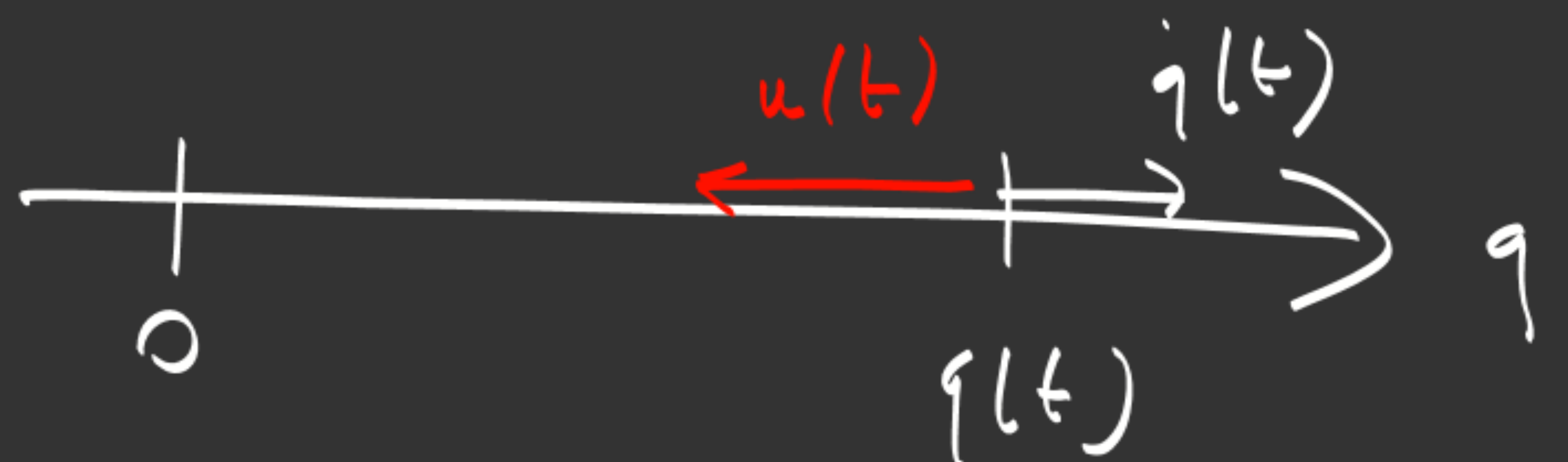
3. Principe du maximum (suite) :



D'après ce qui précède, $u = \underbrace{+1 \text{ puis } -1}_{\gamma_+\gamma_-}$ ou $\underbrace{-1 \text{ puis } +1}_{\gamma_-\gamma_+}$.
L'existence étant admise, supposons qu'on est dans le second cas, à savoir une structure $\gamma_-\gamma_+$ (c'est ce qu'on attend si $q_0 > 0$ et $\dot{q}_0 > 0$) : notons $\bar{t} \in [0, t_f]$ le temps de commutation, on a

$$u(t) = -1, \quad t \in [0, \bar{t}]$$

$$\Rightarrow \dot{q}(t) - \dot{q}(0) = \int_0^t (-1)\, ds = -t \text{ . ie : } \dot{q}(t) = -t + \dot{q}_0, \; t \in [0, \bar{t}]$$

De même,

$$q(t) - \underbrace{q(0)}_{q_0} = \int_0^t \overbrace{\dot{q}(s)}^{-s+\dot{q}_0}\, ds$$

