UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
Fès
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2023-2024
Filières (Semestre) : MIP & IA (S1)
Module : Algèbre 1

Corrigé de l'examen de la session normale

La correction détaillée en séance en vidéo sera publiée sur la chaîne Youtube :
"Département de Mathématiques"
https://www.youtube.com/@Departement_de_Mathematiques
et sur la plateforme E-learning :
http://e-fsdm.usmba.ac.ma/

Corrigé (de l'exercice 1).

1) *Le théorème de Lagrange s'énonce comme suit :*

Théorème (de Lagrange)**.** *Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G. Alors*

$$|G| = [G : H]|H|,$$

et donc, l'ordre de H divise celui de G.

2) *On a :*

★ *Le principe de raisonnement par contraposée s'énonce comme suit :*
Théorème (Principe de contraposition)**.** *Soient P et Q deux assertions. Alors,*

$$P \Longrightarrow Q \equiv \overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}.$$

Autrement dit, les assertions $P \Longrightarrow Q$ et $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ sont équivalentes.

★ *Voici une démonstration du principe de raisonnement par contraposée : on a,*

$$\begin{aligned}
\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P} &\equiv \overline{\overline{Q}} \text{ ou } \overline{P} && (\text{par la définition de l'implication}),\\
&\equiv Q \text{ ou } \overline{P} && (\text{car } \overline{\overline{Q}} \equiv Q),\\
&\equiv \overline{P} \text{ ou } Q && (\text{par la commutativité de la disjonction}),\\
&\equiv P \Longrightarrow Q && (\text{par définition}).
\end{aligned}$$

D'où $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P} \equiv P \Longrightarrow Q$.

Remarque : *On peut démontrer le principe de raisonnement par contraposée autrement par la table de vérité.*

3) *Soit n un entier relatif. Montrer que* $\text{pgcd}(5n^3 - n, n+2) = \text{pgcd}(n+2, 38)$.
En effectuant la division euclidienne de $5n^3 - n$ *par* $n+2$*, on obtient*

$$\begin{array}{r|l} 5n^3 - n & n+2 \\ \cline{2-2} -5n^3 - 10n^2 & 5n^2 - 10n + 19 \\ \cline{1-1} -10n^2 - n & \\ 10n^2 + 20n & \\ \cline{1-1} 19n & \\ -19n - 38 & \\ \cline{1-1} -38 & \end{array}$$

Donc, $5n^3 - n = (n+2)(5n^2 - 10n + 19) - 38$. *Par suite,* $-(5n^3 - n) = (n+2)(-5n^2 + 10n - 19) + 38$ *et alors* $\text{pgcd}(5n^3 - n, n+2) = \text{pgcd}(n+2, 38)$.

4) *L'assertion "f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$" s'écrit en terme des quantificateurs comme suit :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Donc, sa négation est :

$$\overline{\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)} \ \equiv\ \exists x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \text{ et } f(x) > f(y).$$

Car $\overline{P \Longrightarrow Q} \equiv \overline{\overline{P} \text{ ou } Q} \equiv P \text{ et } \overline{Q}$.

5) ★ *Montrons que* $(A \Delta B) \cap C \subseteq (A \cap C) \Delta (B \cap C)$. *Soit* $x \in (A \Delta B) \cap C$. *On a deux cas :*
   a) *Si* $x \in A$ *et* $x \notin B$*, alors* $x \in A \cap C$ *et* $x \notin B \cap C$. *Donc,* $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.
   b) *Si* $x \notin A$ *et* $x \in B$*, alors* $x \notin A \cap C$ *et* $x \in B \cap C$. *Donc,* $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

   Alors dans les deux cas, on a $x \in (A \Delta B) \cap C$. *Par suite,* $(A \Delta B) \cap C \subseteq (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

   ★ *Montrons maintenant que* $(A \cap C) \Delta (B \cap C) \subseteq (A \Delta B) \cap C$. *Soit* $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$. *Comme ci-dessus, on a deux cas :*
   a) *Si* $x \in (A \cap C)$ *et* $x \notin (B \cap C)$*, alors* $x \in C$ *et* $x \in (A \backslash B)$. *Donc,* $x \in C$ *et* $x \in (A \Delta B)$. *D'où,* $x \in (A \Delta B) \cap C$.
   b) *Si* $x \notin (A \cap C)$ *et* $x \in (B \cap C)$*, alors* $x \in C$ *et* $x \in B \backslash A$. *Donc,* $x \in C$ *et* $x \in (A \Delta B)$. *D'où* $x \in (A \Delta B) \cap C$.

