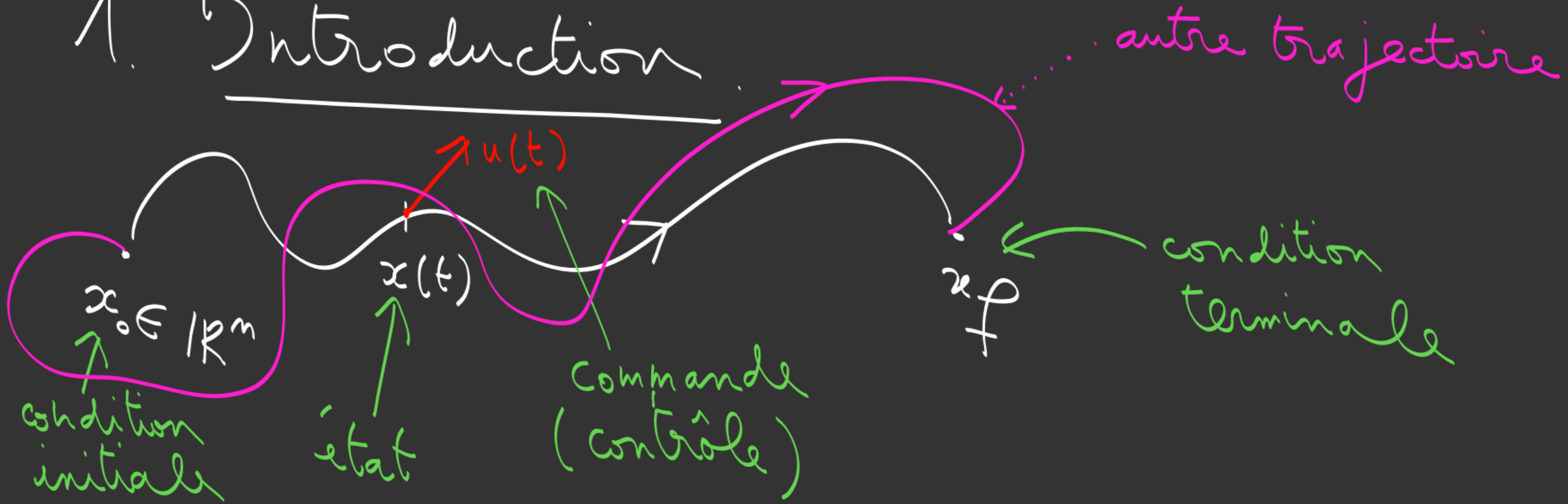
Commande optimale

1. Introduction



i) <u>commandabilité</u> : existe-t-il (au moins) une commande telle que, partant de x_0, on atteint effectivement la cible x_f à l'instant final ? (<u>Rq</u> : d'un pt de vue optimisation, on répond à la question "l'ensemble des contraintes est-il non vide ?")

ii) <u>commande optimale</u> : si on a commandabilité, on cherche les contrôles (et les trajectoires associées) qui minimisent un certain coût $\longrightarrow$ existence (Th. Filippov...)

iii) <u>condition nécessaire de solution</u> : si on a une sol., alors que vérifie-t-elle ? En commande optimale, le Th. associé s'appelle le principe du maximum (de Pontryagin).

→ Dans le cadre de ce cours, on s'intéressera uniquement au iii) et aux algos associés (cf. Ch. 4).

<u>Formulation mathématique</u> : on décrit notre système par une EDO contrôlée :

contrôle change le second membre

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f]$$

dérivée en temps de l'état x

(on pourrait prendre $f(t, x(t), u(t))$...)

système non-autonome si dép. en temps t

<u>Rq.</u> : à chaque choix de contrôle $u : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, on a un nouveau second membre et donc une nouvelle EDO; si on pose $g(t, x) := f(x, u(t))$, on a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

pb de Cauchy : $\exists!$ de sol. (Th. de Carathéodory)

On a une cible x_f, on a en plus des contraintes sur le contrôle : $u(t) \in U$, $t \in [0, t_f]$

Rq. : la dynamique et les contraintes sur le contrôle sont à comprendre presque partout (p.p.) :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f] \quad \text{(p.p.)}$$

x pas de classe $\mathcal{C}^1$, en général, mais simplement "absolument continue"