$$= -\frac{1}{2} t^2 + \dot{q}_0 \cdot t$$

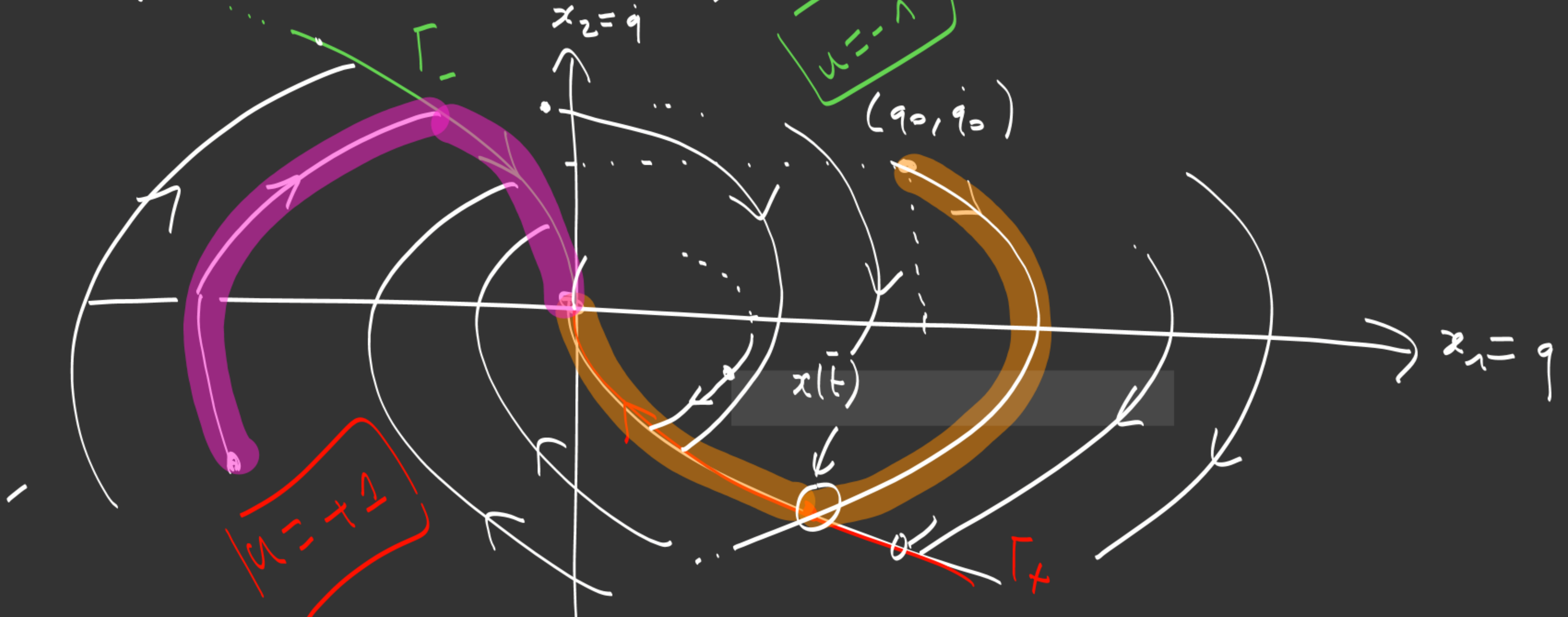
$$\Rightarrow \quad q(t) = -\frac{1}{2} t^2 + \dot{q}_0 \cdot t + q_0$$

On en déduit en particulier que la courbe paramétrée $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$ est un arc de parabole :

$$x_1(t) = q(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}(\underbrace{-t+\dot{q}_0}_{x_2(t)=\dot{q}(t)})^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}_{-\frac{1}{2}t^2+\dot{q}_0 \cdot t} + q_0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = -\frac{1}{2}\dot{q}^2(t) + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0$$

ie $(q(t), \dot{q}(t)) \in$ la parabole d'équation : $x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + \overbrace{cte}^{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}$

De fait, il s'agit de la parabole d'axe de symétrie (Ox_1), de convexité dirigée vers $x_1 < 0$ (cf. $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \dots$) et passant par $(q_0, \dot{q}_0)$:



<u>Rq</u> : on a, le long de l'arc γ_- $(u \equiv -1)$,

$$q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 = cte \quad \text{(intégrale première)}$$

Quand $t \in [\bar{t}, t_f]$, $u(t) = +1$, et on a : (inconnu !)

$$\underbrace{\cancel{\dot{q}(t_f)}}_{0} - \dot{q}(t) \underset{\ddot{q}=u}{=} \int_t^{t_f} (+1)\, ds = t_f - t \implies \dot{q}(t) = t - t_f$$

$$\underbrace{\cancel{q(t_f)}}_{0} - q(t) = \int_t^{t_f} \underbrace{(s - t_f)}_{\dot{q}(s)} ds = \left[\frac{1}{2}s^2 - t_f . s\right]_t^{t_f} = \frac{1}{2}t_f^2 - t_f^2 - \frac{1}{2}t^2 + t_f . t$$

$$\implies q(t) = +\frac{1}{2}t^2 - t_f . t + \frac{1}{2}t_f^2 = \frac{1}{2}(t - t_f)^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) :$$

ce deuxième arc γ_+ $(u=+1)$ parcourt qd $t \in [\bar{t}, t_f]$ la parabole $x_1 = +\frac{1}{2}x_2^2$ (= <u>la</u> parabole d'axe de sym. (Ox_1) et de convexité tournée vers $x_1 > 0$ et passant par $(0,0)$).