   Alors dans les deux cas, on a $x \in (A \Delta B) \cap C$. *Par suite,* $(A \cap C) \Delta (B \cap C) \subseteq (A \Delta B) \cap C$.

   Donc, on a finalement $(A \cap C) \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap C$.

6) $(S_3, \circ)$ *est un groupe non commutatif d'ordre* $3! = 3 \times 2 = 6$ *et* $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif d'ordre* 6.

Corrigé (de l'exercice 2).

1) *Soient* $n, m \in \mathbb{Z}$. *On a* $\varphi_x(n+m) = x^{n+m} = x^n x^m = \varphi_x(n)\varphi_x(m)$. *Donc,* φ_x *est un homomorphisme de groupes.*

2) ★ *Montrons que* φ_x *est surjectif. Soit* $y \in G$*, alors* $\exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$*, car G est monogène engendré par x. Donc,* $\varphi_x(n) = x^n = y$. *Donc,* φ_x *est surjectif (donc,* $\text{Im}(\varphi_x) = G$*).*

- ★ *Or* $\ker(\varphi_x)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{Z},+)$*, alors il existe* $n\in\mathbb{N}$ *tel que* $\ker(\varphi_x)=n\mathbb{Z}$*. On distingue deux cas :*
  - ⋆ *Si* $n=0$*, on a* $\ker(\varphi_x)=\{0\}$ *et donc* f *est injective. Or d'après le point précédent,* φ_x *est surjectif, alors* φ_x *est un isomorphisme, donc dans ce cas,* $G\cong\mathbb{Z}$*.*
  - ⋆ *Si* $n\geq 1$*, alors par le premier théorème d'isomorphisme, on a :*

$$\mathbb{Z}/\ker(\varphi_x)=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong \mathrm{Im}(\varphi_x)=G.$$

  Donc G *est fini et isomorphe à* G*.*

  En conclusion, on a : $G\cong\mathbb{Z}$ *ou* $G\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *avec* $n\in\mathbb{N}^*$*.*

Corrigé (de l'exercice 3).

1) *Montrons que* $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R},+,\cdot)$*.*
   - ★ *On a :* $0=0+0\times\sqrt{11}\in\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*. Donc,* $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ *est non vide.*

     Soient alors $x=a+b\sqrt{11}$ *et* $y=n+m\sqrt{11}$ *deux éléments de* $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*, avec* $a,b,n,m\in\mathbb{Z}$*. On a :*
   - ★ $x-y=(a+b\sqrt{11})-(n+m\sqrt{11})=(a-n)+(b-m)\sqrt{11}$*. Donc,* $x-y\in\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*, car* $(a-n)$*,* $(b-m)\in\mathbb{Z}$*.*
   - ★ $xy=(a+b\sqrt{11})(n+m\sqrt{11})=(an+11bm)+(am+bn)\sqrt{11}$*. Donc,* $xy\in\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*, car* $(an+11bm)$*,* $(am+bn)\in\mathbb{Z}$*.*

   D'où $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R},+,\cdot)$*.*
2) *a) Montrons que* ϕ *est un endomorphisme de l'anneau* $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*. Soient alors* $x=a+b\sqrt{11}$ *et* $y=n+m\sqrt{11}$ *deux éléments de* $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*, avec* $a,b,n,m\in\mathbb{Z}$*.*
   - ★ *On a :*

$$\begin{array}{rcl}\phi(x+y)=\phi((a+b\sqrt{11})+(n+m\sqrt{11})) & = & \phi((a+n)+(b+m)\sqrt{11})\\ & = & (a+n)-(b+m)\sqrt{11}\\ & = & (a-b\sqrt{11})+(n-m\sqrt{11})\\ & = & \phi(x)+\phi(y).\end{array}$$

