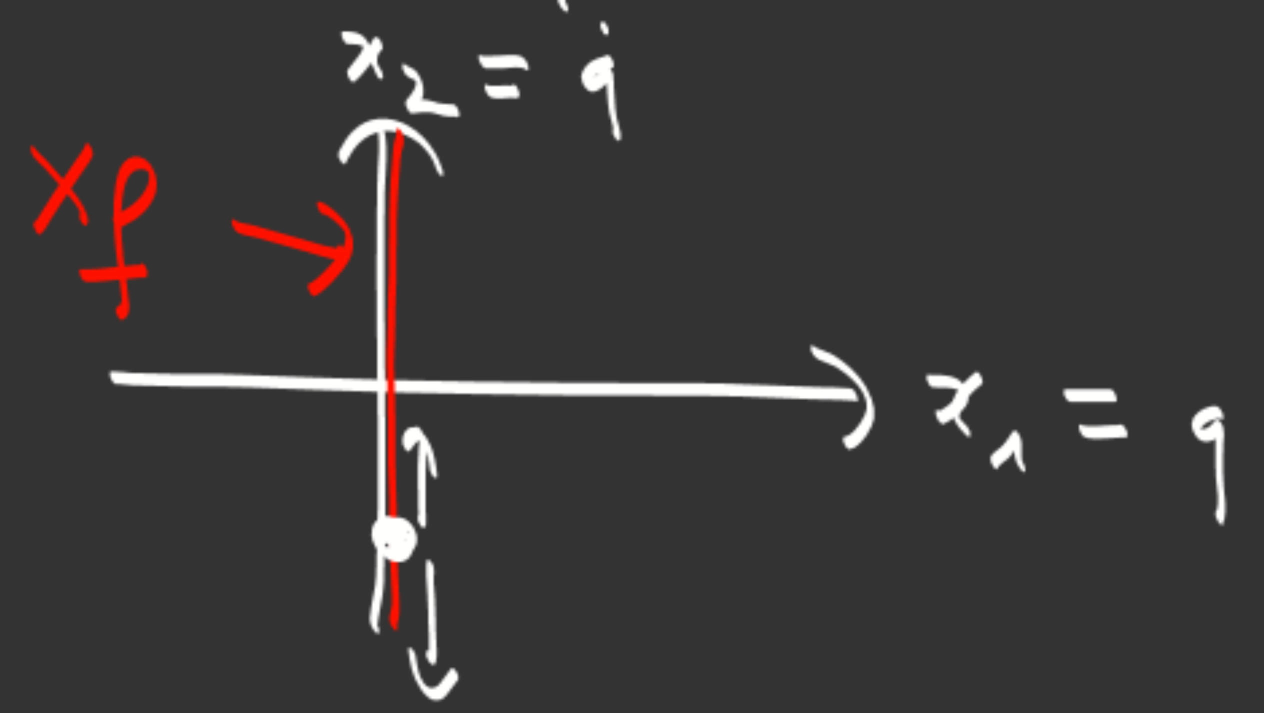
Exo (suite) :

f. X_f sev

i) $\dot q(t_f)$ libre ie $X_f := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \}$ (x_2 libre)



Quel que soit $x \in X_f$, $T_x X_f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = X_f$;

en effet, $X_f = h^{-1}(\{0\})$ $\left(= \mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

avec $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x_1 = h.x$

Alors, si $x \in X_f$, $h'(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{rg } 1}$ $(= h)$

Donc, $T_x X_f = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
$= \{ d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 = 0 \}$
$(= X_f)$

En particulier, $p(t_f) \perp \underbrace{T_{x(t_f)} X_f}_{X_f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}}$