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \quad \text{(p.p.)}$$

Rappel : on appelle $\overbrace{\text{absolument continue}}^{AC}$ une fonction

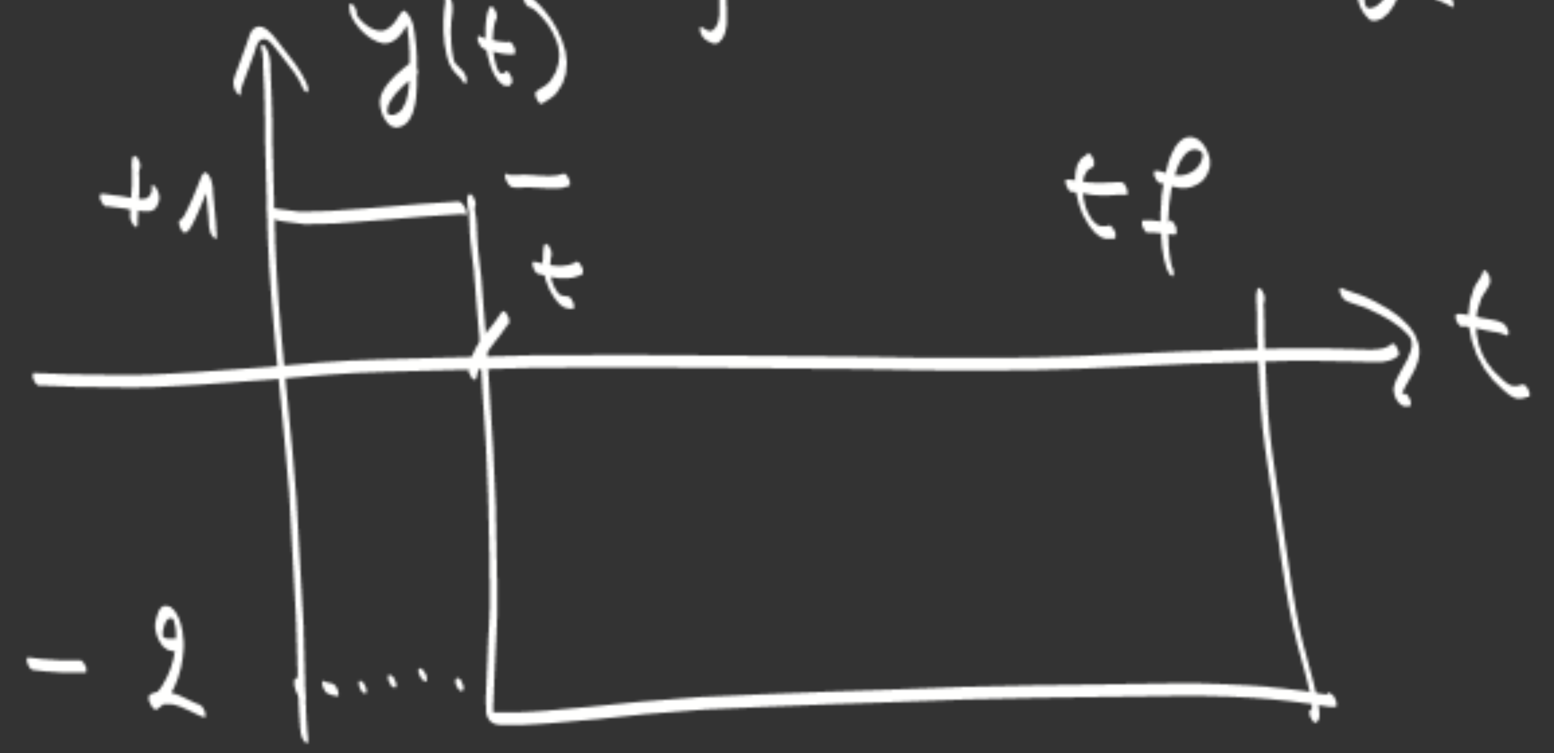
$$x : [0, t_f] \to \mathbb{R}^n \quad \text{tq} \quad \exists\, y \in \mathcal{L}^1([0,t_f], \mathbb{R}^n)$$

