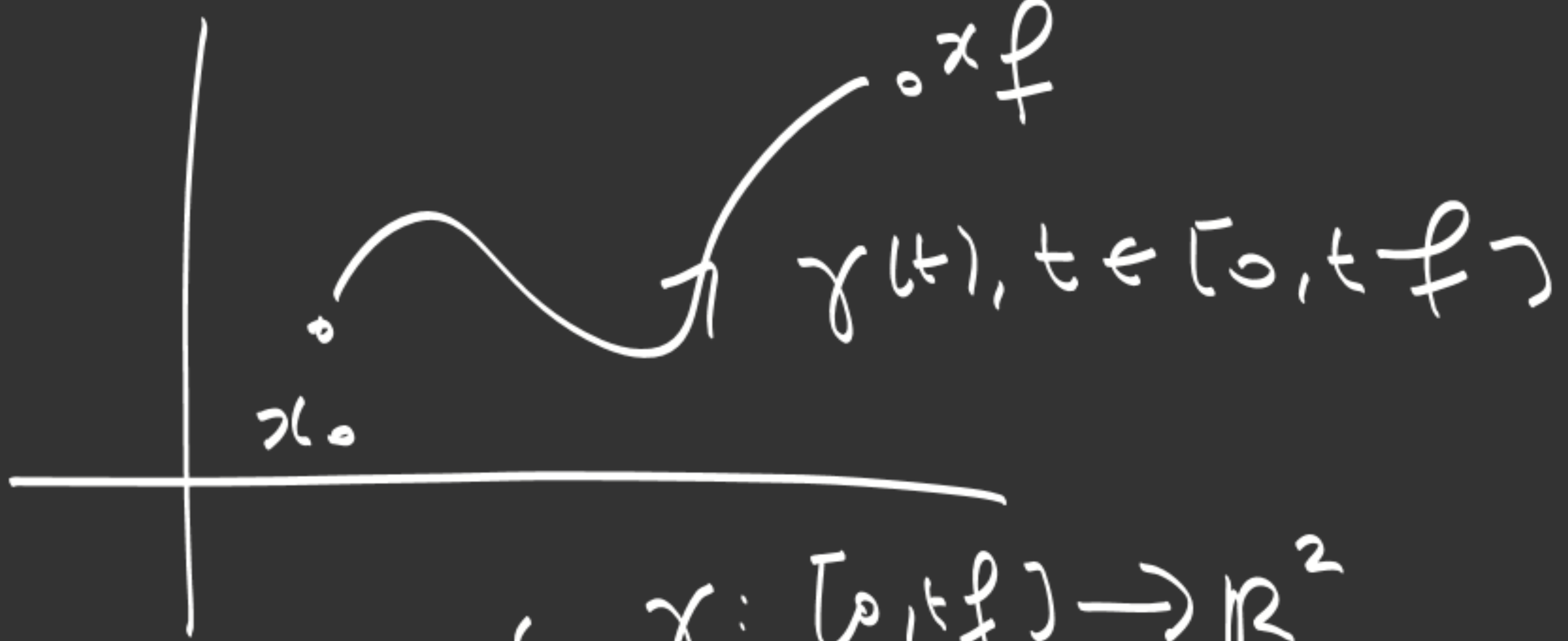
Exo : courbes de longueur (usuelle !) minimale dans le plan :



$$\ell(\gamma) = \int_0^t \underbrace{\|\dot\gamma(t)\|\, dt}_{\text{"}ds\text{"}}$$

"ds" : s = abscisse curviligne

$\ell(\gamma)$: longueur de la courbe

$$= \int_0^t \sqrt{\dot\gamma_1^2(t) + \dot\gamma_2^2(t)}\ .\ dt$$

Étant donnés x_0 et $x_f \in \mathbb{R}^2$, quelle est la courbe de longueur minimale entre les deux ?

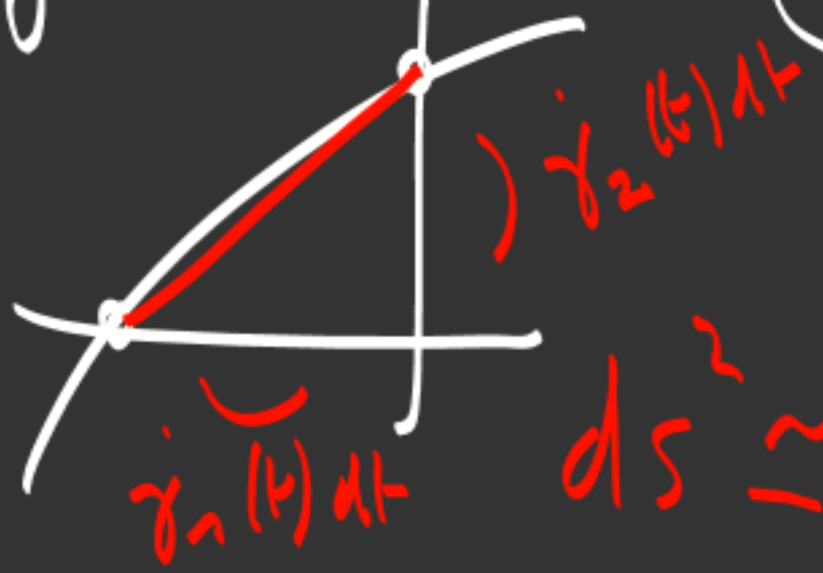
$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad t \longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{array} \right.$$

(avec γ $\mathcal{C}^1$, ou plus généralem^t lipschitz)

γ dérivable (p.p. ...)

$$\Longrightarrow \dot\gamma(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^2$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{bmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_2(t) \end{bmatrix}$$



$$ds^2 \simeq (\dot\gamma_1^2(t) + \dot\gamma_2^2(t))\, dt^2$$

Reformulons ce problème comme un problème de <u>temps minimal</u> : on cherche $x(t)=\gamma(t)$ tq

$$\begin{cases} x(0)=\gamma(0)=x_0 \\ x(tf)=\gamma(tf)=xf \end{cases}$$

(ie : la courbe = l'état)

et on pose $u(t):=\dot{x}(t)$ (ie $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))$ avec

$$f : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,u) \longmapsto u \quad , m=n=2)$$

Le problème se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=u(t),\ x_0 \text{ et } xf \text{ fixés} \\ u(t)\in U=\mathbb{R} \text{ (pas de condition !)} \\ \displaystyle\int_0^{tf}\|u(t)\|\,dt \longrightarrow \min \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{x}(t)=u(t) \\ \boxed{\|u(t)\|=1} \iff \text{"} ds=dt \text{"} \\ x_0, xf \text{ fixés} \\ \displaystyle\int_0^{tf}\underbrace{\|u(t)\|}_{1}\,dt = tf \longrightarrow \min \end{cases}$$

pas convexe...