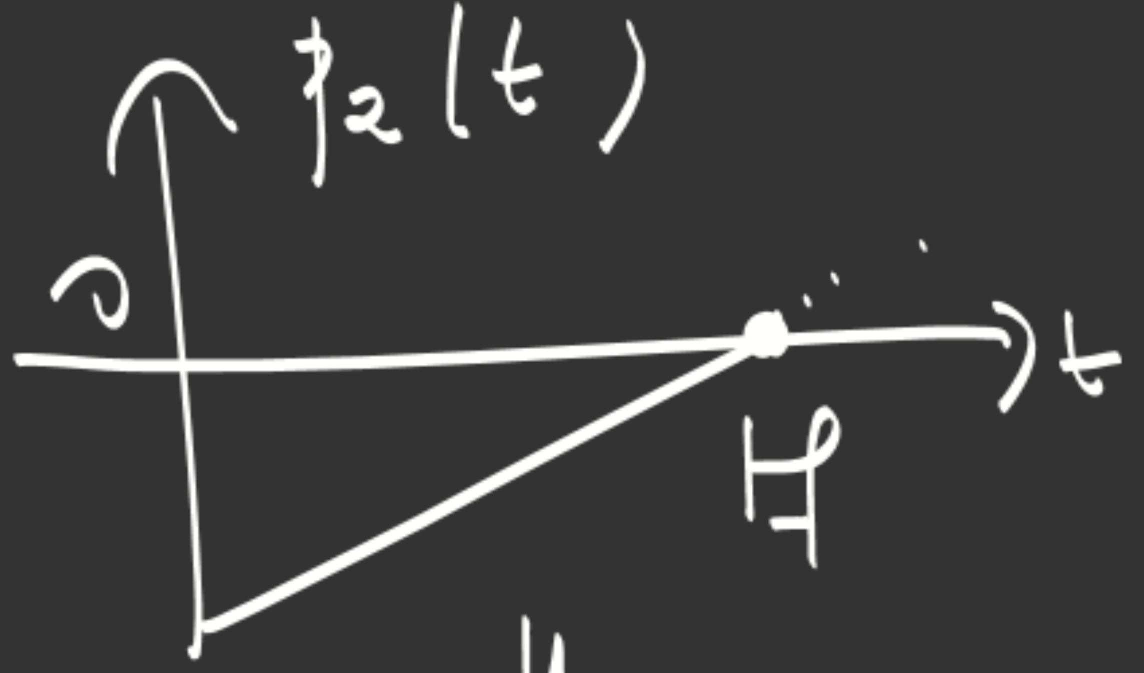
i.e. $p^{(t_f)} \perp \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$: $p_2(t_f) = 0$.

Les conditions i) et ii) du PMP vues précédemment sont inchangées, donc