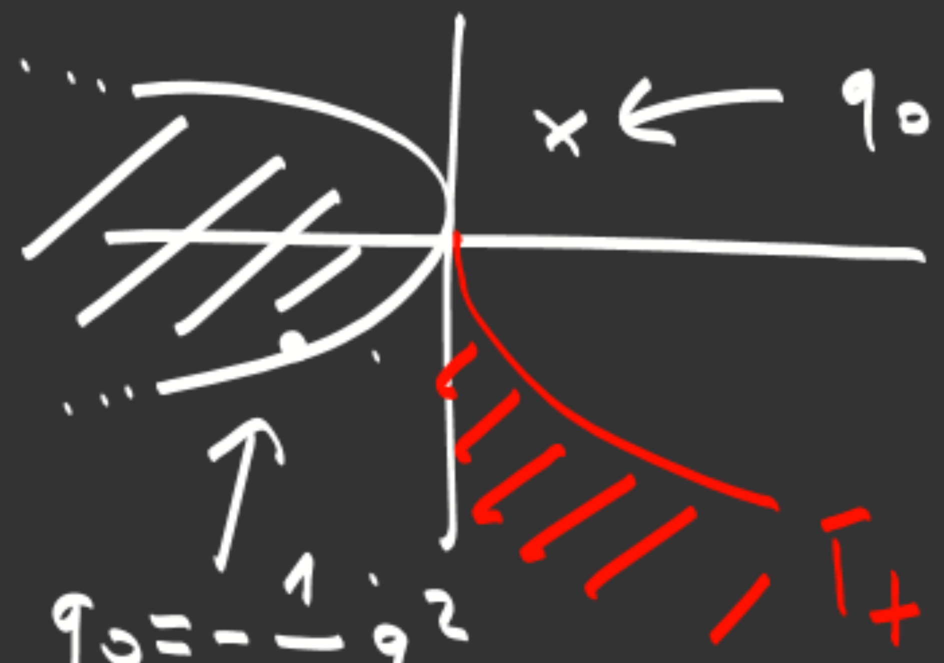
Reste à calculer, pour déterminer complètement la solution, les valeurs de $\bar{t}$ (temps de commutation / switch) et t_f.

En particulier, $x(\bar{t}) \in \Gamma_+$ donc

$$x_1(\bar{t}) = \frac{1}{2}x_2^2(\bar{t}) \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2}x_2^2(\bar{t}) + q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}_{x_1(\bar{t})} = \frac{1}{2}x_2^2(\bar{t})$$

$$\Rightarrow x_2^2(\bar{t}) = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$$