     Donc, $\forall x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*, on a* $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$*.*
   - ★ *De plus, on a d'une part :*

$$\begin{array}{rcl}\phi(xy)=\phi((a+b\sqrt{11})(n+m\sqrt{11})) & = & \phi((an+11bm)+(am+bn)\sqrt{11})\\ & = & (an+11bm)-(am+bn)\sqrt{11}\end{array}$$

     et d'un autre part, on a

$$\phi(x)\phi(y)=(a-b\sqrt{11})(n-m\sqrt{11})=(an+11bm)-(am+bn)\sqrt{11}.$$

     Alors, $\forall x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$*, on a* $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$*.*
   - ★ *On a aussi,* $\phi(1)=\phi(1+0\times\sqrt{11})=1-0\times\sqrt{11}=1$*.*

Par suite, ϕ est un morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ dans lui même. Donc, c'est un endomorphisme de $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$.

b) *Montrons que ϕ est bijective. Donc, il suffit de montrer qu'elle est injective et surjective.*

★ *Montrons que ϕ est injective. Puisque f est un morphisme d'anneaux (d'après 2)-a)), il suffit de montrer que $\ker(\phi) = \{0\}$. Soit $x = a + b\sqrt{11}$ un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On a :*

$$\begin{aligned} x \in \ker(\phi) &\iff \phi(x) = 0, \\ &\iff a - b\sqrt{11} = 0, \\ &\iff a = b = 0, \ (\textit{car } 11 \textit{ est un nombre premier et donc } \sqrt{11} \notin \mathbb{Q}), \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\ker(\phi) = \{0\}$ et alors f est injective.

★ *Montrons que ϕ est surjective. Soit $y = a+b\sqrt{11}$ un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Posons $x = a - b\sqrt{11}$. On a :*

$$\phi(x) = \phi(a - b\sqrt{11}) = a + b\sqrt{11} = y.$$

Donc, ϕ est surjectif.

Par suite, ϕ est bijective.

3) *Remarquer $(10 + 3\sqrt{11})(10 - 3\sqrt{11}) = 10^2 - 3^2 \times 11 = 100 - 99 = 1$. Donc, $10 + 3\sqrt{11}$ est une unité de $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$. Or $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]^\times$, l'ensemble des unités de $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ est un groupe et $10 + 3\sqrt{11} \in \mathbb{Z}[\sqrt{11}]^\times$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $(10 + 3\sqrt{11})^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{11}]^\times$. D'où $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]^\times$ est infini.*

Corrigé (de l'exercice 4). *Soit $P(X) = X^4 - X^2 - 2X + 2$. On peut répondre à 1) et 2) de deux méthodes différentes. On va maitre la deuxième méthode dans les remarques ci-dessous.*

1) *On a*

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^2 - 2X + 2 & X^2 - 2X + 1 \\ -X^4 + 2X^3 - X^2 & \overline{X^2 + 2X + 2} \\ \hline 2X^3 - 2X^2 - 2X + 2 & \\ -2X^3 + 4X^2 - 2X & \\ \hline 2X^2 - 4X + 2 & \\ -2X^2 + 4X - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc, $P(X) = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + 2X + 2) = (X - 1)^2 Q(X)$, avec $Q(X) = X^2 + 2X + 2$. On a $Q(1) = 1 + 2 + 2 = 5 \neq 0$, alors 1 est une racine de multiplicité 2 de P.

.... *Ou autrement* ....

Remarque : *Autrement, on a $P'(X) = 4X^3 - 2X - 2$ et $P''(X) = 4 \times 3X^2 - 2 = 12X^2 - 2$. Donc, on a :*

$$P(1) = 1 - 1 - 2 + 2 = 0, \; P'(1) = 4 - 2 - 2 = 0 \quad et \quad P''(1) = 12 - 2 \neq 0.$$

D'où 1 est une racine de multiplicité 2 de P.

....

2) *D'après la question précédente, on a $P(X) = (X-1)^2 Q(X) = (X-1)^2(X^2+2X+2)$. On a $Q(X) = X^2+2X+2$ est une polynôme de $\mathbb{R}[X]$ degré 2 et de discriminant ($= 2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$) strictement négatif, alors il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. De plus, $X-1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car il est de degré 1. Donc,*

$$P(X) = (X-1)^2(X^2+2X+2)$$

est bien la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P.

.... *Ou autrement* ....