i) $\Rightarrow$ p_2 affine (et $p_1 = cte$)

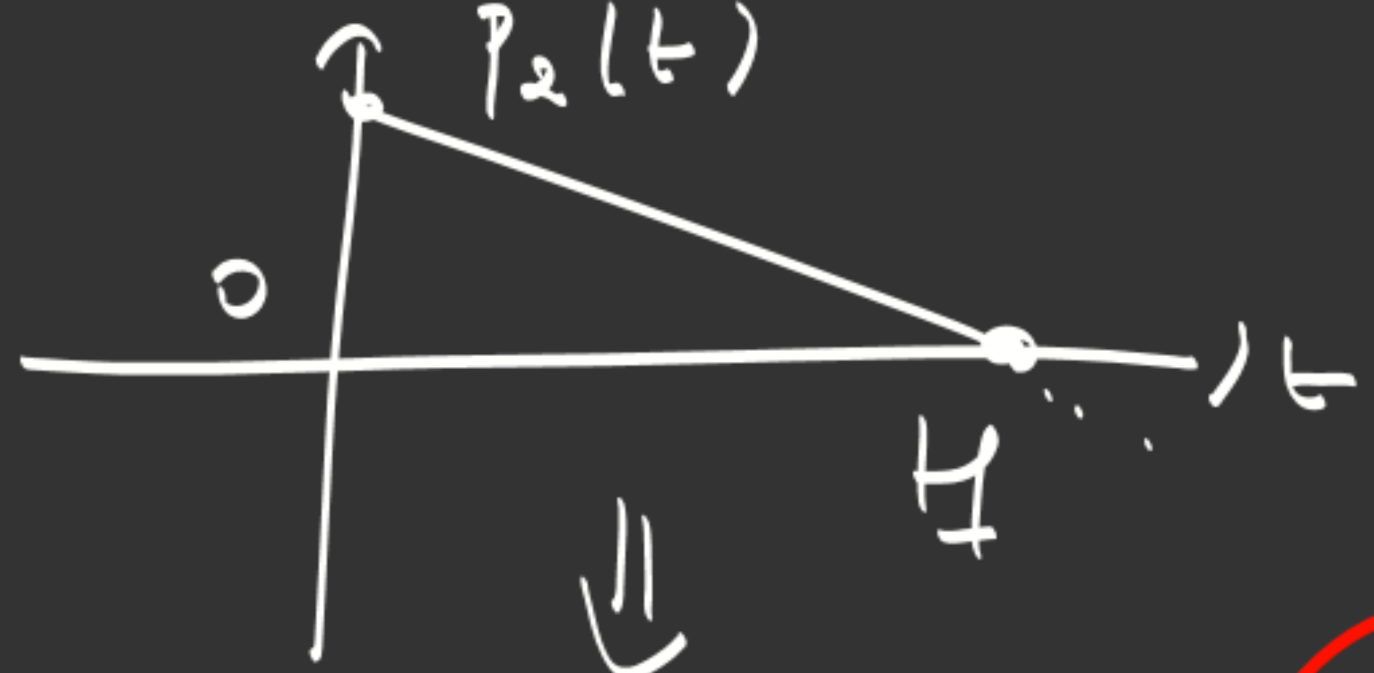
ii) $\Rightarrow$ $u(t) = \mathrm{sgn}\, p_2(t)$ si $p_2(t) \neq 0$ ce cas-là arrive-t-il souvent ?

