Mathematical Reasoning Notes

Mohamad SAMMAN

March 2025

1 Problème de Contrôle Non Linéaire Paramétré et Observé

Considérons un système dynamique non linéaire paramétré de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, \theta), \\ y = h(x), \end{cases} \tag{1}$$

avec $x(0)$ fixé et où :

- $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système,
- $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande,
- $\theta \in \mathbb{R}^p$ est un paramètre inconnu,
- $y \in \mathbb{R}^q$ est la sortie idéale supposée connue,
- f et h sont des fonctions différentiables appropriées.

Cependant, dans un contexte réel, la sortie mesurée est affectée par un bruit $w(t)$, ce qui donne :

$$y_{\text{mes}} = h(x(t)) + w(t), \tag{2}$$

où $w(t)$ représente un bruit d'observation.

2 Sensibilité aux Paramètres

Nous définissons la sensibilité du système par rapport aux paramètres θ à travers la variable $x_\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, qui satisfait le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_\theta = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, \theta) x_\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, u, \theta), \\ y_\theta = \frac{\partial h}{\partial \theta}(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) x_\theta. \end{cases} \tag{3}$$

Remark 1. Ici, $y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta}$ représente la sensibilité de la sortie par rapport aux paramètres.

3 Quantification de l'écart entre y et $y_{\mathbf{mes}}$

Nous souhaitons quantifier l'écart entre la sortie idéale $y(t)$ et la sortie mesurée $y_{\mathrm{mes}}(t)$ à travers :

$$J(\theta, \theta^\star) = \int_0^T |y(t) - y_{\mathrm{mes}}(t)|^2 \, dt \tag{4}$$

où :

- $y(t)$ est la "vraie" sortie du système,
- $y_{\mathrm{mes}}(t) = h(x(t)) + w(t)$ est la sortie mesurée, affectée par le bruit $w(t)$.

Notons $y\star := h(x)$ alors $J(\theta, \theta^\star)$ devient :

$$J(\theta, \theta^\star) = \int_0^T |y(t) - y^\star(t) - w(t)|^2 \, dt \tag{5}$$

En développant le carré et en utilisant la linéarité de l'intégrale:

$$J(\theta, \theta^\star) = \int_0^T |y(t) - y^\star(t)|^2 dt - 2\int_0^T (y(t) - y^\star(t))^T w(t) dt + \int_0^T |w(t)|^2 dt \tag{6}$$

Supposons que la différence entre les paramètres estimés et les vrais paramètres $\theta - \theta^\star$ est petite. Nous pouvons alors développer $y - y^\star$ en série de Taylor autour de $\theta^\star$, ce qui donne l'approximation suivante :

$$y - y^\star \approx (\theta - \theta^\star)^T y_{\theta^\star} + \frac{1}{2}(\theta - \theta^\star)^T R(\theta - \theta^\star) \tag{7}$$

où :

- $y_{\theta^\star} = \frac{\partial y}{\partial \theta}|_{\theta^\star}$ représente la sensibilité de la sortie par rapport aux paramètres,
- R est une matrice qui modélise un terme quadratique,

Nous pouvons négliger les terme d'ordre 2 et substituer dans (6) :

$$\begin{aligned} J(\theta, \theta^\star) = & (\theta - \theta^\star)^T \left(\int_0^T y_{\theta^\star}(t) y_{\theta^\star}(t)^T dt \right) (\theta - \theta^\star) \\ & + 2 \left(\int_0^T w(t)^T y_{\theta^\star}(t) dt \right) (\theta - \theta^\star) \\ & + \int_0^T |w(t)|^2 dt + R' \end{aligned} \tag{8}$$

Notons: $M(\theta^\star) = \int_0^T y_{\theta^\star}(t) y_{\theta^\star}(t)^T dt$ et $V(\theta^\star) = \int_0^T w(t)^T y_{\theta^\star}(t) dt$.

Alors on obtient:

$$J(\theta, \theta^\star) = (\theta - \theta^\star)^T M(\theta^\star)(\theta - \theta^\star) + 2V(\theta^\star)(\theta - \theta^\star) + \int_0^T |w(t)|^2 dt + R'. \tag{9}$$

Le minimum de J est atteint pour θ qui vérifie:

$$M(\theta^\star)(\theta - \theta^\star) + V(\theta^\star) = \theta \tag{10}$$

C'est à dire en θ qui vérifie:

$$\theta = \theta^\star - M^{-1}(\theta^\star)V(\theta^\star) \tag{11}$$