



Identification paramétrique par recalage de modèles éléments finis couplée à des mesures de champs cinématiques et thermiques

Thomas Pottier

► To cite this version:

Thomas Pottier. Identification paramétrique par recalage de modèles éléments finis couplée à des mesures de champs cinématiques et thermiques. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Savoie, 2010. Français. NNT : . tel-00566788

HAL Id: tel-00566788

<https://theses.hal.science/tel-00566788v1>

Submitted on 17 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'Université de Savoie

pour obtenir le grade de

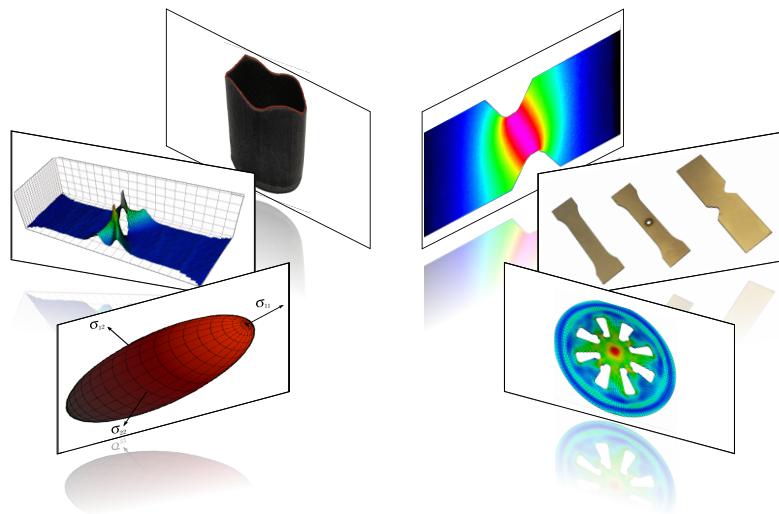
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ DE SAVOIE

— Spécialité : Génie Mécanique —

par

Thomas POTTIER

Identification paramétrique par recalage de modèles éléments finis couplée à des mesures de champs cinématiques et thermiques



soutenue le 19 octobre 2010 devant la commission d'examen :

Michel GRÉDIAC	Président	Professeur des Universités – Université Clermont-ferrand II
François HILD	Rapporteur	Directeur de Recherche – ENS Cachan
Hervé LOUCHE	Examinateur	Professeur des Universités – Université Montpellier II
Franck TOUSSAINT	Co-directeur	Maître de Conférences – Université de Savoie
Pierre VACHER	Directeur	Professeur des Universités – Université de Savoie
Bertrand WATTRISSE	Rapporteur	Professeur des Universités – Université Montpellier II



Thèse préparée au sein du laboratoire
Systèmes et Matériaux pour la
MEcatronique (SYMME) d'Annecy



Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe « matériaux » du laboratoire SYstème et Matériaux pour la MÉcatronique (SYMME) de l'Université de Savoie à Annecy dont je remercie le directeur M. Jacques Lottin pour son accueil.

Ma gratitude s'adresse tout d'abord à Messieurs Franck Toussaint, Pierre Vacher et Hervé Louche qui ont encadré ce travail de thèse avec toutes leurs expériences, leurs compétences et leurs disponibilités. Tout trois ont su me faire profiter de leurs professionnalismes tout en me laissant une grande autonomie.

Je tiens particulièrement à remercier Messieurs François Hild et Bertrand Watrissé pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté d'en juger le contenu en tant que rapporteurs. Je tiens à les remercier pour la pertinence de leurs remarques et de leurs conseils qui m'ont permis d'élaborer la version définitive de ce document.

Mes remerciements vont aussi à Michel Grédiac qui m'a suivi tout au long de ma formation et avec lequel j'ai toujours eu de riches échanges scientifiques. Ceci me permet de saluer toute l'équipe du LaMI de Clermont-Ferrand, qu'ils soient remerciés du temps qu'ils m'ont accordé.

Je remercie également toutes les personnes qui ont montré de l'intérêt pour ce travail tout au long de ces trois années : Pascal Hernandez, Serge Samper, Halim Haddadi, Laurent Tabourot.

Je remercie aussi Messieurs Blaise Girard, Pierre-Antoine Adragna, Hien Bui Minh, Hugues Favrelière et Gaétan Le-Goïc pour l'aide qu'ils m'ont apporté sur l'utilisation des moyens métrologiques du laboratoire ou concernant la réalisation des pièces nécessaires aux procédures expérimentales présentées dans ce mémoire.

Enfin, je remercie également Jenny pour sa patience, mes parents, et toute ma famille pour leur soutien ainsi que tous les doctorants du couloir du rez-de-chaussée : Breton, US Marshall, Manue, Mamdou... et bien d'autres encore.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Identification paramétrique par méthode inverse	5
1.1 Introduction	5
1.2 Qu'est-ce qu'un problème direct/inverse ?	6
1.2.1 Problème direct	6
1.2.2 Problème inverse	7
1.3 Méthodes inverses en identification paramétrique	8
1.3.1 Méthode de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC)	8
1.3.2 Méthode des Champs Virtuels (MCV)	9
1.3.3 Méthode de l'Écart à l'éQuilibre (MEQ)	10
1.3.4 Méthode de recalage de modèle EF (FEU)	11
1.3.4.1 Approche en effort (FEU-F)	12
1.3.4.2 Approche en déplacement (FEU-U)	12
1.3.4.3 Approche mixte (FEU-U-F)	13
1.3.4.4 Approche en température (FEU-T)	13
1.4 Mesures de champ et méthodes inverses	13
1.5 Méthodes retenues	16
1.5.1 Identifications mécaniques	16
1.5.2 Identifications thermiques	17
1.6 Conclusion du premier chapitre	18
2 Expériences et montages expérimentaux	21
2.1 Introduction	21
2.2 Matériaux	22
2.3 Essais plans	23
2.3.1 Géométries d'éprouvettes	23
2.3.2 Montage de traction simple	23
2.3.3 Corrélation d'images	25
2.3.4 Incertitudes des mesures par corrélation sur surfaces planes	28
2.4 Essais hors-plan	28
2.4.1 Géométries d'éprouvettes	28
2.4.2 Montage hors-plan TIX	29
2.4.3 Conditions aux limites de l'essai TIX	31
2.4.3.1 Liaison Matrice/flan	31
2.4.3.2 Liaison poinçon/flan	33
2.4.4 Stéréo-corrélation d'images	34
2.4.5 Calibration du montage optique stéréoscopique	36
2.4.6 Incertitudes des mesures issues des montages stéréoscopiques	37
2.4.6.1 Méthodologie	37

2.4.6.2	Défaut de position	39
2.4.6.3	Défaut de forme	40
2.4.6.4	Reproductibilité / fidélité	43
2.4.6.5	Bilan	46
2.5	Essais thermographiques	48
2.5.1	Thermographie IR	48
2.5.2	Montage thermographique	48
2.5.3	Post-traitement des essais thermographiques	49
2.6	Conclusion du second chapitre	50
3	Modélisation thermomécanique et élastoplasticité	51
3.1	Introduction	51
3.2	Considérations thermodynamiques	52
3.2.1	Premier Principe de la thermodynamique	52
3.2.2	Second Principe	53
3.2.3	Variables d'état	54
3.2.4	Décomposition de l'énergie interne	55
3.2.5	Lois d'état	57
3.3	Modélisation thermomécanique	58
3.3.1	Équation de la chaleur	58
3.3.2	Estimation de sources de chaleur	59
3.3.2.1	Bilan énergétique	59
3.3.2.2	Coefficient de Taylor et Quinney	60
3.3.2.3	Couplages thermomécaniques	61
3.3.3	Simplification de l'équation de la chaleur	62
3.3.4	Bilan de la modélisation thermomécanique	63
3.4	Modèles d'élastoplasticité	63
3.4.1	Gestion des grandes transformations dans les codes EF	63
3.4.2	Comportement élastique	64
3.4.2.1	Élasticité linéaire isotrope	64
3.4.2.2	Élasticité linéaire orthotrope	64
3.4.3	Seuil de plasticité	65
3.4.3.1	Surface de charge	65
3.4.3.2	Critère de Von Mises	67
3.4.3.3	Critère de Hill (1948)	68
3.4.3.4	Autres critères	69
3.4.4	Écrouissage et écoulement plastique	69
3.4.4.1	Écrouissage isotrope	69
3.4.4.2	Exemples de lois d'écrouissage	70
3.5	Conclusion du troisième chapitre	70
4	Résolution du problème d'optimisation	71
4.1	Introduction	71
4.2	Définition du problème d'optimisation	72
4.3	Minimum local et global	72
4.3.1	Définitions	72
4.3.2	Ensemble et fonctions convexes	73
4.3.3	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité	74
4.4	Fonctions objectifs	75

4.4.1	Moindres carrés non linéaires	75
4.4.2	Formulation en force et déplacement	76
4.4.3	Formulation en température	77
4.5	Méthode d'optimisation envisagée	78
4.5.1	Méthode de Gauss-Newton	78
4.5.2	Méthode de Levenberg-Marquardt	79
4.5.3	Etude de sensibilité	80
4.5.3.1	Sensibilité par différence finie	80
4.5.3.2	Sensibilité analytique	82
4.5.4	Critère de convergence	82
4.5.5	Robustesse du problème d'optimisation	83
4.6	Conclusion du quatrième chapitre	85
5	Résultats des identifications par méthode inverse	87
5.1	Introduction	87
5.2	Identification par méthode standard	88
5.2.1	Élasticité	88
5.2.2	Plasticité	89
5.3	Identification par méthode inverse : essais plans	90
5.3.1	Modélisation numérique	90
5.3.2	Identification par méthode inverse	92
5.3.3	Validations	95
5.3.3.1	Validation par comparaison	95
5.3.3.2	Comparaison à un essai d'emboutissage	97
5.3.3.3	Sensibilité au bruit de mesure	98
5.4	Identification par méthode inverse : essais hors-plans	99
5.4.1	Modélisation numérique	99
5.4.2	Elasticité	102
5.4.2.1	Identification élastique par méthode inverse	102
5.4.2.2	Influence du modèle élastique	106
5.4.3	Plasticité	106
5.4.3.1	Identification plastique par méthode inverse	106
5.4.3.2	Influence du modèle élastique	107
5.4.4	Validations	109
5.4.4.1	Validation par comparaison	109
5.4.4.2	Comparaison à un essai d'emboutissage	110
5.4.4.3	Sensibilité au bruit de mesure	112
5.5	Identification par méthode inverse : essais thermomécaniques	115
5.5.1	Modèles étudiés	115
5.5.2	Présentation de la procédure d'identification	115
5.5.3	Identification du modèle mécanique	116
5.5.3.1	Modélisation numérique	116
5.5.3.2	Identification plastique par méthode inverse	117
5.5.4	Bilan énergétique du problème	117
5.5.5	Identification du modèle thermique	120
5.5.5.1	Modélisation numérique	120
5.5.5.2	Caractérisation des conditions aux limites thermiques	122
5.5.5.3	Identification de β par méthode inverse	123
5.5.6	Validation : sensibilité au bruit	125

5.6 Conclusion du cinquième chapitre	128
Conclusion et perspectives	131
A Annexe : Recalage des bases temporelles	137
B Annexe : Géométries d'éprouvette hors plan	141
C Annexe : Recalage spatial des mesures cinématique et thermographique	143
D Annexe : Recalage spatial des champs numériques et expérimentaux	149
E Annexe : Modèle de A.T. Zehnder	155

Table des figures

1.1	Schéma de principe d'un problème direct	6
1.2	Schéma de principe d'un problème inverse	7
1.3	Convexité locale d'une fonctionnelle formulée en moindres carrés ou en ERC	9
1.4	Schéma de principe de la méthode d'identification inverse par FEU-U-F.	17
1.5	Schéma de principe de la méthode d'identification inverse par FEU-T.	18
2.1	Figure de pôles des deux matériaux de l'étude.	22
2.2	Revue des géométries d'éprouvettes planes utilisées en identification	24
2.3	Géométrie des éprouvettes planes testées.	25
2.4	Montage experimental lors des essais plans.	25
2.5	Principe de base de la corrélation d'images	26
2.6	Base extensométrique et domaine de corrélation	27
2.7	Revue de quelques essais hors-plan utilisés en identification	29
2.8	Géométrie de l'éprouvette pour l'essai TIX	30
2.9	Montage experimental d'essai hors-plan TIX	31
2.10	Encastrement du flan TIX par jonc de serrage.	32
2.11	Mesure du déplacement hors-plan du flan TIX lié au jonc de serrage.	32
2.12	Mesure du glissement entre le flan et la matrice des essais TIX.	33
2.13	Mesure et modélisation du cercle de localisation des déformations sous le poinçon.	34
2.14	Représentation schématique du principe de stéréo-corrélation.	35
2.15	Procédure de calibration du système optique hors-plan.	36
2.16	Pièce de référence utilisée pour l'évaluation des incertitudes de mesure par SIC. .	38
2.17	Mesures réalisées pour l'évaluation du défaut de position du système SIC.	39
2.18	Mesures réalisées pour l'évaluation du défaut de forme du système SIC.	41
2.19	Spectre modal des décompositions du plan $\langle a \rangle$ par MMS et SIC.	43
2.20	Reconstruction à partir des 25 premiers modes des mesures par MMS et SIC. . .	44
2.21	Étude de l'erreur de répétabilité des mesures par SIC.	45
2.22	Étude de l'erreur de répétabilité des mesures par SIC : cas n°3.	46
2.23	Illustration du problème de suivi de points inhérent aux mesures thermographiques	49
3.1	Décomposition du tenseur gradient d'une transformation finie.	56
3.2	Exemple de domaine initial d'élasticité	65
3.3	Interprétation géométrique du Principe du Travail Plastique Maximal	66
3.4	Courbe de traction du titane commercialement pure	69
4.1	Fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec un maximum global et deux maxima locaux	73
4.2	Fonctions convexe et non-convexe de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	74
4.3	Représentation des erreurs d'arrondie et de troncature en calcul de sensibilité . .	81
4.4	Trajets de convergence de la méthode d'optimisation avec plusieurs points de départ	84
5.1	Identification standard des paramètres matériau	89

5.2	Géométries planes étudiées et leur zone d'analyse d'images correspondantes	91
5.3	Modélisation des conditions aux limites des essais plans	91
5.4	Résultat des identifications mécaniques du T40-0.5mm par essai plans	94
5.5	Champs de déplacement numériques et expérimentaux après identification	95
5.6	Comparaison des efforts prédits par les 4 jeux de paramètres identifiés	96
5.7	Validation par comparaison avec un essai d'emboutissage : géométrie et outillage	97
5.8	Comparaison des profils d'anisotropie calculés avec l'expérience	98
5.9	Erreur relative de prédiction pour les trois amplitudes de bruit artificiel imposées	100
5.10	Modélisation de l'essai hors-plan dans ABAQUS.	101
5.11	Résultat des identifications élastiques du T40-0.5mm par essai hors plans	103
5.12	Vérification du glissement de l'éprouvette sur la matrice	104
5.13	Mesure de la planéité de la surface fonctionnelle de la matrice TIX	105
5.14	Vérification du centrage expérimental du poinçon	106
5.15	Influence du modèle élastique sur l'état de contrainte à la limite d'écoulement .	107
5.16	Résultat des identifications plastiques du T40-0.5mm par essai hors plans	108
5.17	Comparaison entre les identifications plastiques menées avec un modèle élastique isotrope ou orthotrope.	109
5.18	Comparaison des efforts prédits par les 3 meilleurs jeux de paramètres identifiés .	111
5.19	Comparaison des profils d'anisotropie calculés avec l'expérience	112
5.20	Allure du bruit sur les mesure TIX en élasticité	113
5.21	Influence du bruit de mesure sur l'identification plastique par essai hors-plan. .	114
5.22	Schéma de la procédure d'identification thermomécanique	116
5.23	Résultat de l'identification mécanique du T40-1.6mm.	118
5.24	Évolution du champ de puissance anélastique volumique en fonction du temps .	119
5.25	Bilan des puissances mises en jeu durant l'essai thermomécanique	120
5.26	Modélisation numérique des conditions aux limites thermiques du problème .	121
5.27	Expérience utilisée pour la caractérisation des conditions aux limites thermiques	122
5.28	Évolution de β pour les 4 modèles identifiés et prédictions de températures associées à ces modèles.	124
5.29	Erreur de prédictions sur la température pour 5 pas de temps du modèle n°3. .	125
5.30	Représentation spatio-temporelle de la valeur absolue de l'erreur de prédiction pour les quatre modèles identifiés	126
5.31	Influence du bruit de mesure sur l'identification thermomécanique.	127
A.1	Représentation schématique du recalage des bases de temps de la machine de traction et de la mesure par analyse d'image	137
A.2	Représentation schématique du recalage des bases de temps de la machine de traction et de la mesure thermographique	139
B.1	Différentes géométries d'éprouvettes étudiées pour la procédure TIX	142
C.1	Illustration du problème de suivi de points inhérent aux mesures thermographiques	144
C.2	Détail de la procédure de recalage des champs thermiques	145
C.3	Validation du recalage de champs thermiques par mouvement rigide	147
C.4	Amplitude résiduelle de la variation de température après recalage	147
D.1	Procédure de recalage spatial des données expérimentales et numériques : cas plan	150
D.2	Procédure de recalage spatial des données expérimentales et numériques : cas hors plan	152
D.3	Procédure d'estimation des coordonnées du centre de l'éprouvette hors plan .	152

INTRODUCTION

Introduction générale

Problématique

La méthode des Éléments Finis est à présent largement utilisée dans tous les secteurs industriels, que ce soit pour résoudre des problèmes de mécanique des structures ou pour simuler des opérations de mise en forme (emboutissage par exemple). Pour disposer de modèles de comportement fiables et prédictifs, l'ingénieur est amené à construire des lois de comportement comportant un nombre sans cesse croissant de paramètres dépendant du matériau, ce qui nécessite la conduite d'un nombre d'essais de plus en plus important pour les identifier. Cependant, dans de nombreux cas industriels de mise en forme par exemple, le matériau est soumis à des trajets de chargement multiples et divers. La modélisation de telles opérations se heurte actuellement aux différences de comportement observées entre les essais homogènes standardisés ayant servi à identifier les paramètres du modèle et les trajets complexes de déformation subis par la pièce lors de sa mise en forme. Le recours à des éprouvettes présentant des trajets de déformations hétérogènes semble, à ce titre, intéressant mais leur post-traitement nécessite le développement de méthodes numériques dites *inverses*.

Sur le plan expérimental, la mesure de ces champs de déformation peut être opérée au moyen de techniques de mesures de champs sans contact. Ces approches se distinguent des systèmes conventionnels de mesures locales de type jauge de déformation, capteurs de déplacement, thermocouples, *etc.* et ont connu un développement très important depuis le début des années quatre vingt dix. Si les techniques de mesures de champs cinématiques sont actuellement les plus répandues, des systèmes de mesures de champs de températures (thermographie infrarouge) sont également disponibles. Quelle que soit la technique, l'expérimentateur accède à une cartographie de surface d'un échantillon testé suivant une sollicitation donnée. L'observation de ces mesures peut révéler des phénomènes d'hétérogénéité des déformations pour des essais supposés homogènes comme l'essai de traction, hétérogénéités qui ne peuvent être perçues lorsque l'on utilise des mesures locales de type jauge de déformation. Dans ce contexte, diverses stratégies d'identification *inverse* de paramètres exploitant des essais conduisant à des champs hétérogènes ont émergé (GDR 2519¹). Citons à ce titre la méthode des champs virtuels, le recalage de modèles éléments finis, *etc.*

Cette dernière approche consiste à établir un modèle Éléments Finis le plus proche possible de l'essai respectant la géométrie de l'échantillon, les conditions aux limites, *etc.* Une fonction objectif de type moindres carrés entre mesures expérimentales et valeurs simulées est ensuite construite. Les paramètres recherchés sont obtenus par minimisation de cette fonction objectif. Les travaux publiés d'application du recalage de modèles Éléments Finis à partir de données expérimentales issues de mesures de champs cinématiques, concernent principalement (i) l'identification de paramètres élastiques de matériaux isotropes ou anisotropes et (ii) l'identification

1. Le GDR 2519 : « Mesures de Champs et Identification en Mécanique des Solides » a été créé en 2003 afin de coordonner les recherches dans ce domaine. Le lecteur trouvera de plus amples informations sur : www.ifma.fr/lami/gdr2519/.

de paramètres de lois de comportement élastoplastique de métaux à partir d'essais de traction (uniaxiale ou bi-axiale).

Objectifs

L'objectif du présent travail de thèse est de mettre en place une méthode *inverse* de recalage de modèles Éléments Finis afin de conduire des identifications de modèles de comportement. Trois approches expérimentales complémentaires seront mise en œuvre : mesures de champs cinématiques planes, mesures de champs cinématiques non planes et mesures de champs thermiques. Ces mesures serviront de données d'entrée à la méthode *inverse* développée.

Les modèles de comportement identifiés à partir des mesures cinématiques seront de nature élastoplastique. Cependant, des modèles thermoplastiques (régissant l'auto-échauffement du matériau durant sa déformation) seront aussi étudiés en se basant sur des mesures de champs tant cinématiques que thermiques.

Une attention particulière sera portée aux méthodes expérimentales permettant d'obtenir des champs de déformation hétérogènes. Une nouvelle procédure d'identification de modèles de comportements complexes reposant sur un seul essai a été développée dans ce but. Enfin, les incertitudes relatives aux différents moyens de mesures de champs seront discutées et prises en compte.

Organisation du mémoire

Le présent mémoire comporte 5 chapitres. Le chapitre 1 aborde la notion de problème *direct* et de problème *inverse*. Il détaille notamment les 4 méthodes d'identification *inverse* les plus couramment utilisées. Une revue bibliographique des utilisations qui sont faites de ces méthodes dans le domaine de l'identification paramétrique est dressée. Enfin, la méthode de recalage par Éléments Finis retenue est présentée.

Outre le fait de préciser les matériaux de l'étude, le chapitre 2 s'attache à expliciter les procédures expérimentales mises en place dans le cadre de ce travail. Une étude bibliographique des techniques de mesure de champ cinématique est menée tant dans le cas d'essais plans que d'essais hors plans. Une nouvelle procédure expérimentale est ainsi développée et détaillée. Les trois types de mesures cités (cinématiques planes, cinématiques non planes, et thermiques) sont exposées. Enfin, une étude de leurs incertitudes respectives est menée en s'appuyant sur des résultats issus de la littérature ou d'investigations expérimentales.

Le chapitre 3 présente le formalisme classique de l'élastoplasticité. Les modèles de comportement identifiés dans ce travail de thèse sont détaillés ainsi que les liens qui les unissent.

Le chapitre 4 détaille la procédure de résolution du problème *inverse* par recalage de modèles Éléments-Finis. Les notions d'optimisation liées à cette méthode sont introduites et un algorithme de résolution du problème est explicité. Une attention particulière est par ailleurs portée à la justesse et à la robustesse de celui-ci.

Le chapitre 5 présente les résultats des identifications menées dans le cas des différents essais plans, hors plans et thermomécaniques. Enfin, la stabilité vis-à-vis du bruit de mesure, des jeux

de paramètres identifiés est étudiée.

Le présent mémoire s'achèvera par des conclusions et des perspectives ainsi qu'une liste bibliographique des ouvrages cités. De plus, cinq annexes s'attacheront à expliciter certains problèmes soulevés durant l'étude.

1

Identification paramétrique par méthode inverse

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Qu'est-ce qu'un problème direct/inverse ?	6
1.2.1	Problème direct	6
1.2.2	Problème inverse	7
1.3	Méthodes inverses en identification paramétrique	8
1.3.1	Méthode de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC)	8
1.3.2	Méthode des Champs Virtuels (MCV)	9
1.3.3	Méthode de l'Écart à l'éQuilibre (MEQ)	10
1.3.4	Méthode de recalage de modèle EF (FEU)	11
1.4	Mesures de champ et méthodes inverses	13
1.5	Méthodes retenues	16
1.5.1	Identifications mécaniques	16
1.5.2	Identifications thermiques	17
1.6	Conclusion du premier chapitre	18

1.1 Introduction

Depuis la démocratisation de l'outil informatique, la méthode des Éléments Finis (EF) est largement utilisée afin de prédire le comportement mécanique des structures. Malheureusement, l'emploi systématique de logiciels EF dans des domaines de plus en plus vastes oblige l'ingénieur à développer, utiliser et identifier les paramètres de loi de comportement toujours plus complexes. Ainsi, de nombreux modèles mécaniques ont vu le jour afin de décrire de plus en plus finement le comportement des matériaux [Hill 48, Ferron 94, Barlat 97, Cazacu 03, Hu 07]. En pratique, l'identification des paramètres de ces modèles s'avère laborieuse et coûteuse. En effet, la complexité des phénomènes pris en compte par ces nouveaux modèles accroît considérablement le nombre de paramètres à identifier et conduit à la multiplication du nombre d'essais.

Les méthodes *inverses* d'identification basées sur des mesures de champs sans contact ont connu de nombreuses avancées ces dernières années. Ainsi, face à la généralisation des équipements de mesures de champs sans contact, plusieurs méthodes d'identification paramétrique, basées sur ces mesures (qu'elles soient cinématiques et/ou thermiques) ont vu le jour [[Grédiac 04](#), [Bonnet 05a](#), [Avril 07](#), [Avril 08a](#)].

Dans ce chapitre, nous présenterons rapidement la notion de problème *inverse* ainsi que la nature généralement *mal posée* de tels problèmes. Les 4 méthodes les plus couramment utilisées seront détaillées et nous dresserons une revue bibliographique de leurs applications. Enfin, nous présenterons la méthode retenue dans le cadre de ce travail de thèse.

1.2 Qu'est-ce qu'un problème direct/inverse ?

1.2.1 Problème direct

Un problème dit *direct* est un problème classique de mécanique des structures, c'est-à-dire un problème dans lequel une structure \mathcal{S} dépendant de paramètres θ est soumise à une sollicitation \underline{X} et pour laquelle on cherche à obtenir la géométrie déformée ainsi qu'une distribution \underline{d} de contrainte, de déformation ou de température [[Grédiac 96](#)]. Dans ce cas, le problème direct se réduit à trouver $\underline{d} = \underline{d}(\theta, \underline{X}) \in \mathcal{D}$ (avec \mathcal{D} l'ensemble des réponses admissibles) tel que l'équilibre de \mathcal{S} soit satisfait cinématiquement et statiquement (Fig. 1.1).

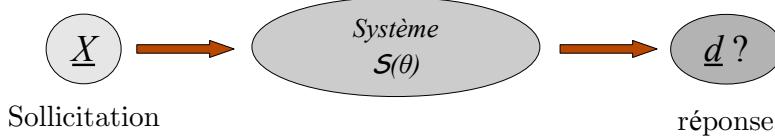


FIG. 1.1 – Schéma de principe d'un problème direct en mécanique des structures

À ce stade, il est nécessaire d'introduire la notion de problème *bien* (ou *mal*) posé au sens de Hadamard [[Hadamard 32](#)]. Nous rappelons donc que :

Définition : Le modèle mathématique d'un problème physique est dit *bien posé* s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

- i) une solution existe,
- ii) cette solution est unique,
- iii) cette solution dépend continûment des données (c'est-à-dire que la sensibilité de \underline{d} par rapport aux erreurs sur \underline{X} et sur \mathcal{S} est faible).

On remarque, qu'en l'absence de mouvement de corps rigides, un problème *direct* satisfait ces trois conditions. En conséquence, la précision d'une telle résolution dépend presque uniquement de l'évaluation du paramètres θ du système \mathcal{S} , c'est-à-dire sa géométrie, le comportement du matériau au travers de sa loi et aussi les paramètres de celle-ci (notons qu'il peut aussi s'agir de paramètres de discréétisation comme par exemple un champ de module).

Dans le cas de l'identification des paramètres associés à un modèle de comportement, la procédure habituellement adossée aux problèmes *directs*¹ consiste en l'utilisation d'éprouvettes

1. On parlera dans la suite du document d'*identification par méthode standard* puisque qu'il s'agit bien d'une inversion au sens de la Figure 1.1.

standardisées permettant tour à tour d'isoler un comportement des autres. Par exemple, une éprouvette standardisée de traction est supposée se déformer, au sein de sa zone utile, de manière homogène, *etc.* Une simple relation analytique entre la sollicitation et la mesure de la déformation globale permet ainsi d'obtenir les paramètres du matériau recherchés.

Cependant, deux limitations inhérentes à ce type d'essai apparaissent. D'une part, il est maintenant admis que l'hypothèse d'homogénéité de la déformation dans les éprouvettes standardisées est généralement difficile à satisfaire [Watrisse 01] et que sa vérification impose la mise en place de dispositifs contraignants [Kuwabara 00, Bouvier 06]. D'autre part, le découplage des comportements mécaniques impose un nombre important (et une grande variété) d'essais si le modèle de matériau à identifier est complexe. À titre d'exemple le modèle de Teodosiu [Haddadi 06] exige l'identification des 13 paramètres au moyen de 6 essais. Plusieurs travaux tentant de réduire ce nombre d'essais ont été menés. Harth *et al.* [Harth 04] proposent d'utiliser des méthodes stochastiques afin de générer de nouvelles données expérimentales. Néanmoins, toutes ces techniques ne permettent pas à ce jour de palier aux deux inconvénients majeurs liés aux approches *directes*, une autre approche appelée *inverse* est alors envisagée.

1.2.2 Problème inverse

Dans un problème *inverse*, la sollicitation \underline{X} et la réponse \underline{d} du système sont considérées connues. En effet, dans la plupart des procédures expérimentales actuelles, l'effort ou le déplacement sont mesurés. Par ailleurs, la connaissance d'un effort de réaction ou d'un champ de déplacement/contrainte/déformation résultant permet de connaître la réponse du matériau. La seule inconnue du problème reste donc $\mathcal{S}(\theta)$ (Fig. 1.2). Ainsi, un problème *inverse* permet d'identifier les paramètres $\theta \in \Theta$ (avec Θ l'ensemble des paramètres admissibles) du matériau sous l'hypothèse que les autres facteurs dont dépend \mathcal{S} (géométrie, conditions aux limites, *etc.*) sont connus.

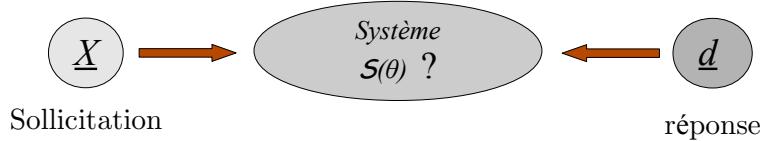


FIG. 1.2 – Schéma de principe d'un problème inverse en mécanique des structures

Contrairement au problème *direct*, un problème *inverse* est souvent *mal posé*, c'est-à-dire qu'il ne vérifie pas au moins l'une des 3 conditions de Hadamard. En effet, la présence d'incertitudes expérimentales, de bruits sur les données mesurées, d'imperfections de la modélisation retenue conduit invariablement à l'inexistence de la solution exacte θ du problème. Néanmoins une solution approchée, ou *quasi-solution* au sens de Tikhonov [Tikhonov 77], peut être trouvée, il s'agira donc de l'élément compatible $\tilde{\theta} \in \Theta$ le plus proche de θ . Par ailleurs, l'inversion du problème peut conduire à la discontinuité du problème *inverse*, voir à la multiplicité de ses solutions (si les données \underline{d} sont sous-abondantes par rapport au modèle choisi). Il apparaît donc que la solution approchée d'un tel problème est d'une grande sensibilité aux perturbations dans l'évaluation de \underline{X} comme de \underline{d} .

Dans le cas de l'identification de paramètres de loi de comportement, la méthode *inverse* propose de considérer que les inconnues du système $\mathcal{S}(\theta)$ ne dépendent que de cette loi. On peut donc expliciter la différence entre l'approche *directe* et *inverse* par le tableau suivant (Tab. 1.1) :

TAB. 1.1 – Inconnues des problèmes *direct* et *inverse* [Grédiac 04].

	Problème direct	Problème inverse
Données	Géométrie Distribution de l'effort f Loi de comportement Paramètres matériau	Géométrie Effort résultant F Loi de comportement Champs de contrainte/déformation
Inconnues	Champs de déformation	Paramètres matériau

L'inversion du problème repose entièrement sur la donnée des champs de déformation. Experimenteralement, les méthodes de mesures de champs (dont il sera question dans le chapitre 2) permettent de satisfaire cette condition. De plus, l'utilisation de tels moyens de mesure offre généralement un très grand nombre de points de mesure indépendants (classiquement de 1000 à 10000 [Avril 04]). En pratique, la sur-abondance de données expérimentales rapportée au faible nombre d'inconnues² contribue à la stabilité du problème *inverse* et permet de s'affranchir d'une procédure de régularisation [Kleinermann 00, Avril 08a].

1.3 Méthodes inverses en identification paramétrique

1.3.1 Méthode de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC)

Cette méthode, initialement conçue comme un estimateur d'erreur pour des calculs EF [Ladevèze 75, Ladevèze 99] apparaît comme un outil puissant d'identification paramétrique. L'erreur en relation de comportement est une mesure énergétique de l'écart entre un champ de contrainte σ , calculé à partir d'une mesure du déplacement et de la donnée d'une relation de comportement (ce champ de contrainte est dit cinématiquement admissible), et un champ de contrainte τ statiquement admissible (qui vérifie les conditions aux limites en efforts). Elle s'écrit dans le cas élastique linéaire comme suit [Geymonat 02] :

$$ERC(\tau, v, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau - \underbrace{\mathcal{A} : \varepsilon(v)}_{\sigma}) : \mathcal{A}^{-1} : (\tau - \underbrace{\mathcal{A} : \varepsilon(v)}_{\sigma}) dv, \quad (1.1)$$

avec \mathcal{A} le tenseur d'élasticité et ε le tenseur des déformations. L'ensemble Ω représente le domaine matériel. La méthode ERC propose dès lors de minimiser cette quantité par un processus itératif dont l'algorithme, issu des propriétés de convexité de l'ERC, peut se résumer comme suit :

- ① On se donne q^0 un jeu de paramètres matériau déterminant complètement la loi choisie. Cette donnée est arbitraire.
- ② On dispose d'une mesure de l'effort F au bord du domaine matériel.
- ③ Boucle jusqu'à convergence ;
 - le champ de déplacement U_c^{n-1} est évalué par calcul EF à partir de la donnée de q^{n-1} et de F ;
 - U_c^{n-1} est utilisé pour évaluer τ^{n-1} ;
 - L'écart en relation de comportement (Eq. 1.1) est calculé ;

2. le nombre de paramètres d'une loi de comportement est généralement inférieur à 20 [Hill 48, Ferron 94, Barlat 97, Gronostajski 00, Cazacu 03, Hu 07].

- Une décomposition de \mathcal{A} sur sa base propre permet de ramener le problème de minimisation de L'ERC à un problème local et quadratique qui conduit à l'évaluation directe et analytique des composantes a_{ij} de \mathcal{A} et donc de q^n ;
- Vérification du (ou des) critère(s) d'arrêt.

Cette méthode permet donc d'identifier de manière rapide et efficace les paramètres de la loi de comportement posée. Par ailleurs, comme le montre la Figure 1.3 issue de [Bonnet 05b], la formulation énergétique du résidu (ERC) conduit à une plus grande convexité de la fonctionnelle et par conséquence à une plus grande robustesse par rapport aux méthodes basées sur la minimisation d'un résidu de moindres carrés.

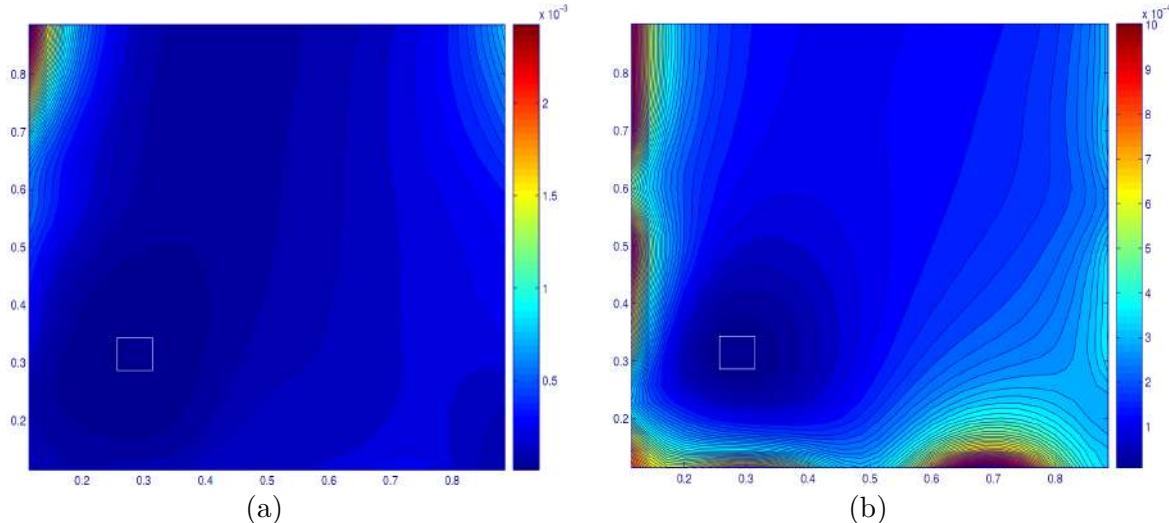


FIG. 1.3 – Convexité locale d'une fonctionnelle formulée en moindres carrés (a) ou en ERC (b) [Bonnet 05b]

1.3.2 Méthode des Champs Virtuels (MCV)

Cette approche, basée sur le Principe des Travaux Virtuels (PTV), est apparue à la fin des années 1980 [Grédiac 89]. Elle permet l'identification de paramètres matériau et pré-suppose la donnée d'un champ de déformation expérimental sur l'ensemble du domaine d'étude Ω . La formulation faible du PTV, si l'on suppose la nullité des forces volumiques, s'écrit :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV = \int_{\partial V} T_i u_i^* dS, \quad (1.2)$$

où σ est le tenseur des contraintes, T l'effort, enfin u^* et ε^* représentent respectivement les champs virtuels de déplacement et de déformation. Le processus de résolution consiste alors à exprimer le terme de gauche de l'équation (1.2) en fonction des paramètres de la loi de comportement choisie et du champ de déformation issu de la mesure. Dans le cas de l'élasticité linéaire, la relation contrainte/déformation est définie par le tenseur d'élasticité \mathcal{A} tel que $\sigma_{ij} = \mathcal{A}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ permettant d'écrire :

$$\int_V \mathcal{A}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^* dV = \int_{\partial V} T_i u_i^* dS. \quad (1.3)$$

Par la suite, la donnée d'un champ virtuel judicieusement choisi permet d'exprimer le terme de droite de l'équation (1.2) en fonction des efforts extérieurs et des données géométriques du

problème. Dès lors, chaque champ virtuel choisi conduira à une équation du PTV et la donnée de plusieurs champs virtuels indépendants permet d'écrire le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{ijkl} \int_V \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{(1)*} dV = \int_{\partial V} T_i u_i^{(1)*} dS \\ \mathcal{A}_{ijkl} \int_V \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{(2)*} dV = \int_{\partial V} T_i u_i^{(2)*} dS \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{ijkl} \int_V \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{(n)*} dV = \int_{\partial V} T_i u_i^{(n)*} dS. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Ce système admet une solution unique si n est supérieur au nombre de paramètres à identifier et si les n équations sont indépendantes. Cette dernière condition suppose l'existence du champ de déformation ε hétérogène. Il est à noter que plusieurs hypothèses mènent à ce résultat. La mesure du champ réel ε est une mesure surfacique et la distribution de déformation dans l'épaisseur doit être supposée constante si l'on veut pouvoir appliquer le PTV (Eq. 1.2) et intégrer sur le volume V . De plus, l'intégration sur V du tenseur d'élasticité étant problématique, il est couramment supposé que le matériau est homogène, ce qui conduit à considérer les \mathcal{A}_{ijkl} comme des constantes sur V .

L'approche par champs virtuels permet une résolution rapide du problème d'identification puisque le processus n'est pas itératif pour les problèmes linéaires. Néanmoins l'approche présentée ici se complique radicalement lorsque le modèle à identifier présente des non-linéarités [Chalal 06, Grédiac 06]. Par ailleurs, l'indépendance des champs virtuels choisis devant être vérifiée pour résoudre (1.4), le choix de ces champs virtuels devient un problème majeur, d'autant que le nombre de champs nécessaire augmente avec le nombre de paramètres à identifier. En pratique, ces champs peuvent être construits analytiquement sur tout le domaine [Grédiac 99], ou sur un sous-domaine de l'éprouvette [Toussaint 06]. Ils peuvent enfin être issus d'une procédure de génération automatique telle que celle détaillée dans [Grédiac 02].

1.3.3 Méthode de l'Écart à l'éQuilibre (MEQ)

La Méthode de l'Écart à l'éQuilibre repose sur la formulation de l'équilibre d'un maillage EF représentant l'expérience. La mesure du champ de déplacement est alors imposée à chaque noeuds de ce maillage et la résolution du problème direct conduit à l'expression de l'équilibre statique. On rappelle les équations d'équilibre d'un domaine Ω (de frontière $\partial\Omega$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma) + f = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \cdot n - t = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où σ est le tenseur des contraintes, f est la densité volumique de force et t la densité surfacique de force appliquée sur la frontière $\partial\Omega$ (de normale n). Dès lors, la donnée de loi de comportement \mathcal{A} permettant de relier la déformation à la contrainte permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\mathcal{A}\varepsilon(v)) + f = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (\mathcal{A}\varepsilon(v)) \cdot n - t = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

si les sollicitations f et t ainsi qu'une mesure de $\varepsilon(v)$ sont données, alors l'annulation des deux termes de gauche des équations (1.6) ne dépend que des paramètres de la loi de comportement \mathcal{A} . Si \mathcal{A} ne représente pas correctement le comportement du matériau lors de sa déformation,

l'équilibre local du maillage ne peut être satisfait, il apparaît alors un résidu à droite des équations (1.5) qu'il convient de minimiser. La formulation Éléments-Finis d'un tel problème est donc

$$\{f^{res}\} = [K] \{u\} - \{f\}, \quad (1.7)$$

où K est la matrice de rigidité et f^{res} le résidu d'effort intérieur. Il devient donc nécessaire de minimiser les efforts aux nœuds par un algorithme d'optimisation bien choisi. Le résidu R est pour cela formulé sous la forme d'une norme \mathcal{L}^2 (problème de moindres carrés) tel que :

$$R = \sum_i (f_i^{res})^2. \quad (1.8)$$

Un problème se pose notamment vis à vis de la singularité du problème ainsi obtenu si aucun effort extérieur n'est appliqué sur $\partial\Omega$. En effet, la nullité des coefficients A_{ijkl} a pour conséquence la nullité des efforts intérieurs et la vérification de l'équilibre statique. Ainsi, une condition supplémentaire est nécessaire pour résoudre le système d'équations locales issu de l'équation (1.7). Il s'agit donc de poser l'hypothèse que les hétérogénéités matérielles sont représentables par un champ de contraste scalaire $\delta(x)$ tel que

$$\mathcal{A}(x) = \delta(x)\mathcal{A}_0. \quad (1.9)$$

Localement, le champ de contraste permet d'écrire les efforts intérieurs sous la forme suivante :

$$f_i^{res} = \sum_e f_{ie} = \sum_e \delta_e \sum_j k_{ij}^e u_j, \quad (1.10)$$

où l'indice e représente les éléments du maillage. Reste ensuite à fixer arbitrairement une condition sur ce champ de contraste, par exemple : $\langle \delta_e \rangle = 1$ et la singularité du problème disparaît, permettant sa résolution [Amiot 07]. Le processus d'optimisation se concentrera alors sur l'identification du champ de contraste donc du champ de module associé. La donnée d'une mesure de l'effort extérieur sur $\partial\Omega$ permet aussi de lever cette singularité, il n'est alors plus nécessaire de définir un champ de contraste [Roux 05].

Cette approche permet en l'occurrence d'identifier des champs de modules comme dans le cas de problème d'endommagement [Claire 04, Crouzeix 09] mais aussi d'identifier directement une loi d'endommagement [Roux 08].

1.3.4 Méthode de recalage de modèle EF (FEU)

La méthode de recalage de modèles Éléments Finis (Finite Element Updating (FEU) en anglais) consiste en un couplage entre un code de calculs EF et un algorithme d'optimisation. Cette approche présentée en 1971 par Kavanagh et Clough [Kavanagh 71] a connu de nombreuses évolutions. Il existe de multiples variantes de l'approche originale. Ces approches sont généralement basées sur la comparaison des efforts mesurés et calculés (approche notée FEU-F) ou entre des champs de déplacement mesurés et issus d'un calcul EF (approche notée FEU-U). Plusieurs auteurs ont développé des approches combinant ces deux formulations. Elles seront notées FEU-U-F.

Le recalage de modèles Éléments Finis connaît également un champ d'application dans l'identification de modèles thermomécaniques où la comparaison entre modèle et expérience fait intervenir des champs de température, cette approche sera notée FEU-T par la suite.

1.3.4.1 Approche en effort (FEU-F)

Cette approche est historiquement la plus ancienne. Elle repose sur une comparaison entre les efforts mesurés et calculés. Le problème EF direct peut être classiquement formulé dans un cas statique (et éventuellement non-linaire) comme suit :

$$\{F\} = K(p) \{u\}. \quad (1.11)$$

Les mesures expérimentales fournissent le déplacement nodal $\{u^{exp}\}$ dans tout le domaine Ω ainsi que la résultante de l'effort $\{F^{exp}\}$ sur sa frontière $\partial\Omega$. L'équation (1.11) permet l'identification du jeu de paramètre p . Cependant, la nature *mal posée* d'un tel problème lié à l'introduction d'erreurs expérimentales et aux approximations de la modélisation (discrétisation EF et choix de la loi de comportement) rend la vérification de l'équation (1.11) approximative. Dès lors, la formulation d'une fonction objectif permet de quantifier cette approximation. Cette fonction est généralement formulée au sens des moindres carrés [Pagnacco 07, Avril 08a] et prend la forme :

$$f_F(p) = \frac{1}{2} (\{F^{exp}\} - K(p) \{u^{exp}\}) \cdot W_F \cdot (\{F^{exp}\} - K(p) \{u^{exp}\}), \quad (1.12)$$

où W_F est une matrice de pondération (symétrique, définie positive). Le déplacement $\{u^{exp}\}$ étant imposé, le problème direct peut se réduire à trouver les efforts $\{F\}$ qui minimisent le résidu de l'équation (1.11) au travers de la fonctionnelle (Eq. 1.12). On notera que dans le cas linéaire la solution du problème est immédiate puisque la simple donnée de $K(p)$ (issue de la modélisation EF) permet de résoudre :

$$\left[\frac{\partial K(p)}{\partial p} \{u\} \right] p = \{F\}, \quad (1.13)$$

et donc d'obtenir le vecteur paramètre p . Dans les cas non-linéaires, un algorithme d'optimisation est utilisé afin de minimiser la fonctionnelle (Eq. 1.12) et d'actualiser le vecteur paramètres p . L'expression de la fonctionnelle permet, *via* diverses méthodes d'optimisation, d'obtenir une approximation de p .

Néanmoins, nous l'avons vu en section 1.2.2, le conditionnement d'un tel problème d'optimisation dépend grandement de la surabondance de données expérimentales. Or la mesure de l'effort est souvent ponctuelle et globale (mesure par cellule de force par exemple). Par ailleurs, le déplacement $\{u^{exp}\}$ étant utilisé comme consigne, il est nécessaire d'en connaître la distribution sur tout le domaine Ω . En pratique, cette condition s'avère difficile à remplir avec les moyens actuels de mesures de champs. Ce sont précisément ces deux inconvénients de l'approche FEU-F qui ont conduit à considérer d'autres formalisations du problème de recalage de modèles EF.

1.3.4.2 Approche en déplacement (FEU-U)

L'approche FEU-F nécessite la donnée du champ de déplacement sur tout le domaine Ω ce qui en pratique, peut s'avérer délicat. De plus, le bruit de mesure présent sur le champ de déplacement peut rapidement conduire à une erreur dans l'estimation de p . C'est pourquoi une autre approche basée sur la comparaison entre champs de déplacement mesurés et calculés a été envisagée [Hendricks 91]. Dans ce cas, l'effort $\{F_{ext}\}$ est imposé sur tout ou partie des frontières du domaine. Le champ de déplacement $\{u\}$ est obtenu par résolution du problème EF direct. La fonctionnelle prend alors la forme suivante :

$$f_u(p) = \frac{1}{2} (u^{exp} - u^{EF}(p, \varpi)) \cdot W_u \cdot (u^{exp} - u^{EF}(p, \varpi)). \quad (1.14)$$

La variable ϖ représente alors les conditions imposées sur $\partial\Omega$ et W_u est une matrice de pondération. Le problème prend alors une forme nécessairement itérative puisque — *a priori* — $u^{EF}(p, \varpi)$ ne dépend pas linéairement de p . Cette approche présente à son tour un inconvénient notable puisque la formulation en déplacement la rend très sensible au mouvement de corps rigides. Il convient donc d'imposer l'effort sur toute la frontière $\partial\Omega$ et de prêter une grande attention aux conditions expérimentales.

Enfin, le choix de la matrice de pondération W_u est d'une grande importance puisque si celle-ci est choisie telle que $W_u = K(p)$, on retrouve la fonctionnelle (Eq. 1.12) et le problème est alors reformulé en efforts (FEU-F). Le choix de cette matrice de pondération est discuté plus amplement dans la section 4.4.2.

1.3.4.3 Approche mixte (FEU-U-F)

Il est possible de formaliser le problème comme une combinaison des deux approches précédentes, on parlera dans ce cas d'approche mixte. Les définitions des deux fonctionnelles (Eq. 1.14) et (Eq. 1.12) peuvent être combinées. Dans ce cas, le déplacement est imposé sur tout ou partie de la frontière du domaine $\partial\Omega$ et le problème direct se réduit à trouver $\{u\}$ dans $\Omega \setminus \partial\Omega$ ainsi que $\{F_{ext}\}$ sur $\partial\Omega$. Sous sa forme générale, la fonctionnelle s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} f_{u,F}(p) = & \frac{1}{2} (u^{exp} - u^{EF}(p, \varpi)) \cdot W_u \cdot (u^{exp} - u^{EF}(p, \varpi)) + \\ & + \frac{1}{2} (F^{exp} - F^{EF}(p, \varpi)) \cdot W_F \cdot (F^{exp} - F^{EF}(p, \varpi)), \end{aligned} \quad (1.15)$$

où W_u et W_F assurent l'homogénéité et peuvent servir à pondérer l'influence de f_u ou de f_F . Différentes variantes de ce formalisme peuvent être rencontrées dans la littérature selon la disponibilité des données mesurables (zone de l'éprouvette ou champ complet), le choix des matrices de pondérations, etc.

1.3.4.4 Approche en température (FEU-T)

L'approche FEU-T permet de formuler le problème de recalage de modèles Éléments Finis dans le cas d'identification de modèles thermiques ou thermomécaniques. En effet, formuler la fonctionnelle en température permet de minimiser l'écart entre les champs de température calculées et mesurées. Cette formulation du problème permet, par exemple, l'identification des paramètres d'un modèle d'échauffement, de frottement, de conduction, *etc.* La fonctionnelle s'exprime, dans ce cas, sous la forme suivante :

$$f_T(p) = \frac{1}{2} (T^{exp} - T^{EF}(p, \varpi)) \cdot W_T \cdot (T^{exp} - T^{EF}(p, \varpi)). \quad (1.16)$$

La matrice W_T peut alors servir à travailler en température absolue ou relative. Dans le cas d'identification de modèle thermomécanique, il est possible, en théorie, de coupler ce formalisme avec un formalisme purement mécanique de type FEU-U afin de mêler, dans le vecteur p , des paramètres à la fois d'origine mécanique et/ou thermique.

1.4 Mesures de champ et méthodes inverses

Dans le cadre de ce travail, une méthode de type recalage de modèles Éléments Finis (FEU) a été retenue et des moyens de mesure de champs cinématiques et thermiques lui sont associés. En effet, l'idée originale proposée dans [Kavanagh 71] était bâtie sur des mesures ponc-

tuelles du déplacement et bien que de nombreuses études restent fidèles à ce formalisme, notamment du fait de l'incapacité à retranscrire un champ de déplacement significatif dans certains cas (matériaux hétérogènes [Yoshida 98, Yoshida 03], déformation hétérogène dans l'épaisseur [Ghouati 98, Forestier 04, Bigot 05]), les méthodes de mesures de champs sont de nos jours largement utilisées dans les applications liées aux méthodes inverses. Les applications du couple méthodes inverses/mesures de champs sont nombreuses et variées. On propose ici d'en détailler quelques-unes en adoptant une classification par type de loi de comportement.

Elasticité Linéaire :

Très tôt, l'utilisation des mesures de champs a permis l'identification de paramètres élastiques par méthodes inverses. Ces dernières permettent sans difficulté théorique d'identifier ces modèles. Néanmoins, la difficulté est d'ordre expérimental puisque il s'agit dans ce cas de mesurer de très petites déformations (environ $2 \cdot 10^{-3}$ au maximum pour un métal). Le rapport signal/bruit peut alors devenir problématique. Cependant, en 1991, [Hendricks 91] propose d'utiliser 108 *marqueurs* peints sur la surface d'une éprouvette pour mesurer le déplacement en fin d'essai. Une méthode de type FEU-U est alors utilisée afin d'identifier les 4 paramètres d'une loi élastique orthotrope. Par la suite, [Molimard 05] utilise une méthode interférométrique de Moiré telle que décrite dans [Post 94] pour identifier 4 paramètres d'une loi orthotrope. De plus, des mesures de champs par corrélation d'images ont permis d'identifier des lois élastiques linéaires en utilisant les approches de type FEU-U [Lecompte 07b, Witz 08], MCV [Pannier 06, Chalal 06] ou MEQ [Amiot 07]. Cette dernière étude s'attache notamment à l'identification d'un modèle élastique isotrope à 2 paramètres.

Enfin, des méthodes modales de type FEU, c'est-à-dire considérant comme réponse du système les fréquences propres d'une poutre ou d'une plaque ainsi que les modes de vibration (en flexion/torsion) ont permis d'identifier un modèle élastique orthotrope [Lauwagie 05, Bruno 08].

Viscoélasticité :

Seules quelques études se sont attachées à identifier des modèles viscoélastiques. Cependant, relevons les travaux de Le Magorou [Le Magorou 02], qui concernent des essais de pliage de panneaux de bois. Des mesures de champs sont réalisées via des techniques de métrologie optique (interférométrie) et sont utilisées à différents instants suivant l'application de la charge. Les mesures de fluage ainsi réalisées conduisent à identifier trois paramètres d'un modèle de décroissance des rigidités dans le temps.

Enfin, des approches modales ont également été mises en œuvre afin d'identifier des paramètres de loi viscoélastique par FEU [Pagnacco 07] et par MCV [Grédiac 03].

Hyperélasticité :

Contrairement aux identifications élastiques classiques, l'identification de modèles hyperélastiques pose des problèmes liés aux mesures et à la modélisation de très grandes déformations. Cependant, l'apparition de méthodes de mesures de champs très précises ainsi que l'amélioration constante des méthodes de corrélation d'images ont rendues possibles l'emploi des méthodes inverses dans de tels problèmes. Génovèse [Genovèse 06] propose une identification par FEU-U de 2 paramètres d'une loi de Mooney-Rivlin basée sur des expériences de traction bi-axiale et de gonflement. Dans cette dernière étude, le déplacement hors-plan, mesuré par interférométrie de Moiré, est utilisé pour formuler la fonction objectif. La même procédure a été employée pour l'identification d'un modèle hyperélast-

tique anisotrope comprenant jusqu'à 17 paramètres [Cosola 08]. Enfin, la MCV a aussi été utilisée afin d'identifier des paramètres de Mooney-Rivlin [Guélon 09, Promma 09].

Elastoplasticité :

Il existe une littérature abondante sur l'application des méthodes inverse avec mesures de champs dans le cas d'identifications de paramètres élastoplastiques. Dès 1997, Mahnken et Stein [Mahnken 97, Mahnken 99] présentent une identification des paramètres d'un modèle plastique en utilisant des *marqueurs* afin d'obtenir le profil de striction d'une éprouvette cylindrique. Ils utilisent une méthode de type FEU-U-F. Un an plus tard, Meuwissen reformule cette méthode suivant un formalisme FEU-U, et identifie les paramètres du critère de Hill ainsi que ceux d'une loi d'écrouissage de Nadaï [Meuwissen 98b]. Il propose d'ajouter des mesures de champs obtenues par corrélation d'images afin d'identifier des lois d'écrouissage linéaire et non-linéaire [Meuwissen 98a]. Plus récemment, cette approche sera aussi appliquée à l'identification des coefficient de Lankford via l'utilisation de 7 essais de traction plane [Khalfallah 04]. Par la suite, de nombreuses applications basées sur l'emploi d'approches FEU-U-F se sont intéressées à l'identification de paramètres de Hill ainsi que des lois d'écrouissages de Ludwick [Lecompte 07a], de Swift [Belhabib 07a, Belhabib 07b, Cooreman 08, Dournaux 09] et multilinéaires [Kajberg 04a]. L'utilisation de la MCV pour l'identification de modèles élastoplastiques est détaillée dans [Grédiac 06] mais seuls des exemples purement numériques y sont présentés. Cependant, des modèles d'écrouissage linéaire et non-linéaire sont identifiés par une variante de la MCV [Chalal 06, Avril 08b]. Enfin, Latourte [Latourte 08] propose une identification de propriétés élastoplastiques par ERC.

Viscoplasticité :

La nature même des modèles viscoplastique rend difficile leur identification par méthode inverse ou directe. En effet, les vitesses de déformation mise en jeu sont parfois difficiles à obtenir et observer expérimentalement. De plus, la sensibilité des paramètres à ces vitesses rend la création de bases expérimentales complexe. La nécessité d'une hétérogénéité dans les vitesses de déformation ainsi que la large gamme de vitesse nécessaire à stabiliser les méthodes inverses dans ce type d'application implique d'infinites précautions dans leurs utilisations [Mahnken 96]. Néanmoins, en 2004, l'utilisation de test d'impact a permis de mettre en place une méthode de type FEU-F sans mesure de champs [Kajberg 04b]. En pratique, la création et la capture de champs de déplacement à de telles vitesses posent un problème évident puisqu'elles requièrent l'emploi d'une caméra rapide et de bancs d'essai complexes : matériels coûteux et peu répandu. De plus l'abondance d'images fournies par ce type d'appareillage rend le traitement numérique des données long et fastidieux. C'est pourquoi, aujourd'hui encore, l'identification de paramètres viscoplastique par méthode inverse est encore largement conditionné à l'utilisation de méthode FEU-F sans mesure de champs [Sasso 08, Sedighi 10].

Des essais de Hopkinson et des mesures de champs réalisées à 100 Hz ont permis à Kajberg et Wikman d'identifier les paramètres viscoplastique d'une loi de Johnson-Cook avec mesures de champs [Kajberg 07]. Récemment Avril *et al.* [Avril 08c] ont proposé une géométrie d'éprouvette hétérogène en vitesse de déformation présentant une gamme de vitesse allant de 0.1 s^{-1} à 1 s^{-1} . Les paramètres d'une loi d'écrouissage-viscosité additive ont ainsi pu être identifiés.

Thermomécanique :

L'application des méthodes inverses dans le champs thermomécanique demeure marginale.

Cependant, plusieurs études mettent en application des méthodes identification de paramètres de conductivité thermique. Telejko *et al.* [Telejko 04] et Liu [Liu 05] ont utilisé cette approche sur la base d'expériences purement numériques. Par ailleurs, Wawrzynek *et al.* [Wawrzynek 03] présentent une identification basée sur un essai d'échauffement homogène avec mesures de champs thermiques. Une approche FEU-T est alors utilisée afin d'obtenir les coefficients de conductivité d'un empilement de différents bétons. Dilhaire *et al.* [Dilhaire 04] proposent d'appliquer une approche FEU-T pour identifier des coefficients de conductivité. L'éprouvette est chauffée localement avec un laser et le champ de température est reconstruit à partir du champ de réflectance³.

Relevons aussi le travail de Latourte [Latourte 07] qui s'intéresse à l'évaluation de bilans énergétiques lors d'essais de fatigue. Une méthode de type ERC est alors appliquée afin d'évaluer la puissance mécanique : les champs de contraintes sont issus d'une identification inverse et les champs de déformations sont mesurés.

Autres applications :

Enfin, d'autres applications mêlant mesures de champs et méthodes inverses donnent aussi un aperçu du vaste champ d'utilisation de cette approche. Citons par exemple, les travaux menés par Meurs *et al.* [Meurs 96] ainsi que ceux de Eberl *et al.* [Eberl 10] qui ont utilisé des méthodes de mesures par *marqueurs* afin d'étudier les interfaces des matériaux composites, ceux de Bosboom *et al.* [Bosboom 01] qui utilisent la même technique afin d'identifier les propriétés mécaniques des muscles d'un rat, les travaux de Héripé *et al.* [Héripé 07] qui s'intéressent, par FEU-U à l'échelle cristallographique, aux scissions résolues critiques de systèmes de glissement, *etc.*

Par ailleurs, de nombreuses publications s'attachent à l'identification de modèles de mécanique d'endommagement [Claire 02, Crouzeix 09] par MEQ, [Maier 06] par FEU. Enfin, une étude par méthode inverse de type FEU-U et mesure de champ dont l'objet est l'identification d'une distribution d'efforts dans une liaison arbre-moyeu ou encore l'identification des conditions aux limites en effort d'un essai de traction trouée est proposée par Padmanabhan *et al.* [Padmanabhan 06].

1.5 Méthodes retenues

1.5.1 Identifications mécaniques

Dans le cadre de ce travail, une méthode de recalage de modèles Éléments Finis (FEU) a été choisie. Des mesures de champs cinématiques planes et non-planes ont été utilisées afin de fournir les champs de déplacement nécessaires à cette méthode. L'approche par FEU-U-F a été retenue en raison de la surabondance de données expérimentales et de la présence éventuelle de mouvements de corps rigide.

Les expériences menées permettent d'obtenir deux types informations : l'effort de réaction de l'échantillon (information ponctuelle) et le champ de déplacement surfacique (information de champs, Fig. 1.4). Parallèlement, un modèle EF est construit de manière à reproduire fidèlement l'essai (géométrie, conditions aux limites). Ce modèle numérique est muni d'une loi de comportement comprenant un nombre fini de paramètres. Certains de ces paramètres sont choisis constants et connus *a priori*, d'autres sont à identifier. La valeur initiale de chacun de ces paramètres est choisie arbitrairement.

3. La réflectance est la proportion de rayonnement incident réfléchi par une surface

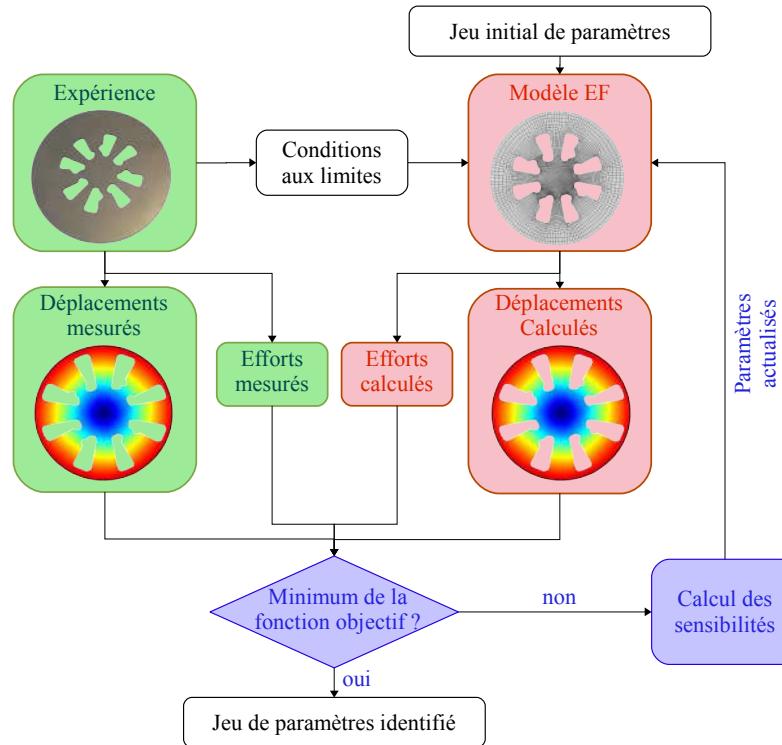


FIG. 1.4 – Schéma de principe de la méthode inverse de type recalage de modèle Éléments Finis (FEU-U-F) utilisée dans le présent travail de thèse.

La résolution du problème EF direct permet de calculer les champs de déplacement ainsi que l'effort extérieur. Une fonction objectif est construite à partir des informations d'origine numérique et expérimentale et un algorithme d'optimisation est mis en œuvre afin d'actualiser itérativement le jeu de paramètres. Enfin, un critère de convergence permet de stopper cette actualisation lorsque les paramètres du modèle reproduisent les phénomènes observés expérimentalement (déplacements et efforts).

1.5.2 Identifications thermiques

Dans le cas des identifications thermomécaniques (Fig. 1.5), l'approche retenue repose sur une connaissance *a priori* d'un modèle mécanique capable de prédire convenablement le processus de déformation. Une méthode de type FEU-T a été couplée à des mesures de champ thermique renseignant la température surfacique de l'éprouvette. Les températures expérimentales sont ensuite recalées afin d'annuler le déplacement des points matériels de l'éprouvette dans le cadre des images thermographiques. Le modèle numérique EF permet de prédire le champ de température à partir de la donnée de la puissance plastique mise en jeu durant l'essai. L'approche retenue consiste à identifier, dans un premier temps, les paramètres du modèle mécanique (approche par FEU-U-F telle que décrite ci-dessus), puis à utiliser le jeu de paramètres mécaniques identifié afin d'évaluer la puissance plastique dans chaque élément du maillage. Cette puissance permet ensuite l'évaluation des sources de chaleur imposées dans le modèle EF thermique. Les deux champs de température sont comparés et conduisent à l'actualisation du vecteur paramètres. Un critère de convergence permet de stopper le processus itératif au voisinage de l'optimum.

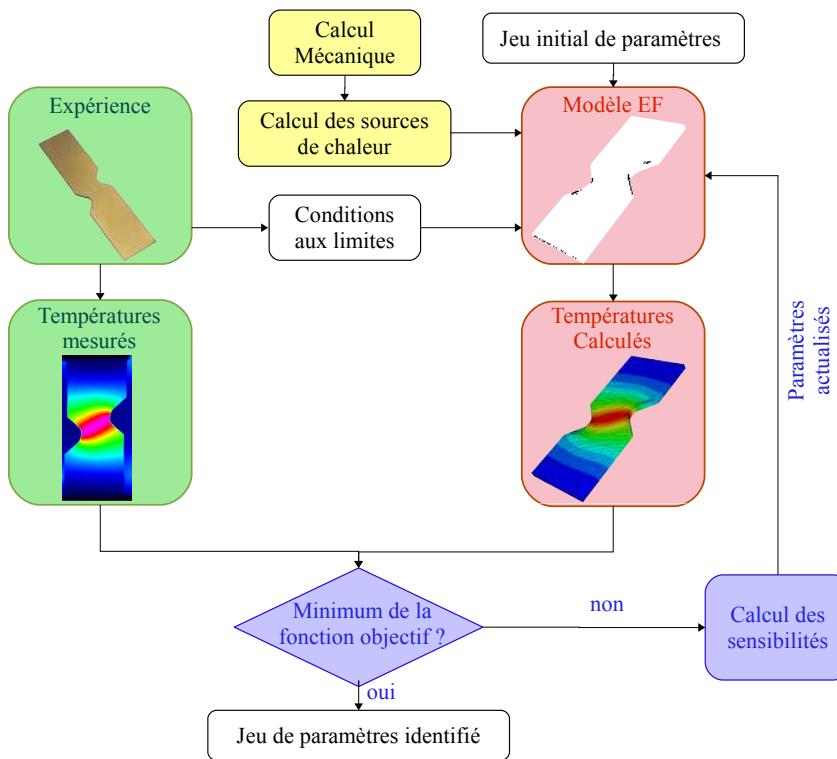


FIG. 1.5 – Schéma de principe de la méthode inverse de type recalage de modèle Éléments Finis (FEU-T) utilisée dans le présent travail de thèse.

1.6 Conclusion du premier chapitre

Comme nous venons de le voir dans ce chapitre, la notion de *problème inverse* découle de l'inversion entre une donnée du *problème direct* et un résultat de celui-ci. Ce type de formulation mène généralement à la définition d'un problème d'optimisation qui fournit une *quasi-solution* au sens de Tikhonov.

La démocratisation des moyens expérimentaux de mesures de champ conduit de plus en plus fréquemment à la formulation de problèmes inverses. En effet, la sur-abondance de données expérimentales est une condition qu'il est désormais facile de satisfaire. En conséquence, plusieurs méthodes ont vu le jour afin de résoudre de tels problèmes. Toutes présentent leurs avantages et limitations et proposent de multiples variantes permettant leur adaptabilité au problème posé.

Le problème inverse défini dans ce travail — appelé *identification paramétrique* — s'inscrit dans une perspective de mise au point d'un modèle de comportement. Cette approche consiste donc à optimiser les paramètres d'un modèle de comportement afin que la solution du problème direct prédise, au mieux, l'évolution d'une expérience préalablement choisie. Cette expérience doit évidemment faire intervenir les comportements que l'on souhaite identifier. C'est pourquoi, il est nécessaire de mettre en œuvre des essais hétérogènes en déformation pour identifier des lois de comportement complexes.

La facilité d'implémentation ainsi que l'adaptabilité de la méthode de recalage de modèle Éléments Finis (FEU) nous conduisent à résoudre les problèmes d'identification paramétrique suivant cette formulation. En considérant des bases expérimentales réduites au maximum, deux

algorithmes permettant l'identification de comportement mécanique ou thermomécanique ont été implémentés. Les chapitres suivants s'attacheront à préciser les trois points nécessaires au fonctionnement de tels algorithmes : une base expérimentale (chapitre 2), un modèle de comportement à identifier (chapitre 3) et enfin une méthode d'optimisation permettant d'aboutir à une quasi-solution (chapitre 4).

2

Expériences et montages expérimentaux

Sommaire

2.1	Introduction	21
2.2	Matériaux	22
2.3	Essais plans	23
2.3.1	Géométries d'éprouvettes	23
2.3.2	Montage de traction simple	23
2.3.3	Corrélation d'images	25
2.3.4	Incertitudes des mesures par corrélation sur surfaces planes	28
2.4	Essais hors-plan	28
2.4.1	Géométries d'éprouvettes	28
2.4.2	Montage hors-plan TIX	29
2.4.3	Conditions aux limites de l'essai TIX	31
2.4.4	Stéréo-corrélation d'images	34
2.4.5	Calibration du montage optique stéréoscopique	36
2.4.6	Incertitudes des mesures issues des montages stéréoscopiques	37
2.5	Essais thermographiques	48
2.5.1	Thermographie IR	48
2.5.2	Montage thermographique	48
2.5.3	Post-traitement des essais thermographiques	49
2.6	Conclusion du second chapitre	50

2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'approche d'identification par méthode inverse se caractérise par la nécessité pratique d'expériences présentant des sollicitations hétérogènes. Les méthodes expérimentales dites *classiques* n'offrent malheureusement que peu de moyens pour caractériser de telles déformations. En effet, la simple mesure du déplacement de la traverse ou l'utilisation d'un extensomètre mécanique ne sont guère à même de rendre compte de la diversité des trajects de déformations suivis lorsque l'éprouvette n'est plus de géométrie standardisée.

