Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
Lundi 12 Février 2024

**MIP-IA/ $S_1$, S.R.**
**Épreuve d'Analyse 1**
**Durée : 1 h 30 min**

**N.B. :** Aucun document n'est autorisé et tous les résultats doivent être justifiés

## Exercice 1 : (Questions de cours) (6 *points*)

1. Énoncer la propriété caractéristique de la borne inférieure d'une partie $A$ non vide et minorée de $\mathbb{R}$. **1 pt**
2. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et montrer que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est bornée. **2.5 pts**
3. Rappeler et démontrer le théorème de Cauchy pour les fonctions numériques. **2.5 pts**

## Exercice 2 : (10 *points*) Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $A = \left[-\frac{1}{3}, e\right] \cap \mathbb{Q}$. Trouver $inf\,(A)$ et $sup\,(A)$ $(on\ admet\ que\ e \notin \mathbb{Q})$. **1.5 pts**
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left( \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} E\,(k\ x) \right)$. **2,5 pts**
3. La fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par $f\,(x) = \sin\,(x^2)$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ? **1 pt**
4. Étudier la suite récurrente $(u_n)$ définie par :
$$u_0 \in \left]0, +\infty\right[ \ \ et\ \ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right).$$
**3 pts**
5. Montrer que $0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$. **1 pt**
6. Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ x_n = ln\,(n)$.
Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N})\ \lim\limits_{n \to +\infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$ et que cette suite n'est pas de Cauchy. **1 pt**

## Exercice 3 : (5 *points*) Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |\ f'\,(x)\ | \leqslant \lambda\ où\ \lambda \in [0, 1[\,.$$

1. Montrer que $f$ est contractante, c'est-à-dire $k-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ avec $k \in [0, 1[$. **1.5 pts**
2. En déduire que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. **1 pt**
3. Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\alpha$, qui est la limite de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} = f\,(u_n)$. **2.5 pts**

**Bon courage**

**Solution: 1** ***Exercice 1*** *:*

1. *Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $m$ un nombre réel. Alors :*

$$m = inf\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \ \ (\forall x \in A) \ \ m \leqslant x, \\ (ii) \ \ (\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists x \in A) : \ \ x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

2. *On dit qu'une suite réelle $(x_n)$ est de Cauchy si, et seulement si,*

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \left(\forall\, (m,n) \in \mathbb{N}^2\right) \ \ (m \geqslant n_0 \ et \ n \geqslant n_0) \Longrightarrow \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon.$$

*Si $(x_n)$ est de Cauchy , alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\left(\forall\, (m,n) \in \mathbb{N}^2\right) \ \ (n \geqslant n_0 \ et \ m \geqslant n_0) \Longrightarrow \mid x_n - x_m \mid < 1,$$

*d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ on a :*

$$\begin{aligned} \mid x_n \mid &= \mid x_n - x_{n_0} + x_{n_0} \mid \\ &\leqslant \mid x_n - x_{n_0} \mid + \mid x_{n_0} \mid \\ &\leqslant 1 + \mid x_{n_0} \mid . \end{aligned}$$

*Soit $A = max\,\{\mid x_0 \mid, \mid x_1 \mid, ..., \mid x_{n_0} \mid, 1 + \mid x_{n_0} \mid\}$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \mid x_n \mid \leqslant A$.*

3. ***(Théorème de Cauchy) :*** *Si $f$ est une fonction numérique continue sur $[a,b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f\,(a)\,.f\,(b) < 0$, alors il existe $c \in\, ]a,b[$ tel que $f\,(c) = 0$.*
***Preuve :*** *$f\,(a)\,f\,(b) < 0$, alors $f\,(a)$ et $f\,(b)$ sont de signes contraires, l'un est strictement négatif et l'autre est strictement positif donc $0$ est compris entre $f\,(a)$ et $f\,(b)$, par le $TVI$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $f\,(c) = 0$; puisque $f\,(a) \neq 0$ et $f\,(b) \neq 0$, alors $c \neq a$ et $c \neq b$ et alors $c \in\, ]a,b[$.*