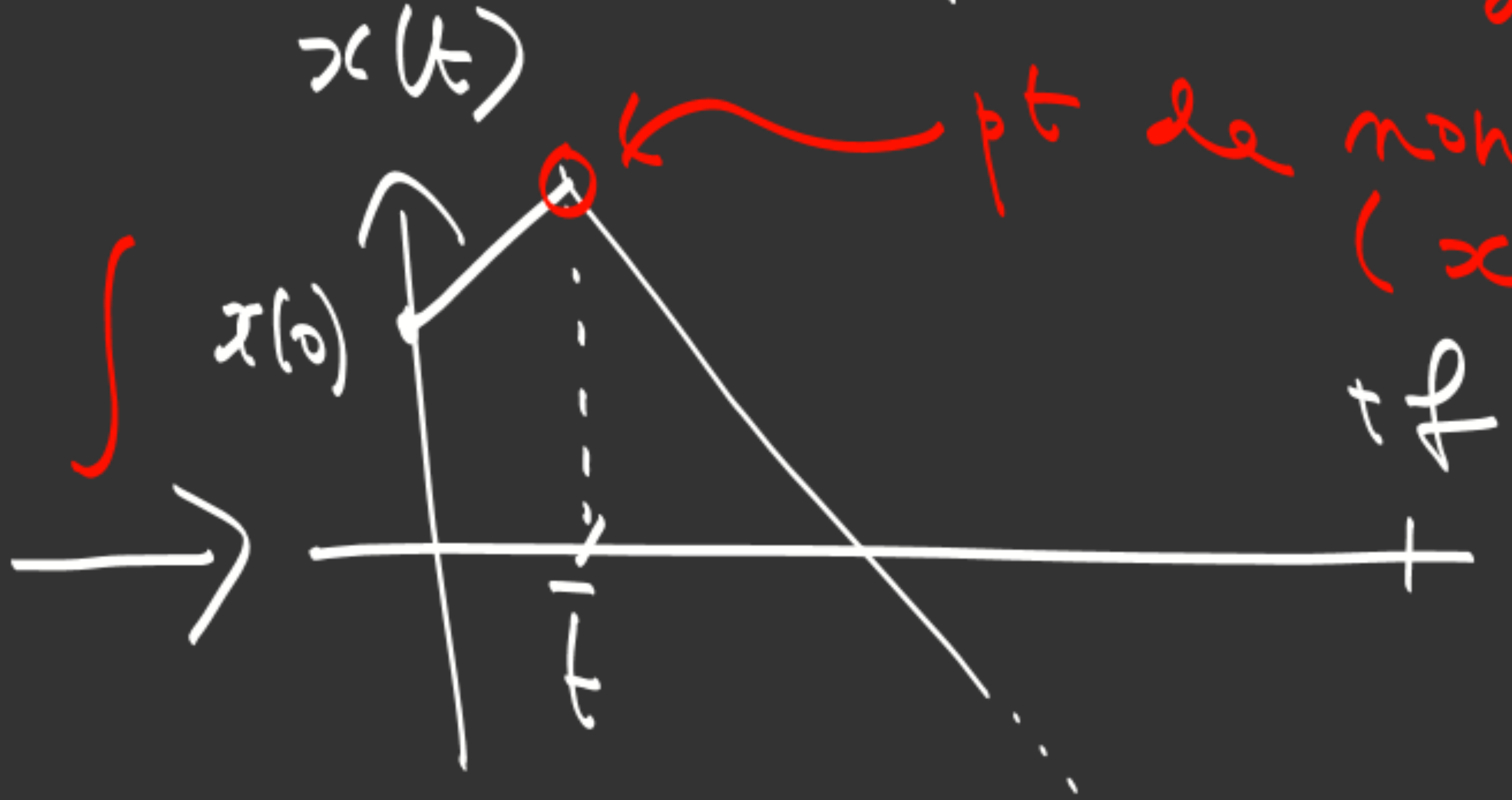
$$\text{tq} \quad x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\,ds, \quad t \in [0, t_f]$$

f. $y \in \mathcal{L}^1([0,t_f]) \Rightarrow y_{|[0,t]} \in \mathcal{L}^1([0,t])$ avec $t \in [0,t_f]$

En d'autres termes, une fonction AC est une primitive d'une (classe de) fonction $\mathcal{L}^1$.

Ex. :



