3. Principe du maximum (suite).

Rq. : ii) Soit $(x,p) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ sol. de l'EDO "hamiltonienne" suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t)) \end{cases}$$

où $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est le "hamiltonien" du problème.

Alors, $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathbb{R}) : H(x(t), p(t)) = c$.

En effet, on a

$$\frac{d}{dt}\Big[H(x(t),p(t))\Big] = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t))\cdot \overbrace{\dot{x}(t)}^{\nabla_p H(x(t),p(t))} + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t))\cdot \overbrace{\dot{p}(t)}^{-\nabla_x H(x(t),p(t))}$$

$$= \Big(\nabla_x H(x(t),p(t)) \,\Big|\, \nabla_p H(x(t),p(t))\Big)$$

$$- \Big(\nabla_p H(\text{—''—}) \,\Big|\, \nabla_x H(\text{—''—})\Big)$$

$= 0$. On dit que H est une "intégrale première".

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\text{NB}} : (x|y) &:= x\cdot y \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ &= {}^t x \cdot y \end{aligned}}$$

Dans les conclusions du PMP, on a bien le pt i) qui indique

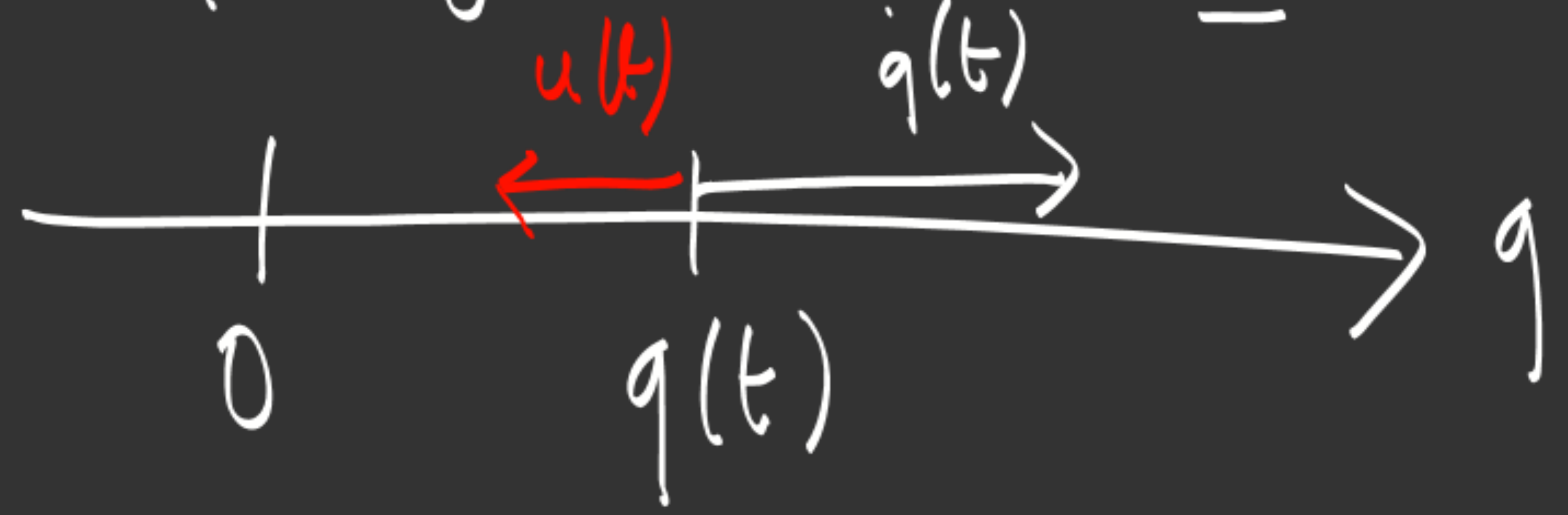
$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t),u(t)), \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = f(x(t),u(t))$$
$$= \nabla_p H(x(t),p(t),u(t))$$

avec une dépendance supplémentaire en $u(t)$. Pour autant, la condition de maximisation ii) implique que la même conclusion reste vraie (p.p.) :

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\text{p.p. } t \in [0, t_f]) : H(x(t), p(t), u(t)) = c.$$

iii) on verra plus tard une version du PMP "avec conditions de transversalité" qui permet de traiter des conditions aux deux bouts plus générales (ex : $h(x(t_f)) = 0 \ldots$)