***Exercice 2*** *:*

1. *$A = [-\frac{1}{3}, e] \cap \mathbb{Q}$ : $\frac{-1}{3} \in A$, d'où $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
*Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \Leftrightarrow x \in [\frac{-1}{3}, e] \cap \mathbb{Q}$, alors $\frac{-1}{3} \leq x \leq e$ donc $A$ est majorée par $e$ et minorée par $\frac{-1}{3}$ lequel est un élément de $A$, donc* $\inf(A) = min(A) = \frac{-1}{3}$.
*Montrons que $\sup(A) = e$. On a déjà $e$ est un majorant de $A$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, si $a = max(e - \varepsilon, 0)$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < e$ car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. D'où, il existe $r \in A$ tel que $e - \varepsilon < r < e$ ; donc $sup(A) = e$.*

2. *Posons pour chaque $n$ de $\mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(k\sqrt{x})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ on a :*

$$kx - 1 < E(kx) \leq kx,$$

*or*

$$\begin{aligned} kx - 1 < E(kx) \leq kx \ &\Longrightarrow \ \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx \\ &\Longrightarrow \ \tfrac{n(n+1)}{2}x - n < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \frac{n(n+1)}{2}x \ . \\ &\Longrightarrow \ \tfrac{n(n+1)}{2n^2}x - \tfrac{1}{n} < x_n \leq \tfrac{n(n+1)}{2n^2}x \end{aligned}$$

*Donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ \frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} < x_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}x.$$

*Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}x = \frac{x}{2}$, d'où $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{x}{2}$.*

*3. La fonction $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
***Preuve :*** *Soient $(x_n)$ et $(y_n)$ les deux suites définies par :*
*$(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n = \sqrt{2n\pi + 1}$ et $y_n = \sqrt{2n\pi}$. Alors Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= \sqrt{2n\pi+1} - \sqrt{2n\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi+1} + \sqrt{2n\pi+1}}, \end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned} f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right) &= \sin(2n\pi+1) - \sin(2n\pi) \\ &= \sin(1) \end{aligned}$$

*Donc $x_n - y_n \longrightarrow 0$ ; mais $f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right) \longrightarrow \sin(1)(\neq 0)$. Donc, d'après 1 de la remarque 5.1 du chapitre 3, $f$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

*4. La suite $(u_n)$ est une suite récurrente associée à la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par :*

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

*Et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,*

$$\begin{aligned} f\left(x\right) = x &\Longleftrightarrow f\left(x\right) - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1-x^2}{2x} \\ &\Longleftrightarrow 1 - x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

*D'où $f$ admet deux points fixes $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$, et si la suite $(u_n)$ converge, elle converge vers l'un de ces deux points.*

*Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :*

$$\begin{aligned} f^{'}\left(x\right) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

***Tableau des variations de $f$ sur $]0,+\infty[$ :***

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*D'où $(\forall x \in ]0,+\infty[)$ $f\left(x\right) \geqslant 1$, et par suite $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n \geqslant 1$; et le signe de $x \mapsto g\left(x\right) = f\left(x\right) - x$ sur $]0,+\infty[$ est donné dans le tableau suivant :*

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

*d'où* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n \geqslant u_{n+1}$; *c-à-d* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est décroissante ; et puisqu'elle est minorée par* 1, *elle est alors convergente vers* 1.

5. *Comme* $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} < 1$ *et la fonction arccos est strictement décroissante sur* $[-1,1]$, *alors*

$$\arccos(1) < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

*ce qui est équivaut à*

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4} \quad \textit{car } \cos(0) = 1 \textit{ et } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

***Résolution de l'équation :***
*Soit* $x \in [-1,1]$, *alors d'après la question précédente* $0 < 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$, *d'où* $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \in [0,\pi]$, *alors*

$$\begin{aligned}\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) &\Leftrightarrow x = \cos\left(2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right)\\ &\Longleftrightarrow x = 2\cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) - 1\\ &\Longleftrightarrow x = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \quad \left(car\ \frac{3}{4} \in [0,\pi]\right)\\ &\Longleftrightarrow x = \frac{9}{8} - 1\\ &\Longleftrightarrow x = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

*Donc l'ensemble de solutions de l'équation en question est* $S = \left\{\frac{1}{8}\right\}$.