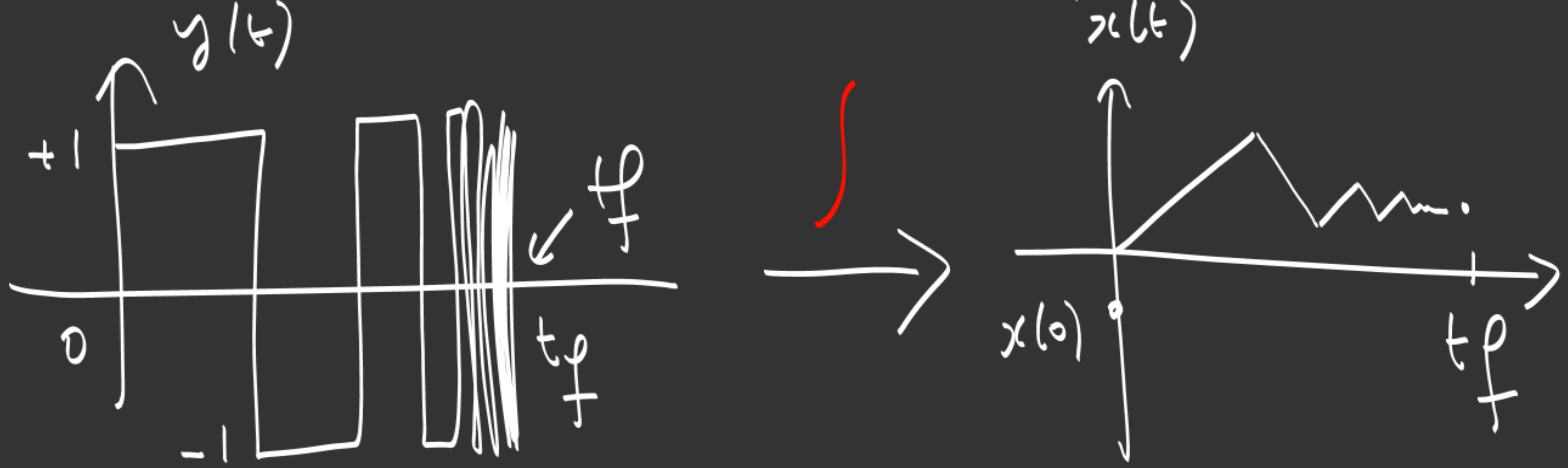


pt de non-différentiabilité (x AC, pas $\mathcal{C}^1$)

Rq. : – si $\dot{x} \in \mathcal{L}^\infty([0,t_f], \mathbb{R}^n)$ (ie s'il existe $y \in \mathcal{L}^\infty$ tq $x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\,ds$) alors $x \in W^{1,\infty}([0,t_f], \mathbb{R}^n)$

$\subset W^{1,1}([0,t_f], \mathbb{R}^n) = AC([0,t_f], \mathbb{R}^n)$, ie x Lipschitz.

– il existe des fonctions AC dont la dérivée a un nombre infini de discontinuités (Phénomène de Fuller) :



<u>Fonction coût (critère...)</u> : on évalue la performance d'un contrôle (et de la trajectoire qu'il génère) en intégrant une quantité (le "lagrangien") le long de la trajectoire :

$$\int_0^{tf} f^0(x(t), u(t))\, dt \in \mathbb{R}$$

coût de Lagrange
(cf. aussi coût de Mayer ou de Bolza)

avec $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

<u>données du problème</u> :
- f, f^0
- $U \subset \mathbb{R}^m$
- x_0, x_f, t_f

peut être inconnu

Déf. : on appelle solution un couple $u \in \mathcal{L}^\infty([0,tf],\mathbb{R}^m)$ et $x : [0,tf] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la trajectoire (lipschitz) associée tq

i) le couple est admissible (= vérifie les contraintes)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),\ t \in [0,tf] \quad (p.p.) \\ x(0) = x_0,\ x(tf) = x_f \\ u(t) \in U,\ t \in [0,tf]\ (p.p.) \end{cases}$$

→ la sol. maximale correspondante est définie au moins sur $[0,tf]$

ii) ce couple minimise le coût : si (y, v) est un autre couple état-contrôle admissible ($\dot{y}(t) = f(y(t), v(t)), y(0) = x_0 \dots$) alors :