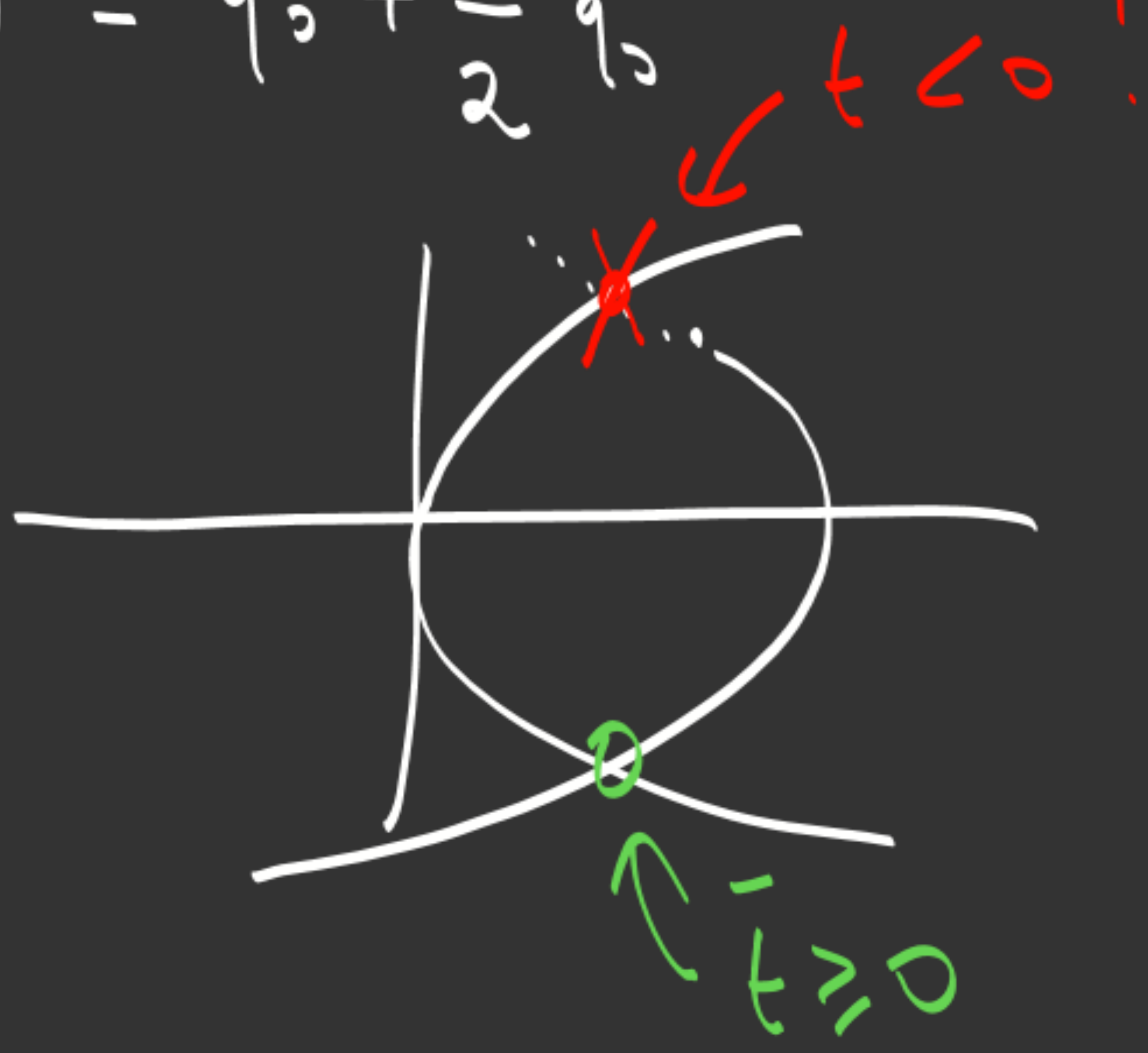
Rq : on constate que, nécessairement, si la structure est $\gamma_-\gamma_+$ ($u=-1$ puis $+1$), alors $\underbrace{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}_{= x_2^2(\bar{t})} \geq 0$



$q_0 = -\frac{1}{2}\dot{q}_0^2$
(ie $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$)

On en déduit $x_2^2(\bar{t}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sur } \gamma_-}}{=} (\underbrace{-\bar{t} + \dot{q}_0}_{\dot{q}(t)})^2 = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$

$\bar{t} < 0$!



$$\Rightarrow \bar{t} = \dot{q}_0 \pm \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \dot{q}_0 + \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}$$

Rq : on doit avoir $\bar{t} \geq 0$, ce qui implique

$$\dot{q}_0 + \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2} \geq 0$$

ie $\dot{q}_0 \geq -\sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}$; or $\dot{q}_0 = -\sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2} \Rightarrow \dot{q}_0 \leq 0$ et

$$\dot{q}_0^2 = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 \Rightarrow q_0 = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 :$$