C'est pourquoi, afin de mettre en œuvre les procédures d'identification retenues, divers protocoles expérimentaux ont été repris ou développés. Des essais de traction plane avec différentes géométries d'éprouvettes ainsi que des essais hors plan ont été réalisés. L'utilisation de mesures de champs tant cinématiques que thermiques permet d'acquérir des informations beaucoup plus riches sur l'hétérogénéité des champs lors de ces essais.

Ce chapitre présente donc les protocoles expérimentaux mis en œuvre dans ce travail ainsi que les moyens de post-traitement utilisés afin de rendre les données brutes exploitables et ceci tant d'un point de vue cinématique que thermique. Les géométries d'éprouvettes utilisées ainsi que les matériaux employés sont aussi brièvement détaillés.

2.2 Matériaux

Dans l'étude présentée, deux matériaux sont utilisés. Le premier est un titane commercialement pur T40 laminé d'épaisseur 0.5 mm (qui sera par la suite noté T40-0.5mm), le second est aussi un titane T40 laminé mais d'épaisseur 1.6 mm (noté quant à lui T40-1.6mm). Ces tôles laminées sont des matériaux typiques des applications de mise en forme par emboutissage notamment dans des secteurs industriels tels que l'aéronautique, le bio-médical, *etc.* Ces matériaux sont connus pour présenter des comportements anisotropes issus de leur structure et du procédé de laminage. Rappelons que le titane présente une structure cristalline hexagonale compacte. L'axe *c*, à l'issue du laminage, est généralement orienté perpendiculairement au plan de la tôle. La Figure 2.1 montre la structure cristallographique et les figures de pôles des deux matériaux précités et met en évidence leurs natures anisotropes. Cette étude par EBSD a été réalisée au sein du laboratoire LETAM de l'université Paul Verlaine de Metz (on trouvera dans [Moustahfid 97] le détail de la procédure utilisée).

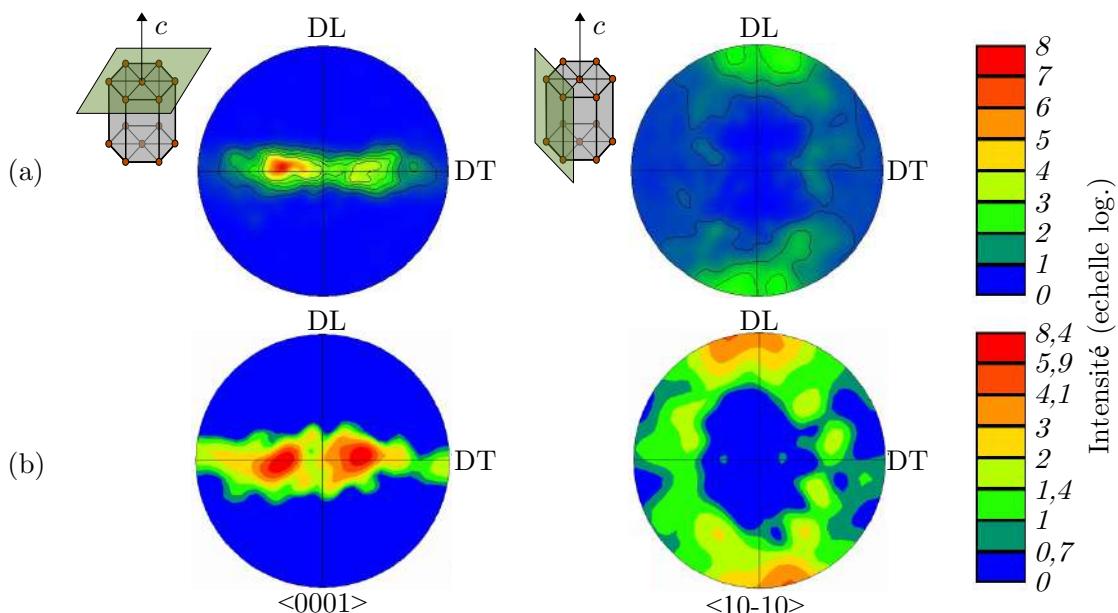


FIG. 2.1 – Figure de pôles des deux matériaux de l'étude (a) T40-0.5mm (b) T40-1.6mm. (DL : Direction de Laminage, DT : Direction Transverse)

La taille moyenne des grains du T40-0.5mm est de $\bar{\mu}_{0.5mm} = 6.4 \mu\text{m}$ et l'écart type $\sigma_{0.5mm} =$

$5.9 \mu m$ alors pour le T40-1.6mm, $\bar{\mu}_{1.6mm} = 12 \mu m$ et $\sigma_{1.6mm} = 4.8 \mu m$. Pour chaque matériau, différentes géométries d'éprouvettes ont été découpées au moyen d'une machine d'électro-érosion de type filaire, en prenant soin de repérer sur chaque échantillon la direction de laminage (DL).

2.3 Essais plans

2.3.1 Géométries d'éprouvettes

L'utilisation et le succès de l'identification par méthode inverse reposent en grande partie sur la qualité des essais considérés. En effet, afin de tirer le meilleur parti des mesures de champs, ces essais doivent tendre vers une hétérogénéité des champs de déformation la plus grande possible et une excellente maîtrise des conditions aux limites. Par ailleurs, plus le modèle de comportement à identifier est complexe, plus il est important que chaque paramètre de ce modèle ait une influence sur le champ mesuré. C'est pourquoi de nombreuses études se sont focalisées sur la mise au point de géométries d'éprouvettes permettant d'obtenir une telle hétérogénéité. La Figure 2.2 montre un aperçu non-exhaustif des différentes géométries utilisées à des fins d'identification paramétrique. Bien que l'utilisation de sollicitations en traction soit très répandue, on notera que les éprouvettes présentées Figure 2.2(j-l) et Figure 2.2(o) sont destinées à des essais sur machine de traction bi-axiale notamment afin de faire apparaître de l'expansion. Toutes ces éprouvettes tendent à se déformer dans le plan et sont donc compatibles avec des moyens de mesure tels que la corrélation d'images. Aussi, à l'exception des éprouvettes précitées, l'emploi de ces géométries s'appuie sur l'utilisation d'une machine de traction uniaxiale et conduit à des états de déformation de types traction, traction-large et traction/cisaillement.

2.3.2 Montage de traction simple

Dans notre étude, plusieurs essais de traction ont été réalisés sur différentes géométries d'éprouvettes (Fig. 2.3). Trois géométries ont été testées :

- a) Une géométrie d'éprouvette de traction classique faisant intervenir un champ de déformation quasi homogène en traction, cette géométrie d'éprouvette est celle qui est habituellement utilisée pour identifier des paramètres matériau par méthode standard.
- b) Une éprouvette de traction trouée a été testée ensuite. La présence d'un trou dans la zone centrale contribue à complexifier le champ de déformation.
- c) Une éprouvette de pseudo-cisaillement, identique à celle proposée dans les travaux de Meuwissen [Meuwissen 98a], a été utilisée. Les deux *encoches* décalées de part et d'autre de l'échantillon permettent d'induire une bande de cisaillement à 45° par rapport à l'axe de sollicitation.

Tous les essais ont été menés sur une machine d'essai INSTRON de capacité 5 KN munie de mors de traction auto-serrants. La fréquence d'acquisition du déplacement de la traverse et de l'effort est fixée à 100 Hz. Un appareil photo est placé face à l'échantillon afin de capturer des images de sa surface durant sa déformation (Fig. 2.4). La synchronisation des bases de temps de la machine de traction et des appareils photographiques est réalisée selon la procédure présentée en Annexe A. Cette surface est préalablement préparée et peinte en pulvérisant une sous-couche de peinture mate noire (ou blanche) puis d'un nuage de points blancs (ou noirs). Le mouchetis ainsi réalisé doit être déposé peu de temps avant la réalisation de l'essai de manière à ce que la

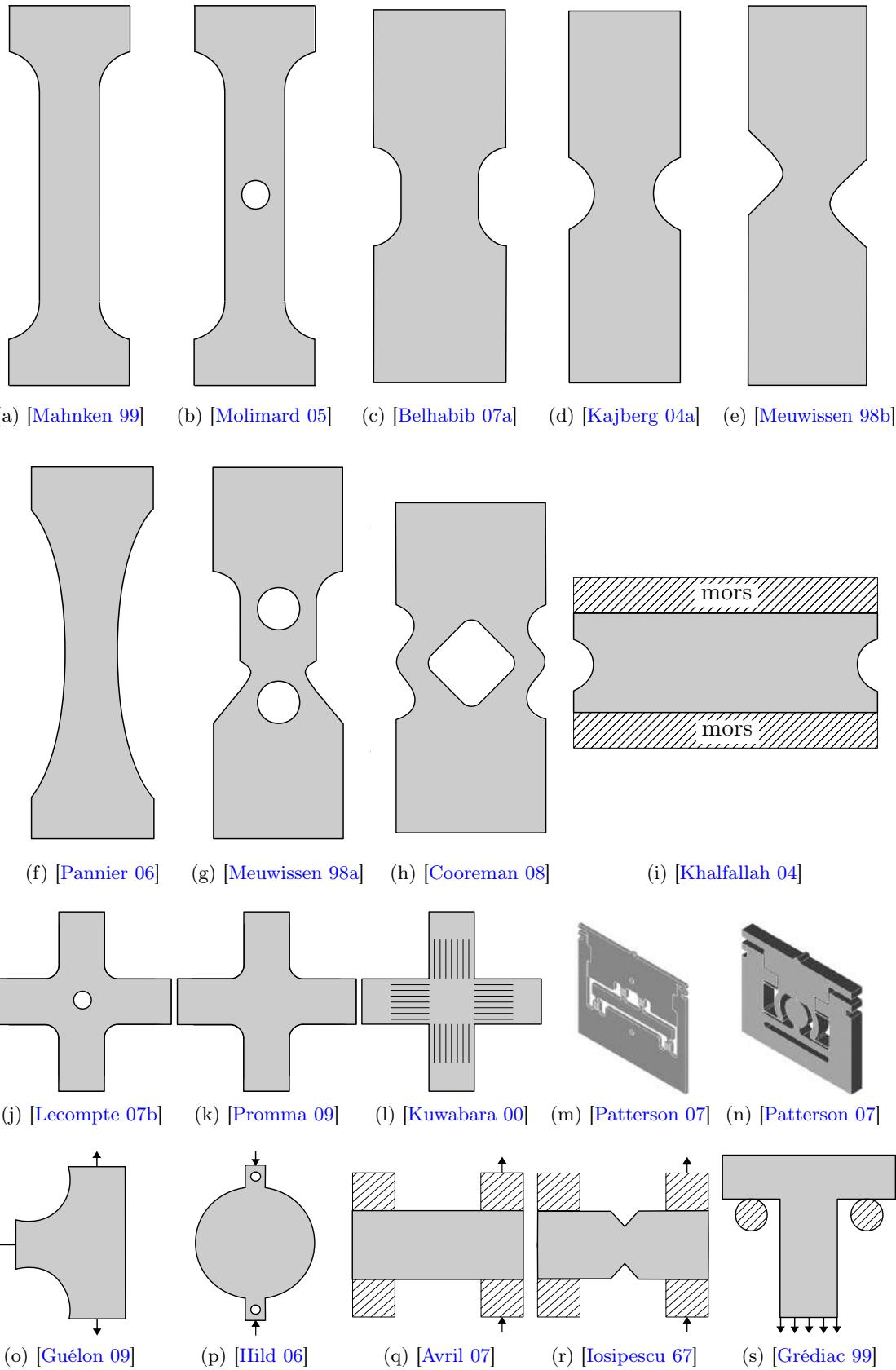


FIG. 2.2 – Revue des géométries d'éprouvettes planes utilisées en identification paramétrique.

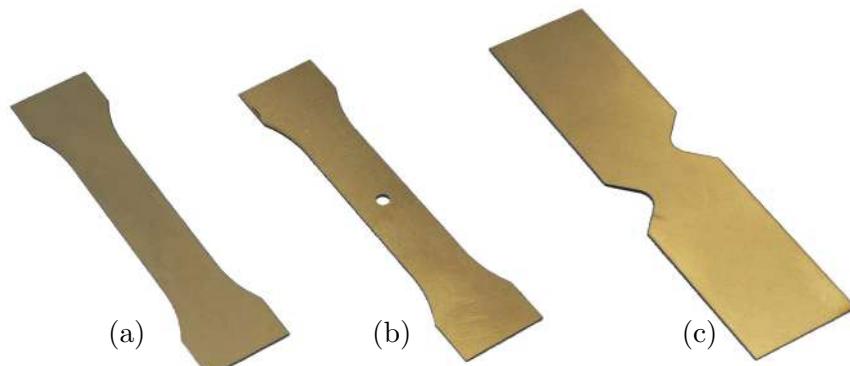


FIG. 2.3 – Géométries d'éprouvettes planes présentant une hétérogénéité du champ de déformation croissante ($T40-0.5\text{mm}$). (a) Éprouvette de traction simple. (b) Éprouvette de traction trouée. (c) Éprouvette de pseudo-cisaillement.

peinture conserve toute sa capacité de déformation. Le montage est complété par une caméra infrarouge qui est utilisée lors des essais thermomécaniques, ses caractéristiques seront discutées en section 2.5.

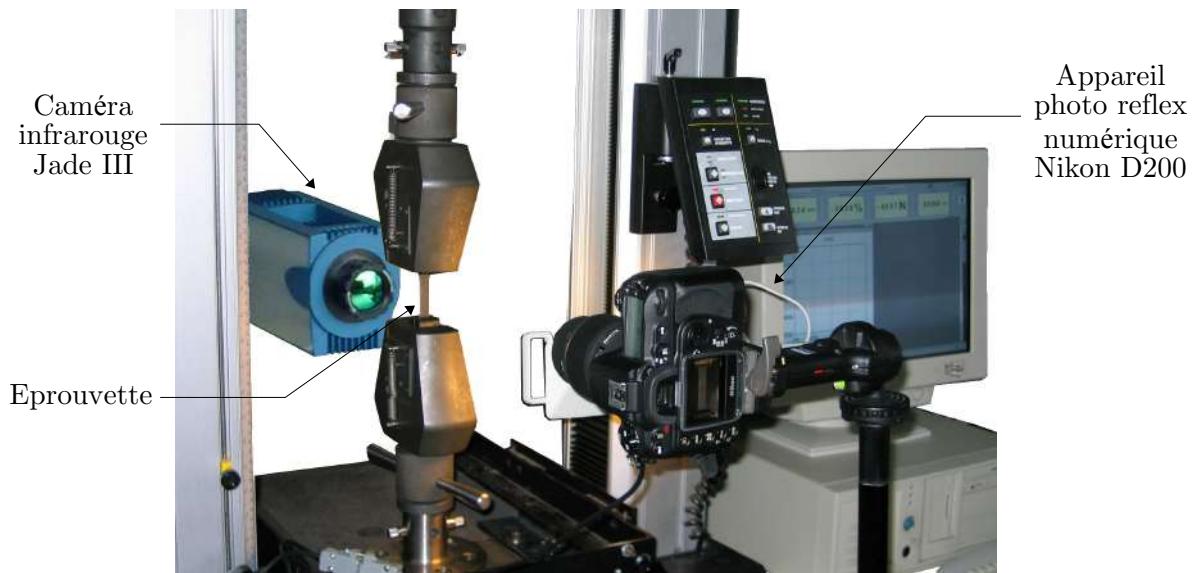


FIG. 2.4 – Montage expérimental utilisé lors des essais plans : appareil photo numérique NIKON D200 sur la face avant et caméra thermique CEDIP-JADE III sur la face arrière.

2.3.3 Corrélation d'images

Les mesures sans contact de la déformation des matériaux s'articulent principalement autour de quatre techniques [Surrel 04] : la méthode de la grille (telle que présentée dans [Avril 04, Mathias 06, Badulescu 09]), l'interférométrie de moiré [Cordero 05, Ryu 08, Cosola 08], l'interférométrie de speckle [Sjödahl 98, Yamaguchi 03, Bruno 08] et la corrélation d'images numériques (utilisée dans cette étude).

La technique de corrélation d'images, fortement développée en France à partir du milieu des années 1990, permet d'identifier précisément des déformations locales à la surface des matériaux

sollicités. Le principe consiste à identifier des champs de déplacement entre deux images d'un même objet déformé, à partir de la distribution des niveaux de gris autour des points concernés. Pour ces analyses d'objets plans, un appareil photo placé perpendiculairement à la surface à observer enregistre les images du matériau en cours d'essai. La distance entre l'appareil photo et la pièce doit être maintenue constante. En pratique, la surface à analyser présente un motif à niveaux de gris aléatoires. La dimension des taches de ce mouchetis est en générale comprise entre 2 et 10 pixels. Le système de vision utilisé est un appareil photo numérique reflex Nikon D200 muni d'un objectif 105 mm et d'un déclenchement à distance. Tous les travaux de corrélation présentées dans le cadre de cette étude ont été réalisés avec le logiciel 7D [Vacher 99, Dumoulin 01, Coudert 05].

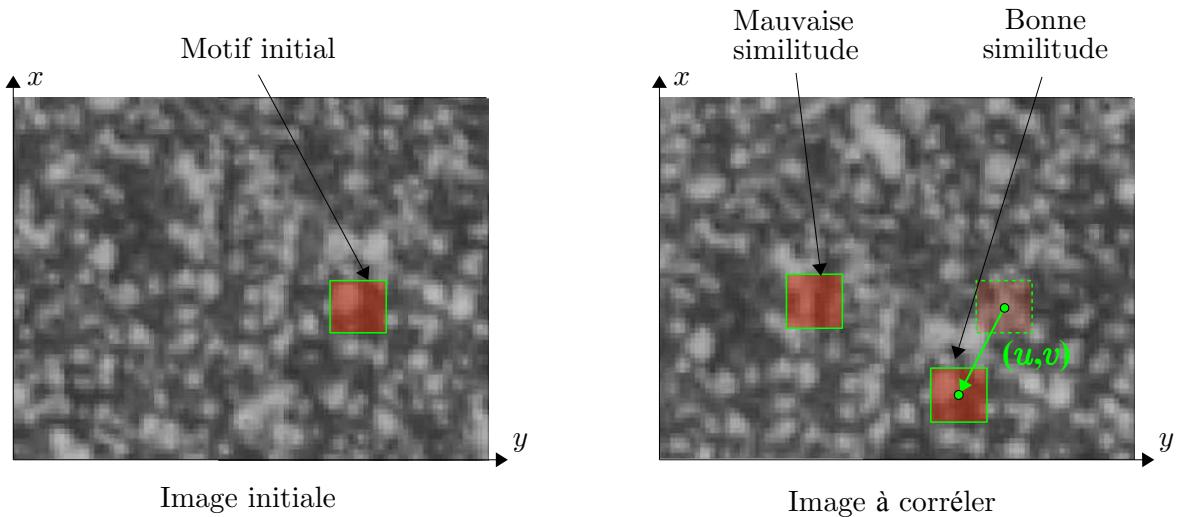


FIG. 2.5 – Principe de base de la corrélation d'images

Dans cette application, l'image initiale est divisée en éléments carrés, la dimension des éléments de cette grille est choisie égale à 16×16 pixels (Fig. 2.5). Cette dimension correspond à la base extensométrique utilisée pour le calcul des déformations. Chaque nœud M de cette grille est muni de coordonnées (X, Y) dans l'image non déformée et de coordonnées (x, y) dans celle déformée (Fig. 2.6).

Retrouver la grille déformée consiste à rechercher dans l'image à corréler et autour de chaque nœud M de cette grille, le motif le plus semblable au précédent en termes de niveaux de gris. Le domaine de recherche \mathcal{D} est un carré de 16 pixels de côté centré sur M (Fig. 2.6(a)). Afin d'augmenter le niveau de corrélation des deux domaines (déformé et non déformé), celui-ci est itérativement déformé par application d'une transformation décrivant le déplacement et la déformation du motif [Vacher 03].

Le champ de déplacement de chaque élément de grille est estimé sous une forme bilinéaire :

$$\begin{cases} du(u, v) = au + bv + cuv + d \\ dv(u, v) = eu + fv + guv + h, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec du et dv le déplacement suivant u et v du point de coordonnées (u, v) .

Un coefficient de corrélation quantifie le niveau de ressemblance entre deux sous-images. Une surface de corrélation est alors construite (Fig. 2.6(b)) en évaluant ce coefficient en chaque point

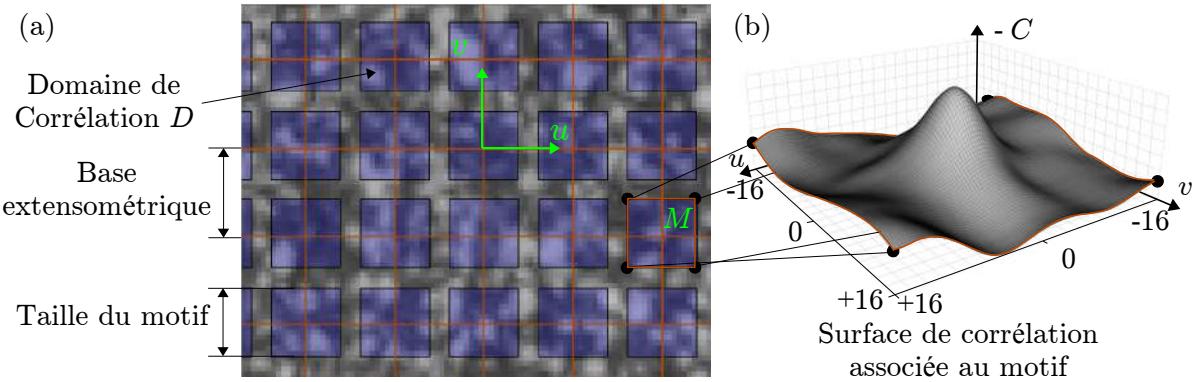


FIG. 2.6 – (a) Image à niveaux de gris aléatoires avec la grille virtuelle (rouge) et le domaine de corrélation (bleu). (b) Surface de corrélation évaluée en calculant C en chaque pixel du motif.

(pixel) du motif. L’optimum du coefficient de corrélation permet alors de localiser le motif déformé homologue et caractérise la transformation liant les deux domaines [Sutton 86, Sutton 00, Pan 09]. Enfin, une interpolation bi-cubique des niveaux de gris permet de localiser l’optimum avec une précision sub-pixelle.

Plusieurs types de coefficients sont implémentés dans le logiciel 7D. Celui utilisé dans cette étude s’appuie sur une formulation de type *zero-mean normalized cross correlation* (ZMNCC). Cette expression tend à minimiser l’impact d’une variation relative de luminosité entre les deux images :

$$C = 1 - \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}} (f(X_i) - \tilde{f}) \times (g(x_i) - \tilde{g})}{\sqrt{\sum_{i \in \mathcal{D}} (f(X_i) - \tilde{f})^2 \times \sum_{i \in \mathcal{D}} (g(x_i) - \tilde{g})^2}}. \quad (2.2)$$

Pour chacun des pixels i du domaine de corrélation \mathcal{D} , la fonction f (et la fonction g) retournent respectivement la valeur du niveau de gris du pixel de coordonnées X_i (et x_i) dans l’image de référence et dans l’image à corrélérer. \tilde{f} et \tilde{g} sont les valeurs moyennes des niveaux de gris sur le motif non déformé et déformé. Ce critère tend vers zéro lorsque les deux motifs sont similaires. Ces calculs nécessitent l’estimation des niveaux de gris dans l’image déformée pour des valeurs de déplacement sub-pixelles. L’algorithme d’optimisation utilisé pour minimiser ce paramètre de corrélation est basé sur une approche de type gradient. Le critère de convergence est établi comme un produit de trois conditions logiques définies telles que :

- ① Le déplacement d’un point de la grille entre deux pas de calcul est inférieur à δu . Paramètre dénommé *admit variation* dans 7D et fixé par l’utilisateur.
- ② **Et** : l’écart entre deux points communs appartenant à deux quadrillatères voisins est inférieur à e_q . Paramètre dénommé *variation pattern* dans 7D et fixé par l’utilisateur.
- ③ **Et** : l’écart maximum entre les angles opposés d’un même quadrilatère est inférieur à α_{max} . Paramètre dénommé *angular variation* dans 7D et fixé par l’utilisateur.

Le Tableau 2.1 présente les paramètres de corrélation utilisés lors de ce travail de thèse.

TAB. 2.1 – Principaux paramètres de corrélation d’images

Taille de grille	Taille de motif	Interpolation des niveaux de gris	Interpolation des déplacement	Coefficient de corrélation	δu	e_q	α_{max}
16 × 16	16 × 16	bi-cubique	bi-linéaire	ZMNCC	0.2 pixel	0.002 pixel	15°

2.3.4 Incertitudes des mesures par corrélation sur surfaces planes

Définir les incertitudes de mesure de déplacements par ces approches demeure un aspect très délicat. Les incertitudes en termes de déplacements sont de l’ordre de 0,01 pixel en petites déformations si ces dernières sont homogènes [Bornert 08]. De très nombreux paramètres viennent en fait perturber les résultats, l’éclairage [Belhabib 07a, Haddadi 08], le bruit de la caméra, les gradients de déformation [Lagattu 05, De Almeida 08], la qualité du marquage aléatoire indispensable à cette technique [Pan 10], les déplacements hors plan [Sutton 08], la taille du motif [Pan 08b], etc. Dans les exemples traités et hors des zones de forte localisation des déformations, ces incertitudes en termes de déformations sont de l’ordre de 1×10^{-3} . Dans le cadre de ce travail de thèse, où les déformations sont importantes et non homogènes, le bruit de mesure issu de la corrélation d’image sera modélisé par une distribution uniforme dont l’amplitude sera 0.1 pixel. Le choix d’une distribution uniforme est ici arbitraire et repose sur le fait que cette distribution est plus *critique* qu’une distribution normale (densité supérieure des valeurs extrêmes). Avec la résolution choisie (environ 20 $\mu\text{m}/\text{pixel}$), ceci correspond à un bruit tel que $b_{DIC} \sim \mathcal{U}(-2 \mu\text{m}; 2 \mu\text{m})^1$.

2.4 Essais hors-plan

2.4.1 Géométries d’éprouvettes

Dans le cadre des méthodes inverses, il est généralement souhaitable de tirer un maximum d’avantages des hétérogénéités de déformation issues de l’expérience. C’est pourquoi, il nous est apparu judicieux de réaliser des essais hors-plan. Cependant, la mise en œuvre expérimentale de tels montages ainsi que la capture des champs de déplacement/déformation associés n’est pas trivial.

On trouve dans la littérature différentes géométries de montages et d’éprouvettes conduisant à des déformations hors-plan. La Figure 2.7 représente quelques-uns des montages les plus souvent observés dans ces applications. L’essai de *bi-poinçonnement* (Fig. 2.7(a)), utilisé par [Gelin 95, Forestier 04] fait partie d’une large variété d’essais de forgeage. Cependant, ce type d’essai, du fait des frottements relatifs entre la pièce et l’outillage, rend quasiment impossible l’utilisation de mesures de champs, la surface de l’éprouvette n’étant souvent pas visible durant l’essai. Les essais de *flexion 3 points* (Fig. 2.7(b)) [Bruno 08] permettent d’obtenir divers niveaux de traction ainsi que du flambement mais ne permettent pas l’apparition d’expansion. Enfin, les essais de type *bulge tests* (Fig. 2.7(c)) ou de *Nakazima* (Fig. 2.7(d)) semblent être les plus intéressants pour des applications d’identification par recalage de modèles EF. En effet, ils permettent d’obtenir une grande variété de trajets de déformations tout en autorisant les mesures de champs *in situ*. Cependant, comme nous allons le voir, en s’inspirant des essais de Nakazima réalisés par Forestier *et al.* [Forestier 04], il est possible d’augmenter encore cette variété de trajets de déformations.

1. La notation $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ signifie que la variable aléatoire X suit une loi uniforme continue sur l’intervalle $[a, b]$.

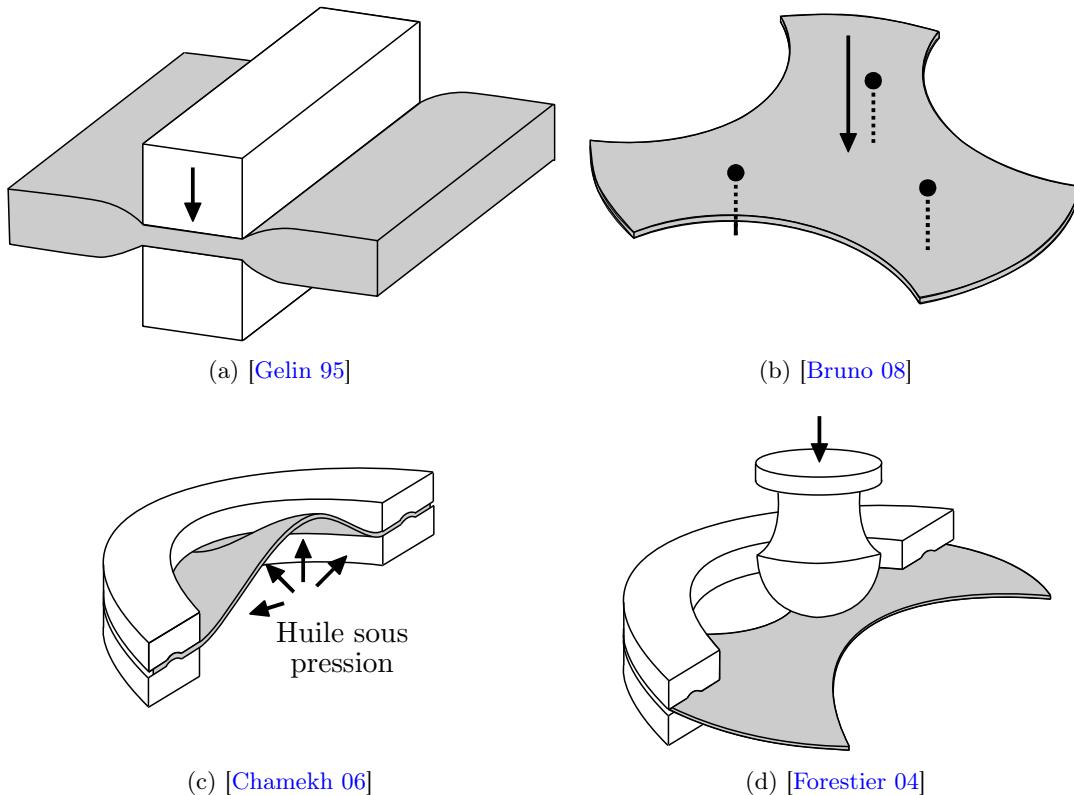


FIG. 2.7 – Revue de quelques essais hors-plan utilisées en identification paramétrique.

2.4.2 Montage hors-plan TIX

Dans le cadre de ce travail de thèse, une nouvelle procédure expérimentale, baptisée TIX², a été développée. L'objectif étant d'utiliser ces essais à des fins d'identification par méthode inverse, deux impératifs majeurs sont apparus : présenter des champs de déformation fortement hétérogènes et faciliter la modélisation de l'essai. Cette dernière condition présente trois aspects principaux : la reproductibilité des conditions aux limites, la minimisation des phénomènes de frottement, la localisation *a priori* des zones de striction. On peut, suivant ces critères, faire le bilan des procédures expérimentales présentées en sections 2.3.1 et 2.4.1.

TAB. 2.2 – Comparaison des différentes procédures expérimentales

Essai	Hétérogénéité des sollicitations			Facilité de modélisation		
	Traction	Cisaillement	Expansion	Striction	Cond. limites	Frottement
Uniaxial	✓	✓	✗	~	~	✓
Bi-axial	✓	✓	✓	~	~	✓
Forgeage	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Bulge	✓	✗	✓	✗	✓	✓
Nakazima	✓	✗	✓	✓	✓	~

Satisfaction du critère : ✓=bonne, ~=moyenne, ✗=mauvaise.

Notons d'abord que les sollicitations inhérentes aux essais plans uniaxiaux s'avèrent insuf-

2. Le choix de cette dénomination est purement arbitraire, le montage ayant été fabriqué *Tout en Inox*.

fisantes en termes de diversité des trajets de déformations. Par ailleurs, les essais de traction bi-axiale nécessitent l'emploi d'un appareillage complexe et onéreux. De plus, leurs conditions aux limites sont compliquées à mesurer (déformation de l'éprouvette dans les mors, répartition de la charge...). Notons aussi que l'hétérogénéité des champs de déformation des essais de gonflement (bulge tests) est insuffisante et que les essais de forgeage se heurtent inévitablement aux problèmes de frottement. Enfin, les essais de Nakazima — tels qu'ils sont présentés dans la littérature — ne présentent pas de cisaillement [Arrieux 90, Uthaisangsuk 07, Uthaisangsuk 08]. On constate donc qu'aucune de ces procédures ne satisfait pleinement les critères exposés ci-dessus. Cependant, sur la base d'un essai de Nakazima, sur la base d'une approche par essai/erreur, nous avons développé une géométrie d'éprouvette permettant d'obtenir du cisaillement, de la traction, et de l'expansion et donc de satisfaire les critères expérimentaux.

La géométrie d'éprouvette proposée est représentée sur la Figure 2.8(a). Elle permet d'obtenir des sollicitations d'expansion ainsi que de traction et de cisaillement dans deux directions orthogonales (0° et 90° par rapport à la direction de laminage). Plusieurs simulations préalables par EF ont permis d'aboutir à une géométrie se rapprochant, pour le cas d'un matériau isotrope, d'une iso-probabilité de striction dans les zones de traction ou de cisaillement. On trouvera en [Annexe B](#) des exemples de géométries ayant été testées numériquement au cours de l'élaboration de l'essai TIX. En l'absence de sous-épaisseur dans la zone centrale, la sollicitation en expansion demeure plus faible que les deux autres. Cependant, l'usinage d'une sous-épaisseur³ aurait eu pour conséquence de modifier les propriétés du matériau (état de surface, écrouissage, échauffement local...) et a donc été abandonnée.

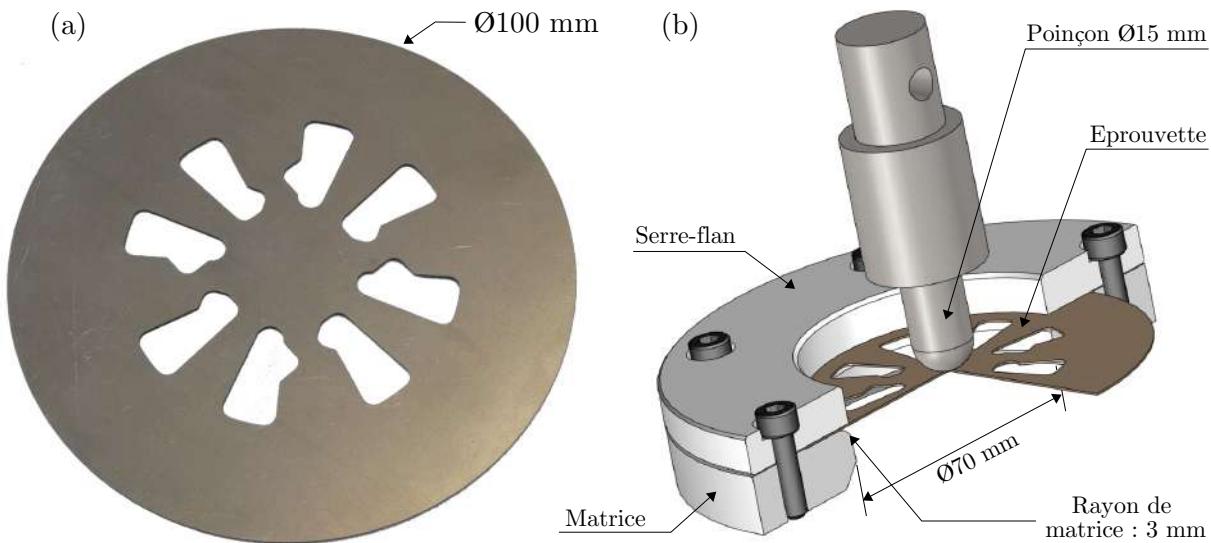


FIG. 2.8 – (a) Géométrie de l'éprouvette. (b) Vue en coupe du montage de l'éprouvette pour l'essai TIX.

Comme le montre la Figure 2.8(b), l'éprouvette est serrée dans la matrice à l'aide d'un serre-flan et de six vis qui permettent d'appliquer un encastrement rigide aux limites de l'échantillon. Les conditions aux limites ainsi qu'une discussion sur le phénomène de frottement seront présentées dans la section suivante (section 2.4.3).

3. L'opération de diminution d'épaisseur repose généralement sur l'emploi de l'électro-erosion par enfonçage

La procédure expérimentale est simple et peut être réalisée sur une machine de traction standard. La Figure 2.8(b) montre l'assemblage de l'éprouvette dans la matrice et la Figure 2.9 montre le montage expérimental complet. L'essai présenté consiste donc à déformer une éprouvette circulaire ajourée à l'aide d'une sollicitation normale au plan de celle-ci. Un poinçon sphérique est monté rigide dans le mors mobile du banc de traction et se déplace de manière à solliciter verticalement l'éprouvette.

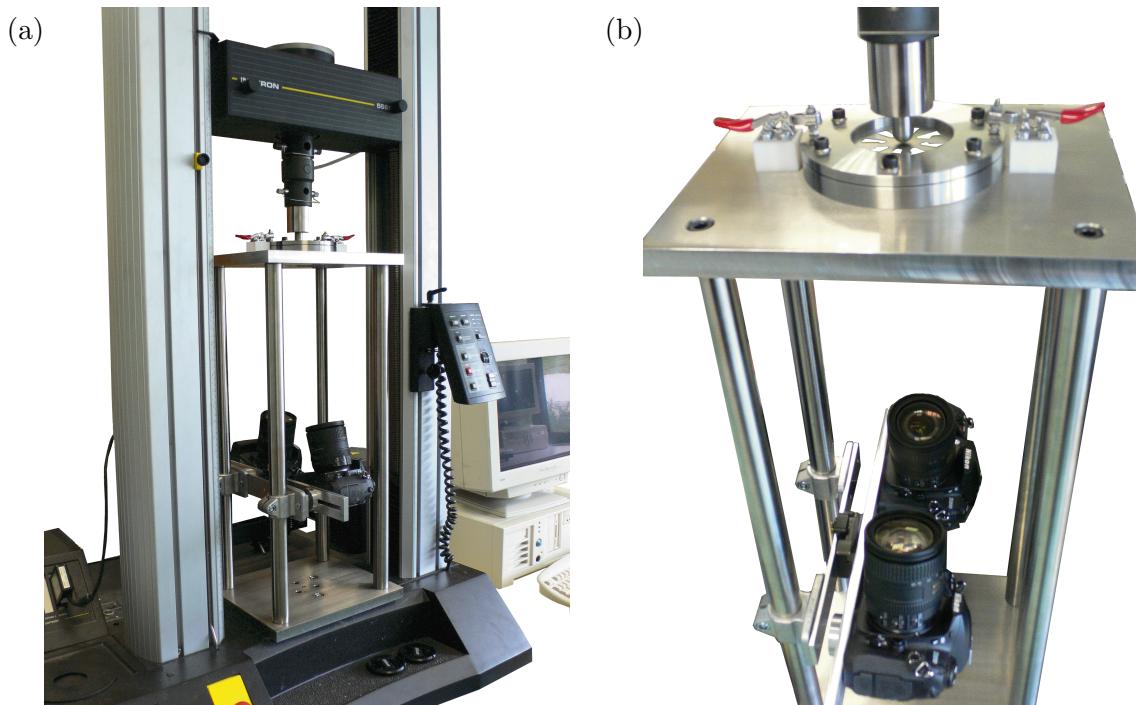


FIG. 2.9 – (a) Vue d'ensemble du montage d'essai hors-plan TIX. (b) Montage expérimental avec deux appareils photographiques permettant d'acquérir des images de l'éprouvette lors de sa sollicitation.

Deux appareils photographiques sont placés sur un rail rigide en dessous du flan et permettent une mesure des champs hors-plan des déplacements de l'éprouvette (voir section 2.4.4). Un éclairage par LED de la face inférieure de l'éprouvette permet de limiter à 0.2 s le temps d'exposition des appareils. Les éprouvettes testées avec ce montage sont réalisées en titane T40-0.5mm. La direction de laminage est repérée sur le flan ainsi que par une encoche sur la matrice afin de pouvoir la visualiser sur les clichés photographiques obtenus.

2.4.3 Conditions aux limites de l'essai TIX

2.4.3.1 Liaison Matrice/flan

Le recours à des méthodes inverses associées à des essais hors plan TIX impose une bonne connaissance des conditions aux limites. En effet, la modélisation par Éléments Finis de cet essai est de bien meilleure qualité si les conditions expérimentales sont très reproductibles et quantifiables. Afin de faciliter la modélisation de la liaison entre le flan et l'ensemble matrice/serre-flan, une attention particulière a été portée à la réalisation d'une liaison encastrement stricte. En effet la présence de glissement entre le flan et la matrice serait difficilement quantifiable et induirait des erreurs dans la modélisation de l'essai.

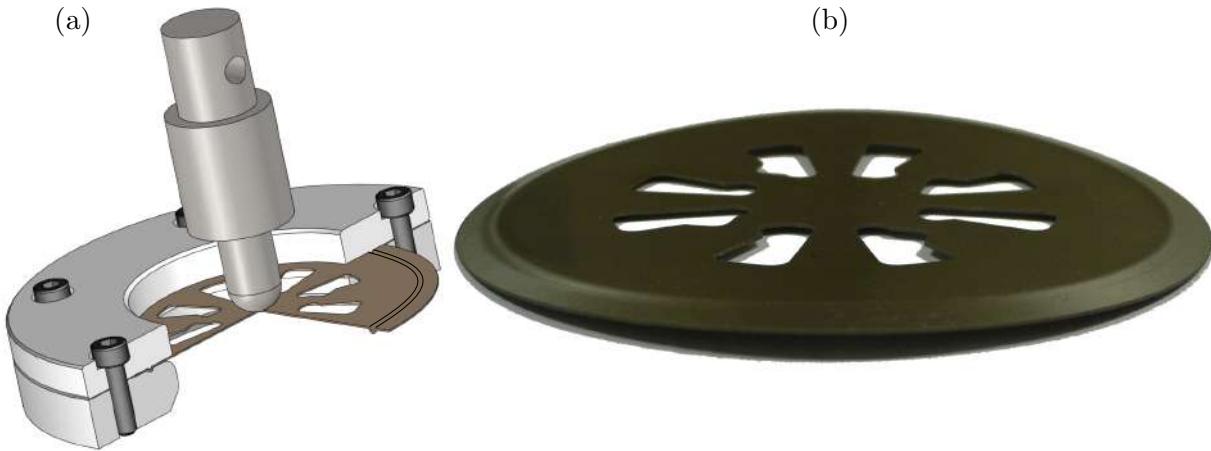


FIG. 2.10 – (a) Option d’encastrement du flan dans l’ensemble matrice-serre-flan avec jonc de serrage. (b) Voilement résiduel de l’éprouvette après mise en place dans la matrice dotée d’un jonc de serrage.

Dans ce but, la matrice a d’abord été munie d’un jonc de serrage (Fig. 2.10(a)). Cependant, cette option s’est avérée inefficace puisque le serrage du flan dans ce jonc induit du déplacement hors plan de type voilement de la surface de l’éprouvette. Cette déformation de la surface d’étude du flan est liée aux déformations plastiques au niveau du jonc (Fig. 2.10(b)). Ce type de déplacement hors plan est de nature à introduire un état de contrainte non nul en début d’essai. L’amplitude de ce voilement a été mesurée à l’aide d’une Machine à Mesurer Tri-dimensionnelle (Fig. 2.11(a)). On remarquera en rouge sur cette figure les trajets du palpeur de mesure. La Figure 2.11(b) montre les résultats de cette mesure, avec une amplitude de déplacement suivant \bar{z} de 0.6 mm. En conclusion, l’amplitude non négligeable de ces phénomènes et la difficulté à les modéliser de manière satisfaisante nous a conduit à envisager une autre solution technologique afin d’assurer l’encastrement entre le flan et la matrice.

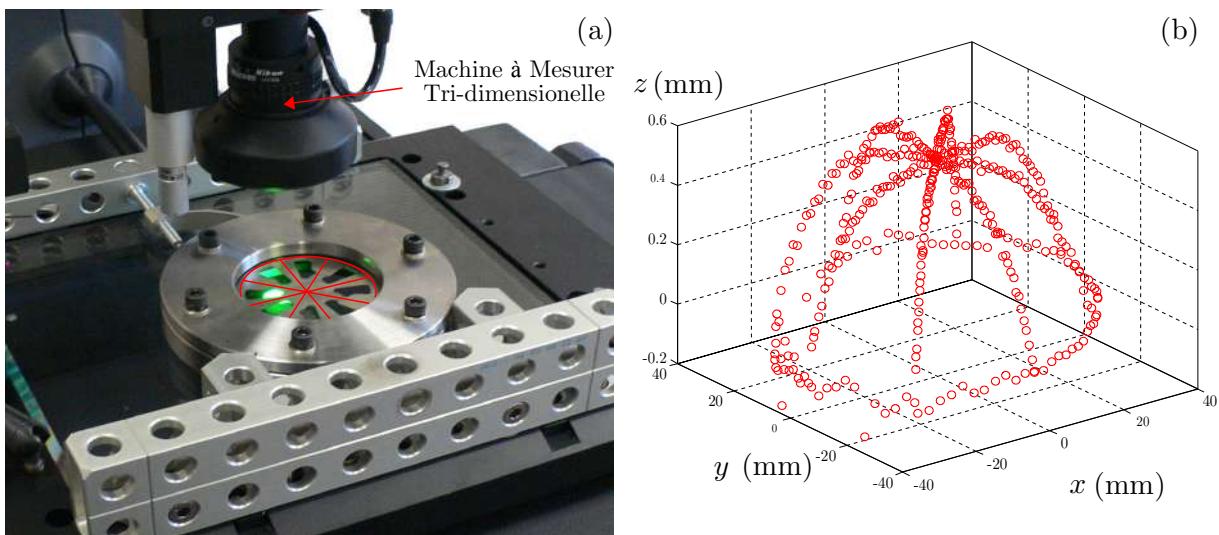


FIG. 2.11 – Mesure du déplacement hors-plan de l’éprouvette après serrage entre la matrice avec jonc et le serre-flan.

La Figure 2.8(b) présente la deuxième solution qui consiste à supprimer le jonc de serrage et assurer l'encastrement par simple friction entre les surfaces de l'éprouvette et celle de la matrice et du serre-flan. En pratique, il est difficile de vérifier par corrélation d'images qu'aucun glissement n'apparaît entre la matrice et le flan puisque le motif de corrélation se trouve à cheval sur ces deux pièces et dans une zone où l'éclairage est faible (Fig. 2.12(a)). Il est néanmoins possible de mesurer le déplacement radial au plus près du bord de la matrice et extrapolater cette valeur jusqu'au bord. Une mesure des déplacements a été réalisée entre une paire d'image du flan non déformé⁴ et une autre prise avant rupture. La Figure 2.12 présente les mesures effectuées ainsi que l'extrapolation (polynomiale) qui a été réalisée.

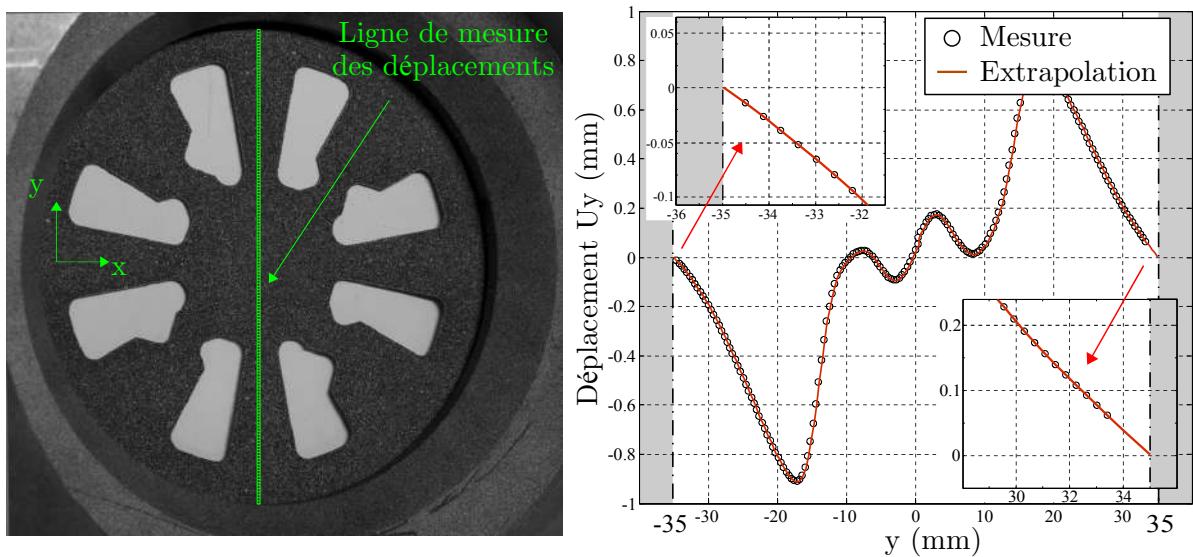


FIG. 2.12 – (a) Ligne analysée par corrélation d'images afin d'évaluer le déplacement radial du flan lors de la déformation. (b) Déplacement radial mesuré et extrapolation aux bords de l'éprouvette (on remarquera que l'extrapolation porte sur une plus grande longueur en haut du flan du fait de l'ombre projetée de la matrice visible sur la photo).

On observe bien que le déplacement entre le flan et la matrice s'annule lorsque le flan entre en contact avec la matrice (on rappelle que le diamètre intérieur de la matrice vaut 70 mm). Enfin, après démontage de l'éprouvette, on n'observe aucune trace d'abrasion de la peinture au niveau des zones de contact. Nous en concluons que la solution technologique d'encastrement du flan par frottement satisfait les critères de reproductibilité et de modélisation des conditions aux limites entre le flan et l'ensemble matrice/serre-flan.

2.4.3.2 Liaison poinçon/flan

Le second point critique quant à la maîtrise des conditions aux limites concerne la liaison poinçon/flan. Dans le cas présent, il s'agit initialement d'une liaison ponctuelle sphère/plan mais lorsque le flan se déforme, la surface de contact augmente et rend l'essai sensible au frottement. Par conséquent, il est classique en emboutissage (et particulièrement sur les essais de Nakazima) de constater une localisation des déformations maximales, non pas sous l'axe du poinçon, mais sous le pourtour de celui-ci [Chehade 90, Boissière 08]. Cela se vérifie expérimentalement sur la Figure 2.13(a) où l'on observe, sur une mesure par corrélation d'images, une concentration des

4. voir la section sur la stéréo-corrélation d'images présentée en section 2.4.4 page 34.

déformations principales maximales sur un cercle concentrique au poinçon.

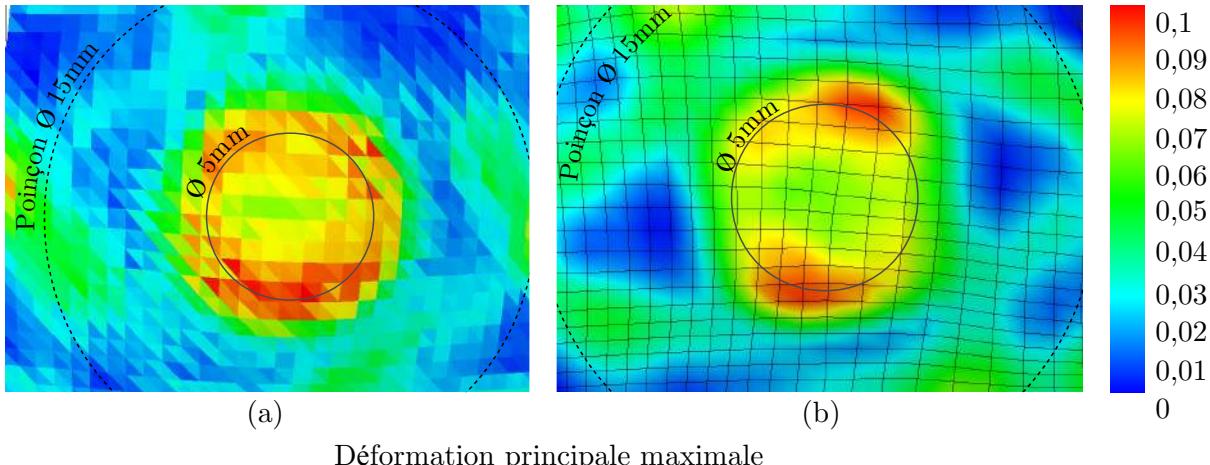


FIG. 2.13 – (a) Mesure des déformations principales maximales en fin d'essai mettant en évidence un cercle de localisation sous le pourtour poinçon. (b) Modélisation de ce phénomène au moyen du code EF Abaqus au même instant.

La taille et l'amplitude de ce phénomène dépendent directement de la loi de comportement et du coefficient de frottement. Cependant si l'on considère que la loi est correctement identifiée en déformation et en contrainte alors la taille et l'amplitude de ce cercle de localisation ne dépendent que du coefficient de frottement.

Cette liaison poinçon/flan a été modélisée numériquement par un coefficient de frottement de 0.25 [Le Port 09]. Les résultats du calcul mené avec cette valeur du coefficient de frottement (Fig. 2.13(b)) montrent une similarité d'amplitude des déformations principales maximales sur le cercle ainsi qu'un diamètre de ce cercle identique pour un même déplacement de poinçon. En conclusion, nous considérerons que l'introduction de ce coefficient de frottement conduit à une modélisation correcte des conditions aux limites sous le poinçon. Des modélisations ont été réalisées avec 6 valeurs de coefficient de frottement allant de $f = 0$ à $f = 0.5$. Elles sont comparées à une modélisation utilisant un coefficient de 0.25. L'erreur maximale sur l'évaluation du vecteur déplacement en fin d'essai a été relevée et les résultats sont présentés dans le Tableau 2.3. Nous constatons que l'erreur maximale est de $10 \mu\text{m}$ correspondant à $f = 0$. Dans une gamme raisonnable du coefficient de frottement (*i.e.* $0.1 < f < 0.3$), l'erreur maximale n'excède pas $3.4 \mu\text{m}$ et sera donc négligée.

TAB. 2.3 – Erreur maximale sur le vecteur déplacement en fonction du coefficient de frottement

Coefficient de frottement	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Erreur (en μm)	10	3	2.3	2	3.4	4

2.4.4 Stéréo-corrélation d'images

Dans le cas d'essais hors plan, une procédure de corrélation d'images non-planes est mise en œuvre. Cette technique, appelée SIC (de l'anglais *Stereo Image Corrélation*) consiste à procéder à l'inter-corrélation de deux images prises par des appareils dont les axes focaux ne sont pas colinéaires. En effet, un appareil photographique permet de transformer une scène tridimensionnelle

en une image bidimensionnelle. Dès lors, la coordonnée le long de l'axe optique du point visé est perdue. En revanche l'utilisation de deux appareils permet de retrouver cette information par *triangulation*.

Remarque : Notons qu'il existe d'autres techniques permettant la mesure de déplacements non-plans. Ces approches ne nécessitent qu'un seul appareil photographique mais requièrent généralement des montages expérimentaux complexes. On peut trouver dans [Surrel 04, Pan 08a, Xianyu 10] une liste exhaustive ainsi que les descriptions de telles approches.

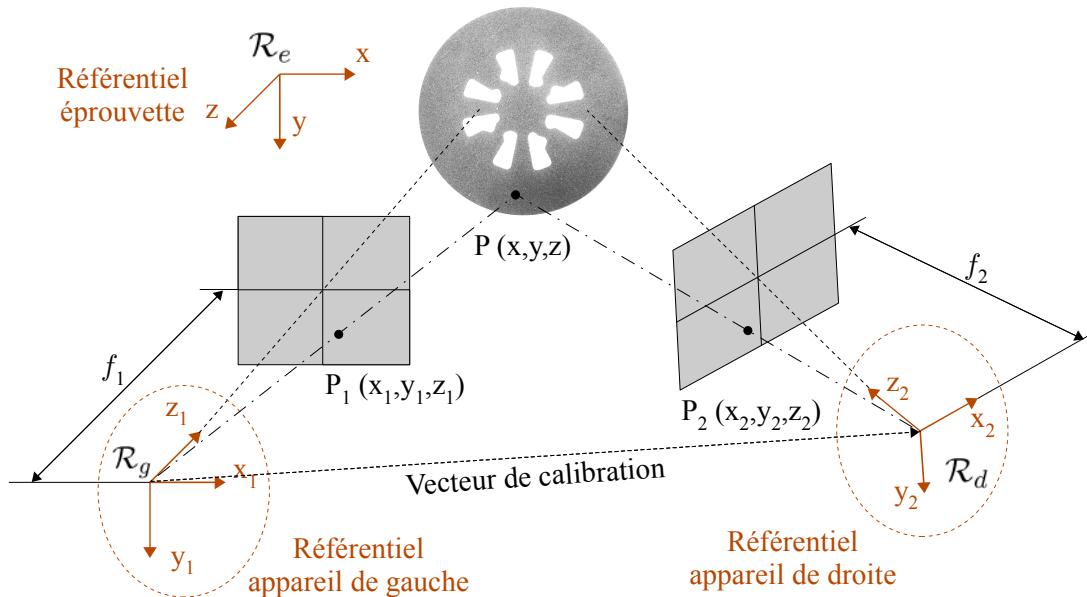


FIG. 2.14 – Représentation schématique du principe de stéréo-corrélation. Les distances focales f_1 et f_2 sur l'axe optique des appareils définissent deux plans images perpendiculaires à l'axe des caméras. Les points P_1 et P_2 représentent les coordonnées de la projection d'un point matériel P dans chacun des deux référentiels images.

Cette technique permet de mesurer les déplacements d'une surface (présentant une distribution de niveaux de gris suffisante) dans les trois dimensions de l'espace. Plusieurs auteurs ont récemment mis en œuvre cette technique dans diverses applications telles que la mesure de déplacement dans l'épaisseur d'une éprouvette [Grytten 09], ou encore des essais de détoniques [Tiwari 09, Besnard 10] et de gonflement [Garcia 02, Coudert 05, Meunier 08, Sene 10] dans lesquels la stéréo-corrélation sert à mesurer des déplacements hors-plan de plaques minces. Dans ces dernières applications, la mesure est effectuée *a posteriori*, c'est-à-dire après la déformation du flan et non pendant celle-ci.

La procédure proposée dans cette étude consiste donc à mesurer pendant la déformation du flan, présenté sur la Figure 2.8, le déplacement d'un nombre important de points matériels (environ 10000) de la surface inférieure de celui-ci. En effet, chaque paire d'images conduit à une reconstruction 3D de la surface déformée. Le champ de déplacement est alors évalué par la distance entre points communs sur les deux surfaces reconstruites.

Dans les essais qui seront présentés dans ce travail, deux appareils photographiques NIKON D200 ont été utilisés. Le déclenchement des deux prises de vue est synchronisé à distance par une télécommande. La fréquence d'acquisition est choisie égale à 0.33 Hz. Par ailleurs, comme le montre la Figure 2.8(b), la présence de la matrice réduit la surface visible de l'éprouvette, ainsi, la zone d'analyse présente un diamètre de 70 mm. Les paramètres de corrélation d'images et la formulation du coefficient de corrélation sont identiques à ceux présentés dans le cas de mesures de déplacements plans (section 2.3.3).

2.4.5 Calibration du montage optique stéréoscopique

La reconstruction 2D d'un objet de l'espace nécessite de renseigner un certain nombre d'inconnues (Fig. 2.14). En effet, les paramètres intrinsèques de chaque appareil (distances focales f_g et f_d , distorsion des objectifs, etc.) ainsi que le vecteur de calibration (position relative entre les deux appareils) doivent constituer des données du problème. Ces données permettent alors par projections successives de reconstruire la surface déformée dans un espace tridimensionnel. Pour se faire, une opération de calibrage est réalisée à l'aide d'une mire plane représentant un mouchetis (Fig. 2.15(a)). Cette mire, dont les dimensions sont connues *a priori*, est photographiée dans plusieurs positions de l'espace. La donnée d'une valeur initiale au jeu de paramètres inconnus permet alors de reconstruire une surface différente par paire d'images. Le problème d'optimisation qui en découle conduit à une actualisation du jeu de paramètres inconnu jusqu'à ce que toutes les reconstructions aboutissent à la même géométrie de la mire.

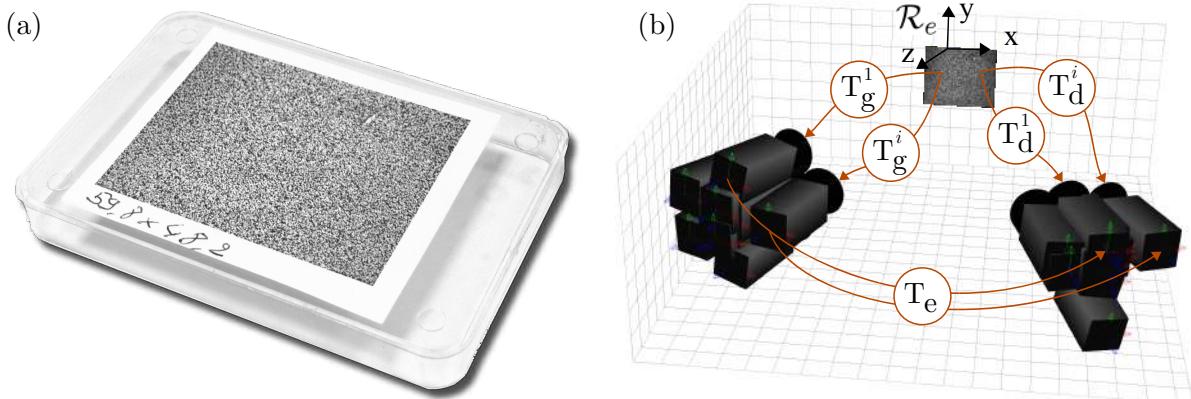


FIG. 2.15 – (a) photo de la mire de calibration. (b) représentation des différentes orientations des images de la mire et des transformations géométriques permettant de déterminer la position relative des deux appareils.

Comme le montre la Figure 2.15(b), l'espace tridimensionnel de la scène est muni d'un référentiel \mathcal{R}_e lié au plan de l'échantillon et chacun des appareils est aussi muni de son référentiel propre \mathcal{R}_g et \mathcal{R}_d . Il existe alors deux transformations rigides (notées T_g et T_d) permettant de passer de chacun de ces référentiels dans le repère éprouvette \mathcal{R}_e et ceci pour chaque paire d'images i de la mire. En conséquence, il existe une composition linéaire de ces transformations permettant de passer du repère \mathcal{R}_d au repère \mathcal{R}_g telle que :

$$T_e = T_d^i \cdot T_g^{i(-1)}, \quad \text{avec } T_g^i = \begin{pmatrix} R_g^i & t_g^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_d^i = \begin{pmatrix} R_d^i & t_d^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

où R_g et R_d sont les rotations permettant le changement des repères gauche et droite avec le repère éprouvette, t_g et t_d sont les translations associées. L'addition des inconnues liées aux trans-

formations géométriques et de celles intrinsèques aux appareils \vec{p} (distances focales f_g et f_d , paramètres des distorsions, *etc.*) aboutit à l'expression d'un système non linéaire qui peut être exprimé sous la forme d'une fonctionnelle $f(R_g^i, R_d^i, t_g^i, t_d^i, \vec{p})$. Comme détaillé dans [Garcia 01, Jin 05], plusieurs méthodes d'optimisation itératives peuvent être utilisées. Dans le cas du logiciel 7D, cette fonctionnelle est de moindres carrés et est constituée des erreurs δ_g^i et δ_d^i sur l'appareil gauche et droite [Coudert 05]. Un algorithme de Levenberg-Marquardt (voir section 4.5.2) est utilisé afin de résoudre ce problème d'optimisation.

Au bilan, cette approche permet d'évaluer les trois transformations T_e , T_d et T_g mais aussi de corriger les trois distorsions géométriques élémentaires des deux systèmes optiques c'est-à-dire les distorsions radiales, prismatiques et de décentrages [Garcia 01, Coudert 05].

2.4.6 Incertitudes des mesures issues des montages stéréoscopiques

2.4.6.1 Méthodologie

Les incertitudes de mesure liées à l'emploi de méthodes de reconstruction 3D par corrélation d'images demeurent délicates à identifier en raison des très nombreux paramètres à prendre en compte (système d'acquisition, dimension des objets, rayon de courbure des surfaces observées, éclairage, mouchetis, *etc.*). Une évaluation des qualités dimensionnelles de telles reconstructions est décrite dans le mémoire de thèse de Coudert [Coudert 05]. On propose ici de reprendre cette approche et de la développer. Pour ce faire, une Pièce de Référence (PR) présentant des surfaces planes (Fig. 2.16(a)) a été usinée puis reconstruite à l'aide du logiciel 7D (Fig. 2.16(b)). Les dimensions de la PR sont sensiblement identiques à celles de l'éprouvette hétérogène TIX présentée sur la Figure 2.8 et les conditions d'essai (éclairage, mouchetis, réglage des appareils photo...) sont reproduites aussi fidèlement que possible. Les approches retenues pour quantifier les incertitudes de mesure reposent sur le tolérancement géométrique. Elles offrent en effet une expression des variations entre la géométrie réelle et le *nominal* défini par le concepteur.

Dans le cas présent, afin d'évaluer les incertitudes de la reconstruction par SIC, le *nominal* sera la géométrie mesurée par des moyens métrologiques : une mesure conventionnelle par Machine à Mesurer Tri-dimensionnelle (MMT) afin de reconstruire 6 plans de la PR, et une mesure très précise par Machine de Mesure de Surface 3D (MMS) permettant de reconstruire le plan $\langle a \rangle$. Les résultats de ces deux mesures sont reproduits sur les Figures 2.17 et 2.18b. Ces moyens de mesure seront considérés comme références puisque ils présentent des incertitudes bien meilleures que celle de la reconstruction par SIC.

Les comparaisons qu'il est dès lors possible de réaliser permettent de quantifier plusieurs ordres de défauts. Rappelons que la théorie du tolérancement géométrique repose sur 3 ordres principaux de défauts entre les géométries réelle et nominale, définis comme suit [Favrelière 09] :

Position/Orientation : Ces défauts expriment les caractéristiques de situation entre éléments idéaux (distance entre plans idéaux, distance point-plan, angle plan-plan, *etc.*).

Forme/Ondulation : Les défauts de forme s'expriment par les caractéristiques de situation entre éléments idéaux et non-idéaux et sont dits de *basses fréquences* ou grandes longueurs d'ondes (défaut de planéité, cylindricité, *etc.*).

Rugosité : La rugosité caractérise les défauts géométriques de hautes fréquences liés généralement au processus d'obtention de la pièce (stries d'usinage, impacts de grenailage, *etc.*).

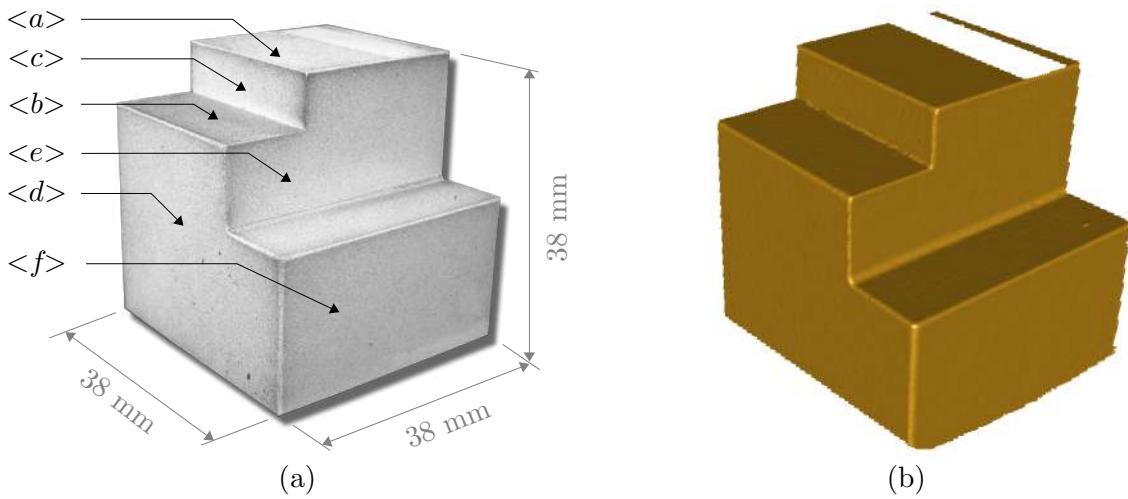


FIG. 2.16 – (a) Photographie de la PR utilisée et référencement des plans. (b) Reconstruction de la surface par SIC.

Le défaut de position sera étudié en comparant les distances et angles entre plans quasi-parallèles ($< a >$ - $< b >$, $< c >$ - $< d >$ et $< e >$ - $< f >$) mesurés soit par MMT soit par SIC. Le défaut de forme sera approché en numérisant l'un des plans de la PR et en comparant ces résultats à ceux obtenus par MMS. Nous verrons que la reconstruction par SIC n'est pas suffisamment précise pour parler de défauts de rugosité. Enfin, l'analyse de la reproductibilité et de la fidélité du moyen de mesure consistera à comparer entre elles, différentes reconstructions par SIC. Au total, 6 reconstructions de la PR par SIC ont été réalisées et sont récapitulées dans le Tableau 2.4. Plusieurs reconstructions 3D de la PR avec ou sans déplacement dans le champ optique sont considérées (numérisations num.1 à num.3). Deux numérisations (num.4 et num.5) du plan $< a >$ effectuées avec un angle faible entre la normale au plan et l'axe optique des appareils ont été réalisées. Enfin, le banc stéréoscopique a été démonté puis remonté et recalibré afin d'effectuer une dernière numérisation (num.6) pour qualifier la reproductibilité du procédé.

TAB. 2.4 – Récapitulatif des différentes reconstructions par SIC utilisées lors de cette étude.

	1 ^{er} posage			2 ^{ème} posage	
	num.1	num.2	num.3	num.4	num.5
Img. gauche					
Img. droite					
Référence	$u = 0 \text{ mm}$ $r = 0^\circ$	$u = 9 \text{ mm}$ $r = 10^\circ$		Référence	$u = 0 \text{ mm}$ $r = 6.5^\circ$
					Recalibrage du banc ¹

u : déplacement de la mire par rapport à la référence. r : rotation de la mire par rapport à la référence.

¹ le banc est démonté puis remonté et recalibré. La PR est éloignée du banc.

2.4.6.2 Défaut de position

La première approche consiste à quantifier le défaut de position du système en reprenant l'approche proposée par Coudert [Coudert 05]. Dans cet exemple, les angles et les distances entre plans associés sont comparés à ceux obtenus à l'aide d'une MMT. Les mesures par MMT ont été réalisées par une machine MARVISION MS222 présentant une résolution de l'ordre de $\pm 1\mu m$. Parallèlement, deux numérisations (num.1 et num.6) de la PR par SIC sont réalisées et permettent de distinguer deux cas :

- **Cas n°1** : La reconstruction 3D num.1 est comparée aux mesures par MMT.
- **Cas n°2** : Le banc est démonté puis remonté et recalibré, la numérisation num.6 est alors effectuée. Elle est ensuite comparée aux mesures par MMT.

Remarque : Le lecteur remarquera, sur les images présentées dans le Tableau 2.4 (num.1 et num.6), que la position de la PR lors de la première numérisation défavorise la corrélation d'images sur les faces $\langle e \rangle$ et $\langle f \rangle$. En effet, il existe un angle (noté α_{max}) très important entre l'axe optique de l'un des deux appareils et les normales aux plans ($\alpha_{max} \approx 75^\circ$). De même sur la reconstruction num.6, les faces $\langle c \rangle$ et $\langle d \rangle$ sont aussi défavorisées mais dans une moindre mesure puisque $\alpha_{max} \approx 65^\circ$.