$$\int_0^{tf} f^0(x(t), u(t))\, dt \leqslant \int_0^{tf} f^0(y(t), v(t))\, dt.$$

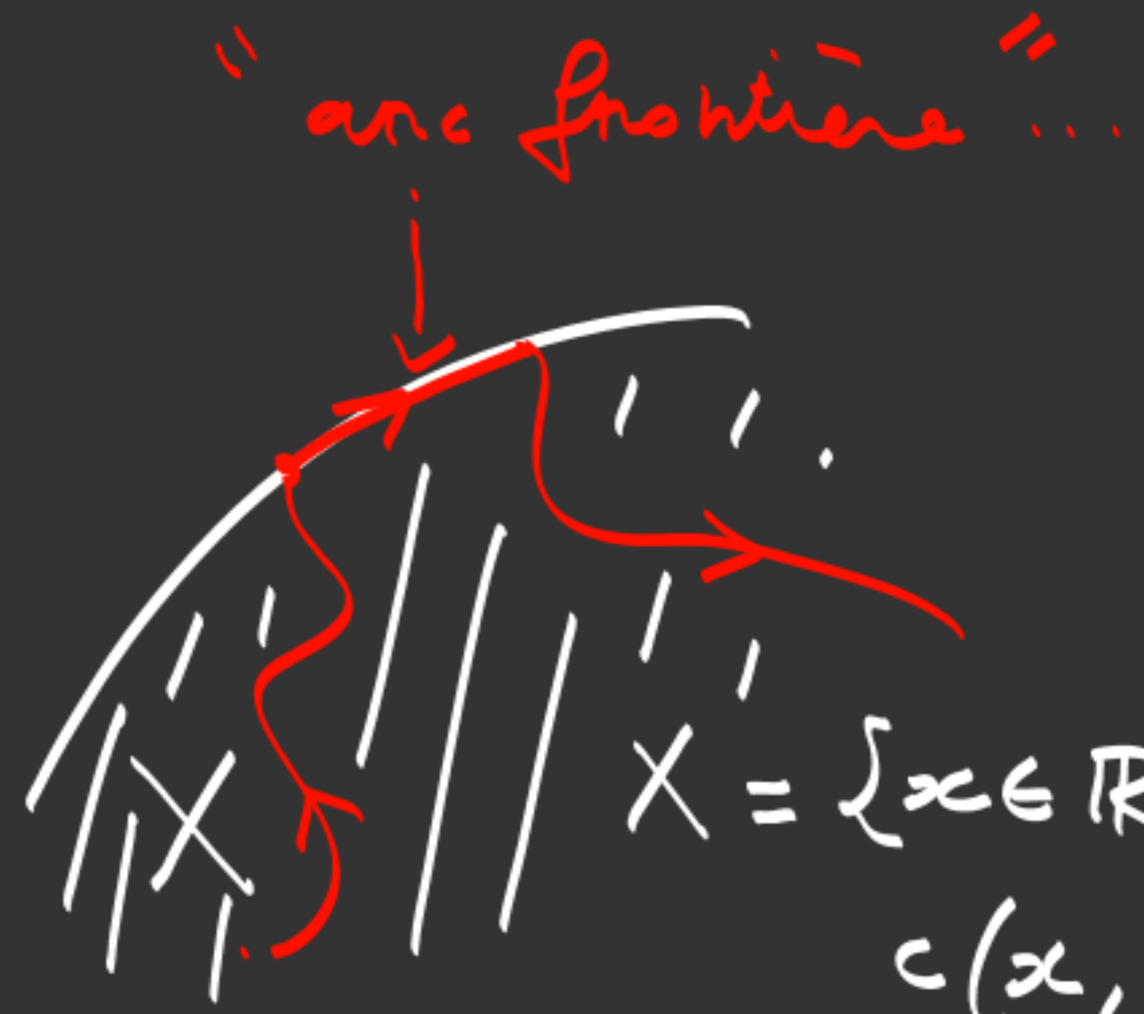
<u>Rq</u> : i) si $f^0(x,u) = 1$, on a $\int_0^{tf} \underbrace{f^0(x(t), u(t))}_{1} dt = tf$: avec tf libre (auquel cas une solution est un triplet (x, u, tf)), on résout donc le pb de temps minimal nécessaire pour relier x_0 à x_f.

ii) plus généralement, on pourrait aussi avoir des contraintes sur l'état :