Remarque : *Autrement, d'après la remarque précédente (ici on peut utiliser la division euclidienne aussi), on a $P(X) = (X-1)^2 Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(1) \neq 0$. Puisque P est unitaire de degré 4, alors Q est unitaire de degré 2. De plus, il est clair de l'égalité précédente que le dernier coefficient de Q est 2. Alors*

$$P(X) = (X-1)^2(X^2+aX+2).$$

Avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant X par 2, on obtient $16 - 4 - 4 + 2 = 1^2(4+2a+2)$. Alors, $a = (10-6)/2 = 2$ et donc $P(X) = (X-1)^2(X^2+2X+2)$. On a, le discriminant de $Q(X) = X^2+2X+2$ est $2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$, donc $Q(X) = X^2+2X+2$ est irréductible dans $\mathbb{R}$. Le polynôme $X-1$ est aussi irréductible dans $\mathbb{R}$ car il est de degré 1. Par suite, la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P est :

$$P(X) = (X-1)^2(X^2+2X+2).$$

....

3) *Par la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 1 de $Y+3$ par Y^2+4Y+5, on a :*

$$\begin{array}{l|l}
3+Y & 5+4Y+Y^2 \\ \cline{2-2}
-3 - \frac{12}{5}Y - \frac{3}{5}Y^2 & \frac{3}{5} - \frac{7}{5^2}Y \\ \cline{1-1}
-\frac{7}{5}Y - \frac{3}{5}Y^2 & \\
\frac{7}{5}Y + \frac{28}{5^2}Y^2 + \frac{7}{5^2}Y^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{13}{5^2}Y^2 + \frac{7}{5^2}Y^3 &
\end{array}$$

Donc, on a $Y+3 = (Y^2+4Y+5)(-\frac{7}{5^2}Y + \frac{3}{5}) + Y^2(\frac{13}{5^2} + \frac{7}{5^2}Y)$.

4) *D'après la deuxième question, on a : $F(X) = \frac{X+2}{(X-1)^2(X^2+2X+2)}$. Donc, par le théorème de décomposition en éléments simples, on a :*

$$F(X) = \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{(X^2+2X+2)}. \tag{1}$$

avec a, b, c et d sont des éléments de $\mathbb{R}$. Déterminons les coefficients a, b, c et d. Posons $Y = X - 1$. Alors, $X = Y + 1$ et on a :

$$\begin{array}{rcl}
F(X) & = & F(Y+1), \\
& = & \dfrac{(Y+1)+2}{Y^2((Y+1)^2+2(Y+1)+2)}, \\
& = & \dfrac{Y+3}{Y^2(Y^2+4Y+5)}, \\
& = & \dfrac{(Y^2+4Y+5)(-\frac{7}{5^2}Y+\frac{3}{5})+Y^2(\frac{13}{5^2}+\frac{7}{5^2}Y)}{Y^2(Y^2+4Y+5)}, \quad (\textit{d'après la question précédente}) \\
& = & \dfrac{(-\frac{7}{5^2}Y+\frac{3}{5})}{Y^2}+\dfrac{(\frac{13}{5^2}+\frac{7}{5^2}Y)}{(Y^2+4Y+5)}, \\
& = & \dfrac{-\frac{7}{5^2}}{Y}+\dfrac{\frac{3}{5}}{Y^2}+\dfrac{\frac{7}{5^2}Y+\frac{13}{5^2}}{Y^2+4Y+5}, \\
& = & \dfrac{-\frac{7}{5^2}}{X-1}+\dfrac{\frac{3}{5}}{(X-1)^2}+\dfrac{\frac{7}{5^2}(X-1)+\frac{13}{5^2}}{(X-1)^2+4(X-1)+5}, \\
& = & \dfrac{-\frac{7}{25}}{X-1}+\dfrac{\frac{3}{5}}{(X-1)^2}+\dfrac{\frac{7}{25}X+\frac{6}{25}}{X^2+2X+2}.
\end{array}$$

Donc, par l'unicité de la décomposition en éléments simples, on a $a = -\frac{7}{25}$, $b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{7}{25}$ et $d = \frac{6}{25}$ et alors la décomposition en éléments simples de F est :

$$F(X) = \frac{-\frac{7}{25}}{X-1}+\frac{\frac{3}{5}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{7}{25}X+\frac{6}{25}}{X^2+2X+2}.$$

Remarque : *On a peut déterminer les coefficients a, b, c et d dans (1), un après un, en utilisant les pôles de F, les limites, et/ou des valeurs particulière pour x ...*