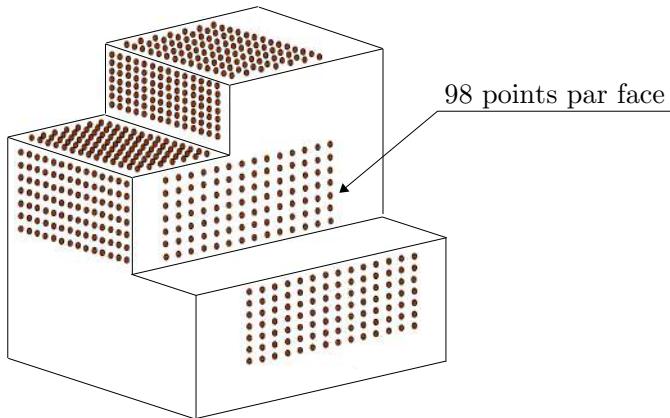


FIG. 2.17 – Mesure des 6 plans de la Pièce de Référence (PR) par MMT.

Évaluer une distance entre plans n'est pas trivial si les plans ne sont pas rigoureusement parallèles entre eux [Clément 00]. Ainsi, comme présenté dans [Sergent 10], cette évaluation peut être réalisée à partir de plusieurs procédures. Dans ce travail, nous avons choisi de calculer cette distance par la méthode de la bissectrice. Si l'on considère uniquement deux plans, cette procédure peut être résumée comme suit :

- ① Les mesures SIC fournissent deux nuages de points (par exemple le plan $\langle a \rangle$ et le plan $\langle b \rangle$ sur la Figure 2.16(a)).
- ② Les mesures MMT fournissent deux nuages de points des mêmes plans.
- ③ Un plan de moindres carrés est ajusté sur chacun des 4 plans.
- ④ La comparaison des normales aux plans de moindres carrés de deux plans associés fournit l'angle entre plans et permet d'évaluer la bissectrice.

- ⑤ Les deux plans associés sont orientés selon la bissectrice et ré-ajustés par moindres carrés aux nuages de points.
- ⑥ La distance entre les deux barycentres est projetée selon la bissectrice pour obtenir la distance entre plans.

Les mesures de distances et d'angles entre plans ainsi réalisées pour les numérisations num.1 et num.6 sont regroupées dans le tableau ci-dessous (Tab. 2.5).

TAB. 2.5 – Mesures de distances et d'angles entre plans associés

Plans	Distance par SIC (mm)	Distance par MMT (mm)	Différence (μm)	Angle ($^\circ$) par SIC	Angle ($^\circ$) par MMT	Différence ($^\circ$)
<i>Numérisation 1</i>						
< <i>a</i> > et < <i>b</i> >	10.463	10.466	2.70	0.080	0.057	0.023
< <i>c</i> > et < <i>d</i> >	17.595	17.617	21.4	0.109	0.097	0.012
< <i>e</i> > et < <i>f</i> >	15.995	16.017	21.5	0.190	0.229	-0.039
<i>Numérisation 6</i>						
< <i>a</i> > et < <i>b</i> >	10.438	10.466	27.7	0.075	0.057	0.017
< <i>c</i> > et < <i>d</i> >	17.583	17.617	33.8	0.103	0.097	0.006
< <i>e</i> > et < <i>f</i> >	15.994	16.017	22.7	0.255	0.229	0.026

On obtient donc un écart moyen de $\mu_1 = 15.2 \mu\text{m}$ et un écart type de $\sigma_1 = 10.8 \mu\text{m}$ pour le cas n°1 (num.1). Pour le cas n°2 (num.6), réalisé après avoir créé un nouveau banc stéréoscopique et éloigné la pièce, l'écart moyen vaut $\mu_2 = 28.1 \mu\text{m}$ et l'écart type $\sigma_2 = 5.6 \mu\text{m}$. En conclusion, on considérera dans la suite de ces travaux que le défaut de position est une variable Gaussienne telle que $e_p \sim \mathcal{N}(\mu_p = 20 \mu\text{m}; \sigma_p = 8 \mu\text{m})$ ⁵.

Remarque : Nous constatons par ailleurs que les mesures réalisées par SIC aboutissent systématiquement à des dimensions de la PR légèrement plus petites que celles mesurées par MMT d'environ 0.1%. Ceci peut s'expliquer par une erreur sur l'estimation des dimensions de la mire. En effet, les propriétés métriques de la mesure par SIC sont héritées directement du calibrage du banc. Cette opération presuppose la donnée des dimensions (métriques) de la mire de référence or ces dimensions sont difficilement évaluables avec une précision de l'ordre de $\pm 1 \mu\text{m}$.

2.4.6.3 Défaut de forme

Dans cette partie, l'objectif est de quantifier la variation de forme entre les mesures nominales (réalisées par MMS) et la géométrie reconstruite par SIC. Pour ce faire, une mesure très précise de la surface du plan <*a*> est effectuée à l'aide d'une MMS de type ALTISURF 520. Cet appareillage offre une résolution de $\pm 0.1 \mu\text{m}$. Le nombre de points de mesure est fixé à 1.5 million sur la surface présentée (Fig. 2.18(b)). On note sur cette même figure l'existence d'une *vallée* orientée de gauche à droite. En effet, on met ainsi en évidence le fait que l'axe de la fraise ayant servi à surfacer le plan <*a*> présentait un défaut de verticalité. De plus, on remarquera l'apparition des stries d'usinage malgré la couche de peinture dont l'épaisseur moyenne a été estimée à $14 \mu\text{m}$.

5. La notation $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ signifie que la variable aléatoire X suit une loi Normale de moyenne μ et d'écart-type σ .

Une nouvelle numérisation de la PR est réalisée (num.4 dans le Tableau 2.4) afin d'obtenir une résolution maximale sur le plan $\langle a \rangle$. La PR est positionnée de manière à ce que les angles entre la normale au plan $\langle a \rangle$ et les axes optiques des appareils photographiques soient minimums ($\alpha_{max} \approx 10^\circ$). L'algorithme de reconstruction par SIC est alors appliqué et permet d'obtenir la mesure présentée dans la Figure 2.18(c). Cette mesure est nettement moins résolue que celle réalisée par MMS puisque seulement 10000 points de mesure sont évalués. On remarque ici que les stries d'usinage visibles sur la Figure 2.18(a) n'apparaissent pas et que l'existence d'une *vallée* orientée de gauche à droite est peu évidente. Par ailleurs, notons que le bruit observé sur cette mesure brute présente un écart type de $\sigma_f = 1.2 \mu\text{m}$ par rapport au plan idéal associé. Nous définissons donc :

- **Cas n°3 :** évaluation du bruit intrinsèque à partir de la num.4, par comparaison avec le plan idéal associé.

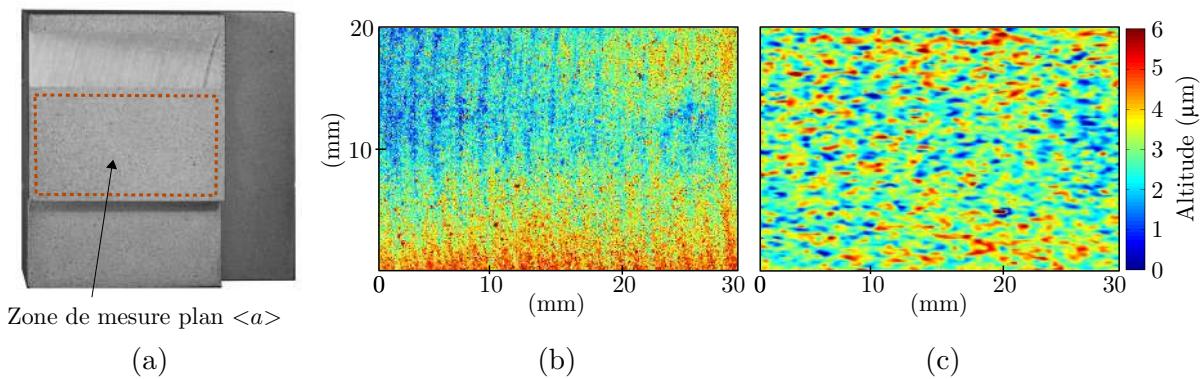


FIG. 2.18 – (a) Position de la PR lors de la numérisation n°4 (vue appareil de gauche). (b) Mesure du plan $\langle a \rangle$ par MMS. (c) Mesure du plan $\langle a \rangle$ par SIC.

Afin de comparer les deux mesures de la surface, une méthode originale de *décomposition modale* est utilisée [Pentland 90, Nastar 93, Samper 03]. Elle permet de décomposer une surface non idéale (en l'occurrence, les surfaces mesurées) en une somme des modes propres de sa surface idéale associée (ici un plan). Ces modes propres dérivent de la mécanique vibratoire d'où le terme *modale*.

En effet, si l'on nomme u le déplacement d'un problème dynamique, K la matrice de rigidité et M la matrice de masse, un problème Éléments Finis dynamique se pose comme suit [Samper 09] :

$$M \cdot \ddot{u} + K \cdot u = 0. \quad (2.4)$$

Les solutions d'un tel problème sont de la forme :

$$u_i = Q_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t), \quad (2.5)$$

où Q_i est le vecteur amplitude associé au mode ω_i . Le calcul des modes naturels, défini par les (Q_i, ω_i) , se fait en résolvant le système suivant :

$$(K - \omega_i^2 \cdot M) \cdot Q_i = 0. \quad (2.6)$$

Les modes sont alors triés selon les ω_i croissants afin d'obtenir les déformations modales de plus basses fréquences en premier. Cette procédure a été implémentée dans le cadre du travail

de thèse de H. Favrelière [Favrelière 09]. Le Tableau 2.6 présente l'allure des premiers modes naturels d'un plan obtenus via ANSYS.

TAB. 2.6 – Premiers modes de la base naturelle d'un plan

Position			Forme		
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
Forme			Rugosité...		
Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	...	Q_{24}

La donnée des modes naturels permet de décrire la géométrie mesurée (représentée ici par un vecteur V^{mes}) en fonction des vecteurs modaux Q_i . En effet, la base vectorielle formée par les vecteurs Q_i (appelée base modale) conduit à l'existence et l'unicité d'une combinaison linéaire des Q_i décrivant V^{mes} :

$$V^{mes} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Q_i + R_n, \quad (2.7)$$

où n est le nombre de modes choisi pour la décomposition, R_n le résidu de la décomposition⁶, et les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées du vecteur V^{mes} dans la base modale. De plus, si l'amplitude maximale de chaque vecteur modale Q_i est normé à 1, les λ_i représentent l'amplitude métrique de chaque mode.

En conséquence, les résultats d'une décomposition modale se présentent sous forme d'un vecteur $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_n$ qui sera exprimé par un spectre. Ce spectre représente alors la contribution en amplitude de chaque mode sur la forme mesurée. Une fois définie la méthode modale (méthode de lissage des données expérimentales) on peut s'intéresser à l'évaluation du défaut de forme :

- **Cas n°4 :** évaluation du défaut de forme à partir des données de la num.4 (lissées par méthode modale).

La Figure 2.19 présente les spectres modaux d'une décomposition sur les 100 premiers modes de la mesure réalisée par MMS et de la reconstruction par SIC num.4. On observe une bonne correspondance des spectres sur les 7 premiers modes (qui correspondent aux défauts de forme de plus basses fréquences), néanmoins pour les modes de plus haute fréquence ($i > 25$), les amplitudes diffèrent grandement. On retrouve donc sur la droite du spectre Figure 2.19(b) l'ensemble des erreurs liées à la reconstruction par SIC : bruit numérique des appareils, éclairage, mouchetis, distorsion, *etc.*

6. On montre que ce résidu R_n tend vers 0 lorsque n tend vers le nombre de points de mesure.

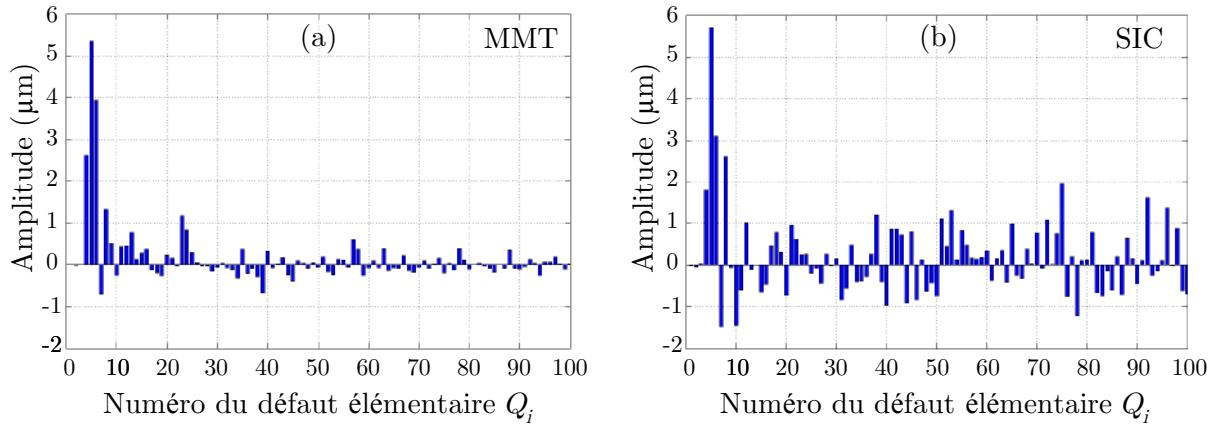


FIG. 2.19 – Spectre modal des mesures du plan $\langle a \rangle$ par MMS (a), et par SIC (b).

Cette analyse confirme donc que le moyen de mesure par SIC présente une sensibilité uniquement aux défauts de basse fréquence. Dans ce cas, l'analyse des défauts de rugosité (haute fréquence) n'est tout simplement pas pertinente. On peut néanmoins s'intéresser aux reconstructions modales obtenues à partir des 25 premiers modes (ceux de plus basses fréquences). Dans ce cas, la méthode de décomposition modale agit comme un filtre passe-bas et permet d'évaluer le défaut de forme uniquement à partir des formes les plus significatives de la géométrie nominale. La Figure 2.20(a-b) présente la reconstruction à partir des 25 premiers modes pour les mesures effectuées par MMS et SIC. Notons que cette figure présente des défauts surfaciques de forme qui sont donc de moyenne nulle. En conséquence, les variations entre ces deux surfaces constituent le défaut de forme (du moyen de mesure par SIC) et non son défaut de position. La différence entre la reconstruction des mesures par MMS et SIC est finalement représentée sur la Figure 2.20(c).

Les résultats obtenus dans le cas n°4 nous permettent donc de constater que l'amplitude maximale du défaut de forme est inférieure à $4 \mu\text{m}$. Pour des raisons de simplicité et aux vues de la distribution présentée sur la Figure 2.20(d), nous considérerons dans la suite de ces travaux que le défaut de forme présente une distribution aléatoire de type log-normale centrée : $e_f \sim -\mathcal{L}(0 \mu\text{m}; 0.55 \mu\text{m})$ ⁷.

2.4.6.4 Reproductibilité / fidélité

La dernière approche mise en œuvre afin de quantifier les incertitudes de mesure en stéréo-corrélation d'images consiste à étudier la reproductibilité des mesures. Dans ce cadre, plusieurs numérisations de la PR ont été réalisées (Fig. 2.16(a)). Parmi ces numérisations, quatre types de comparaisons nécessitent d'être distinguées :

- **Cas n°5** : Comparaison entre deux reconstructions 3D (num.1 et num.2) sans déplacement de la PR (on ne caractérise ici que le bruit intrinsèque du moyen de mesure).
- **Cas n°6** : Comparaison entre deux reconstructions 3D (num.1 et num.3) avec déplacement de la PR de 9mm et une rotation de 10° .
- **Cas n°7** : Comparaison entre deux reconstructions 3D d'un plan (num.4 et num.5) avec déplacement de la PR de 4mm et une rotation de 6.5° .
- **Cas n°8** : Comparaison entre deux reconstructions 3D (num.1 et num.6) avec :

7. La notation $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ signifie que la variable aléatoire X suit une loi Log-normale de moyenne μ et d'écart-type σ .

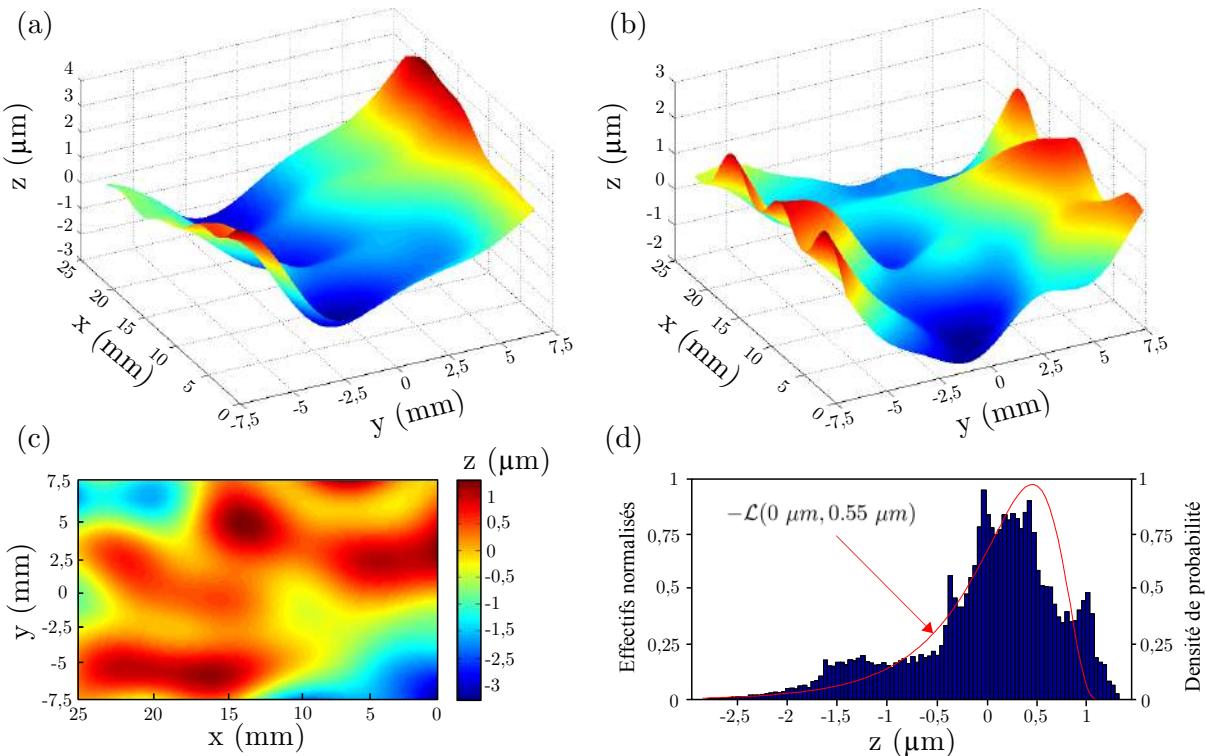


FIG. 2.20 – (a) Reconstruction à partir des 25 premiers modes de la mesure par MMS. (b) Reconstruction à partir des 25 premiers modes de la mesure par SIC. (c) Cartographie du défaut de forme de la mesure par SIC du plan $\langle a \rangle$. (d) Distribution du défaut de forme de la mesure SIC du plan $\langle a \rangle$.

tage, remontage et re-calibration du banc stéréoscopique, et déplacement de la PR.

Ces comparaisons entre surfaces reconstruites ont été réalisées à l'aide du logiciel GEOMAGIC. La Figure 2.21 présente les cartographies des écarts entre numérisations 3D dans les trois cas présentés ci-dessus (cas n°5, n°6 et n°7).

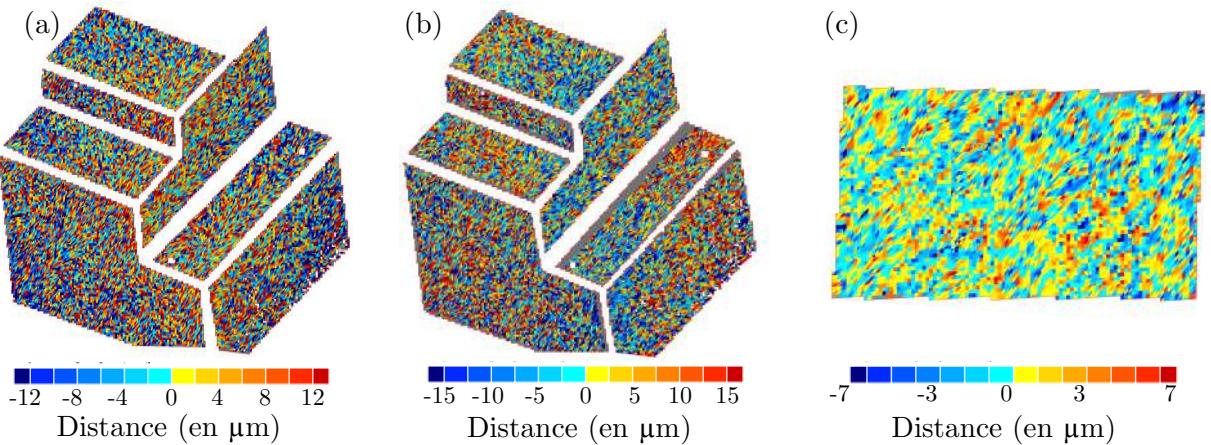


FIG. 2.21 – *Cartographie des distances entre deux reconstructions. (a) Reconstructions (num.1 et num.2) ne présentant aucun déplacement (cas n°5). (b) Reconstructions (num.1 et num.3) présentant un déplacement de 9 mm (cas n°6). (c) Reconstructions (num.4 et num.5) du plan <a> seul présentant un déplacement de 4 mm (cas n°7).*

On observe sur la Figure 2.21(a) (cas n°5) que l'erreur de reproductibilité présente l'allure d'un bruit gaussien dont l'amplitude maximale est de $\pm 12 \mu\text{m}$. Dans ce cas, seuls deux phénomènes influent fortement sur la reproductibilité : l'éclairage et le bruit intrinsèque des appareils photographiques. Sur les Figures 2.21(b) et 2.21(c) (cas n°6 et n°7), l'erreur présente la même allure et vaut $\pm 15 \mu\text{m}$ (cas n°6) et $\pm 7 \mu\text{m}$ (cas n°7). Dans ces deux cas, trois autres facteurs interviennent : la correction des distorsions, la qualité du mouchetis et la déformation des plans sur les images induite par le déplacement de la PR. Cependant, la similitude entre les Figures 2.21(a) et 2.21(b), tant en allure qu'en amplitude, conduit à considérer que l'erreur induite par ces trois derniers facteurs est du second ordre. Le bruit intrinsèque des appareils photographiques semble donc être l'élément prépondérant des sources d'erreurs de la numérisation par analyse d'images SIC.

Enfin, lorsque le banc stéréoscopique est démonté puis remonté (cas n°8), la nécessité d'un nouveau calibrage augmente nettement l'erreur de reproductibilité (voir la Figure 2.22 dont l'amplitude maximale atteint $\pm 33 \mu\text{m}$ soit un écart-type de $11 \mu\text{m}$ ⁸). Cependant, ce cas ne se présente pas dans notre étude et représente donc un majorant de l'erreur commise.

Il semble donc raisonnable de penser que les mesures de déplacement réalisées par SIC qui seront utilisés dans ces travaux de thèse se rapprochent en pratique des cas n°6 et n°7. Ces mesures présentent une erreur aléatoire Gaussienne centrée telle que $e_r \sim \mathcal{N}(0 \mu\text{m}; 5 \mu\text{m})$ pour des angles α_{max} importants (cas n°6)⁹ et $e_r \sim \mathcal{N}(0 \mu\text{m}; 2.3 \mu\text{m})$ pour des angles α_{max} faibles

8. Écart type obtenu en divisant l'amplitude ($\pm 33 \mu\text{m}$) par 6 de manière à ce que $3\sigma_r = 33 \mu\text{m}$

9. Écart type obtenu en divisant l'amplitude ($\pm 15 \mu\text{m}$) par 6 de manière à ce que $3\sigma_r = 15 \mu\text{m}$

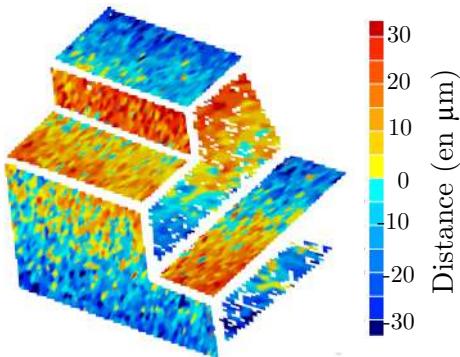


FIG. 2.22 – Cartographie des distances entre les reconstructions num.1 et num.6 après démontage et remontage du banc stéréoscopique (cas n°8).

(cas n°7)¹⁰.

2.4.6.5 Bilan

En conclusion, nous constatons que le calcul de déplacements par SIC contient plusieurs types d'erreurs. Cependant, l'incertitude du moyen de mesure, que nous cherchons à quantifier ici, est liée à certaines de ces erreurs mais probablement pas à toutes. Commençons par rappeler que l'incertitude globale d'une mesure i , s'écrit généralement comme la somme d'une erreur systématique (le biais) et d'une erreur aléatoire (la variance) telle que :

$$e_{glob}^i = \Delta_{biais} + \sigma^i. \quad (2.8)$$

Intéressons nous d'abord à l'erreur de biais. Cette erreur peut facilement être évaluée par la valeur moyenne du défaut de position discuté en section 2.4.6.2 (le biais moyen des cas n°1 et n°2 avait alors été estimé par $\Delta_{biais} = 20 \mu\text{m}$). En effet, les moyens métrologiques qui nous ont servis de référence (MMT) nous permettent d'évaluer, de manière directe, la justesse de la chaîne de mesure.

Dans le cas d'un calcul de déplacement, qui s'effectue entre une image de référence et une image i , si l'on note X^0 le champ de position de l'image de référence et X^i le champ de position de l'image i , on peut écrire que :

$$\begin{aligned} U &= (X^i + e_{glob}^i) - (X^0 + e_{glob}^0) = (X^i + \Delta_{biais} + \sigma^i) - (X^0 + \Delta_{biais} + \sigma^0) \\ &= (X^i + \sigma^i) - (X^0 + \sigma^0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

où U est le champ de déplacement évalué. On constate donc qu'il y a simplification de l'erreur de biais. En conséquence, sous l'hypothèse que cette erreur soit constante entre l'instant 0 et l'instant i , l'erreur globale sur l'évaluation du champ de déplacement n'est pas influencée par le biais de la mesure.

Cette hypothèse se vérifie en constatant que deux numérisations à des instants différents, avec ou sans déplacement de la PR, (cas n°5 et n°6 de la section 2.4.6.4) conduisent à une distribution des écarts de moyenne nulle (Fig. 2.21(a-c)). Ces trois comparaisons permettent de valider la remarque formulée en section 2.5 selon laquelle le biais de $20 \mu\text{m}$ est issu d'une mauvaise estimation des dimensions de la mire de calibration. On peut aussi constater que même lorsque le banc est recalibré (avec la même mire et donc la même estimation de ces dimensions) l'erreur

10. Écart type obtenu en divisant l'amplitude ($\pm 7 \mu\text{m}$) par 6 de manière à ce que $3\sigma_r = 7 \mu\text{m}$

de biais s'annule si l'on compare deux reconstructions SIC (cas n°8 présenté sur la Figure 2.22). En conséquence, on peut donc considérer que Δ_{biais} intervient peu dans le calcul du champ de déplacement.

Concernant l'erreur de variance, suite aux différentes approches d'évaluations des défauts que nous avons développées, nous disposons de cinq valeurs de cette erreur évaluées dans différents cas. On rappelle dans le Tableau 2.7, les conditions expérimentales relatives à l'obtention de ces valeurs. Ces conditions sont : la présence ou non de déplacement et de rotation de la PR, l'angle maximal entre les normales aux plans mesurés et les axes optiques des appareils (α_{max}), et enfin l'utilisation ou non d'un filtre sur les données brutes (méthode modale).

TAB. 2.7 – Récapitulatif des écarts types calculés selon les conditions expérimentales.

cas	Valeur	Dépl.	Rot.	α_{max}	Lissage	Reconstructions	Section
1	15.2 μm			75°	✗	num.1	2.4.6.2 position
2	5.6 μm			65°	✗	num.6	2.4.6.2 position
3	1.2 μm			10°	✗	num.4	2.4.6.3 forme
4	0.55 μm			10°	✓	num.4	2.4.6.3 forme
5	4 μm	✗	✗	75°	✗	num.1 et num.2	2.4.6.4 fidélité
6	5 μm	✓	✓	75°	✗	num.1 et num.3	2.4.6.4 fidélité
7	2.3 μm	✗	✓	10°	✗	num.4 et num.5	2.4.6.4 fidélité
8	11 μm	✓	✓	75°	✗	num.1 et num.6	2.4.6.4 fidélité

Dès lors, il est nécessaire de savoir quelle valeur de l'erreur de variance convient aux applications qui sont les nôtres. On peut pour cela distinguer deux cas, selon l'amplitude des déplacements considérés :

Cas de petits déplacements ($u_{max} \leq 1 \text{ mm}$ et $\alpha_{max} \leq 15^\circ$). Dans ce cas, l'angle entre le plan à mesurer et l'axe optique des appareils est faible et l'on considérera que le déplacement n'est pas significatif. Ainsi, si l'information expérimentale n'est pas lissée, le bruit du moyen de mesure sera modélisé avec l'erreur de variance du cas n°7, ce qui conduit à une distribution normale telle que $e_{glob} \sim \mathcal{N}_p(0; 2.3 \mu\text{m})$. Notons que ce cas de petits déplacements sera celui considéré dans l'étude de sensibilité au bruit de mesure des identifications en élasticité (voir section [5.4.4.3](#)).

Cas de grands déplacements ($u_{max} \geq 1 \text{ mm}$ et $\alpha_{max} \geq 15^\circ$). Ici l'angle entre les normales aux plans et les axes optiques des appareils peut devenir important (soit par déformation, soit par rotation rigide de l'objet). Nous modéliserons donc le bruit de mesure par l'erreur de variance n°6, c'est-à-dire la loi : $e_{glob} \sim \mathcal{N}_G(0; 5 \mu\text{m})$. Ce cas sera celui considéré dans l'étude de sensibilité au bruit de mesure des identifications en plasticité (voir section [5.4.4.3](#)).

Aux vues des différentes expériences réalisées dans cette partie sur les incertitudes de mesure par SIC, nous constatons qu'il existe plusieurs pistes d'amélioration. On peut premièrement noter que la majorité de la variabilité de la mesure provient du bruit intrinsèque des appareils photos réflex numérique ou de l'éclairage. L'utilisation de caméras numériques, réputées plus stables numériquement que les appareils réflex¹¹, pourrait certainement diminuer fortement l'erreur de

11. L'écart type du bruit intrinsèque des appareils numériques réflex vaut 1.69 en termes de niveaux de gris,

variance σ . L'utilisation d'une source lumineuse cohérente aurait certainement le même effet.

Ajoutons aussi que l'utilisation d'un algorithme de lissage (qu'il s'agisse de la méthode modale ou d'une autre approche) permet d'améliorer sensiblement la dispersion de la mesure (*c.f.* l'erreur n°3 et n°4 du Tableau 2.7) sans perte d'information quant au défaut de forme. Notons enfin que d'autres pistes d'amélioration des mesures par SIC sont évoquées dans [Chambard 09], notamment l'évaluation des incertitudes par des approches purement numériques ainsi que l'utilisation d'autres méthodes de calibration du banc stéréoscopique.

2.5 Essais thermographiques

2.5.1 Thermographie IR

Durant ces dernières années, nombre de laboratoires, dont le laboratoire SYMME, se sont équipés de caméras infrarouges (IR) afin de mesurer sans contact l'énergie lumineuse située dans une partie du domaine infrarouge et de convertir cette information en signal électrique. Comme le montre le Tableau 2.8, le domaine infrarouge (IR) se situe entre 750 nm et $100\text{ }\mu\text{m}$. Cependant, ce domaine est généralement considéré comme le regroupement de trois sous-domaines : les IR proches ($0.75 - 1\text{ }\mu\text{m}$), les IR moyens ($1 - 10\text{ }\mu\text{m}$), c'est ceux qui seront considérés dans cette étude et les IR lointains ($10 - 100\text{ }\mu\text{m}$). Toutefois, cette classification n'est pas précise, chaque domaine d'utilisation ayant sa propre conception de la frontière entre les différents types de rayonnement.

TAB. 2.8 – Domaines du spectre électromagnétique

Longueur d'onde	Domaine
$> 10\text{ cm}$	Radio
De 10 cm à 1 mm	Micro-onde et radar
De 1 mm à $100\text{ }\mu\text{m}$	Terahertz
De $100\text{ }\mu\text{m à }0.75\text{ }\mu\text{m}$	Infrarouge
De $0.75\text{ }\mu\text{m à }400\text{ nm}$	Lumière visible
De $400\text{ nm à }10^{-7}\text{ m}$	Ultraviolet
De $10^{-7}\text{ m à }10^{-11}\text{ m}$	Rayon X
De $10^{-11}\text{ m à }10^{-14}\text{ m}$	Rayon γ

Aujourd'hui, ce type d'appareillage connaît de nombreuses applications dans le domaine de la mécanique des matériaux et des milieux continus. Non destructive, elle offre une méthode de quantification s'opérant à distance, ce qui la rend pratique et facile à mettre en œuvre.

2.5.2 Montage thermographique

Dans le cas d'essais prenant en compte les phénomènes thermomécaniques, une camera infrarouge est placée de manière à capturer le champ thermique de la face arrière de l'éprouvette. Il s'agit d'une camera CEDIP-JADE III MWIR. Elle permet l'obtention de films de 240 par 320 pixels. Cette caméra autorise la mesure d'ondes infrarouges de milieu de bande, c'est-à-dire ayant une longueur d'onde comprise entre $3\text{ }\mu\text{m}$ et $5\text{ }\mu\text{m}$. L'étalonnage du système permet de travailler dans une gamme de température de 5°C à 40°C et ceci à une fréquence d'acquisition maximale de 145 Hz (dans le cadre de ce travail la fréquence d'acquisition sera fixée à 15 Hz). La Figure 2.4

soit 0.66%.

montre la caméra installée dans le cas d'un essai plan (capturant la face arrière de l'éprouvette). Les incertitudes de mesure d'un tel appareillage ont généralement un biais assez important (de l'ordre de $\pm 2 K$) ce qui conduit à travailler en variations de température $\theta = T - T_0$ où T_0 est une température de référence) plutôt qu'en température absolue T . Cet artifice conduit à considérer un bruit de mesure de moyenne nulle. La variance des mesures thermographiques est estimée à environ $20 mK$ [Louche 09]. Ainsi, nous modéliserons le bruit des mesures de champ thermique par $b_{IR} \sim \mathcal{N}(0 K, 20 mK)$. De plus, la caméra est entièrement contrôlée par un ordinateur de commande équipé du logiciel ALTAIR fourni par CEDIP. Nous n'avons pas développé de système de synchronisation automatique des bases de temps de la mesure cinématique et thermique. Cette synchronisation est donc effectuée *manuellement*, suivant la procédure présenté dans l'[Annexe A](#).

Enfin, on notera que l'utilisation de ce moyen de capture nécessite quelques précautions. En effet, le capteur de la caméra n'est optimal qu'à une certaine température et il est donc important de laisser le système de refroidissement fonctionner durant une trentaine de minutes avant de commencer à filmer.

2.5.3 Post-traitement des essais thermographiques

Les mesures réalisées permettent d'obtenir le rayonnement thermique et d'évaluer le champ de température à la surface de l'éprouvette, cependant ces données s'avèrent difficilement exploitables en l'état. En effet, le suivi de points matériels est rendu très délicat par le déplacement/déformation de l'éprouvette dans le cadre de l'image. Ainsi, l'évolution de la température d'un pixel donné ne renseigne pas sur l'échauffement (ou le refroidissement) d'un point matériel de l'éprouvette puisque ce point se déplace dans l'image au cours de l'essai (Fig. 2.23).

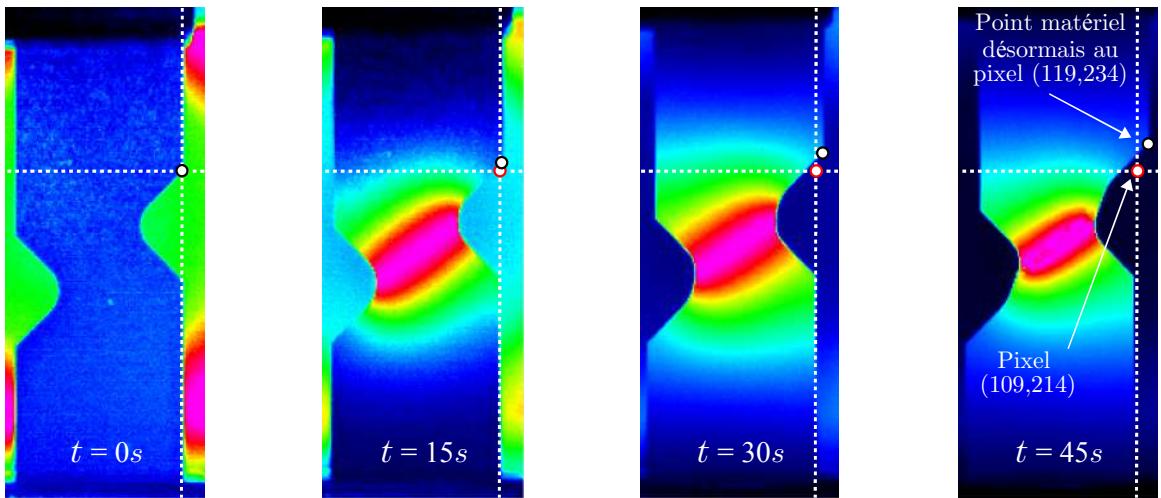


FIG. 2.23 – Au début de l'essai, le coin de l'éprouvette (repéré par le symbole \bigcirc) se situe au pixel (109, 214) (repéré par le symbole \bigcirc). Lorsque l'éprouvette se déforme, ce pixel ne renseigne plus sur la température du coin. Il faut donc soustraire le déplacement du coin afin d'exprimer un champ de température Lagrangien et immobile.

En conséquence, et comme présenté dans [Sakagami 08, Pottier 09], il convient de compenser le mouvement de l'éprouvette dans le cadre de l'image. Pour ce faire, la donnée d'un champ de déplacement issu des mesures cinématiques est nécessaire. En effet, le post-traitement consiste à ramener chaque pixel de l'image déformée dans sa configuration initiale en lui soustrayant une

valeur interpolée du champ de déplacement. Dès lors, les mesures se présentent sous la forme de films ne montrant l'évolution que de la seule température sur une géométrie Lagrangienne et donc fixe durant l'essai. Le champ de température est alors exprimé suivant les coordonnées de la configuration de référence tel que $T = T(\mathbf{X}, t)$. De plus amples détail sur cette procédure de compensation ainsi qu'une évaluation de l'incertitude générée sont donnés dans l'[Annexe C](#). Dans ce travail de thèse, le bruit relatif de mesure sera assimilé à une distribution normale centrée telle que $e_{IR} \sim \mathcal{N}(0; 80 \text{ mK})$.

2.6 Conclusion du second chapitre

Comme discuté au chapitre 1, l'emploi des méthodes inverses d'identification repose sur l'utilisation d'essais hétérogènes en déformation. Ce chapitre présente donc une revue bibliographique des différentes procédures expérimentales permettant d'obtenir de tels champs. Des essais plans présentant différentes géométries ont été envisagés et trois géométries d'éprouvette ont été retenues et testées. Par ailleurs, une nouvelle procédure expérimentale permettant d'appliquer des sollicitations de traction, de cisaillement (suivant deux directions perpendiculaire) et d'expansion à un flan circulaire est proposée. La déformation hors plan du flan lors de cette expérience conduit à utiliser une technique de stéréo-corrélation d'images qui a été discutée dans ce chapitre.

L'identification de modèles thermomécaniques par FEU-T requiert l'utilisation de mesures thermographiques infrarouges. C'est pourquoi cette technique, ainsi que la procédure de post-traitement qui lui est associée, ont été brièvement présentées.

Au bilan, trois types d'expériences ont été évoquées : traction d'éprouvettes planes, déformation hors plan de flans circulaires (essai TIX) et essais thermomécaniques sur des éprouvettes planes. L'ensemble de ces mesures constitue la base expérimentale de ce travail de thèse.

Enfin, du fait de la sensibilité des méthodes inverses au bruit de mesure, une attention particulière a été portée à l'évaluation des incertitudes de mesure. En effet, les trois procédures de mesure de champs présentées dans ce chapitre (cinématique plane, cinématique hors plan et thermique) ont fait l'objet d'une étude quant à leur bruit de mesure. Un récapitulatif de ces incertitudes de mesure est présenté dans le Tableau 2.9.

TAB. 2.9 – Récapitulatif des incertitudes des moyens de mesures employés

Mesure	Instrument	Post-traitement	Incertitude intrinsèque	Incertitude après post-traitement
• Force	Instron 2525-806	Ø	Ø	±0.05% ¹
• Déplacement (plans)	Nikon D200	Corrélation d'images	0.1 pixel	$\mathcal{U}(-2 \mu\text{m}; 2 \mu\text{m})$
• Déplacement (hors plans)	2 x Nikon D200	Stéréo-corrélation d'images	0.1 pixel	$\mathcal{N}_p(0 \mu\text{m}; 2.3 \mu\text{m})$ $\mathcal{N}_G(0 \mu\text{m}; 5 \mu\text{m})$
• Température	Cedip Jade III	Recalage géométrique	20 mK	$\mathcal{N}(0; 80 \text{ mK})$

¹ d'après le constructeur [INSTRON 05]

3

Modélisation thermomécanique et élastoplasticité

Sommaire

3.1	Introduction	51
3.2	Considérations thermodynamiques	52
3.2.1	Premier Principe de la thermodynamique	52
3.2.2	Second Principe	53
3.2.3	Variables d'état	54
3.2.4	Décomposition de l'énergie interne	55
3.2.5	Lois d'état	57
3.3	Modélisation thermomécanique	58
3.3.1	Équation de la chaleur	58
3.3.2	Estimation de sources de chaleur	59
3.3.3	Simplification de l'équation de la chaleur	62
3.3.4	Bilan de la modélisation thermomécanique	63
3.4	Modèles d'élastoplasticité	63
3.4.1	Gestion des grandes transformations dans les codes EF	63
3.4.2	Comportement élastique	64
3.4.3	Seuil de plasticité	65
3.4.4	Écrouissage et écoulement plastique	69
3.5	Conclusion du troisième chapitre	70

3.1 Introduction

Plusieurs formalismes permettent de rendre compte des phénomènes thermodynamiques liés à la déformation des milieux continus. Cependant, dans cette étude, le formalisme de la Thermo-dynamique des Processus Irréversibles (TPI) sera utilisé. Une multitude de références existe sur le sujet, c'est pourquoi nous renverrons le lecteur au livre de P. Germain [Germain 73] ainsi qu'à l'ouvrage de J. Lemaître et J-L. Chaboche [Lemaître 85] qui offrent tous deux des bibliographies fournies sur ce domaine.

Par ailleurs, la présente étude portant, entre autres, sur l'identification de modèles plastiques, les déformations observées expérimentalement ne permettent pas de satisfaire l'hypothèse de petites perturbations (HPP). En effet, cette hypothèse — largement utilisée — présuppose que les déformations n'excèdent pas 5%. Or, comme il sera montré au chapitre 5, le domaine plastique des matériaux considérés s'étend bien au-delà de cette limite (déformation de Green-Lagrange allant jusqu'à 1). C'est pourquoi le formalisme présenté sera exposé sous l'hypothèse de grandes déformations. En pratique, le lecteur pourra se reporter aux travaux de F. Sidoroff [Sidoroff 82, Sidoroff 83, Sidoroff 84] pour de plus amples explications sur cette approche.

Ce chapitre présente donc le formalisme général de la thermodynamique des milieux continus en s'attardant plus particulièrement sur les modèles de comportement qui seront identifiés dans la suite du document. Ainsi, cette discussion s'articule autour de trois parties : un résumé du formalisme thermodynamique utilisé, une discussion sur la modélisation thermomécanique du comportement des matériaux et enfin un rappel sur les modèles mécaniques de plasticité (à variables internes).

3.2 Considérations thermodynamiques

3.2.1 Premier Principe de la thermodynamique

Avant d'aborder les notions liées à la thermodynamique, il est nécessaire de définir ce qu'est un processus thermodynamique. On appelle système thermodynamique tout système fermé qui effectue des échanges de chaleur ou de travail avec l'extérieur. Dans le cas des milieux continus, on peut considérer tout élément de volume contenu dans le milieu \mathcal{C} comme un système thermodynamique. Ces éléments de volume sont supposés homogènes (i.e. de constitutions cristallines et chimiques semblables et uniformes). On parlera de ces éléments comme des *sous-systèmes thermodynamiques*.

De plus, la TPI est basée sur l'axiome de l'état local selon lequel, « tout système hors d'équilibre peut être considéré comme la réunion de sous-systèmes homogènes à l'équilibre ». Un processus thermodynamique est donc une suite d'états d'équilibre définissant l'évolution d'un système hors d'équilibre. On qualifie alors cet état de *quasi-statique* au sens thermodynamique du terme. On postulera de plus dans tout ce document que l'évolution du domaine Ω ne satisfait pas l'hypothèse de petites perturbations. De plus, le domaine Ω sera supposé homogène, ainsi la masse volumique ρ ne dépend que du temps (et pas de l'espace).

Une fois admise la conservation de la quantité de mouvement [Lemaître 85] et la loi de conservation de la masse donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = 0, \quad (3.1)$$

on peut définir la troisième loi de conservation des milieux continus : le Premier Principe de la thermodynamique. C'est en fait la loi de conservation de l'énergie, qui autorise la transformation d'énergie mécanique en chaleur. Le Premier Principe s'écrit classiquement sous la forme suivante :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = W'_{ext} + Q',$$

(3.2)

avec :

- U l'énergie interne,

- K l'énergie cinétique par rapport au référentiel Galiléen \mathcal{R}_g telle que $\dot{K} = W'_{ext} + W'_{int}$,
- W'_{ext} la puissance des efforts extérieurs sur le système,
- Q' le taux de chaleur reçue par le domaine Ω ,
- W'_{int} la puissance des efforts intérieurs sur le système.

On préfère généralement à l'écriture (Eq. 3.2) sa forme locale [Lemaître 85]. Le taux de chaleur reçue Q' est alors décomposé en deux termes ; l'un représente la chaleur créée dans le domaine Ω par les actions d'origine extérieure à Ω et l'autre représente la chaleur reçue par conduction à travers la frontière $\partial\Omega$, telle que la forme de Q' soit définie par :

$$Q' = \int_{\Omega_0} r_0 dV_0 - \int_{\partial\Omega_0} \vec{q}_0 \cdot \vec{N} dS_0 = \int_{\Omega_0} r_0 dV_0 - \int_{\Omega_0} \operatorname{div} \vec{q}_0 dV_0, \quad (3.3)$$

avec :

- r_0 la densité volumique de la source de chaleur d'origine extérieure,
- \vec{q}_0 le vecteur courant de chaleur tel que, $\vec{q} = J^{-1}\mathbb{F}\vec{q}_0$ (avec $J = \det(\mathbb{F})$),
- \vec{N} la normale sortante à $\partial\Omega_0$ à l'état non déformé,
- Q' le taux de chaleur reçue par le domaine Ω_0 .

Les écritures locales de U et W'_{int} donnent [Brunet 96, Lemaître 85] :

$$U = \int_{\Omega_0} \rho_0 e_0 dV_0 \quad \text{et} \quad W'_{int} = \int_{\Omega_0} w'_{int} dV_0. \quad (3.4)$$

avec e_0 l'énergie interne spécifique. On peut dès lors réécrire l'expression du Premier Principe (Eq. 3.2) sous sa forme locale comme suit :

$$\boxed{\rho_0 \dot{e}_0 = r_0 - w'_{int} - \operatorname{div} \vec{q}_0.} \quad (3.5)$$

3.2.2 Second Principe

On suppose qu'il est possible de repérer la température par un champ scalaire positif défini à tout instant dans l'ensemble du domaine Ω_0 . On note donc ce champ $T(M_0, t)$ et on parlera de température absolue (il s'agit en fait de la température exprimée en Kelvin). On définit alors une nouvelle variable nommée *entropie* et notée S (sa forme spécifique, définie à l'état local sera notée s). L'entropie représente une variation d'énergie interne associée à une variation de température. S est ainsi définie par :

$$T = \frac{\partial e}{\partial s} \quad \text{et} \quad S = \int_{\Omega_0} \rho_0 s_0 dV_0. \quad (3.6)$$

Le Second Principe de la thermodynamique a, lui aussi, la forme d'une équation de conservation, mais il s'agit en fait d'une équation de non-conservation de l'entropie. Il postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur (ou égal) au taux de chaleur reçue divisé par la température.

$$\boxed{\frac{dS}{dt} \geq \frac{Q'}{T}}. \quad (3.7)$$

À partir de l'expression de Q' donnée par l'équation (3.3), on peut écrire l'équation (3.7) comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 s_0 dV_0 - \int_{\Omega_0} \frac{r_0}{T} dV_0 + \int_{\partial\Omega_0} \frac{\vec{q}_0 \cdot \vec{N}}{T} dS_0 \geq 0 \quad \forall \Omega_0. \quad (3.8)$$

Cette expression de l'inégalité fondamentale étant donnée $\forall \Omega_0$, il en découle une écriture, à l'état local, permettant de s'affranchir de l'intégration sur le domaine Ω_0 . De plus, si l'on remplace dans cette équation la variable r_0 (densité volumique de la source de chaleur d'origine extérieure) par son expression tirée de l'égalité du premier principe (Eq. 3.5), on peut alors réexprimer l'équation ci-dessus par :

$$\rho_0 \frac{ds_0}{dt} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}_0}{T} - \frac{1}{T} \left(\rho_0 \frac{de_0}{dt} + w'_{int} + \operatorname{div} \vec{q}_0 \right) \geq 0. \quad (3.9)$$

En développant le terme $\operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}_0}{T} \right)$, on peut exprimer l'inégalité du second principe (Eq. 3.7) par :

$$\rho_0 \left(T \frac{ds_0}{dt} + \frac{de_0}{dt} \right) - w'_{int} - \vec{q}_0 \cdot \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} T}{T} \geq 0. \quad (3.10)$$

Muni de cette équation, une nouvelle variable peut être introduite, dont la variation permet d'obtenir le travail utile susceptible d'être fourni par un système thermodynamique fermé, à température constante. On notera donc $\Psi_0 = e_0 - Ts_0$ cette fonction, nommée potentiel d'énergie libre spécifique, ce qui nous permet d'écrire **l'inégalité de Clausius–Duhem**, telle que :

$$\boxed{-\rho_0 \left(\dot{\Psi}_0 + \dot{T}s_0 \right) - w'_{int} - \vec{q}_0 \cdot \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} T}{T} \geq 0.} \quad (3.11)$$

Cette condition permet en pratique de vérifier l'admissibilité d'un processus thermodynamique vis-à-vis du second principe. Néanmoins, sous cette forme, l'inégalité de Clausius–Duhem est exprimée en fonction de variables difficilement mesurables en pratique (telles que s_0 et Ψ_0 par exemple). On s'intéresse donc généralement aux conséquences de cette condition sur les variables mesurables. Il convient alors de définir plusieurs types de variables thermodynamiques et c'est l'objet du prochain paragraphe.

3.2.3 Variables d'état

D'après la définition d'un processus thermodynamique (défini en section 3.2.1) et en application du principe de l'état local, on montre que l'état d'un domaine Ω peut être entièrement défini par la donnée d'un certain nombre de variables (nommées variables d'état). Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas, on considère alors toute évolution comme une succession d'états d'équilibre. Dès lors, c'est le choix et la nature de ces variables d'état qui permettent de décrire plus ou moins finement les phénomènes intervenant dans le processus.

Dans la partie précédente (section 3.2.2), nous avons introduit la fonction Ψ_0 qui est le potentiel énergie libre spécifique. Dans les sections suivantes, nous allons détailler la construction et l'utilisation de ce potentiel. Cependant, pour ce faire, il est nécessaire de définir préalablement deux types de variables : les variables d'état observables et internes.

Variables d'état observables : Dans le cadre classique de la théorie des milieux continus, on se limite à la donnée de deux variables observables : la température T et un tenseur de déformation pouvant être Lagrangien ou Eulérien. Dans ce travail, on considérera une configuration Lagrangienne du problème qui conduira donc à considérer le tenseur \mathbb{E} de Green-Lagrange comme seconde variable d'état observable.

Variables d'état internes : De plus, pour décrire certains phénomènes dissipatifs (plasticité, écrouissage...), il est nécessaire de se donner des variables décrivant l'état du milieu. Le

nombre de variables internes ne connaît pas de limites et leur choix dépend des phénomènes que l'on souhaite prendre en compte. Il peut s'agir d'une déformation plastique cumulée, d'une variable d'endommagement ou d'une variable caractérisant le changement de phase. Les variables d'état internes seront notées V_k , $\forall k \geq 3$.

Dans le cadre classique de la plasticité et sous l'hypothèse de l'état local, il est nécessaire d'introduire une variable interne relative à la déformation plastique. Il devient donc indispensable de considérer la partition de la déformation en une partie élastique et une autre inélastique. Plusieurs approches classiques permettent de formaliser cette décomposition car celle-ci peut reposer sur une décomposition du tenseur déformation (Lagrangien ou Eulérien), du tenseur taux de déformation ou encore du tenseur gradient. Dans ce travail, la décomposition proposée par E.H. Lee [Lee 69, Lee 81] est basée sur une décomposition multiplicative du tenseur gradient telle que :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_e \mathbb{F}_p. \quad (3.12)$$

Comme le montre la Figure 3.1, cette décomposition introduit deux transformations \mathbb{F}_e et \mathbb{F}_p permettant de scinder la transformation totale du domaine Ω . Après transformation par \mathbb{F}_p , le domaine se trouve dans un état *relâché*, c'est-à-dire libre de contraintes et qui n'est ni Lagrangien ni Eulérien (les grandeurs relatives à cet état seront notées avec un indice R dans la suite du document).

La décomposition de Lee introduit donc *de facto* deux variables internes liées à la déformation totale \mathbb{E} : les déformations élastique $\mathbb{E}_e = \frac{1}{2}(\mathbb{F}_e^T \mathbb{F}_e - \mathbb{I})$ et plastique $\mathbb{E}_p = \frac{1}{2}(\mathbb{F}_p^T \mathbb{F}_p - \mathbb{I})$ (avec \mathbb{I} le tenseur identité). On remarquera que du fait même du choix de la décomposition multiplicative du tenseur gradient (Eq. 3.12), la relation liant ces trois déformations n'est pas triviale (*i.e.* n'est ni additive ni multiplicative). Cependant, le fait qu'une telle relation existe met en évidence la non indépendance de \mathbb{E} , \mathbb{E}_e et \mathbb{E}_p . C'est pourquoi, on considère généralement que seule la déformation thermoélastique \mathbb{E}_e constitue une variable d'état. Cette variable (\mathbb{E}_e) se rapportant à la transformation \mathbb{F}_e , sa définition Lagrangienne correspond à l'état *relâché* et sera notée \mathbb{E}_{eR} . Au final, la fonction Ψ_0 sera donc fonction des variables d'état observables et internes telle que $\psi_0 = e_0 - Ts_0 = \Psi_0(T, \mathbb{E}_{eR}, V_k)$ et ceci $\forall k \geq 3$.

3.2.4 Décomposition de l'énergie interne

Il a été montré par J.R. Rice [Rice 76] puis dans [Chrysochoos 85] que, quel que soit le choix d'une des décompositions classiques de la déformation, les grandeurs énergétiques du problème restent inchangées et conduisent à une décomposition additive de l'énergie interne en une partie élastique (réversible) et une autre anélastique (stockée) telles que :

$$w'_{int} = w'_e + w'_a. \quad (3.13)$$

À ce stade, il convient d'expliciter les grandeurs conjuguées conduisant à une définition du terme w'_{int} ainsi qu'à ses deux parties w'_e et w'_a . En effet, la description de l'état interne du domaine Ω nécessite le choix de variables associées aux phénomènes physiques observés à l'échelle macroscopique. En l'occurrence, il s'agira de contraintes et de déformations. On écrit donc clairement la puissance des efforts intérieurs par le simple produit :

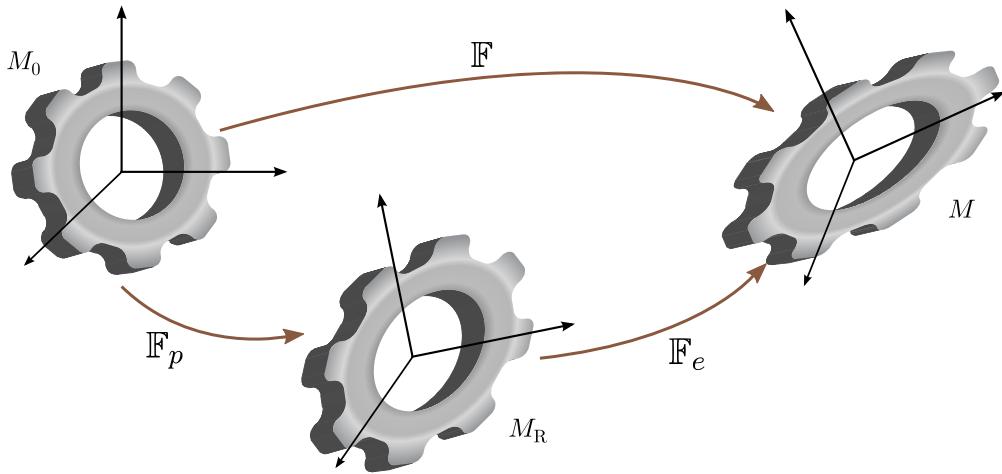


FIG. 3.1 – Décomposition du tenseur gradient entre les configurations initiale (M_0) actuelle (M) et relâchée (M_R) [Sidoroff 82].

$$\boxed{-w'_{int} = \mathbb{T} : \mathbb{D} \\ = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}},} \quad (3.14)$$

où la deuxième partie de l'équation correspond à une écriture ramenée en configuration Lagrangienne de la même quantité. Le rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$ quantifie la variation de volume de la transformation et enfin, les équations d'équilibre découlant du Principe des Puissances Virtuelles montrent que \mathbb{T} est le **tenseur des contraintes de Cauchy** (en conséquence \mathbb{S} est le **second tenseur des contraintes de Piola–Kirchoff**).

Il convient maintenant de décomposer l'expression de la puissance intérieure w'_{int} (3.14) afin d'aboutir à une expression de w'_e et w'_a en fonction des variables d'état. Pour ce faire, il est nécessaire d'exprimer les grandeurs de déformation en terme de vitesse de déformation. On peut pour cela dériver \mathbb{F} conformément à sa décomposition (Eq. 3.12) et écrire le tenseur gradient de vitesse \mathbb{G} comme suit :

$$\mathbb{G} = \dot{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{-1} = \mathbb{F}_e \mathbb{G}_p \mathbb{F}_e^{-1} + \mathbb{G}_e, \quad (3.15)$$

avec :

$$\mathbb{G}_e = \dot{\mathbb{F}}_e \mathbb{F}_e^{-1} \quad \text{ainsi que} \quad \mathbb{G}_p = \dot{\mathbb{F}}_p \mathbb{F}_p^{-1}. \quad (3.16)$$

Muni de cette décomposition, on peut écrire la puissance des efforts intérieurs comme un produit de contrainte et de vitesse de déformation. L'évaluation de quantités énergétiques étant indépendante de la configuration choisie (Lagrangienne, Eulérienne ou relâchée), on peut se placer dans la configuration relâchée en appliquant la transformation inverse de \mathbb{F}_e à l'expression (Eq. 3.14) pour obtenir

$$\begin{aligned} -w'_{int} &= \frac{\rho}{\rho_R} \mathbb{S}_R : \mathbb{F}_e^T \mathbb{G} \mathbb{F}_e \\ &= \frac{\rho}{\rho_R} \mathbb{S}_R : \mathbb{F}_e^T \mathbb{F}_e \mathbb{G}_p \mathbb{F}_e^{-1} \mathbb{F}_e + \frac{\rho}{\rho_R} \mathbb{S}_R : \mathbb{F}_e^T \mathbb{G}_e \mathbb{F}_e, \end{aligned} \quad (3.17)$$

où \mathbb{S}_R est le second tenseur de Piola-Kirchoff exprimé dans la configuration relâchée. Enfin $\frac{\rho}{\rho_R}$ caractérise la variation de volume entre les configurations finale et relâchée. De plus, on peut remarquer que la dérivée du tenseur de Green-Lagrange ramenée en configuration relâchée s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{E}}_{eR} &= \mathbb{F}_e^T \dot{\mathbb{E}}_e \mathbb{F}_e = \frac{1}{2} \mathbb{F}_e^T (\mathbb{F}_e^T \dot{\mathbb{F}}_e + \dot{\mathbb{F}}_e^T \mathbb{F}_e) \mathbb{F}_e \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{F}_e^T \mathbb{G}_e \mathbb{F}_e + \mathbb{F}_e^T \mathbb{G}_e^T \mathbb{F}_e) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{F}_e^T (\mathbb{G}_e + \mathbb{G}_e^T) \mathbb{F}_e \\ &= \mathbb{F}_e^T \mathbb{G}_e^S \mathbb{F}_e,\end{aligned}\tag{3.18}$$

où \mathbb{G}_e^S est la partie symétrique de \mathbb{G}_e . On peut alors réécrire l'expression de la puissance des efforts intérieurs (Eq. 3.17) comme suit [Chrysochoos 85] :

$$-w'_{int} = \underbrace{\frac{\rho}{\rho_R} \mathbb{S}_R : \mathbb{F}_e^T \mathbb{F}_e \mathbb{G}_p}_{w'_a} + \underbrace{\frac{\rho}{\rho_R} \mathbb{S}_R : \dot{\mathbb{E}}_{eR}}_{w'_e}.\tag{3.19}$$

Il reste alors à expliciter le second tenseur de Piola-Kirchoff \mathbb{S}_R dans la configuration relâchée qui peut s'exprimer par simple changement de base du tenseur de Cauchy tel que

$$\mathbb{S}_R = \frac{\rho_R}{\rho} \mathbb{F}_e^{-1} \mathbb{T} \mathbb{F}_e^{-1T} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbb{F}_p \mathbb{S} \mathbb{F}_p^T.\tag{3.20}$$

On peut enfin réécrire une forme Lagrangienne de la puissance des efforts intérieurs telle que

$$\boxed{-w'_{int} = \underbrace{\frac{\rho}{\rho_0} \mathbb{F}_p \mathbb{S} \mathbb{F}_p^T : \mathbb{F}_e^T \mathbb{F}_e \mathbb{G}_p}_{w'_a} + \underbrace{\frac{\rho}{\rho_0} \mathbb{F}_p \mathbb{S} \mathbb{F}_p^T : \dot{\mathbb{E}}_e}_{w'_e}.}\tag{3.21}$$

3.2.5 Lois d'état

Les lois d'état sont généralement établies à partir du potentiel énergie libre exprimé en fonction des variables d'état choisies. On écrit donc classiquement :

$$\begin{cases} \Psi_0 = e_0 - T s_0 = \Psi_0(T, \mathbb{E}_{eR}, V_k) \\ \text{et } \dot{\Psi}_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbb{E}_{eR}} \dot{\mathbb{E}}_{eR} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial V_k} \dot{V}_k. \end{cases}\tag{3.22}$$

Ceci autorise, sous l'hypothèse de petites déformations élastiques [Sidoroff 84], à réécrire l'inégalité de Clausius-Duhem (Eq. 3.11) en fonction des variables d'état et sous sa forme Lagrangienne :

$$\left(\mathbb{S}_R - \rho_0 \mathbb{F}_p \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbb{E}_{eR}} \mathbb{F}_p^T \right) : \dot{\mathbb{E}}_{eR} + w'_a - \rho_0 \left(s_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\vec{q}_0}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \geq 0.\tag{3.23}$$

Tout dépend alors de la donnée d'une forme pour le potentiel Ψ_0 . En pratique, plusieurs modèles permettent d'évaluer Ψ en fonction de différents invariants de \mathbb{S} et \mathbb{E} .

À partir de la donnée d'un potentiel et de l'expression ci-dessus de l'inégalité de Clausius-Duhem (Eq. 3.23), on peut définir les lois d'état comme suit :

$$\begin{cases} \mathbb{S}_R = \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbb{E}_{eR}} \\ s_0 = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial T} \\ A_k = \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial V_k} \quad \forall k \geq 3. \end{cases} \quad (3.24)$$

3.3 Modélisation thermomécanique

3.3.1 Équation de la chaleur

Une fois placé l'ensemble du cadre thermomécanique, on est à même de s'intéresser au bilan énergétique du domaine Ω . Il s'agit de donner une signification aux différents termes qui sont apparus dans l'énoncé des deux principes de la thermodynamique. Reprenons tout d'abord le Premier Principe (Eq. 3.5) :

$$\rho_0 \dot{e}_0 = r_0 - w'_{int} - \operatorname{div} \vec{q}_0. \quad (3.25)$$

D'autre part, on tire de l'expression $\Psi_0 = e_0 - Ts_0$ une expression de $\rho_0 \dot{e}_0$ telle que :

$$\rho_0 \dot{e}_0 = \rho_0 \dot{\Psi}_0 + \rho_0 T \dot{s}_0 + \rho_0 \dot{T} s_0. \quad (3.26)$$

Dans cette expression de $\rho_0 \dot{e}$, la fonction $\dot{\Psi}$ peut être remplacée par son expression (Eq. 3.22) que l'on développe par les lois d'état (Eq. 3.24) pour écrire :

$$\rho_0 \dot{e}_0 = \rho_0 \left[\frac{1}{\rho_0} \mathbb{S}_R : \dot{\mathbb{E}}_{eR} - \dot{T} s_0 + \frac{1}{\rho_0} A_k \dot{V}_k \right] + \rho_0 T \dot{s}_0 + \rho_0 \dot{T} s_0. \quad (3.27)$$

En simplifiant l'équation précédente, on peut réécrire l'équation (3.25) de telle sorte que :

$$\underbrace{\mathbb{S}_R : \dot{\mathbb{E}}_{eR}}_{w'_e} + A_k \dot{V}_k + \rho_0 T \dot{s}_0 = r_0 + (w'_a + w'_e) - \operatorname{div} \vec{q}_0. \quad (3.28)$$

Reste donc à éliminer \dot{s}_0 de cette expression. En effet, on lui préférera sa variable observable associée : T . La définition de la seconde loi d'état (Eq. 3.24) nous permet de donner une forme à \dot{s}_0 :

$$\begin{aligned} \dot{s}_0 &= -\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \mathbb{E}_{eR} \partial T} : \dot{\mathbb{E}}_{eR} - \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial V_k \partial T} \dot{V}_k \\ &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mathbb{S}_R}{\partial T} : \dot{\mathbb{E}}_{eR} + \frac{\partial s_0}{\partial T} \dot{T} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Si l'on considère de petites variations de T , on peut introduire $C_{\mathbb{E},V}$ la chaleur spécifique et la supposer constante, telle que :

$$C_{\mathbb{E},V} = -T \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial T^2} = T \frac{\partial s_0}{\partial T}. \quad (3.30)$$

Enfin, la donnée de la loi Fourier $\vec{q}_0 = -K \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$ permet d'écrire :

$$-\operatorname{div}(-K \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = \rho_0 C_{\mathbb{E},V} \dot{T} - w'_a + A_k \dot{V}_k - r_0 + T \left[\frac{\partial \mathbb{S}_R}{\partial T} : \dot{\mathbb{E}}_{eR} - \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \right]. \quad (3.31)$$

qui est l'équation complète de la chaleur. On préférera cependant la forme *potentielle* laissant apparaître le couplage de T avec les autres variables :

$$\rho_0 C_{\mathbb{E},V} \dot{T} + \operatorname{div}(-K \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) - r_0 = d_1 + \underbrace{\rho_0 T \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial T \partial \mathbb{E}_{eR}} : \dot{\mathbb{E}}_{eR} + \rho_0 T \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial T \partial V_k} \dot{V}_k}_{w'_{ch}}. \quad (3.32)$$

L'équation de la chaleur fournit un lien entre le champ de température et les sources de chaleur internes du matériau. Chaque terme de cette équation peut être interprété comme suit :

- *Le terme de restitution/absorption* $\rho_0 C_{\mathbb{E},V} \dot{T}$: ce terme définit classiquement la diffusion de la chaleur dans le matériau et il représente l'augmentation (ou la diminution) de la température en un point matériel. $C_{\mathbb{E},V}$ est la chaleur spécifique.
- *Les pertes* $\operatorname{div}(-K \overrightarrow{\operatorname{grad}} T)$: ce terme représente la conduction tri-dimensionnelle de la chaleur dans le matériau. On notera que la variable K est la matrice des coefficients de conductivité du matériau.
- *Les sources externes* r_0 : elles représentent les apports de chaleur d'origine extérieure tels que le rayonnement ou l'effet Joule.
- *La dissipation* $d_1 = w'_c = w'_a - A_k \dot{V}_k = w'_a - w'_s$: ce terme représente la part d'énergie qui est irréversiblement transformée en chaleur. Son origine peut être liée à des phénomènes tels que l'endommagement, la plasticité, la viscoplasticité, etc. Il est courant de considérer qu'une partie seulement de la puissance anélastique est convertie en chaleur et on nomme dans ce cas *puissance stockée* w'_s son complémentaire.
- *Le couplage thermoélastique* $\rho_0 T \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial T \partial \mathbb{E}_{eR}} \dot{\mathbb{E}}_{eR}$: ce terme représente le couplage isentropique classique. Un matériau thermoélastique tend à se refroidir en traction et à se réchauffer en compression élastique.
- *Les autres couplages* $\rho_0 T \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial T \partial V_k} \dot{V}_k$: ce terme sert à prendre en compte plusieurs autres couplages entre la température et les variables d'état internes. Par exemple, ce terme peut être utilisé pour introduire un couplage entre la température et une variable caractérisant le changement de phase ou un comportement entropique du matériau.
- *Les sources de chaleur* w'_{ch} : ce terme représente la somme de la dissipation et des termes de couplages entre la température et les variables d'état.

3.3.2 Estimation de sources de chaleur

3.3.2.1 Bilan énergétique

La puissance associée à une transformation mécanique peut être calculée de deux manières. En effet, l'hypothèse de déformation quasistatique et le théorème de l'énergie cinétique permettent d'écrire l'égalité des puissances des efforts intérieurs et extérieurs à tout instant, soit :

$$W'_{ext} = -W'_{int}. \quad (3.33)$$

Le terme de gauche de cette équation peut aisément être évalué dans le cas d'une transformation dont l'origine est strictement mécanique et se compose d'efforts surfaciques. On calcule alors la puissance des efforts extérieurs comme suit :

$$W'_{ext} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{u} \, dS. \quad (3.34)$$

La puissance des efforts intérieurs s'évalue dans le cas de grandes déformations par le produit d'un tenseur de contraintes et du tenseur des déformations associé. On rappelle donc l'équation (3.14) par laquelle l'énergie interne est évaluée :

$$W'_{int} = - \int_{\Omega} \mathbb{T} : \mathbb{D} \, dV = - \frac{\rho}{\rho_0} \int_{\Omega} \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} \, dV. \quad (3.35)$$

En considérant maintenant les quantités locales volumiques, le terme w'_{ext} peut être décomposé en une partie élastique w'_e et une partie anélastique w'_a (Eq. 3.21). La distinction se faisant sur le fait que w'_e est entièrement récupérable si les efforts extérieurs viennent à s'annuler.