Or, désormais, $p_2(t_f) = 0$ donc est de signe constant sur $[0, t_f]$, le cas $p_2 \equiv 0$ ($p_2(t) = 0, \forall t$) étant exclu (même raisonnement que précédemment) :



$\Downarrow$

$u(t) = -1$ (p.p.)



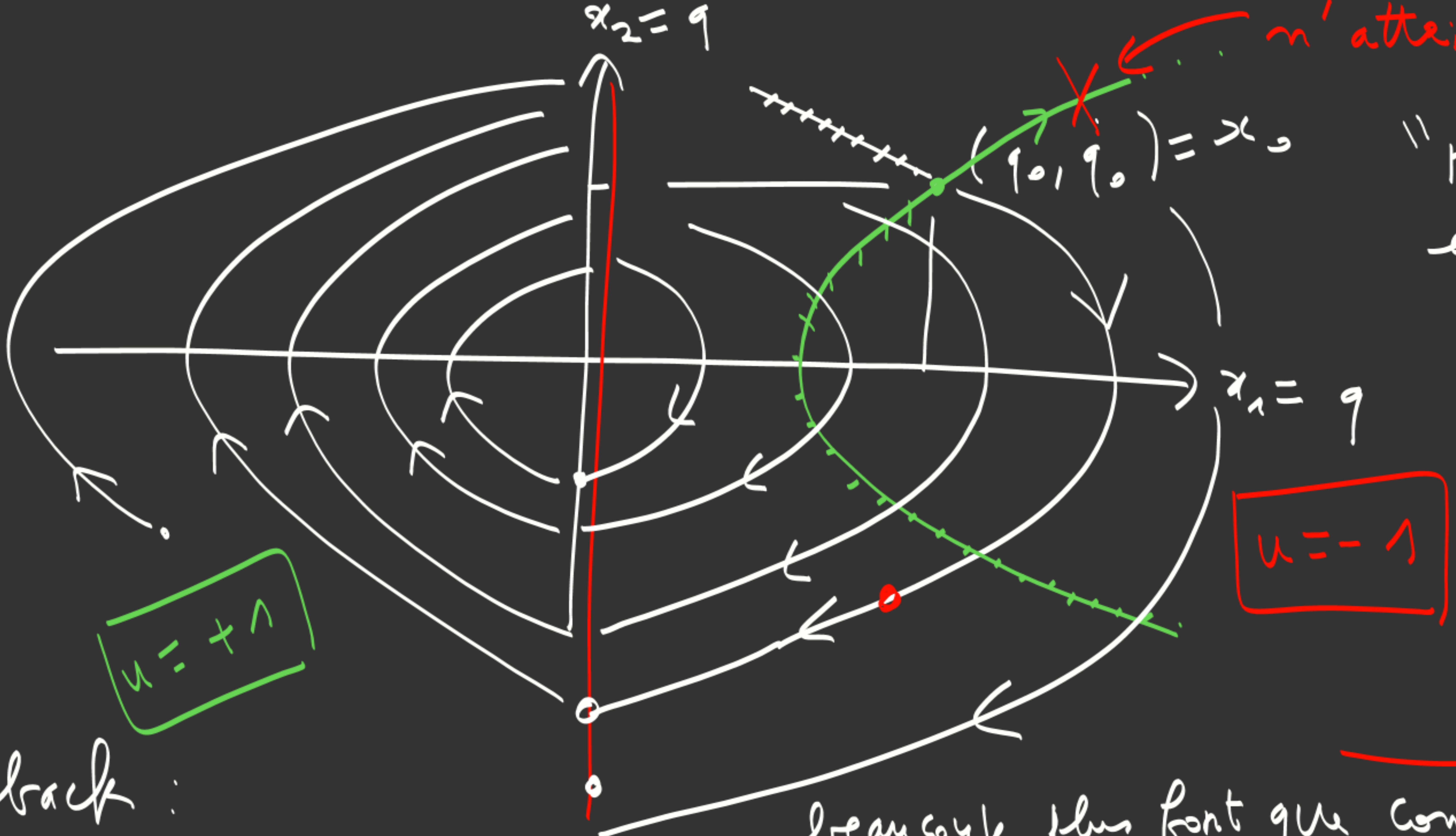
$\Downarrow$

$u(t) = +1$ (p.p.)

cf. $u(t_f)$ indéterminé... peu importe !

Ayant admis l'existence de solution, on vérifie géométriquement qu'il n'y a qu'un seul moyen de relier $(q_0, \dot{q}_0) = x_0$ à la cible $X_f = (Ox_2)$ $(= \{x_1 = 0\})$. Pour mémoire, le calcul précédent mq :

- si $u \equiv -1$, $\boxed{q(t) = -\frac{1}{2}\dot{q}^2(t)} + q_0 - \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$ (ie $q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 =$ cte)
- si $u \equiv +1$, $\boxed{q(t) = +\frac{1}{2}\dot{q}^2(t)} + q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$ (ie $q(t) - \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = q_0 - \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 =$ cte)



« retour ~~à l'équilibre~~ en temps min »

{ Feuilletage du plan par traj. temps min.

Feedback : $u(x) = u(q, \dot q) = \underbrace{u(q)}_{\text{boucle fermée}} = -\operatorname{sgn}(q)$

beaucoup plus fort que $\overbrace{\text{connaître } u(t), \forall t,}^{\text{boucle ouverte}}$ mais pour un x_0 particulier

Calcul de t_f (min) : résoudre $q(t_f) = 0$ (équ. de degré deux).

Même question pour $X_f = \{x_2 = 0\}$ (ie "arrêt ~~à l'origine~~ en temps min")

