2. Méthode directe

TP1 (fin) : au vu de la structure en ~~2~~ 3 arcs du contrôle trouvé numériquement pour le pb de navigation, avec contrôle constant sur chaque arc, on peut discrétiser le problème alternativement selon :

$$U := (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (3 \ll N)$$

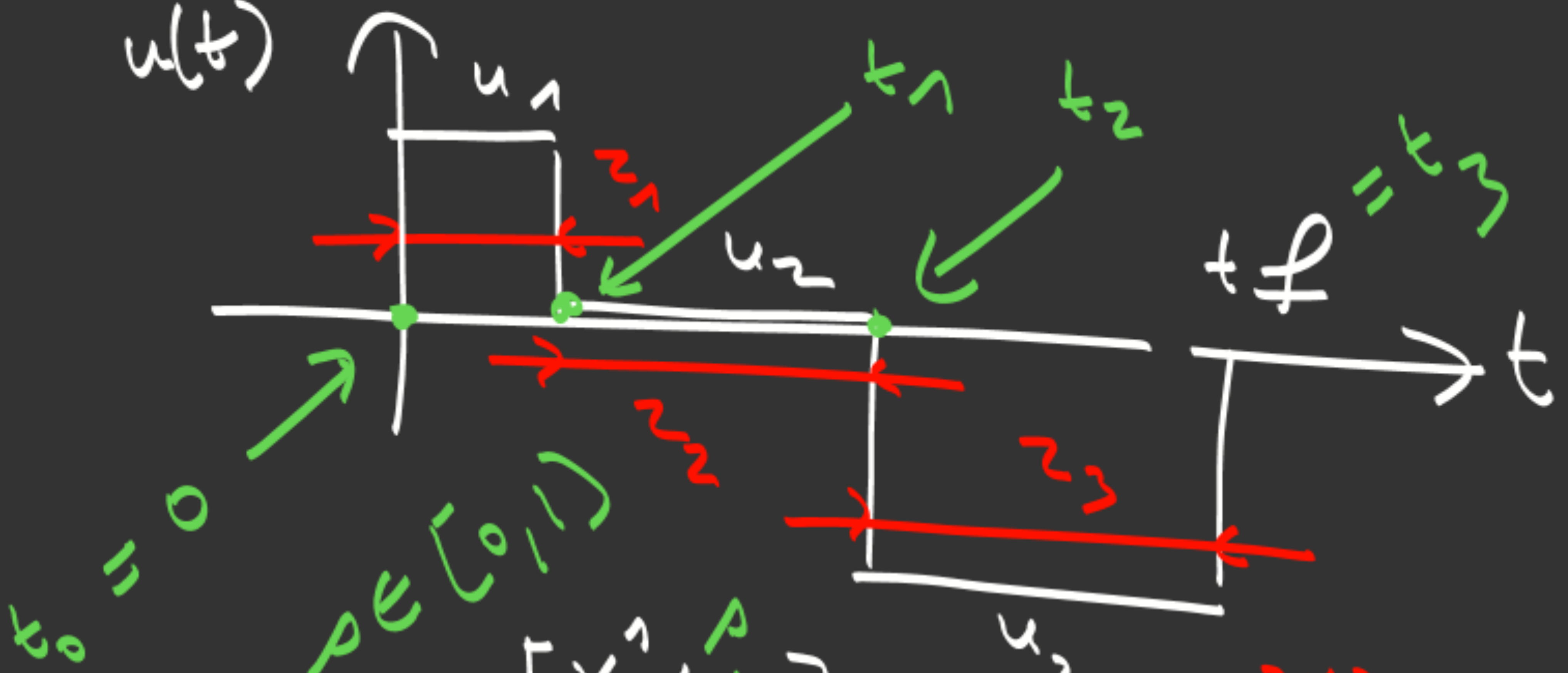
$[-1,1]^3$ en fait

valeurs prises par le contrôle sur chaque arc

avec $\dot{X}(t) = f(X(t), u_i)$, pour tout $t \in [\underbrace{t_i, t_{i+1}}_{i\text{ème phase/arc}}]$

et $i = 1, 2, 3$.

On se ramène de ce formalisme "multiphase" au cas classique comme suit :



τ_i : longueur (en temps) de l'arc/de la phase no. $i \in \{1, 2, 3\}$

On augmente alors l'état pour y concaténer les 3 phases :

$$Y(\cancel{t}\,s) = \begin{bmatrix} X^1(\cancel{t}\,s) \\ X^2(\cancel{t}\,s) \\ X^3(\cancel{t}\,s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9 \leftarrow 3\times 3$$

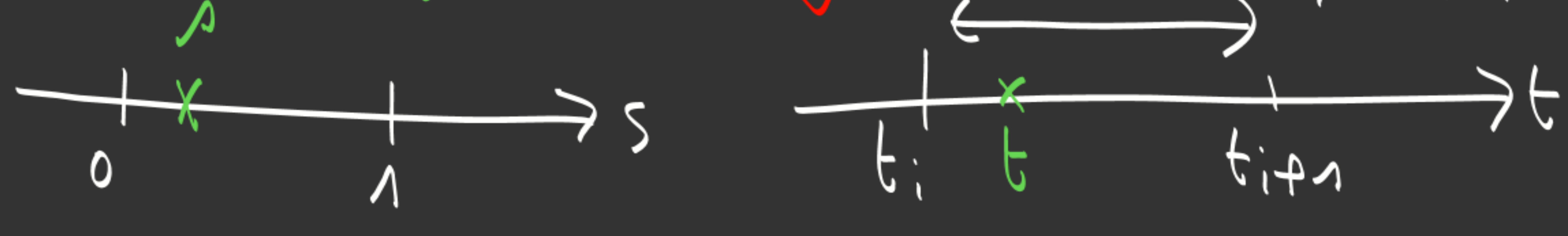
$s \in [0,1]$

ayant au préalable ramené chaque phase $[t_i, t_{i+1}]$ sur $[0,1]$ par similitude.