Cependant, les mesures expérimentales permettent de constater qu'une partie seulement de w'_a est convertie et dissipée sous forme de chaleur [Chrysochoos 89, Louche 99]. Elle est notée w'_c . L'autre partie (w'_s) est dite *stockée* et représente les contraintes résiduelles ainsi que les changements internes de microstructure.

Comme le montre le détail des termes de l'équation de la chaleur (Eq. 3.32) présentée dans la section précédente, la puissance calorifique totale w'_{ch} est la somme de la puissance dissipée w'_c et de celle due aux couplages thermomécaniques w'_{ctm} . Le bilan énergétique de la déformation mécanique peut ainsi être résumé comme suit :

$$\boxed{\begin{cases} w'_{ext} = -w'_{int} = w'_e + w'_a \\ w'_a = w'_c + w'_s \\ w'_{ch} = w'_c + w'_{ctm}. \end{cases}} \quad (3.36)$$

En conclusion, on peut donc réécrire les sources de chaleur que l'on cherche à estimer sous la forme :

$$w'_{ch} = (w'_a - w'_s) + w'_{ctm}. \quad (3.37)$$

Le premier terme, w'_a , peut être évalué par (Eq. 3.21). L'évaluation des termes w'_s et w'_{ctm} sera discutée dans les sections suivantes (sections 3.3.2.2 et 3.3.2.3).

3.3.2.2 Coefficient de Taylor et Quinney

Comme nous l'avons vu, nous disposons d'un moyen d'évaluer la puissance des efforts intérieurs w'_{int} ainsi que ses deux parties w'_e et w'_a . En se référant au bilan énergétique du problème (Eq. 3.36), le calcul des sources de chaleur w'_{ch} passe par la décomposition de la puissance anélastique en une partie dissipée et une partie stockée. L'évaluation de cette dernière peut alors découler de deux approches distinctes.

Tout d'abord, l'évaluation de w'_s peut se faire en se donnant une expression du potentiel Ψ_0 [Chrysochoos 89, Chaboche 93, Vincent 08, Dumoulin 10] ou en le calculant à partir de considérations micromécaniques (on trouve dans [Hild 98] une revue des différentes approches liées à ce calcul). L'évaluation de la puissance stockée w'_s s'effectue alors de manière analytique.

La seconde approche repose généralement sur l'utilisation du coefficient dit de Taylor et Quinney [Taylor 37]. L'introduction de ce coefficient presuppose qu'il existe un paramètre matériau nommé β_{diff} représentant la fraction d'énergie anélastique dissipée sous forme de chaleur telle que :

$$\boxed{\beta_{diff} = \frac{w'_c}{w'_a}}, \quad (3.38)$$

ou encore :

$$w'_s = w'_a(1 - \beta_{diff}), \quad (3.39)$$

où β_{diff} est la fraction de puissance anélastique (ici plastique) dissipée sous forme de chaleur. On reprend ici la notation β_{diff} introduite par [Rittel 99] qui permet de distinguer une définition du coefficient β , basée sur un rapport de puissance (Eq. 3.38), d'une définition formulée par un rapport d'énergie :

$$\beta_{int} = \frac{w_c}{w_a}, \quad (3.40)$$

cette dernière définition étant la formulation originale des travaux de Taylor et Quinney. Ce coefficient a longtemps été considéré comme constant mais plusieurs auteurs ont montré la dépendance de β_{int} à la déformation et à la vitesse de déformation [Kappor 98, Hodowany 00, Vivier 09]. Dès lors, il paraît naturel de s'intéresser non plus à une fraction d'énergie mais à une fraction instantanée de celle-ci, c'est-à-dire une fraction de puissance. C'est la raison pour laquelle nous considérerons ici la formulation instantanée en puissance (Eq. 3.38).

3.3.2.3 Couplages thermomécaniques

En l'absence de variables d'état internes autres que les tenseurs élastiques et plastiques dans le formalisme choisi, w'_{ctm} ne dépend que du couplage thermoélastique (aussi appelé couplage isentropique) qui sera noté w'_{thel} . En effet, les autres sources de couplages peuvent être négligées dans les gammes de températures proches de l'ambiente (ce qui est le cas pour des auto-échauffements métalliques à vitesse de déformation faible) [Chrysochoos 98]. Dès lors, sous l'hypothèse de petites déformations élastiques, le couplage isentropique w'_{thel} s'exprime entre la configuration de référence et la configuration déformée (transformation \mathbb{F}_e sur la Figure 3.1). Le terme de puissance thermomécanique peut alors s'écrire dans la configuration relâchée suivant l'expression [Sidoroff 82, Lemaitre 85] :

$$w'_{thel} = \rho_0 T \frac{\partial \Psi}{\partial T \partial \mathbb{E}_{eR}} : \dot{\mathbb{E}}_{eR}. \quad (3.41)$$

On peut de plus rappeler la première loi d'état (Eq. 3.24) qui, associée à un modèle élastique linéaire isotrope [Lemaitre 85], permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_R &= \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{eR}} = \lambda \text{tr}(\mathbb{E}_{eR}) \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{E}_{eR} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta \mathbb{I}, \\ \text{et } \frac{\partial \mathbb{S}_R}{\partial T} &= -(3\lambda + 2\mu)\alpha \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, α est le coefficient de dilatation thermique, $\theta = T - T_0$ avec T_0 la température de référence et \mathbb{I} est le tenseur identité. Muni de cette dernière expression, on peut réécrire l'équation (3.41) comme suit :

$$w'_{thel} = T \frac{\partial \mathbb{S}_R}{\partial T} : \dot{\mathbb{E}}_{eR} = -\alpha(3\lambda + 2\mu)T \cdot \text{tr}(\dot{\mathbb{E}}_{eR}). \quad (3.43)$$

Par ailleurs, à partir de l'expression de la contrainte de Piola-Kirchoff II (Eq. 3.42) on peut dire que :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbb{S}_R) &= 3\lambda \text{tr}(\mathbb{E}_{eR}) + 2\mu \text{tr}(\mathbb{E}_{eR}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta \times 3 \\ &= 3K \text{tr}(\mathbb{E}_{eR}) - 9K\alpha\theta \quad \text{avec} \quad K = (3\lambda + 2\mu)/3. \end{aligned} \quad (3.44)$$

par dérivation, on obtient donc :

$$\text{tr}(\dot{\mathbb{S}}_R) = 3K \text{tr}(\dot{\mathbb{E}}_{eR}) - 9K\alpha\dot{T}. \quad (3.45)$$

Enfin, si on injecte cette dernière relation dans l'équation (3.43), on obtient :

$$w'_{thel} = -\alpha T \cdot \text{tr}(\dot{\mathbb{S}}_R) - 9\rho_0 K \alpha^2 T \dot{T}, \quad (3.46)$$

qui est la forme du couplage isentropique dans le cas de grandes déformations. Cependant, comme dans le cas des petites perturbations, on peut se ramener à une forme simplifiée de cette expression en constatant d'abord que le terme $\alpha^2 \ll 1$, ce qui permet de négliger le second terme de droite par rapport au premier [Chrysochoos 09]. De plus, les faibles variations de température conduisent classiquement à poser que $T \approx T_0$ [Boulanger 04]. Dès lors, il vient :

$$w'_{ctm} = w'_{thel} \approx -\alpha T_0 \cdot \text{tr}(\dot{\mathbb{S}}_R). \quad (3.47)$$

Muni de cette expression et de l'équation (3.38), on peut alors évaluer les sources de chaleur w'_{ch} . On détaille dans la section suivante quelques simplifications classiques de l'équation de la chaleur.

3.3.3 Simplification de l'équation de la chaleur

Le formalisme de la TPI tel qu'il est présenté ici offre de larges possibilités de paramétriser l'équation de la chaleur (3.32) via l'introduction des variables d'état V_k . Ces variables permettent en effet de prendre en considération une infinité de phénomènes. Néanmoins, il convient de choisir ces variables et donc de définir entièrement le formalisme dans le cas qui nous intéresse. De plus, l'équation de la chaleur telle qu'elle est présentée par (Eq. 3.32), est difficile à expliciter en termes numériques. C'est pourquoi plusieurs auteurs préfèrent une forme simplifiée de cette équation s'appuyant sur les hypothèses suivantes [Chrysochoos 00] :

Conductivité : le matériau est thermiquement isotrope et sa conductivité est uniforme dans l'espace, en conséquence $K = k\mathbb{I}$ est scalaire et constant. On peut donc écrire : $\text{div}(-K \vec{\text{grad}} T) = -k\Delta T$, où Δ est l'opérateur laplacien.

Changement d'état : la variation de température induite par les mécanismes de la déformation est trop faible pour avoir une influence sur l'état de la microstructure ($C_{\mathbb{E},V} = C$ reste constant). D'autre part on supposera que $\rho = \rho_0$.

Sources extérieures : Le terme de source de chaleur extérieure est indépendant du temps $r_0 = r$. Il peut donc être simplifié. Pour cela, il suffit de soustraire à l'état thermodynamique considéré un état de référence où la température est notée T_0 et l'équilibre thermique avec l'extérieur est supposé satisfait. Cet état de référence est choisi tel que l'éprouvette n'est pas contrainte. En conséquence, les sources de chaleur internes w'_{ch} sont nulles. On obtient donc, pour ces deux états, les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T + r = w'_{ch} \\ \rho C \frac{\partial T_0}{\partial t} - k\Delta T_0 + r = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Enfin, si l'on note θ la variation de température telle que $\theta = T - T_0$, on obtient la forme simplifiée de l'équation de la chaleur par soustraction des deux équations (3.48) :

$$\rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} - k\Delta\theta = w'_{ch} = \beta_{diff} w'_a + w'_{tmc}. \quad (3.49)$$

Par la suite, pour simplifier l'écriture β_{diff} sera noté β .

3.3.4 Bilan de la modélisation thermomécanique

La formalisation thermomécanique que nous venons de voir conduit à l'obtention de l'équation de la chaleur (3.49) écrite dans la configuration de référence. Le champ de température ainsi défini dépend donc du temps, mais aussi des coordonnées spatiales dans la configuration de référence (Lagrangienne) tel que $\theta = \theta(X, Y, Z, t)$. Cette équation permet de calculer l'évolution d'un champ de température pour des sources de chaleur données. L'utilisation d'un code EF afin de résoudre le problème thermique ne change rien au formalisme de celui-ci. Il suffit de fournir (au code de calcul EF) une évaluation des termes w'_a et w'_{tmc} ainsi qu'une valeur pour β . Le terme w'_a peut être évalué, via l'équation (3.21), à partir des champs de déformation et de contrainte. Le terme $w'_{tmc} = w'_{thel}$ sera lui évalué grâce à l'équation (3.47). β sera donc le *paramètre matériel* à identifier. Enfin, nous verrons dans la section 5.5.1 que plusieurs modèles prédisant l'évolution de β avec la déformation seront en fait identifiés.

3.4 Modèles d'élastoplasticité

3.4.1 Gestion des grandes transformations dans les codes EF

L'implémentation des lois de comportement élastoplastiques associées dans les codes de calcul EF repose sur la donnée de trois éléments : une loi élastique, un critère de plasticité et une loi d'écrouissage. Dans ce cadre, les équations cinématiques en grandes transformations sont classiquement une généralisation des modèles utilisés en petites perturbations. En effet, dans les codes EF commerciaux (dont ABAQUS), la gestion des grandes transformations consiste à reformuler le problème avec une décomposition additive des vitesses de déformation élastique et plastique. Or, nous avons vu que la décomposition de Lee [Lee 81] repose sur une décomposition multiplicative et l'introduction d'une configuration relâchée. Cependant, sous l'hypothèse de petite déformation élastique, [Chrysochoos 85] montre que la décomposition multiplicative du tenseur gradient aboutit à une décomposition additive du taux de déformation Eulérien telle que :

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}^e + \mathbb{D}^p. \quad (3.50)$$

Dès lors, la difficulté réside dans les rotations des déformations élastiques et plastiques qui conduisent à mettre à mal le *principe d'objectivité* [Manach 04]. Ce principe, énoncé par [Sidoroff 82], impose que la loi de comportement soit invariante par rapport au référentiel d'observation choisi. La solution communément admise consiste à définir un repère local (tournant localement avec la matière) et à écrire la loi de comportement en petites déformations dans ce

repère.

En conséquence, les trois éléments de la loi de comportement qui sont détaillés ci-dessous le seront sous le formalisme des petites transformations. Ainsi ε représente classiquement le tenseur des déformations et σ le tenseur des contraintes.

3.4.2 Comportement élastique

3.4.2.1 Élasticité linéaire isotrope

Le modèle d'élasticité linéaire isotrope repose classiquement sur la loi de Hooke. Cette loi présuppose que les constantes élastiques ne dépendent pas de la déformation anélastique et demeurent constantes durant la déformation du domaine Ω . Cette hypothèse est communément admise dans le cas de matériaux métalliques. On peut donc rappeler l'expression de la loi de Hooke :

$$\varepsilon_e = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}(Tr(\sigma))\mathbb{I}, \quad (3.51)$$

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson. L'équation (3.51) régit le comportement mécanique du matériau dans son domaine d'élasticité. Notons enfin que ce modèle suppose que le comportement du matériau est entièrement déterminé par cette loi jusqu'à que la contrainte atteigne une valeur appelée *limite initiale d'élasticité*. On notera σ_y cette valeur de la contrainte (au-delà de laquelle le matériau subit des déformations irréversibles).

3.4.2.2 Élasticité linéaire orthotrope

Le modèle élastique orthotrope est couramment utilisé pour simuler le comportement des tôles laminées [Chalal 06, Lecompte 07a]. La définition de l'orthotropie impose que les propriétés élastiques du matériau n'admettent que deux symétries par rapport à deux plans orthogonaux (au lieu de trois dans le cas isotrope). Le nombre de coefficient indépendant est ainsi porté à 9 et la relation contrainte/déformation peut s'écrire, dans le repère principal d'orthotropie, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

sous les contraintes de symétrie suivantes :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (3.53)$$

Ainsi, le modèle élastique orthotrope comporte 3 modules de tension (assimilables à des modules d'Young), 3 modules de cisaillement (assimilables à des modules de Coulomb) et trois coefficients de contraction (assimilables à des coefficients de Poisson). Enfin, notons que la nécessité que le modèle dérive d'un potentiel Ψ défini positif (voir section 3.2.5) conduit à considérer d'autres relations entre les 9 coefficients présentés ici. Le lecteur pourra se reporter à [Lemaitre 85] pour de plus amples explications.

3.4.3 Seuil de plasticité

3.4.3.1 Surface de charge

Les modèles élastiques sont conditionnés à l'existence d'une valeur limite de la contrainte en dessous de laquelle le comportement du matériau est entièrement régit par les lois élastiques. Cependant, il convient de définir dans l'espace \mathbb{R}^6 des contraintes le sens physique de cette limite d'élasticité.

C'est pourquoi la notion de *surface de charge* est communément définie dans le cas de phénomènes dissipatifs instantanés, c'est-à-dire lorsque le comportement du matériau est supposé indépendant de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$. Cette hypothèse permet classiquement de poser l'existence d'un convexe $f \leq 0$ dont φ^* serait la fonction indicatrice, c'est-à-dire que φ^* et $f(\sigma, A_k)$ vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi^* = 0 & \text{si } f(\sigma, A_k) \leq 0 \\ \varphi^* = +\infty & \text{si } f(\sigma, A_k) > 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

L'interprétation de ces relations conduit à considérer (dans le cas de la plasticité simple) un sous-domaine convexe de l'espace \mathbb{R}^6 des contraintes à l'intérieur duquel la dissipation est nulle. Ce sous-domaine est généralement appelé *domaine d'élasticité*, il est représenté sur la Figure 3.2. Les théories classiques [Lemaitre 85] de la plasticité introduisent la fonction de charge scalaire $f(\sigma, A_k)$. Dès lors, les bords du domaine d'élasticité sont définis par la condition $f = 0$ et ceci, quel que soit le chargement atteint tel que l'on vérifie dans l'espace \mathbb{R}^6 des contraintes les conditions suivantes

$$\begin{cases} f(\sigma, A_k) < 0 & \text{correspond à l'intérieur du domaine,} \\ f(\sigma, A_k) = 0 & \text{correspond à la frontière du domaine,} \\ f(\sigma, A_k) > 0 & \text{correspond à l'extérieur du domaine.} \end{cases} \quad (3.55)$$

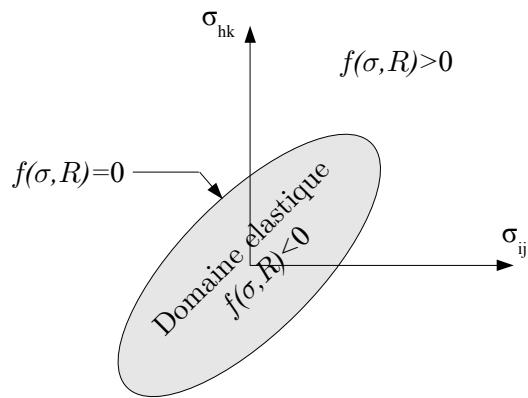


FIG. 3.2 – Exemple de domaine initial d'élasticité

On notera donc que si la condition $f(\sigma, A_k) = 0$ est atteinte, il y a alors écoulement plastique et donc déformation plastique irréversible. On peut désormais introduire le Principe du Travail Plastique Maximal (PTPM) énoncé par Hill en 1951 et qui stipule que si σ^* est un tenseur des contraintes quelconque et admissible (i.e. $f(\sigma^*, A_k) \leq 0$), alors on a :

$$(\sigma - \sigma^*) : \dot{\varepsilon}^p(\sigma, \sigma^*) \geq 0. \quad (3.56)$$

On peut visualiser sur la Figure 3.3(a-b) que le PTPM implique, par définition du produit scalaire, que l'angle θ formé par le vecteur $\overrightarrow{\sigma^* \sigma}$ et $\vec{\dot{\varepsilon}}^p$ soit inférieur à $\pi/2$ (condition de positivité du produit scalaire). De plus, cette condition doit être vérifiée $\forall \sigma^*$, ce qui induit nécessairement (comme le montre le schéma présenté Figure 3.3(b)) que $\vec{\dot{\varepsilon}}^p$ doit être normale à la surface de charge $f(\sigma, A_k) = 0$.

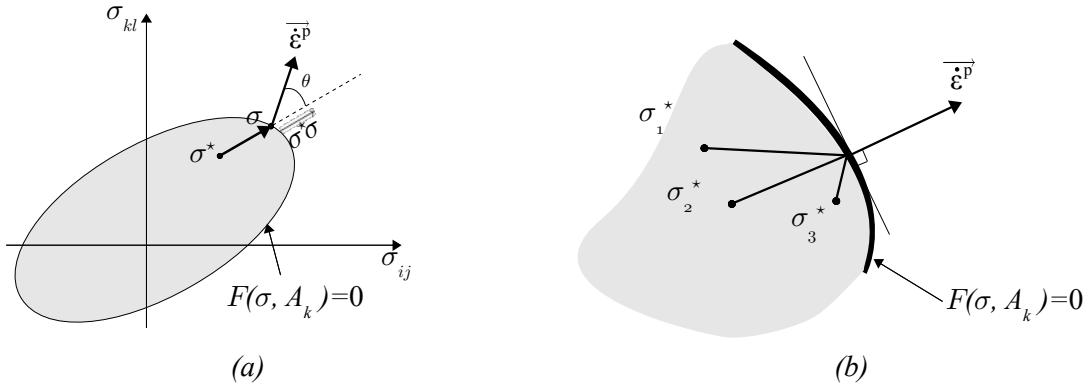


FIG. 3.3 – a) – L'angle θ formé par les vecteurs $\overrightarrow{\sigma^* \sigma}$ et $\vec{\dot{\varepsilon}}^p$ doit être inférieur à $\pi/2$ pour assurer un produit scalaire positif. b) – Une fois généralisé à un σ^* quelconque, le seul moyen d'assurer $\theta < \pi/2$, $\forall \sigma^*$ est d'imposer $\vec{\dot{\varepsilon}}^p$ normale à la surface de charge $f(\sigma, A_k) = 0$.

La déformation plastique est dès lors dirigée suivant la normale à $f(\sigma, A_k) = 0$ mais aucune information n'est à ce stade acquise quant à sa norme, on peut donc seulement écrire la règle de normalité [Lemaitre 85] sous la forme suivante :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}^p = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right),} \quad (3.57)$$

où λ est un scalaire positif représentant la norme du vecteur $\vec{\dot{\varepsilon}}^p$ et fonction de l'accroissement de la contrainte σ . On notera de plus que les matériaux vérifiant le PTPM sont dit *matériaux standards*. C'est le cas des matériaux évoqués dans cette étude.

L'écriture de l'équation de normalité (Eq. 3.57) ci-dessus montre que le PTPM revient à confondre la surface de charge avec une surface équipotentielle (Eq. 3.54). Par cette hypothèse, on montre aisément que le cas $f(\sigma, A_k) > 0$ est impossible puisque la variable φ^* ne peut prendre que deux valeurs 0 ou $+\infty$. Il vient donc que si $f = 0$, la seule possibilité pour que f reste inférieur ou égale à 0 ($f(\sigma, A_k) > 0$ est impossible!) est d'assurer que $\dot{f} \leq 0$. Dans ce cas il convient de distinguer deux possibilités : i) $\dot{f} < 0$ dans ce cas, il s'agit d'une décharge du matériau, ii) $\dot{f} = 0$ et dans ce cas, la charge (ou déformation) du matériau entraîne la surface de charge avec elle. On appelle cette deuxième condition la *condition de cohérence*, elle assure que :

$$\begin{aligned} &\text{si } \exists \sigma^*, \text{ vérifiant } f(\sigma^*) = 0 \text{ et } \dot{f}(\sigma^*) = 0 \\ &\text{alors } \sigma^* + d\sigma^* \text{ appartient à la surface de charge.} \end{aligned} \quad (3.58)$$

D'un point de vue experimental, il est aisé de vérifier les effets de l'écoulement plastique sur un matériaux. Deux points sont à relever : i) tout d'abord l'écoulement ne peut se produire que si la contrainte augmente, ii) la limite d'élasticité augmente pendant l'écoulement, on parle alors d'* crouissage*. Pour représenter ce dernier phénomène, les théories de la plasticité classiques [Lemaitre 85] stipulent que la limite d'élasticité augmente avec la contrainte et qu'en conséquence, la limite actuelle d'élasticité que l'on appelle aussi seuil de plasticité est égale à la plus grande valeur de la contrainte atteinte au cours de l'histoire du matériaux. Elle sera notée σ_s .

Il convient désormais d'expliciter la fonction $f(\sigma, A_k)$. Pour ce faire, on se placera dans le cas où seules deux variables interviennent dans l'expression de f : σ le tenseur des contraintes de Cauchy, et R une variable scalaire repr s tant l'état d'écrouissage du matériaux tel que $\sigma_s = R + \sigma_y$. Il vient donc classiquement une écriture de la fonction de charge telle que [Haddadi 06] :

$$f(\sigma, R) = J(\sigma) - (R + \sigma_y), \quad (3.59)$$

où $J(\sigma)$ est la contrainte équivalente dont l'expression est choisie pour représenter tel ou tel type de comportement matériel (il s'agit en fait de l'expression du critère de plasticité), σ_y repr s nte la limite initiale d'élasticité et enfin R repr s te la contrainte d'écoulement choisie pour représenter la déformation plastique du matériaux.

Le calcul de la contrainte équivalente dépend du critère de plasticité $J(\sigma)$ choisi. En effet de nombreux auteurs ont successivement proposés différentes expressions de cette fonction reposant sur diverses hypothèses. On donne ci-dessous quelques expressions classiques de ce critère.

3.4.3.2 Critère de Von Mises

Le critère isotrope de Von Mises développé en 1913 est très largement utilisé pour représenter le seuil d'écoulement plastique des métaux. Ce critère s'exprime en fonction des invariants du tenseur des contraintes soit :

$$J(\sigma) = J(I_1, I_2, I_3), \quad (3.60)$$

où I_1 , I_2 et I_3 sont les invariants principaux de σ , ils sont donc indépendants du système de coordonnée utilisé pour exprimer le tenseur des contraintes. De plus, le critère de Von Mises repose sur une hypothèse selon laquelle l'écoulement plastique des métaux ne dépend pas de la contrainte hydrostatique (hypothèse vérifiée expérimentalement par Bridgman). Cela revient donc à dire que $J(\sigma)$ ne dépend que de la partie déviatorique du tenseur des contraintes notée s telle que :

$$s = \sigma - \frac{1}{3}Tr(\sigma)\mathbb{I}. \quad (3.61)$$

Le critère peut dès lors être formulé comme suit :

$$J(\sigma) = \left(\frac{3}{2}s : s\right)^{1/2}. \quad (3.62)$$

Le même critère peut être écrit dans le repère principal des contraintes comme suit :

$$2J(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2, \quad (3.63)$$

et dans un repère quelconque, on obtient :

$$2J(\sigma) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{yz}^2 + 6\sigma_{zx}^2). \quad (3.64)$$

L'application du critère de Von Mises est en pratique très simple puisqu'aucun paramètre n'est à identifier pour obtenir $J(\sigma)$ et l'on peut alors connaître le seuil d'écoulement plastique avec la seule donnée de σ_s . C'est en effet cette simplicité qui explique que le critère de Von Mises connaît aujourd'hui de nombreuses applications dans l'industrie.

3.4.3.3 Critère de Hill (1948)

Le critère de Hill [Hill 48] est une généralisation du critère de Von Mises aux cas des matériaux anisotropes conservant trois plans (voir section 3.4.2.2) de symétrie matérielle également appelés matériaux orthotropes. La forme la plus générale de l'écriture d'un tel critère reprend l'écriture quadratique de la norme (comme dans le cas de Von Mises) et se présente de la façon suivante :

$$J(\sigma) = \left(\frac{1}{2} \sigma : B : \sigma \right)^{1/2}, \quad (3.65)$$

où B est un tenseur d'ordre 4 contenant 81 composantes. Cependant la prise en considération de quelques hypothèses permet de réduire ce nombre de composantes. Ainsi, si l'on tient compte des conditions de symétrie classiques du tenseur B et du tenseur σ on obtient la condition suivante :

$$B_{ijkl} = B_{klij} = B_{jikl} = B_{ijlk}. \quad (3.66)$$

ce qui réduit à 36 le nombre de composantes. De plus, en posant l'hypothèse de l'incompressibilité plastique du matériau, on obtient une autre condition stipulant que : $B_{jjkl} = 0$ ce qui réduit à 15 le nombre de paramètres. Enfin la prise en compte de l'existence de 3 plans de symétrie matérielle, supposée plus haut, permet d'obtenir 6 paramètres scalaires F, G, H et L, M, N , nommés coefficients de Hill. Ainsi, si l'on écrit B sous la forme d'une matrice 6×6 on obtient :

$$B = \begin{bmatrix} F + H & -F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & G + F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & -G & H + G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

ce qui nous permet d'exprimer le critère de plasticité $J(\sigma)$ dans ce cas particulier et par rapport au repère définissant les directions d'orthotropie, on obtient donc :

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} (F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.68)$$

où $J(\sigma)$, homogène à une contrainte, est la contrainte équivalente au sens de Hill. Sous cette forme quadratique, le critère de Hill peut se réduire au critère de Von Mises si les conditions $F = G = H = 1$ et $L = M = N = 3$ sont satisfaites, et l'on retrouve alors l'équation (3.64). On peut par ailleurs exprimer ce critère sous l'hypothèse de contraintes planes comme suit :

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} (F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G\sigma_{22}^2 + H\sigma_{11}^2 + 2N\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.69)$$

Le critère de Hill constitue la solution la plus utilisée pour simuler le comportement des matériaux métalliques laminés (tôles) et constitue, encore à ce jour, le point de départ de nombreuses théories visant à préciser le comportement plastique anisotrope des matériaux [Haddadi 06]. Cependant, cette première approche a connu de nombreuses améliorations au cours des dernières années dans le but de mieux décrire le comportement de certains matériaux. Ainsi, F. Barlat [Barlat 97] propose une contribution à ce critère pour les tôles d'aluminium basé sur un développement proposé dans [Hill 79]. Néanmoins il est à noter que ces critères nécessitent l'introduction de paramètres matériau supplémentaires.

3.4.3.4 Autres critères

Il existe de nombreux critères de plasticité dédiés à tel ou tel type de matériau. Dans le cas de matériaux à structure hexagonale, comme les alliages de titane, citons le critère proposé par O. Cazacu [Cazacu 06]. Ce critère basé sur 11 paramètres permet de décrire plus fidèlement les phénomènes d'anisotropie des tôles en titane. Par ailleurs, citons le critère de W. Hu [Hu 07] ainsi que celui proposé par W. Tong [Tong 06] qui s'appliquent tous deux aux cas des tôles anisotropes. Cependant, à ce jour aucun de ces critères n'est implémenté dans les codes EF commerciaux et leur utilisation repose uniquement sur une programmation spécifique. Ce travail de thèse sera focalisé sur le critère de Hill tel qu'il est implémenté dans ABAQUS (Eq. 3.68).

3.4.4 Écrouissage et écoulement plastique

3.4.4.1 Écrouissage isotrope

Maintenant que nous avons présenté le comportement du matériau à l'intérieur de la surface de charge et que nous avons défini cette surface, il convient d'en définir son évolution au cours de la déformation. Les théories classiques définissent deux façons de voir le domaine de plasticité évoluer au cours du chargement : il peut subir une translation d'ensemble ; on parlera *d'écrouissage cinématique* mais il peut aussi subir une expansion isotrope et on parlera alors *d'écrouissage isotrope*. Dans le cadre de cette étude seul l'écrouissage isotrope sera considéré.

Ainsi, comme le montre la Figure 3.4, selon l'histoire du matériau tout point de la courbe d'écrouissage est potentiellement amené à être le seuil de plasticité du matériau correspondant à un certain chargement. On peut donc relier la valeur de σ_s à celle de la déformation plastique par une fonction inconnue notée g telle que :

$$\sigma_s = g(\varepsilon_p). \quad (3.70)$$

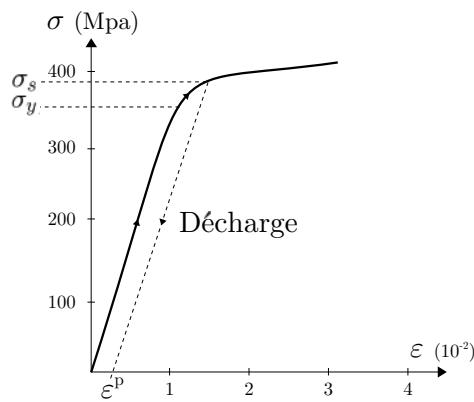


FIG. 3.4 – Courbe de traction du titane commercialement pur avec limite initiale d'élasticité σ_y et limite actuelle σ_s correspondant à la déformation plastique ε^p . On constate une augmentation de la limite d'élasticité due à l'écrouissage.

Il reste dès lors à choisir une forme pour la fonction $g(\varepsilon_p)$. De nombreux auteurs ont développé des lois d'écoulement permettant de simuler des modèles de complexités variables. Le prochain paragraphe présente plusieurs exemples de lois d'écoulement couramment utilisées.

3.4.4.2 Exemples de lois d'écrouissage

En pratique, il existe de nombreuses expressions analytiques de la fonction d'écrouissage $g(\varepsilon_p)$ [Gronostajski 00]. La relation de Ludwick sera utilisée dans le présent travail :

$$R = K \underline{\varepsilon}_p^n, \quad (3.71)$$

où K et n sont des paramètres matériau à déterminer expérimentalement et $\underline{\varepsilon}_p$ est la déformation plastique équivalente. La loi de Voce telle quelle est utilisée par O. Ghouati *et al.* [Ghouati 01] dans des problèmes d'identification paramétrique inverse.

$$R = Q(1 - \exp(-b\underline{\varepsilon}_p)). \quad (3.72)$$

Dans ce cas, les paramètres d'écrouissage sont b et Q . Il existe aussi des lois d'écoulement faisant intervenir différents paramètres additionnels tel que la température ou la vitesse de déformation. Une loi d'écoulement viscoplastique classique est celle développée par Field et Backofen en 1957 et améliorée récemment par Cheng *et al.* [Cheng 08]. Son expression est originellement donnée par :

$$R = C \underline{\varepsilon}_p^n \dot{\underline{\varepsilon}}_p^m, \quad (3.73)$$

avec C , n et m trois paramètres à identifier. Enfin, on peut noter aussi un modèle classique de thermo-viscoplasticité nommé loi de Johnson-Cook [Johnson 83] et dont l'écriture s'écrit en fonction de la déformation plastique, du taux de cette déformation mais aussi de la température T :

$$R = \underbrace{(K \underline{\varepsilon}_p^n)}_{\text{terme plastique}} \times \underbrace{\left[1 + A \cdot \ln \left(\frac{\dot{\underline{\varepsilon}}_p}{\dot{\underline{\varepsilon}}_p^0} \right) \right]}_{\text{terme visqueux}} \times \underbrace{\left[1 - \frac{T - T_{amb}}{T_{fus} - T_{amb}} \right]}_{\text{adoussissement thermique}}, \quad (3.74)$$

où T_{amb} et T_{fus} sont respectivement la température de la pièce, la température de fusion du matériau et $\dot{\underline{\varepsilon}}_p^0$ le taux de déformation de référence choisi arbitrairement. En pratique, on le choisit généralement égal à 1 [Dorogoy 09]. Ce type de formulation est très utilisée dans la simulation des phénomènes de dynamique rapide [Sasso 08] ou d'opérations d'usinage [Mabrouki 08].

3.5 Conclusion du troisième chapitre

Ce chapitre a présenté l'ensemble des modèles de comportement qui seront identifiés dans ces travaux de thèse. En effet, les identifications mécaniques porteront sur les coefficients du critère de Hill ainsi que ceux de la loi de Ludwick. Le modèle thermique à identifier sera constitué de lois d'évolution de β en fonction de la déformation. Nous montrerons que l'évaluation de la puissance intérieure constitue un point clé des identifications thermiques.

Le modèle matériau qui a été retenu n'est pas nécessairement le plus efficace pour rendre compte de la déformation des tôles laminées de titane. En effet d'autres critères de plasticité ainsi que d'autres modèles d'écrouissage pourraient être envisagés. Cependant, nous allons constater dans le chapitre suivant, qui traite des problèmes d'optimisation, que le temps de calcul nécessaire aux identifications est directement relié aux nombres de paramètres à identifier. Par ailleurs, rappelons qu'une des conditions qui rend possible l'identification est la sensibilité des champs de déformation mesurés à tous les paramètres de la loi de comportement. Cette condition pose une limitation expérimentale à la complexité des lois de comportement identifiables car il faut pouvoir créer des champs de déformation suffisamment hétérogènes.

4

Résolution du problème d'optimisation

Sommaire

4.1	Introduction	71
4.2	Définition du problème d'optimisation	72
4.3	Minimum local et global	72
4.3.1	Définitions	72
4.3.2	Ensemble et fonctions convexes	73
4.3.3	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité	74
4.4	Fonctions objectifs	75
4.4.1	Moindres carrés non linéaires	75
4.4.2	Formulation en force et déplacement	76
4.4.3	Formulation en température	77
4.5	Méthode d'optimisation envisagée	78
4.5.1	Méthode de Gauss-Newton	78
4.5.2	Méthode de Levenberg-Marquardt	79
4.5.3	Etude de sensibilité	80
4.5.4	Critère de convergence	82
4.5.5	Robustesse du problème d'optimisation	83
4.6	Conclusion du quatrième chapitre	85

4.1 Introduction

L'identification de paramètres matériau par la méthode de recalage de modèle Éléments Finis requiert un processus d'optimisation itératif permettant d'actualiser la valeur d'un vecteur de paramètres \underline{x} . Ce processus d'optimisation est basé sur la comparaison d'un modèle mathématique (numérique) et d'un modèle physique (expérimental) dont l'optimum est trouvé lorsque ces deux modèles fournissent des réponses identiques. Cela signifie que le jeu de paramètres qui est alors identifié permet de décrire au mieux le comportement du matériau au regard des conditions imposées expérimentalement et de la loi de comportement utilisée. En effet, le fait qu'il n'existe généralement pas de solution exacte au problème inverse nous conduit à considérer l'existence

de minima locaux.

Ce chapitre s'attachera à définir le problème d'optimisation lié à l'identification paramétrique inverse considérée. Ensuite les notions de minimum local et global seront abordées et nous conduirons à définir la méthode d'optimisation envisagée afin de résoudre le problème. La qualité de la solution obtenue dépendant grandement de la formulation de la fonction objectif, une grande attention sera donc portée à la définition de celle-ci.

4.2 Définition du problème d'optimisation

Définition : Soit X un ensemble et f une application définie sur X et à valeurs réelles (dans \mathbb{R}). On appelle *problème d'optimisation* le problème (P_X) suivant :

$$(P_X) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min f(\underline{x}) \\ \underline{x} \in X, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où la fonction f est appelée *fonction objectif* du problème et x est le *vecteur d'optimisation*. Malgré l'aspect très général, à ce stade, de cette formulation, on peut toutefois noter plusieurs remarques. Tout d'abord, l'espace d'arrivée de la fonction f est un espace de dimension 1, c'est-à-dire que $f(\underline{x})$ est à valeurs scalaires. De plus, l'emploi de l'algorithme (et la nature de notre problème mécanique) nous conduit à supposer que l'espace X est de dimension finie sur \mathbb{R} c'est-à-dire que le nombre de paramètres à optimiser est fini. On peut dès lors noter $\underline{x}^* = (x_1, \dots, x_n)$ le n -uplet solution du problème (4.1). Il reste alors à définir la nature de cette solution et les moyens de l'obtenir.

4.3 Minimum local et global

4.3.1 Définitions

Le problème d'optimisation formulé ci-dessus (Eq. 4.1) conduit idéalement à une solution unique minimisant la fonction objectif sur le domaine considéré. En réalité, dans beaucoup de cas pratiques, ce problème possède plusieurs solutions minimisant localement la fonction objectif appelés *minima locaux* par opposition au *minimum global* qui correspond à la plus petite valeur de la fonction objectif sur le domaine de définition de f . Un minimum global peut être défini comme suit :

Définition : x^* est un minimum global de $f(x)$ si et seulement si :

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f. \quad (4.2)$$

Par opposition à cette définition, un minimum local est défini comme satisfaisant la condition ci-dessus mais uniquement dans un voisinage de x^* . Elle est donnée par :

Définition : x^* est un minimum local de $f(x)$ si et seulement si :

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{pour } \|x - x^*\| < \delta, \quad (4.3)$$

où δ est un réel positif donné. Ainsi, une fonction peut posséder plusieurs minima locaux mais aussi plusieurs minima globaux si ceux-ci sont égaux. La Figure 4.1 montre l'allure classique

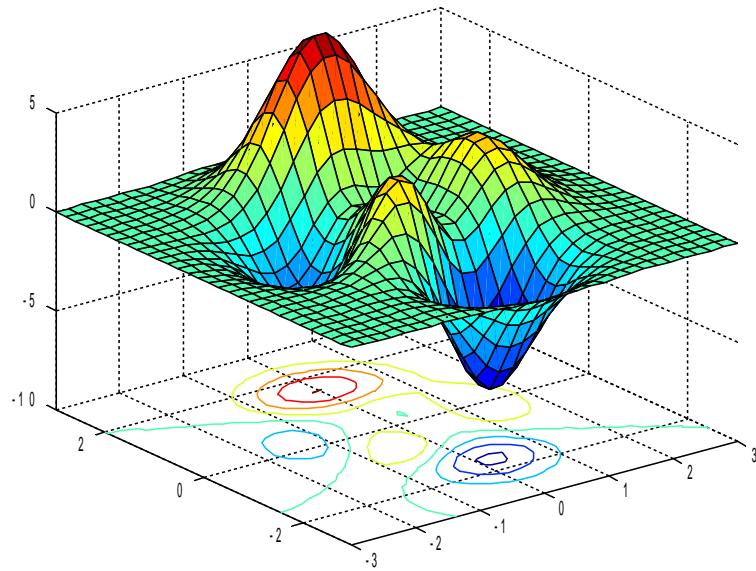


FIG. 4.1 – Fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec un maximum global et deux maxima locaux.

d'une fonction objectif $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ présentant 3 maxima locaux et un maximum global.

Dans le cas d'un problème d'optimisation, la difficulté réside dans la démonstration de l'existence et de l'unicité d'un minimum global. Quel que soit la méthode de résolution choisie, il s'agit de savoir si le minimum obtenu est global ou s'il est potentiellement local. Pour cela, il convient de définir les notions de convexité des domaines d'optimisation et des fonctions objectif associées.

4.3.2 Ensemble et fonctions convexes

La convexité est une notion géométrique qui permet de caractériser la forme de certains objets. Dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , cette notion semble triviale mais dans \mathbb{R}^n , il est nécessaire de définir rigoureusement les conditions de la convexité.

Définition : Un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si $\forall (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \in X^2$ et $\forall \theta \in [0, 1]$ on a :

$$\theta \underline{x}_1 + (1 - \theta) \underline{x}_2 \in X. \quad (4.4)$$

Cette définition peut s'interpréter en considérant qu'elle impose au segment reliant x_1 et x_2 d'être contenu dans X . Dès lors, on peut s'intéresser à la convexité des fonctions définies sur des domaines qui sont eux aussi des sous-ensembles de \mathbb{R}^n ce qui est le cas des fonctions objectifs définies au paragraphe 4.2.

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction $f(\underline{x})$ est dite *convexe* si son domaine de définition $\text{dom } f$ est convexe et si $\forall (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \in \text{dom } f$ et $\forall \theta \in [0, 1]$ on a :

$$f(\theta \underline{x}_1 + (1 - \theta) \underline{x}_2) \leq \theta f(\underline{x}_1) + (1 - \theta) f(\underline{x}_2). \quad (4.5)$$

En pratique cela signifie que pour toute restriction $f_x(\underline{x})$ de f à \mathbb{R} , la droite passant par $(\underline{x}_1, f(\underline{x}_1))$ et $(\underline{x}_2, f(\underline{x}_2))$ ne coupe que deux et seulement deux fois la courbe de $f_x(\underline{x})$ sur \mathbb{R} . La Figure 4.2 montre la différence pratique entre des fonctions convexes et non-convexes (fonctions

de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). On dit de plus que la fonction est *strictement convexe* si l'inégalité exprimée par l'équation (4.5) se transforme en inégalité stricte.

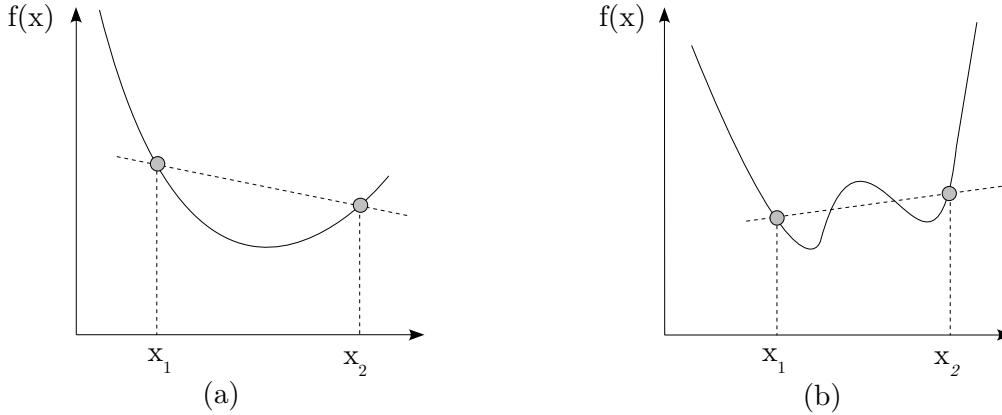


FIG. 4.2 – Fonction convexe (a) et non-convexe (b) de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Muni de ces deux définitions, on peut s'intéresser à l'existence et à l'unicité d'un minimum global au problème d'optimisation.

4.3.3 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Si l'on s'intéresse de plus près au cas où $\text{dom } f = \mathbb{R}^n$ (ce qui est le cas de notre fonction objectif) et que l'on admet la différentiabilité de la fonction $f(\underline{x})$, on peut alors écrire le résultat suivant [Allaire 05] :

Theorème : 4.3.1 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et si \underline{x}^* vérifie la condition présentée par l'équation (4.2) (c'est-à-dire que x^* est un minimum global) alors on a nécessairement :

$$\nabla f(\underline{x}^*) = 0. \quad (4.6)$$

Cette condition implique que tout minimum global de $f(\underline{x})$ vérifie la nullité du gradient. De plus cette condition devient suffisante si f est convexe et l'on peut écrire :

Theorème : 4.3.2 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable. \underline{x}^* est un minimum global si et seulement si

$$\nabla f(\underline{x}^*) = 0. \quad (4.7)$$

Enfin, il est à noter que la stricte convexité de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ implique nécessairement l'unicité de cette solution.

Tout le problème repose donc sur la convexité de la fonction objectif, car si celle-ci n'est pas convexe, seule une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un minimum local peut être donnée. En pratique, il est rarement possible de vérifier la convexité de la fonction objectif (*a fortiori* si elle est fortement non linéaire) car le problème physique considéré ne donne pas accès à une formulation analytique du problème. Dès lors, l'utilisation d'une méthode d'optimisation, aussi robuste soit-elle, ne peut assurer la convergence vers un minimum global. Le seul

moyen consiste donc à restreindre le domaine d'étude à un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et de vérifier que plusieurs vecteurs paramètres initiaux aboutissent au même optimum (ceci revient à vérifier empiriquement la convexité de ce sous-ensemble).

Aux vues de cette remarque, on constate qu'il existe plusieurs classes de problème d'optimisation dépendant de la formulation de la fonction objectif. En effet, si celle-ci est linéaire, on parlera de *programmation linéaire* et si la fonction objectif est quadratique on parlera de *programmation quadratique*. Dans ces deux cas, la convexité est assurée par la forme de la fonction objectif et tout minimum local est le minimum global unique du problème. Enfin, lorsque le problème n'est ni linéaire ni quadratique, on parle d'*optimisation non-linéaire* et dans ce cas la fonction objectif peut prendre plusieurs formes.

4.4 Fonctions objectifs

4.4.1 Moindres carrés non linéaires

Comme le souligne la définition (Eq. 4.1), la fonction objectif est à valeurs scalaires or il s'agit d'une fonction de plusieurs variables (le vecteur des paramètres inconnus \underline{x} n'est généralement pas de dimension 1). Il s'agit donc de définir une norme d'un résidu des réponses expérimentales et numériques dans l'espace \mathbb{R}^n (où n est le nombre total de réponses). On peut exprimer la fonction objectif du problème d'optimisation sous sa forme générale comme suit [Bonnans 06] :

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2} \langle r(\underline{x}) \rangle^q, \quad (4.8)$$

où q est l'ordre de la norme et $r(\underline{x})$ est le résidu. Le choix de cette norme est d'une grande influence sur le résultat du processus d'optimisation et même sur sa formulation. En effet, un choix astucieux de celle-ci peut dans certains cas conduire à une résolution analytique du problème (voir la méthode ERC en section 1.3.1, page 8). Néanmoins dans le formalisme retenu ici, une norme Euclidienne sera considérée. Plusieurs arguments plaident en faveur de ce choix. Tout d'abord, la norme Euclidienne conduit invariablement à une fonction objectif différentiable, ce qui autorise (au moins) l'emploi du théorème 4.3.1. De plus, les comparaisons menées par Kleinermann [Kleinermann 00] montrent qu'une telle formulation conduit à une convergence rapide des problèmes d'identification. Par ailleurs, de nombreuses méthodes d'optimisation ont été développées dans le cas précis des fonctions objectif de moindres carrés. Enfin, c'est la formulation communément choisie dans la littérature pour établir les problèmes d'identification paramétrique par FEU [Mahnken 97, Ghouati 98, Lecompte 07a, Kajberg 07, Dournaux 09]. Il est à noter que certaines études utilisent aussi une norme d'ordre 1 [Bruno 08].

La norme retenue sera donc une norme d'ordre 2 et ceci conduit à une définition de la fonction objectif comme suit :

Définition : Soit $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction régulière. Le vecteur $r(\underline{x}) \in \mathbb{R}^m$ est appelé le *résidu* en \underline{x} . Sous cette formulation on peut réécrire le problème d'optimisation (Eq. 4.1) sous la forme suivante [Bonnans 06] :

$$(P_X) \quad \begin{cases} \min \left(f(\underline{x}) = \frac{1}{2} \|r(\underline{x})\|_2^2 \right) \\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.9)$$

où $\|\bullet\|_2$ est la norme Euclidienne \mathcal{L}_2 . Un tel problème d'optimisation est appelé *problème de moindres carrés non linéaires*. Il reste désormais à définir concrètement le résidu à partir du problème physique considéré.

4.4.2 Formulation en force et déplacement

Le processus d'identification par méthode inverse repose sur la comparaison entre la réponse expérimentale du *système* et celle issue de la modélisation numérique du même *système*. L'expérimentation mécanique conduit à l'obtention de 2 types de réponses : le déplacement et l'effort. Il existe donc 3 façons de formuler la réponse du *système* : (i) en ne considérant que l'effort, (ii) en ne considérant que le déplacement, ou encore (iii) en considérant l'effort et le déplacement. Les déplacements issus de la mesure de champ représentent — de loin — l'information la plus riche (il s'agit d'un champ de valeurs et non d'une valeur ponctuelle) ce qui conduit naturellement à vouloir les utiliser. Cette considération élimine immédiatement la solution (i). Par ailleurs, les problèmes de convexité évoqués en section 4.3.3, la nature *mal posée* du problème d'optimisation (voir section 1.2.2), et la présence éventuelle de mouvements de corps rigide conduisent à formuler la fonction objectif selon l'approche (iii). Le lecteur pourra se reporter à la discussion présentée en section 1.3.4 pour de plus amples détails.

Remarque : On pourrait aussi formuler le problème en déformation comme l'on fait [Hendricks 91, Gavrus 96, Lecompte 07a, Cooreman 07]. Cependant, dans la présente étude, nous avons considéré que l'aspect dérivatif de l'obtention des déformations pouvait constituer un problème. En effet, la dérivation numérique de signaux expérimentaux (donc bruités) conduit classiquement à une amplification du bruit. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser la seule information provenant directement de l'expérience : le déplacement.

Historiquement, Cailletaud et Pilvin [Cailletaud 93] ont d'abord proposé en 1993 une formulation du résidu entre mesures et calculs sous forme d'une différence en chaque point de mesure des déplacements numériques et expérimentaux pondérés par un coefficient égal à l'inverse de l'erreur expérimentale correspondante. Ce résidu noté r s'exprime alors comme suit :

$$r_i(\underline{x}) = \frac{u_i^{EF}(\underline{x}) - u_i^{exp}}{E_i}, \quad (4.10)$$

où E est le vecteur des erreurs expérimentales associées à chaque point de mesure. Cette formulation est largement partagée mais des différences existent dans la définition (ou l'évaluation) du vecteur E . En effet, Gavrus et al. [Gavrus 96] ont proposé en 1996 de définir E comme suit :

$$E_i = \begin{cases} \sqrt{\sum_{j=1}^n (u_j^{exp})^2} & \text{si les erreurs expérimentales sont constantes.} \\ u_i^{exp} & \text{si les erreurs sont proportionnelles à } u_i^{exp}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Dans ce cas le vecteur \underline{E} ne représente plus les erreurs expérimentales mais un pondérateur. Certains auteurs tels que Ghouati et Gélin [Ghouati 98, Ghouati 01], Mahnken [Mahnken 97] ou encore Meuwissen [Meuwissen 98a, Meuwissen 98b] proposent d'écrire le vecteur $\underline{E} = E$ comme un scalaire constant considérant ainsi que l'erreur expérimentale est identique en tout point de mesure. Le scalaire E est alors utilisé non pas pour décrire l'erreur expérimentale (qui est constante donc sans influence sur la convexité de la fonction objectif) mais comme un pondérateur

permettant de formuler une fonction objectif adimensionnelle. Sous cette hypothèse, le résidu r est basé sur *l'écart absolu* entre le champ de déplacement mesuré et celui calculé numériquement.

A contrario, d'autres auteurs tels que A. Gavrus *et al.* [Gavrus 96], ou encore J-P. Kleiner-mann [Kleinermann 00] proposent de considérer une erreur expérimentale proportionnelle à la valeur absolue de la grandeur mesurée. Il s'agit là d'une formulation du résidu en *écart relatif* qui permet de donner un poids égal dans la fonction objectif à chaque point de mesure.

Cependant, la méthode de mesure de champ par corrélation d'images utilisée dans ce travail conduit à une erreur proportionnelle à la déformation et non au déplacement. Nous retiendrons donc une formulation en *erreur absolue* de la fonction objectif. Par ailleurs, l'une des difficultés de l'approche en force et déplacement réside dans la nécessité de normer chaque réponse afin que les ordres de grandeur de chaque type de réponses (déplacement de l'ordre de 1 μm et force de l'ordre de 1 kN) soient comparables. Difficulté encore accrue lorsque, par exemple, les déplacements viennent à s'annuler. Il a donc été choisi de formuler le résidu en normant la différence des réponses numériques et expérimentales par la valeur maximale du déplacement ou de l'effort au pas de temps considéré. Dans le cas d'un essai plan (section 2.3), une formulation de la fonction objectif est donc :

$$f(\underline{x}) = \left[\sum_{i,j,k=1}^{N_e, N_t, N_r} \left[\left(\frac{u_{x,jk}^{EF}(\underline{x}) - u_{x,jk}^{exp}}{\max_{j,k}(u_x^{exp})} \right)^2 + \left(\frac{u_{y,jk}^{EF}(\underline{x}) - u_{y,jk}^{exp}}{\max_{j,k}(u_y^{exp})} \right)^2 + N_r \left(\frac{F_j^{EF}(\underline{x}) - F_j^{exp}}{\max_j(F^{exp})} \right)^2 \right]_i \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.12)$$

où N_r est le nombre de points de mesure du déplacement, N_t le nombre de pas de temps, et N_e est le nombre d'essais considérés. En effet le processus d'optimisation peut-être conduit sur une série de plusieurs essais.

4.4.3 Formulation en température

Dans le cas d'un problème thermique, l'expérience ne fournit qu'une seule information : le champ de température. On pourrait néanmoins calculer les sources de chaleurs w'_{ch} à partir de cette information [Louche 99, Doudart 10, Renault 10] et ainsi formuler la fonction objectif en puissance ou énergie ce qui pourrait en améliorer la convexité. Cependant, les traitements numériques nécessaires à cette opération sont de nature à brouter l'information expérimentale (dérivée première dans le temps et seconde dans l'espace). C'est pour cette raison, et en accord avec plusieurs travaux comme [Telejko 04] et [Liu 05], qu'une formulation de la fonction objectif en température a été préférée. On a ainsi :

$$f(\underline{x}) = \left[\sum_{i,j,k=1}^{N_e, N_t, N_r} \left(\frac{\theta_{jk}^{EF}(\underline{x}) - \theta_{jk}^{exp}}{\theta_j^{exp}} \right)^2 \right]_i^{\frac{1}{2}}, \quad (4.13)$$

où $\theta = T - T_0$ avec T_0 la température de référence et θ_j^{exp} est la température moyenne sur un pas de temps. De plus, comme dans le cas mécanique, N_r est le nombre de points de mesure de la température, N_t le nombre de pas de temps, et N_e est le nombre d'essais considérés.

4.5 Méthode d'optimisation envisagée

Les méthodes d'optimisation d'ordre 0 tels que l'algorithme bien connu du simplexe [Nelder 65, Khalfallah 02] ou les algorithmes génétiques [Holland 75, Bruno 08] se montrent, en pratique, insuffisantes lorsque le nombre de paramètres à optimiser augmente. De plus, le temps de calcul lié à l'emploi de ces méthodes explose lorsque le nombre de paramètres devient supérieur à 2 ou 3. Dans ce cas de figure, le meilleur moyen d'assurer la convergence ainsi que de minimiser le temps de calcul consiste à employer des méthodes d'ordre 1, c'est-à-dire des méthodes nécessitant le calcul de la dérivée des réponses numériques (par exemple \underline{u}^{EF}) en fonction de chaque paramètre. En pratique, de nombreuses méthodes permettent de résoudre des problèmes de moindres carrés non-linéaires. Une revue détaillée ainsi que des comparaisons dans le domaine de l'identification paramétrique sont disponibles dans les travaux de J-P. Kleinermann [Kleinermann 00] ainsi que ceux de I. Gresovnik [Gresovnik 00].

4.5.1 Méthode de Gauss-Newton

Cette première méthode, généralement considérée comme simple et efficace, permet par itérations successives d'atteindre l'optimum de la fonction objectif considérée. La résolution du système non-linéaire est réalisée par des approximations linéaires locales qui sont répétées itérativement sur tout le domaine de définition de la fonction objectif. Si celle-ci est de type moindres carrés, on parlera de méthode de Gauss-Newton, dans le cas contraire on parle de méthode de Newton-Raphson.

Considérons tout d'abord la condition nécessaire d'optimalité (Eq. 4.6) ainsi que la définition de notre fonction objectif :

$$\nabla f(\underline{x}^*) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{2} \left\| \underbrace{\underline{m}^{EF}(\underline{x}) - \underline{m}^{exp}}_{r(\underline{x})} \right\|_2^2, \quad (4.14)$$

où l'on notera p le nombre d'éléments de \underline{x} , c'est-à-dire le nombre de paramètres à optimiser. Par ailleurs, on notera que le vecteur \underline{m} est constitué de toutes les réponses matérielles considérées (dont le nombre sera noté n) c'est-à-dire que dans le cas de la fonction objectif 2D (4.12) on a par exemple :

$$\underline{m}^{exp} = \begin{pmatrix} \underline{u}_x^{exp} / \max(\underline{u}_x^{exp}) \\ \underline{u}_y^{exp} / \max(\underline{u}_y^{exp}) \\ F^{exp} / \max(F^{exp}) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Malheureusement, la résolution directe d'un tel problème est rendue impossible par la surdétermination du système linéaire découlant de la condition d'optimalité (Eq. 4.14) [Kleinermann 00]. En effet, dans la pratique, le nombre de points de mesure est généralement très supérieur au nombre de paramètres à identifier ($n \gg p$). Dès lors, la nécessité d'une résolution itérative impose de développer explicitement la condition d'optimalité. Dans le cas d'une norme Euclidienne, on calcule aisément le gradient de cette condition d'optimalité, ce qui permet de la réécrire sous la forme suivante :

$$\nabla f(\underline{x}^*) = \underline{J}(\underline{x}^*)^T r(\underline{x}^*) = 0, \quad (4.16)$$

où \underline{J} est la matrice jacobienne contenant les dérivées partielles de chaque point de mesure par rapport à chaque paramètre. Ses composantes sont données par :

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i(\underline{x}^{(k)})}{\partial x_j} = \frac{\partial(m_i^{exp} - m_i^{EF}(\underline{x}^{(k)}))}{\partial x_j} = \frac{\partial m_i^{EF}(\underline{x}^{(k)})}{\partial x_j}. \quad (4.17)$$

De plus, si l'on considère le développement de Taylor au premier ordre de chacune des composantes de $m_i^{EF}(\underline{x}^{(k)} + \Delta \underline{x})$ autour de $\underline{x}^{(k)}$ qui est la valeur du vecteur paramètres à une itération k quelconque, on peut écrire :

$$m_i^{EF}(\underline{x}^{(k)} + \Delta \underline{x}) = m_i^{EF}(\underline{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial m_i^{EF}(\underline{x}^{(k)})}{\partial \underline{x}_j} (\underline{x}_j^{(k+1)} - \underline{x}_j^{(k)}), \quad (4.18)$$

pour i allant de 1 jusqu'au nombre d'éléments dans le vecteur m^{EF} , c'est-à-dire le nombre de points de mesures expérimentales n .

Enfin, en notant que $\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \Delta \underline{x}$, on s'aperçoit que cette expression fournit une relation de récurrence entre le jeu de paramètres à l'instant k et son homologue à l'instant $k + 1$. On peut, de plus, donner une approximation de la solution \underline{x}^* en remplaçant m^{EF} dans la condition d'optimalité (Eq. 4.16) par son expression issue de (Eq. 4.18). On obtient ainsi une expression du processus itératif conduisant à l'actualisation du vecteur de paramètres \underline{x} telle que :

$$\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}}(\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}) = \underline{\underline{J}}^T (m^{EF}(\underline{x}^{(k)}) - m^{exp}). \quad (4.19)$$

L'utilisation de la méthode de Gauss-Newton passe donc par la simple implémentation de cette équation d'actualisation (Eq. 4.19). Par ailleurs, cette méthode s'avère assez peu gourmande en temps de calcul puisque le passage d'une itération k à une iteration $k + 1$ ne nécessite que l'inversion de la matrice carrée symétrique $\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}}$. Cependant, on remarquera que le caractère *mal posé* du problème conduit à une impossibilité d'annuler le résidu : $r(\underline{x}^*) \neq 0$ et que donc la condition nécessaire d'optimalité se réduit à $\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}} = 0$. Par conséquent, lorsque la condition d'optimalité est strictement satisfaite cette matrice est nécessairement nulle, ce qui signifie qu'au voisinage de l'optimum des problèmes de conditionnement de la matrice $\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}}$ peuvent survenir et nuire à son inversion et donc au processus d'actualisation.

4.5.2 Méthode de Levenberg-Marquardt

Comme alternative aux problèmes de conditionnement de la matrice $\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}}$ au voisinage de l'optimum, Levenberg [Levenberg 44] puis Marquardt [Marquardt 63] ont proposé l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange λ_{LM} permettant de stabiliser la méthode. L'équation d'actualisation de Gauss-Newton (Eq. 4.19) devient alors :

$$(\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}} - \lambda_{LM} \mathbb{I})(\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}) = \underline{\underline{J}}^T (m^{EF}(\underline{x}^{(k)}) - m^{exp}). \quad (4.20)$$

On notera qu'en conséquence de cet ajout, la méthode présente deux effets indésirables. Tout d'abord, elle tend à *ralentir* l'actualisation du vecteur paramètres ; *a fortiori* si λ_{LM} est grand. Par ailleurs, cela introduit une erreur sur l'estimation de \underline{x}^* . La difficulté réside donc dans le choix de la valeur à donner au paramètre λ_{LM} . Cependant, comme proposé par Fan [Fan 03], ce paramètre peut évoluer avec le gradient $\underline{\underline{J}}^T$ afin de ne pas *ralentir* inutilement la méthode loin de l'optimum et de ne pas converger vers une approximation trop grossière de l'optimum. Par ailleurs, Fan *et al.* [Fan 09] montrent que le choix de n'importe quelle combinaison linéaire de $\underline{\underline{J}}^T$ assure la conservation de la propriété de convergence quadratique de la méthode. En conséquence, Ma et Jiang [Ma 07] proposent un compromis entre les deux effets indésirables précités et écrivent le paramètre de Levenberg comme suit :

$$\lambda_{LM} = \theta \|r(\underline{x})\| + (1 - \theta) \|\underline{J}^T r(\underline{x})\|. \quad (4.21)$$

Ainsi formulé, l'introduction du paramètre λ_{LM} permet de résoudre le problème de conditionnement de $\underline{J}^T \underline{J}$ sans nuire à la vitesse de convergence, ni à la précision de la méthode. En effet, lorsque la fonction objectif $\|r(\underline{x})\|$ diminue, le paramètre λ_{LM} diminue aussi et lorsque le gradient diminue (risque de divergence), λ_{LM} diminue à nouveau. On notera de plus que si le problème est bien posé et que la fonction objectif connaît effectivement un zéro en \underline{x}^* alors le paramètre de Levenberg tend vers zero en \underline{x}^* , c'est-à-dire que dans ce cas, la méthode de Levenberg-Marquardt n'introduit strictement aucune erreur dans l'estimation de l'optimum.

4.5.3 Etude de sensibilité

La méthode de Levenberg-Marquardt est une méthode d'ordre 1, qui requiert à ce titre un calcul des termes de la matrice Jacobienne (aussi appelée *matrice de sensibilité*). La littérature propose plusieurs approches afin de mener ce calcul à bien. Rappelons tout d'abord la forme de la matrice Jacobienne dans le présent formalisme :

$$J(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial r_1(\underline{x})}{\partial x_p} \\ \frac{\partial r_2(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial r_2(\underline{x})}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_n(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial r_n(\underline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial r_n(\underline{x})}{\partial x_p} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

où p est toujours le nombre de paramètres à optimiser et n le nombre total de réponses matérielles. Chacune des dérivées partielles de la matrice de sensibilité doit donc être évaluée. Deux types d'approches largement utilisées permettent d'effectuer ce calcul : le calcul par différences finies et les approches analytiques.

4.5.3.1 Sensibilité par différence finie

Cette approche est la plus ancienne et la plus couramment utilisée en calcul numérique car elle est simple et rapide à implémenter [Hendricks 91, Meuwissen 98b, Lecompte 07a, Sasso 08]. En effet le calcul est basé sur l'approximation de Taylor au premier ordre du résidu au voisinage de la valeur actuelle d'un élément $x_k \in \underline{x}$. Chaque paramètre x_k est perturbé positivement puis négativement afin d'obtenir les résidus de ces deux configurations perturbées. La dérivée partielle du résidu par rapport à x_k s'exprime alors sous la forme :

$$J_{i,k} = \frac{\partial r_i(\underline{x})}{\partial x_k} = \frac{r_i(\underline{x} + \Delta x_k) - r_i(\underline{x} - \Delta x_k)}{2\Delta x_k} + \mathcal{O}(\Delta x_k). \quad (4.23)$$

Cependant, un des principaux inconvénients découlant d'une telle expression de la sensibilité est l'augmentation rapide du temps de calcul. En effet, la nécessité de résoudre 2 fois le problème direct pour chaque composante de \underline{x} augmente considérablement les calculs puisque $2p+1$ calculs Éléments Finis sont nécessaires à chaque itération. C'est pourquoi d'autres schémas de dérivation numérique par différences finies ont été préférés dans cette étude. En effet, les schémas dit *avant* et *arrière* [Nougier 93] qui s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} J_{i,k} &= \frac{\partial r_i(\underline{x})}{\partial x_k} = \frac{r_i(\underline{x} + \Delta x_k) - r_i(\underline{x})}{\Delta x_k} + \mathcal{O}(\Delta x_k) \\ J_{i,k} &= \frac{\partial r_i(\underline{x})}{\partial x_k} = \frac{r_i(\underline{x}) - r_i(\underline{x} - \Delta x_k)}{\Delta x_k} + \mathcal{O}(\Delta x_k), \end{aligned} \quad (4.24)$$

permettent de ramener le nombre de calculs EF à $p + 1$ puisqu'une seule configuration perturbée est requise pour chaque élément de \underline{x} . Il est toutefois établi que ces deux schémas sont moins précis en particulier si la surface fonctionnelle présente de nombreuses non-linéarités à l'échelle de la perturbation Δx_k . Ce problème pointe un autre inconvénient de l'approche par différences finies : le choix de la valeur à donner au paramètre Δx_k .

Plusieurs travaux s'attachent à étudier l'influence de ce choix [Tortorelli 94a, Lauwagie 05]. En effet, si l'on considère que le résidu obtenu après chaque calcul EF n'est qu'une approximation $r_{app}(\underline{x})$ d'un résidu idéalement exact on peut écrire :

$$r(\underline{x}) = r_{app}(\underline{x}) + \epsilon_{app}(\underline{x}), \quad (4.25)$$

où $\epsilon_{app}(\underline{x})$ est l'erreur liée à l'approximation par Éléments Finis que l'on nommera *erreur d'arrondi*. On peut donc utiliser cette considération pour réexprimer — par exemple — l'expression du schéma de dérivation arrière (Eq. 4.24) comme suit :

$$J_k = \frac{\partial r(\underline{x})}{\partial x_k} = \underbrace{\frac{r_{app}(\underline{x}) - r_{app}(\underline{x} - \Delta x_k)}{\Delta x_k}}_{\text{Coefficient de sensibilité}} + \underbrace{\frac{\epsilon_{app}(\underline{x}) - \epsilon_{app}(\underline{x} - \Delta x_k)}{\Delta x_k}}_{\text{Erreur d'arrondi}} + \underbrace{\mathcal{O}(\Delta x_k)}_{\text{Erreur de troncature}}. \quad (4.26)$$

Le choix de la valeur de la perturbation résulte donc d'un compromis entre deux erreurs contradictoires. En effet, l'erreur de troncature tend à diminuer pour des valeurs faibles de Δx_k alors que l'erreur d'arrondi tend à augmenter avec la valeur de Δx_k . Il est donc d'usage [Kleinermann 00, Lecompte 07a] de prendre des valeurs relatives de la perturbation, c'est-à-dire que $\Delta x_k = \delta_k \cdot x_k$. La perturbation agit donc comme un pourcentage de la valeur à perturber. Sous cette forme, il devient possible d'étudier l'influence de δ_k sur la valeur du coefficient de sensibilité. De telles études sont détaillées dans [Tortorelli 94a] ainsi que dans [Lauwagie 05]. On peut par exemple tracer (Fig. 4.3) la valeur du coefficient de sensibilité en fonction de l'amplitude de la perturbation relative δ_k .

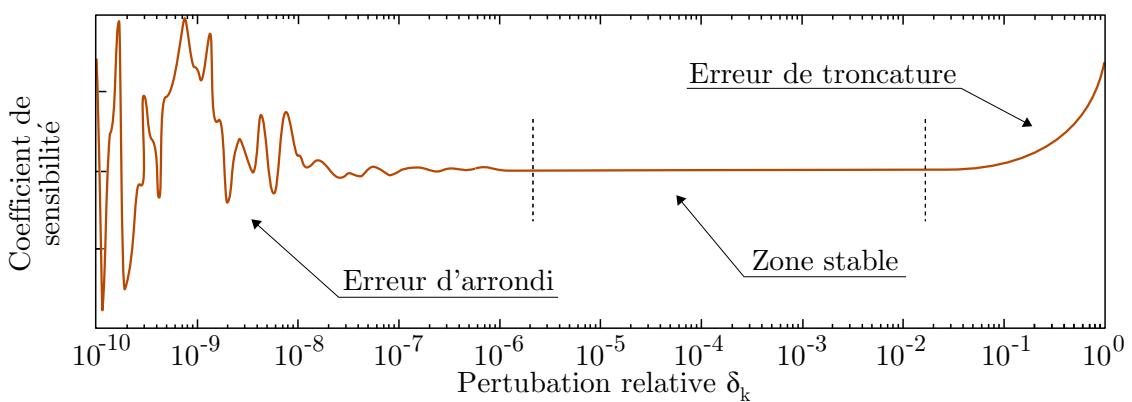


FIG. 4.3 – *Influence de l'erreur d'arrondi et de troncature sur les coefficients de sensibilité en fonction de l'amplitude de la perturbation relative [Lauwagie 05].*

Dans le présent travail, la valeur de la perturbation relative δ_k a été fixée à 1×10^{-2} . Par ailleurs, des essais ont été menés avec des valeurs plus faibles (de 10^{-3} à 10^{-5}) afin de valider ce choix. Il a été constaté que dans la gamme $[10^{-5}; 10^{-2}]$ l'amplitude de la perturbation relative n'a pas d'influence sur l'actualisation des paramètres.

4.5.3.2 Sensibilité analytique

Étant donné les deux inconvénients majeurs liés au calcul des sensibilités par différences finies et les difficultés à y remédier, plusieurs études [Tortorelli 94a, Tortorelli 94b] se sont attaché à calculer analytiquement ces sensibilités dans le cas de nombreux modèles de comportements (élastique, thermoélastique couplé, elastoplastique, etc.).

La première approche analytique nommée *différenciation directe* postule la formulation du résidu en déformation et propose de calculer analytiquement le résidu perturbé via la connaissance des paramètres de la relation contrainte/déformation ainsi que de la matrice de rigidité du problème EF. Cette approche est très utilisée dans les problèmes linéaires puisque, dans ce cas particulier, le calcul analytique est trivial et conduit sans difficulté à une expression analytique des coefficients de sensibilité [Gelin 95, Gavrus 96, Lecompte 07a, Lecompte 07b]. Dans les cas non-linéaires, cette approche conduit à une procédure itérative d'obtention des sensibilités [Gelin 98, Gresovnik 00, Cooremann 07].