→ calculer $T_x X_f$ pour $x \in X_f$

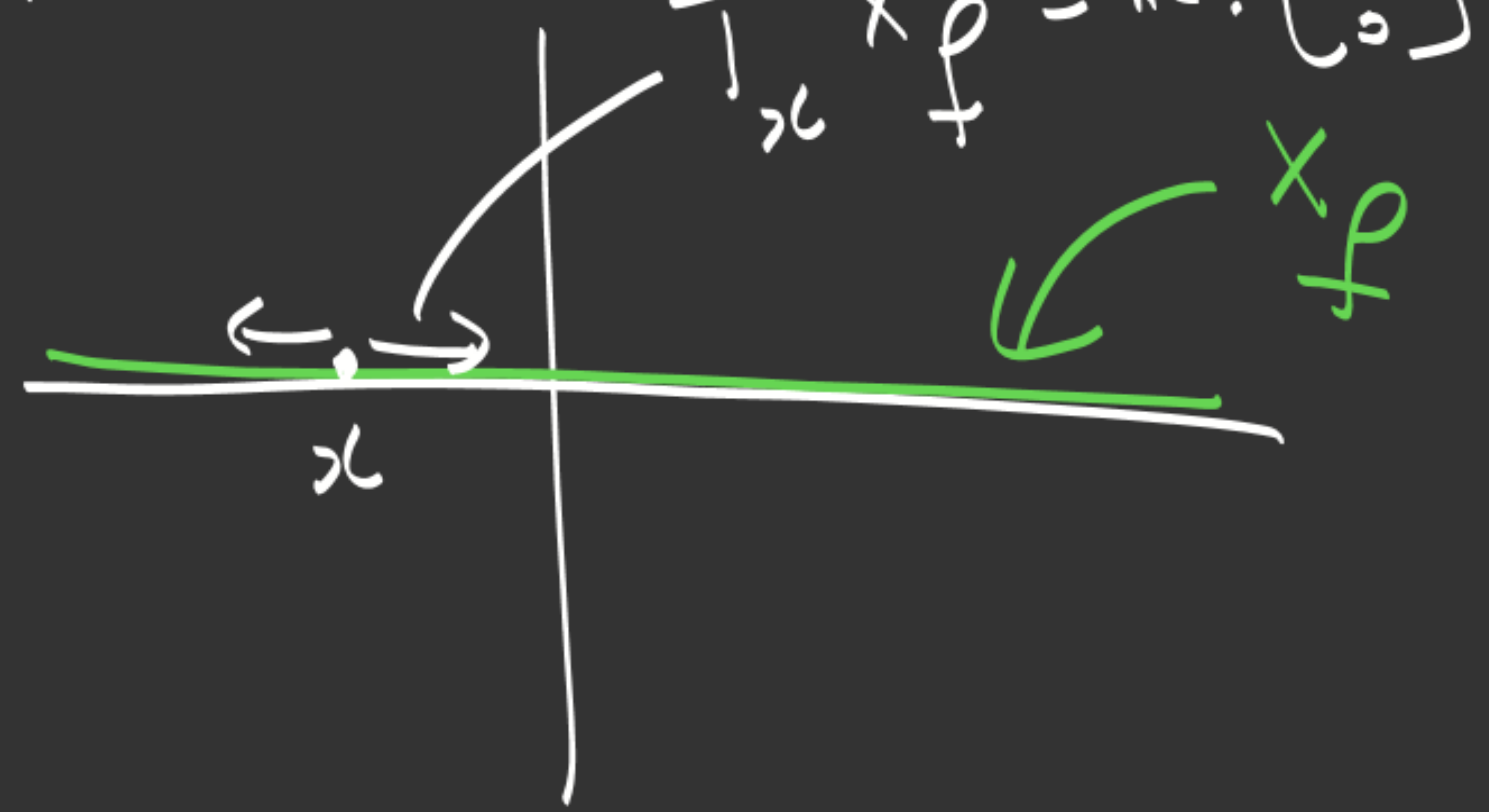
→ déterminer la cond. de transversalité iii)

→ en déduire la synthèse dans le plan

$$h(x) = x_2$$

$$h'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ de rg } 1$$

$$\ker(h'(x)) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$



On doit avoir $p(t_f) \perp T_{x_f}(X_1)$

i.e $\left(p(t_f) \,\middle|\, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0$