On "relaxe" (= relâche) les contraintes sur le contrôle pour rendre U convexe : on passe de $U = S^1$ $(= \{u \in \mathbb{R}^2 / \|u\| = 1\})$ à $U = B_f(0,1)$ $(= \{u \in \mathbb{R}^2 / \|u\| \leq 1\})$. Alors, comme ce nouveau U est (compact et) convexe, on peut mq on a existence de sol. Si on montre qu'une sol. du pb convexifié est en fait à valeurs dans $U = S^1$, ce contrôle sera nécessairement aussi sol. du pb non convexifié, c'est à dire sol. du pb de longueur min.

On peut finalement se ramener (par translation) au cas $x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Rq. : on a raisonné en comparant deux problèmes d'optimisation du type

$$(1)\begin{cases} f(x) \longrightarrow \min \\ x \in C_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) \longrightarrow \min \\ x \in C_2 \end{cases} (2)$$

avec $C_1 \subset C_2$.

Si $\bar{x}$ sol. de (2) vérifie $\bar{x} \in C_1$, alors $\bar{x}$ sol. de (1) (et les valeurs des problèmes sont égales !)

↳ **Appliquons le PMP :**

i) équ. adjointe : $H(x,p,u) = p^0 \cdot 1 + \overbrace{p_1 \cdot u_1 + p_2 \cdot u_2}^{(p \mid f(x,u)) = \left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right)}$ $\Rightarrow \dot{p}(t) = -D_x H(x(t),p(t),u(t)) = 0 \Rightarrow p(t) = \text{cte}$

ii) <u>maximisation du Hamiltonien :</u>

$$\begin{cases} H(x,p,u) = p^0 + (p|u) \longrightarrow \max \quad (\text{à } p^0 \leq 0,\ p \in \mathbb{R}^2 \text{ fixés}) \\ \|u\| \leq 1 \end{cases}$$

Or $(p|u) \overset{\text{c.s.}}{\leq} \|p\| . \underbrace{\|u\|}_{\leq 1} \leq \|p\|$, et on peut toujours atteindre cette valeur :

- soit $p \neq 0$, et $u = p/\|p\|$ (sol. unique)
- soit $p = 0$, tout $u \in B_f(0,1)$ convient

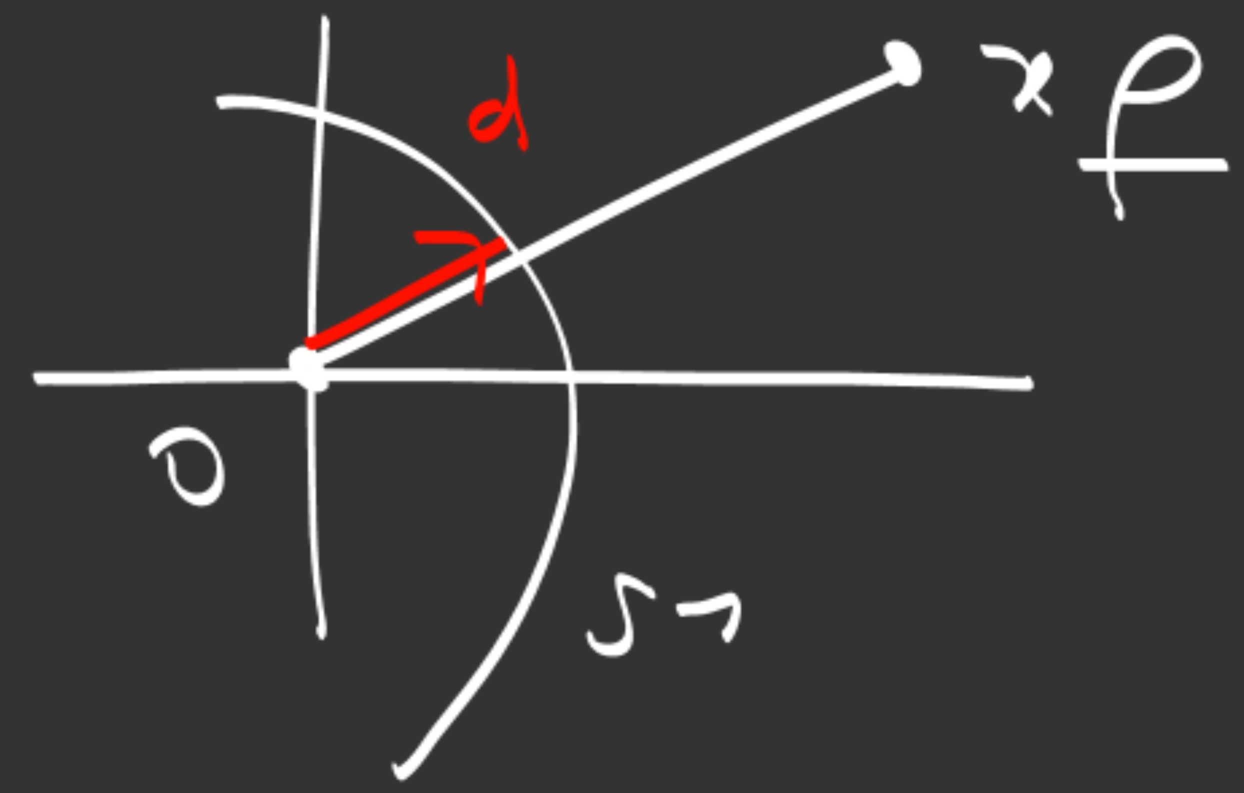
Vérifions de plus que le cas $p=0$ n'arrive pas : ici $p(t) = $ cte, donc si p s'annule c'est que $p(t) \equiv 0$, auquel cas $\underset{\uparrow t_f \text{ libre}}{0 = H} = p^0 + (\cancel{p(t)}^{0} | u(t)) \Rightarrow (p^0, p) = (0,0)$: interdit.

On a donc mq, si (x,u,t_f) solution, on a $\dot{x}(t)=u(t)$

avec $u(t)=$ vecteur constant de norme $1 =: d \in S^1$.