Une autre approche appelée *méthode adjointe* est basée sur un résidu généralement formulé en déplacement [Kleinermann 00, Ponthod 06]. Cette approche propose de calculer itérativement les sensibilités en perturbant tour à tour chaque paramètre de la loi de comportement puis en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson afin de retrouver le déplacement perturbé u_{pert} satisfaisant l'équilibre statique du problème EF. Le résidu en déplacement perturbé est alors calculé via un résidu formulé en efforts intérieurs. Le lecteur pourra se reporter à [Tortorelli 94a] pour de plus amples détails.

Cependant ces deux approches postulent la donnée de la matrice de rigidité du problème EF, ce qui en pratique peut s'avérer problématique. En effet, outre le volume de stockage numérique nécessaire dans le cas de modèles EF complexes, de nombreux codes de calculs commerciaux (tel ABAQUS) n'offrent pas à l'utilisateur la sortie de telles grandeurs. C'est la raison pour laquelle une approche par différences finies (bien que moyennement satisfaisante) a été retenue dans ce travail.

4.5.4 Critère de convergence

Le processus itératif tel qu'il est défini ci-dessus conduit à la minimisation de la fonction objectif. Il faut cependant définir un critère de convergence permettant de stopper le processus d'actualisation lorsque le vecteur paramètres \underline{x} approche de la quasi solution \underline{x}^* . Ce critère permet simplement d'éviter la répétition inutile d'actualisation du jeu de paramètres au voisinage de l'optimum \underline{x}^* . En effet, la convexité de la fonction objectif implique la décroissance asymptotique du vecteur d'actualisation $\Delta \underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}$ en fonction du nombre d'itérations. L'approche asymptotique d'une solution pose un problème évident de temps de calcul qu'il convient pourtant de limiter. Ainsi, il est indispensable d'introduire un critère de convergence [Hendricks 91, Meuwissen 98a, Lecompte 07a].

Dans le cas présent, nous avons choisi d'exprimer le critère de convergence sous forme d'une condition nécessaire portant sur l'amplitude maximale de l'actualisation. Cette condition peut s'exprimer par le théorème suivant :

Theorème : 4.5.1 Si on vérifie que $|\Delta x_i^{(n)}| < |x_i^{(n-1)}| / 100 \quad \forall x_i \in \underline{x}^{(n-1)}$ alors la solution du problème d'optimisation (P_X) est atteinte et $\underline{x}^* = \underline{x}^{(n)}$.

Cette condition, peut s'expliciter par l'arrêt de la méthode si l'actualisation maximale des paramètres est inférieure à 1% de leur valeur précédente respective. Cette condition assure que l'erreur commise par l'algorithme d'optimisation sur l'évaluation des paramètres est inférieure à 1% de sa valeur finale.

4.5.5 Robustesse du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation, tel qu'il est formulé dans ce travail, ne permet pas de conclure quant à la convexité de la fonction objectif. En effet, aucune expression analytique n'est disponible et aucune restriction du domaine de définition de la fonctionnelle ne permet de s'assurer de l'inexistence de minima locaux. L'approche retenue pour s'assurer de la robustesse de la méthode de Levenberg-Marquardt dans l'application présente est donc de choisir un ensemble de points de départ (jeux de paramètres initiaux) très éloignés et encadrant les ordres de grandeur présumés des paramètres à identifier et de s'assurer que tous les trajets d'optimisation aboutissent au même résultat.

Ce travail a été réalisé dans le cas d'éprouvettes entaillées du matériau T40-0.5mm (voir section 5.3.2). Les points de départ du processus d'optimisation ont été choisis dans le plan des 2 paramètres d'une loi de Ludwick (K et n) en vérifiant que les points d'arrivée obtenus définissent le même modèle matériau (*i.e.* tous les paramètres du modèle sont identiques). Comme le montrent les résultats du Tableau 4.1, quel que soit le point de départ choisi dans l'espace (K,n), les solutions convergent dans un voisinage très restreint.

TAB. 4.1 – Valeurs des jeux de paramètres avant et après optimisation.

Jeu de paramètres		K	n	F	G	H	N
Jeu n°1	départ	110	0.2	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	279	0.50	0.16	0.18	0.82	2.0
Jeu n°2	départ	110	0.5	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	279	0.49	0.16	0.18	0.82	2.0
Jeu n°3	départ	110	0.8	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	277	0.50	0.16	0.18	0.82	2.0
Jeu n°4	départ	280	0.2	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	280	0.50	0.16	0.18	0.82	2.0
Jeu n°5	départ	280	0.5	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	282	0.50	0.16	0.18	0.82	2.0
Jeu n°6	départ	280	0.8	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	277	0.48	0.17	0.18	0.81	2.0
Jeu n°7	départ	450	0.2	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	280	0.50	0.16	0.18	0.82	2.0
Jeu n°8	départ	450	0.5	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	281	0.49	0.17	0.18	0.82	2.0
Jeu n°9	départ	450	0.8	1.5	1.5	1.5	3
	arrivée	277	0.49	0.16	0.17	0.83	2.0

Par ailleurs, les trajets d'optimisation pour les 9 cas retenus dans le plan (K,n) ont été tracés sur la Figure 4.4. On remarque alors que l'ensemble des points d'arrivée appartient à un

domaine extrêmement restreint et que quel que soit le point de départ, la méthode converge invariablement vers un minimum que l'on peut alors considérer comme global. Dès lors, le seul paramètre dépendant du point de départ est le nombre de pas d'optimisation. A titre indicatif, la valeur de la fonction objectif a été évaluée en 220 points de l'espace d'étude pour une valeur des paramètres d'anisotropie donnée. Cette surface fonctionnelle est reportée en arrière plan de la Figure 4.4.

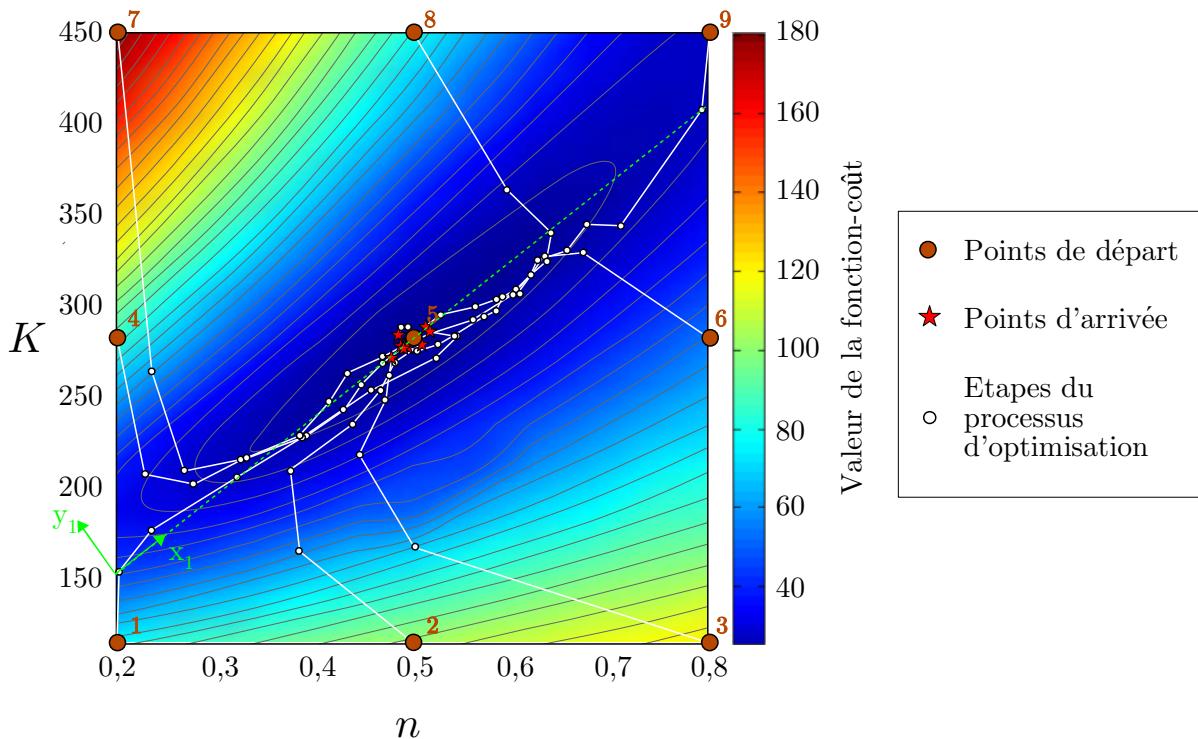
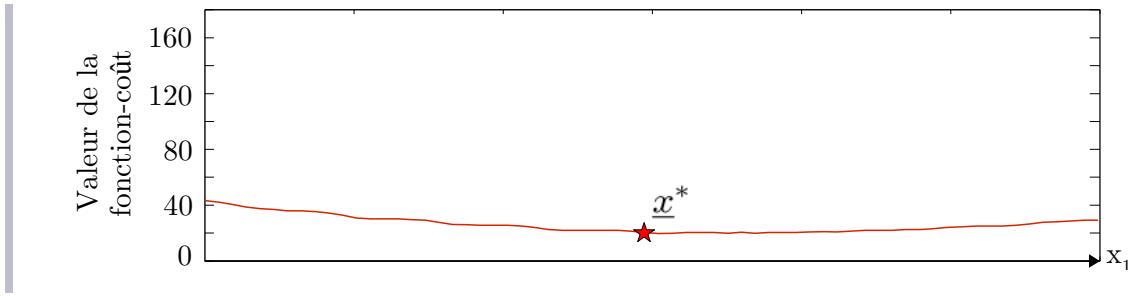


FIG. 4.4 – *Trajets de convergence de la méthode d'optimisation avec plusieurs points de départ. Représentation dans une restriction du domaine de définition à deux paramètres de la loi de Ludwick : K et n .*

Remarque : L'arrière plan de la Figure 4.4 ainsi que les jeux de paramètres identifiés dans le Tableau 4.1 confirment la convexité de la fonctionnelle, néanmoins on remarque que le produit $K \times n$ (pour $250 < K < 350$ et $0.45 < n < 0.55$) donne une valeur de la fonction objectif quasi constante. En d'autres termes, la convexité de la fonction objectif est faible au voisinage de l'optimum. On peut illustrer ce phénomène en traçant (ci-dessous) l'évolution de cette fonction objectif le long du vecteur x_1 (défini sur la Figure 4.4) et observer un *plateau* de la fonction objectif. Nous verrons plus tard que ce *couplage* est responsable d'une certaine dispersion lors de l'identification des paramètres K et n de la loi d'écrouissage de Ludwick.



D'autres approches, notamment probabilistes [Forestier 04], permettent aussi de s'assurer de la robustesse de la méthode utilisée mais nécessite de postuler une distribution des erreurs expérimentales. Cependant, ces approches sont fastidieuses et n'offrent qu'un majorant de l'erreur sur le jeu de paramètres optimisés en fonction de l'erreur sur la mesure. C'est pourquoi ces approches n'ont pas été retenues. On trouvera au chapitre 5 des essais d'identification avec des valeurs bruitées de la mesure cinématique.

4.6 Conclusion du quatrième chapitre

Ce chapitre présente la formulation du problème d'optimisation liée à la procédure d'identification inverse par FEU-U-F et FEU-T. Les notions de minimisation des problèmes de moindres carrés non-linéaires sont abordées et une procédure de résolution est détaillée. La formulation de la fonction objectif est explicitement présentée ainsi que les différentes procédures permettant d'attribuer des valeurs aux paramètres de la méthode de Levenberg-Marquardt. Par ailleurs, les différentes formes de calculs de sensibilité sont explicitées et le choix du paramètre de perturbation du calcul par différences finies est justifié. Enfin, un essai numérique de robustesse permet de valider les choix. Dès lors, munis de mesures expérimentales, d'un modèle de comportement, et d'une procédure permettant de comparer les champs produits ainsi que d'actualiser le modèle, nous pouvons procéder à l'identification des paramètres matériau par méthode inverse.

5

Résultats des identifications par méthode inverse

Sommaire

5.1	Introduction	87
5.2	Identification par méthode standard	88
5.2.1	Élasticité	88
5.2.2	Plasticité	89
5.3	Identification par méthode inverse : essais plans	90
5.3.1	Modélisation numérique	90
5.3.2	Identification par méthode inverse	92
5.3.3	Validations	95
5.4	Identification par méthode inverse : essais hors-plans	99
5.4.1	Modélisation numérique	99
5.4.2	Elasticité	102
5.4.3	Plasticité	106
5.4.4	Validations	109
5.5	Identification par méthode inverse : essais thermomécaniques	115
5.5.1	Modèles étudiés	115
5.5.2	Présentation de la procédure d'identification	115
5.5.3	Identification du modèle mécanique	116
5.5.4	Bilan énergétique du problème	117
5.5.5	Identification du modèle thermique	120
5.5.6	Validation : sensibilité au bruit	125
5.6	Conclusion du cinquième chapitre	128

5.1 Introduction

L'identification de paramètres élastoplastiques nécessite habituellement l'emploi d'éprouvettes standardisées présentant des champs de déformation homogènes. De telles procédures expérimentales [ISO-6892-1 09] conduisent à l'identification d'un comportement uniaxial du matériau. Dans le cas de matériaux anisotropes, plusieurs tests réalisés suivant différentes directions

de sollicitation sont généralement nécessaires afin d'évaluer l'ensemble du jeu de paramètres.

Dans les cas industriels courants de mise en forme par exemple, le matériau est soumis à des trajets de chargement multiples et diverses. Les modélisations de telles opérations se heurtent actuellement aux différences de comportement observées entre des essais homogènes standardisés et des trajets de déformation complexes. Les méthodes inverses offrent dans ce cas une solution intéressante. En effet, la possibilité d'identifier des jeux de paramètres à partir de champs de déformation fortement hétérogènes ainsi que la réduction du nombre d'essais sont deux avantages notables.

Cette partie traite donc de l'identification des paramètres d'une loi de comportement élastoplastique anisotrope par méthode inverse. Plusieurs géométries d'éprouvettes ont été testées afin de mettre en évidence expérimentalement l'intérêt des champs de déformation hétérogènes. En effet, d'après les travaux du GDR 2519 [Avril 08a] : « *la mise en œuvre de procédures expérimentales plus complexes permet d'obtenir plus d'informations (et d'une fiabilité supérieure) à partir d'un nombre restreint de tests. De plus, une diversité plus importante de jeux de paramètres peut être identifiée, par exemple dans les cas de comportements anisotropes ou hétérogènes* ».

D'un point de vue quantitatif, la procédure expérimentale d'essai hors plan présentée au chapitre 2 sera mise en œuvre afin d'identifier un jeu de paramètres élastoplastiques à partir d'un essai unique. Nous verrons aussi que dans le cas d'essais plans, l'augmentation de l'hétérogénéité des champs de déformation au sein de l'éprouvette peut permettre de diminuer le nombre d'essais nécessaires à l'identification du modèle de comportement.

5.2 Identification par méthode standard

5.2.1 Élasticité

À des fins de comparaison, il est nécessaire d'avoir des valeurs de référence pour les paramètres des modèles matériau utilisés pour décrire le comportement du T40-0.5mm. Les deux modèles élastiques (isotrope et orthotrope) présentés au chapitre 3.4 ont ainsi été identifiés par méthode standard. Dans le cadre de différentes études menées au laboratoire SYMME sur le même matériau¹, des valeurs des paramètres élastiques ont pu être évaluées. C'est pourquoi aucun test supplémentaire n'a été réalisé pour l'identification par méthode standard des paramètres élastiques.

Modèle élastique isotrope : Une identification par méthode standard des paramètres élastiques isotropes du T40-0.5mm a été réalisée en 2008 par F. Toussaint *et al.* [Toussaint 08]. L'étude du comportement du matériau se base sur l'utilisation d'éprouvettes de traction standardisées et d'un extensomètre. Les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 5.1.

TAB. 5.1 – Paramètres du modèle élastique isotrope (T40-0.5mm)

Paramètres	E	ν	$\sigma_y^{0^\circ}$
Valeurs	112 GPa	0.34	394 MPa

où $\sigma_y^{0^\circ}$ représente la limite d'élasticité dans la direction de laminage qui, dans ce modèle, sera considérée identique à celles des autres directions : $\sigma_y = \sigma_y^{0^\circ}$. Cette limite d'élasticité

1. éprouvettes issues de la même plaque que celle utilisée dans cette étude.

est identifiée en utilisant une méthode de type *offset* (voir la norme [ISO-6892-1 09]), où la valeur de l'offset est fixée à 0.2% de déformation.

Modèle élastique orthotrope : Une identification de trois modules d'Young dans trois directions de la tôle métallique a été réalisée par A. Le Port [Le Port 09] pour ce modèle (l'orientation 0° représente la direction de laminage).

TAB. 5.2 – Paramètres du modèle élastique orthotrope (T40-0.5mm)

Paramètres	$E^{0^\circ} = E_1$	E^{45°	$E^{90^\circ} = E_2$	ν_{12}	$\sigma_y^{0^\circ}$
Valeurs	106 GPa	116 GPa	119 GPa	0.34	394 MPa

On rappelle que E_1 et E_2 sont les modules de tension dans les deux premières directions du repère principal d'orthotropie x_1 et x_2 . Enfin le module de tension dans l'épaisseur de la plaque a été choisi arbitrairement égal au module d'Young identifié pour le modèle isotrope tel que $E_3 = 112$ GPa.

5.2.2 Plasticité

Les paramètres d'un modèle plastique anisotrope ont également été identifiés par méthode standard [Toussaint 08]. Les essais sont menés sur des éprouvettes de géométries standardisées et une technique de mesure de champs par corrélation d'images (DIC) est employée afin d'obtenir les champs de déformation. Dès lors, la faible taille de la base extensométrique rend possible l'évaluation locale de la déformation et permet (*via* l'hypothèse de conservation de volume) de mesurer l'épaisseur de l'éprouvette à l'endroit de la striction [Dumoulin 01, G'Sell 02]. Par cette manipulation, la contrainte vraie peut être calculée (sous l'hypothèse d'isorépartition de la contrainte dans la largeur de l'éprouvette) et conduit à l'obtention de courbes contraintes vraies/déformations vraies (Fig. 5.1(a)). L'identification des paramètres K et n de la loi de Ludwick passe alors classiquement par l'utilisation d'une routine d'optimisation afin d'ajuster le modèle à l'expérience [Arnold 02a].

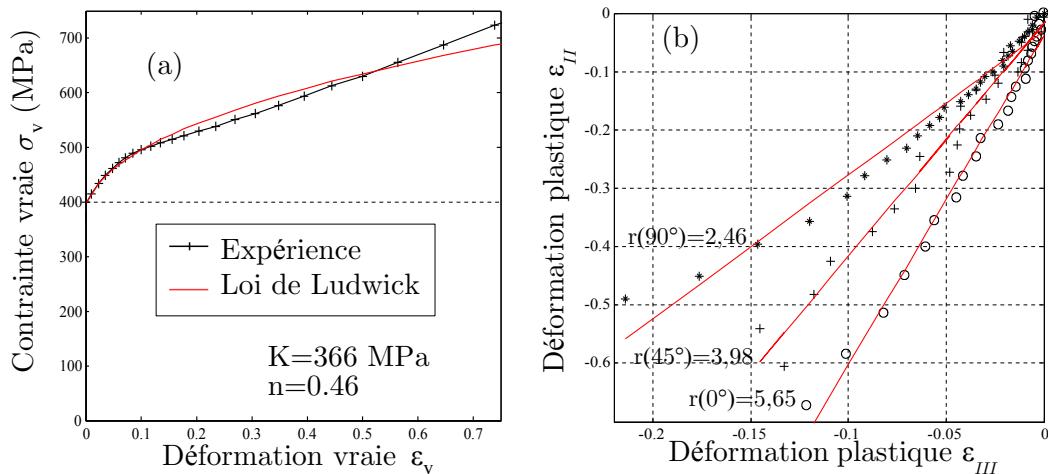


FIG. 5.1 – Identification standard des 5 paramètres matériau de l'étude (a) Paramètres de la loi de Ludwick. (b) Coefficient de Lankford

L'identification des paramètres d'anisotropie du critère de Hill est réalisée à travers les co-

efficients de Lankford [Arnold 02b]. Trois essais sont réalisés à 0° , 45° et 90° par rapport à la direction de laminage. Sous l'hypothèse de contraintes planes, le coefficient suivant la direction θ s'exprime :

$$r_\theta = \frac{d\varepsilon_{III}^p(\theta)}{d\varepsilon_{II}^p(\theta)} = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta)}{F \cdot \sin^2(\theta) + G \cdot \cos^2(\theta)}, \quad (5.1)$$

où θ représente l'angle entre la direction de sollicitation de l'essai et la direction de laminage et F, G, H, N sont les paramètres de Hill présentés dans l'équation (Eq. 3.68). Ce rapport entre la vitesse de déformation transverse et celle dans l'épaisseur représente la pente des déformations mesurées à $0^\circ, 45^\circ$ et 90° dans un repère $(\varepsilon_{III}^p, \varepsilon_{II}^p)$. Les pentes de moindres carrés des trois essais ainsi que les points de mesure sont représentés sur la Figure 5.1(b). Notons que l'utilisation de trois coefficients de Lankford (r_0, r_{45} et r_{90}) pour la détermination de quatre paramètres de Hill ne permet pas que ces paramètres soient indépendants au sens mathématique du terme. Il s'agira donc d'être prudent dans l'interprétation numérique des jeux de paramètres obtenus par méthode inverse. Le Tableau 5.3 rassemble les résultats de l'identification des paramètres plastiques par méthode standard.

TAB. 5.3 – Paramètres plastiques identifiés par méthode standard (T40-0.5mm)

Paramètres	K	n	F	G	H	N
Valeurs	366	0.46	0.30	0.19	0.81	2.2

5.3 Identification par méthode inverse : essais plans

5.3.1 Modélisation numérique

L'identification à partir d'essais plans étant basée sur une approche de type FEU-U-F, il devient nécessaire de construire un modèle EF qui reproduise l'expérience en termes de géométrie et de conditions aux limites. Trois modèles de coques sont donc construits à partir des trois géométries d'essais, standardisée, trouée et de pseudo-cisaillement (Fig. 5.2). La forme et les dimensions des modèles EF dupliquent celles de la zone d'analyse d'image. Cependant, comme le montre la Figure 5.2, cette zone d'analyse d'images ne couvre pas tout à fait les bords libres de l'éprouvette puisque la corrélation d'images est impossible dans ces zones. Néanmoins, les maillages EF qui ont été construit modélisent toute la largeur de l'éprouvette afin que la section modélisée soit égale à la section réelle. Les maillages, associés à des éléments de coques à quatre noeuds [Frey 03], sont constitués de 1458 à 2201 noeuds selon la géométrie considérée.

Les champs de déplacement mesurés par corrélation d'images (U_x^{exp} et U_y^{exp}) sont interpolés bi-linéairement en chaque noeud du maillage (on notera ces champs interpolés sous la forme u_x^{exp} et u_y^{exp}). Cette opération est nécessaire afin de comparer les champs de déplacement numériques et expérimentaux aux mêmes points matériels. On remarquera que du fait des différentes dimensions entre les zones d'analyse par corrélation d'images et les maillages, l'interpolation des mesures est impossible pour certains noeuds du maillage situés près des bords libres. Ces noeuds, où seule une information numérique est disponible, ne seront pas pris en compte dans la formulation de la fonction objectif.

Les conditions aux limites en déplacement qui sont appliquées dans l'analyse EF sont issues de la corrélation d'images. En effet, comme l'illustre la Figure 5.3, les déplacements expérimentaux

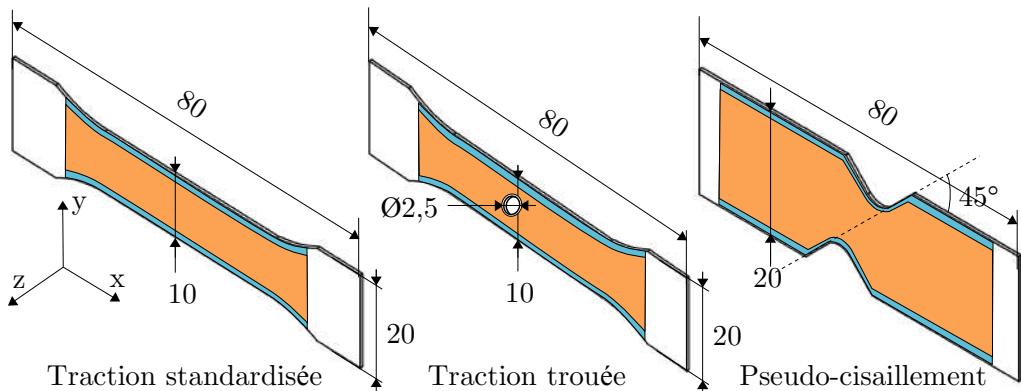


FIG. 5.2 – Géométries planes étudiées. Géométrie réelle de l'éprouvette (blanc), zone analysée par DIC (orange) et zone modélisée sous ABAQUS (orange+bleu). Les dimensions sont données en mm.

mesurés aux frontières non libres de la zone d'analyse sont interpolés aux frontières du modèle EF. Ces déplacements (longitudinaux et transversaux) sont ensuite imposés comme consigne du calcul EF. Là encore, certains noeuds près des bords libres ne disposent pas d'informations expérimentales. Une extrapolation polynomiale est alors réalisée afin que tous les noeuds du bord supérieur et inférieur de l'éprouvette puissent se voir imposer un déplacement.

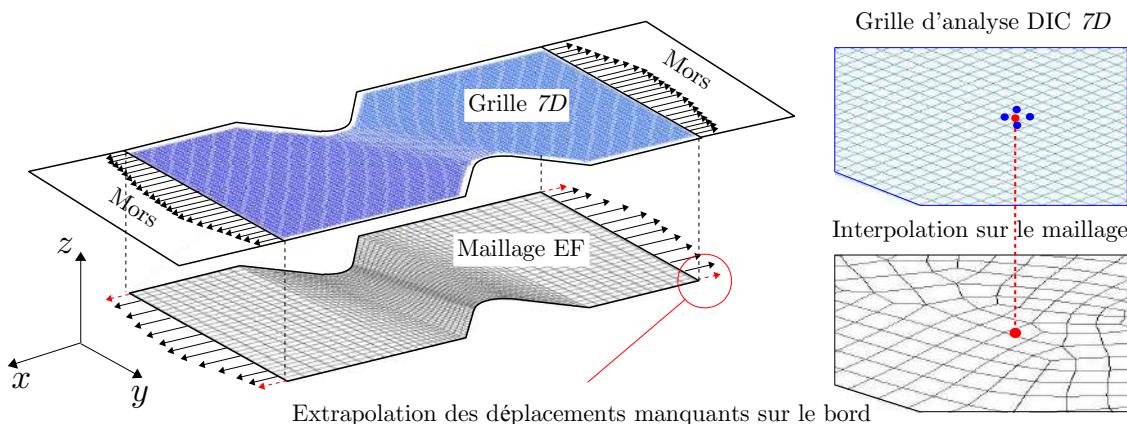


FIG. 5.3 – Modélisation des conditions aux limites des essais plans

Une telle définition des conditions aux limites permet de s'affranchir des mouvements de corps rigides liés aux mors auto-serrant de la machine de traction puisque les déplacements de la frontière inférieure (mors dit fixe) et supérieure (mors dit mobile) sont imposés.

Remarque : La cellule de force de la machine de traction ne peut mesurer que des efforts portés par l'axe \vec{x} . Cependant, notamment dans le cas de géométrie de pseudo-cisaillement, la symétrie par rapport au plan (\vec{x}, \vec{z}) n'est pas assurée et on constate numériquement qu'il existe une composante non nulle de l'effort sur l'axe \vec{y} . Cette composante de l'effort ne pouvant pas être mesurée expérimentalement, elle ne sera pas prise en compte dans l'évaluation de la fonction objectif. On donne à titre indicatif son ordre de grandeur $F_y \approx F_x \times 0.05$.

Dans une moindre mesure, le même constat peut être fait pour les éprouvettes de géométries standardisées et trouées, l'alignement des éprouvettes dans la machine de traction n'étant jamais parfait.

5.3.2 Identification par méthode inverse

Dans cette partie, le modèle plastique anisotrope présenté ci-dessus (section 5.2.2), constitué d'une loi de Ludwick et du critère de Hill, est identifié par méthode inverse à partir d'essais plans. Ce modèle est constitué de deux paramètres d'une loi d'écrouissage de Ludwick (Eq. (3.71)) et des quatre paramètres du critère de Hill exprimé en contraintes planes (Eq. (3.69)). Le modèle élastique est de type linéaire isotrope et les valeurs de ses coefficients sont celles identifiées par méthode standard (voir la section 5.2.1, Tableau 5.1).

Pour chacune des trois géométries planes présentées au chapitre 2, trois essais ont été réalisés avec des orientations à 0° , 45° et 90° par rapport à la direction de laminage. On rappelle ici la définition de la fonction objectif du problème d'optimisation :

$$f(\underline{x}) = \left[\sum_{i,j,k=1}^{N_e, N_t, N_r} \left[\left(\frac{u_{x,jk}^{EF}(\underline{x}) - u_{x,jk}^{exp}}{\max_{j,k}(u_x^{exp})} \right)^2 + \left(\frac{u_{y,jk}^{EF}(\underline{x}) - u_{y,jk}^{exp}}{\max_{j,k}(u_y^{exp})} \right)^2 + N_r \left(\frac{F_j^{EF}(\underline{x}) - F_j^{exp}}{\max_j(F^{exp})} \right)^2 \right]_i^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.2)$$

Trois problèmes d'identification paramétrique sont donc formulés en utilisant cette fonction objectif selon le type de géométrie d'éprouvette utilisé :

Géométrie de traction standardisée (GTS) : Pour cette identification, la base expérimentale est constituée de trois essais à 0° , 45° et 90° ($N_e = 3$). Le nombre de pas de temps considéré est fixé à $N_t = 8$, et le nombre de noeuds est de $N_r = 1458$ (sur une seule épaisseur puisque des éléments de coques sont employés). Par ailleurs, afin de forcer la localisation de la striction à l'endroit observé expérimentalement, un défaut géométrique de 0.05 mm sur la largeur de l'éprouvette a été modélisé.

Géométrie de traction trouée (GTT) : Trois essais à 0° , 45° et 90° ont été utilisés. Le nombre de pas de temps est de $N_t = 8$ et le nombre de noeuds vaut $N_r = 1636$.

Géométrie de pseudo-cisaillement (GPC) : Dans ce cas, deux identifications ont été réalisées : l'une avec une base expérimentale constituée de trois essais (à 0° , 45° et 90°) et l'autre avec seulement deux essais (à 0° et 45°). Nous verrons plus tard que l'hétérogénéité du champ de déformation de cette géométrie d'éprouvette permet de mener à bien l'identification plastique à partir de deux essais seulement. Pour ces identifications, 7 pas de temps sont pris en compte ($N_t = 7$) et le nombre de noeuds est de $N_r = 2201$.

Les valeurs initiales des paramètres de la loi d'écrouissage sont arbitrairement choisies telles que $K = 550$ MPa et $n = 0.3$. Les paramètres de Hill sont eux choisis de manière à modéliser un comportement isotrope du matériau en début d'identification ($F = G = H = 0.5$ et $N = 1.5$). Les résultats de ces quatre identifications sont regroupés dans le Tableau 5.4 et comparés à ceux

obtenus par méthode standard (voir section 5.2.2).

TAB. 5.4 – Paramètres identifiés par méthode inverse

	Identification standard	GTS	GTT	GPC-a	GPC-b
N_s	-	8	5	7	7
N_t	3	3	3	3	2
Orientations	0°-45°-90°	0°-45°-90°	0°-45°-90°	0°-45°-90°	0°-45°
K (MPa)	366.0	350	267	285	281
n	0.46	0.45	0.41	0.50	0.50
F	0.30	0.31	0.21	0.16	0.16
G	0.19	0.10	0.22	0.18	0.20
H	0.81	0.90	0.78	0.82	0.78
N	2.2	0.95	2.0	2.0	2.0
f_{fin}/f_0^1	-	22.0%	11.2%	9.35%	7.37%
CPU ² (en s)	-	3858	5835	9523	5376

¹ Valeur finale de la fonction objectif divisée par sa valeur initiale.

² Micro processeur Intel Core 2 Duo à 2.66 GHz avec 0.98 Go de RAM.

L’analyse du Tableau 5.4 montre une grande déviation du paramètre N dans le jeu GTS. En effet, il s’agit du paramètre de Hill lié à la contrainte de cisaillement σ_{12} , or les essais de traction standardisés ne montrent que peu de déformation en cisaillement. Le peu de poids de cette sollicitation par rapport aux autres rend la sensibilité de ce paramètre faible et son actualisation erratique.

On observe par ailleurs que les jeux de paramètres GPC-a et GPC-b sont similaires malgré la diminution de la base expérimentale. Cela confirme qu’en présence de sollicitations hétérogènes, le nombre d’essais nécessaires à l’identification du modèle peut être diminué sans altérer la qualité du jeu de paramètres obtenu. Dans la suite du document, nous considérerons ces deux jeux de paramètres égaux. Ils seront confondus sous l’appellation de *jeu GPC* dont la valeur sera celle du jeu GPC-a.

Une grande variabilité des paramètres K et n est observée. Ceci peut s’expliquer par le fait que K et n ne sont pas indépendants, c’est-à-dire que la diminution de l’un peut être compensée par l’augmentation de l’autre. En effet, on peut voir sur la Figure 4.4, présentée au chapitre précédent, représentant l’allure de la surface d’optimisation en fonction de K et n (GPC), que la convexité de la fonction objectif est faible au voisinage de l’optimum. En conséquence, il existe une multitude de doublets (K, n) , très différents mais vérifiant la relation $K \times n \approx c^{ste}$, permettant d’approcher le minimum de la fonction objectif (voir remarque page 85).

La Figure 5.4 montre l’évolution de l’effort de réaction entre le début et la fin du processus d’actualisation. On observe que ce processus conduit à une quasi-concordance des réponses expérimentales et numériques en fin d’identification. La Figure 5.5 montre, les champs de déplacement mesurés et calculés pour l’essai à 45° de la géométrie de pseudo-cisaillement au 5^{ème} pas de temps (instant du maximum de l’effort). On observe là encore une bonne prédiction du modèle identifié et une erreur relative comprise entre -5% et +15% sur u_x et -5% et +10% sur u_y . Par ailleurs, on remarquera que la zone de l’éprouvette où la prédiction est la moins bonne se situe au niveau du fond des encoches, zones de plus fortes déformations. Il s’agit aussi des zones

de plus fort gradient de déplacement, c'est-à-dire des zones où l'erreur de recalage des champs numériques sur les champs expérimentaux à le plus d'influences (voir l'[Annexe D](#)).

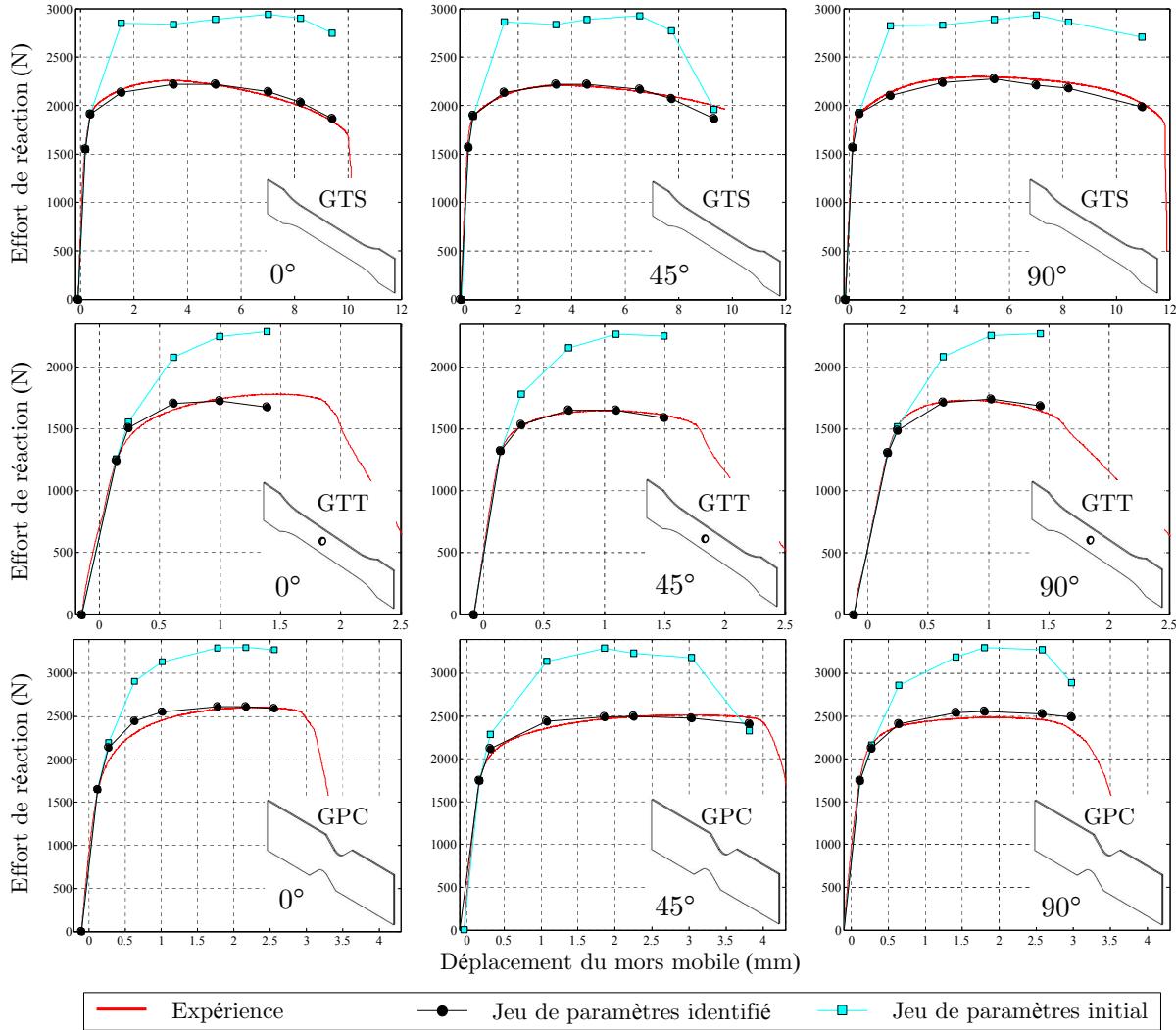


FIG. 5.4 – Courbes force/déplacement avant et après identification par méthode inverse pour les trois essais plans et réponses expérimentales.

Au terme de cette identification, il convient de juger de la pertinence des jeux de paramètres obtenus. Bien que le critère d'arrêt du processus d'optimisation porte sur l'annulation (ou *quasi-annulation*) des coefficients de sensibilité de chacun des paramètres, ce qui nous assure d'avoir atteint un *minimum local*, les problèmes de convexité de la fonction objectif au voisinage de l'optimum rendent ce critère insuffisant pour juger, qualitativement, les jeux de paramètres identifiés. On peut, de plus, supposer que la faible *réolution* du modèle matériau utilisé conduit à ne pas tenir compte de tous les comportements. La section suivante propose et met en œuvre plusieurs méthodes permettant d'évaluer les trois jeux de paramètres identifiés.

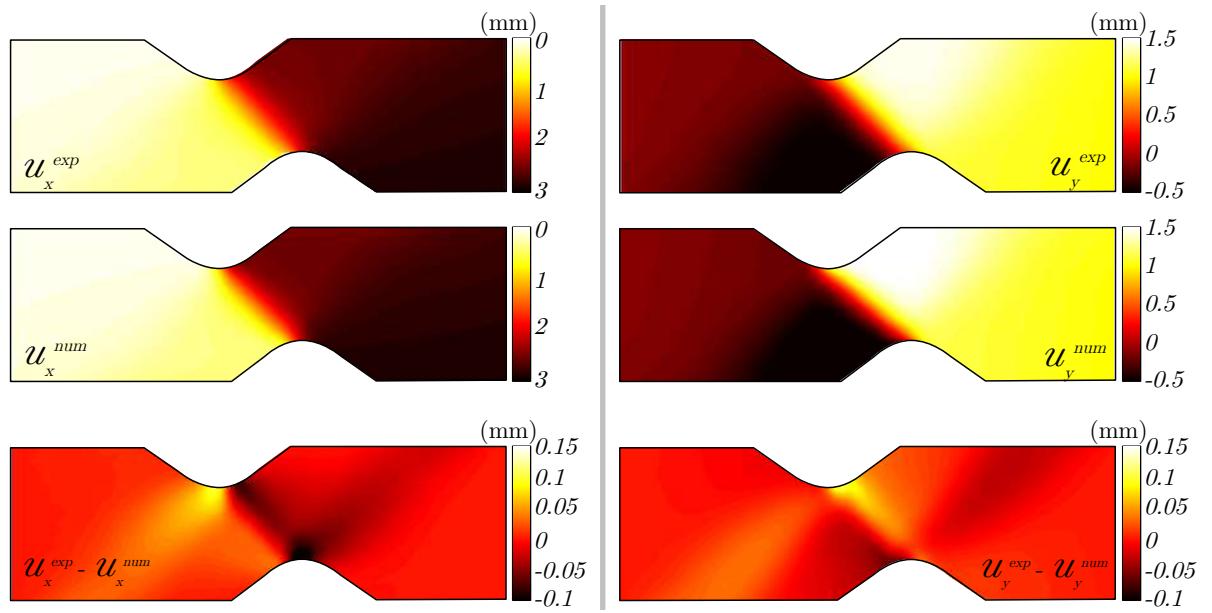


FIG. 5.5 – Champs de déplacement numérique et expérimentaux U_x et U_y après identification et résidus. Essai réalisé à 45° , 5^{ème} pas de temps (instant du maximum de l’effort).

5.3.3 Validations

5.3.3.1 Validation par comparaison

La première approche pour évaluer la qualité des jeux de paramètres obtenus consiste à les utiliser afin de prédire les comportements d’autres essais. On peut par exemple utiliser le jeu identifié à partir des essais standardisés afin de prédire numériquement l’effort et les champs de déplacement des essais de traction trouée. Ainsi un calcul EF a été mené pour les quatre jeux de paramètres identifiés jusqu’alors (un par méthode standard et trois par méthode inverse) pour les trois essais (0° , 45° et 90°) des trois géométries (GTS, GTT, GPC). Les 12 valeurs de fonctions objectif pour ces jeux de paramètres et pour les trois types d’essais menés sont regroupées dans le Tableau 5.5. On notera que, conformément à l’équation (4.12), chaque valeur de ce tableau représente la somme des fonctions objectif des trois essais à 0° , 45° et 90° de chaque géométrie. De plus la Figure 5.6 montre les courbes force/déplacement pour les 36 calculs EF.

TAB. 5.5 – Valeurs de la fonction objectif selon le type d’essai et le jeu de paramètres utilisé.

Jeu de paramètres	Type d’essais		
	Traction standardisée	Traction trouée	Pseudo-cisaillement
Méthode standard	30	32	39
Traction standardisée	21	103	126
Traction trouée	67	18	28
Pseudo-cisaillement	49	19	25

[-] Jeu de paramètres le plus efficace. [■] Second jeu de paramètres le plus efficace.

Le jeu identifié sur la base d’essais de traction standardisée est certes pertinent lorsqu’il s’agit de prédire un comportement de traction simple mais devient très inefficace lorsque les sollicitations se complexifient (traction trouée et pseudo-cisaillement en l’occurrence). Le jeu de

paramètres GPC, identifié à partir d'essais de pseudo-cisaillement, est celui qui globalement prédit le mieux le comportement du matériau dans les trois cas de figures. En effet, même si le jeu identifié par méthode standard est le second plus efficace en traction standardisée, la qualité de ses prédictions décroît lorsque les champs de déformation sont plus hétérogènes.

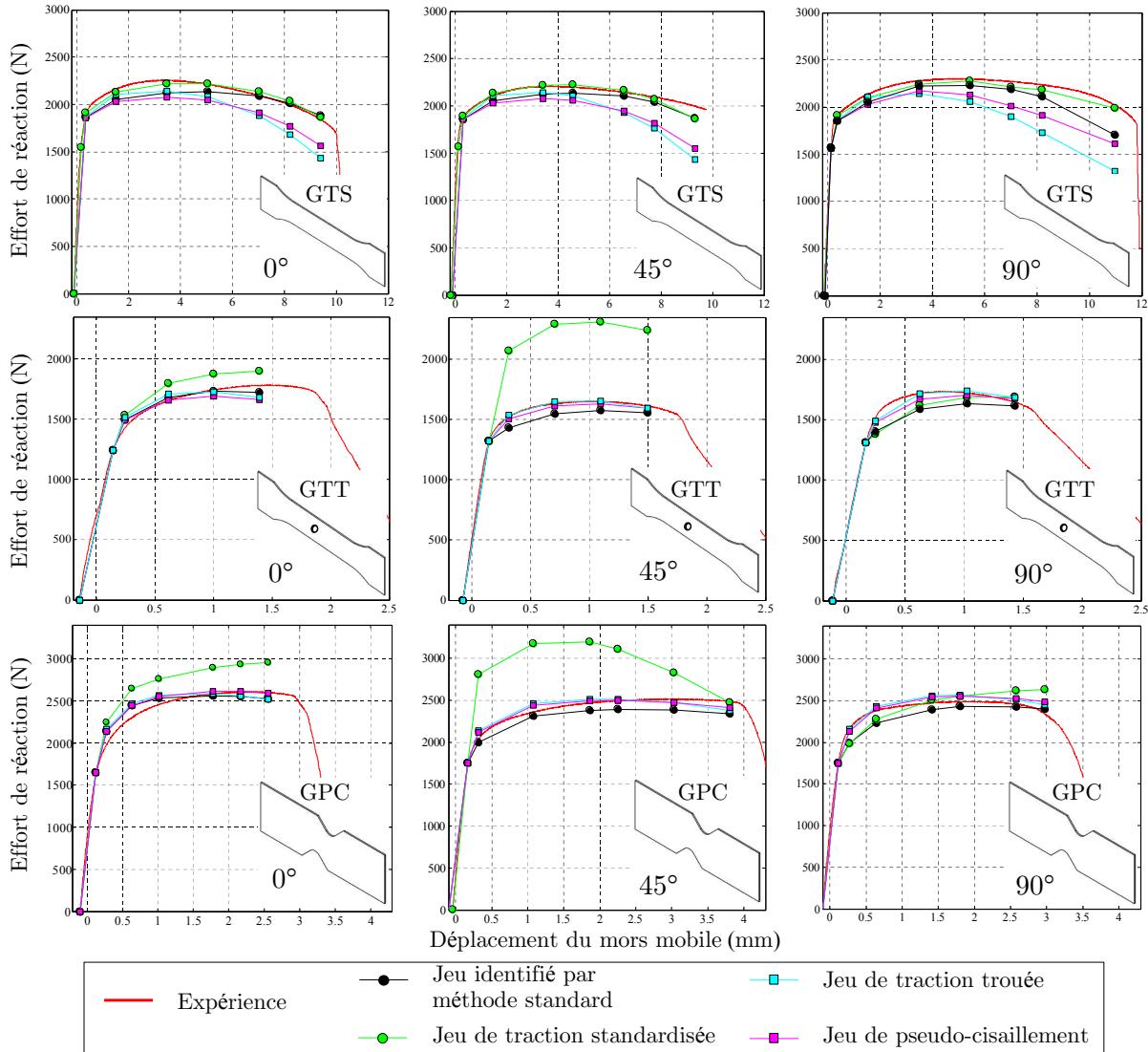


FIG. 5.6 – Comparaison entre les efforts prédis par les 4 jeux de paramètres identifiés avec les efforts expérimentaux pour les 3 géométries d'éprouvettes.

L'ensemble de ces constatations met en avant l'utilité des essais présentant des hétérogénéités de champ de déformation pour procéder à l'identification de lois de comportement. Cette validation pointe aussi la grande variabilité des jeux de paramètres en fonction de l'hétérogénéité du champ de déformation ayant servi à leur identification. Soulignons toutefois que la performance du jeu GPC lorsqu'il s'agit de prédire un comportement en traction pure, montre les limites de cet essai (GPC). En effet, cette géométrie conduit surtout à des déformations composées traction-cisaillement et peu de comportement en traction pure.

5.3.3.2 Comparaison à un essai d'emboutissage

Dans une seconde approche, les jeux de paramètres identifiés ont été utilisés afin de prédire le comportement du matériau lors d'une opération d'emboutissage. Le dispositif vise à mettre en forme un godet dont la géométrie est présentée sur la Figure 5.7(b). L'outil (Fig. 5.7(a)) est constitué d'une matrice, d'un poinçon et d'un serre-flan, tous trois montés sur un bloc à colonnes. La Figure 5.7(b) présente une photographie de la pièce emboutie mettant en évidence des *cornes d'anisotropie*. Ce phénomène découle directement du comportement anisotrope du matériau et peut, dans notre cas, être relié aux paramètres du critère de Hill (F , G , H , et N). Dans cette section, nous allons chercher à comparer ce profil d'anisotropie avec les résultats de simulations numériques menées avec les différents jeux de paramètres identifiés.

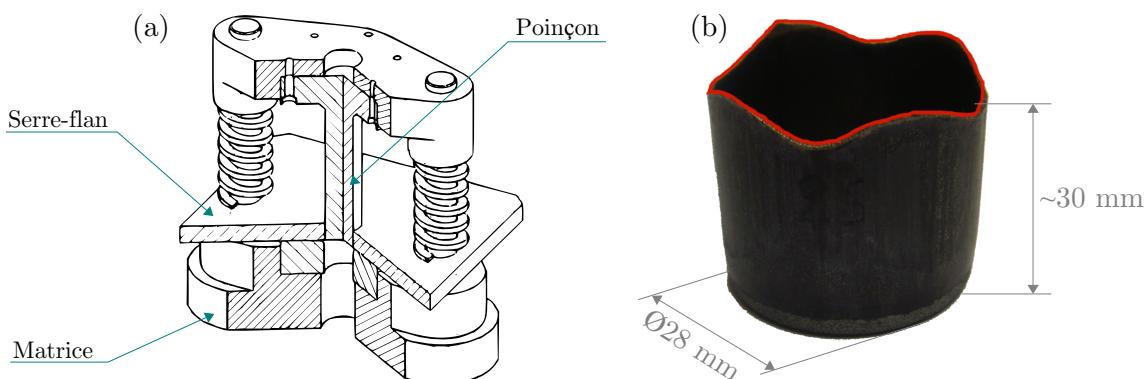


FIG. 5.7 – (a) Outilage d'emboutissage de godet. (b) Géométrie des godets emboutis et cornes d'anisotropie

Les profils supérieurs des trois godets emboutis ont été mesurés à l'aide d'une Machine à Mesurer Tri-dimensionnelle (MMT) et constituent la base expérimentale. Les 120 points de mesure sur chacune des trois périphéries supérieures ont été utilisés afin de tracer l'enveloppe des courbes expérimentales (Figure 5.8).

Parallèlement, un modèle numérique de cet essai a été construit au moyen du code ABAQUS. La matrice, le serre-flan et le poinçon sont considérés comme des solides rigides. Le flan est maillé avec des éléments volumiques à 8 noeuds (31377 éléments) répartis sur trois épaisseurs. Les efforts des ressorts sur le serre-flan ont été préalablement mesurés et appliqués dans le modèle EF. Le coefficient de frottement est fixé à 0.25, en accord avec les travaux de A. Le Port *et al.* [Le Port 09]. Il a été vérifié, par ailleurs, que sur une plage de 0.05 à 0.5, ce coefficient de frottement n'affecte que l'effort et pas le profil d'anisotropie.

On peut, de plus, évaluer l'écart de moindres carrés entre les courbes simulées et le profil mesuré moyen. Pour ce faire, on définit l'erreur type e_t (aussi appellée *RMS error* en anglais) comme suit :

$$e_t = \sqrt{\frac{1}{120} \sum_{i=1}^{120} (z_i^{num} - z_i^{exp})^2}, \quad (5.3)$$

où z_i^{num} est l'altitude relative du godet prédit par la simulation numérique au point $i \in [1; 120]$ et z_i^{exp} la moyenne des altitudes relatives mesurées par MMT. On peut dès lors évaluer cette

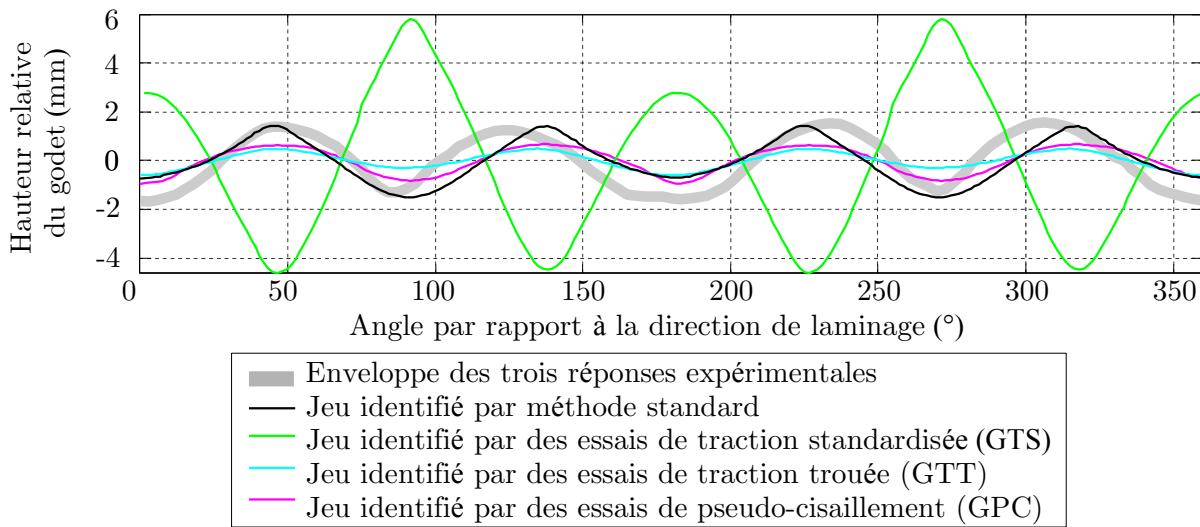


FIG. 5.8 – Profils d'anisotropie mesurés et prédis par les calculs EF avec les jeux de paramètres identifiés.

erreur (Tab. 5.6) pour les quatre jeux de paramètres identifiés (1 par méthode standard et 3 par méthode inverse).

TAB. 5.6 – e_t pour différents jeux de paramètres

Jeu de Paramètres	e_t
Méthode standard	1.18
Traction standardisée	6.78
Traction trouée	1.31
Pseudo cisaillement	1.30

Les résultats présentés sur la Figure 5.8 et dans le Tableau 5.6 montrent que le jeu identifié par méthode standard est le plus à même de prédire le profil d'anisotropie d'un essai d'emboutissage de godet. Cependant, parmi les jeux de paramètres identifiés par méthode inverse, le jeu GPC (pseudo-cisaillement) est le plus prédictif (suivi du jeu GTT). L'ensemble de ces résultats montre que l'augmentation de l'hétérogénéité des déformations permet d'améliorer la qualité du jeu de paramètres identifié. Ces résultats montrent aussi que les géométries d'éprouvettes planes choisies dans le cadre de cette étude ne montrent pas suffisamment d'hétérogénéités des champs de déformation pour identifier le comportement mécanique de manière satisfaisante. En effet, malgré l'hétérogénéité présentée par l'éprouvette GPC, un jeu de paramètres identifié par méthode inverse sur la base de cet essai n'atteint pas la performance du jeu identifié par méthode standard.

5.3.3.3 Sensibilité au bruit de mesure

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, et comme le montre aussi de nombreuses études parmi lesquelles [Lecompte 07b, Nakamura 07, Promma 09], l'identification par méthode inverse est sensible au bruit de mesure. Dans le cas de mesures planes par corrélation d'images, les incertitudes de mesures ont été évaluées par Bornert *et al.* [Bornert 08] dans un intervalle de 0.01 à 0.1 pixel. L'étude de sensibilité au bruit de mesure présenté ici consiste à brouter les champs de déplacement mesurés puis à identifier de nouveau le jeu de paramètres par méthode inverse. Le cas choisi est celui de 3 essais (à 0°, 45° et 90°) de la géométrie de pseudo-cisaillement, le jeu

de référence sera donc le jeu GPC (Tab. 5.4).

Le bruit des mesures par corrélation d'images (DIC) consiste en un bruit uniforme dont l'amplitude A_n est variable. Ce bruit est appliqué sur les mesures après leurs interpolations aux nœuds du maillage EF tel que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_x^{exp} = u_x^{exp} + \Phi_1(A_n) & \text{avec } \Phi_1 \sim \mathcal{U}\left(-\frac{A_n}{2}; \frac{A_n}{2}\right) \\ \tilde{u}_y^{exp} = u_y^{exp} + \Phi_2(A_n) & \text{avec } \Phi_2 \sim \mathcal{U}\left(-\frac{A_n}{2}; \frac{A_n}{2}\right). \end{cases} \quad (5.4)$$

Trois amplitudes croissantes de bruit ont été appliquées : $A_1 = 0.01$ pixel, $A_2 = 0.1$ pixel et $A_3 = 1$ pixel. Les résultats des identifications menées sont regroupés dans le Tableau 5.7.

TAB. 5.7 – Sensibilité aux différents bruits de mesure (géométrie GPC).

A_n (pixel)	0	0.01	0.1	1
A_n (μm)	0	0.2	2	20
K	285	277	269	334
n	0.50	0.48	0.49	0.48
F	0.16	0.17	0.14	0.25
G	0.18	0.19	0.15	0.26
H	0.82	0.81	0.85	0.74
N	2.0	2.0	2.0	2.0

De plus, pour les trois jeux de paramètres identifiés avec un bruit de mesure artificiel, on peut tracer les champs de déplacement prédits et les comparer à ceux issus du calcul avec le jeu de référence GPC (identifié sans bruit artificiel). En évaluant l'erreur de prédition relative $e(A_i)$ définie par :

$$e(A_i) = \frac{u_x^{num}(p(A_i)) - u_x^{num}(p(A_0))}{u_x^{num}(p(A_0))}, \quad (5.5)$$

nous sommes à même de tracer des cartographies de cette erreur qui sont reportées dans la Fig. 5.9.

L'augmentation du bruit sur les mesures par DIC dégrade rapidement la qualité de l'identification paramétrique et donc des champs de déplacement prédits par le modèle numérique. La sensibilité au bruit de la méthode de résolution apparaît donc évidente. Cependant, pour des amplitudes de bruit comprises entre 0.1 et 0.01 (*i.e.* celles estimées par Bornert *et al.* [Bornert 08]), la dispersion sur les champs de déplacement demeure acceptable puisque inférieure à 3.9%. Par ailleurs, notons que cette amplitude de l'erreur est sensiblement identique à celles évaluées par d'autres auteurs tels que [Kajberg 04a] ou encore [Witz 08, Promma 09].

5.4 Identification par méthode inverse : essais hors-plans

5.4.1 Modélisation numérique

Le modèle EF (Fig. 5.10(a)) a été construit avec le code de calcul EF ABAQUS EXPLICITE. Il repose sur un assemblage de trois pièces : la matrice et le poinçon (modélisés par des solides rigides) et le flan (modélisé par des éléments volumiques). Le maillage du flan est constitué de 28125 nœuds répartis sur quatre épaisseurs. Le matériau utilisé est le T40-0.5mm.

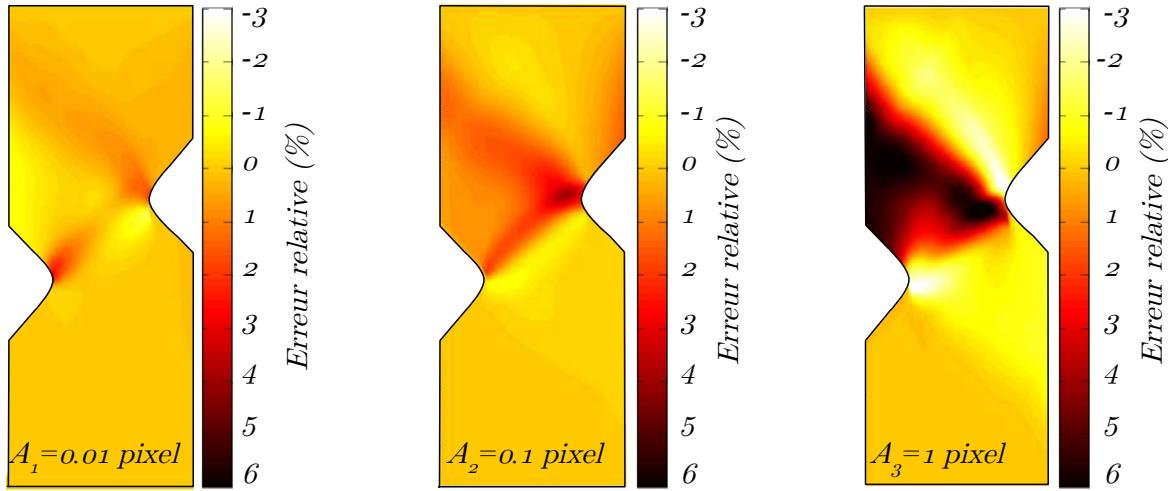


FIG. 5.9 – Cartographie de l'erreur relative de prédiction $e(A_i)$ pour les trois amplitudes de bruit artificiel imposées.

Parmi les 28125 nœuds, seuls les 4462 sont considérés comme *visibles* par les appareils photos du banc stéréoscopique seront utilisés pour construire la fonction objectif. En pratique, un nœud du maillage EF sera considéré comme *visible* si (i) il se situe sur la face inférieure de l'éprouvette et (ii) on peut y interpoler une valeur expérimentale du déplacement (*i.e.* les nœuds en contact avec la matrice ou trop proches de celle-ci ne sont pas *visibles*). Rappelons aussi que la fonction objectif est évaluée en comparant les déplacements aux nœuds du maillage. Les informations d'origine expérimentale U^{exp} sont donc interpolées bi-linéairement en chaque nœud *visible* du maillage (ces champs interpolés seront notés u^{exp}). Enfin, le repère principal d'anisotropie est placé initialement tel que l'axe \vec{x} corresponde à la direction de laminage (DL) et \vec{y} à la direction transverse (DT).

Le modèle numérique ainsi obtenu comporte deux types de conditions aux limites. Tout d'abord, suivant les considérations présentées en section 2.4.3.1, un encastrement est modélisé sur la périphérie extérieure de l'éprouvette. De plus, on vérifie numériquement que le déplacement radial des nœuds situés sur le diamètre intérieur de la matrice est nul (Fig. 2.11).

Par ailleurs, le déplacement vertical du poinçon est imposé à partir des mesures par analyse d'images (SIC) au centre de l'éprouvette, sur la face inférieure de celle-ci. L'impossibilité d'accéder au déplacement réel du poinçon, que ce soit par la mesure (le poinçon et la zone sous celui-ci sont invisibles durant l'essai) ou par la donnée du déplacement de la traverse (rattrapage de jeux mécaniques dans la chaîne cinématique) pose un problème quant à l'application du déplacement. En effet, l'écrasement du flan sous le poinçon engendre une erreur sur le déplacement imposé à ce dernier.

Une correction de ce problème a donc été implémentée, en évaluant numériquement la diminution d'épaisseur de l'éprouvette en son centre. Pour ce faire, une simulation est effectuée avec les paramètres identifiés par méthode standard (section 5.2). On peut alors évaluer le déplacement réel du poinçon u_z^{impos} en fonction de la diminution d'épaisseur du flan $\Delta e(t) = e_0 - e(t)$ (où e_0 est l'épaisseur initiale et $e(t)$ l'épaisseur courante) tel que :

$$u_z^{impos}(t) = u_z^{SIC} + \Delta e(t), \quad (5.6)$$

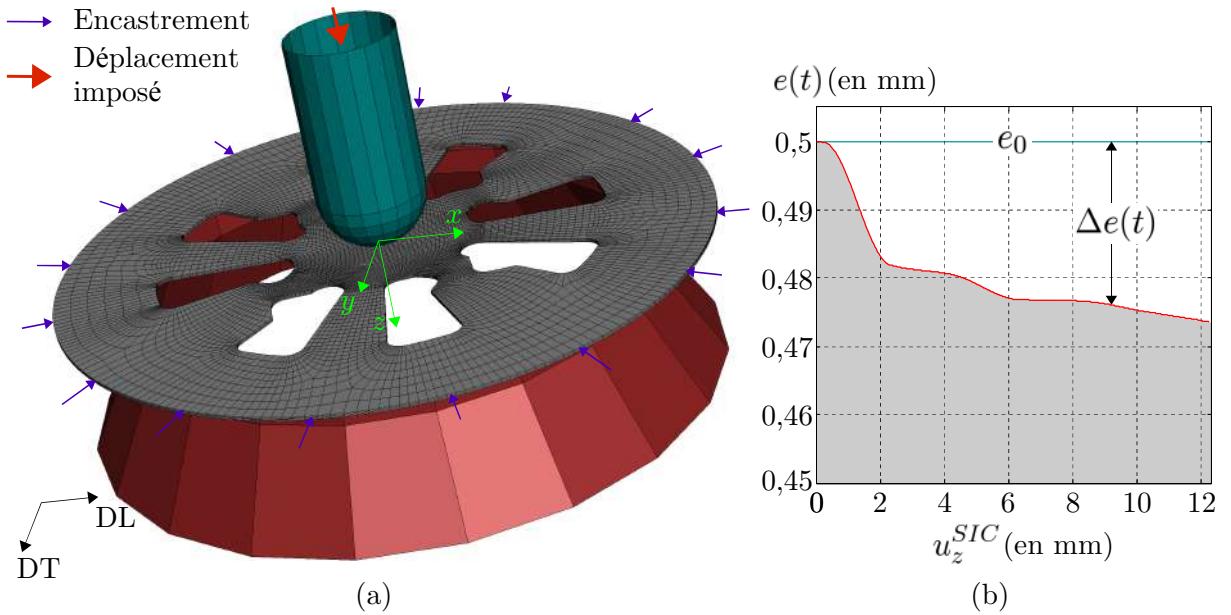


FIG. 5.10 – (a) Modélisation de l'essai hors-plan dans ABAQUS (DL : Direction de Laminage. DT : Direction Transverse). (b) Évolution de l'épaisseur du flan au centre de l'éprouvette en fonction du déplacement mesuré par analyse d'images (SIC).

où u_z^{SIC} est le déplacement mesuré par analyse d'images (SIC) sur la face inférieure du flan. On trace sur la Figure 5.10(b) l'évolution de l'épaisseur du flan durant la simulation numérique réalisée.

De plus, la distance importante entre les appareils photographiques du banc stéréoscopique et le flan impose de prendre en compte la déformation des colonnes du montage expérimental (Fig. 2.9) sous l'effet de la charge appliquée. Malgré le diamètre de 30mm des 4 colonnes du banc d'essai, on observe un *affaissement* du plateau sur lequel repose la matrice. La raideur K_b du banc a donc été évaluée en appliquant une charge similaire à celle nécessaire pour déformer le flan et en mesurant le déplacement $u_z^{plat}(t)$ du plateau par rapport aux appareils photo avec un comparateur. Ce déplacement vaut $2 \mu\text{m}$ pour un effort de 3000 N (soit une raideur de $K_b = 1.5 \text{ N.m}^{-1}$). Cette expérience permet d'implémenter une correction sur le déplacement à imposer dans le modèle EF que l'on peut alors exprimer comme :

$$u_{impos}^z(t) = u_z^{SIC} + \Delta e(t) - u_z^{plat}(t). \quad (5.7)$$

Ces deux corrections sont faibles mais permettent de faire un lien précis entre le déplacement mesuré par analyse d'images (SIC) au centre de l'éprouvette et le déplacement réel du poinçon. Ce déplacement peut alors être imposé comme consigne dans le modèle numérique.

Enfin, notons qu'un dernier problème, lié au recalage des champs expérimentaux, doit être pris en compte. En effet, les mesures par SIC fournissent les déplacements dans le repère de l'appareil de gauche, il convient alors de les exprimer dans le repère éprouvette défini par la Figure 5.10(a). Cette opération numérique, réalisée sous MATLAB, se base sur l'utilisation des surfaces reconstruites par SIC. Trois transformations numériques successives permettent de : (i) ramener le problème de recalage dans un cas plan par une rotation d'espace, (ii) placer le centre du repère expérimental sur le centre du repère numérique et enfin (iii) pivoter le flan afin d'aligner la direction de laminage sur l'axe \vec{x} du repère numérique. De plus amples détails sur la procédure

de recalage des champs expérimentaux et numériques ainsi que sur les incertitudes associées sont fournis en [Annexe D](#).

5.4.2 Elasticité

5.4.2.1 Identification élastique par méthode inverse

Dans le cadre de cette étude, deux modèles élastiques linéaires ont été identifiés : un modèle isotrope et un modèle orthotrope. En effet, comme nous l'avons vu en section [5.2.1](#), l'anisotropie du matériau choisi (T40-0.5mm) s'observe aussi bien dans le domaine plastique qu'élastique. Dans de nombreuses études portant sur l'identification de paramètres d'anisotropie plastique, les auteurs choisissent de postuler un comportement élastique isotrope [[Meuwissen 98a](#), [Khalfallah 02](#), [Cooreman 08](#)]. Cependant, d'autres auteurs [[Lauwagie 05](#), [Lecompte 07b](#), [Bruno 08](#)] proposent d'identifier des modèles élastiques plus évolués.

Les deux identifications de paramètres élastiques se basent sur un seul essai TIX du matériau T40-0.5mm. L'identification menée ne porte pas sur la limite d'élasticité. La limite d'élasticité est considérée connue et valant $\sigma_y = 394^0$ MPa dans la direction de laminage. Cette donnée nous permet de définir numériquement une valeur limite du déplacement du poinçon en dessous de laquelle l'éprouvette se comporte de manière strictement élastique. On considère donc que si : $u_{impos}^z < 1$ mm, le comportement du matériau est entièrement régi par le modèle élastique. Huit pas de temps ont été sélectionnés dans cette zone de déplacement. La fonction objectif est basée sur des comparaisons des 3 champs de déplacement (u_x , u_y , u_z) ainsi que de l'effort de réaction sur le poinçon.

Dans le cas du modèle élastique isotrope, l'identification ne porte donc que sur le module d'Young et le coefficient de Poisson. Les deux valeurs identifiées sont reportées dans le Tableau [5.8](#).

TAB. 5.8 – Paramètres identifiés du modèle élastique isotrope.

Paramètres	E	ν	f_{fin} ¹
Valeurs initiales	110 GPa	0.30	-
Valeurs identifiées par méthode standard	112 GPa	0.34	6.19
Valeurs identifiées par méthode inverse	106 GPa	0.31	6.03

¹Valeur finale de la fonction objectif.

Dans le cas du modèle orthotrope, seuls 4 paramètres sont étudiés E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} . En effet, il a été vérifié que les champs de déplacement observés ne montrent une sensibilité qu'à ces 4 paramètres.

TAB. 5.9 – Paramètres identifiés du modèle élastique orthotrope.

Paramètres	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}	f_{fin} ¹
Valeurs initiales	110 GPa	110 GPa	0.30	42.3 GPa	-
Valeurs identifiées	99.5 GPa	112 GPa	0.29	51.7 GPa	4.55

¹Valeur finale de la fonction objectif.