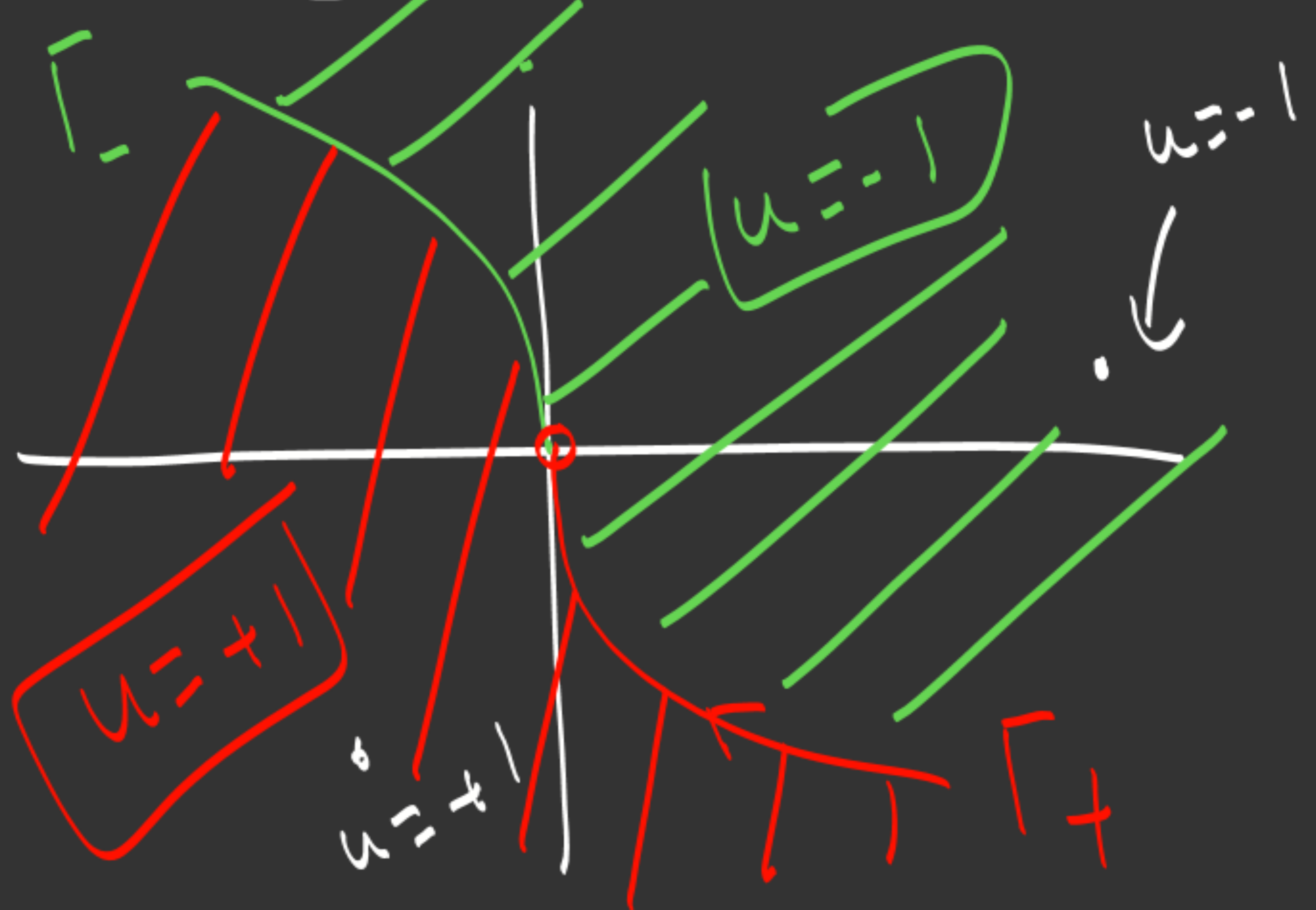
d'après ce qui précède, on a donc $(q_0, \dot{q}_0)$ dans la zone délimitée par $\{q_0 \geq -\frac{1}{2}\dot{q}_0^2\}$ et Γ_+ (cf. dessin ci-avant).

Finalement, déterminons $t_f \geq \bar{t} (\geq 0)$: $\underbrace{q(\bar{t}) = \bar{t} - t_f}_{\text{sur } \gamma_+} = \underbrace{-\bar{t} + \dot{q}_0}_{\text{sur } \gamma_-}$

$$\Rightarrow t_f = 2\bar{t} - \dot{q}_0 = \dot{q}_0 + 2\sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}$$