$$x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n,\ t \in [0, t_f]$$

$$\left(\Leftarrow c(x(t), u(t)) \leq 0,\ t \in [0, t_f] \ldots \right)$$

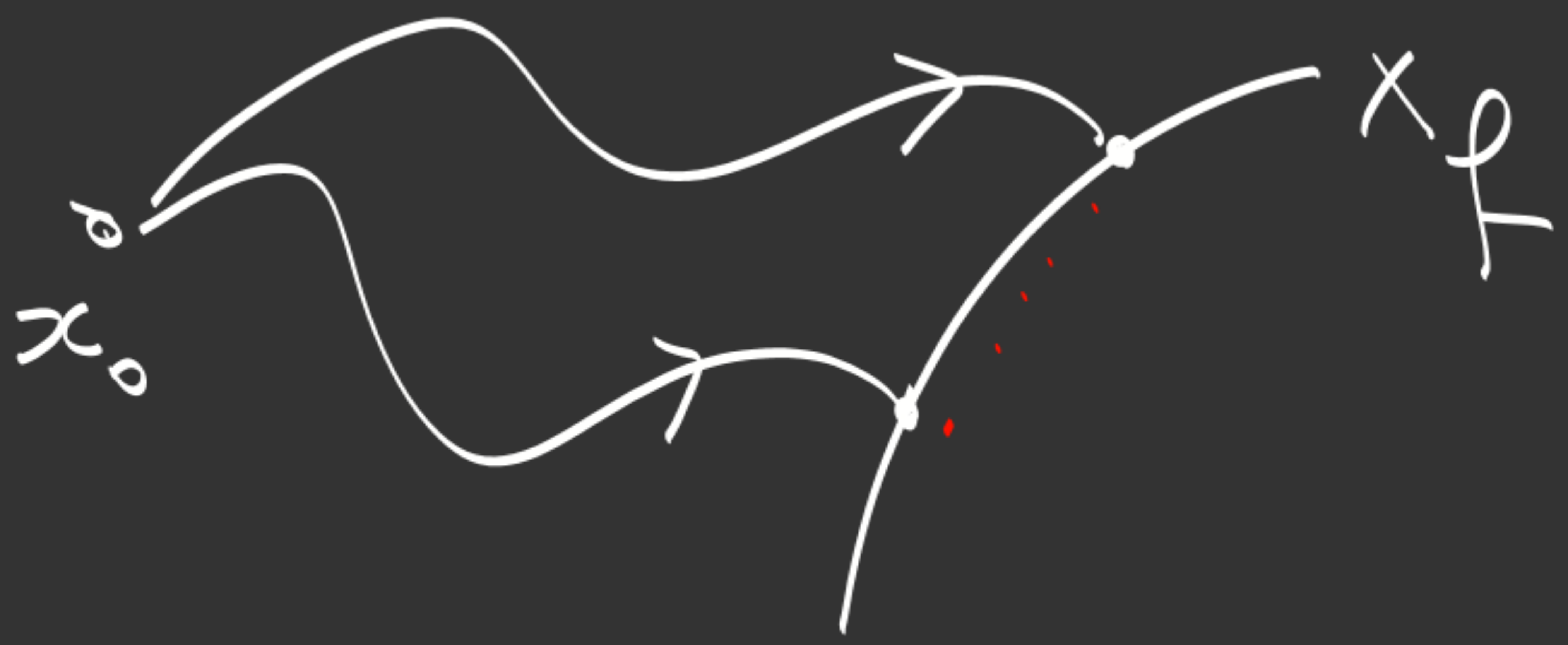
$\longrightarrow$ non-abordé dans ce cours



$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists u \in U) :$
$c(x, u) \leq 0\}$

iii) on pourrait aussi avoir une cible non-réduite à un singleton :

$$x(t_f) \in X_f \subset \mathbb{R}^n$$



(cas particulier précédent :

$$X_f = \{x_f\} \ )$$

iv) dans le cas iii) (où $x(t_f)$ n'est pas complètement spécifié) on peut considérer un coût de Mayer :

$$g(\overbrace{x(t_f)}^{x_f}) \longrightarrow \min \,, \quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(voire $g(t_f, x(t_f))\ldots$)

Ou encore une combinaison Mayer + Lagrange, dite coût de Bolza :

$$g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min$$

Rq. : on peut aisément passer d'un coût de Lagrange à un coût de Mayer et réciproquement ; par ex. :

Soit le coût de Lagrange

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min$$

Posons $\hat{x} := (x^0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et considérons pour cet état augmenté l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^0(t) = f^0(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f] \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \end{cases} \iff \dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(\hat{x}(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f]$$

à condition de prendre pour $\hat{f} : \mathbb{R}^{1+n} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{1+n}$

$$\hat{f}(\hat{x}, u) := (f^0(x,u), f(x,u)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

$\hat{x} = (x^0, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\text{q.} \quad \dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(\hat{x}(t), u(t)) \iff \left.\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= f^0(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_1(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x(t), u(t)) \end{aligned}\right] \hat{f}(\hat{x}(t), u(t))$$