$\Rightarrow p_1(t_f) = 0$

Comme p_1 est constante $\Rightarrow p_1 \equiv 0$

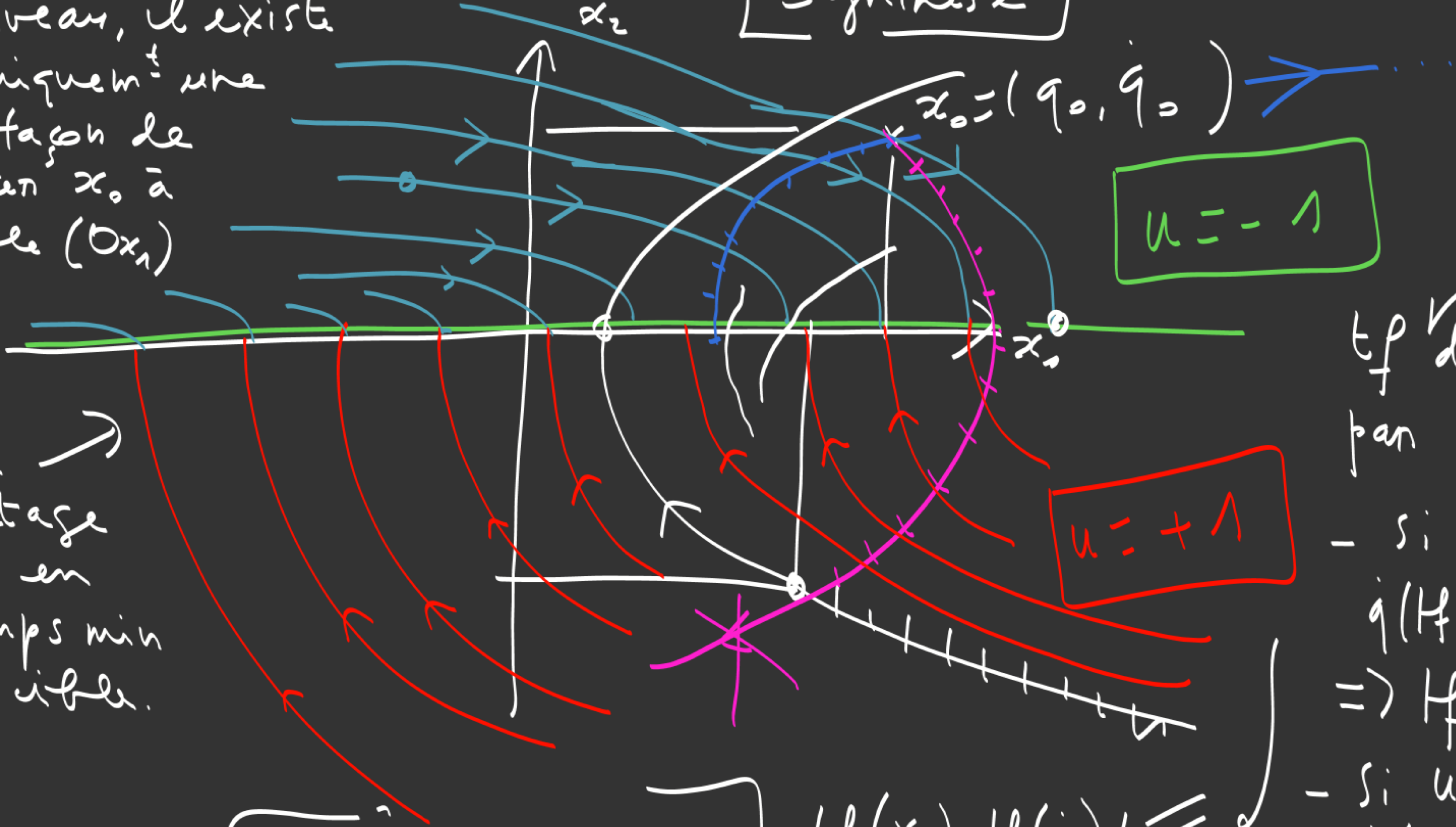
Comme $\dot{p}_2 = -p_1 \Rightarrow p_2$ est cte

On a montré que $p_2 \equiv 0$ est impossible

En clair $u(t) = \text{sign}(p_2) = +1$ ou -1 partout

Synthèse

Ā nouveau, il existe géométriquement une seule façon de connecter x_0 à la cible (Ox_1)



Nouveau feuilletage du plan en traj. temps min vers la cible.

t_f min déterminé par $\dot q(t_f) = 0$:

- si $u \equiv -1$, $\dot q(t_f) = -t + \dot q_0$ $\Rightarrow t_f = \dot q_0 \geq 0$
- si $u \equiv +1$, $\dot q(t_f) = t + \dot q_0$ $\Rightarrow t_f = -\dot q_0 \geq 0$

$\Rightarrow$ $t_f(x_0) = t_f(\dot q_0) = |\dot q_0|$ (pas C^1...)

Feedback : $\boxed{u(x) = u(q, \dot q) = -\mathrm{sgn}(\dot q)}$

<u>Exo</u>. Résoudre le pb suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u^2(t)\,dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t),\ t \in [0,1] \ (p.p.) \\ x(0) = -1,\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$f^0(x,u) = \frac{1}{2}u^2$

$n = m = 1$, $f(x,u) = -x + u$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f = [-1\ \ 1])$

<u>Rq</u>. : $U = \mathbb{R}$ (pas de contraintes sur le contrôle)