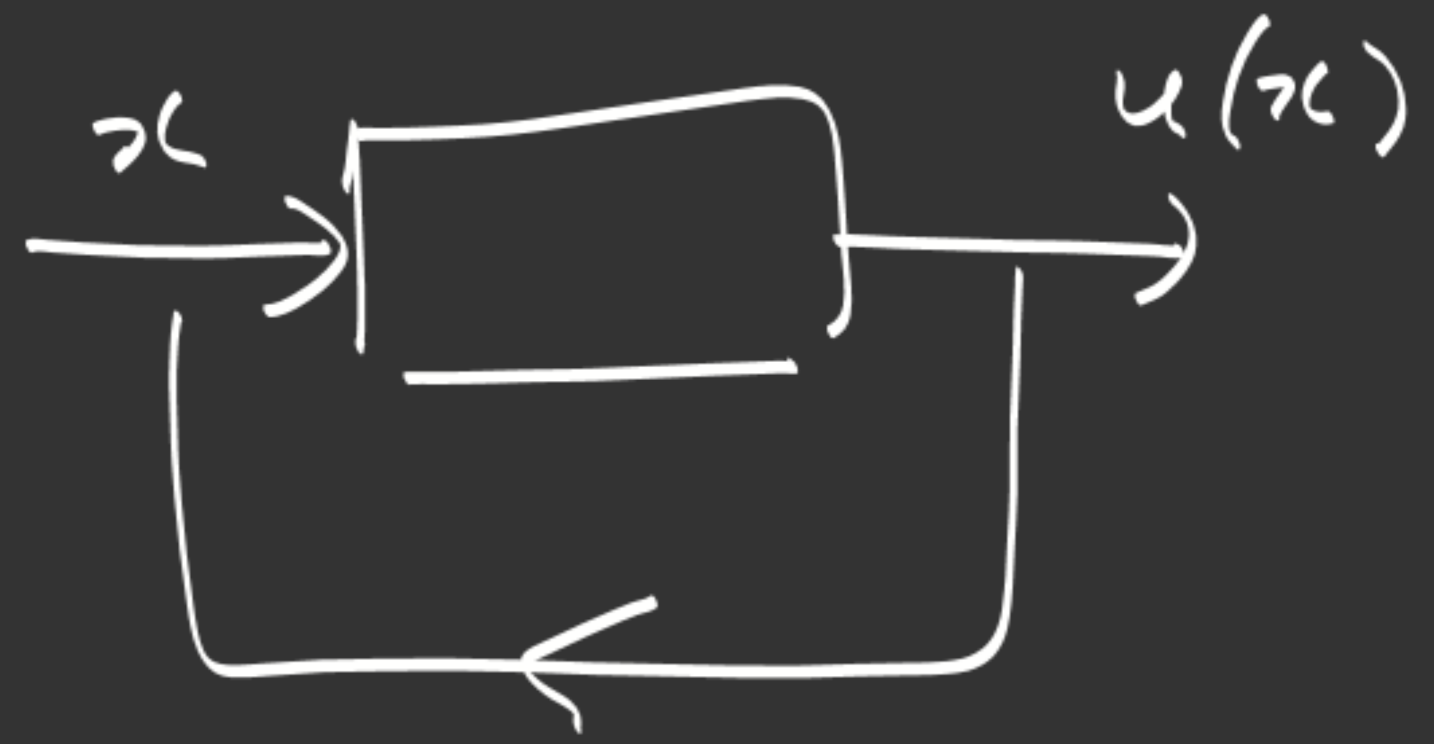
Par symétrie, on voit qu'il existe (géométriquement) une seule façon de relier un pt $(q_0, \dot{q}_0)$ tq on a une structure $\gamma_+\gamma_-$ à l'origine à l'aide d'un arc de parabole $x_1 = +\frac{1}{2}x_2^2 + cte \leftarrow \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 = q_0 - \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 \right)$ puis d'un arc de $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$ ( ). Ayant admis l'existence de solution, on en déduit donc l'unicité : voir le dessin de la synthèse. On a un feuilletage du plan par des "courbes brisées" formées par (en général) deux arcs de paraboles.

En particulier, l'ensemble des conditions initiales ne donnant pas lieu à commutation (soit $u \equiv +1$, soit $u \equiv -1$, $t \in [0, t_f]$) est $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ (ens. d'intérieur vide et de mesure nulle).