$\tau_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \dots, 2$

$$t = t_i + s.\overbrace{(t_{i+1} - t_i)}^{\tau_i}$$

(ie $s = \frac{t - t_i}{\tau_i} \in [0,1]$ qd $t \in [t_i, t_{i+1}]$)



Le changement rescale la dynamique selon :

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \qquad t = t_i + z_i . s$$

$$= f(X,u) \cdot z_i \text{ , si on est sur la phase } i, \; i = 1,2,3$$

$$\Rightarrow \frac{dX^i}{ds}(s) = z_i \cdot f(X^i(s), u_i), \quad s \in [0,1], \; i = 1,2,3$$

contrôle constant

De plus, l'"état étant (absolument...) continu, on a les conditions de jonction :

$$X^1(0) = (x_0, y_0, \theta_0)$$
$$X^1(1) = X^2(0)$$
$$X^2(1) = X^3(0)$$
$$X^3(1) = (x_f, y_f, \theta_f)$$

conditions supplémentaires de la forme $h(Y(0), Y(1)) = 0$.

On discrétise finalement $[0,1]$ en $N+1$ pas de temps (comme précédemment) :

$$s_0 = 0,\ s_1, \dots, s_j, \dots, 1 = s_f \longrightarrow s$$

Les inconnues sont :

$Y_i \simeq Y(s_j) \in \mathbb{R}^9$, $Y = (Y_0, \dots, Y_N) \in \mathbb{R}^{9N}$

$(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, $-1 \leq u_i \leq -1$, $i = 1,2,3$

$(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, $z_i \geqslant 0$

6 variables (vs. N pour $u_0, \dots, u_N$)

et le coût est $z_1 + z_2 + z_3 \longrightarrow \min.$

↳ à implanter et tester.

3. Principe du maximum de Pontryagin

On considère le problème de Lagrange à extrémités fixées suivant :

tf fixé ou libre

$$\begin{cases} \int_0^{tf} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in [0, tf] \\ x(0) = x_0,\ x(tf) = x_f \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: état

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: contrôle

Si x et u (et t_f, quand t_f est libre) sont solution, alors :

<u>Th. (PMP)</u> : $\exists\, (p^0, p) \neq (0,0)$, avec p^0 scalaire ≤ 0,

$p : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz, tq :

i) <u>équation adjointe</u> :

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f] \ (\text{p.p.})$$

où $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, p, u) \longmapsto H(x,p,u) := p^0 f^0(x,u) + \underbrace{(p \mid f(x,u))}^{\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x,u)}$$

est le Hamiltonien du problème.

H dépend de p^0

état adjoint

ii) condition de maximisation du Hamiltonien :

$$H(x(t),p(t),u(t)) = \max_{v\in U\subset\mathbb{R}^m} H(x(t),p(t),v), \text{ p.p. } t\in[0,t_f]$$

$$\Big(\text{ie } u(t) \in \underbrace{\underset{v\in U}{\arg\max}\, H(x(t),p(t),v)}_{\text{ens. des solutions du pb d'opti en dim finie}}\Big)$$

ens. des solutions du pb d'opti en dim finie : $\begin{cases} H(x(t),p(t),v) \to \max \\ v\in U \end{cases}$

permet d'éliminer le contrôle, de "tirer" u en fonction de x et p.

Si t_f est libre, on a $\boxed{\text{une}}$ condition supplémentaire :

$$H(x(t), p(t), u(t)) = 0, \quad \text{p.p. } t \in [0, t_f].$$

Rq : i) les propriétés i) et ii) du PMP sont invariantes par homogénéité (positive, cf. $p^\circ \leq 0$) : si $(\underset{\leq 0}{p^\circ}, p)$ vérifie i) + ii) alors, $\forall \lambda > 0$, $\lambda(p^\circ, p) = (\lambda p^\circ, \lambda p) \in \mathbb{R}^{1+n}$ vérifie encore i) + ii) : en effet,

$$\underbrace{\lambda}_{\times\lambda}\dot{p}(t) = \left(-\nabla_x H(x(t), p(t), u(t))\right) = -\underbrace{\lambda}_{\times\lambda} p^\circ \cdot \nabla_x f^\circ(x(t), u(t)) - {}^t\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \cdot \underbrace{\lambda}_{\times\lambda} p(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\widehat{\lambda p}}(t) = -\nabla_x \underset{\text{et } \lambda p^\circ}{H}(x(t), \lambda p(t), u(t)) \quad ; \text{ idem pour la condition ii) de maximisation.}$$

En pratique, on "casse" cette homogénéité :

- si $p^0 < 0$, on pose (on normalise) $p^0 = -\underline{1}$
- si $p(0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on normalise en posant $|p(0)| = 1$

$|.| =$ norme dans $\mathbb{R}^n$

en pratique, on a deux cas :

- $p^0 < 0$ (cas normal) $\longleftarrow$ "il existe des conditions de qualification des contraintes" $\leftarrow$ QC garantissant que $p^0 < 0$
- $p^0 = 0$ (cas anormal)

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in C \end{cases}$$

$\bar{x} \notin C_1$ pt isolé

$C = C_1 \cup \{\bar{x}\}$

$\Rightarrow \bar{x}$ min. local, pas de QC...