On admet l'existence de solution. Si (x,u) est sol., alors PMP

$\Rightarrow \exists (p^0, p) \neq (0,0)$ tq :

i) <u>équ. adjointe</u> : $H(x,p,u) = p^0 \frac{1}{2} u^2 + p \cdot (-x + u)$, $\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t))$

$= p(t)$

ii) maximisation du Hamiltonien :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}p^0u^2 + p(-x+u) \longrightarrow \max \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(Rappel : p.p. $t \in [0,1]$,

$$H(x(t),p(t),u(t)) = \max_{v \in U = \mathbb{R}} H(x(t),p(t),v)$$

i.e p.p. $t \in [0,1]$,

$$u(t) \in \underbrace{\arg\max_{v\in\mathbb{R}}}_{\text{"ens. des maximiseurs"}} H(x(t),p(t),v).\ )$$

Si $p^0 < 0$, on peut poser $p^0 = -1$ (cf. homogénéité) auquel cas le pb a une unique sol. (cf. max d'un polynôme de deg. 2 concave) donnée par $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$:

$-u + p = 0 \Rightarrow u = p$ (on a "éliminé" u en fonction de x et p).

Vérifions par ailleurs que le cas "anormal" $p^0=0$ est interdit : par l'absurde, supposons $p^0=0$; alors $H(x,p,u) = p(-x+u)$ et le pb $\displaystyle H(x(t),p(t),u) \longrightarrow \max_{u\in U=\mathbb{R}}$ admet $u(t)$ pour sol., p.p. $t\in[0,1]$. Or, le pb

$$\begin{cases} p(-x+u) \longrightarrow \max & (\text{avec } x \text{ et } p\in\mathbb{R} \text{ fixés}) \\ u\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- n'a pas de solution si $p\neq 0$
- admet n'importe quel $u\in\mathbb{R}$ pour sol. si $p=0$

Donc, $p(t)=0$ p.p. t (sinon pas de sol., ce qui contredirait la condition ii) de max !)

$\Rightarrow p \equiv 0$ (cf. p "AC" = absolument continue, donc continue)

$\Rightarrow (p^\circ, p) = (0,0)$: interdit par le PMP.

$p(0)$ inconnu ← $\neq$ pb de Cauchy ("à valeur initiale")

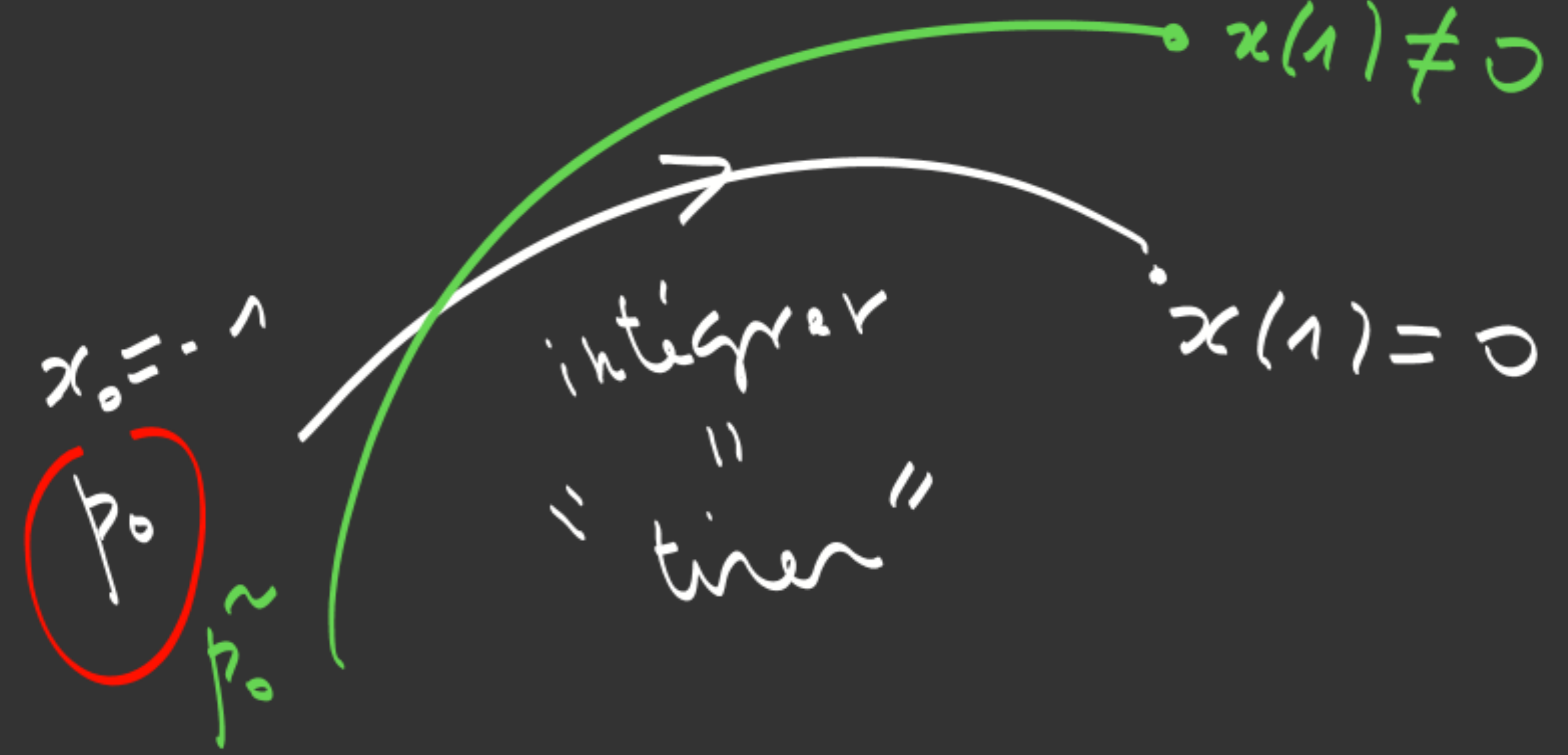
On est donc amené à résoudre le problème aux deux bouts suivant :