Rq. : i) on obtient ainsi la synthèse, i.e. le contrôle "en boucle fermée" ("feedback") :

$$u = u(x) = u(q, \dot{q})$$



"boucle fermée" : en fonction de l'état

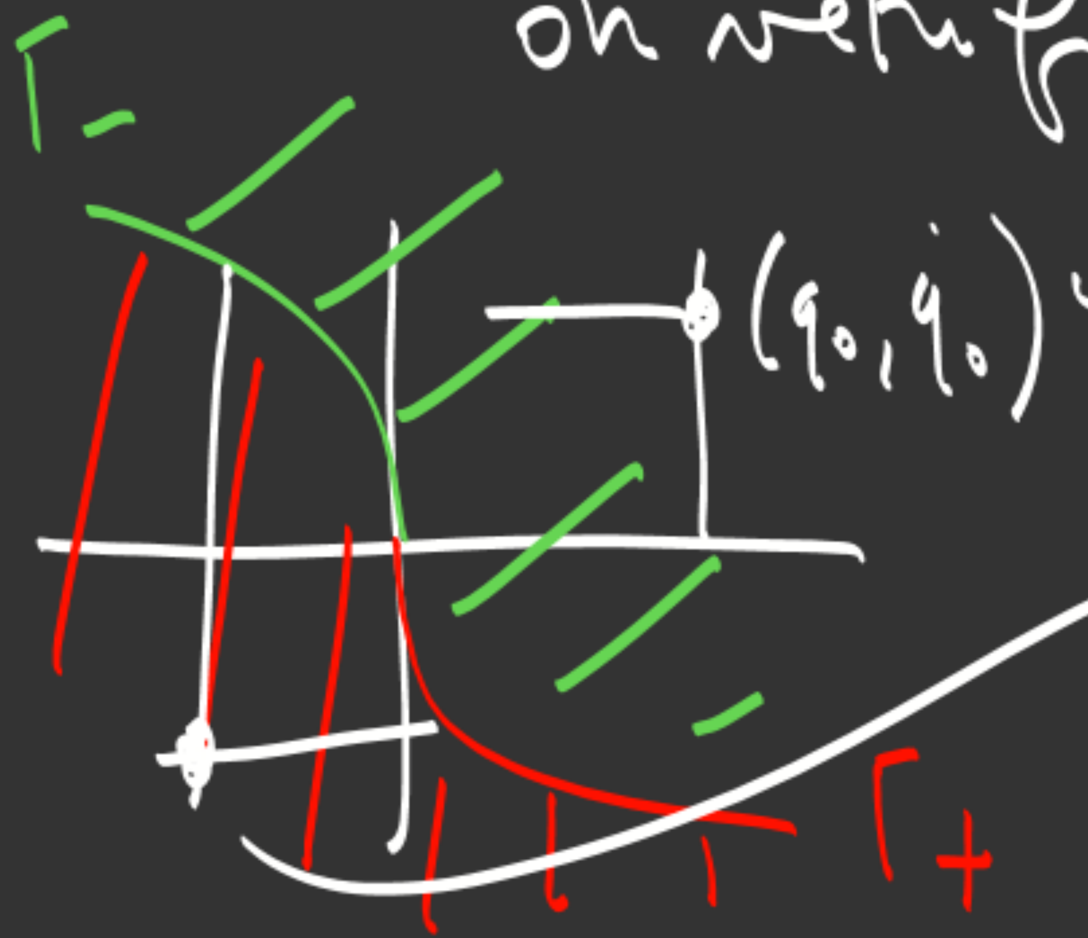
on sait déterminer la commande optimale

(plus fort que de calculer une loi de commande pour une condition initiale particulière : $u(t)$)

pour un x_0 donné

ii) on a $t_f = +\dot{q}_0 + 2\sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}$ qd la structure est $\gamma_-\gamma_+$;