<u>Exemple</u> :



$$\ddot q(t) = u(t)$$
$$u(t) \in [-1, 1]$$

accélération bornée

On fixe les conditions aux deux bouts :

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \dot q(0) = \dot q_0 \end{cases} \text{ connus}, \quad \begin{cases} q(tf) = 0 \\ \dot q(tf) = 0 \end{cases}$$

retour à l'origine en s'y arrêtant

Coût : $tf \longrightarrow \min$ $\qquad tf = \int_0^{tf} \underbrace{f^0(x(t), u(t))}_{=1}\, dt$

On a bien un problème de Lagrange en dimension d'état $n = 2$ puisqu'il suffit de poser $x(t) := (\underbrace{q(t)}_{x_1(t)}, \underbrace{\dot q(t)}_{x_2(t)}) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\dot x(t) = \begin{bmatrix} \dot q(t) \\ \ddot q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t)) \qquad (m = 1 \text{ seul contrôle})$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(\underset{(x_1, x_2)}{x}, u) := (x_2, u)$, et $x(0) = x_0 := (q_0, \dot q_0) \in \mathbb{R}^2$,
$x(tf) = xf := (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Finalement, $u(t) \in U := [-1,1]$. On admet la contrôlabilité (ie on peut bien revenir à l'origine et s'y arrêter) et l'existence (il existe au moins une stratégie temps min).

Soient x, u et t_f une trajectoire optimale, le contrôle et le temps minimal associé, (x,u) et t_f vérifient le PMP : $\exists\, (p^\circ, p) \neq (0,0)$ avec $p^\circ \leq 0$ et $p : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitz tq :

i) <u>équation adjointe</u> : $H(x,p,u) = p^\circ . 1 + \left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \middle| \overbrace{f}^{\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}}(x_1, x_2, u) \right)$

$$= p^\circ + p_1 . x_2 + p_2 . u$$

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x(t), p(t), u(t))$$

$$= 0 \implies p_1(t) = cte$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(\underbrace{x(t), p(t), u(t)}_{\text{ce triplet } (+p^\circ \dots) \text{ s'appelle une "extrémale"}})$$

$$= -p_1(t)$$

$$= cte \implies p_2 \text{ affine}$$

ii) <u>maximisation du hamiltonien</u> : ayant fixé x et p, résolvons le pb

$$p^\circ + p_1 . x_2 + p_2 . u \longrightarrow \max$$

$$u \in [-1, 1]$$

On, solution :

- soit $p_2 \neq 0$, et $u = \operatorname{sgn} p_2 = p_2 / |p_2|$
- soit $p_2 = 0$, tout $u \in [-1, 1]$ est sol.

Comme p_2 est une fonction affine, elle s'annule au plus une fois sur $[0,t_f]$ sauf si $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fonction identiquement nulle}}}{p_2 \equiv 0}$ (ie $p_2(t)=0$, $t\in[0,t_f]$)

Or, si $p_2 \equiv 0$, $\dot{p}_2 \equiv 0$

$\Rightarrow p_1 \equiv -\dot{p}_2 \equiv 0$: $p=(p_1,p_2)\equiv(0,0)$. Mais alors, le long de l'extrémale $0 \underset{\substack{\uparrow \\ t_f \text{ libre}}}{=} H(x(t),p(t),u(t)) = p^\circ + \underbrace{\cancel{p_1(t)}}_{0}.x_2(t) + \underbrace{\cancel{p_2(t)}}_{0}.u(t)$

p.p. $t\in[0,t_f]$

$\Rightarrow p^\circ = 0$ fonction nulle

$\Rightarrow (p^\circ,p)=(0,0)$: absurde (car interdit par le PMP).

Conclusion : p_2 est une fonction affine non identiquement nulle et a donc au plus un zéro, $\bar{t} \in [0, tf]$ (elle change de signe au plus une fois sur $[0, tf]$).

Donc, comme $u(t) = \text{sgn}\, p_2(t)$ p.p. $t \in [0, tf]$, on a au plus une commutation (une discontinuité) du contrôle :

- soit $u = +1$ puis -1, ie $\gamma_+ \gamma_-$
- soit $u = -1$ puis $+1$, ie $\gamma_- \gamma_+$

} chacun des deux arcs pouvant être vide

Rq : comparer au pb de navigation pour lequel on a trois arcs (d'après le numérique) et trois valeurs possibles : $u \in \{-1, 0, 1\}$.