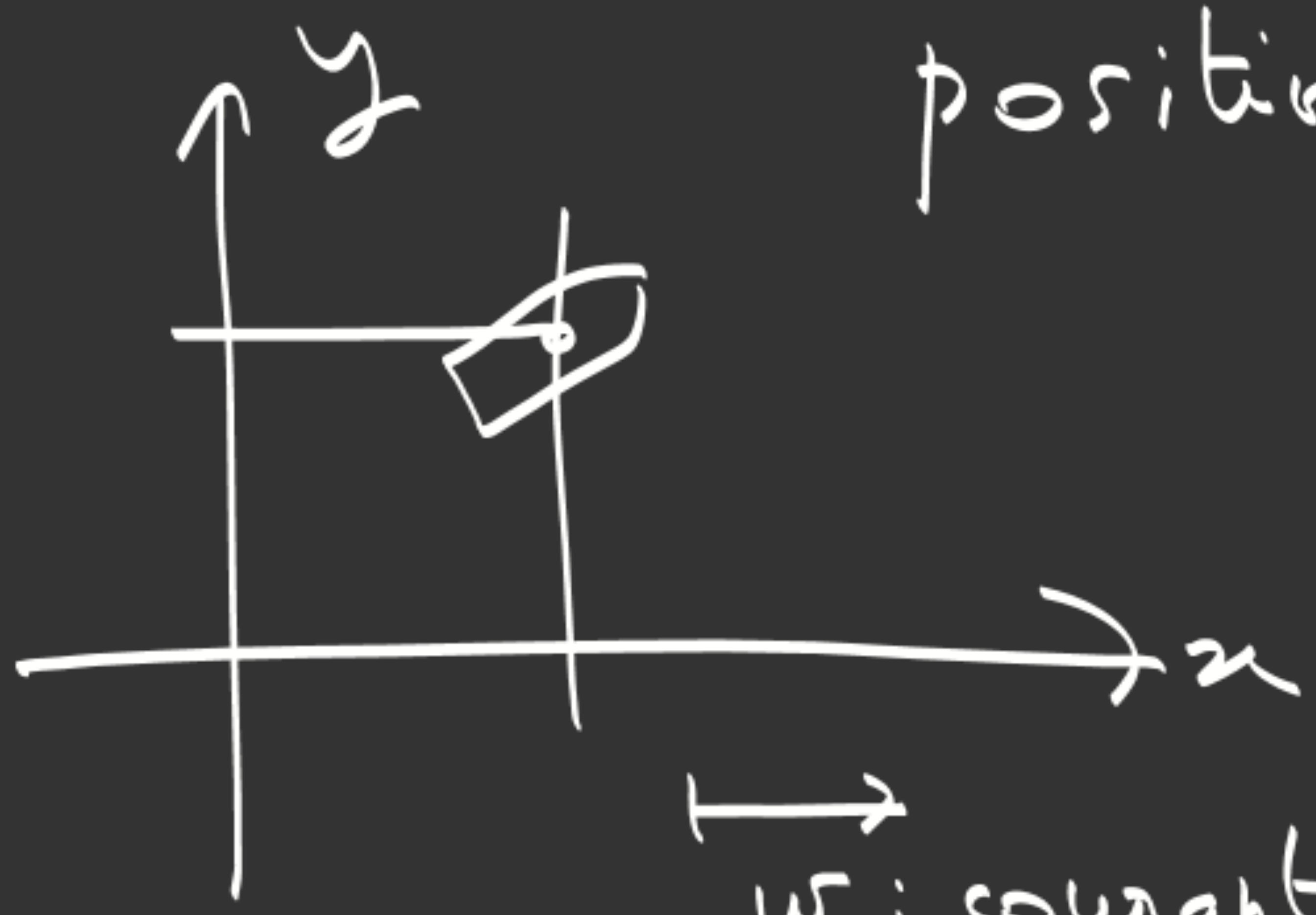
Posons de plus

$\hat{x}(0) = (0, x_0)$; alors

avec $\hat{g}(\hat{x}) = g(\overbrace{x^0, x}^{\hat{x}}) = x^0$

$$x^0(t_f) = \cancel{x^0(0)}_{0} + \int_0^{t_f} \dot{x}^0(t)\,dt = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\,dt = \hat{g}(\hat{x}(t_f)) : \text{MAYER}$$

Exemple (navigation optimale — cf. ch. 2 + TP 1) :



position du bateau : $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

dynamique du bateau :

$$\begin{cases} \boxed{\dot x(t)} = w + \boxed{\cancel{V}_{1} \cdot \cos(\theta(t))} \\ \boxed{\dot y(t)} = 0 + \boxed{\cancel{V}_{1} \cdot \sin(\theta(t))} \end{cases}$$

