TP2 :

$p^0 = -1$ (cas normal)

rappel : PMP $\Longrightarrow$ $u(t) = p(t)$, $t \in [0,1]$ (p.p.)

$$h(x,p) := H(x,p,u=p)$$
$$= -\frac{1}{2}p^2 + p(-x+p)$$
$$= \frac{1}{2}p^2 - px$$

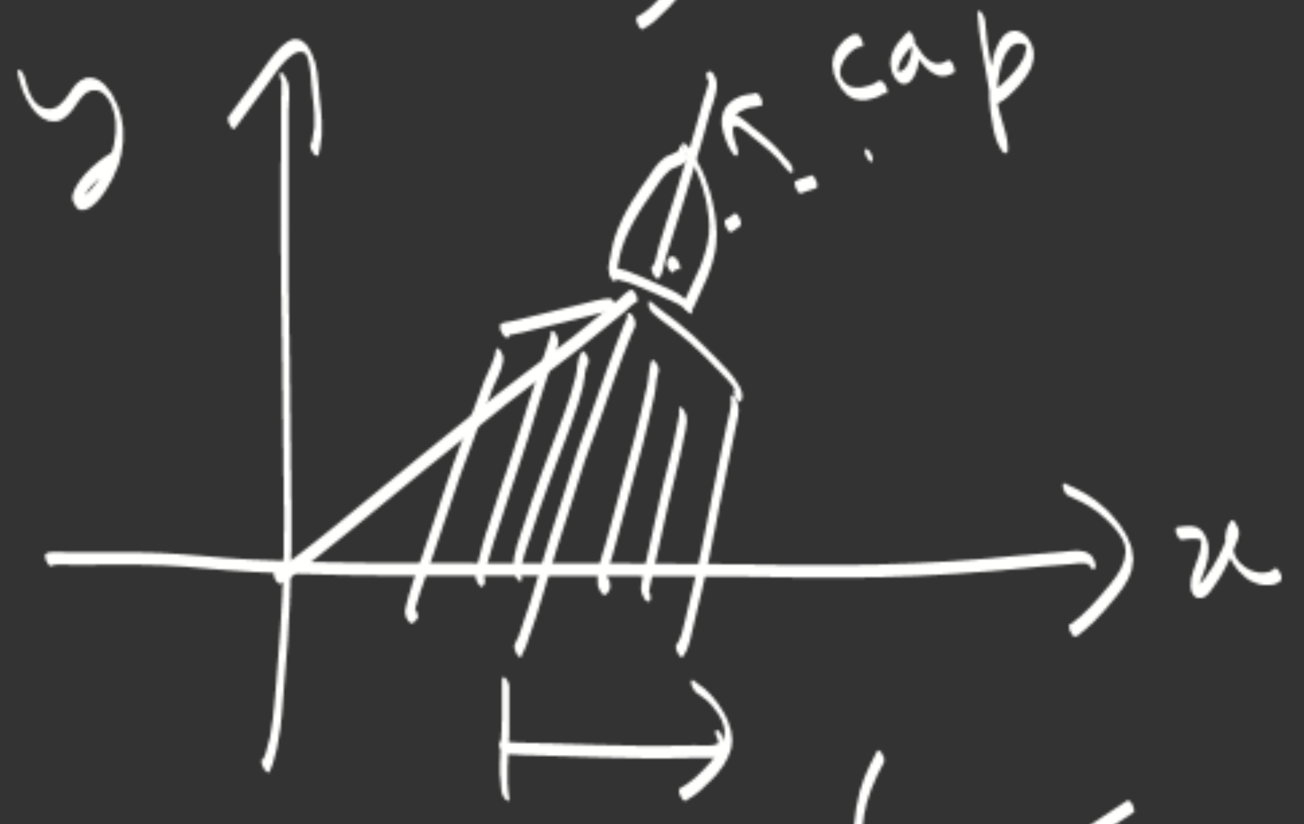
et $\dot{x} = \nabla_p H(x,p,u) = \nabla_p h(x,p)$

$\dot{p} = -\nabla_x H(\text{———}) = -\nabla_x h(x,p)$ $\Big\}$ cf. $\nabla_u H(x,p,u)\big|_{u=p} = 0$ (max. sans contraintes !)

$\rightsquigarrow$ on a bien (numériquement) $\bar{p}_0 \simeq \dfrac{2}{e^2-1}$ (cf. cours n°7).

5. MPC (Model Predictive Control).

Retour sur le pb de navigation traité au §2 (méthodes directes) :



$(0 \le w < 1)$

$\|.\| \le 1$

vitesse / fond de la mer

$$\begin{cases} \boxed{\begin{matrix}\dot{x}(t) \\ \dot{y}(t)\end{matrix}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{matrix} w_x \\ w_y \end{matrix} + \boxed{\begin{matrix}\underset{1}{\cancel{V}}\cdot\cos\theta(t) \\ \underset{1}{\cancel{V}}\cdot\sin\theta(t)\end{matrix}} \\ \dot{\theta}(t) = \boxed{u(t)} \end{cases}$$

vitesse sur l'eau

contrainte de courbure (= virages "pas trop serrés") :

$$u(t) \in [-1,1] \iff |u(t)| \le 1$$

$$\begin{cases} X(t) = (x(t), y(t), \theta(t)) \in \mathbb{R}^3 \ (n=3) : \text{état} \\ u(t) \in U = [-1,1] \subset \mathbb{R} \ (m=1) : \text{contrôle} \end{cases}$$

Quand on minimise le temps final t_f entre

$X_0 = (\underbrace{0,0}_{\text{on se ramène à l'origine par translation}}, \theta_0)$ et une cible $X_f = (x_f, y_f, \theta_f)$, on constate numériquement que les trajectoires sont de la forme $\underset{u=\pm1}{B_\pm}\ \underset{u=0}{S}\ \underset{u=\pm1}{B_\pm}$ (3 arcs).

