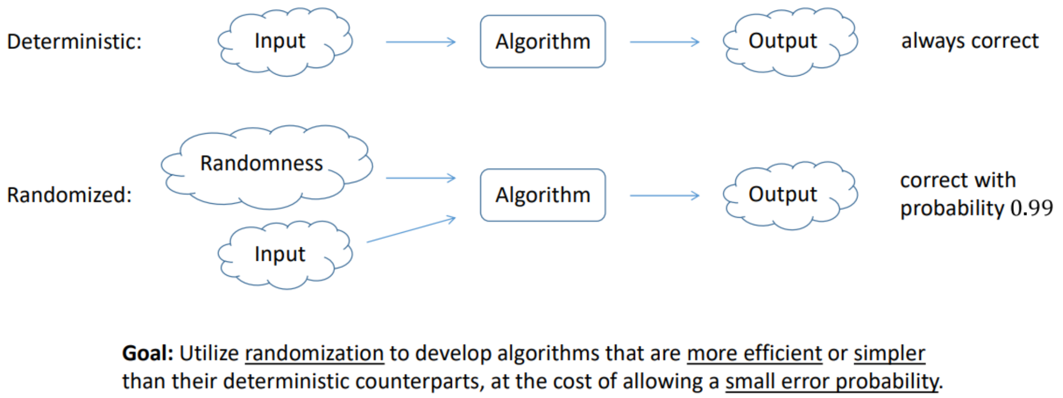
Algoritma Freivalds untuk Verifikasi Perkalian Matriks

1 Pengantar Algoritma Probabilistik vs Deterministik

Algoritma deterministik selalu menghasilkan output yang sama untuk input yang sama dan mengikuti jalur eksekusi tetap. Sebaliknya, algoritma probabilistik menggunakan nilai acak dalam prosesnya sehingga dapat memberikan hasil yang berbeda pada setiap eksekusi. Algoritma probabilistik sering digunakan untuk meningkatkan efisiensi dengan mengorbankan sedikit akurasi.



2 Deskripsi Masalah

Diberikan tiga matriks persegi A, B, dan C berukuran $n \times n$, tentukan apakah benar bahwa:

$$A \times B = C \tag{1}$$

dengan efisiensi yang lebih baik daripada algoritma perkalian matriks langsung yang memiliki kompleksitas waktu $O(n^3)$.

3 Penjelasan Algoritma Freivalds

Algoritma Freivalds adalah algoritma probabilistik yang digunakan untuk memverifikasi apakah hasil perkalian dua matriks benar dalam waktu $O(n^2)$. Algoritma ini bekerja dengan memilih vektor acak r dan menguji persamaan:

$$A(Br) = Cr \tag{2}$$

Jika persamaan ini benar untuk beberapa percobaan acak, maka dengan probabilitas tinggi, $A \times B = C$.

3.1 Langkah-Langkah Algoritma

1. Pilih vektor acak r dari $\{0, 1\}^n$.
2. Hitung Br.
3. Hitung $A(Br)$.
4. Hitung Cr.
5. Jika $A(Br) \neq Cr$, maka pasti $A \times B \neq C$.
6. Jika $A(Br) = Cr$, **ulangi** percobaan beberapa kali untuk mengurangi peluang kesalahan.

Algorithm 1 Algoritma Freivalds

Require: Matriks A, B, dan C ukuran $n \times n$, jumlah uji coba k.
Ensure: Verifikasi apakah $A \times B = C$ dengan probabilitas tinggi.

```
for i = 1 to k do
    Pilih vektor acak r ∈ {0,1}^n
    Hitung x ← Br
    Hitung y ← Ax
    Hitung z ← Cr
    if y ≠ z then
        return False
    end if
end for
return True
```

4 Probabilitas Kesalahan

Jika $A \times B \neq C$, maka ada paling banyak n vektor r yang dapat menyebabkan kesalahan. Karena r dipilih secara acak dari $\{0,1\}^n$, probabilitas memilih vektor yang menyebabkan kesalahan adalah maksimal $\frac{1}{2}$. Dengan menjalankan algoritma k kali, probabilitas kesalahan menjadi:

$$P(\text{kesalahan}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{3}$$

Dengan memilih k yang cukup besar, probabilitas kesalahan dapat dibuat sangat kecil.

5 Contoh Perhitungan (Benar)

Misalkan diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Pilih vektor acak $r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, lalu hitung:

$$\begin{aligned} Br &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \\ A(Br) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}, \\ Cr &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $A(Br) = Cr$, percobaan ini tidak menemukan kesalahan.

6 Contoh Perhitungan (Salah)

Misalkan diberikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 49 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Pilih vektor acak $r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, lalu hitung:

$$\begin{aligned}
Br &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \\
A(Br) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}, \\
Cr &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pada percobaan pertama hasilnya benar, coba untuk kasus acak lainnya $r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, hitung:

$$\begin{aligned}
Br &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \\
A(Br) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \end{bmatrix}, \\
Cr &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 49 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Karena $A(Br) \neq Cr$, maka algoritma menemukan bahwa $A \times B \neq C$.