Or, avec $x_f \neq x_0=(0,0)$ (sinon $t_f=0$), un tel vecteur d

est unique : $d=\dfrac{x_f}{\|x_f\|}$,



<u>Conclusion</u> : pour la métrique usuelle (= la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$), courbe de longueur min = <u>le</u> segment de droite qui relie les deux pts distincts.

cf. $\dot{x}(t)=d \in \mathbb{R}^2$

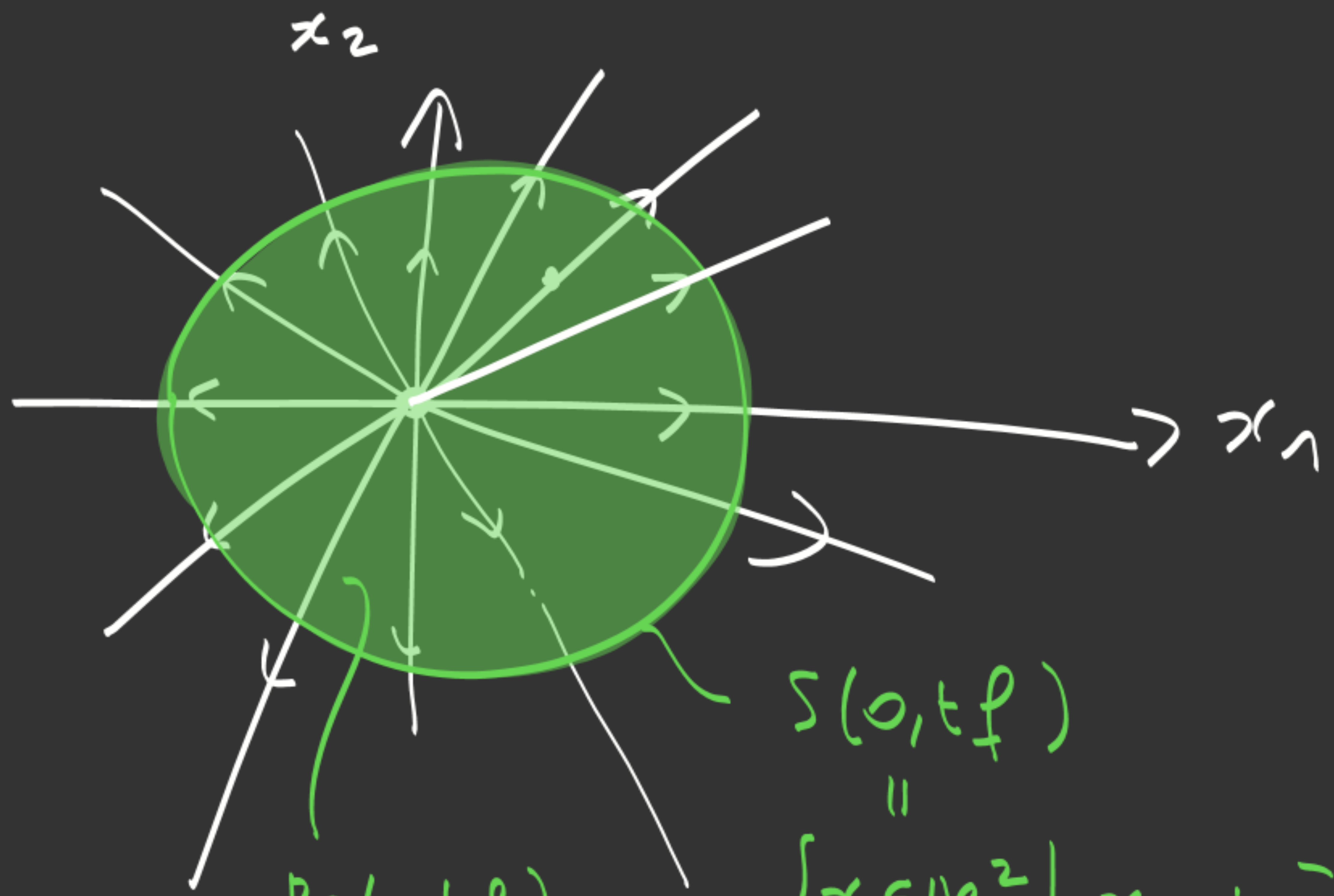
$\Rightarrow x(t)=t.d+\underbrace{x(0)}_{x_0=(0,0)}$

$\Rightarrow x(t_f)=x_f$
$= t_f.d$ donc

$\|x_f\| = |t_f|.\underbrace{\cancel{\|d\|}}_{1} \Rightarrow t_f=\|x_f\|$

et $d={x_f}/{\|x_f\|}$.

<u>Rq.</u> : i)



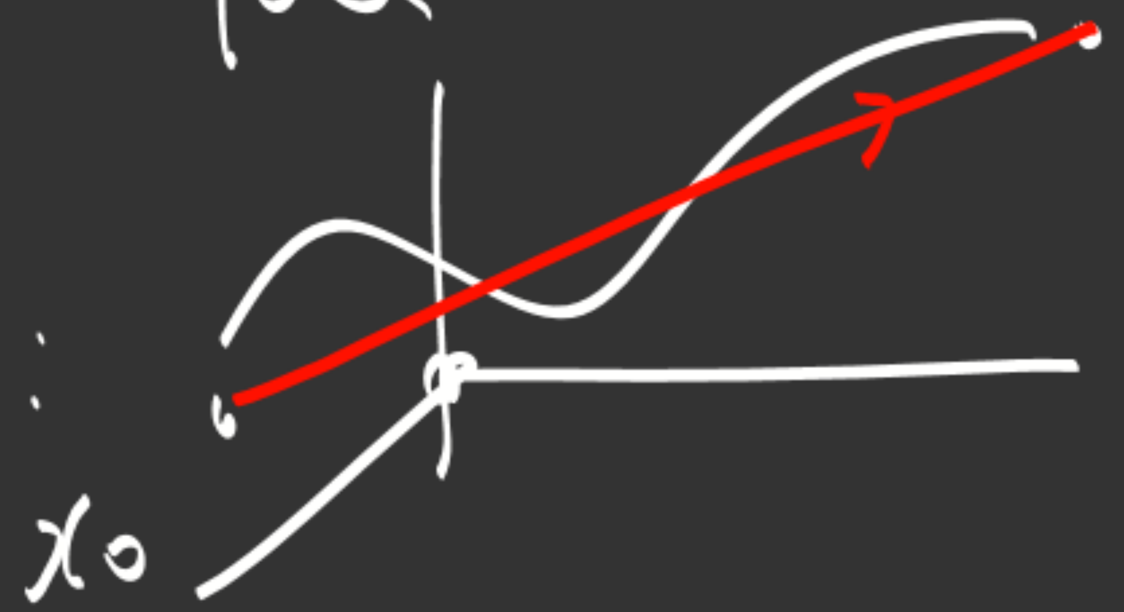
$B_f(0,t_f)$

$S(0,t_f)$
$\quad\|$
$\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x$ est à temps min t_f de $(0,0)\}$

$\Big\{$ partition du plan en trajectoires temps min (= longueur min) depuis l'origine. À comparer au cas $\dot q(t)=u(t)$!