on vérifie de même que



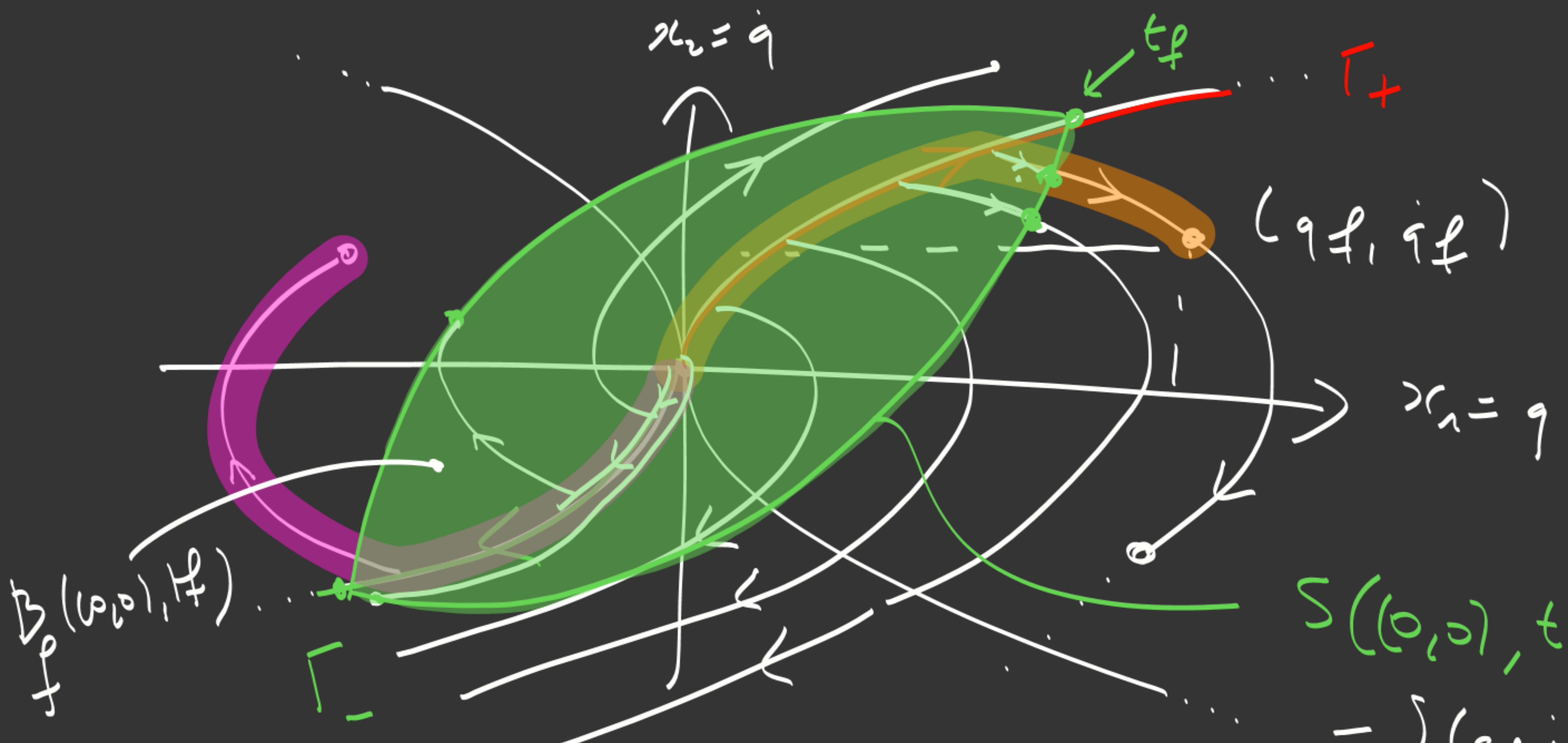
$t_f = -\dot{q}_0 + 2\sqrt{-q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}$ dans le cas $\gamma_+\gamma_-$:

$\Rightarrow$ on définit ainsi $t_f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(q_0, \dot{q}_0) = x_0 \longmapsto t_f(q_0, \dot{q}_0)$$

Cette fonction, la "fonction valeur" du problème (= la fonction qui associe à la condition initiale le coût optimal), est continue, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.
Elle vérifie l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) en un sens "faible" (solution de "viscosité").

iii) Considérons le problème symétrique consistant à partir de l'origine $(0,0)$ et à rallier en temps minimal une condition finale arbitraire $(q_f, \dot{q}_f)$:



$S((0,0), t_f) = \text{sphère}$
$= \{(q_f, \dot q_f) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{temps min} = t_f \text{ depuis } (0,0)\}$

Exo : vérifier que la sphère est donnée par deux arcs de paraboles.

On constate que, $\forall t_f > 0$, on a des singularités sur la sphère ($\neq$ sphères de petit rayon en géométrie riemannienne).