Le modèle orthotrope représente plus fidèlement le comportement réel du matériau puisque la valeur finale de la fonction objectif est plus faible que dans le cas isotrope. La Figure [5.11](#) présente les résidus entre les champs de déplacement mesurés et ceux calculés à partir du jeu de

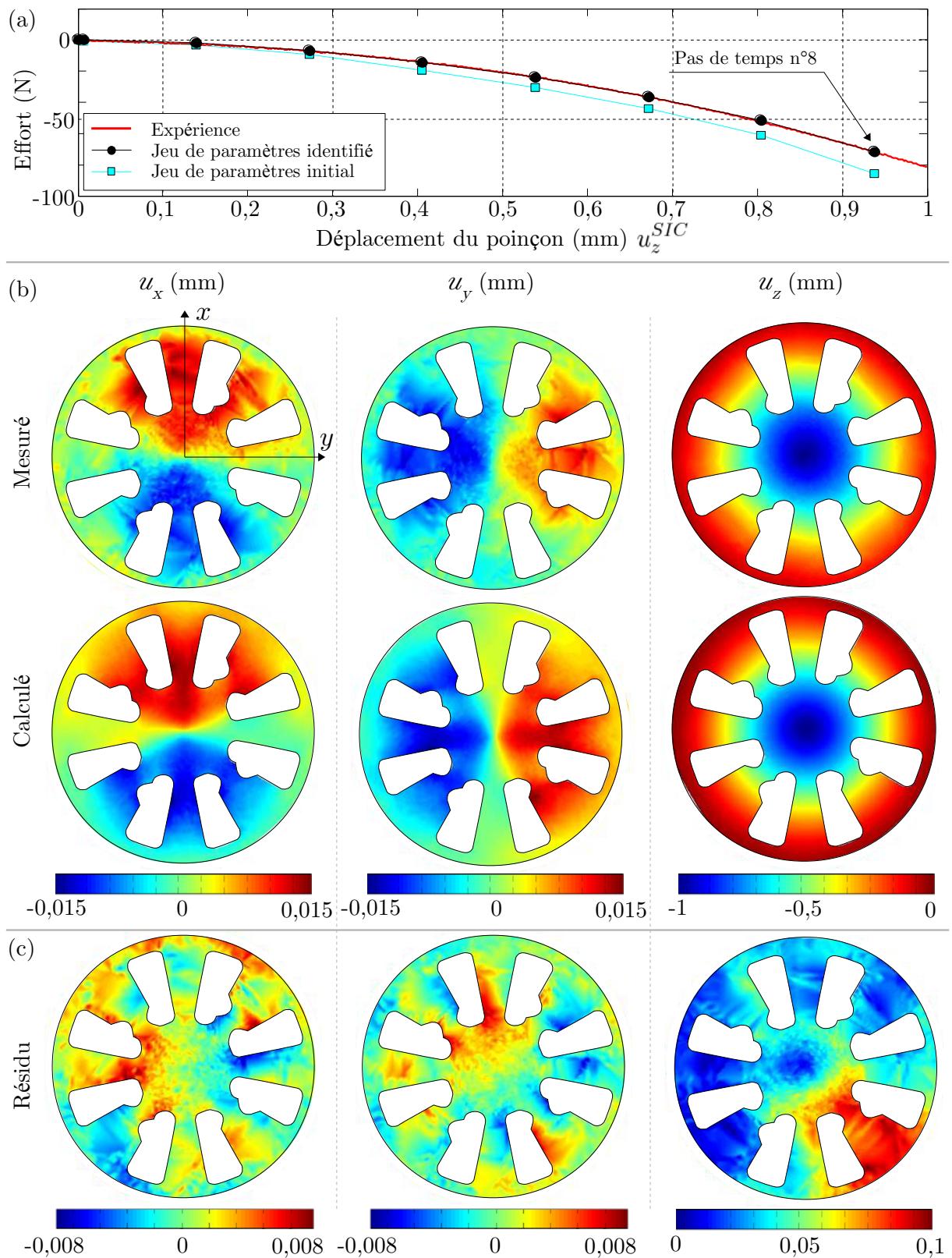


FIG. 5.11 – Calculs réalisés avec le jeu de paramètres orthotrope identifié : (a) Courbes force/déplacement mesurées et calculées. (b) Champs de déplacement mesurés et calculés au 8^{ème} pas de temps. (c) Résidu entre le déplacement mesuré et calculé suivant les axes \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} .

paramètres orthotrope identifié. Nous observons que l'erreur commise sur les champs de déplacement suivant \vec{x} et \vec{y} est relativement importante mais de l'ordre de grandeur des incertitudes de mesure par SIC. Nous avons vérifié par ailleurs que la sensibilité, aux paramètres de la loi de comportement, des champs de déplacement suivant \vec{x} et \vec{y} est très faible ce qui minimise l'influence de ces résidus. De plus, malgré une erreur relative sur \vec{z} globalement faible, nous constatons que l'une des *pattes* de pseudo-cisaillement de l'éprouvette TIX (située en bas à droite de la Figure 5.11(c)) montre une erreur nettement supérieure aux autres ($\approx 100 \mu\text{m}$). Plusieurs causes peuvent expliquer ce phénomène et on se propose de les recenser ci-dessous :

Une hétérogénéité matérielle : Bien que cette hypothèse puisse expliquer à elle seule l'augmentation du déplacement mesuré dans cette zone de l'éprouvette, la présence d'une telle hétérogénéité s'avère, en pratique, très improbable et sera donc écartée.

Des conditions aux limites mal maîtrisées : On pourrait en effet soupçonner l'existence d'un glissement du flan à cet endroit de l'éprouvette (par exemple, l'une des 6 vis serait mal serrée). Pour confirmer ou infirmer cette hypothèse, on peut procéder à la même vérification que celle de la section 2.4.3.1 (Fig. 2.12), c'est-à-dire mesurer le déplacement le long d'un diamètre de l'éprouvette. La Figure 5.12 montre que le déplacement suivant x_1 tend bien vers 0 lorsque l'on se rapproche du bord de la matrice. Il semble donc qu'il n'y ait pas de glissement entre le flan et la matrice.

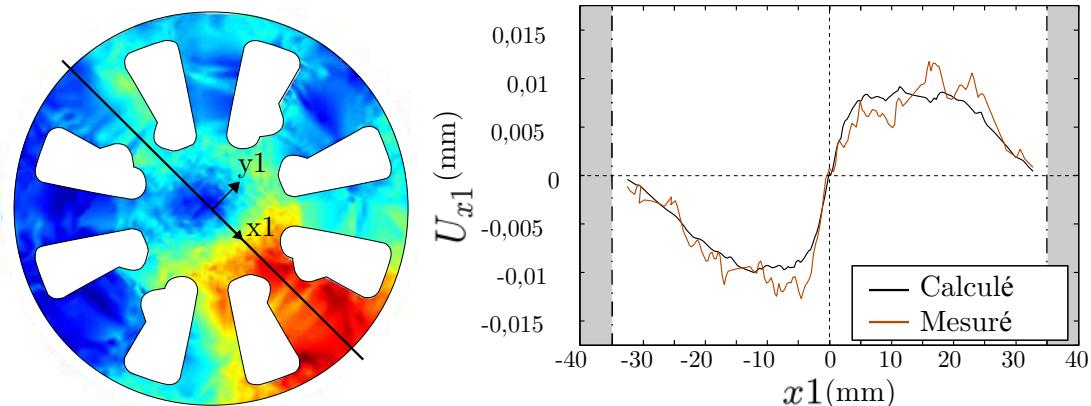


FIG. 5.12 – *Déplacement mesuré et calculé le long d'un diamètre de l'éprouvette orienté suivant l'axe x_1 . On constate que ce déplacement tend vers 0 lorsque x_1 tend vers 35mm (rappelons que le diamètre intérieur de la matrice vaut 70mm).*

Un recalage imparfait des champs mesurés sur les champs calculés : Comme il est détaillé dans l'Annexe D, La transformation permettant de recaler les deux champs dans le même repère se compose de 3 translations et de 3 rotations. Un erreur sur l'une des translations aboutirait à une erreur homogène (en pixel) sur la surface de l'éprouvette donc à maximale dans les zones de fort gradient de déplacement. Une erreur sur la rotation autour de \vec{z} aurait pour conséquence une erreur proportionnelle au rayon du flan. Enfin une erreur sur les rotations autour de \vec{x} et \vec{y} conduirait à une erreur symétrique. Or nous observons que l'erreur commise sur le champ U_z n'est pas symétrique et ne concerne pas une zone de fort gradient de déplacement. Cette hypothèse sera elle aussi écartée.

Non planéité de la matrice : La présence d'un *affaissement* de la surface de contact

dans la zone concernée pourrait justifier que le déplacement mesuré soit supérieur à celui calculé. Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons procédé à une mesure de la surface de contact à l'aide d'une Machine à Mesurer de Surface 3D (MMS). Comme on peut le constater sur la Figure 5.13, la surface de contact entre le flan est la matrice présente plusieurs légers *affaissements* (d'environ $20 \mu\text{m}$) notamment dans la zone concernée². Le tracé de l'altitude du cercle C1 (le cercle des données les plus proches du centre de la matrice) montre en effet une diminution de l'altitude de la matrice d'environ $10 \mu\text{m}$ dans la zone concernée. La faible amplitude de ce défaut de forme ne suffit pas, à elle seule, à justifier l'écart de $100 \mu\text{m}$ observé sur la Figure 5.11 (c), cependant, il y contribue.

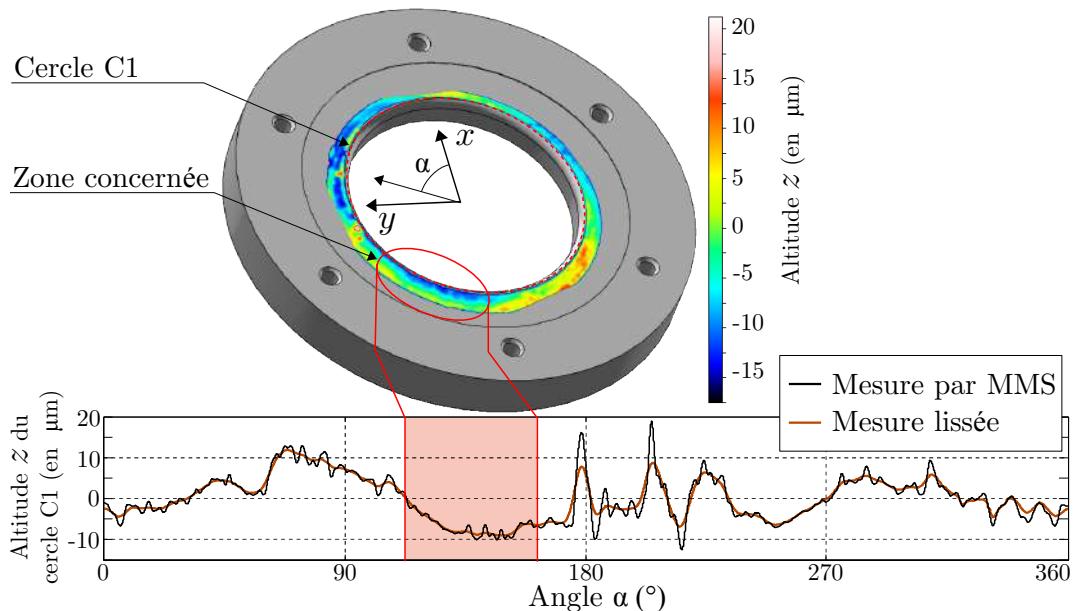


FIG. 5.13 – Mesure par MMS de la surface de la matrice en contact avec le flan. On observe un défaut positif d'environ $10 \mu\text{m}$ dans la zone concernée.

Une position excentrée du poinçon : Pour vérifier cela, on peut tracer sur le champ de déplacement u_z le point de déplacement maximum (qui correspond au centre du poinçon) et le centre géométrique de l'éprouvette (qui correspond à l'endroit où l'on place le poinçon numériquement). La Figure 5.14 montre un léger décalage entre ces deux points. En d'autres termes, le poinçon est expérimentalement décentré d'environ 0.909 mm alors que sa position est supposée centrée numériquement.

On peut donc estimer que le décentrage du poinçon est responsable de la déviation observée du résidu sur u_z . Cependant, il existe une influence de la planéité de la matrice mais celle-ci est du second ordre. En conclusion, une meilleure maîtrise de la qualité géométrique du montage (usinage et assemblage) conduirait certainement à une meilleure qualité de l'identification paramétrique dans le cas de très petites déformations (identification élastique).

2. On remarquera sur la Figure 5.13 que la matrice est vue de dessus alors que les champs de déplacement présentés dans les sections précédentes sont vus par les appareils photographiques donc en vue de dessous. Le lecteur se référera aux axes \vec{x} et \vec{y} afin de se repérer.

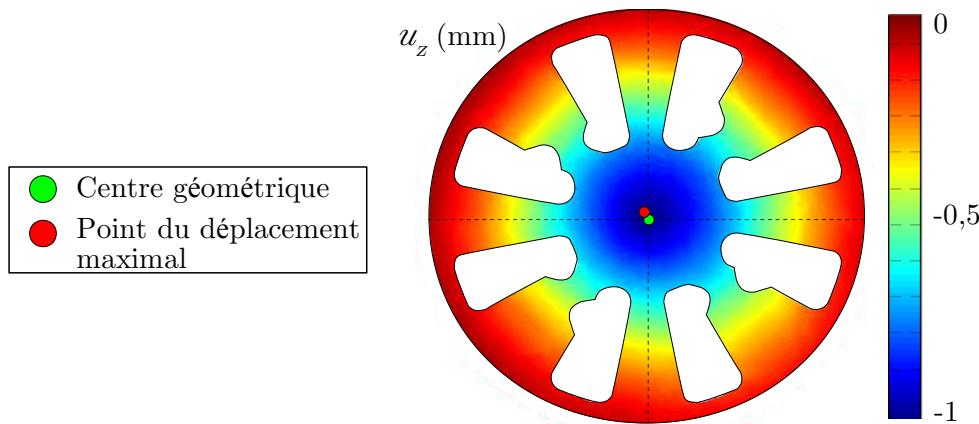


FIG. 5.14 – Position du point de déplacement maximal (centre réel du poinçon) et du point central de l'éprouvette (centre du poinçon dans le modèle numérique). On observe un décalage de 0.909 mm.

5.4.2.2 Influence du modèle élastique

Munis des deux modèles de comportement élastique identifiés précédemment, une étude de l'influence du choix de l'un ou l'autre de ces modèles a été réalisée. En effet, lors des identifications plastiques à partir d'essais plans réalisés en section 5.3, le modèle élastique utilisé était élastique isotrope. Cependant, on est en droit de s'interroger sur l'influence du choix d'un modèle élastique sur les résultats de l'identification plastique. Bien que les pas de temps pris en compte dans le cas d'une identification plastique se situent dans la zone de plasticité, l'état de contrainte en début de plasticité dépend directement du choix du modèle élastique. La Figure 5.15 présente la différence entre la contrainte équivalente calculée par le modèle isotrope et celle issue du modèle orthotrope en tout début de plasticité. Les deux modèles prédisent des états de contraintes sensiblement différents puisque la différence maximale vaut 33 MPa, ce qui correspond à 8.4% de la limite d'élasticité. Dans certaines zones (traction à 0° par exemple) cette différence peut atteindre 30% de la contrainte. Il semble probable que le choix de l'un ou l'autre des modèles élastiques conduise à des identifications plastiques différentes.

Le fait que le modèle élastique orthotrope minimise plus fortement la fonction objectif nous conduit à adopter ce modèle de comportement. Cependant, nous étudierons dans la section suivante l'influence du modèle élastique sur l'identification du modèle plastique.

5.4.3 Plasticité

5.4.3.1 Identification plastique par méthode inverse

Le modèle plastique que nous cherchons à identifier ici est le même que celui utilisé dans le cas d'essais plans. Il est composé de six paramètres : K et n de la loi de Ludwick (Eq. 3.71) ainsi que les coefficients du critère de Hill 1948 F , G , H et N (Eq. 3.69). Deux identifications sont menées avec les deux modèles élastiques identifiés dans la section précédente (section 5.4.2.1). Au total, six pas de temps sont considérés et sont localisés dans la zone plastique. Le Tableau 5.10 ci-dessous présente les résultats de ces deux identifications.

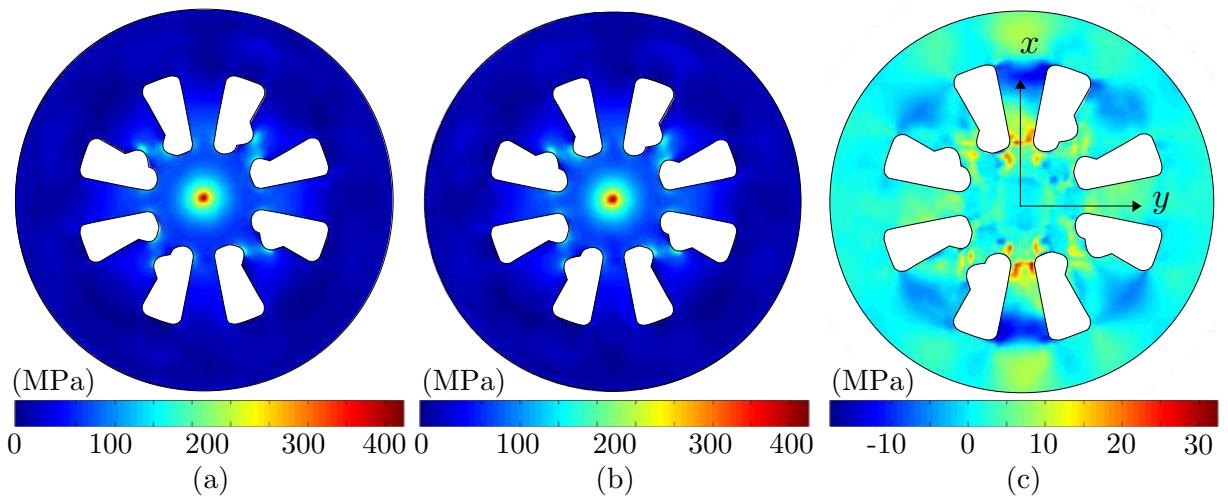


FIG. 5.15 – Contrainte équivalente au sens de Von Mises prédicta en fin d'élasticité avec le modèle (a) élastique isotrope, (b) élastique orthotrope. (c) Différence entre la contrainte équivalente de Von Mises prédicta avec un modèle élastique isotrope et orthotrope.

Remarque : On rappelle que les déformations subies par le flan sont importantes et se placent dans le cadre de grandes déformations puisque la déformation principale maximale vaut $\mathbb{E}_{max}^{xx} = 0.62$ dans les zones de traction de l'éprouvette, $\mathbb{E}_{max}^{xy} = 0.95$ dans les zones de cisaillement et $\mathbb{E}_{max}^{xx} = \mathbb{E}_{max}^{yy} = 0.07$ dans les zones d'expansion.

TAB. 5.10 – Paramètres plastiques identifiés par méthode inverse (T40-0.5mm)

Paramètres	élasticité	K	n	F	G	H	N	f_{fin}
Valeurs initiales	-	550	0.3	1.5	1.5	1.5	3	-
Valeurs identifiées	isotrope	331	0.51	0.34	0.16	0.84	2.0	1.36
Valeurs identifiées	orthotrope	348	0.39	0.31	0.18	0.82	1.9	1.09

La Figure 5.16 montre les champs de déplacement avant rupture du flan mesurés et calculés avec le jeu de paramètres identifié. Les courbes force/déplacement ainsi que les résidus sur les champs de déplacement u_x , u_y et u_z sont aussi reportés.

Une bonne correspondance entre l'effort mesuré et calculé est observée (Fig. 5.16(a)). De plus, la Figure 5.16(b) montre une erreur relativement importante sur les champs de déplacement sur \vec{x} et \vec{y} (de l'ordre de 20% dans les zones de plus fortes déformations). Enfin, l'observation du résidu sur \vec{z} montre une erreur relative faible ($\approx 3\%$).

5.4.3.2 Influence du modèle élastique

Malgré le choix des sept pas de temps dans la zone plastique, nous constatons sur le Tableau 5.10 que l'utilisation d'un modèle plus descriptif du comportement élastique (*i.e.* le modèle orthotrope) diminue de 30% la valeur finale de la fonction objectif. Ceci vient confirmer les constatations faites en section 5.4.2.2 quant à l'influence de l'état de contrainte en début de plasticité.

Par ailleurs, en traçant les ellipses de Hill, les courbes d'évolutions des coefficients r_α ainsi

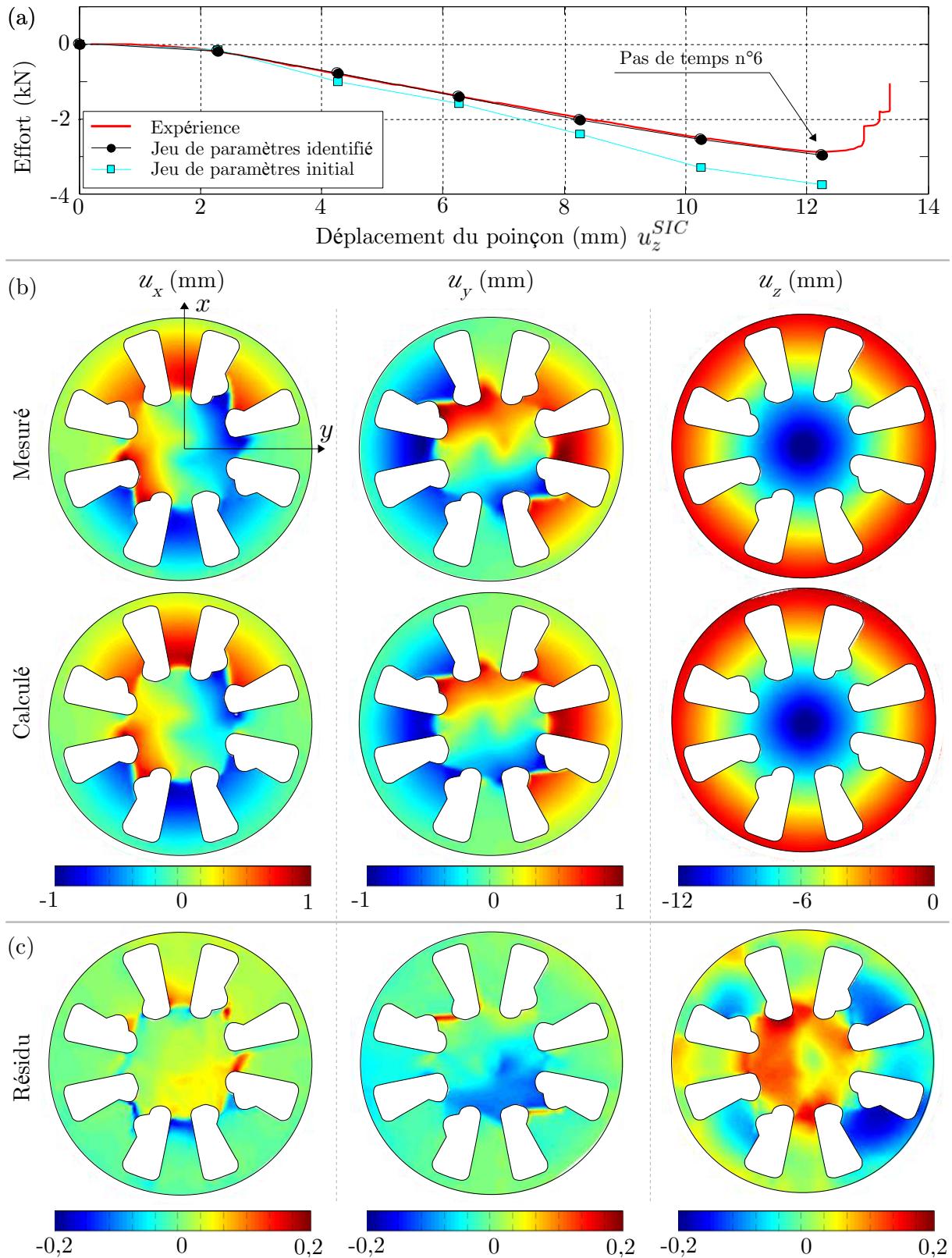


FIG. 5.16 – (a) Courbes force/déplacement mesurées et calculées par le jeu de paramètres identifié. (b) Champs de déplacement mesurés et calculés au 6^{ème} pas de temps. (c) Résidu entre le déplacement mesuré et calculé suivant les axes \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} .

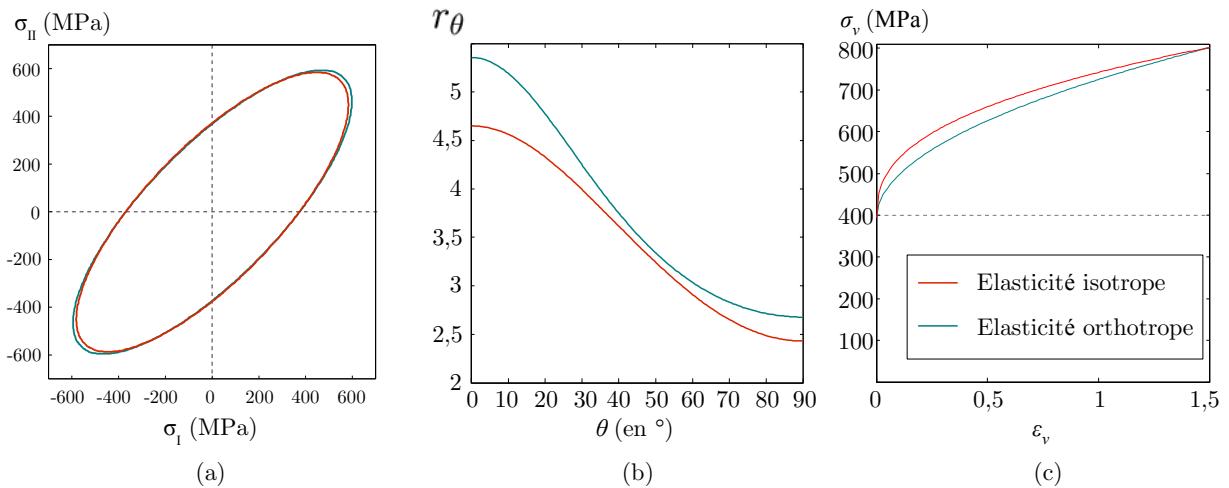


FIG. 5.17 – Calculs menés pour les modèles plastiques identifiés avec une élasticité isotrope et orthotrope : (a) Surface de charge. (b) Coefficients de Lankford en fonction de la direction de sollicitation. (c) Courbes d’écrouissages.

que les courbes d’écrouissage (Fig. 5.17), on s’aperçoit de l’influence majeure du modèle élastique sur l’identification plastique, notamment sur l’anisotropie du matériau.

5.4.4 Validations

5.4.4.1 Validation par comparaison

Dans cette section, le jeu de paramètres plastique identifié sur la base d’un essai TIX (muni du modèle élastique orthotope) est comparé aux jeux de paramètres issus des identifications planes menées en section 5.3. Nous pouvons tout d’abord utiliser ce jeu de paramètres TIX afin de simuler les 3 types d’essais plans (GTS, GTT, GPC) et comparer la valeur de la fonction objectif à celles obtenues avec les autres jeux de paramètres (voir Tab. 5.11). De même nous pouvons utiliser les jeux de paramètres identifiés sur la base de ces essais plans afin d’évaluer la fonction objectif dans le cas d’un essai TIX.

TAB. 5.11 – Valeurs de la fonction objectif selon le type d’essai et le jeu de paramètres utilisé.

Jeu de paramètres	Type d’essais			
	Trac. standardisée	Trac. trouée	Pseudo-cisaillement	TIX
Méthode standard	30	32	39	11
Traction standardisée	21	103	126	12
Traction trouée	67	18	28	11
Pseudo-cisaillement	49	19	25	11
TIX	32	19	25	9

[-] jeu de paramètres le plus efficace. [-] Second jeu de paramètres le plus efficace.

Le jeu de paramètres TIX fournit la plus faible valeur de la fonction objectif pour une simulation de l’essai TIX. Dans le cas d’essai GPC et GTT, le jeu de paramètres TIX est relativement proche des jeux les plus performants. Enfin dans le cas des essais de traction standardisée, le jeu de paramètres TIX présente une valeur de la fonction objectif proche de celle du jeu de méthode

standard. Au global, le jeu de paramètres TIX, au contraire des 4 autres, ne présente pas d'erreur de prédiction importante pour les quatre essais pris en compte. Ces résultats mettent en évidence le fait qu'un jeu de paramètres identifié sur la base de champs de déformation hétérogènes est plus apte à reproduire le comportement du matériau dans le cas de sollicitations variées.

Une comparaison des courbes force/déplacement prédites par les différents jeux de paramètres pour les 4 types d'essais menés (GTT, GTS, GPC et TIX) est présentée sur la Figure 5.18. Pour des raisons de lisibilité, la comparaison du jeu de paramètres TIX est restreinte aux deux meilleurs jeux de paramètres plans : celui identifié par méthode standard et celui identifié sur la base de géométrie de pseudo-cisaillement (voir section 5.3.3).

Le jeu de paramètres TIX conduit à des courbes force/déplacement proches de celles prédites par les deux autres jeux de paramètres. De plus, aucun de ces deux jeux n'est capable de prédire correctement le comportement du matériau dans le cas de l'essai TIX.

En conclusion, ces comparaisons montrent que, dans le cas de sollicitations simples comme complexes, les paramètres identifiés par la procédure d'essai TIX conduisent à une bonne prédiction du comportement du matériau. Néanmoins, il reste à comparer les champs de déplacement prédits par ce jeu de paramètres dans le cas de sollicitations variées et très éloignées du type d'essais utilisés pour identifier ce jeu. Ce sera l'objet de la section suivante.

5.4.4.2 Comparaison à un essai d'emboutissage

Le jeu de paramètres élastoplastiques identifié par essai hors plan TIX a été utilisé afin de prédire le profil d'anisotropie du godet présenté sur la Figure 5.7. La simulation numérique employée est identique à celle présentée en section 5.3.3.2. La Figure 5.19 montre les résultats de cette simulation (hauteur relative du godet en fonction de l'angle) pour le jeu de paramètres TIX (avec élasticité orthotrope). On rappelle aussi sur cette figure les résultats obtenus pour le jeu de paramètres identifié par méthode standard, et ceux identifiés par méthode inverse pour la géométrie de pseudo-cisaillement.

La courbe du profil prédit par le jeu de paramètres identifié par essai TIX est celle qui se rapproche le plus des mesures expérimentales. Ceci se confirme si l'on évalue l'erreur type e_t entre le profil prédit par la simulation et le profil moyen mesuré par MMT comme défini par l'équation (5.3).

TAB. 5.12 – Erreur type pour différents jeux de paramètres

Jeu de Paramètres	e_t
Méthode standard	1.18
Traction standardisée	6.78
Traction trouée	1.31
Pseudo cisaillement	1.30
TIX	0.46

En effet, au vu des résultats présentés dans le Tableau 5.12, on constate que les paramètres identifiés sur la base d'un essai TIX permettent non seulement de diminuer le nombre d'essais nécessaires à l'identification du modèle élastoplastique (intérêt quantitatif) mais aussi d'obtenir un jeu de paramètres matériau nettement plus prédictif (intérêt qualitatif).

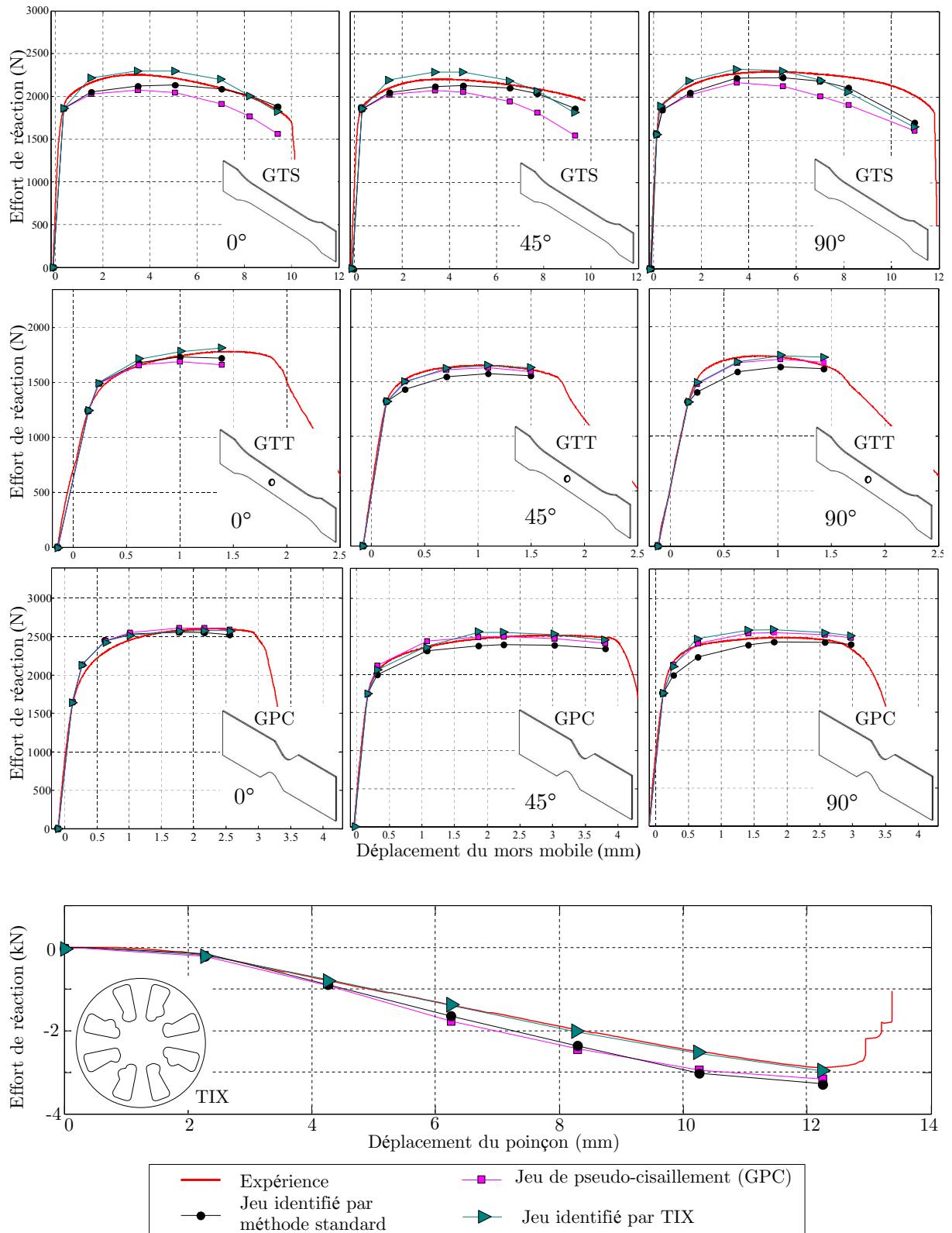


FIG. 5.18 – Comparaison entre les efforts prédis par les 3 meilleurs jeux de paramètres identifiés et les efforts expérimentaux des 3 essais de chaque géométrie et de l'essai TIX.

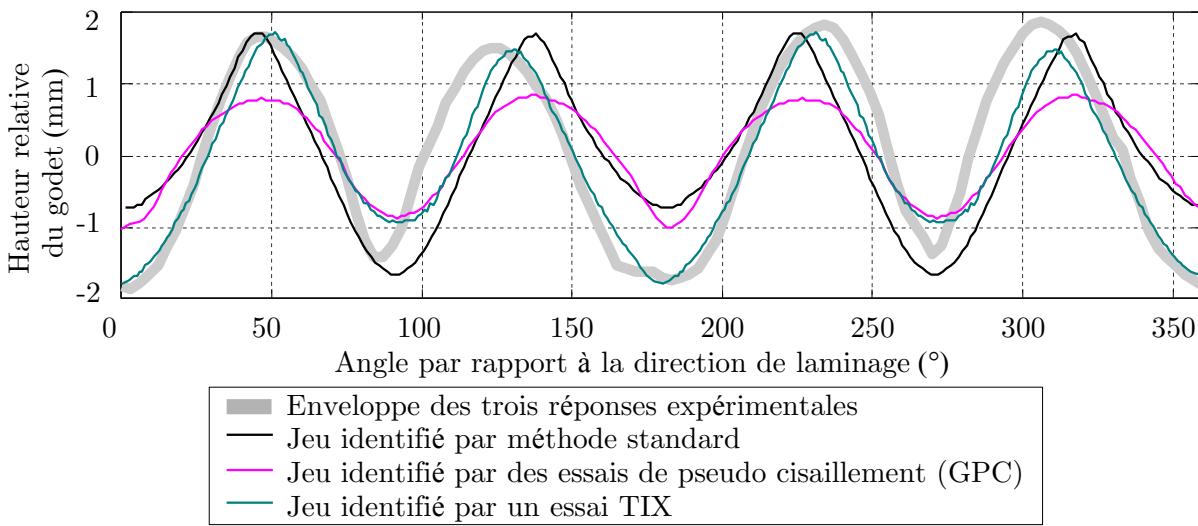


FIG. 5.19 – Profils d'anisotropie mesurés et prédis par les calculs EF avec les jeux de paramètres identifiés.

5.4.4.3 Sensibilité au bruit de mesure

Comme dans le cas des essais plans, les champs de déplacement expérimentaux ont été bruités afin d'étudier la stabilité de l'identification. Les quatre jeux de paramètres identifiés à partir d'essais hors plan ont été soumis à cette vérification :

- les jeux de paramètres élastiques isotropes/orthotropes,
- les jeux de paramètres plastiques avec modèle élastique isotrope/orthotrope.

Le bruit appliqué aux mesures par SIC consiste en un bruit Gaussien dont l'amplitude dépend du cas considéré. Ce bruit est appliqué sur les mesures après leurs interpolations aux noeuds du maillage EF tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_x^{exp} = u_x^{exp} + \Phi_3(A_n) \\ \hat{u}_y^{exp} = u_y^{exp} + \Phi_3(A_n) \\ \hat{u}_z^{exp} = u_z^{exp} + \Phi_3(A_n) \end{array} \right. \quad \text{avec } \Phi_3 \sim \mathcal{N}(0; A_n). \quad (5.8)$$

Comme il est expliqué en section 2.4.6.5, deux cas sont distingué : le cas de petits déplacements (et petites rotations) sera utilisé pour les identifications élastiques et le cas de grands déplacements sera employé pour les identifications plastiques.

Cas élastique. Dans ce cas, l'écart-type de la distribution normale Φ_3 est de $A_n = 2.3 \mu\text{m}$. L'identification par méthode inverse est donc relancée (après avoir appliqué le bruit) pour les modèles isotropes et orthotropes.

TAB. 5.13 – Paramètres élastiques identifiés avec des mesures bruitées.

Paramètres	modèle isotrope			modèle orthotrope				
	E	ν	f_{fin}	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}	f_{fin}
Valeurs référence	106	0.31	6.029	99.5	112	0.29	51.7	4.55
Valeurs bruitées	102	0.35	6.381	106	117	0.33	47.8	4.72
Erreur	4%	13%		6%	5%	14%	8%	
Unité	GPa	-		GPa	GPa	-	GPa	

Les résultats présentés dans le Tableau 5.13 démontrent une assez grande sensibilité au bruit des deux modèles élastiques. L'erreur moyenne commise sur l'évaluation des modules de traction est de l'ordre de 5% et d'environ 13.5% sur les coefficients de contraction. L'amplitude de cette erreur peut être reliée à l'amplitude relative du bruit par rapport aux signaux mesurés. En effet, notamment dans le cas des mesures sur l'axe \vec{x} et \vec{y} , l'amplitude des déplacements mesurés est très faible ($U_x^{exp} < 15 \mu\text{m}$). Ceci conduit à un rapport signal/bruit très défavorable et peut expliquer la grande sensibilité de la méthode au bruit. De plus, il est nécessaire de remarquer que l'erreur évaluée ici constitue un majorant de l'incertitude réelle puisque le bruit numérique est appliqué sur les mesures après leur interpolation aux nœuds. En effet, on peut à titre d'exemple, tracer le champ de déplacement u_x^{exp} (mesuré par analyse d'images DIC puis interpolé aux nœuds) au pas de temps n°8 ainsi que son allure après application du bruit \tilde{u}_x^{exp} et l'allure qu'il aurait eu si le bruit avait été appliqué avant l'interpolation (Fig. 5.20).

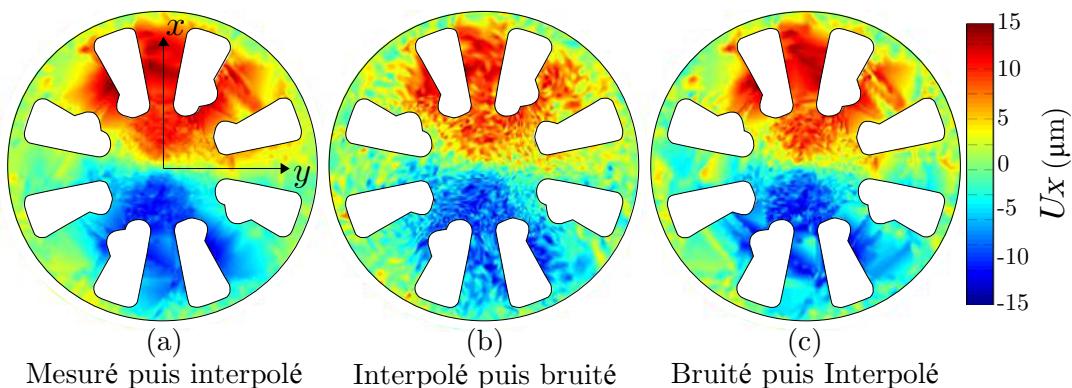


FIG. 5.20 – (a) Champ de déplacement sur \vec{x} mesuré et interpolé aux nœuds du maillage EF. (b) Champ de déplacement sur \vec{x} mesuré, interpolé aux nœuds et bruité. (c) Champ de déplacement sur \vec{x} mesuré, bruité et interpolé aux nœuds.

On observe que les deux champs de déplacement bruités présentent des allures très différentes. L'aspect rugueux du champ interpolé puis bruité (Fig. 5.20(b)) est plus lissé sur le champ bruité puis interpolé (Fig. 5.20(c)). Il semble donc que l'opération d'interpolation aux nœuds du maillage agisse comme un filtre, stabilisant ainsi la méthode d'identification.

Cas plastique. Dans ce cas, l'écart-type de la distribution normale Φ_3 est tel que $A_n = 5 \mu\text{m}$. L'identification est alors relancée pour les deux modèles plastique identifiés : l'un basé sur un comportement élastique isotrope et l'autre orthotrope. Les résultats de ces deux identifications sont regroupés dans le Tableau 5.14 ci-dessous.

TAB. 5.14 – Paramètres plastiques identifiés avec des mesures bruitées.

Paramètres	élasticité	K	n	F	G	H	N	f_{fin}
Valeurs référence	isotrope	331	0.51	0.34	0.16	0.84	2.0	1.36
Valeurs bruitées	isotrope	344	0.49	0.36	0.18	0.82	2.2	1.39
Erreur (%)	-	3.9	3.9	5.9	12	2.4	10	2.2
Valeurs référence	orthotrope	348	0.39	0.31	0.18	0.8	1.9	1.09
Valeurs bruitées	orthotrope	323	0.44	0.31	0.14	0.86	1.8	1.09
Erreur (%)	-	7.2	10	0	22	7.5	5.3	0

L'influence du bruit de mesure sur l'identification du comportement plastique peut être vérifiée en comparant les champs de déplacement prédits par le modèle matériau bruité et le modèle de référence. La différence entre ces champs dans le cas du modèle plastique identifié avec un comportement élastique orthotrope est présentée sur la Figure 5.21(a). Par ailleurs, l'influence du bruit de mesure sur les deux identifications plastiques réalisées est représentée, sur les Figures 5.21(b-c-d), par les surfaces de charges, les courbes d'écrouissage et d'évolution des coefficients de Lankford.

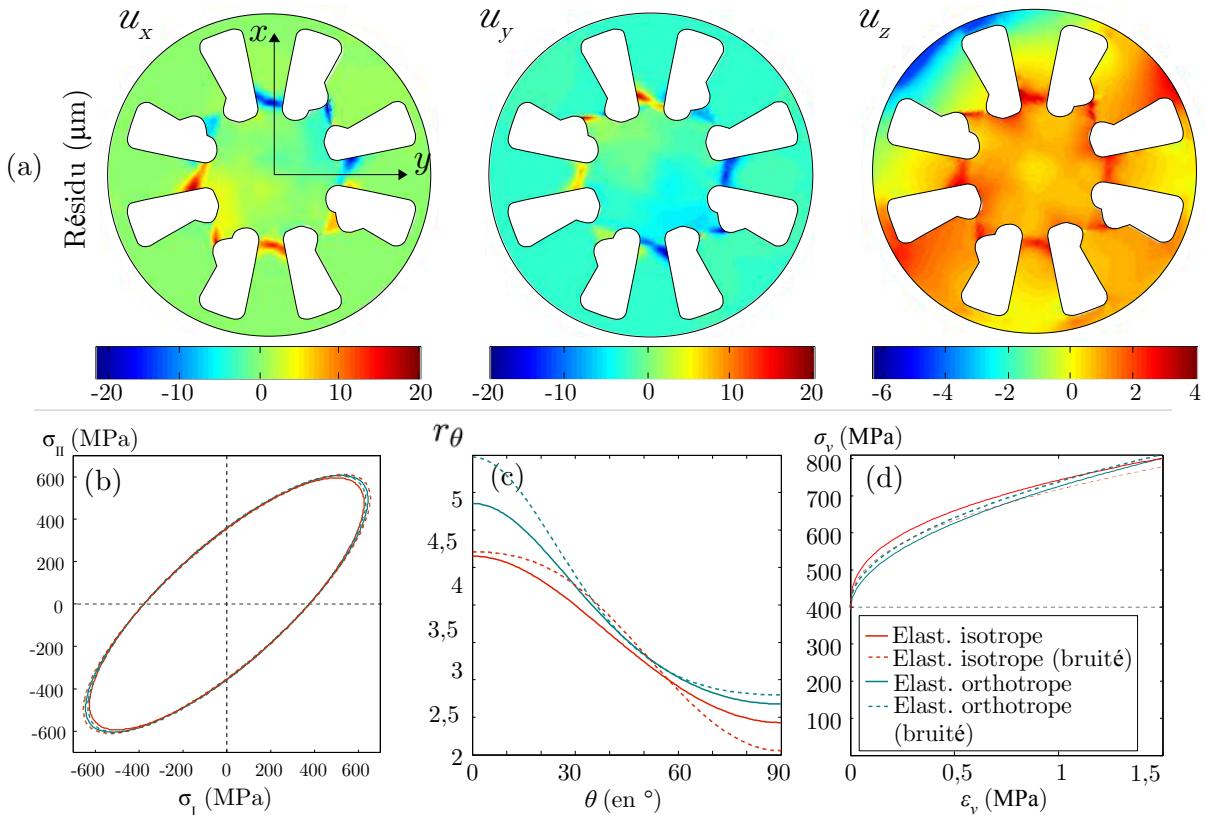


FIG. 5.21 – (a) résidu entre les champs de déplacement u^{exp} et \tilde{u}^{exp} dans le cas d'une identification plastique. (b-c-d) Représentations des comportements plastiques des deux jeux de paramètres identifiés et des deux jeux bruités. (b) Surfaces de charges. (c) Évolutions des coefficients de Lankford. (d) Courbes d'écrouissage.

Malgré une influence importante sur les coefficients de Lankford, le bruit de mesure n'affecte que très peu les champs de déplacement calculés. En effet, l'amplitude du résidu sur \vec{z} est négligeable et celle des résidus sur \vec{x} et \vec{y} est faible en comparaison des ordres de grandeur des déplacements suivant ces directions (de l'ordre de 1 mm). L'identification de modèle plastique par méthode inverse apparaît donc moins sensible au bruit de mesure que dans le cas de modèles élastiques. En effet, malgré une incertitude expérimentale deux fois supérieure (écart-type de 5 μm au lieu de 2.3 μm), le rapport signal/bruit du cas plastique ($u_{max}^{exp}/A_n \approx 2.4 \times 10^3$) est supérieur à celui du cas élastique ($u_{max}^{exp}/A_n \approx 0.43 \times 10^3$).

5.5 Identification par méthode inverse : essais thermomécaniques

5.5.1 Modèles étudiés

Cette partie vise à identifier, par méthode inverse, le coefficient de Taylor et Quinney β tel qu'il est défini dans la section 3.3.2.2. Ce coefficient représente la fraction d'énergie mécanique dissipée sous forme de chaleur lors de la déformation du matériau. Une valeur constante de $\beta = 0.9$ pour les métaux est couramment rencontrée dans la littérature [Needleman 95, Zhou 96, Kappor 98, Hodowany 00]. Dans ce cas, l'identification paramétrique ne porte que sur 1 seul paramètre et : $\beta = \beta_{int} = \beta_{diff}$. Cependant, de nombreuses études expérimentales ont contredit cette hypothèse, elles montrent une dépendance de β à la déformation et/ou à la vitesse de déformation [Bever 73, Chrysochoos 89, Oliferuk 04, Vivier 09, Dumoulin 10]. Dans ce cas, le nombre de paramètres à identifier est plus important et nous considérerons une définition de β à partir d'un rapport de puissance tel que $\beta = \beta_{diff}$. Une revue des différentes variations de β peut être consultée dans [Macdougall 00].

Pour identifier des modèles prédisant l'évolution de β en fonction de la déformation, 4 modèles sont étudiés : le premier est un modèle constant et les trois autres modèles supposent, conformément aux observations expérimentales, une dépendance de β à la déformation plastique longitudinale \mathbb{E}_p^{xx} . Le quatrième modèle est proposé en 1991 par A.T. Zehnder [Zehnder 91]. L'application de ce modèle à la loi de comportement choisie est discutée dans l'Annexe E. Les quatre modèles sont donc définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{modèle n°1 : } \beta = a, \\ \text{modèle n°2 : } \beta(\mathbb{E}_p^{xx}) = b\mathbb{E}_p^{xx} + c, \\ \text{modèle n°3 : } \beta(\mathbb{E}_p^{xx}) = d(\mathbb{E}_p^{xx})^e + f, \\ \text{modèle n°4 : } \beta(\mathbb{E}_p^{xx}) = \frac{(\mathbb{E}_p^{xx})^{1-n} - \tilde{h}}{(\mathbb{E}_p^{xx})^{1-n}}, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

où (a, b, \dots, f) sont les paramètres à identifier. Dans le premier modèle, a est supposé appartenir à l'intervalle $[0, 1]$. On notera que dans le modèle de Zehnder, n est le coefficient d'écrouissage de la loi de Ludwick et \tilde{h} est la constante à identifier. Par conséquent, les identifications sont menées avec un nombre de paramètres variant de 1 (modèles n°1 et n°4) à 3 (modèle n°3).

5.5.2 Présentation de la procédure d'identification

Le problème thermomécanique qui est présenté ici porte sur l'identification du paramètre β de Taylor et Quinney pour le matériau T40-1.6mm. Deux essais plans de pseudo-cisaillement, à 0° et 90° par rapport à la direction de laminage, sont utilisés. Les mesures de champs cinématiques et thermiques sont effectuées grâce au montage expérimental présenté sur la Figure 2.4.

Notre choix de se placer à nouveau dans le cas d'essais plans peut être expliqué par la nature surfacique et plane des mesures de champs thermiques.

Pour mener à bien cette identification, une procédure en deux étapes a été mise en œuvre (Fig. 5.22). Elle consiste à : (i) résoudre le problème d'identification plastique tel qu'il est présenté en section 5.3.2 (page 92) afin d'obtenir ainsi un modèle élastoplastique (élasticité isotrope, critère de Hill et écrouissage de Ludwick), (ii) identifier un modèle d'évolution de β par méthode inverse via l'évaluation de la puissance plastique.

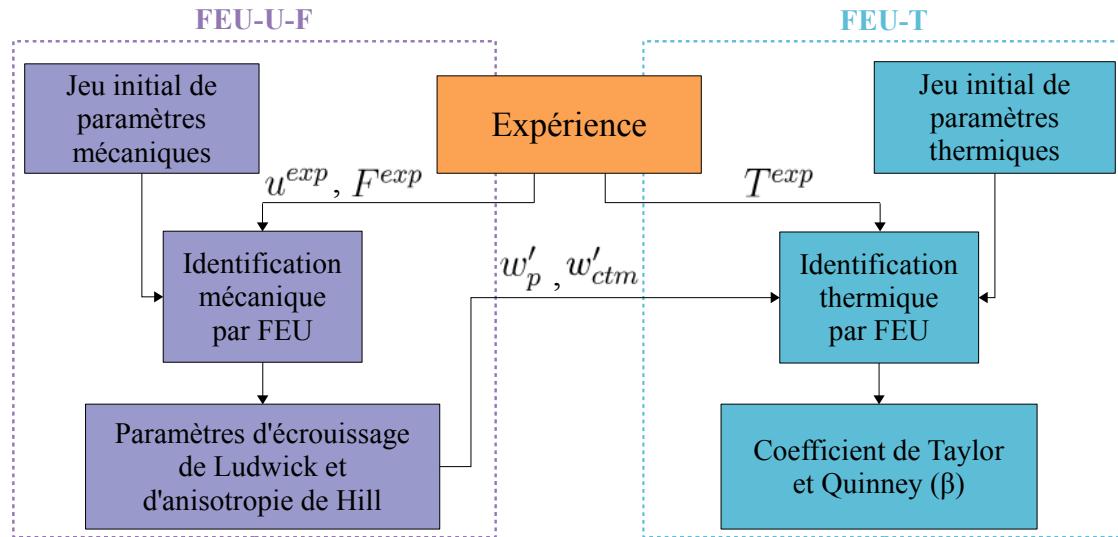


FIG. 5.22 – Schéma de la procédure d'identification thermomécanique.

5.5.3 Identification du modèle mécanique

5.5.3.1 Modélisation numérique

Les problèmes mécaniques et thermiques sont successivement résolus en utilisant le même modèle EF. La géométrie des éprouvettes est maillée à l'aide de 7056 éléments volumiques répartis sur 3 épaisseurs. L'utilisation d'éléments volumiques répond à la nécessité d'intégrer sur le volume les sources de chaleur évaluées après l'identification mécanique (voir section 5.5.3). Le modèle élastique est supposé connu et isotrope (ces valeurs sont reportées dans le Tableau 5.15), le modèle plastique sera entièrement identifié (6 paramètres).

Remarque : On notera que les valeurs données dans le Tableau 5.15 sont celles identifiées pour le matériau T40-0.5mm (on trouvera le détail de l'obtention de ces paramètres dans la section 5.2.1) or nous travaillons ici avec le T40-1.6mm. Cependant on considérera que la similarité de ces deux matériaux nous autorise à utiliser le même modèle élastique linéaire.

Les conditions aux limites mécaniques en terme de déplacement sont appliquées selon les mêmes considérations que celles présentées dans le cas des essais plans (section 5.3.1). Cependant l'utilisation d'éléments volumiques au lieu d'éléments de coques impose une attention particulière. En effet, les conditions aux limites sont appliquées à partir des mesures de champs cinématiques qui sont exclusivement surfaciques. Nous ne disposons donc d'aucune information

TAB. 5.15 – Constantes du modèle mécanique.

Paramètre (Unité)	Paramètres mécaniques			
	ρ $kg.m^{-3}$	E GPa	ν –	σ_y MPa
Valeur	4500	112	0.34	396

sur d'éventuels gradients de déplacement dans l'épaisseur de l'éprouvette. C'est pourquoi une hypothèse d'homogénéité de ces déplacements selon l'axe \bar{z} a été posée au niveau des frontières non libres de l'éprouvette. En conséquence les déplacements mesurés (en surface) aux frontières supérieures et inférieures de l'éprouvette ont été interpolés aux nœuds du maillage EF et cette information a été répétée dans l'épaisseur du maillage.

5.5.3.2 Identification plastique par méthode inverse

Dans cette partie, le modèle élastique est considéré comme connu *a priori* et isotrope. L'identification du modèle plastique est menée par méthode inverse comme dans le cas des autres essais plans (section 5.3.2). Au total, six paramètres sont identifiés à partir de deux essais à 0° et 90° (soit $N_e = 2$). En effet, nous avons vu que dans le cas d'essais plans avec des géométries de pseudo-cisaillement, deux essais suffisent à identifier correctement le modèle plastique (voir section 5.3.2). La fonction objectif (équation (4.12)) admet comme autres paramètres $N_r = 7056$ et $N_t = 15$. Les résultats de l'identification mécanique sont présentés dans le Tableau 5.16.

TAB. 5.16 – Paramètres mécaniques initiaux et identifiés³.

Paramètres	K	n	F	G	H	N
Valeurs initiales	550	0.3	1.5	1.5	1.5	3
Valeurs identifiées	370	0.47	0.15	0.28	0.72	1.7

La Figure 5.23(a) montre les courbes force/déplacement mesurées et calculées à partir du modèle identifié sur la base des essais à 0° et 90° . Le procédé d'identification par FEU-U-F conduit à une bonne correspondance des courbes numériques et expérimentales. Les champs d'erreurs relatives en déplacement longitudinal pour cinq pas de temps répartis le long du processus de déformation sont reportés sur la Figure 5.23(b). L'erreur observée demeure faible puisqu'inférieure à 8%. Ces résultats correspondent aux valeurs obtenue par d'autres auteurs [Meuwissen 98b, Lecompte 07a] pour des identifications inverses du même modèle de comportement.

Munis d'un modèle élastoplastique complet, les champs de déformations et de contraintes peuvent être utilisés afin de calculer l'évolution des puissances mises en jeu durant la déformation.

5.5.4 Bilan énergétique du problème

En se basant sur le bilan énergétique énoncé au chapitre 3 par l'équation (3.36), nous cherchons ici à tracer l'évolution des puissances mises en jeu durant la déformation de l'éprouvette :

3. On notera que ces résultats ne peuvent pas être comparés à ceux présentés dans les Tableaux 5.4 et 5.10, il s'agissait alors de T40-0.5mm alors que nous travaillons ici avec du T40-1.6mm.

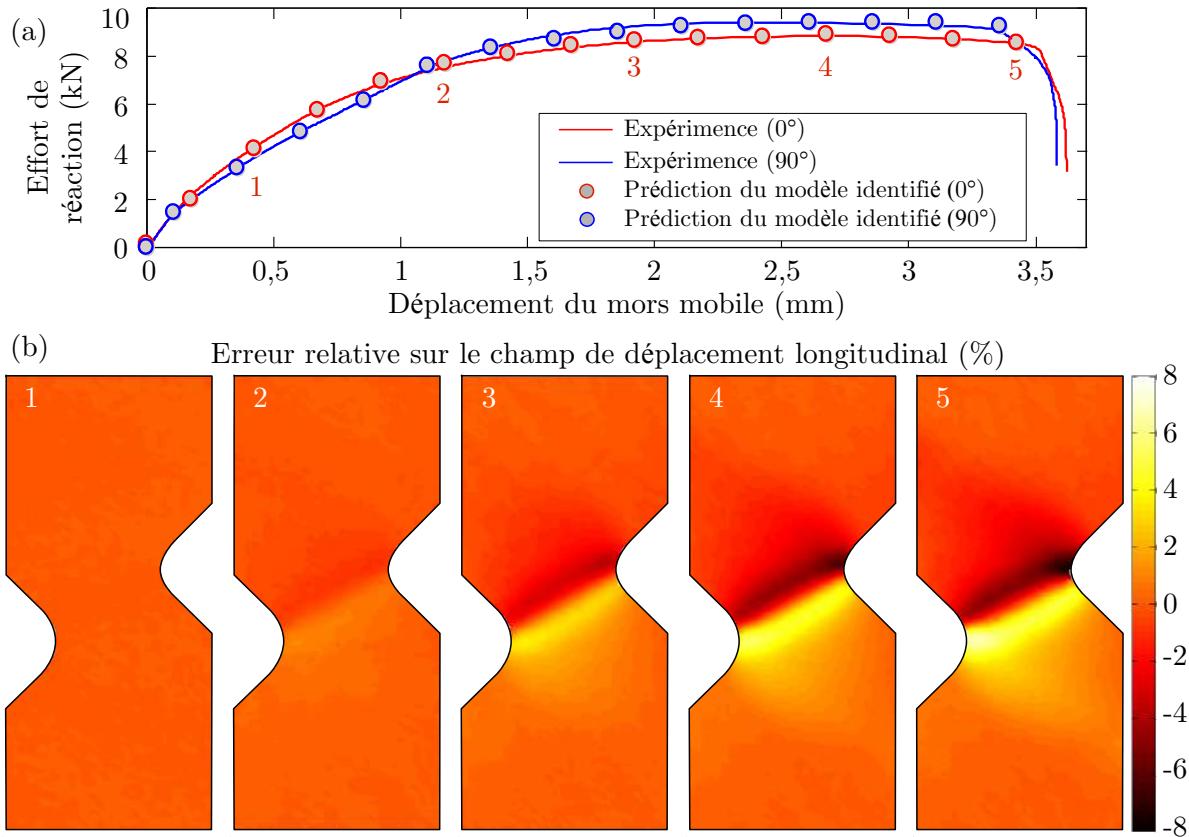


FIG. 5.23 – (a) Courbes force/déplacement pour les essais à 0° et 90° et prédictions de l'effort de réaction par le modèle de comportement identifié. (b) Erreur relative sur le champ de déplacement longitudinal après identification pour l'essai à 0° .

La puissance anélastique w'_a , la puissance élastique w'_e , la puissance extérieure $w'_{ext} = w'_e + w'_a$ et enfin la puissance du couplage thermoélastique w'_{thel} .

La puissance anélastique w'_a du problème est calculée par l'équation (3.21) qui requiert l'évaluation de \mathbb{F}_e et \mathbb{F}_p . Ces deux tenseurs sont obtenus à partir du tenseur gradient \mathbb{F} . En effet, la définition autorise son évaluation par dérivation des champs de déplacement numériques. Par ailleurs, la donnée du tenseur de Cauchy \mathbb{S} (issu du calcul EF) dans la base principale fournit les élongations principales et permet *via* la loi de Hooke, d'évaluer \mathbb{F}_e et donc d'en déduire \mathbb{F}_p par la relation $\mathbb{F} = \mathbb{F}_e \mathbb{F}_p$. Dès lors, w'_a est fournie à partir de l'équation (3.21). La Figure 5.24 montre l'évolution de w'_a au cours de l'essai. Cette puissance se localise dans une étroite bande au centre de l'éprouvette avec une intensité maximale au niveau des pointes des encoches.

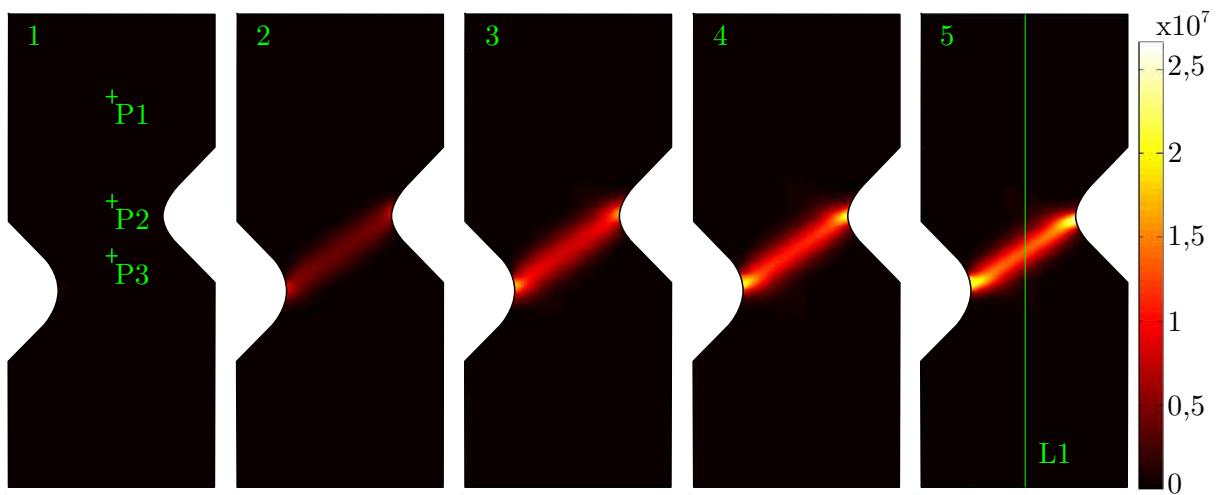


FIG. 5.24 – Évolution du champ de puissance anélastique volumique w'_a en fonction du temps (en $W.m^{-3}$). Les numéros 1 à 5 correspondent aux pas de temps définis sur la Figure 5.23(a). Nous définissons ici les points P_1 , P_2 et P_3 ainsi que la ligne L_1 qui seront utilisés plus tard afin de tracer des évolutions temporelles de température.

La puissance élastique w'_e peut aussi être calculée à partir de la donnée des mêmes tenseurs (\mathbb{F}_e , \mathbb{F}_p et \mathbb{S}). De plus, les puissances élastique et anélastique permettent d'évaluer la **puissance des efforts extérieurs** w'_{ext} de manière directe.

Enfin, la valeur de la **puissance du couplage thermoélastique** peut être approximée par l'équation (3.47) qui permet d'écrire $w'_{thel} \approx -\alpha T_0 \text{tr}(\dot{\mathbb{S}}_R)$ et donc d'estimer localement w'_{thel} .

L'intégration, sur le volume Eulérien des éléments du maillage V_i , des différentes puissances volumiques calculées à ce stade (w'_e , w'_a , w'_{thel} et w'_{ext}) permet de dresser un bilan global des puissances mises en jeu lors de la déformation (voir la section 3.3.2.1). L'évolution temporelle de ces grandeurs est tracée sur la Figure 5.25 et comparée à l'évaluation expérimentale de la puissance des efforts extérieurs qui découle classiquement de :

$$W'_{ext}^{exp} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{U}_{mors}}{\partial t}. \quad (5.10)$$

où \vec{U}_{mors} est le vecteur déplacement mesuré par analyse d'images DIC aux frontières non libres de l'éprouvette et \vec{F} est le vecteur des efforts extérieurs. En effet, l'approche par FEU-U-F utilisée

pour identifier le modèle de comportement mécanique autorise l'évaluation de W'_{ext} avec une grande précision. Ainsi \vec{U}_{mors} est directement issu de la mesure par DIC et les deux composantes de \vec{F} (longitudinale et transversale), en chaque nœud, sont issues du calcul EF. La mesure par DIC permet (contrairement à la seule donnée du déplacement de la traverse) de s'affranchir du déplacement longitudinal lié aux mors auto-serrants. Cette mesure permet aussi de prendre en compte le déplacement transversal de l'éprouvette.

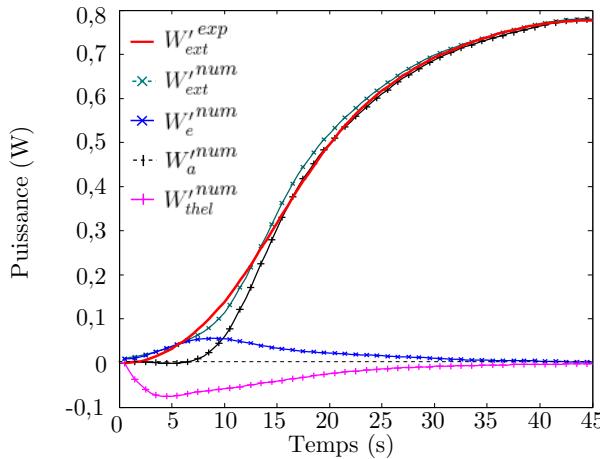


FIG. 5.25 – Bilan des puissances mises en jeu durant l'essai.

Une bonne correspondance entre l'évaluation expérimentale et numérique de la puissance des efforts extérieurs est constatée. Par ailleurs, la bonne évaluation de la puissance extérieure par le modèle mécanique identifié valide cette identification ainsi que la procédure d'évaluation des sources de chaleur. Enfin, la somme des comportements locaux de chaque élément du maillage permet de retrouver de manière fidèle le comportement global de l'éprouvette durant l'essai.

Une fois assuré de la qualité de l'évaluation des puissances mises en jeu durant l'essai les sources de chaleur w'_{ch} peuvent être calculées. Pour ce faire, la donnée d'une valeur à β permet d'estimer w'_{ch} via la définition du coefficient de Taylor et Quinney (Eq. 3.38). Cette valeur de β sera évaluée à partir de la valeur courante du vecteur paramètres \underline{x} .

5.5.5 Identification du modèle thermique

5.5.5.1 Modélisation numérique

Le calcul thermique est effectué sur un maillage Lagrangien ne se déformant pas durant la sollicitation thermique. Ce maillage est identique à celui utilisé pour l'identification mécanique. Le champ de température initiale $T_0(X, Y)$ (qui est donc Lagrangien) est imposé à partir des mesures effectuées en début d'essai. Les 10 premières images du film thermique sont moyennées et ce champ surfacique de température est interpolé puis imposé à chaque nœud du maillage. Le maillage étant volumique et comportant 3 épaisseurs d'éléments, l'information surfacique de $T_0(X, Y)$ est répétée à l'identique pour chaque couche de nœuds. Ceci revient à poser l'hypothèse d'un champ de température initiale constant dans l'épaisseur. Le calcul thermique est ensuite résolu sous sa forme tri-dimensionnelle et conduit à l'obtention d'un champ de température n'étant pas nécessairement constant dans l'épaisseur. Enfin, la fonction objectif du problème thermique (4.13) est construite en comparant le champ surfacique mesuré avec les températures calculées à la surface du maillage (c'est-à-dire sur la première couche de nœuds).

De plus, on supposera la conductivité, la chaleur spécifique et le coefficient de dilatation connus. Leurs valeurs respectives sont issues des ouvrages suivants [Schmidt 99, Lütjering 03]. Le Tableau 5.17 indique les valeurs données à ces constantes.

TAB. 5.17 – Constantes du modèle thermique.

Paramètre (Unité)	Paramètres thermiques		
	k $W.m^{-1}.\text{°}K^{-1}$	C $J.kg^{-1}.\text{°}K^{-1}$	α $^{\circ}K^{-1}$
Valeur	17	520	$8.4 \cdot 10^{-6}$

Concernant les conditions aux limites thermiques, il convient de distinguer deux types d'échanges thermiques : les fuites thermiques dues aux échanges par convection avec l'air ambiant, et les fuites dues aux échanges avec les mors de la machine de traction. Les fuites par convection avec l'air ambiant ont été modélisées par un flux surfacique de chaleur sur les faces avant et arrière de l'éprouvette $\phi_{face} = h_{face} \cdot \theta$, où h_{face} est le coefficient surfacique d'échange par convection des faces avant et arrière. On rappelle que $\theta = T - T_0$ représente la variation de température entre l'état actuel et l'état de référence. Par ailleurs, les fuites par les surfaces latérales de l'éprouvette seront négligées.

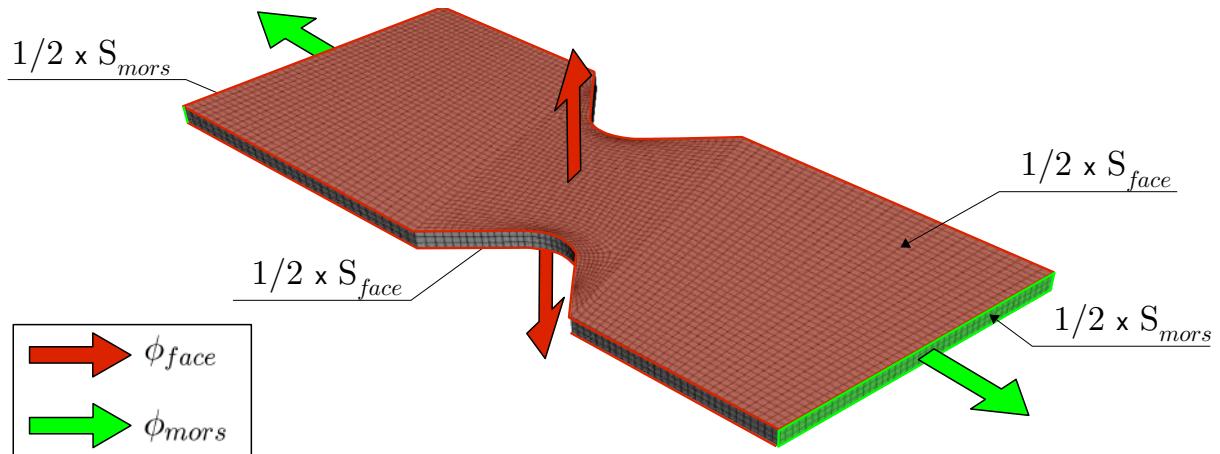


FIG. 5.26 – Modélisation numérique des conditions aux limites thermiques du problème. Deux flux surfaciques servent à modéliser (i) les fuites thermiques de convection des faces en contact avec l'air ambiant et (ii) les fuites par conduction dans les mors de la machine de traction.