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) = -x(t) + p(t) & \text{(cf. } u(t) = p(t) \text{ p.p.)} \\ \dot{p}(t) = p(t) \\ x(0) = -1, \; x(1) = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce problème par une méthode de tir (cf. §4.) :

(1) $\iff$ trouver la valeur p_0 de $p(0)$ tq la sol. notée $x(t, p_0)$ de

$$\begin{cases} \dot x(t) = -x(t) + p(t) \\ \dot p(t) = p(t) \\ x(0) = -1, \ p(0) = p_0 \end{cases}$$



vérifie $x(1, p_0) = 0$. On est donc ramené à (2) $\iff$ (1) avec

(2) Trouver $p_0 \in \mathbb{R}$ tq $\boxed{x(1, p_0) = 0}$. ← équation de tir

Ici, le calcul (en général hors de portée analytique) de $x(t, p_0)$ peut se faire (cf. EDO linéaire : $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix}(t) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}(t)$ avec $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix}$) :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = p(t) \\ p(0) = p_0 \end{cases} \Rightarrow p(t) = e^{t} \cdot p_0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -x(t) + e^{t} \cdot p_0$$

Équ. homogène : $\dot{x}(t) + x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = e^{-t} \cdot C$

Équ. avec second membre : on cherche la sol. (générale) de $\dot{x}(t) + x(t) = e^{t} \cdot p_0$ sous la forme $x(t) = e^{-t} \cdot C(t)$

$$x(t) = C(t)e^{-t}$$

$$x'(t) = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t}$$

$$C'(t)e^{-t} - \cancel{C(t)e^{-t}} + \cancel{C(t)e^{-t}} = e^{t} p_0$$

$$\Rightarrow C'(t) = e^{2t} p_0$$

$$C(t) = \frac{1}{2} e^{2t} p_0 + \alpha \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} e^{2t} p_0 + \alpha\right) e^{-t}$$

$$\cdot\ x(0) = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} p_0 + \alpha\right) = -1 \Rightarrow \alpha = -1 - \frac{1}{2} p_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} e^{2t} p_0 - 1 - \frac{1}{2} p_0\right) e^{-t}$$

Cherchons p_0 tq $x(1) = 0$

On résout $\left(\frac{1}{2} e^{2} p_0 - 1 - \frac{1}{2} p_0\right) e^{-1} = 0$

$$\Rightarrow \quad p_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^2 - 1)} = \frac{2}{e^2 - 1}$$