On a en effet bien résolu le pb initial de longueur min puisque $(\forall t\in[0,t_f])$: $\|u(t)\|=1$.

ii) Tout pareil en dim $n\geq 1$:



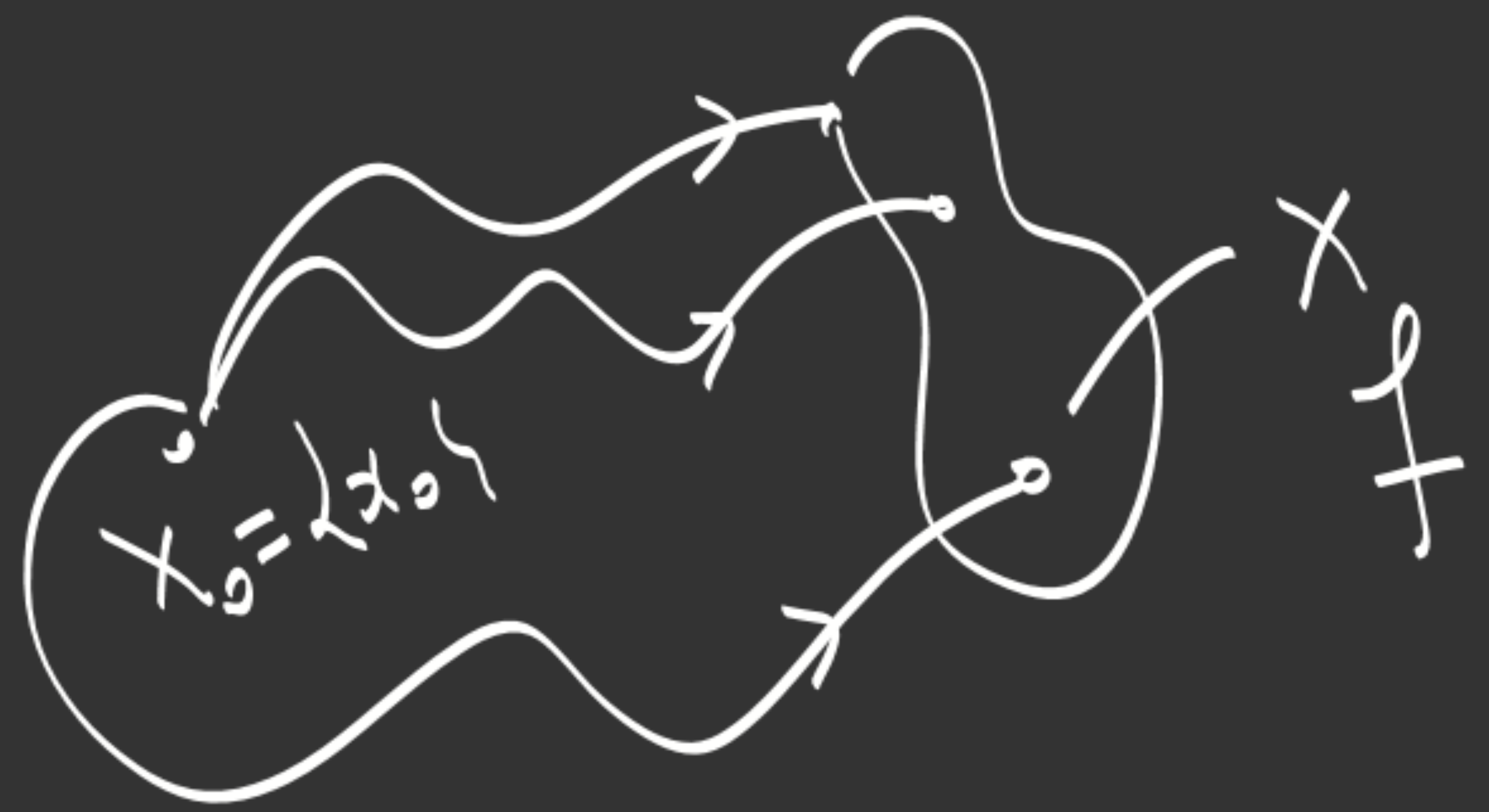
$$t_f=\|x_f-x_0\| \neq 0$$

$$\dot x(t)=u(t)=\frac{x_f-x_0}{\|x_f-x_0\|}$$

$$\left(\text{et } x(t)=x_0+t\cdot\frac{x_f-x_0}{\|x_f-x_0\|}\right).$$

Relations de transversalité : soit à résoudre

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt \longrightarrow \min & (t_f \text{ libre ou fixé}) \\ \dot x(t) = f(x(t),u(t)), \quad t\in[0,t_f] \\ x(0)\in X_0, \quad x(t_f)\in X_f \\ u(t)\in U\subset \mathbb{R}^m \end{cases}$$



où X_0 et $X_f \subset \mathbb{R}^n$ sont des sous-variétés dont on sait calculer l'espace tangent en chaque point (cf. ci-après). Ex. : $\left.\begin{array}{l} X_0=\{x_0\} \\ X_f=\{x_f\} \end{array}\right\}$ déjà fait

<u>Th.</u> (PMP avec rel. de transversalité) : soit (x, u) sol. (et t_f si t_f libre...), alors :

$\exists (p^0, p) \neq (0, 0)$ avec $p^0 \leq 0$ et $p : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitz

fonction identiquement nulle

tq :