Les échanges thermiques avec les mors ont aussi été modélisés par un flux surfacique de chaleur $\phi_{mors} = h_{mors} \cdot \theta$, où h_{mors} est le coefficient surfacique équivalent des échanges avec les mors (Fig. 5.26). Le bilan global des échanges de chaleur avec l'extérieur du système s'écrit alors :

$$W'_{perte} = \phi_{face}S_{face} + \phi_{mors}S_{mors}, \quad (5.11)$$

où W'_{perte} est la puissance globale des pertes thermiques, S_{face} et S_{mors} sont respectivement les surfaces des zones de contact avec l'air et avec les mors. Muni de cette modélisation, il convient maintenant d'évaluer les deux constantes h_{face} et h_{mors} afin de déterminer tous les paramètres du modèle.

5.5.5.2 Caractérisation des conditions aux limites thermiques

Les valeurs numériques de h_{face} et h_{mors} ont été évaluées par la méthode de *retour à l'équilibre thermique* présentée dans [Louche 99]. Cette méthode propose d'observer à l'aide d'une caméra IR le retour à l'équilibre thermique d'une éprouvette chauffée (ou refroidie) de manière homogène. Deux éprouvettes ont donc été chauffées à 50°C et deux expériences ont été menées :

Cas n°1 : Une première éprouvette (notée n°1 sur la Figure 5.27(a)) a été coupée aux deux extrémités afin de présenter une surface de contact avec l'air ambiant identique à celle observée lors d'un essai de traction plan (*i.e.* la partie qui se situe normalement dans les mors est retirée). Cette éprouvette est suspendue librement dans l'air ambiant jusqu'à son retour à température ambiante.

Cas n°2 : La seconde éprouvette (notée n°2 sur la Figure 5.27(a)) est installée dans les mors de la machine de traction. Comme dans le cas d'un essai normal, la machine est sous tension et le mors mobile présente une température supérieure à celle du mors fixe.

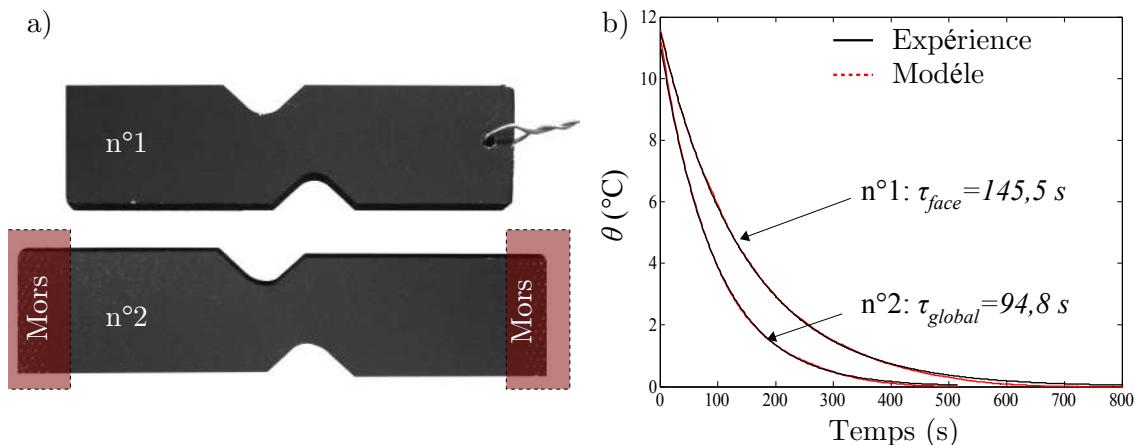


FIG. 5.27 – (a) Éprouvettes utilisées pour la caractérisation des conditions aux limites thermiques. (b) Évolution des températures au centre des éprouvettes en fonction du temps (moyenne sur 100 pixels).

La Figure 5.27(b) montre l'évolution des températures des deux éprouvettes au cours du temps. Dans les deux cas présentés, les sources de chaleur sont nulles et les variations de température en fonction du temps sont faibles, ce qui autorise à utiliser une version simplifiée de l'équation de la chaleur où les pertes thermiques peuvent être modélisées par une constante de temps scalaire [Chrysochoos 89]. Par ailleurs, on peut classiquement modéliser l'évolution de température en un point par l'équation suivante :

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (5.12)$$

où θ_0 est la valeur initiale de θ , t représente le temps et τ est la constante de temps de l'équation de la chaleur simplifiée. Dès lors, les deux expériences menées conduisent à l'évaluation de deux constantes de temps. La première, notée τ_{face} , est reliée aux fuites thermiques dues aux échanges par convection avec l'air ambiant. La seconde, notée τ_{global} concerne l'ensemble des échanges thermiques de l'éprouvette avec son environnement. De plus, en postulant que l'ensemble des échanges thermiques peut être scindé en une partie due aux échanges par convection et une autre due aux fuites à travers les mors, on peut poser :

$$\frac{1}{\tau_{global}} = \frac{1}{\tau_{face}} + \frac{1}{\tau_{mors}}, \quad (5.13)$$

où τ_{mors} est la constante de temps associée aux fuites thermiques à travers les mors. L'équation (5.13), ainsi que la connaissance de τ_{face} et τ_{global} au travers de l'équation (5.12) conduisent explicitement à l'évaluation de cette constante. Enfin, la relation entre les constantes de temps (τ_{face} et τ_{mors}) d'une part et les coefficients surfaciques d'échanges (h_{face} et h_{mors}) d'autre part donne [Chrysochoos 00] :

$$\tau_{face} = \frac{\rho C e}{2h_{face}} \quad \text{et} \quad \tau_{mors} = \frac{\rho C L}{2h_{mors}}, \quad (5.14)$$

où $e = 1.6 \text{ mm}$ et $L = 66 \text{ mm}$ sont respectivement l'épaisseur et la longueur de l'échantillon (on rappelle qu'il s'agit de T40-1.6mm). Ainsi, la relation (5.14) permet d'évaluer numériquement les deux coefficients surfaciques d'échanges tel que $h_{face} = 13 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$ et $h_{mors} = 286 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$.

Remarque : Cette relation est normalement définie pour des éprouvettes rectangulaires. Dans le cas présent, nous noterons que les entailles n'influent pas sur l'évaluation de ϕ_{face} tant que S_{face} est évaluée correctement. Concernant l'évaluation de ϕ_{mors} nous considérerons que l'influence des entailles sur la conduction de la chaleur suivant l'axe longitudinal de l'éprouvette est négligeable. Cette hypothèse est particulièrement raisonnable si on s'éloigne suffisamment de la zone centrale, ce qui est le cas de la surface d'application de ϕ_{mors} (Fig. 5.26).

5.5.5.3 Identification de β par méthode inverse

Dans cette partie, les quatre modèles d'évolution de β (5.9) sont identifiés par une approche FEU-T et à partir d'un seul des deux essais utilisés pour l'identification mécanique. La fonction objectif du problème d'optimisation prend la forme suivante :

$$f(\underline{x}) = \left[\sum_{i,j,k=1}^{N_e, N_t, N_r} \left(\frac{\theta_{jk}^{EF}(\underline{x}) - \theta_{jk}^{exp}}{\underline{\theta}_j^{exp}} \right)_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.15)$$

Dans le cas présent, $N_e = 1$ (seul l'essai à 0° est considéré), $N_t = 15$ et $N_r = 7056$ comme dans le cas de l'identification mécanique. Connaissant la valeur de la déformation en chaque nœud et à chaque pas de temps grâce au calcul mécanique, nous pouvons évaluer la valeur de β (\mathbb{E}_p^{xx}) et donc les sources de chaleur volumiques w'_{ch} dans chaque élément. Ces sources de chaleur constituent les sollicitations thermiques du problème EF. Les conditions aux limites sont appliquées suivant les considérations présentées en section 5.5.5.1 et 5.5.5.2. Dès lors, le modèle EF fournit les champs de température prédits par le modèle d'évolution de β qui sont comparés aux champs expérimentaux. Les paramètres identifiés des 4 modèles sont regroupés dans le Tableau 5.18.

Les modèles n°3 et n°4 montrent la plus faible valeur finale de la fonction objectif, ce sont donc les modèles les plus capables de prédire les champs de température observés. *A contrario* la valeur finale de la fonction objectif des modèles n°1 et n°2 indique que malgré le processus d'optimisation, ces modèles sont moins capables de modéliser les phénomènes observés de manière satisfaisante.

TAB. 5.18 – Paramètres thermiques identifiés pour les 4 modèles d'évolution de β (5.9)

Paramètre	modèle 1		modèle 2		modèle 3			modèle 4
	a	b	c	d	e	f	\tilde{h}	
Valeur initiale	1		0.3	0.3	0.3	1	0.3	1
Valeur identifiée	0.65		0.79	0.43	0.99	0.21	0.013	4.1
f_{fin} ¹	2.20		1.91		1.70		1.81	

¹Valeur finale de la fonction objectif.

La Figure 5.28(a) présente l'évolution de β en fonction de la déformation longitudinale pour les quatre modèles identifiés. On remarquera que ces courbes commencent à $\mathbb{E}_p^{xx} = 0.05$. En effet, la fonction $\beta(\mathbb{E}_p^{xx})$ n'est pas définie en 0 (voir l'équation (3.38)). De plus, l'évolution des températures prédites et mesurées pour les trois points (P1, P2 et P3) définis sur la Figure 5.24 est présentée dans la Figure 5.28(b). Là encore, nous constatons que le modèle n°3 est celui qui se rapproche le plus des mesures de température. Le fait que ce modèle soit celui qui possède le plus de degrés de liberté semble avoir prévalu sur l'aspect *phénoménologique* du modèle de A.T. Zehnder (modèle n°4) qui ne se révèle pas aussi performant que le modèle n°3.

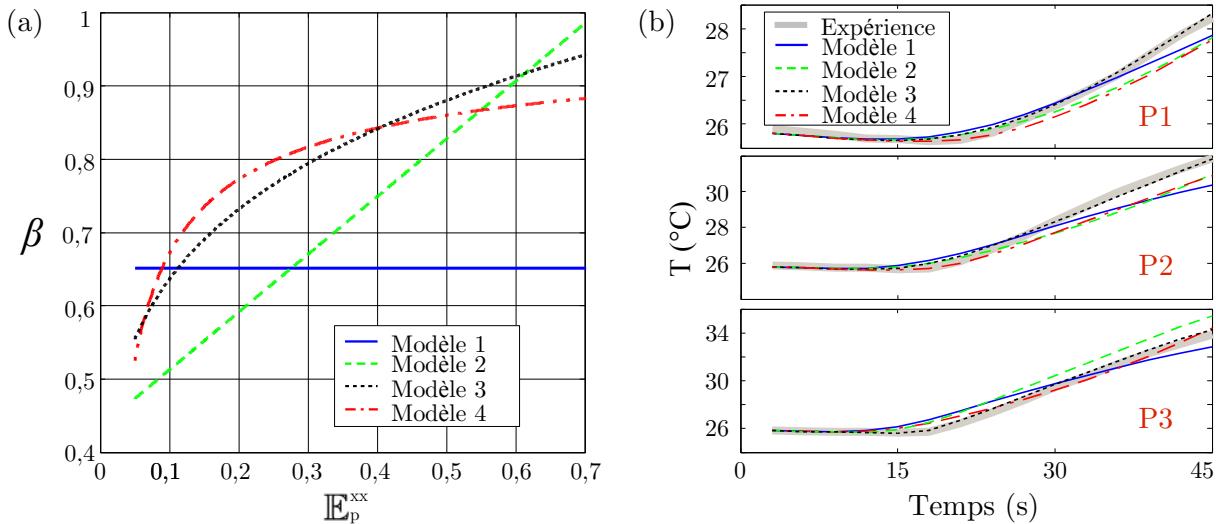


FIG. 5.28 – (a) Évolution de β pour les quatre modèles identifiés. (b) Comparaison des prédictions de température des quatre modèles identifiés avec les données expérimentales pour trois points répartis le long de l'axe central de l'éprouvette (les points P1, P2 et P3 sont définis sur la Figure 5.24).

Pour le modèle n°3, les erreurs commises sur la prédiction des températures à la surface de l'éprouvette peuvent être évaluées. Pour cela, on définit l'erreur de prédiction comme la différence relative des températures prédites et mesurées, soit :

$$e^{pred}(\mathbf{X}, t) = \frac{\theta_i^{num}(\mathbf{X}, t) - \theta^{exp}(\mathbf{X}, t)}{\theta^{exp}(\mathbf{X}, t)}, \quad (5.16)$$

où $\theta_i^{num}(\mathbf{X}, t)$ est la température calculée avec le modèle n° i et $\theta^{exp}(\mathbf{X}, t)$ la température mesurée. Cette erreur est tracée sur la Figure 5.29 pour le modèle n°3 aux 5 pas de temps définis sur la Figure 5.23(a). La valeur de l'erreur $e^{pred}(\mathbf{X}, t)$ demeure comprise dans l'intervalle [-5%, 5%].

Par ailleurs, comme pour l'erreur de prédition mécanique, l'erreur de prédition en température se localise principalement dans le voisinage de la bande de cisaillement.

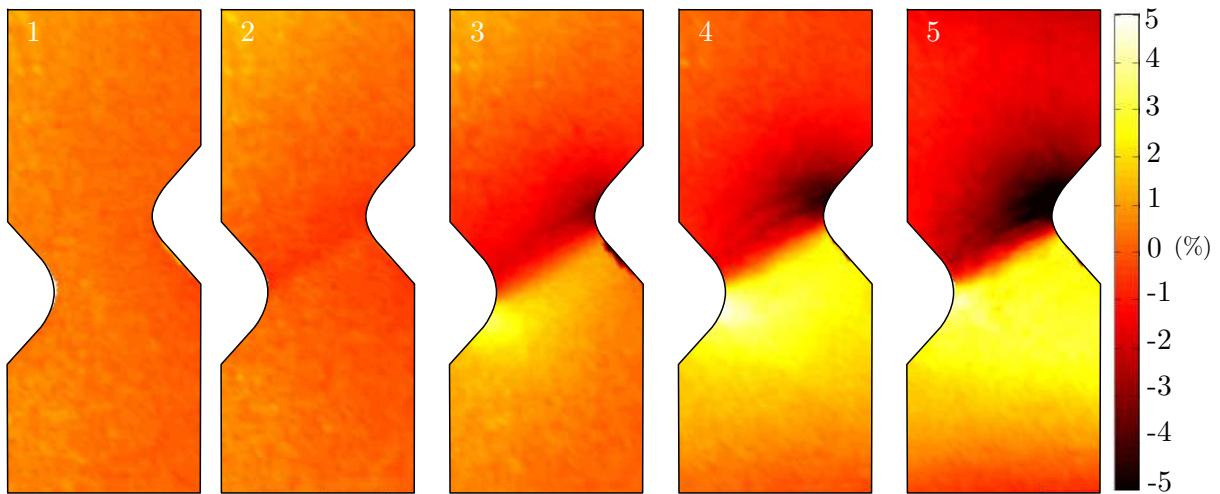


FIG. 5.29 – Erreur de prédictions sur les températures (en %) pour 5 pas de temps du modèle n°3.

La même erreur de prédition est tracée sur la Figure 5.30 pour les 4 modèles identifiés et le long de l'axe central de l'éprouvette (la ligne L1 définie sur la Figure 5.24). Cette représentation permet de suivre l'évolution de la température suivant l'axe longitudinal de l'éprouvette en fonction du temps. À ces représentations est superposée la courbe force/temps du même essai. On peut remarquer que l'erreur de prédition du modèle n°3 est globalement plus faible et plus concentrée dans le temps et dans l'espace.

Ces résultats confirment la dépendance de β à la déformation. En effet, les performances du modèle constant (modèle n°1) sont systématiquement inférieures à celles des autres modèles. Par ailleurs, l'utilisation d'un modèle linéaire (modèle n°2) n'apporte pas d'amélioration significative de la prédition de l'auto-échauffement du matériau. Enfin, les valeurs β obtenues conduisent à remettre en question la valeur de 0.9 observée dans de nombreuses analyses EF. En effet, cette valeur n'est atteinte par les modèles n°3 ou n°4 que pour de très grandes déformations (Fig. 5.28(a)). Autrement dit, β ne vaut 0.9 que dans les zones de localisation de l'éprouvette (fonds des encoches).

5.5.6 Validation : sensibilité au bruit

Comme dans le cas des identifications mécaniques présentées précédemment, la sensibilité au bruit de mesure des jeux de paramètres identifiés a été étudiée. La mesure de champ thermique s'avère en pratique très bruitée [Chrysochoos 00, Watrissse 03]. Dans les applications par méthode directe de ce genre de mesure, qui consistent à évaluer les sources de chaleur, ce bruit de mesure est très problématique. En effet, la forme de l'équation de la chaleur (Eq. 3.49) impose de dériver deux fois dans l'espace et une fois dans le temps un signal thermique bruité. Les difficultés, bien connues, de stabilité des dérivations numériques de signaux bruités posent alors un problème évident. Cependant, dans le cas d'une méthode inverse, l'évaluation des sources de chaleur ne se fait pas à partir des données expérimentales mais à partir de données simulées, donc moins assujetties au bruit. Cependant, la sensibilité intrinsèque des méthodes inverses au

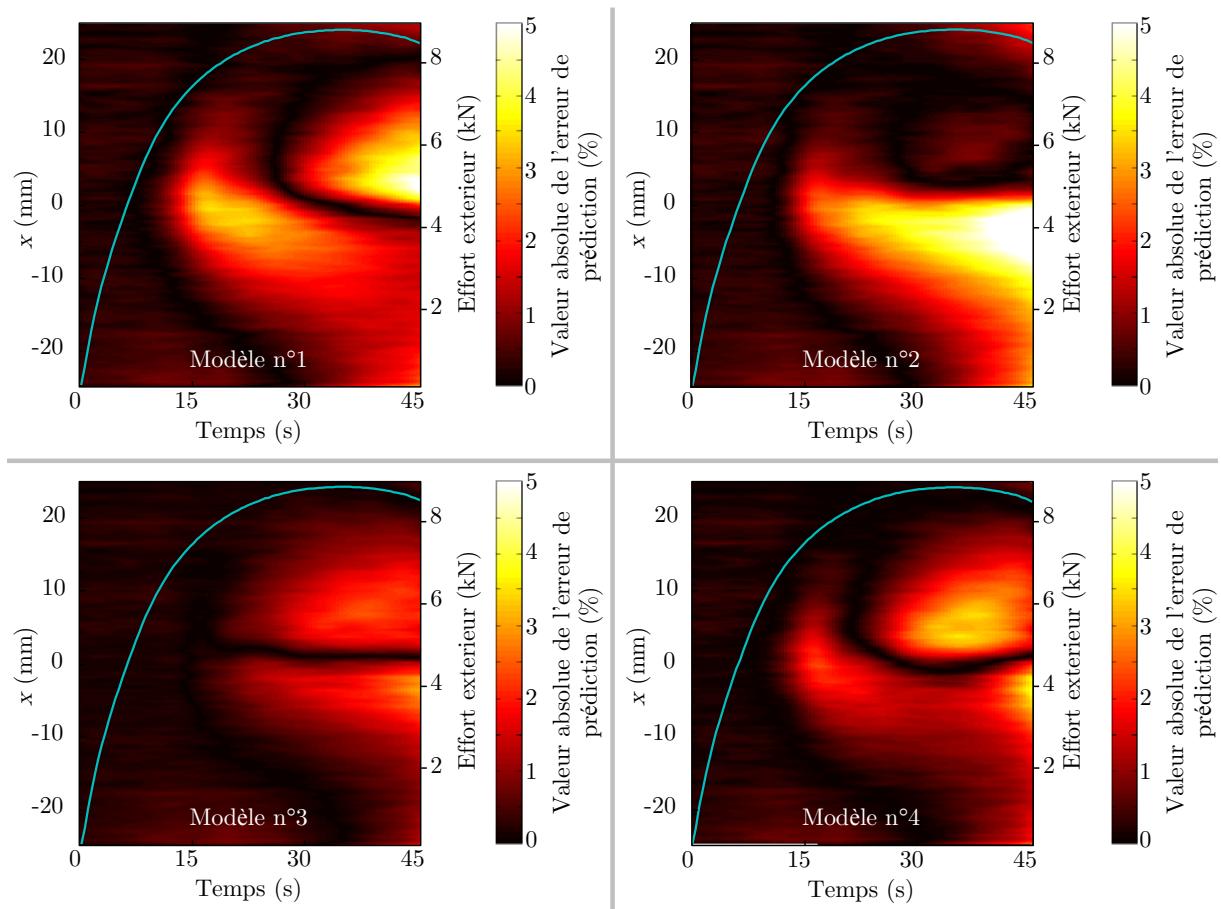


FIG. 5.30 – Représentation spatio-temporelle de la valeur absolue de l'erreur de prédiction pour les quatre modèles identifiés. L'évolution de la température le long de la ligne L1 est tracée en fonction du temps. La courbe force/temps est superposée à cette représentation.

bruit de mesure conduit à vouloir s'intéresser à cet aspect.

Les champs thermiques mesurés par la caméra IR sont donc bruités par un bruit Gaussien tel qu'il est estimé dans la section 2.5.3. Rappelons que nous avions alors posé que $e_{IR} \sim \mathcal{N}(0; 80 \text{ mK})$. L'expression du champ thermique bruité $\tilde{\theta}^{exp}$ est alors donnée par :

$$\tilde{\theta}^{exp} = \theta^{exp} + \Phi_4 \quad \text{avec} \quad \Phi_4 \sim \mathcal{N}(0; 80 \text{ mK}). \quad (5.17)$$

Dans ce cas, comme dans le cas des essais mécaniques, le bruit est appliqué après l'interpolation des champs de température aux noeuds du maillage EF. Le processus d'identification est relancé pour les 4 modèles identifiés (*cf.* Tableau 5.18). Pour chaque modèle, trois identifications sont effectuées avec trois réalisations de la variable aléatoire Φ_4 . Les résultats sont présentés dans le Tableau 5.19.

TAB. 5.19 – Paramètres thermiques identifiés avec des champs thermiques bruités

Paramètre	modèle 1		modèle 2		modèle 3			modèle 4
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	
Référence	0.65		0.79	0.43	0.99	0.20	0.013	4.1
Réalisation 1	0.61		0.80	0.43	0.99	0.20	0.013	4.1
Réalisation 2	0.67		0.79	0.43	0.99	0.20	0.013	4.1
Réalisation 3	0.63		0.79	0.43	0.99	0.20	0.013	4.1

La dispersion des quatre modèles en fonction de la déformation longitudinale \mathbb{E}_p^{xx} est reportée sous forme de barres d'erreurs sur la Figure 5.31.

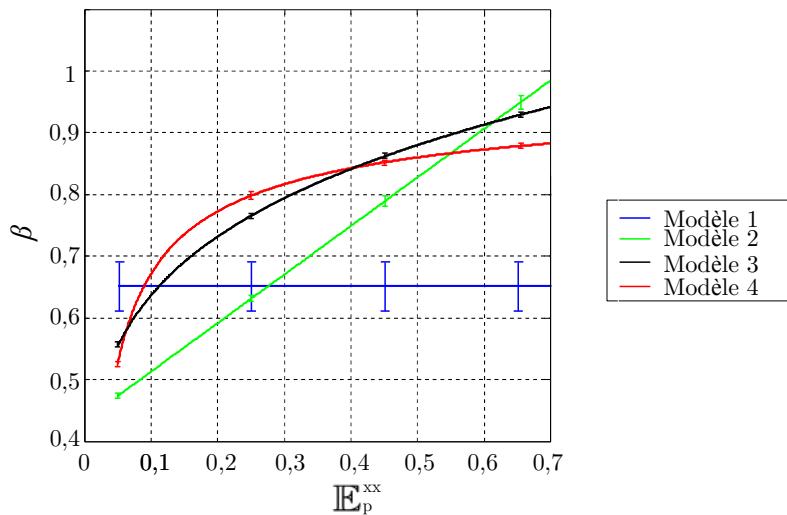


FIG. 5.31 – Dispersion des modèles identifiés suite à l'application d'un bruit Gaussien sur les mesures de températures.

À l'exception du modèle n°1, la méthode d'identification proposée présente une bonne stabilité au bruit de mesure. Il semble cohérent que ce bruit n'affecte que faiblement les résultats car le problème direct étant dans le sens de la dérivation, le problème inverse se trouve dans le sens

de la régularisation qui est généralement synonyme de stabilité numérique. En d'autres termes, modifier la valeur d'une source locale de chaleur aura une conséquence sur un grand nombre de points de calcul de la température. L'erreur ainsi commise sera largement moyennée par la formulation aux moindres carrés de la fonction objectif. Nous pouvons donc conclure que l'aspect *conductif* de l'équation de la chaleur ainsi que le processus d'optimisation par moindres carrés tendent à amortir l'influence d'un écart local de température et donc du bruit de mesure.

5.6 Conclusion du cinquième chapitre

Dans ce chapitre nous avons mis en œuvre plusieurs types de méthodes inverses par recalage de modèles EF afin d'identifier des paramètres mécaniques et thermiques à partir d'essais plan et hors-plan. Les résultats des identifications mécaniques montrent l'intérêt d'utiliser des éprouvettes présentant des champs de déformation hétérogènes et ceci d'un point de vue tant qualitatif que quantitatif. En effet, il a été montré que les jeux de paramètres identifiés à partir d'essais hétérogènes présentent une meilleure capacité à prédire le comportement du matériau lors de sollicitations complexes. De plus, il a été mis en évidence que l'utilisation de tels essais conduit à diminuer le nombre d'expérimentations nécessaires à l'identification de modèles de comportement.

D'un point de vue thermomécanique, des mesures de champs cinématiques et thermiques ont été couplées afin d'identifier la fraction de puissance anélastique dissipée sous forme de chaleur β . Dans le même temps, un modèle plastique complet a été identifié en utilisant la même base expérimentale. Les résultats mettent en évidence une dépendance du coefficient β à la déformation. De plus, les valeurs obtenues pour ce paramètre tendent à montrer que la valeur communément admise pour ce coefficient (0.9 pour les métaux) n'est atteinte que dans le cas de très grandes déformations. Dans le cas de déformations plus faibles, les résultats montrent que ce coefficient prend des valeurs inférieures.

Enfin, plusieurs approches de validations ont permis de juger de la qualité des paramètres obtenus mais aussi de la méthode employée. Il apparaît que la sensibilité aux bruit de mesure, de l'identification inverse par recalage de modèle EF demeure raisonnable tant que les déformations considérées sont suffisamment grandes. En effet, dans le cas de très petites déformations (notamment celles considérées lors des identifications élastiques) le bruit de mesure devient problématique quant à la stabilité de la méthode. Il a également été montré que le niveau d'hétérogénéité des déformations des éprouvettes utilisées doit être suffisant afin de garantir que l'identification par méthode inverse sera de meilleure qualité qu'une identification dite *classique*.

CONCLUSION

Conclusion et perspectives

Conclusion générale

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du développement des méthodes d'identification inverse par mesure de champs. Ce domaine de recherche très actif, s'attache au développement de méthodes d'identification de paramètres de lois de comportement à partir d'essais hétérogènes en déformation. Dans le présent travail de thèse nous avons mis en œuvre une méthode inverse par recalage de modèle Éléments Finis utilisant des mesures de champs tant cinématique que thermique.

Deux procédures de recalage de modèles Éléments Finis ont été utilisées à des fins d'identification paramétrique. L'une se base sur la comparaison de force et de champs de déplacement et se propose d'identifier des paramètres de comportement issus de lois de comportement mécaniques : élasticité (isotope et orthotrope) et plasticité anisotrope. L'autre, basée sur des comparaisons de champs de température, conduit à l'identification de paramètres de lois thermomécaniques régissant la dissipation, sous forme de chaleur, de l'énergie plastique.

Le problème d'optimisation posé par la méthode de recalage par Éléments Finis conduit à la définition d'une fonctionnelle regroupant des comparaisons entre les données expérimentales et celles issues de la simulation de l'expérience par un modèle EF. Un algorithme d'optimisation de type Levenberg-Marquardt a été implémenté et permet la minimisation de telles fonctionnelles et donc l'actualisation itérative du jeu de paramètres.

L'utilisation de telles méthodes inverses repose sur la donnée de champs de déplacement ou de température. Ainsi, plusieurs géométries d'éprouvettes présentant des hétérogénéités croissantes des champs de déformation ont été testées. De plus, une nouvelle procédure expérimentale permettant d'appliquer des sollicitations de traction, de cisaillement (suivant deux directions perpendiculaires) et d'expansion à un flan circulaire a été proposée et mise en œuvre. La mesure des champs cinématiques a été effectuée par corrélation d'images numériques. Le post-traitement de ces informations expérimentales a été effectué grâce au logiciel 7D, développé au sein du laboratoire SYMME, et a permis de mesurer les déplacements (plan et non-plan) subis par les éprouvettes lors de leur déformation.

La mesure des champs de température a été effectuée via l'utilisation d'une caméra infrarouge. Le post-traitement des données thermiques a nécessité la mise en place d'une procédure de compensation des mouvements de l'éprouvette. Par ailleurs, une attention particulière a été portée au recalage géométrique et temporel des différentes mesures.

Par ailleurs, du fait de la sensibilité des méthodes inverses au bruit de mesure, une étude bibliographique et expérimentale a été menée afin d'évaluer les incertitudes des moyens de mesure de champs cinématiques et thermiques. En effet, les trois procédures de mesure de champs utilisées dans ces travaux : cinématiques planes, thermiques et surtout cinématiques non planes

ont fait l'objet d'une étude afin d'évaluer l'amplitude de leur bruit respectif. Les résultats de cette étude ont permis de valider numériquement la stabilité de la méthode inverse retenue et de conclure à une plus grande dispersion dans le cas mécanique que dans le cas thermique.

Les résultats des identifications mécaniques montrent l'intérêt d'utiliser des éprouvettes présentant des champs de déformation hétérogènes et ceci d'un point de vu tant qualitatif que quantitatif. En effet, les jeux de paramètres identifiés à partir d'essais hétérogènes présentent une bien meilleure capacité à prédire le comportement du matériau lors de sollicitations complexes. De plus, il a été mis en évidence que l'utilisation de tels essais conduit à diminuer le nombre d'expérimentations nécessaires à l'identification de modèles de comportement.

D'un point de vue thermomécanique, des mesures de champs cinématiques et thermiques ont été couplées afin d'identifier la fraction de puissance anélastique dissipée sous forme de chaleur. Dans le même temps, un modèle plastique complet a été identifié en utilisant la même base expérimentale. Les résultats mettent en évidence une dépendance du coefficient de Taylor et Quinney (β) à la déformation plastique cumulée. Les valeurs obtenues pour ce paramètre tendent à montrer que la valeur communément admise pour ce coefficient ($\beta = 0.9$ pour les métaux) n'est atteinte que dans le cas de très grandes déformations. Dans le cas de déformations plus faibles, les résultats montrent que ce coefficient prend des valeurs inférieures.

Enfin, plusieurs approches de validations permettent de juger de la qualité des paramètres obtenus mais aussi de la méthode employée. Il apparaît que la sensibilité, au bruit de mesure de l'identification inverse par recalage de modèle EF demeure raisonnable tant que les déformations considérées sont suffisamment grandes. En effet, il est apparu que dans le cas de très petites déformations (notamment celles considérées lors des identifications élastiques) le bruit de mesure devient problématique quant à la stabilité de la méthode. Il est aussi montré que le niveau d'hétérogénéité des déformations des éprouvettes utilisées doit être suffisant afin de garantir une identification de meilleure qualité qu'une identification dite *classique*. Enfin, il a été montré que la sensibilité au bruit de mesure des identifications thermomécaniques par méthode inverse est très faible, ce qui constitue un atout important de ce genre d'approche par rapport aux approches classiques d'évaluation de sources de chaleur.

Perspectives

Plusieurs perspectives de poursuite de ces travaux sont possibles tant d'un point de vue expérimental que numérique.

Augmenter la précision de la méthode : Dans les cas plan comme hors-plan la précision de l'approche FEU est grandement liée à la qualité de la modélisation des conditions aux limites. L'utilisation d'essai plan est à ce titre délicate puisque le positionnement de l'éprouvette dans les mors et le déplacement des mors auto-serrant conduit à des difficultés dans l'évaluation de ces conditions. Dans le cas hors plan, nous avons vu que malgré l'intérêt qui a été porté à la qualité des conditions aux limites, les propriétés géométriques du montage (planéité de la matrice et centrage du poinçon) ont une influence sur le résultat de l'identification. Une attention particulière doit donc être portée à la réalisation du montage et une technique fiable de centrage du poinçon doit être trouvée. Une autre piste consiste à décentrer volontairement le poinçon (afin d'augmenter l'hétérogénéité du champs de déformation) mais à le modéliser dans sa positon réelle.

Du point de vue des identifications thermiques, deux points d'amélioration sont envisageables dans l'immédiat. Tout d'abord, le calcul thermique doit être réalisé sur un maillage

Eulérien afin d'évaluer le terme de conduction à travers la géométrie réelle de l'éprouvette. D'autre part, le modèle élastique ayant une influence sur l'évaluation du champ de contraintes, il est nécessaire d'identifier à nouveau les modèles d'évolution de β avec un modèle d'élasticité orthotrope. On peut dans ce cas réaliser l'identification thermomécanique après avoir non seulement identifié le modèle plastique anisotrope mais aussi un modèle élastique orthotrope.

Enfin, nous avons pu constater au cours de ce travail de thèse que les modèles mécaniques choisis sont insuffisants pour décrire le comportement du matériau de manière exhaustive. De nouvelles identifications doivent être menées avec des modèles de comportement plus complexes. Des critères de plasticité tels que ceux présentés par O. Cazacu [Cazacu 06] ou W. Hu [Hu 07] permettraient de décrire plus finement la déformation des tôles de titane. Cependant, l'emploi de critères autres que ceux de Von Mises et de Hill 1948 se heurte aujourd'hui au développement de routines ABAQUS dédiées (VUMAT).

Augmenter la stabilité de la méthode : La stabilité de la méthode présentée est globalement satisfaisante hormis dans le cas d'identifications élastiques. Dans ce cas particulier plusieurs solutions peuvent contribuer à stabiliser le processus d'identification. L'utilisation d'appareils photographiques reflex est à proscrire, on leur préférera des caméras numériques qui n'utilisent pas le principe de *miroir mobile* et offrent, à ce titre, une meilleure répétabilité. Par ailleurs, l'emploi de méthodes de lissage des champs de déplacement est une solution qui mérite d'être approfondie. De nombreuses méthodes (dont la méthode modale qui a été utilisée dans ce travail) sont désormais disponible afin de filtrer rigoureusement le bruit de mesure. De plus, l'utilisation d'une technique de corrélation d'images intégrée telle que celle présentée dans [Leclerc 09] permet aussi d'améliorer la qualité du rapport signal-bruit.

D'un point de vue numérique, l'utilisation d'un calcul de sensibilité par différence finie n'est pas satisfaisante, comme il est présenté dans [Kleinermann 00] et [Lecompte 07a], le calcul analytique des coefficients de sensibilité conduit à une meilleure évaluation de la direction de descente et donc à une convergence plus rapide et plus précise. De plus, la prise en compte d'un nombre plus important de pas de temps est à envisager. En effet, malgré une augmentation non négligeable du temps de calcul, la convexité de la fonctionnelle tend à augmenter avec le nombre d'informations d'origine expérimentale. La solution du problème inverse serait ainsi plus précise.

Enfin, les lois de comportement qui sont identifiées ont aussi une influence sur la stabilité de la méthode. En effet, comme nous l'avons remarqué, la non-indépendance des paramètres matériau d'une loi de comportement conduit à une mauvaise convexité de la fonction objectif voire à l'existence de minima locaux. Une solution consiste à utiliser des lois présentant des paramètres indépendants. On peut aussi envisager le développement de modèles de comportement spécifiques dans le cadre des procédures d'identification par méthodes inverses, se basant notamment sur des paramètres ayant un sens physique. Les lois de plasticité cristalline et/ou multi-échelles semblent parfaitement indiquées dans ce cas [Héripé 07].

Validations : L'identification de paramètres matériau par méthode inverse fournit des résultats parfois très éloignés selon la méthode inverse qui est employée (FEU, MEQ, MCV, ERC, etc.) [Avril 08a]. Dès lors le problème de la validation des jeux de paramètres ainsi obtenus devient un enjeu majeur. Les procédures de validations présentées dans ce travail de thèse demeurent insuffisantes et l'utilisation d'essais d'emboutissage plus complexes ainsi que la prédiction des retours élastiques sont des pistes à approfondir.

Par ailleurs, le choix des zones de l'éprouvette sur lesquelles porte l'identification semble être une idée prometteuse. S. Belhabib [Belhabib 07a] a ainsi montré que la prise en considération des seules zones très déformées de l'éprouvette avait une conséquence sur le jeu de paramètres identifié. Cette piste devra être approfondie et la procédure d'essai hors-plan présentée dans le présent travail de thèse, de part l'hétérogénéité des déformations qu'elle présente, peut être utilisée dans ce but.

Autres applications : On peut aussi penser à de nouvelles applications de la méthode inverse d'identification utilisée dans ce travail. Tout d'abord la procédure d'essai TIX pourrait servir à l'identification de modèles thermomécaniques, ce qui permettrait l'identification de modèles élastique, plastique et viscoplastique à partir d'un seul et unique essai. En effet, le montage TIX peut tout à fait s'adapter à l'utilisation d'une caméra thermique puisque les déplacements hors plan demeurent relativement faibles. De plus, les conditions aux limites thermiques d'un tel essai peuvent être identifiées en utilisant la procédure que nous avons présentée au chapitre 5.

Enfin, la méthode de recalage de modèles EF peut être appliquée dans le cas de matériaux hétérogènes [Balandraud 09], les protocoles de mesure de champs cinématiques ont déjà permis de mesurer les champs de déplacement de ce type de matériau et ceci dans le cas 2D comme 3D. Dans ce dernier cas l'utilisation de techniques optiques (pour les matériaux transparents) ou tomographiques (pour les matériaux opaques) autorise désormais la mesure de champs de déplacement dans le volume de l'éprouvette [Dupré 97, Germaneau 08, Roux 09, Barranger 09, Germaneau 10].

ANNEXES

A

Annexe : Recalage des bases temporelles

Problématique

Les bases temporelles de la machine de traction (notée t_{trac}) et du (ou des) appareil(s) photographique(s) (notée t_{appa}) n'étant pas synchronisées, un problème se pose quant aux comparaisons des informations issues de ces deux moyens de mesure. Il est donc délicat de positionner sur la courbe force/déplacement les points correspondant aux images I_i capturées et analysées par DIC (ou SIC). Le recalage des deux bases temporelles repose sur l'évaluation d'un décalage temporel Δt (Fig. A.1).

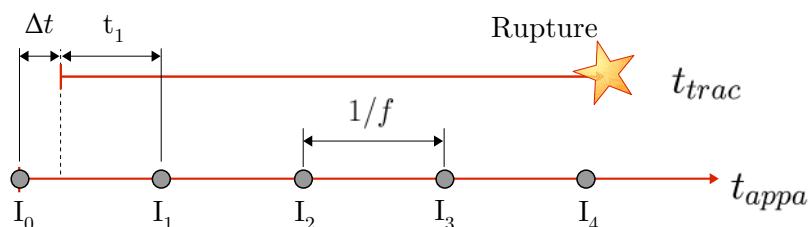


FIG. A.1 – Représentation linéaire des deux bases de temps et du décalage Δt que l'on cherche à caractériser. Les ronds gris sont les instants correspondant à l'acquisition de chaque images I_i . La constante f est la fréquence d'acquisition des appareils photos.

Rappelons que les fonctions objectif formulées dans ce travail de thèse reposent sur des comparaisons d'efforts et de déplacements. Les déplacements imposés dans les calculs EF étant issus de l'analyse d'image, il n'y a pas de problème de synchronisation puisque, dans ce cas, u_{exp} et u_{num} sont exprimés dans la base de temps t_{appa} . Le problème apparaît lorsqu'il s'agit de comparer les efforts numériques F_{num} exprimés par rapport à t_{appa} et expérimentaux F_{exp} exprimés eux par rapport à t_{trac} .

Cas des essais plans

La solution apportée à ce problème consiste à évaluer manuellement le déplacement d'un point distinctif du mors supérieur (noté u_{mors}) entre une image de référence I_0 prise avant le début de l'essai et la première image I_1 présentant un déplacement. Ce déplacement ayant été mesuré sur le mors (et non sur un bord non libre de l'éprouvette), l'effet des mors auto-serrants n'intervient pas. Ce dernier peut donc être assimilé au déplacement de la traverse de telle sorte que : $u_{mors} \approx u_{trav}(t_1)$. Comme l'essai est piloté en vitesse, il existe une relation linéaire telle que :

$$u_{trav}(t_{trac}) = \frac{v}{60} t_{trac}, \quad (\text{A.1})$$

avec v la vitesse de déplacement imposée à la machine de traction (en mm/min). Dès lors, on peut évaluer le temps t_1 mis par la machine de traction pour effectuer le déplacement u_{mors} . Le temps t_1 est donc le temps (exprimé dans la base t_{trac}) correspondant à l'image I_1 . L'évaluation de Δt est alors conduite par la relation :

$$t_1 + \Delta t = \frac{1}{f}, \quad (\text{A.2})$$

où f est la fréquence d'acquisition des appareils photographiques. Il ne reste plus qu'à mesurer cette fréquence et à s'assurer qu'elle soit constante. En s'appuyant sur les données constructeur on peut affirmer que la précision sur la période d'acquisition $1/f$ est d'environ $\pm 0.1 \mu\text{s}$.

Cas des essais hors plan

L'utilisation de la stéréo-corrélation d'images affecte peu la procédure de synchronisation des bases temporelles. Dans ce cas, la mesure du déplacement du mors u_{mors} ne peut pas être obtenue directement puisque les éléments mobiles de la machine de traction (traverse et poinçon) ne sont pas visibles dans le champ optique des appareils. Cette mesure est donc remplacée par la mesure du plus grand déplacement sur la face inférieure de l'éprouvette entre l'image I_0 et I_1 . On peut alors assimiler ce déplacement au déplacement de la traverse tel que $u_{face} \approx u_{trav}(t_1)$. Cependant plusieurs conditions doivent être vérifiées afin de minimiser l'erreur commise lors de cette opération :

- i) vérifier l'existence d'un contact entre le poinçon et le flan avant le début de l'essai,
- ii) mesurer u_{face} entre l'image de référence et la première image présentant un mouvement du flan. Cette précaution permet de minimiser l'influence de l'écrasement du flan et de l'élasticité du montage expérimental (voir les considérations présentées en section 5.4.1).

La procédure permettant d'évaluer Δt est alors similaire à celle utilisée dans le cas des essais plans. Notons enfin que dans le cas de stéréo-corrélation d'images, la précision sur l'évaluation de la fréquence d'acquisition est altérée par la nécessité de synchroniser les deux appareils photos. La donnée constructeur sur ce point précise que la précision dans l'évaluation de $1/f$ est de l'ordre de $\pm 1.55 \mu\text{s}$.

Cas des essais thermomécaniques

Dans le cas des essais thermomécaniques, une troisième base de temps s'ajoute au problème : la base t_{ther} de la caméra thermique. Cette base de temps est recalée sur la base de la ma-

chine de traction t_{trac} par rapport à la rupture de l'éprouvette. En effet, l'instant de la rupture de l'éprouvette peut être repéré sur le film thermique avec une précision de $\pm \frac{1}{2 \times f_{ther}}$, où f_{ther} est la fréquence d'acquisition des images thermiques (on rappelle que dans ce travail $f_{ther} = 15 \text{ Hz}$). Parallèlement, l'instant de rupture peut être évalué¹, dans la base t_{trac} , grâce à la courbe force/temps. La précision est alors de $\pm \frac{1}{2 \times f_{trac}}$, où f_{trac} est la fréquence d'acquisition des données de la machine de traction (ici fixée à 100 Hz). On peut dès lors évaluer $\Delta t'$ et recalier la base de temps t_{ther} sur t_{trac} avec une précision de $\pm 33 \mu\text{s}$ (Fig. A.2).

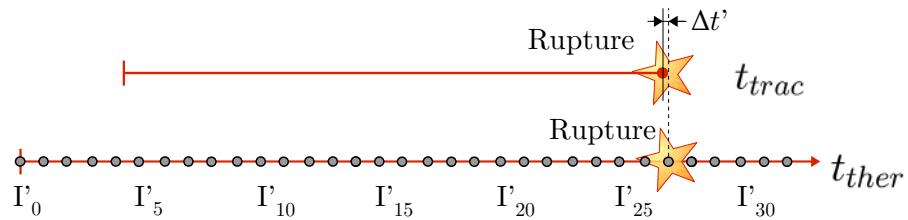


FIG. A.2 – Représentation linéaire des bases de temps de la machine de traction et de la caméra thermique. Ces deux bases sont recalées en évaluant, dans chacune d'elles, l'instant de la rupture de l'éprouvette. Les instants d'acquisition des images thermiques sont représentés par des ronds gris.

Enfin, le recalage de $t_{ther} = t_{trac}$ sur la base de temps des appareils photos s'effectue comme présenté dans le cas d'essais plans. De plus, pour appliquer une telle procédure, il convient de vérifier que la fréquence d'acquisition de la caméra thermique f_{ther} est constante. Après vérification, il apparaît que l'horloge de la caméra présente une précision de $\pm 0.3 \mu\text{s}$ qui sera considérée comme étant du second ordre.

1. Notons que cette évaluation ne peut se faire que si la rupture est fragile (ce qui est le cas pour le T40-1.6mm) et devient problématique dans le cas de matériaux ductiles.

B

Annexe : Géométries d'éprouvette hors plan

Approche par essais-erreurs

Une partie de ce travail de thèse a consisté à développer et mettre au point un essai hors plan présentant des déformations aussi hétérogènes que possible. En se basant sur l'emploi d'une procédure de Nakazima [[Arrieux 90](#), [Uthaisangsuk 07](#), [Uthaisangsuk 08](#)] nous avons cherché à obtenir la géométrie d'éprouvette qui présenterai les déformations les plus variées. Pour se faire nous avons eu recours à une approche par essais-erreurs qui consistait à tester numériquement un grand nombre de géométries et à comparer leurs champs de déformation respectifs. La Figure B.1 présente les principales géométries qui ont été testées durant ce travail. Pour chacune de ces 12 géométries, l'influence des congés de raccordement sur les champs de déformation calculés a été étudiée au travers de diverses autres variantes.

Notons aussi que quelques géométries munies d'une sous-épaisseur dans la zone centrale ont aussi fait l'objet d'essais numériques (Fig. B.1(l)). Cette approche a été écartée en raison des modifications locales des caractéristiques physico-chimiques du matériau engendrée par les opérations d'obtentions (électro-érosion par exemple).

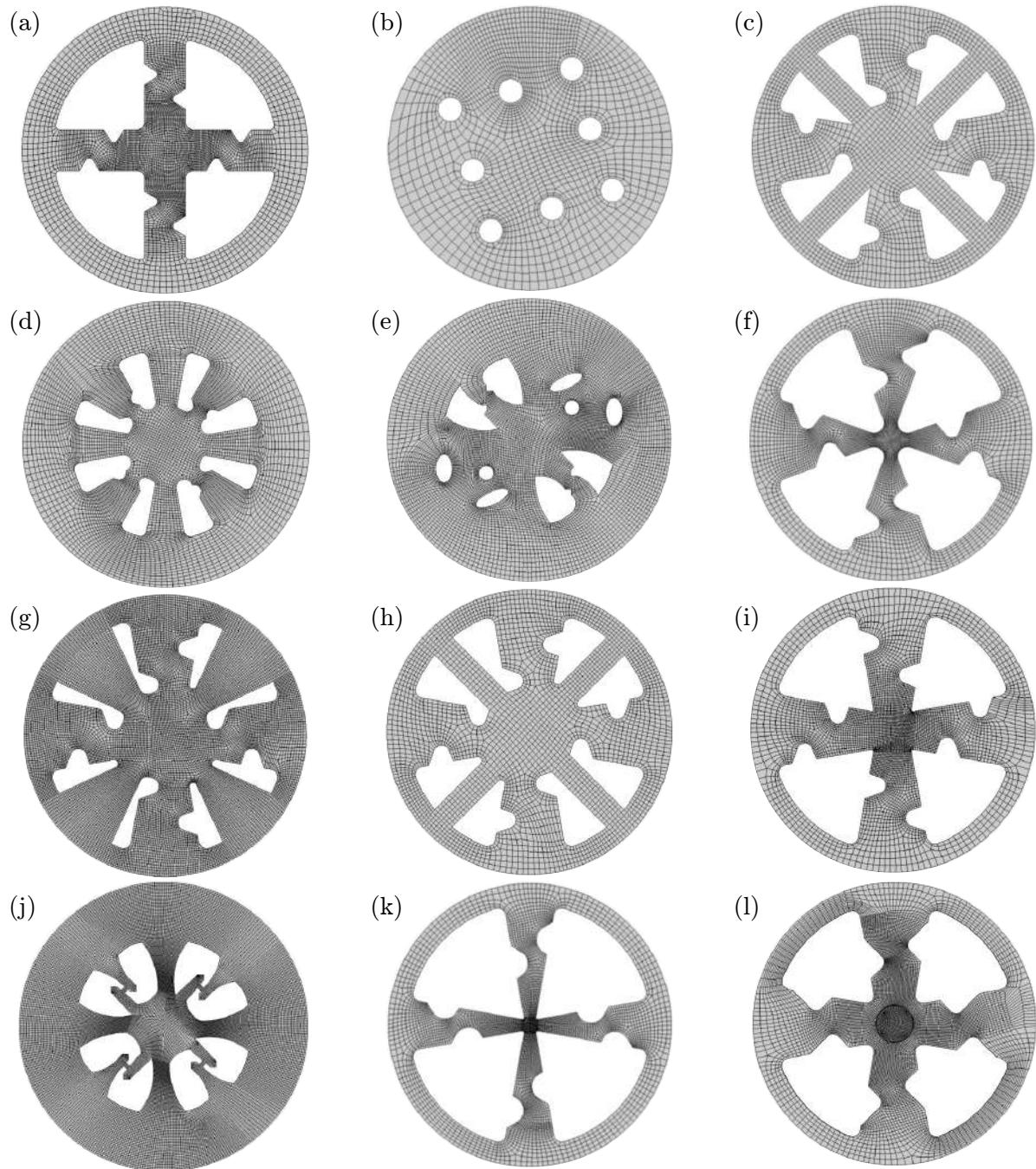


FIG. B.1 – *Images des maillages des différentes géométries d'éprouvettes étudiées pour la procédure TIX.*

C

Annexe : Recalage spatial des mesures cinématique et thermographique

Problématique

Les mesures obtenues *via* la caméra infrarouge permettent d'obtenir le rayonnement thermique et d'évaluer le champ de température à la surface de l'éprouvette, ces données bruitées s'avèrent difficilement exploitables en l'état. En effet, le suivi de points matériels est rendu très délicat par le déplacement et la déformation de l'éprouvette dans le cadre de l'image. Le champ de température mesuré dépend alors du temps et des coordonnées du point matériel, elles même dépendantes du temps. Ainsi l'évolution de la température d'un pixel donné ne renseigne pas sur l'échauffement (ou le refroidissement) d'un point matériel de l'éprouvette puisque ce point se déplace dans l'image au cours de l'essai (Fig. C.1).

Il apparaît dès lors nécessaire de ramener l'ensemble des champs thermiques mesurés dans une configuration commune afin d'éliminer la dépendance des coordonnées au temps. On notera $\mathbf{X}(t)$ les coordonnées matérielles dans la configuration non déformée et $\mathbf{x}(t)$ celles de la configuration déformée.

Recalage

D'un point de vue mathématique, on définit le *recalage* par la transformation \mathcal{T} telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ (i, j) &\longrightarrow (x, y)\end{aligned}\tag{C.1}$$

Cette transformation sera choisie *n*-linéaire. Les coordonnées de chaque pixel sont définies par des entiers afin de conserver une résolution constante de l'image durant tout le cycle de chargement. De ce fait, la transformation \mathcal{T} n'est pas réellement linéaire mais *linéaire par morceaux*. Cette nuance a son importance puisqu'elle induit des variations sur la bijectivité de \mathcal{T} qui peuvent conduire à l'apparition de *pixels blancs* dans le film recalé [Pottier 07].

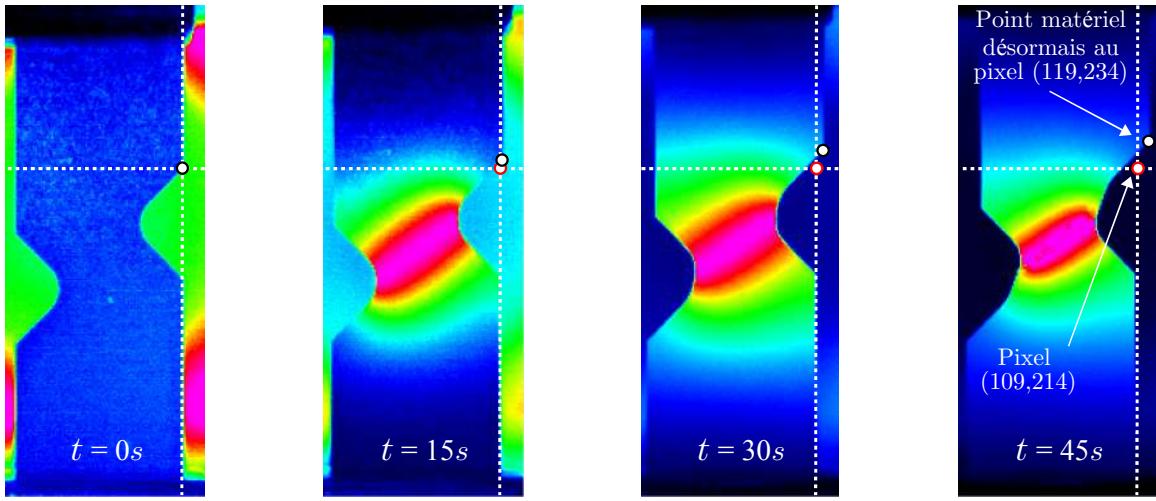


FIG. C.1 – Au début de l’essai, le coin de l’éprouvette (repéré par le symbole \bigcirc) se situe au pixel (109, 214) (repéré par le symbole \bigcirc). Lorsque l’éprouvette se déforme, ce pixel ne renseigne plus sur la température du coin. Il faut donc soustraire le déplacement du coin afin d’exprimer un champ de température Lagrangien et immobile.

Couplage des données cinématiques et thermiques

L’évaluation de la transformation \mathcal{T} requiert le traitement des données cinématiques du problème. Ces mesures sont issues de l’analyse par corrélation d’images (DIC). Elles nécessitent donc d’être exprimées dans le repère lié à la caméra infrarouge.

Comme détaillé dans l’[Annexe D](#), cette opération a été réalisée *manuellement*. En effet quatre points distinctifs de l’éprouvette (centre, angles, coins, *etc.*) sont repérés sur les images visible et infrarouge. Le logiciel de corrélation d’images offrant la possibilité d’exprimer les champs déplacement sur la géométrie Lagrangienne, cette configuration a été retenue. Ainsi, la donnée de quatre points distincts sur les images visibles et infrarouges non déformées permet de caractériser les deux translations et la rotation nécessaires à l’expression des déplacements et des températures dans le même repère.

La précision d’une telle procédure est alors entièrement dépendante de la résolution spatiale des mesures cinématiques et thermiques puisque la position d’un point distinctif de l’éprouvette ne peut être évaluée à un niveau sub-pixel. En pratique, la faible résolution de la caméra thermique (320×240 pixels) constitue le facteur limitant.

Implémentation

D’un point de vue numérique cette approche de recalage a été implémentée dans l’environnement MATLAB.

- ① La première image du film thermique est choisie comme image de référence (elle définit la configuration Lagrangienne).
- ② Une image solution est construite à partir de la géométrie Lagrangienne. Sa résolution est celle de la caméra infrarouge (320×240 pixels). La température de tous les pixels de cette image est initialement fixée à 0.

- ③ La grille d'analyse d'images DIC (Lagrangienne) est exprimée dans le repère de l'image solution (X, Y) suivant les considérations présentées ci-dessus et dans l'[Annexe D](#).
- ④ Les déplacements $u_x(t)$ et $u_y(t)$ sont évalués au centre de chaque pixel de l'image solution par interpolation bilinéaire. On notera que $x(t) = X + u_x(t)$ et $y(t) = Y + u_y(t)$, où x et y sont classiquement les coordonnées Eulériennes, X et Y sont les coordonnées Lagrangiennes.
- ⑤ Pour chaque image déformée k
 - (a) Pour chaque pixel $P(x, y)$ de l'image déformée
 - i. On évalue $X = x - u_x$ et $Y = y - u_y$ les coordonnées du pixel $P(x, y)$ ramenée en configuration Lagrangienne dans le repère de l'image solution. Notons que X et Y ne sont pas nécessairement des entiers et ne désigne donc pas un pixel unique de l'image solution.
 - ii. On évalue X^+, X^-, Y^+ et Y^- les arrondis aux entiers supérieurs et inférieurs de X et de Y . Les pixels $P_1(X^+, Y^+)$, $P_2(X^+, Y^-)$, $P_3(X^-, Y^+)$ et $P_4(X^-, Y^-)$ de l'image solution constituent alors les pixels cibles du pixel $P(x, y)$ (Fig. [C.2](#)).
 - iii. Les poids p_1, p_2, p_3 et p_4 , sont évalués proportionnellement à la surface recouverte de chaque pixel cible. Ces poids sont normés de telle sorte que $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$ (Fig. [C.2](#)).
 - iv. La température $T(x, y, t_k)$ mesurée au pixel $P(x, y)$ est multipliée par le poids p_i et ajoutée à la température courante du pixel cible P_i .
 - (b) La somme des températures en chaque pixel de l'image solution est divisée par la somme des poids de ce même pixel.
- ⑥ Les pixels qui ne se sont pas vu attribuer de température (*pixels blancs*) sont comblés par une moyenne des températures des 8 pixels environnants.

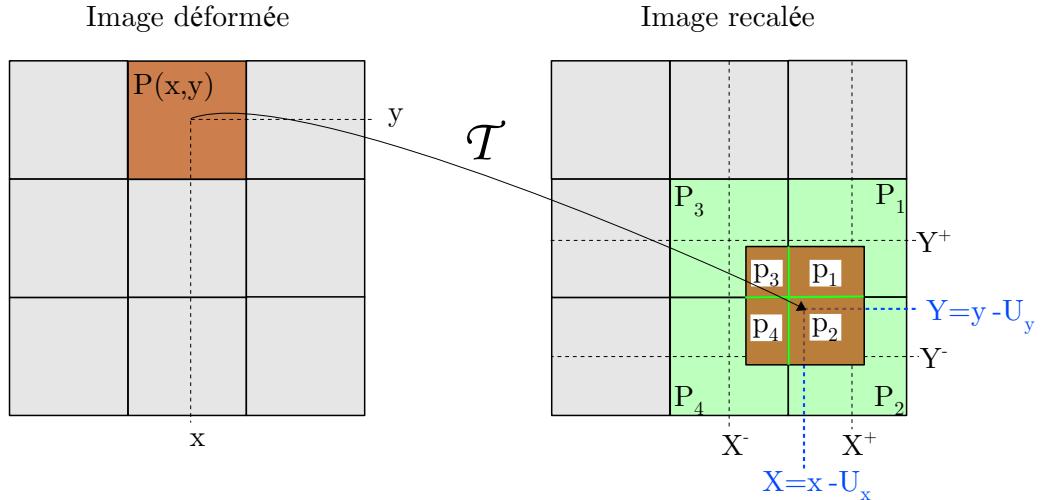


FIG. C.2 – *Détail de la procédure de recalage des champs thermiques. La température du pixel à recaler est répartie dans les 4 pixels cibles proportionnellement à la surface recouverte.*

Incertitudes

Les incertitudes et les biais générés sur les champs thermiques par une telle approche sont à relier aux amplitudes maximales des gradients de température et de déformation observées. En

effet, en l'absence de gradient dans les champs cinématique et thermique, un recalage exact peut être numériquement obtenu, il suffit de remplir l'image solution avec la température observée à la surface de l'éprouvette. Cependant, dans ce travail de thèse l'amplitude du gradient thermique peut être localement importante et atteindre 100 mK/pixel . Ceci conduit à considérer trois sources d'erreur :

La résolution spatiale de la caméra IR : Comme nous l'avons vu, le nécessaire recalage spatial entre les images issues des caméras visibles et infrarouge présente une incertitude de l'ordre du pixel (soit $\pm 1/\sqrt{2}$ pixel, ce qui équivaut à $\pm 91\mu\text{m}$ dans le présent travail). Il est aisément vérifiable numériquement que cette incertitude de position n'induit aucune erreur sur le champ thermique recalé si celui-ci ne présente pas de gradient de température. Cependant, l'amplitude du présent gradient thermique nous conduit à estimer l'incertitude induite par : $\pm 1/\sqrt{2} \times 100 \approx \pm 71 \text{ mK}$.

Les incertitudes des mesures cinématiques : D'après les travaux réalisés sous l'égide du GDR 2519 et publiés dans [Bornert 08], l'incertitude de mesure des champs cinématiques est inférieure à ± 0.1 pixel. Connaissant l'amplitude maximale du gradient thermique, on peut alors estimer l'erreur commise sur le champ thermique recalé par $\pm 0.1 \times 100 = \pm 10 \text{ mK}$.

L'interpolation des champs de déplacement : Cette opération, qui constitue l'étape ④ de l'algorithme présenté ci-dessus résulte d'une approximation. Là encore, on peut montrer que l'absence de gradient sur le champ de déplacement conduit à une évaluation exacte. Cependant, les champs de déplacements utilisés dans ce travail sont issus de l'analyse d'images par 7D et résultent donc d'une interpolation bi-linéaire (voir section 2.3.3 et le tableau 2.1). En conséquence, l'absence de courbure sur le champ à interpoler autorise à pratiquer une seconde interpolation bilinéaire sans introduire d'erreur supplémentaire [De Boor 78].

Validation

Parmi les trois sources d'erreur citées ci-dessus, on est à même de caractériser la première expérimentalement. On peut pour cela réaliser un essai sur une éprouvette présentant un gradient thermique et subissant un mouvement de corps rigide. Cette approche permet d'annuler l'influence des incertitudes de mesures cinématiques tout en mettant en évidence les erreurs induites par le recalage spatial des mesures cinématique et thermique.

La figure C.3 présente l'approche de validation développée dans [Pottier 07, Pottier 09]. Dans le cas des essais réalisés lors de ces travaux, une éprouvette présentant un gradient de température maximum de 53 mK/pixel est déplacée dans le cadre de la caméra infrarouge. Cette éprouvette est réalisée en élastomère afin de minimiser les effets de convection et de conduction. Dans le cas d'un recalage exact, l'évolution de la température en un point de cette éprouvette après recalage devrait être nulle. En conséquence, toute variation résiduelle de la température constitue une erreur de la procédure de recalage. Selon les considérations numériques présentées ci-dessus, un majorant de l'erreur peut être estimé à partir de l'incertitude liée au recalage spatial des champs cinématique et thermique. Dans le cas présent ce majorant vaut : $\pm 1/\sqrt{2} = \pm 37 \text{ mK}$.

D'un point de vue expérimental, on constate sur la Fig. C.4, une erreur résiduelle de $\pm 20 \text{ mK}$.

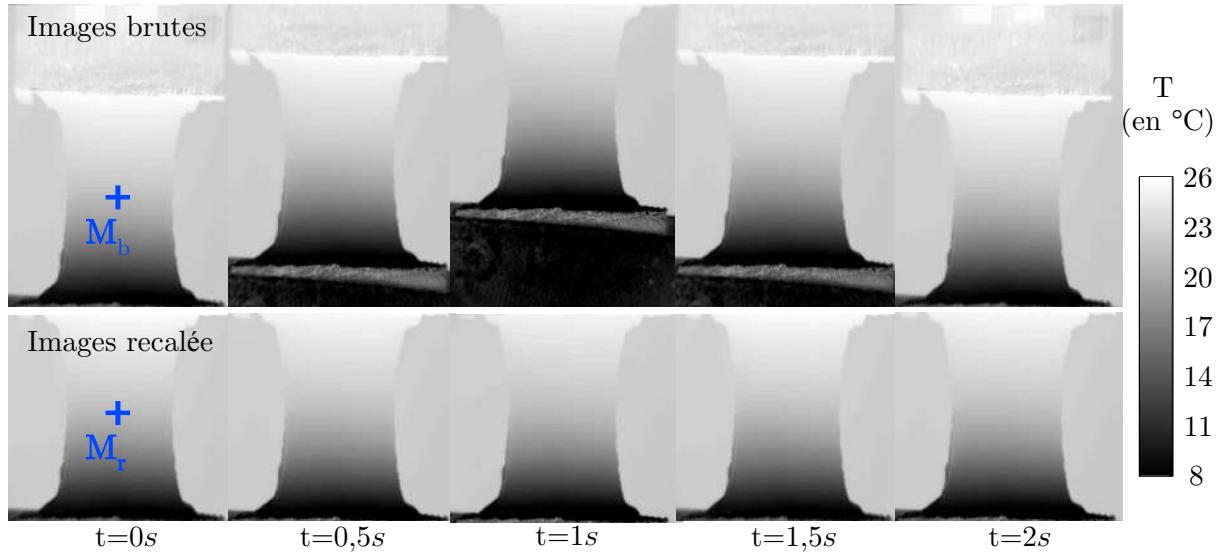


FIG. C.3 – *Images extraites des films thermiques bruts et recalés de l’essai de validation mené au Laboratoire de Mécanique et d’Ingénierie (LaMI) de Clermont-Ferrand en 2007 [Pottier 07]. Le gradient thermique dans l’éprouvette permet d’évaluer l’erreur liée au recalage spatial des données cinématique et infrarouge.*

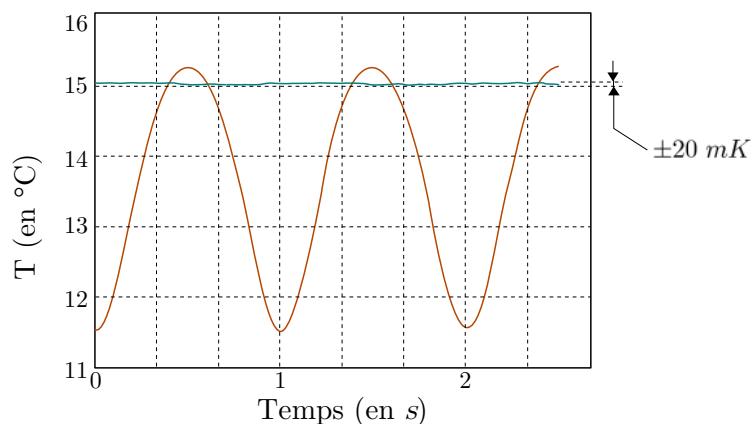


FIG. C.4 – *Evolution de la température en fonction du temps pour le pixel M sur le film brut (M_b) et sur le film recalé (M_r). La position du pixel M est définie sur la Fig. C.3.*

Cette constatation permet de valider l'approximation de l'erreur liée au recalage spatial des champs que nous avons posée dans la section précédente.

D

Annexe : Recalage spatial des champs numériques et expérimentaux

Problématique

Dès lors que l'évaluation de la fonction objectif requiert la comparaison des données expérimentales et numériques, il devient nécessaire d'estimer ces deux quantités aux mêmes points matériels. Il convient donc d'exprimer dans le même repère les champs de déplacement issues de l'analyse d'images et ceux issues des calculs numériques. On peut donc définir une transformation rigide \mathcal{T} permettant de passer du repère expérimental au repère numérique. Dans le cas général, cette transformation comporte trois rotations (r_x , r_y et r_z) définies autour des axes x_n , y_n et z_n du repère numérique et trois translations (t_x , t_y et t_z) le long de ces mêmes axes :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t_x & r_x \\ t_y & r_y \\ t_z & r_z \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Classiquement, un certain nombre de points de référence sont repérés sur une photographie de l'éprouvette et sur le modèle Éléments Finis et permettent de construire un repère commun *via* l'estimation des paramètres de la transformation \mathcal{T} . En pratique, ces points sont généralement des points distinctifs de l'éprouvette : centre, coins, singularité géométrique. On trouve notamment le détail de cette approche dans [Meuwissen 98a] et [Lecompte 07a] pour des cas bi-dimensionnels avec deux points de référence.

L'estimation de la position de ces points revêt alors une importance majeure puisque toute erreur aura pour conséquence de comparer des déplacements à des points matériels différents. Il en résultera naturellement une erreur sur le jeu de paramètres identifié, *a fortiori* si les gradients de déplacement sont importants. Il est donc nécessaire de prêter une attention particulière à cette estimation.

Cas des essais plans

Procédure

Dans le cas des essais plans, l'approche retenue est globalement identique à celle proposée par [Meuwissen 98a] et [Lecompte 07a]. Elle consiste à repérer *manuellement* le plus de points distinctifs possibles. Cette approche, qui conduit à estimer trois ou quatre points distincts selon la géométrie, permet de moyennier l'erreur commise sur l'évaluation de la position de chacun d'eux. Dans les cas bi-dimensionnels, on constate que $r_x = r_y = t_z = 0$. Ainsi la donnée de trois coordonnées permet de lever l'indétermination. En pratique, deux points fournissent quatre coordonnées et suffisent à recaler les champs. Comme le montre la figure D.1, dans le cas particulier de la géométrie de pseudo-cisaillement, la détermination de la position des champs est effectuée sur la base de quatre points distinctifs dont chacun présente une incertitude maximale de $e_m = \pm 1/\sqrt{2}$ pixel¹.

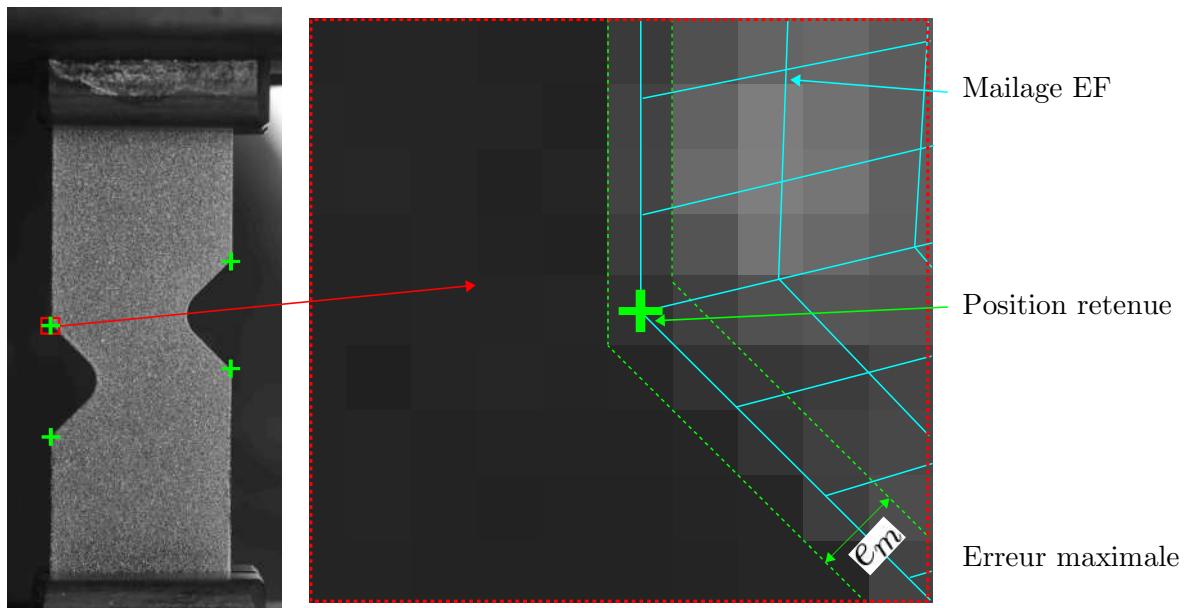


FIG. D.1 – Dans le cas d'essais plans, la donnée de quatre points distinctifs de l'éprouvette permet d'évaluer au pixel près les composantes t_x , t_y et r_z nécessaires au recalage des données expérimentales et numériques.