On verra par la suite comment justifier cette structure à l'aide du PMP.

$\longrightarrow$ On se place dans le cas où le vrai courant $\boxed{\text{n'est pas constant}}$: on commet donc une erreur quand on résout !

$X = (x, y, \theta)$

On suppose alors qu'on sait mesurer l'état (position et cap) du navire à chaque instant, et on va utiliser cette information (qui met évidence, en général, une divergence par rapport à la trajectoire nominale : erreur de modèle, approximation numérique dans la résolution... inévitable !)

$\longrightarrow$ On re-résout avec comme nouvelle condition initiale cette mesure, faite en un temps $t_1 = t_0 + \Delta t \ll t_f$, ie on recalcule la traj. temps min entre $X(t_1)$ (= la mesure) et la cible X_f (inchangée). Si Δt est assez petit, on peut mq l'algo itératif associé (= on itère !) CV sous les bonnes hypothèses.

NB i) Critère d'arrêt pour cet algo MPC + "receding/finite horizon" = être à distance $\leq \varepsilon$ de la cible :

$$\| X(t_k) - X_f \| \leq \varepsilon .$$

$t_k = t_0 + k . \Delta t$

ii) le courant "vrai" est une fonction de la position (pas du temps) :

- $(x,y) \longmapsto (w_x(x,y), w_y(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ tq $w_x^2(x,y) + w_y^2(x,y) < 1$

(sinon perte de contrôlabilité)

} champ de vecteurs

- à chaque pas de temps Δt, on re-mesure le courant

Exo (révision PMP). Soit à résoudre

$$-q(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t)\,dt \longrightarrow \min \qquad t_f > 0 \text{ fixé}$$

$$\dot q(t) = u(t), \quad q(0) = 0, \quad \dot q(0) = 0$$

$$\underbrace{\dot x(t) = f(x(t), u(t))}$$

$$f(\overset{\in \mathbb{R}^2}{x}, \overset{\in \mathbb{R}}{u}) := (x_2, u)$$

- $x(t) = (q(t), \dot q(t)) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \dot x_1(t) = x_2(t), \quad \dot x_2(t) = u(t)$

  $x(0) = (0,0)$, $x(t_f)$ libre

- Bolza $\Rightarrow$ Lagrange : $-q(t_f) = -q(t_f) + \overbrace{q(0)}^{0} = -\int_0^{t_f} \overbrace{\dot q(t)}^{x_2(t)}\,ds$

$$\Rightarrow -q(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t)\,dt = \int_0^{t_f} \left(-x_2(t) + u^2(t)\right) dt \longrightarrow \min \quad \Big| \quad f^0(x,u) := u^2 - x_2$$

- **Hamiltonien** : $H(x,p,u) = p^0(u^2 - x_2) + \underbrace{p_1 x_2 + p_2 u}_{\left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}\right)}$ $f(x,u)$

- **Système adjoint** :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}(x(t), p(t), u(t)) \\ \qquad = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}(\text{—''—}) = +p^0 - p_1 \end{cases}$$

- **Normalité** : par l'absurde, supposons $p^0 = 0$; p.p.t, $u(t)$ doit être solution de

$$\begin{cases} p_1(t)\, x_2(t) + p_2(t) \cdot v \longrightarrow \max \\ v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Or ce problème ne possède une solution que si $p_2(t)=0$:
donc $p_2(t)=0$ p.p. (et on ne sait rien de plus sur $u(t)$).

Mais alors $p_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{p}_2(t) = 0 = \underset{0}{\cancel{p^0}} - p_1 \Rightarrow p_1 \equiv 0$ (cf. $p_1 = \text{cte}$ puisque $\dot{p}_1 = 0$) :

$(p^0, p) = (0, \underset{\uparrow}{0})$, impossible.

fonction de $[0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ identiquement nulle

$\Big\{$ On pose $p^0 = -1 < 0$

• <u>Maximisation du hamiltonien</u> :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(x,p,u) = -(u^2 - x_2) + p_1 x_2 + p_2 u \xrightarrow[\max]{} \\ u \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Unicité de sol. : $u = +p_2/2$ (cf. $\partial H/\partial u = 0$).

· <u>Transversalité</u> : $x(t_f)$ libre ie $x(t_f) \in X_f = \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow p(t_f) \perp \underbrace{T_{x(t_f)}\mathbb{R}^2}_{=\mathbb{R}^2}$$

$$\Rightarrow p(t_f) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

En particulier, $p_1(t_f) \left(= p_1(t)\right) = 0$

$$\Rightarrow \dot{p}_2(t) = -1 \quad \text{avec} \quad p_2(t_f) = 0$$

$$\Rightarrow p_2(t) = t_f - t$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{t_f - t}{2}.$$ On déduit le coût.