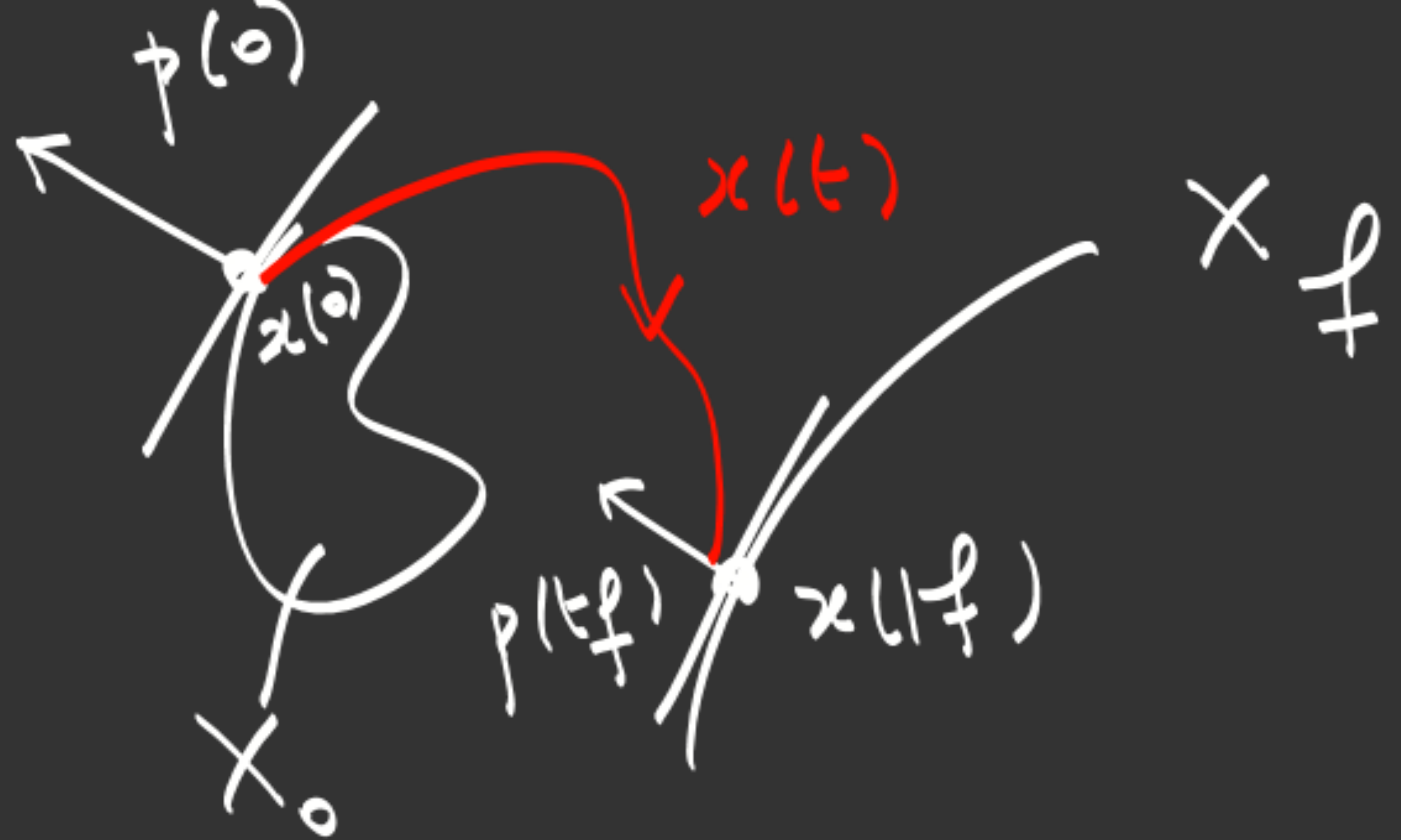
i) équ. adjointe : $\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t)), \; t \in [0, t_f]$

avec $H(x, p, u) := p^0 f^0(x, u) + (p \mid f(x, u))$

ii) maximisation du hamiltonien :

p.p. $t \in [0, t_f]$, $H(x(t), p(t), u(t)) = \max\limits_{v \in U} H(x(t), p(t), v)$

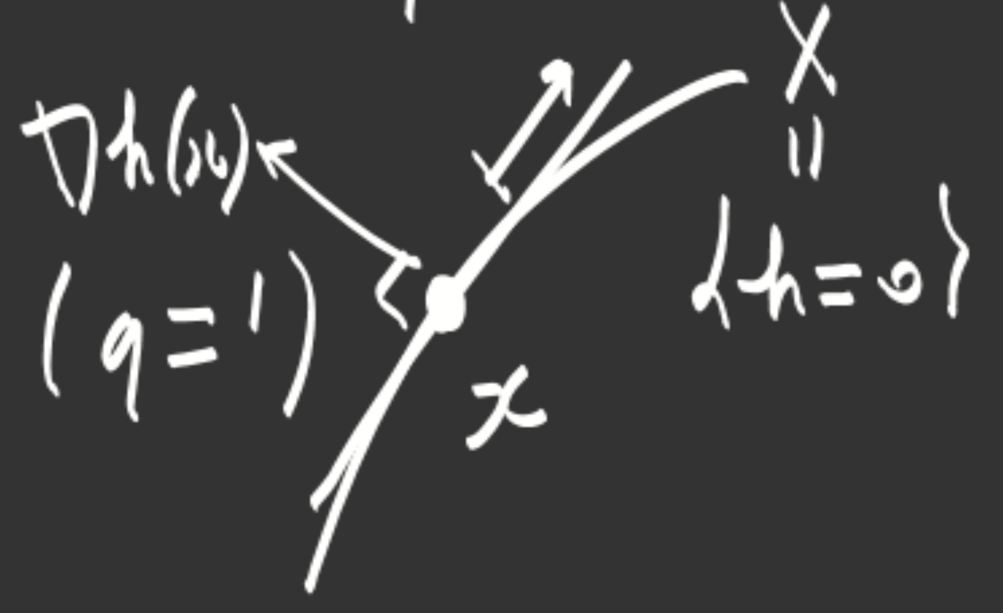
iii) **relations de transversalité** : $\begin{cases} p(0) \perp T_{x(0)} X_0 \quad \leftarrow \text{espace tangent} \\ p(t_f) \perp T_{x(t_f)} X_f \end{cases}$



Précisons la notion d'espace tangent dans le cas où X_0 et X_f sont des sous-variétés.

Déf. : soit $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$ avec $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ dérivable ; soit $x \in X$ tq $h'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) = \underbrace{M(q,n,\mathbb{R})}_{q \times n}$ surjective (ie, avec $q \leq n$, $h'(x)$ de rg max égal à q) ; on définit dans ce cas

$$\overbrace{\boxed{h'(x)}}^{n} \updownarrow q \qquad \boxed{T_x X := \ker h'(x)}.$$