vitesse bateau dans repère lié au fond de la mer

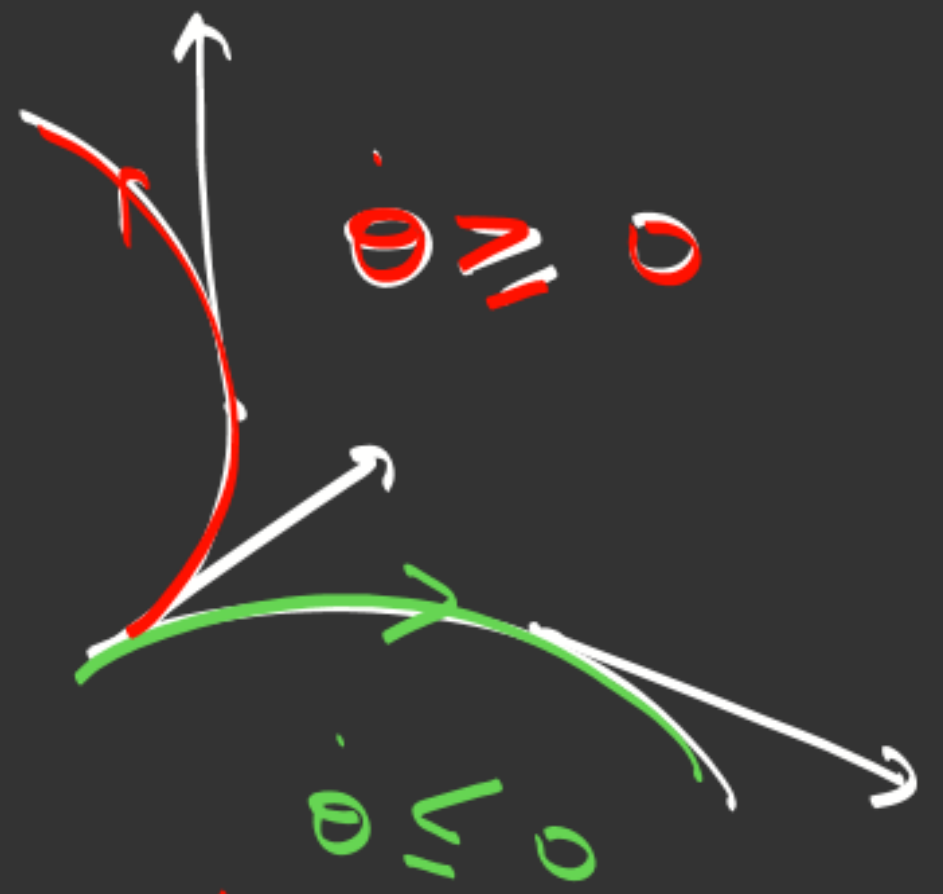
$\vec{w}$: courant dans l'eau supposé constant // (Ox)

ie : $V \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{bmatrix}$ = vitesse du bateau dans un repère (lié à la surface de l') eau (vs. fond de la mer !)

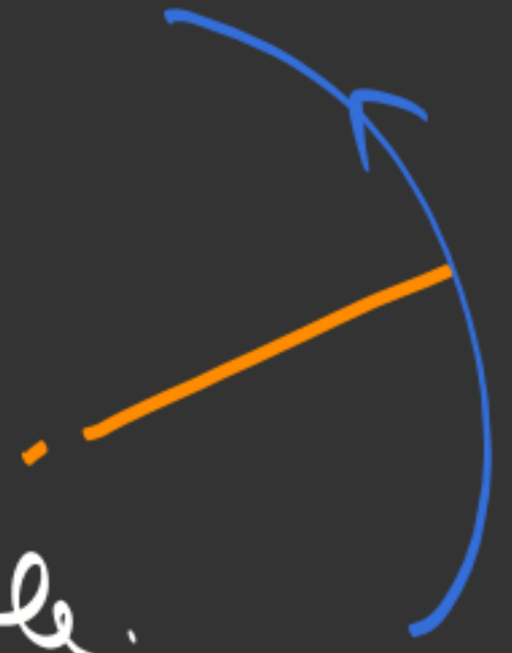
On suppose $V = \text{cte}$ (moteur bateau "à fond") et on normalise selon $V = 1$.

On contrôle le cap (= l'angle de la vitesse eau) du navire : $\dot{\theta}(t) = u(t)$

$\dot{\theta}(\geq 0)$ grand $\Rightarrow$ changement de cap rapide / virage serré / grande courbure / petit rayon de courbure :



$\dot{\theta}(\geq 0)$ petit / petite courbure



$\Rightarrow$ en pratique, on souhaite des virages à courbure limitée :

$$|\dot{\theta}(t)| \leq 1 \Rightarrow u(t) \in U = [-1,1]$$

On suppose également $0 \leq w < 1 = V$ pour être commandable.