Incertitudes

Exprimer cette erreur en déplacement nécessite de prendre en considération le gradient du déplacement. En effet, dans le cas d'un champ de déplacement constant (à gradient nul), cette erreur n'aura aucune conséquence sur la comparaison des champs expérimentaux et numériques. On peut donc estimer la valeur maximale du gradient de déplacement dans le cas des trois géométries d'essais plans présentées dans cette étude (Fig. 2.3). On peut de plus utiliser ces gradients afin d'évaluer de manière métrique l'erreur de recalage e_m . Le Tableau D.1 regroupe les valeurs de l'erreur e_m pour les trois géométries planes étudiées.

1. En effet, la position d'un point distinctif est toujours retenue au centre du pixel. Le cas le plus critique se présente donc lorsque sa position réelle se situe dans un coin de ce même pixel. Dans ce cas, l'erreur commise vaut la moitié de la diagonale du pixel.

TAB. D.1 – Évaluations de l'erreur de recalage maximale

Unité	$\max_i (\nabla \ u_i\)$	e_m	
	$\mu\text{m}/\text{pixel}$	pixel	μm
Traction simple	26.1	$\pm 1/\sqrt{2}$	± 18.5
Traction trouée	18.0	$\pm 1/\sqrt{2}$	± 12.7
Pseudo-cisaillement	20.5	$\pm 1/\sqrt{2}$	± 14.5

Les valeurs présentées dans le tableau ci-dessus constituent des majorants des erreurs commises lors du recalage des champs expérimentaux sur les champs numériques. Elles sont en effet évaluées dans le cas le plus critique où les positions réelles de tous les points distinctifs se situent aux coins des pixels choisis (voir la figure D.1). De plus, une telle amplitude de l'erreur ne concerne que les zones de très fort gradient de déplacement.

Cas des essais hors-plans

Procédure

Dans un cas tri-dimensionnel, la transformation permettant de passer du repère expérimental au repère numérique prend la forme présentée dans l'équation (D.1) où les six termes de la matrice \mathcal{T} sont non nuls. D'un point de vue théorique, la donnée de trois points distincts, dont les six coordonnées sont connues dans le repère expérimental et dans le repère numérique, permet d'identifier enfin trois translations et les trois rotations de la matrice \mathcal{T} . L'approche retenue consiste cependant à distinguer tout d'abord la rotation r_z , les translations t_x et t_y et les 3 autres composantes de \mathcal{T} . En effet, la procédure consiste dans un premier temps à se rapporter à un problème de recalage plan (tel que celui présenté dans la section précédente), puis à résoudre ce problème plan par centrage des deux repères puis par rotation.

Rotations dans l'espace (r_x, r_y, t_z) : L'ensemble des points de mesures réalisés, la périphérie du flan (représentée par le cercle \mathcal{C} sur la figure D.2) est utilisé afin d'évaluer les coordonnées du plan de moindres carrés P . Par la suite, ce plan est considéré comme parallèle au plan de la matrice P_m qui constitue le plan (x_n, y_n) du repère numérique. Cette hypothèse permet d'évaluer les composantes r_x , r_y et t_z à partir des coordonnées du plan de moindres carrées P .

Suite à cette opération, le recalage s'effectue dans le plan (x_n, y_n) du repère numérique et il convient désormais d'évaluer r_z , t_x et t_y . En pratique, il faut maintenant placer le centre du repère expérimental au centre de l'éprouvette (*i.e.* centre du repère numérique) mais aussi pivoter l'éprouvette autour de ce centre afin de faire correspondre l'axe x_n du repère numérique avec la direction de laminage (notée 0°).

Centrage des deux repères (t_x, t_y) : L'évaluation des coordonnées du centre de l'éprouvette dans le repère expérimental est effectuée à partir d'une image non déformée du flan, capturée par l'appareil gauche. On trace alors manuellement 16 droites alignées sur les bords des ouvertures de l'éprouvette (Fig. D.3 (a)). Le calcul de l'isobarycentre des 120 points d'intersection permet d'obtenir les coordonnées du centre dans le repère de l'appareil gauche (Fig. D.3 (b)). Dès lors, la donnée de r_x , r_y et t_z (estimées par la procédure présentée précédemment) permet d'exprimer ces coordonnées dans le plan (x_n, y_n) . Il suffit ensuite d'évaluer les translations t_x et t_y permettant de faire correspondre le point central dans les deux repères.

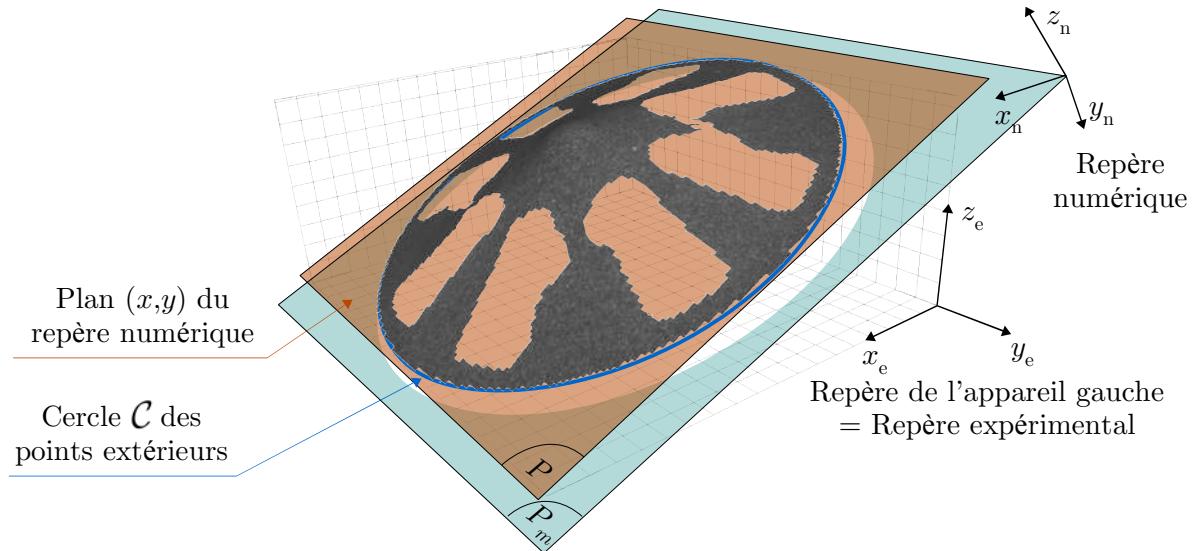


FIG. D.2 – Les composantes r_x , r_y et t_z sont évaluées en ajustant un plan de moindres carrés P aux points situés sur la périphérie du flan. Ce plan est alors supposé parallèle au plan de la matrice.

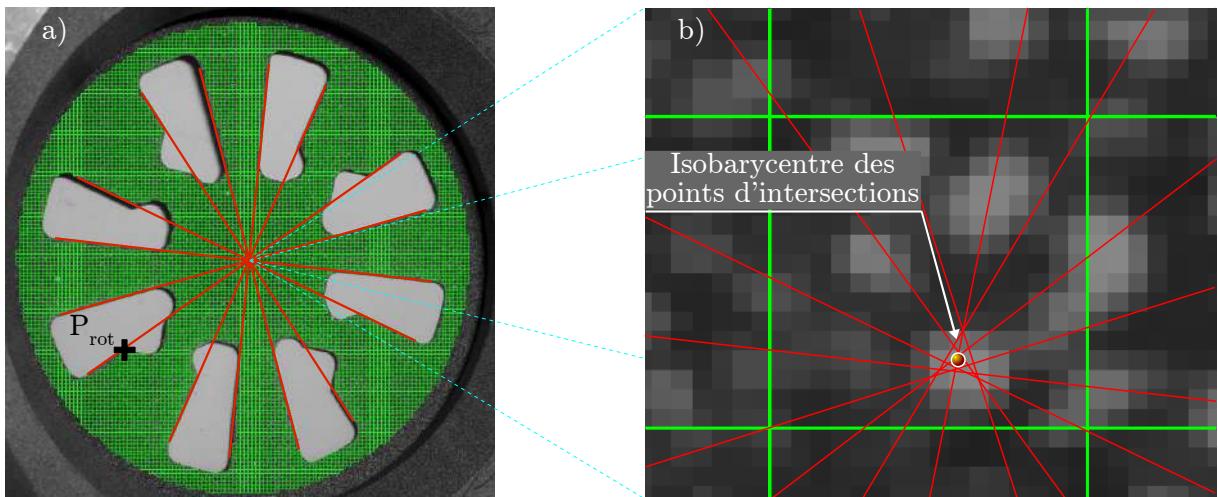


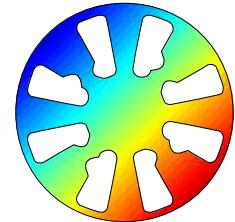
FIG. D.3 – (a) La détermination des coordonnées du centre de l'éprouvette s'effectue en traçant les 16 droites liées aux bords des ouvertures. Par ailleurs un point distinctif P_{rot} est utilisé pour pivoter l'éprouvette afin d'aligner l'axe x_n avec la direction de laminage. (b) L'isobarycentre des points d'intersection des 16 droites permet d'estimer les coordonnées du centre de l'éprouvette dans le plan (x_n, y_n) .

Rotation plane (r_z) : Enfin, La donnée d'un point distinctif P_{rot} dans le repère expérimental et dans le repère numérique permet par rotation plane de faire correspondre l'axe x_n avec la direction de laminage et donc d'évaluer r_z . Comme l'illustre la figure D.3, ce point est choisi le plus éloigné possible du centre afin de minimiser l'incertitude liée à cette opération.

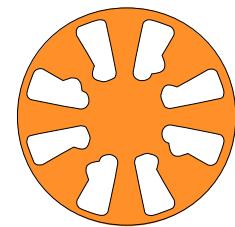
Incertitudes

Dans le cas hors plan qui vient d'être détaillé, l'incertitude générée par la procédure de recalage spatial est issue des trois opérations géométriques :

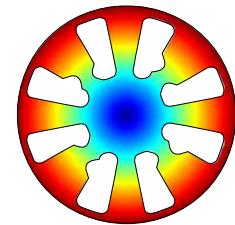
Rotation dans l'espace (r_x, r_y, t_z) : L'erreur $e_1(x, y)$ de cette opération géométrique est à relier à la planéité de la matrice. En effet, l'hypothèse de parallélisme entre le plan P et le plan (x_n, y_n) (le plan supérieur de la matrice aussi noté P_m sur la figure D.2) est forte et suppose la planéité du plan supérieur de la matrice. Or, nous avons vu précédemment (Fig. 5.13) que ce plan connaît une dispersion d'environ $15 \mu\text{m}$. En conséquence, l'erreur angulaire commise dans l'évaluation de r_x et r_y est d'environ 0.025° et aura une conséquence directe sur l'interpolation des champs de déplacement expérimentaux aux nœuds du maillage. On donne ci-contre l'allure du champ $e_1(x, y)$.



Centrage des deux repères (t_x, t_y) : Comme dans le cas plan, une erreur dans l'évaluation des coordonnées du centre se répercute de manière homogène sur l'interpolation des champs de déplacement. Cependant, dans le cas présent, le nombre de points distinctifs utilisés (36 car deux points sont définis pour chacune des 16 droites) conduit à minimiser l'erreur commise. Cette erreur $e_2(x, y)$ correspond à un mouvement de corps rigide, elle est donc homogène dans l'espace. On donne ci-contre l'allure du champ $e_2(x, y)$.



Rotation plane (r_z) : L'erreur (notée e_3) est ici reliée à l'estimation des coordonnées du coin P_{rot} qui, comme dans le cas plan, ne peut être effectuée qu'au pixel près ($\pm 1/\sqrt{2}$ pixel). Notons cependant que cette erreur conduit à une mauvaise évaluation d'une rotation et donc à une incertitude dépendant du rayon. Ainsi $e_3(r)$, liée à la rotation r_z , est nulle au centre et maximale sur la périphérie de l'éprouvette et l'erreur vaut strictement $\pm 1/\sqrt{2}$ pixel pour le rayon du coin choisi. On donne ci-contre l'allure du champ $e_3(r)$.



Avec la résolution retenue (qui permet de capturer toute la surface inférieure de l'éprouvette) ces incertitudes peuvent être données en termes métriques. Cependant, là encore, l'amplitude des gradients de déplacement est à prendre en considération. Nous distinguerons donc 2 cas : le cas des essais pour l'identification élastiques (petites déformations) et le cas des essais pour l'identification plastique (grandes déformations).

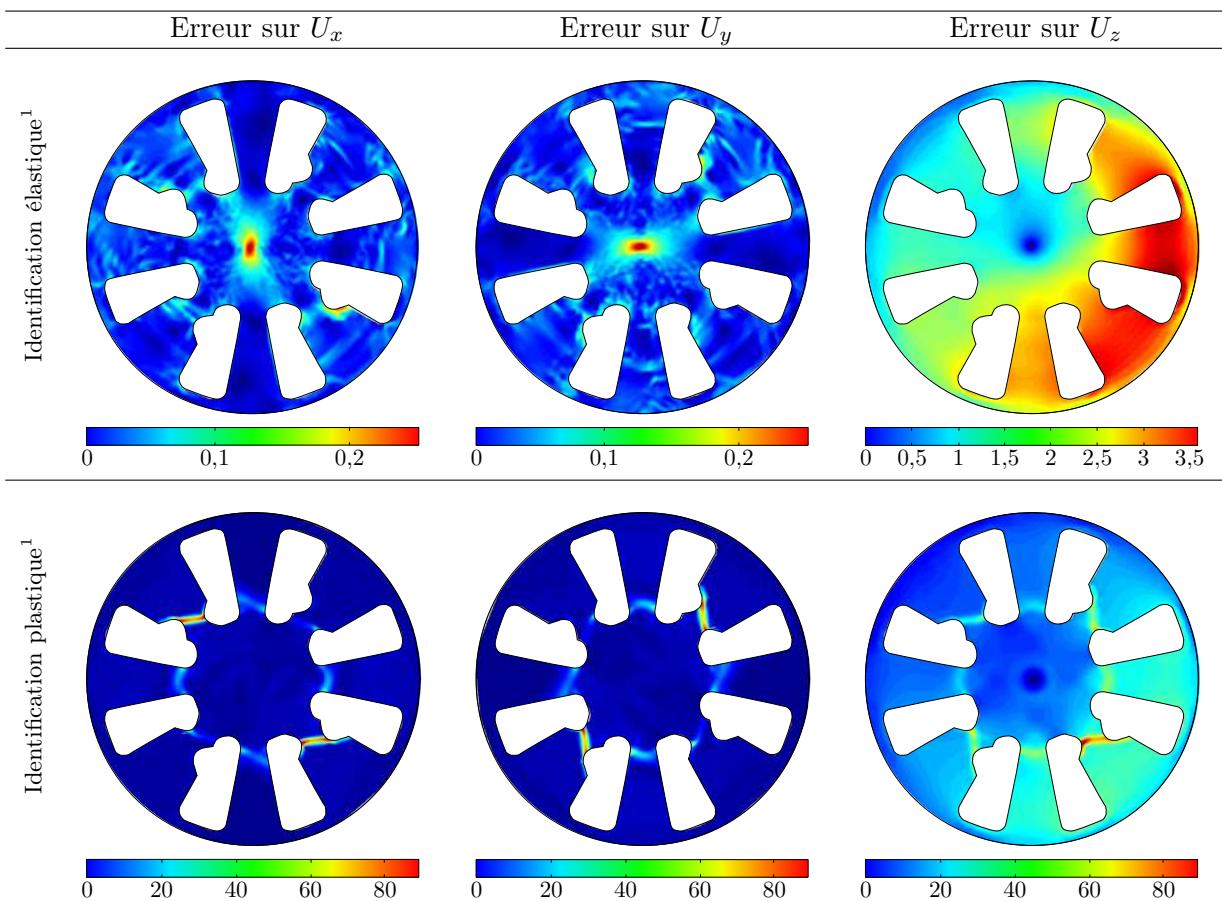
Par ailleurs, la connaissance des champs de gradients dans les deux cas précités ainsi que des champs d'erreur (en pixel) permet de tracer les champs d'erreur métrique présentée dans le

Tab. D.2. L'erreur métrique est alors exprimée comme une somme de produits erreur-gradient définie par :

$$\begin{cases} e_{\mu m}^x(x, y) = \nabla U_x \times e_1(x, y) + \nabla U_x \times e_2(x, y) + \nabla U_x \times e_3(r) \\ e_{\mu m}^y(x, y) = \nabla U_y \times e_1(x, y) + \nabla U_y \times e_2(x, y) + \nabla U_y \times e_3(r) \\ e_{\mu m}^z(x, y) = \nabla U_z \times e_1(x, y) + \nabla U_z \times e_2(x, y) + \nabla U_z \times e_3(r) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Comme dans le cas des essais plan, il convient de rappeler que les résultats présentée dans le Tab. D.2 constituent des majorants des erreurs commises évalués dans les cas les plus critiques (erreur maximale sur chaque évaluation *au pixel près*). Néanmoins, toutes les sources d'erreur ne sont pas prise en compte comme par exemple l'erreur liée à l'interpolation des champs de déplacement sur le maillage Éléments Finis ou l'erreur dans l'évaluation du plan de moindre carré P (voir la section précédente).

TAB. D.2 – Champs des erreurs liées au recalage spatial des données numériques et expérimentales dans les cas de petites ou de grandes déformations (en μm).



¹Les gradients de déplacements sont évalués par dérivation numérique aux derniers pas de temps utilisés pour les identifications élastique (Fig. 5.11) et plastique (Fig. 5.16).

E

Annexe : Modèle de A.T. Zehnder

Le travail de A.T. Zehnder [Zehnder 91] propose de relier la fraction de puissance plastique dissipée sous forme de chaleur à la puissance stockée. En effet, Taylor et Quinney [Taylor 37] ont montré que la partie non dissipée de la puissance plastique est stockée sous forme d'énergie de déformation en raison des mouvements des dislocations, de leurs interactions et des contraintes résiduelles.

Il existe ainsi une relation de proportionnalité entre la puissance plastique W'_p et K_M : le rapport entre le module d'élasticité E sur le module tangent plastique E_p , tel que

$$W'_p \sim \mu b^2 \dot{N} K_m, \quad (\text{E.1})$$

où μ est le module de cisaillement, \dot{N} la densité de dislocation et b le vecteur de Bürgers. Sous l'hypothèse que la puissance stockée est due à l'augmentation du nombre de dislocations, on peut montrer que :

$$W'_s \sim \mu b^2 \dot{N}. \quad (\text{E.2})$$

En se plaçant dans un volume élémentaire représentatif, on peut déduire des équations (E.1) et (E.2) la relation volumique suivante

$$\frac{w'_s}{w'_p} = \frac{h}{K_M}, \quad (\text{E.3})$$

où h est une constante réelle. De plus, si l'on exprime le rapport de module K_M sous l'hypothèse de grandes transformations, il vient :

$$K_M = \frac{E}{E_p} = \frac{E}{\partial \mathbb{S}/\partial \mathbb{E}_p}. \quad (\text{E.4})$$

La décomposition additive de la puissance plastique en une partie dissipée et une partie stockée $w'_p = w'_d + w'_s$, ainsi que la définition de β comme rapport de ces deux quantités permettent de redéfinir β comme suit :

$$\beta = \frac{w'_d}{w'_p} = \frac{w'_p - w'_s}{w'_p} = \frac{K_M - h}{K_M}. \quad (\text{E.5})$$

Il apparaît alors que la nature du modèle prédisant l'évolution de β ne dépend que de l'expression de K_M , c'est-à-dire de la relation entre contraintes et déformations plastiques. Dans le cas du travail présenté ici, cette relation est celle proposée par Ludwick [Gronostajski 00]

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_0 + K (\mathbb{E}_p)^n. \quad (\text{E.6})$$

Dès lors, l'évaluation de la dérivé partielle du tenseur de Cauchy par rapport à la déformation plastique fournit une nouvelle expression de K_M :

$$K_M = \frac{E}{nK\mathbb{E}_p^{n-1}} = \frac{E}{nK}\mathbb{E}_p^{1-n}, \quad (\text{E.7})$$

qui, combinée à la définition de β fournie par l'équation (E.5), conduit au modèle d'évolution de la fraction de puissance plastique dissipée telle que :

$$\beta(\mathbb{E}_p) = \frac{\frac{E}{nK}\mathbb{E}_p^{1-n} - h}{\frac{E}{nK}\mathbb{E}_p^{1-n}}. \quad (\text{E.8})$$

En simplifiant cette expression pour en éliminer les constantes, il vient :

$$\boxed{\beta(\mathbb{E}_p) = \frac{\mathbb{E}_p^{1-n} - \tilde{h}}{\mathbb{E}_p^{1-n}}}, \quad (\text{E.9})$$

où \tilde{h} est une autre constante réelle.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [Allaire 05] G. Allaire. Analyse numérique et optimisation. Edition de l’École Polytechnique, 2005.
- [Amiot 07] F. Amiot, F. Hild et J-P. Roger. *Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements*. International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pages 2863–2887, 2007.
- [Arnold 02a] G. Arnold. *Identification de lois de comportement pour la simulation de procédés de mise en forme à froid*. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2002.
- [Arnold 02b] G. Arnold, O. Hubert et R. Billardon. *Identification of kinematic and isotropic hardenings using a pure bending test machine*. In 5th International ESAFORM Conference on Material Forming, 507-510, 2002.
- [Arrieux 90] R. Arrieux. *Détermination théorique et expérimentale des courbes limites de formage en contraintes*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard – Lyon, 1990.
- [Avril 04] S. Avril, E. Ferrier, A. Vautrin, P. Hamelin et Y. Surrel. *A full-field optical method for the experimental analysis of reinforced concrete beams repaired with composites*. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 35, no. 7-8, pages 873–884, 2004.
- [Avril 07] S. Avril et F. Pierron. *General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity*. International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pages 4978–5002, 2007.
- [Avril 08a] S. Avril, M. Bonnet, A.S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco et F. Pierron. *Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements*. Experimental Mechanics, vol. 48, pages 381–402, 2008.
- [Avril 08b] S. Avril, F. Pierron, Y. Pannier et R. Rotinat. *Stress reconstruction and constitutive parameter identification in plane-stress elasto-plastic problems using surface measurements of deformation fields*. Experimental Mechanics, vol. 48, pages 403–419, 2008.
- [Avril 08c] S. Avril, F. Pierron, M.A. Sutton et J. Yan. *Identification of elasto-viscoplastic parameters and characterization of Lüders behavior using digital image correlation and the virtual fields method*. Mechanics of Materials, vol. 40, no. 9, pages 729–742, 2008.

- [Badulescu 09] C. Badulescu, M. Grédiac, J-D. Mathias et D. Roux. *A procedure for accurate one-dimensional strain measurement using the grid method.* Experimental Mechanics, vol. 49, pages 841–854, 2009.
- [Balandraud 09] X. Balandraud, G. Zhou, M. Grédiac et N. Tessier-Doyen. *Experimental evidence of thermal effects in multiphase ceramic specimens subjected to cyclic loading.* Experimental Mechanics, 2009.
- [Barlat 97] F. Barlat, R.C. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung, J.C. Brem, D.J. Lege, K. Matsui, S.J. Murtha et S. Hattori. *Yielding description for solution strengthened aluminum alloys.* International Journal of Plasticity, vol. 13, pages 385–401, 1997.
- [Barranger 09] Y. Barranger, P. Doumalin, J-C. Dupré, A. Germaneau, Hédan S. et V. Valle. *Evaluation of three-dimensional and two-dimensional full displacement fields of a single edge notch fracture mechanics specimen, in light of experimental data using X-ray tomography.* Engineering Fracture Mechanics, vol. 76, pages 2371–2383, 2009.
- [Belhabib 07a] S. Belhabib. *Développement d'un essai de traction hétérogène et identification d'une loi d'écrouissage et d'un critère de plasticité par recalage éléments finis sur des mesures de champs de déformation finies obtenues par corrélation d'images numériques.* Thèse de Doctorat, Université Paris XIII, 2007.
- [Belhabib 07b] S. Belhabib, H. Haddadi, M. Gaspérini et P. Vacher. *Heterogeneous tensile test on elastoplastic metallic sheets : Comparaison between FEM simulations and full-field strain measurements.* International Journal of Mechanical Sciences, vol. 50, pages 14–21, 2007.
- [Besnard 10] G. Besnard. *Caractérisation et quantification de surfaces par stéréocorrélation pour des essais mécaniques du quasi statique à la dynamique ultra-rapide.* Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2010.
- [Bever 73] M.B. Bever, D.L. Holt et A.L. Titchener. *The stored energy of cold work – third edition.* Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [Bigot 05] R. Bigot, V. Favier et C. Rouff. *Characterization of semi-solid material mechanical behaviour by indentation test.* Journal of Material Processing Technology, vol. 160, pages 43–53, 2005.
- [Boissière 08] R. Boissière. *Effet de la température sur les capacités de mise en forme d'alliages de magnésium corroyés.* Thèse de Doctorat, INP Grenoble - Université de Savoie - France, 2008.
- [Bonnans 06] F. Bonnans, C. Gilbert, C. Lemaréchal et C. Sagastizábal. Numerical optimization. Theoretical and practical aspects (second edition). Springer, Universitext, 2006.
- [Bonnet 05a] M. Bonnet. *Identification par exploitation de mesures de champs.* In 17^{ème} Congrès Français de Mécanique, Troyes, 2005.
- [Bonnet 05b] M. Bonnet et A. Constantinescu. *Inverse problems in elasticity.* Inverse Problems, vol. 21, pages 1–50, 2005.

- [Bornert 08] M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, M. Dupré J-C. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J-J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P Vacher et B. Wattrisse. *Assessment of Digital Image Correlation measurement errors : Methodology and results.* Experimental Mechanics, vol. 49, pages 353–370, 2008.
- [Bosboom 01] E.T.H. Bosboom, M.K.C. Hesselink, C.W.J. Oomens, C.V.C. Boutena, M.R. Drost et F.P.T. Baaijens. *Passive transverse mechanical properties of skeletal muscle under in-vivo compression.* Journal of Biomechanics, vol. 34, pages 1365–1368, 2001.
- [Boulanger 04] T. Boulanger, A. Chrysochoos, C. Mabru et A. Galtier. *Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels.* International Journal of Fatigue, vol. 26, pages 221–229, 2004.
- [Bouvier 06] S. Bouvier, H. Haddadi, P. Levée et C. Teodosiu. *Simple shear tests : Experimental techniques and characterization of the plastic anisotropy of rolled sheets at large strains.* Journal of Materials Processing Technology, vol. 172, pages 96–103, 2006.
- [Brunet 96] M. Brunet et F. Sidoroff. *Mécanique et thermodynamique des milieux continus en grandes déformations.* Rapport technique, LMS- Insa - Lyon, 1996.
- [Bruno 08] L. Bruno, G. Felice, L. Pagnotta, A. Poggialini et G. Stigliano. *Elastic characterization of orthotropic plates of any shape via static testing.* International Journal of Solids and Structures, vol. 45, pages 908–920, 2008.
- [Cailletaud 93] G. Cailletaud et P. Pilvin. *Identification, problèmes inverse : un concept modulaire.* In 2^{ieme} col. nat. calcul des structures, Giens, pages 770–788, 1993.
- [Cazacu 03] O. Cazacu et F. Barlat. *Application of the theory of representation to describe yielding of anisotropic aluminum alloys.* International Journal of Engineering Science, vol. 41, no. 12, pages 1367 – 1385, 2003.
- [Cazacu 06] O. Cazacu, B. Plunkett et F. Barlat. *Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals.* International Journal of Plasticity, vol. 22, no. 7, pages 1171–1194, 2006.
- [Chaboche 93] J-L. Chaboche. *Cyclic viscoplastic constitutive equations, Part II : stored energy, comparison between models and experiments.* J. Appl. Mech., vol. 60, pages 822–828, 1993.
- [Chalal 06] H. Chalal, S. Avril, F. Pierron et F. Meraghni. *Experimental identification of nonlinear model for composite using the grid technique coupled to the virtual field method.* Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 37, pages 315–325, 2006.
- [Chambard 09] J-P. Chambard, S. Jaminion, M. Tazeroualti, C. Galerne et F. Hild. *3D displacement field measurement by digital image correlation - Metrological study and application to composite structures.* In Comptes Rendus des JNC 16 – Toulouse, 2009.

- [Chamekh 06] A. Chamekh, H. BelHadjSalah, R. Hamblé et A. Gahbiche. *Inverse identification using the bulge test and artificial neural networks*. Journal of Materials Processing Technology, vol. 177, no. 1-3, pages 307 – 310, 2006.
- [Chehade 90] I.H. Chehade. *Simulation de l'emboutissage des tôles anisotropes par éléments-finis avec prédition des risques de striction*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, 1990.
- [Cheng 08] Y.Q. Cheng, H. Zhang, Z.H. Chen et K.F. Xian. *Flow stress equation of AZ31 magnesium alloy sheet during warm tensile deformation*. Journal of Material Processing Technology, vol. 208, pages 29–34, 2008.
- [Chrysochoos 85] A. Chrysochoos. *Bilan énergétique en élastoplasticité grandes déformations*. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 4, pages 589–614, 1985.
- [Chrysochoos 89] A. Chrysochoos, O. Maisonneuve, G. Martin, H. Caumon et J-C. Chezeaux. *Plastic and dissipated work and stored energy*. Nuclear Eng. and Design, vol. 114, pages 323–333, 1989.
- [Chrysochoos 98] A. Chrysochoos et R. Peyroux. *Analyse expérimentale et modélisation numérique des couplages thermomécaniques dans les matériaux solides*. Revue Générale de Thermique, vol. 37, pages 582–606, 1998.
- [Chrysochoos 00] A. Chrysochoos et H. Louche. *An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation*. International Journal of Engineering Science, vol. 38, pages 1759–1788, 2000.
- [Chrysochoos 09] A. Chrysochoos, B. Wattrisse, J-M. Muracciole et Y. El Kaïm. *Fields of stored energy associated with localized necking of steel*. Journal of Mechanics of Materials and Structures, vol. 4, pages 245–262, 2009.
- [Claire 02] D. Claire, S. Roux et F. Hild. *Identification of damage fields using kinematic measurements*. C. R. Mécanique, vol. 330, pages 729–734, 2002.
- [Claire 04] D. Claire, S. Roux et F. Hild. *A finite element formulation to identify damage field : the Equilibrium Gap Method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 61, pages 189–208, 2004.
- [Clément 00] A. Clément, A. Rivièvre et P. serré. *Définition formelle du tolérancement en CAO et en métrologie*. In 3rd International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME), Montréal, 2000.
- [Cooreman 07] S. Cooreman, D. Lecompte, H. Sol, J. Vantonne et D. Debruyne. *Elasto-plastic material parameter identification by inverse methods : Calculation of the sensitivity matrix*. International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pages 4329–4341, 2007.
- [Cooreman 08] S. Cooreman. *Identification of the plastic material behaviour through full-field displacement measurements and inverse methods*. Thèse de Doctorat, Vrije Universiteit Brussel, Belgique, 2008.
- [Cordero 05] R.R. Cordero, M. François, I. Lira et C. Vial-Edwards. *Whole-field analysis of uniaxial tensile tests by Moiré interferometry*. Optics and Lasers in Engineering, vol. 43, no. 9, pages 919–936, 2005.

- [Cosola 08] E. Cosola, K. Genovèse, L. Lamberti et C. Pappalettere. *A general framework for identification of hyper-elastic membranes with moiré techniques and multi-point simulated annealing.* International Journal of Solids and Structures, vol. 45, no. 24, pages 6074–6099, 2008.
- [Coudert 05] T. Coudert. *Reconstruction tridimensionnelle du volume intérieur d'une chaussure : évaluation du chaussant.* Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 2005.
- [Crouzeix 09] L. Crouzeix, J-N. Périé, F. Collombet et B. Douchin. *An orthotropic variant of the equilibrium gap method applied to the analysis of a biaxial test on a composite material.* Composites : Part A, vol. 40, pages 1732–1740, 2009.
- [De Almeida 08] O. De Almeida, F. Lagattu et J. Brillaud. *Analysis by a 3D DIC technique of volumetric deformation gradients : Application to polypropylene/EPR/talc composites.* Composites : Part A, vol. 39, pages 1210–1217, 2008.
- [De Boor 78] C. De Boor. A practical guide to splines. Springer - Verlag, 1978.
- [Dilhaire 04] S Dilhaire, S. Grauby, W. Claeys et J-C. Batsale. *Thermal parameters identification of micrometric layers of microelectronic devices by thermoreflectance microscopy.* Microelectronics Journal, vol. 35, no. 10, pages 811–816, 2004.
- [Dorogoy 09] A. Dorogoy et D. Rittel. *Determination of the Johnson-Cook material parameters using the SCS specimen.* Experimental Mechanics, vol. 49, pages 881–885, 2009.
- [Doudart 10] C. Doudart, S. Calloch, F. Hild et S. Roux. *Identification of heat source fields from infrared thermography : Determination of self-heating in a dual-phase steel by using a dog bone sample.* Mechanics of Materials, vol. 42, pages 55–62, 2010.
- [Dournaux 09] J.L. Dournaux, S. Bouvier, A. Aouafi et P. Vacher. *Full-field measurement technique and its application to the analysis of materials behaviour under plane strain mode.* Materials Science and Engineering A, vol. 500, pages 47–62, 2009.
- [Dumoulin 01] S. Dumoulin. *De l'utilisation d'une loi monocristalline en vue de la caractérisation du comportement plastique d'un multicristal d'aluminium.* Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 2001.
- [Dumoulin 10] S. Dumoulin, H. Louche, O.S. Hopperstad et T. Børvik. *Heat sources, energy storage and dissipation in high-strength steels : Experiments and modelling.* European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 29, no. 3, pages 461–474, 2010.
- [Dupré 97] J-C. Dupré et A. Lagarde. *Photoelastic analysis of a three-dimensional specimen by optical slicing and digital Image processing.* Experimental Mechanics, vol. 37, no. 4, pages 393–397, 1997.
- [Eberl 10] C. Eberl, D.S. Gianola et K.J. Hemker. *Mechanical characterization of coatings using microbeam bending and digital image correlation techniques.* Experimental Mechanics, vol. 50, pages 85–97, 2010.

- [Fan 03] J.Y. Fan. *A modified Levenberg-Marquardt algorithm for singular system of non linear equations.* Journal of Computational Mathematics, vol. 21, pages 625–636, 2003.
- [Fan 09] J.Y. Fan et J. Pan. *A note on the Levenberg-Marquardt parameter.* Applied Mathematics and Computation, vol. 207, pages 351–359, 2009.
- [Favrelière 09] H. Favrelière. *Tolérancement modal. De la métrologie vers les spécifications.* Thèse de Doctorat, Université de Savoie, France, 2009.
- [Ferron 94] G. Ferron, R. Makkouk et J. Morreale. *A parametric description of orthotropic plasticity in metal sheets.* International Journal of Plasticity, vol. 10, no. 5, pages 431 – 449, 1994.
- [Forestier 04] R. Forestier. *Développement d'une méthode d'identification de paramètres matériaux par analyse inverse couplée avec un modèle éléments-finis 3D.* Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [Frey 03] F. Frey et M-A. Studer. Analyse des structures et milieux continus – coques. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2003.
- [Garcia 01] D. Garcia. *Mesure de formes et de champs de déplacements tridimensionnels par stéréo-corrélation d'images.* Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2001.
- [Garcia 02] D. Garcia, J.J. Orteu et L. Penazzi. *A combined temporal tracking and stereo-correlation technique for accurate measurement of 3D displacements : application to sheet metal forming.* Journal of Material Processing Technology, vol. 125-126, pages 736–742, 2002.
- [Gavrus 96] A. Gavrus, E. Massoni et J.L. Chenot. *An inverse analysis using finite element model for identification of rheological parameters.* Journal of Material Processing Technology, vol. 60, pages 447–454, 1996.
- [Gelin 95] J.C. Gelin et O. Ghouati. *The inverse approach for the determination of constitutive equations in metal forming.* Annals of the CIRP, vol. 44, no. 1, pages 189–192, 1995.
- [Gelin 98] J.C. Gelin, O. Ghouati et P. Paquier. *Modelling and Control of Hydroforming Processes for Flanges Forming.* Annals of the CIRP, vol. 47, no. 1, pages 213–216, 1998.
- [Genovèse 06] K. Genovèse, L. Lamberti et Pappalettere C. *Mechanical characterization of hyperelastic materials with fringe projection and optimization techniques.* Optics and Lasers in Engineering, vol. 44, no. 5, pages 423–442, 2006.
- [Germain 73] P. Germain. Cours de mécanique des milieux continus. Ed. Dunod, 1973.
- [Germaneau 08] A. Germaneau, P. Doumalin et J-C. Dupré. *Comparison between X-ray micro-computed tomography and optical scanning tomography for full 3D strain measurement by digital volume correlation.* NDT&E International, vol. 41, pages 407–415, 2008.

- [Germaneau 10] A. Germaneau, F. Peyruseigt, S. Mistou, P. Doumalin et J-C. Dupré. *3D mechanical analysis of aeronautical plain bearings : Validation of a finite element model from measurement of displacement fields by digital volume correlation and optical scanning tomography.* Optics and Lasers in Engineering, vol. 48, pages 676–683, 2010.
- [Geymonat 02] G. Geymonat, F. Hild et S. Pagano. *Identification of elastic parameters by displacement field measurement.* Comptes Rendus Mécaniques, vol. 330, no. 6, pages 403–408, 2002.
- [Ghouati 98] O. Ghouati et J.C. Gelin. *Identification of material parameters directly from metal forming processes.* Journal of Material Processing Technology, vol. 80–81, pages 560–564, 1998.
- [Ghouati 01] O. Ghouati et J.C. Gelin. *A finite element-based identification method for complex metallic material behaviours.* Computational Materials Science, vol. 21, pages 57–68, 2001.
- [Grédiac 89] M. Grédiac. *Principe des travaux virtuels et identification/Principle of virtual work and identification.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences., vol. 309, pages 1–5, 1989.
- [Grédiac 96] M. Grédiac. *The use of heterogeneous strain fields for the characterization of composite materials.* Composites Science and Technology, vol. 56, pages 841–846, 1996.
- [Grédiac 99] M. Grédiac, Pierron F. et Y. Surrel. *Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a single T-shaped specimen.* Experimental Mechanics, vol. 39, no. 2, pages 142–149, 1999.
- [Grédiac 02] M. Grédiac, E. Toussaint et F. Pierron. *Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1–Principle and definition.* International Journal of Solids and structures, vol. 37, pages 2691–2705, 2002.
- [Grédiac 03] M. Grédiac, E. Toussaint et F. Pierron. *Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 3–Application to the bending rigidities of anisotropic plates.* International Journal of Solids and Structures, vol. 40, no. 10, pages 2401–2419, 2003.
- [Grédiac 04] M. Grédiac. *The use of full-field measurement methods in composite material characterization : interest and limitations.* Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 35, pages 751–761, 2004.
- [Grédiac 06] M. Grédiac et F. Pierron. *Applying the Virtual Field Method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters.* International Journal of Plasticity, vol. 22, pages 602–627, 2006.
- [Gresovnik 00] I. Gresovnik. *A general purpose computational shell for solving inverse and optimisation problems : Application to metal forming processes.* Thèse de Doctorat, University of Wales, Swansea, U.K., 2000.
- [Gronostajski 00] Z. Gronostajski. *The constitutive equations for FEM analysis.* Journal of Material Processing Technology, vol. 106, pages 40–44, 2000.

- [Grytten 09] F. Grytten, Daiyan H., M. Polanco-Loria et S. Dumoulin. *Use of digital image correlation to measure large-strain tensile properties of ductile thermoplastics.* Polymer Testing, vol. 28, pages 653–660, 2009.
- [G'Sell 02] C. G'Sell, J.M. Hiver et A. Dahoun. *Experimental characterization of deformation damage in solid polymers under tension, and its interrelation with necking.* International Journal of Solids and Structures, vol. 39, pages 3857–3872, 2002.
- [Guélon 09] T. Guélon, E. Toussaint, J.-B. Le Cam, N. Promma et M. Grédiac. *A new characterisation method for rubber.* Polymer Testing, vol. 28, no. 7, pages 715–723, 2009.
- [Hadamard 32] J. Hadamard. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Hermann, Paris, 1932.
- [Haddadi 06] H. Haddadi, S. Bouvier, M. Banu, C. Maier et C. Teodosiu. *Towards an accurate description of the anisotropic behaviour of sheet metals under large plastic deformations : Modelling, numerical analysis and identification.* International Journal of Plasticity, vol. 22, pages 2226–2271, 2006.
- [Haddadi 08] H. Haddadi et S. Belhabib. *Use of rigid-body motion for the investigation and estimation of the measurement errors related to digital image correlation technique.* Optics and Lasers in Engineering, vol. 46, pages 185–196, 2008.
- [Harth 04] T. Harth, S. Schwan, J. Lehn et F.G. Kollmann. *Identification of material parameters for inelastic constitutive models : statistical analysis and design of experiments.* International Journal of Plasticity, vol. 20, pages 1403–1440, 2004.
- [Hendricks 91] M.A.N. Hendricks. *Identification of the mechanical behavior of solid materials.* Thèse de Doctorat, Eindhoven University of Technology, Netherlands, 1991.
- [Héripé 07] E. Héripé, M. Dexet, J. Crépin, L. Gélébart, A. Roos, M. Bornert et D. Caldemaison. *Coupling between experimental measurements and polycrystal finite element calculations for micromechanical study of metallic materials.* International Journal of Plasticity, vol. 23, no. 9, pages 1512–1539, 2007.
- [Hild 98] F. Hild. Endommagement, rupture et changements d'échelles dans les matériaux homogènes. Mémoire HDR, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1998.
- [Hild 06] F. Hild et S. Roux. *Digital Image Correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties - a review.* Strain, vol. 42, pages 69–80, 2006.
- [Hill 48] R. Hill. *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals.* Proc. Roy. Soc. London Ser. A, vol. 193, pages 281–297, 1948.
- [Hill 79] R. Hill. *Theoretical plasticity of textured aggregates.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 85, pages 179–191, 1979.

- [Hodowany 00] J. Hodowany, G. Ravichandran, A. J. Rosakis et P. Rosakis. *Partition of plastic work into heat and stored energy in metals.* Experimental Mechanics, vol. 40(2), pages 113–123, 2000.
- [Holland 75] J. Holland. Adaptation in natural and artificial systems. University of Michigan press, Ann Arbor, 1975.
- [Hu 07] W. Hu. *A novel quadratic yield model to describe the feature of multi-yield-surface of rolled sheet metals.* International Journal of Plasticity, vol. 23, pages 2004–2028, 2007.
- [INSTRON 05] INSTRON. *2525-800 Series Load Cells.* Rapport technique, INSTRON corp., 2005.
- [Iosipescu 67] N. Iosipescu. *New accurate procedure for single shear testing of metals.* J. Mater., vol. 2, no. 3, pages 537–566, 1967.
- [ISO-6892-1 09] ISO-6892-1. Matériaux métalliques — essai de traction — Partie I : méthode d'essai à température ambiante. AFNOR, 2009.
- [Jin 05] H. Q. Jin et H. A. Bruck. *Pointwise digital image correlation using genetic algorithms.* Experimental Techniques, vol. 23, pages 36–39, 2005.
- [Johnson 83] G.J. Johnson et W.H. Cook. *A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures.* In Seventh International Symposium on Ballistics, 1983.
- [Kajberg 04a] J. Kajberg et G. Lindkvist. *Characterization of materials subjected to large strains by inverse modeling based on in-plane displacement fields.* International Journal of Solids and Structures, vol. 41, pages 3439–3459, 2004.
- [Kajberg 04b] J. Kajberg, K.G. Sundin, L.G. Melin et P. Stahle. *High strain-rate tensile testing and viscoplastic parameter identification using microscopic high-speed photography.* International Journal of Plasticity, vol. 20, no. 4-5, pages 561 – 575, 2004.
- [Kajberg 07] J. Kajberg et B. Wikman. *Viscoplastic parameter estimation by high strain-rate experiment and inverse modeling – Speckle measurement and high-speed photography.* International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pages 145–164, 2007.
- [Kappor 98] R Kappor et S. Nemat-Nasser. *Determination of temperature rise during high strain rate deformation.* Mechanics of Materials, vol. 27, pages 1–12, 1998.
- [Kavanagh 71] K.T. Kavanagh et R.W. Clough. *Finite element applications in the characterization of elastic solids.* International Journal of Solids and Structures, vol. 7, pages 11–23, 1971.
- [Khalfallah 02] A. Khalfallah, H. Bel Hadj Salah et A. Dogui. *Anisotropic parameter identification using inhomogeneous tensile test.* European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 21, pages 927–942, 2002.

- [Khalfallah 04] A. Khalfallah. *Identification des lois de comportement élastoplastiques par essais inhomogènes et simulations numériques*. Thèse de Doctorat, Université Tunis El Manar, Tunisie, 2004.
- [Kleinermann 00] J.-P. Kleinermann. *Identification paramétrique et optimisation des procédés de mise en forme par problème inverse*. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Belgique, 2000.
- [Kuwabara 00] T. Kuwabara, M. Kuroda, V. Tvergaard et K. Nomura. *Use of abrupt strain path change for determining subsequent yield surface : experimental study with metal sheets*. Acta Materialia, vol. 48, pages 2071–2079, 2000.
- [Ladevèze 75] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1975.
- [Ladevèze 99] P. Ladevèze, N. Moës et B. Douchin. *Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering., vol. 176, pages 247–264, 1999.
- [Lagattu 05] F. Lagattu, M.C. Lafarie-Frenot, T.Q. Lam et J. Brillaud. *Experimental characterisation of overstress accommodation in notched CFRP composite laminates*. Composite Structures, vol. 67, pages 347–357, 2005.
- [Latourte 07] F. Latourte. *Identification des paramètres d'une loi élastoplastique de Prager et calcul de champs de contrainte dans des matériaux hétérogènes*. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 2007.
- [Latourte 08] F. Latourte, A. Chrysochoos, S. Pagano et B. Wattrisse. *Elastoplastic behavior identification for heterogeneous loadings and materials*. Experimental Mechanics, vol. 48, pages 435–449, 2008.
- [Lauwagie 05] T. Lauwagie. *Vibration based methods for the identification of the elastic properties of layered materials*. Thèse de Doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, Belgique, 2005.
- [Le Magorou 02] L. Le Magorou, F. Bos et F. Rouger. *Identification of constitutive laws for wood-based panels by means of an inverse method*. Composites Sciences and Technology, vol. 62, pages 591–596, 2002.
- [Le Port 09] A Le Port, F Toussaint et R Arrieux. *Finite element study and sensitivity analysis of the deep-drawing formability of commercially pure titanium*. International Journal of Material Forming, vol. 2, pages 121–129, 2009.
- [Leclerc 09] H. Leclerc, J-N. Périé, S. Roux et F. Hild. *Integrated Digital Image Correlation for the identification of mechanical properties*. In Computer Vision/Computer Graphics Collaboration Techniques. Springer Berlin- Heidelberg, 2009.
- [Lecompte 07a] D. Lecompte. *Elastic and elasto-plastic material parameter identification by inverse modeling of static tests using digital image correlation*. Thèse de Doctorat, Koninklijke Militaire School, Belgique, 2007.

- [Lecompte 07b] D. Lecompte, A. Smits, H. Sol, J. Vantomme et D. Van Hemelrijck. *Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile test on cruciform specimens.* International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pages 1643–1656, 2007.
- [Lee 69] E.H. Lee. *Elastic-plastic deformation at finite strain.* Journal of Applied Mechanics, vol. 36, pages 1–6, 1969.
- [Lee 81] E.H. Lee. *Some comment on elastic-plastic analysis.* International Journal of Solids and Structures, vol. 17, pages 859–872, 1981.
- [Lemaitre 85] J. Lemaitre et J.L. Chaboche. Mécanique des matériaux solides. Dunod, 1985.
- [Levenberg 44] K. Levenberg. *A method for the solution of certain non-linear problems in least-squares.* Quart. Appl. Math., vol. 2, pages 164–168, 1944.
- [Liu 05] G.R. Liu, J.H. Lee, A.T. Patera, Z.L. Yang et K.Y. Lam. *Inverse identification of thermal parameters using reduced-basis method.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, no. 27-29, pages 3090–3107, 2005.
- [Louche 99] H. Louche. *Analyse par thermographie infrarouge des effets dissipatifs de la localisation dans les aciers.* Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, France, 1999.
- [Louche 09] H. Louche. Etudes de certains phénomènes de localisation à partir de champs thermomécaniques. Mémoire HDR, Université de Savoie, 2009.
- [Lütjering 03] G. Lütjering et J.C. Williams. Titanium. Springer, Engineering Material and Process, 2003.
- [Ma 07] C. Ma et L. Jiang. *Some research on Levenberg-Marquardt method for non-linear equations.* Applied Mathematics and Computation, vol. 184, pages 1032–1040, 2007.
- [Mabrouki 08] T. Mabrouki, F. Girardin, M. Asad et J-F. Rigal. *Numerical and experimental study of dry cutting for an aeronautic aluminium alloy A2024-T351.* International Journal of Machine Tools and Manufacture, vol. 48, pages 1187–1197, 2008.
- [Macdougall 00] D. Macdougall. *Determination of the plastic work converted to heat using radiometry.* Experimental Mechanics, vol. 40, pages 298–306, 2000.
- [Mahnken 96] R. Mahnken et E. Stein. *Parameter identification for viscoplastic models based on analytical derivatives of a least-squares functional and stability investigations.* International Journal of Plasticity, vol. 12, no. 4, pages 451 – 479, 1996.
- [Mahnken 97] R. Mahnken et E. Stein. *Parameter identification for finite deformation elasto-plasticity in principal direction.* Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 147, pages 17–39, 1997.

- [Mahnken 99] R. Mahnken. *Aspects on the finite-element implementation of the Gurson model including parameter identification.* International Journal of Plasticity, vol. 15, pages 1111–1137, 1999.
- [Maier 06] G. Maier, M. Bocciarelli, G. Bolzon et R. Fedele. *Inverse analyses in fracture mechanics.* International Journal of Fracture, vol. 138, pages 47–73, 2006.
- [Manach 04] P-Y. Manach. Lois de comportement et mise en forme des matériaux métalliques. Mémoire HDR, Université de Bretagne sud, 2004.
- [Marquardt 63] D.W. Marquardt. *An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters.* J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 11, pages 431–441, 1963.
- [Mathias 06] J-D. Mathias, X. Balandraud et M. Grédiac. *Experimental investigation of composite patches with a full-field measurement method.* Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 37, no. 2, pages 177–190, 2006.
- [Meunier 08] L. Meunier, G. Chagnon, D. Favier, L. Orgéas et P. Vacher. *Mechanical experimental characterisation and numerical modelling of an unfilled silicone rubber.* Polymer Testing, vol. 27, pages 765–777, 2008.
- [Meurs 96] P.F.M. Meurs, P.J.G. Schreurs, T. Peijs et H.E.H. Meijer. *Characterization of interphase conditions on composite materials.* Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 29, no. 9-10, pages 1027–1034, 1996.
- [Meuwissen 98a] M.H.H. Meuwissen. *An inverse method for mechanical characterization of metal.* Thèse de Doctorat, Eindhoven University of Technology, Netherlands, 1998.
- [Meuwissen 98b] M.H.H. Meuwissen, C.W.J. Oomens, F.P.T. Baaijens, R. Petterson et J.D. Janssen. *Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method.* Journal of Material Processing Technology, vol. 75, pages 204–211, 1998.
- [Molimard 05] J. Molimard, R. Le Riche, A. Vautrin et J.R. Lee. *Identification of the four orthotropic plate stiffnesses using a single open-hole tensile test.* Experimental Mechanics, vol. 45, pages 404–411, 2005.
- [Moustahfid 97] H. Moustahfid, M. Humbert et M.J. Philippe. *Modeling of texture transformation in a Ti-64 sheet after hot compression.* Actu Materialia, vol. 45, pages 3785–3790, 1997.
- [Nakamura 07] T. Nakamura et Y. Liu. *Determination of nonlinear properties of thermal sprayed ceramic coatings via inverse analysis.* International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pages 1990–2009, 2007.
- [Nastar 93] C. Nastar et N. Ayache. *Fast segmentation, tracking and analysis of deformable objects.* In 4th International Conference on Computer Vision (ICCV), 1993.
- [Needleman 95] A. Needleman et V. Tvergaard. *Analysis of a brittle-ductile transition under dynamic shear loading.* International Journal of Solids and Structures, vol. 32, pages 2571–2590, 1995.

- [Nelder 65] J.A. Nelder et R. Mead. *A simplex method for function minimization*. Computer J., vol. 7, pages 308–313, 1965.
- [Nougier 93] J-P. Nougier. Méthodes de calcul numérique : troisième édition. Masson, 1993.
- [Oliferuk 04] W. Oliferuk, M. Maj et B. Raniecki. *Experimental analysis of energy storage rate components during tensile deformation of polycrystals*. Materials Science and Engineering A, vol. 374, no. 1-2, pages 77–81, 2004.
- [Padmanabhan 06] S. Padmanabhan, J. P. Hubner, A. V. Kumar et P. G. Ifju. *Load and Boundary Condition Calibration Using Full-field Strain Measurement*. Experimental Mechanics, vol. 46, pages 569–578, 2006.
- [Pagnacco 07] E. Pagnacco, A. Moreau et D. Lemosse. *Inverse strategies for the identification of elastic and viscoelastic material parameters using full-field measurements*. Materials Science and Engineering : A, vol. 452-453, pages 737 – 745, 2007.
- [Pan 08a] B. Pan, H. Xie, J. Gao et A. Asundi. *Improved speckle projection profilometry for out-of-plane shape measurement*. Applied Optics, vol. 47, pages 5527–5533, 2008.
- [Pan 08b] B. Pan, H. Xie, Z. Wang, K. Qian et Z. Wang. *Study on subset size selection in digital image correlation for speckle patterns*. Optics express, vol. 16, pages 7037–7048, 2008.
- [Pan 09] B. Pan, K. Qian, H. Xie et A. Asundi. *Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement : a review*. Measurement science and technology, vol. 20, pages 1–17, 2009.
- [Pan 10] B. Pan, Z. Lu et H. Xie. *Mean intensity gradient : An effective global parameter for quality assessment of the speckle patterns used in digital image correlation*. Optics and Lasers in Engineering, vol. 48, pages 469–477, 2010.
- [Pannier 06] Y. Pannier. *Identification de paramètres élastoplastiques par des essais statiquement indéterminés : mise en oeuvre expérimentale et validation de la méthode des champs virtuels*. Thèse de Doctorat, Ecole National Supérieure des Arts et Métiers, France, 2006.
- [Patterson 07] E.A. Patterson, E. Hack, P. Brailly, R.L. Burguete, Q. Saleem, T. Siebert, R.A. Tomlinson et M.P. Whelan. *Calibration and evaluation of optical systems for full-field measurement*. Optics and Laser Engineering, vol. 45, pages 550–564, 2007.
- [Pentland 90] A.P. Pentland. *Automatic extraction of deformable part models*. International Journal on Computer Vision, vol. 4, pages 107–126, 1990.
- [Ponthod 06] J.-P. Ponthod et J.-P. Kleinermann. *A cascade optimization methodology for automatic parameter identification and shape/process optimization in metal forming*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 195, pages 5472–5508, 2006.

- [Post 94] D. Post, B. Han et F. Ifju. High sensitivity moiré : Experimental analysis for mechanics and materials. Springer, Verlag, New York NY, 1994.
- [Pottier 07] T. Pottier. étude thermomécanique des élastomères. approche expérimentale de champs thermiques en grands déplacements. Master's thesis, Université Blaise Pascal – Clermont II, 2007.
- [Pottier 09] T. Pottier, M-P. Moutrille, J-B. Le-Cam, X. Balandraud et M. Grédiac. *Study on the use of motion compensation techniques to determine heat sources. Application to large deformations on cracked rubber specimens.* Experimental Mechanics, vol. 49, pages 561–574, 2009.
- [Promma 09] N. Promma, B. Raka, M. Grédiac, E. Toussaint, J.-B. LeCam, X. Balandraud et F. Hild. *Application of the virtual fields method to mechanical characterization of elastomeric materials.* International Journal of Solids and Structures, vol. 46, pages 698–715, 2009.
- [Renault 10] N. Renault, S. André, D. Maillet et C. Cunat. *A spectral method for the estimation of a thermomechanical heat source from infrared temperature measurements.* International Journal of Thermal Sciences, vol. 49, no. 8, pages 1394–1406, 2010.
- [Rice 76] J.R. Rice. The localization of plastic deformation. Theoretical and Applied Mechanics, W.T. Koiter (Ed.), North Holland, Amsterdam, 1976.
- [Rittel 99] D. Rittel. *On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers.* Mechanics of Materials, vol. 31, pages 131–139, 1999.
- [Roux 05] S. Roux, F. Hild et S. Pagano. *A stress scale in full-field identification procedures : a diffuse stress gauge.* European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 24, pages 442–451, 2005.
- [Roux 08] S. Roux et F. Hild. *Digital Image Mechanical Identification (DIMI).* Experimental Mechanics, vol. 48, pages 495–508, 2008.
- [Roux 09] S. Roux, J-N. Périé et F. Hild. *3D Digital Image Correlation technique applied to in situ loaded foam-like materials.* In Seventh EUROMECH Solid Mechanics Conference, 2009.
- [Ryu 08] W-J. Ryu, Y-J. Kang, S-H. Baik et S-J. Kang. *A study on the 3-D measurement by using digital projection moiré method.* Optik - International Journal for Light and Electron Optics, vol. 119, no. 10, pages 453 – 458, 2008.
- [Sakagami 08] T. Sakagami, T. Nishimura, T. Yamaguchi et N. Kubo. *A new full-field motion compensation technique for infrared stress measurement using digital image correlation.* Jounal of Strain Analysis, vol. 43, pages 539–549, 2008.
- [Samper 03] S. Samper, H. Louche et P. Paccard. *Conception d'une cloche. Mise en place d'une démarche de simulation vibratoire.* In 3rd International Conference on Intergrated Design and Production, 2003.
- [Samper 09] S. Samper, P-A. Agragna, H. Favrelière et M. Pillet. *Modeling of 2D and 3D assemblies taking into account form errors of plane surfaces.* J. Comput. Inf. Sci. Eng., vol. 9, no. 4, pages 1005–1017, 2009.

- [Sasso 08] M. Sasso, G. Newaz et D. Amodio. *Material characterization at high strain rate by Hopkinson bar tests and finite element optimization.* Materials Science and Engineering A, vol. 487, pages 289–300, 2008.
- [Schmidt 99] R. Schmidt. Comportement des matériaux dans les milieux biologiques. Springer, 1999.
- [Sedighi 10] M. Sedighi, M. Khandaei et H. Shokrollahi. *An approach in parametric identification of high strain rate constitutive model using Hopkinson pressure bar test results.* Materials Science and Engineering : A, vol. In Press, Accepted Manuscript, pages –, 2010.
- [Sene 10] A.N. Sene. *Études expérimentales et numériques de la micro-formabilité des matériaux métalliques de faible épaisseur.* Thèse de Doctorat, Université de Savoie, France, 2010.
- [Sergent 10] A. Sergent, H. Bui-Minh, H. Favreliere, D. Duret, S. Samper et F. Villeneuve. *Identification of machining defects by Small Displacement Torsor and form parameterization method.* In IDMME - Virtual Concept, 2010.
- [Sidoroff 82] F. Sidoroff. *Grandes déformations et endommagement.* Rapport technique, CNRS / GRECO, 1982.
- [Sidoroff 83] F. Sidoroff. *Mécanique des solides – Tome 1 : Mécanique des milieux continus.* Rapport technique, Ecole centrale de Lyon, 1983.
- [Sidoroff 84] F. Sidoroff. *Mécanique et thermodynamique des milieux continus.* Rapport technique, Ecole centrale de Lyon, 1984.
- [Sjödahl 98] M. Sjödahl. *Some recent advances in electronic speckle photography.* Optics and Lasers in Engineering, vol. 29, no. 2-3, pages 125–144, 1998.
- [Surrel 04] Y. Surrel. *Les techniques optiques demesure de champ : essai de classification.* Instrumentation, Mesure, et Métrologie, vol. 4, pages 11–42, 2004.
- [Sutton 86] C. Sutton M.A. amd Mingqi, W.H. Peters, Y.J. Chao et S.R. McNeill. *Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis Image.* Image and Vision Computing,, vol. 4, pages 143–150, 1986.
- [Sutton 00] M.A. Sutton, S.R. McNeill, J.D. Helm et Y.J. Chao. *Advances in two-dimensional and three-dimensional computer vision.* Topics in Applied Physics, vol. 77, pages 323–372, 2000.
- [Sutton 08] M. A. Sutton, J. H. Yan, Tiwari V., W. H. Schreier et J. J. Orteu. *The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements.* Optics and Lasers in Engineering, vol. 46, pages 746–757, 2008.
- [Taylor 37] G.I. Taylor et H. Quinney. *The latent heat remaining in a metal after cold working.* Proc. Roy. Soc. London A, vol. 163, pages 157–181, 1937.
- [Telejko 04] T. Telejko et Z. Malinowski. *Application of an inverse solution to the thermal conductivity identification using the finite element method.* Journal of Materials Processing Technology, vol. 146, no. 2, pages 145–155, 2004.

- [Tikhonov 77] A.N. Tikhonov. *Solutions of ill-posed problems*. Winstom, Washington DC, 1977.
- [Tiwari 09] V. Tiwari, M.A. Sutton, S.R. McNeill, S. Xu, X. Deng, W.L. Journey et D. Bretall. *Application of 3D image correlation for full-field transient plate deformation measurements during blast loading*. International Journal of Impact Engineering, vol. 36, pages 862–874, 2009.
- [Tong 06] W. Tong. *A plane stress anisotropic plastic flow theory for orthotropic sheet metals*. International Journal of Plasticity, vol. 22, no. 3, pages 497–535, 2006.
- [Tortorelli 94a] D.A. Tortorelli et P. Michaleris. *Design Sensitivity analysis : Overview and review*. Inverse Problems in Engineering, vol. 1, pages 71–105, 1994.
- [Tortorelli 94b] D.A. Tortorelli, P. Michaleris et Vidal C.A. *Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with application to elastoplasticity*. International Jounal of Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pages 2471–2499, 1994.
- [Toussaint 06] E. Toussaint, M. Grédiac et F. Pierron. *The virtual fields method with piecewise virtual fields*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 48, no. 3, pages 256 – 264, 2006.
- [Toussaint 08] F. Toussaint, L. Tabourot et F. Ducher. *Experimental and numerical analysis of the forming process of CP titanium scoliotic instrumentation*. Journal of Material Processing Technology, vol. 197, pages 10–16, 2008.
- [Uthaisangsuk 07] V. Uthaisangsuk, U. Prahl et W. Bleck. *Stress based failure criterion for formability characterisation of metastable steels*. Computational Materials Science, vol. 39, no. 1, pages 43–48, 2007.
- [Uthaisangsuk 08] V. Uthaisangsuk, U. Prahl, S. Münstermann et W. Bleck. *Experimental and numerical failure criterion for formability prediction in sheet metal forming*. Computational Materials Science, vol. 43, no. 1, pages 43–50, 2008.
- [Vacher 99] P. Vacher, S. Dumoulin, F. Morestin et S. Mgual-Touchal. *Bidimensional strain measurement using digital images*. Proc. Inst. Mech. Eng., vol. 213, pages 811–817, 1999.
- [Vacher 03] P. Vacher. *Apports des techniques de corrélation d'image en mécanique : analyse des déformations et reconstruction 3D*. Mémoire HDR, Université de Savoie, 2003.
- [Vincent 08] L. Vincent. *On the ability of some cyclic plasticity models to predict the evolution of stored energy in a type 304L stainless steel submitted to high cycle fatigue*. Eur. J. Mech. A./Solids, vol. 27, pages 161–180, 2008.
- [Vivier 09] G. Vivier, H. Trumel et F. Hild. *On the stored and dissipated energies in heterogeneous rate-independent systems. Theory and simple examples*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol. 20, no. 7, pages 411–427, 2009.
- [Watrisse 01] B. Watrisse, A. Chrysochoos, J-M. Muracciole et M. Némoz-Gaillard. *Analysis of Strain Localization during Tensile Tests by Digital Image Correlation*. Experimental Mechanics, vol. 41, pages 29–39, 2001.

- [Watrisse 03] B. Watrisse, J-M. Muracciole et Chrysochoos A. *Mécanismes dissipatifs liés à la propagation de lèvres de striction dans un polymère semi-cristallin / Dissipative mechanisms during the necking of a semi-crystalline polymer.* Mécanique et industries, vol. 4, pages 667–671, 2003.
- [Wawrzynek 03] A. Wawrzynek, A. J. Nowak, M. Bartoszek, R. Delpak, J. K. C. Shih et C. W. Hu. *Application of direct/inverse analysis to evaluate the structure integrity of concrete. Part I. Formulation for thermo-mechanical properties determination.* NDT & E International, vol. 36, no. 2, pages 101–110, 2003.
- [Witz 08] J-F. Witz, S. Roux et F. Hild. *Mechanical properties of crimped mineral wools : Identification from digital image correlation.* Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 130, pages 1–7, 2008.
- [Xianyu 10] Su Xianyu et Zhang Qican. *Dynamic 3-D shape measurement method : A review.* Optics and Lasers in Engineering, vol. 48, no. 2, pages 191–204, 2010.
- [Yamaguchi 03] I. Yamaguchi. *Holography, speckle, and computers.* Optics and Lasers in Engineering, vol. 39, no. 4, pages 411–429, 2003.
- [Yoshida 98] F. Yoshida, M. Urabe et V.V. Toropov. *Identification of material parameters in constitutive model for sheet metals from cyclic bending tests.* International Journal of Mechanical Sciences, vol. 40, pages 237–249, 1998.
- [Yoshida 03] F. Yoshida, M. Urabe, R. Hino et V.V. Toropov. *Inverse approach to identification of material parameters of cyclic elasto-plasticity for component layers of a bimetallic sheet.* International Journal of Plasticity, vol. 19, pages 2149–2170, 2003.
- [Zehnder 91] A.T. Zehnder. *A model for the heating due to plastic work.* Mechanics Research Communications, vol. 18, pages 23–28, 1991.
- [Zhou 96] M. Zhou, G. Ravichandran et J. Rosakis. *Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates - II. Numerical simulations.* J. Mech. Phys. Solids, vol. 44, pages 1007–1032, 1996.

IDENTIFICATION PARAMÉTRIQUE PAR RECALAGE DE MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS COUPLÉE À DES MESURES DE CHAMPS CINÉMATIQUES ET THERMIQUES

Résumé :

Les paramètres de loi de comportement s'identifient habituellement à partir d'éprouvettes standardisées présentant des champs de déformations homogènes. L'essor actuel des méthodes inverses incite à l'utilisation d'essais plus hétérogènes. L'objectif de cette thèse est de développer une procédure d'identification inverse en utilisant une méthode de recalage de modèles éléments finis basée sur des expériences à hétérogénéités croissantes des champs de déformation. À cette fin, des essais plans avec différentes géométries d'éprouvettes, en titane commercialement pur, ont été effectués et un essai original hors plan fortement hétérogène a été mis au point. Dans ce dernier cas, un essai unique réalisé à l'aide d'une machine de traction uni-axiale permet d'obtenir des sollicitations d'expansion, mais aussi de traction et de cisaillement selon deux directions orthogonales. Des mesures de champs cinématiques planes et non planes (stéréo-corrélation d'images) sont utilisées afin d'évaluer les déformations jusqu'à striction. À partir de ces mesures en grandes déformations, on propose de mener une comparaison entre les informations issues de l'expérience et un modèle dupliquant les conditions expérimentales (conditions aux limites issues de la corrélation d'images). Cette comparaison conduit, *via* un processus d'optimisation, à l'actualisation itérative du jeu de paramètres de la loi de comportement utilisée dans le modèle éléments finis. Le nombre de paramètres ainsi identifiés varie selon le modèle de comportement : élastique anisotrope puis élasto-plastique anisotrope. Différentes validations ont mis en évidence l'intérêt de considérer des champs de déformation fortement hétérogènes. Dans ce cadre, des prédictions numériques d'opérations d'emboutissage, réalisées à l'aide des différents jeux de paramètres identifiés sont comparées à l'expérience. On montre que la prise en compte d'un modèle élastique anisotrope plutôt qu'isotrope fournit un état de contrainte plus réaliste en début de plasticité, améliorant considérablement l'identification du modèle plastique. Enfin, une approche couplée entre mesures de champs cinématiques et thermiques (thermographie infrarouge) a été développée. Les paramètres d'un modèle mécanique sont identifiés puis utilisés pour l'évaluation d'un modèle thermique calculant les sources de chaleur. Par cette méthode, plusieurs modèles d'évolution de la fraction d'énergie dissipée sous forme de chaleur ont été identifiés (coefficients de Taylor et Quinney).

Mots clefs :

Méthodes inverses, Corrélation d'images (DIC), Stéréo-corrélation, Thermographie infrarouge, Elasto-plasticité anisotrope, Mesure de champs, Coefficient de Taylor et Quinney.

CONSTITUTIVE PARAMETER IDENTIFICATION USING FINITE ELEMENT UPDATING METHOD ASSOCIATED WITH KINEMATIC AND THERMAL FULL FIELD MEASUREMENTS

Summary :

Material constitutive parameters are usually identified from standard tests exhibiting homogeneous strain states. However, recent improvements in inverse identification methods call upon the use of heterogeneous tests. The purpose of the present work is to develop an inverse identification procedure based on the Finite Element Updating method. Kinematic and thermal full-fields measurements are thus captured from increasingly heterogeneous tests, and provide the input data of the identification process. Various planar tests with commercially pure titanium have been performed and a new non planar experimental test has been designed and set up. This latter allows the identification of tensile, shear and expansion behaviours from a single test conducted on a standard tensile device. Digital Image Correlation along with Stereo Image Correlation is used for measurement purposes. Comparisons are made between measured data and retrieved data from a numerical model of the experiment. An optimization algorithm is used to update the constitutive parameters of the finite element model. The number of identified parameters varies with the chosen constitutive model namely : orthotropic elasticity, then anisotropic plasticity. Several validation protocols highlight the advantages of using heterogeneous rather than homogeneous tests. Moreover it has been shown that the choice of the elastic model (isotropic or orthotropic) has a major influence on the plastic identification. Finally, a mixed kinematic and thermal approach has been developed. Mechanical constitutive parameters are identified and used to assess the body heat sources of the sample. Four evolutionary models of the inelastic heat fraction have been identified by this mean.

Keywords :

Inverse methods, Digital Image Correlation (DIC), Stereo correlation, Infrared thermography, Anisotropic elasto-plasticity, Full field measurements, inelastic heat fraction.