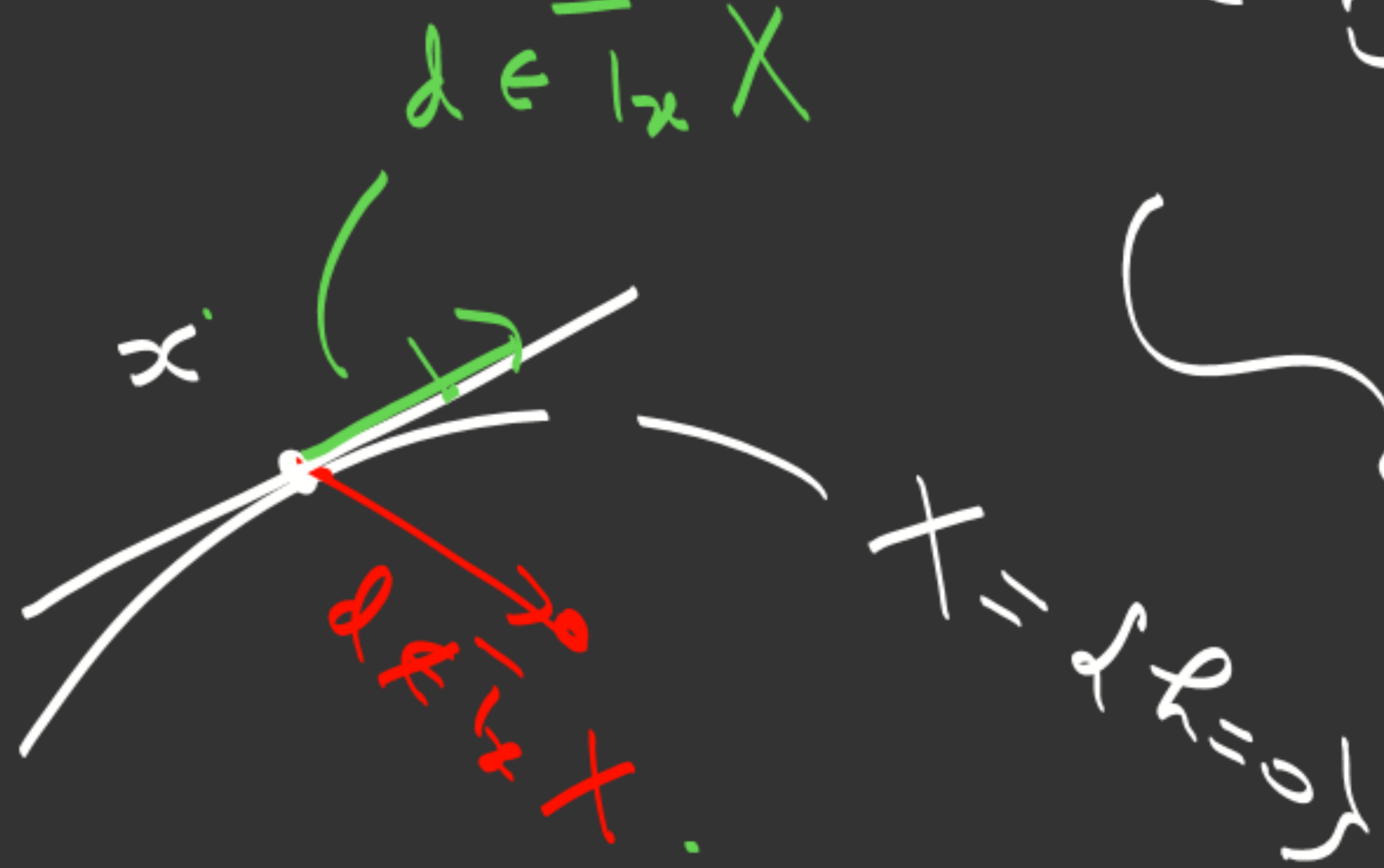
Rq : i) ainsi définies, les directions tangentes à X en x décrivent bien le sous-ev des directions tq, partant de x, on reste dans X "à l'ordre 1" :

$$h(x+\varepsilon d) = \underbrace{\cancel{h(x)}}_{\substack{0 \\ \text{c.f. } x\in X}} + h'(x).\varepsilon d + \underbrace{\|\varepsilon d\|\,\overbrace{\alpha(\varepsilon d)}^{\alpha(\xi)\xrightarrow[\xi\to 0]{} 0}}_{\underbrace{\varepsilon\,\underbrace{\|d\|\,\alpha(\varepsilon d)}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0}}_{o(\varepsilon)}}$$

$$\Rightarrow h(x+\varepsilon d) = 0 + o(\varepsilon)$$

ssi $h'(x).d = 0$

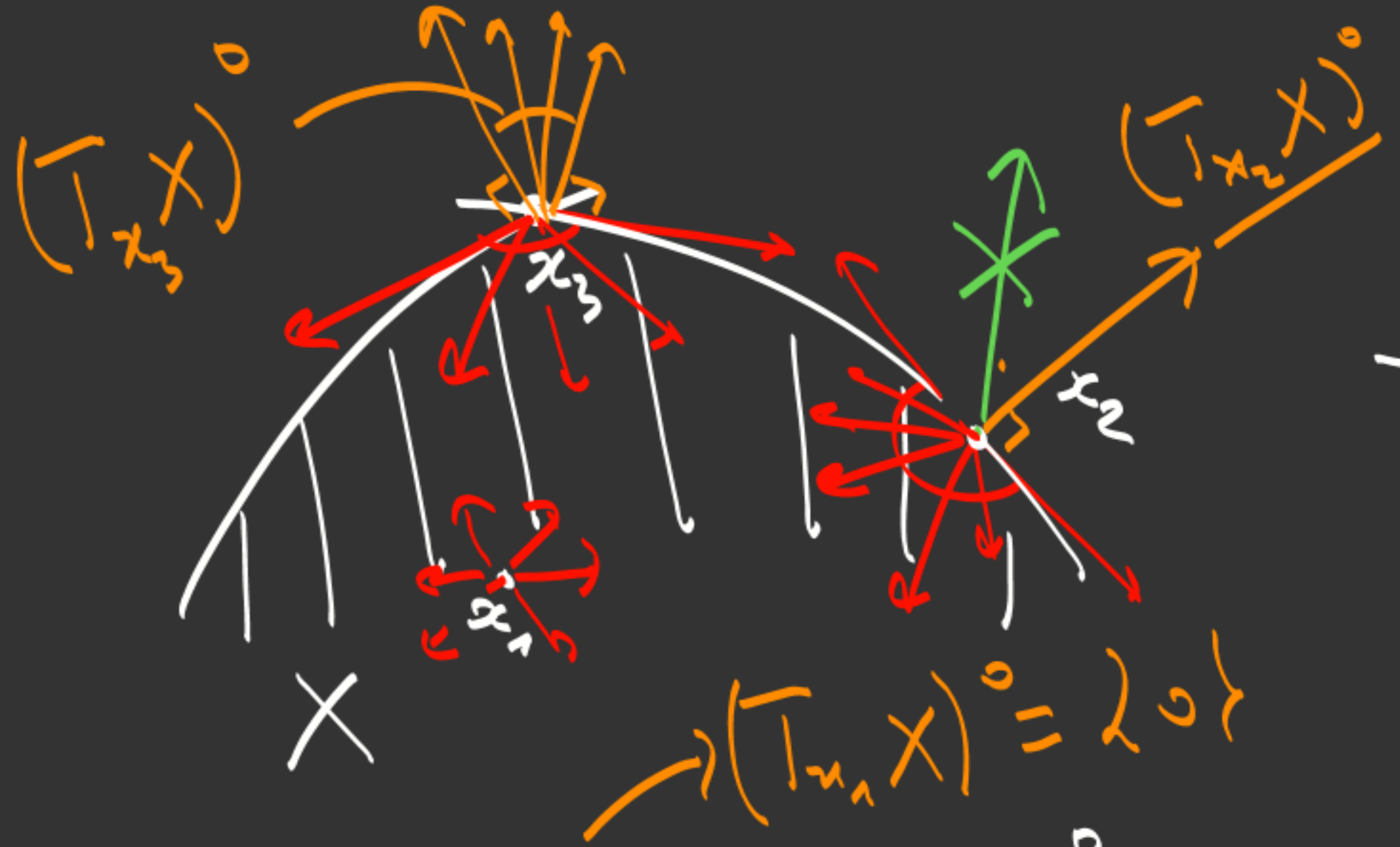
i.e. ssi $d \in \operatorname{Ker} h'(x)$.



ii) la condition "$h'(x)$ surjective" s'appelle encore "h submersion en x" (et th. fonctions implicites $\Rightarrow$ h se comporte comme h' au voisinage de x, en particulier : $\underbrace{V \in \mathcal{V}(x)}_{\text{"voisinage de } x\text{"}} \Rightarrow h(V) \in \mathcal{V}_{h(x)}$) ; c'est une des façons de définir (localement) une sous-variété (cf. géométrie différentielle).

iii) plus généralement, soit $X \subset \mathbb{R}^n$, on appelle cône tangent à X en $x \in X$, l'ensemble

$$T_x X := \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists (d_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} d \text{ et } \exists (\varepsilon_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ tq } x + \varepsilon_n . d_n \in X \}$$



Cet ensemble n'est pas un sev de $\mathbb{R}^n$ mais un cône ($d \in T_x C \Rightarrow \lambda d \in T_x C$ si $\lambda \geq 0$)

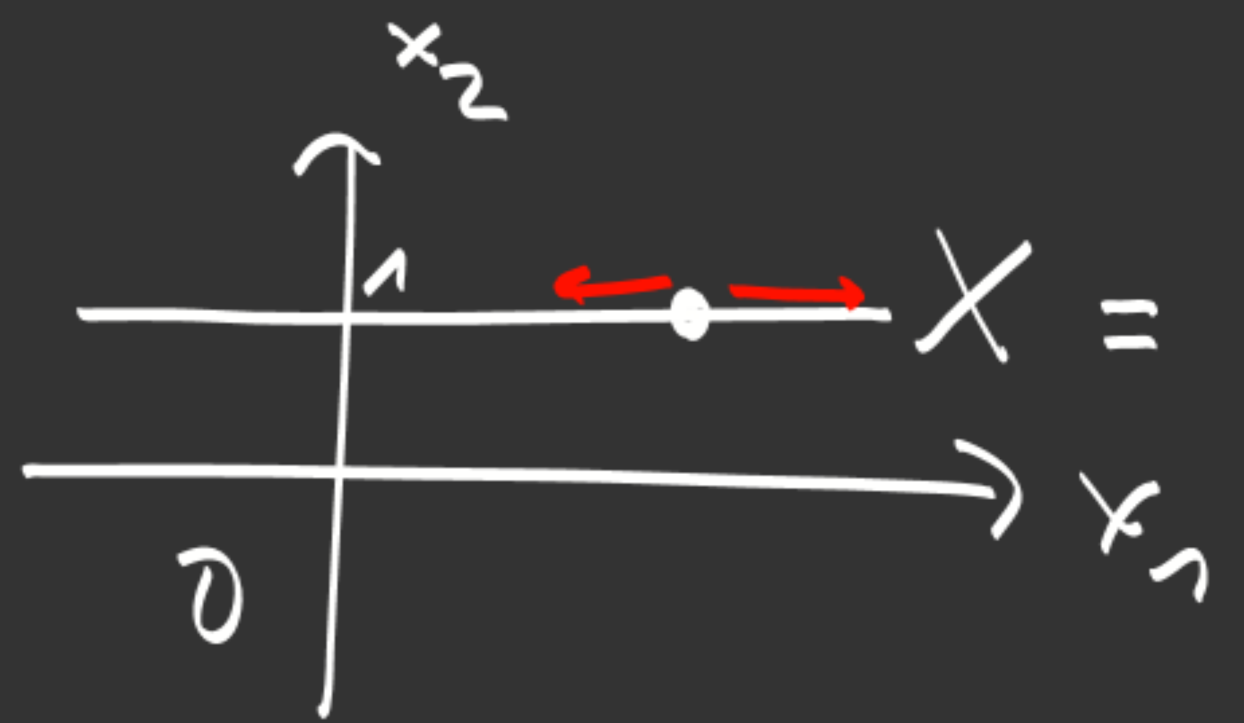
$T_{x_1} X = \mathbb{R}^n$ (cf. $x_1 \in \mathring{X} = \text{int}\, X$)

$T_{x_2} X$ = demi-espace ci-dessus (x_2 pt régulier $\overbrace{\text{du bord}}^{\partial X}$)

$T_{x_3} X$ = cône ($\neq$ demi-espace) ci-dessus ($x_3 \in \partial X$)

Ex.: i) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 1\}$ et x_1 libre

$= h^{-1}(\{0\})$



$X = \{\overbrace{x_2 - 1}^{h} = 0\}$

avec $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (n = 2,\ q = 1)$

$(x_1, x_2) \longmapsto x_2 - 1$

Soit $x \in X$; $h'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ (de rg 1 $\Rightarrow$ surjection)

donc $T_x X = \ker h'(x)$

$= \{d \in \mathbb{R}^2 \mid d_2 = 0\} = \{(d_1, 0),\ d_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right)$

$= \mathbb{R}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(l'espace tangent ne dépend pas du point dans ce cas où X est un sous-espace affine). On a $p \perp T_x X$

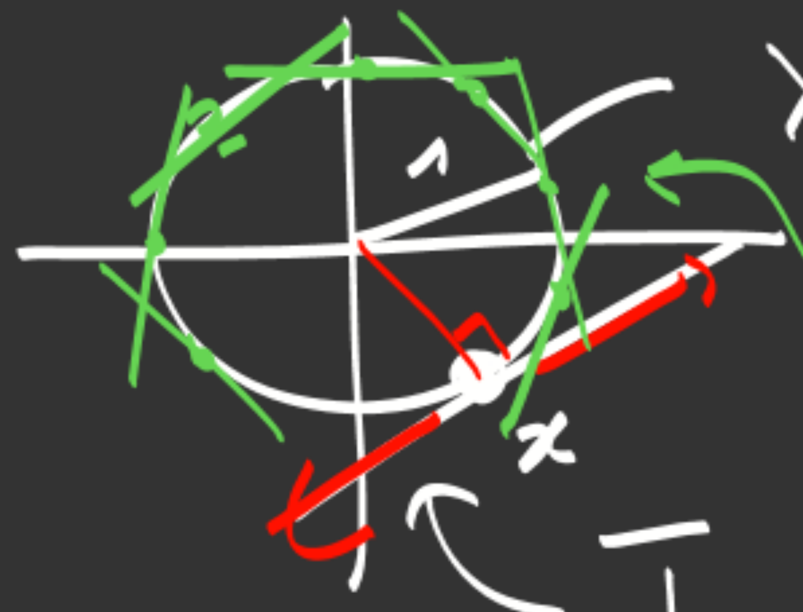
$\iff p \in \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}^{\perp} = \mathbb{R}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff p_1 = 0$

p_1 fixé

ii) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$= h^{-1}(\{0\})$, $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(q = 1)$

$(x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_2^2 - 1$



$X = S^1$

$T_x X$

$TS^1 = \bigcup_{x \in S^1} \{x\} \times T_x S^1$ "fibré tangent" à S^1

Soit $x \in X$,

$h'(x) = [\,2x_1 \quad 2x_2\,]$ de rg 1 si $x \neq (0,0)$ (or, $x \in S^1 \Rightarrow x \neq (0,0)$)

$\Rightarrow T_x X = T_x S^1 = \ker h'(x)$

$= \{x\}^\perp$ (cf. $0 = h'(x) \cdot d = (\nabla h(x) \mid d)$) $q = 1$

Et $p \perp T_x X \iff p \in (\{x\}^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}\{x\}$ $(= \mathbb{R} \cdot x)$

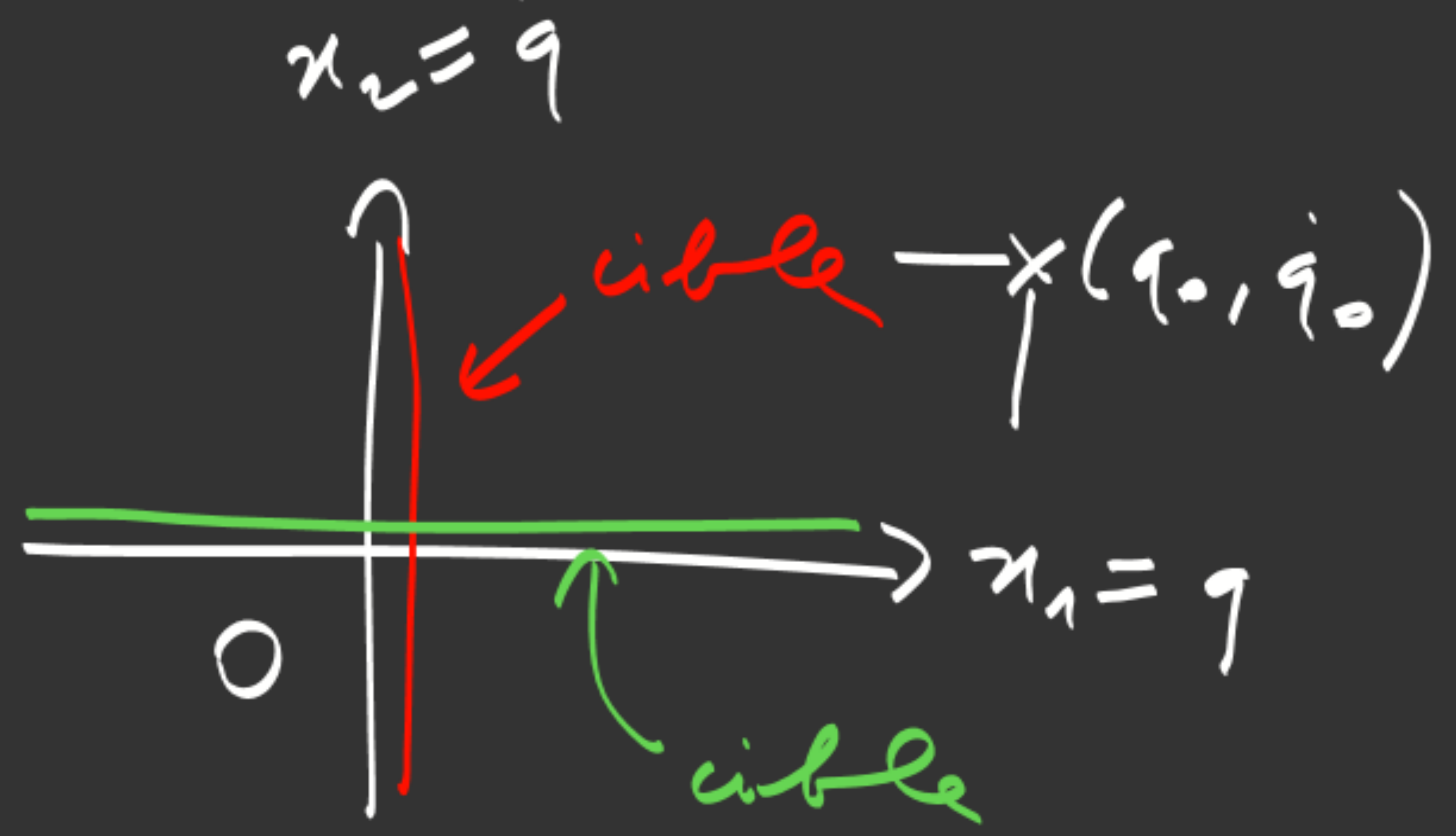
(ie $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $p = \lambda x$).

Exo. i) $\ddot{q}(t) = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$

$q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$, $t_f \to \min$

$\longrightarrow$ $q(t_f) = 0$, $\dot{q}(t_f)$ libre

$\longrightarrow$ $q(t_f)$ libre, $\dot{q}(t_f) = 0$ (arrêt en temps min)



Dessiner dans les deux cas les synthèses associées (ie le feuilletage du plan (x_1, x_2) en trajectoires temps min vers la cible).

Dans ce cas, on a encore des relations de transversalité qui s'écrivent :

$$\begin{cases} p(0) \in \overbrace{\left(T_{x(0)} X_0\right)^{\circ}}^{\text{cône polaire à } T_{x(0)} X_0} & \text{i.e } \left(\forall d \in T_{x(0)} X_0\right) : \left(p(0) \mid d\right) \leq 0 \\ p(tf) \in \left(T_{x(tf)} X_f\right)^{\circ} & \text{——— '' ——} \; T_{x(tf)} X_f) : \left(p(tf) \mid d\right) \leq 0 . \end{cases}$$