6. *Soit* $p \in \mathbb{N}$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\begin{aligned}x_{n+p} - x_n &= ln(n+p) - ln(n)\\ &= ln\left(\frac{n+p}{n}\right)\\ &= ln\left(1 + \frac{p}{n}\right),\end{aligned}$$

*or* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p}{n} = 0$, *d'où* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{p}{n}\right) = 1$; *et puisque la fonction ln est continue en* 1, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\left(1+\frac{p}{n}\right) = ln(1) = 0$. *Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$.
*Donc* $(\forall p \in \mathbb{N})$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$.
*Supposons, par l'absurde, que la suite* $(x_n)$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$, *alors* $(x_n)$ *est convergente dans* $\mathbb{R}$, *ce qui est absurde, car* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} ln(n) = +\infty$.

## *Exercice 3 :*

1. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *alors :*
   - *Si* $x = y$, $\mid f(x) - f(y) \mid = 0$ *et* $\lambda \mid x - y \mid = 0$; *d'où*

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leqslant \lambda \mid x - y \mid.$$

- *Si $x \neq y$, soit $a = min\,(x,y)$ et $b = max\,(x,y)$, alors, puisque $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ ; et comme $(\forall t \in \mathbb{R})\ \mid f'(t) \mid \leqslant \lambda$, alors, selon une des inégalités des accroissements finis,*

$$\mid f(b) - f(a) \mid \leqslant \lambda \mid b - a \mid,$$

*ou encore*

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leqslant \lambda \mid x - y \mid .$$

*Donc*

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)\ \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant \lambda \mid x - y \mid \quad (*)\,,$$

*et puisque $\lambda \in [0,1[$, alors $f$ est contractante.*

2. *Puisque $f$ est contractante, alors elle est Lipschitzienne, donc selon le théorème* 5.1 *du chapitre* 3, *$f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Soit $g : x \longmapsto f(x) - x$. Les fonctions $f$ et $x \longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $g$ également. Montrer que $f$ admet un point fixe est équivaut à montrer que $g$ s'annule.*

- ***Existence du point fixe :*** *Pour tout réel $x$, on a*

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \lambda |x| \quad (\textit{prendre } y = 0 \textit{ dans } (*))\,,$$

*donc*

$$f(0) - \lambda |x| \leqslant f(x) \leqslant f(0) + \lambda |x|.$$

*Pour tout $x > 0$, on a : $g(x) \leqslant f(0) + (\lambda - 1)x$. Comme $\lambda - 1 < 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(0) + (\lambda - 1)x) = -\infty$ et* donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. *Par ailleurs, pour tout $x < 0$, on a : $g(x) \geqslant f(0) + (\lambda - 1)x$, et on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(0) + (\lambda - 1)x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.*
*Donc pour $A = 1$, il existe $B > 0$ tel que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x > B \Longrightarrow g(x) < -1$, et il existe $C > 0$ tel que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x < -C \Longrightarrow g(x) > 1$.*
*Il existe alors $b = B + 1$ et $c = -C - 1$ avec $c < b$ tel que $g(b) < 0$ et $g(c) > 0$.*
*Il résulte alors du théorème de Cauchy que $g$ s'annule au moins une fois sur $[c,b]$, donc sur $\mathbb{R}$. La fonction $f$ admet bien un point fixe $\alpha$.*

- ***Unicité du point fixe :*** *Supposons par l'absurde que $\beta$ est un autre point fixe de $f$ $(\alpha \neq \beta)$, alors*

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |f(\alpha) - f(\beta)| \\ &\leqslant \lambda |\alpha - \beta|\,. \end{aligned}$$

*Et puisque $|\alpha - \beta| > 0$, alors $1 \leqslant \lambda$ ce qui contredit les hypothèses. Le point fixe est alors unique.*

3. - *Convergence de la suite $(u_n)$ vers le point fixe $\alpha$ :*
*Puisque $f(\alpha) = \alpha$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité :*
*$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \lambda |u_n - \alpha|$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \lambda |u_n - \alpha|$. En posant $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_n - \alpha$ et puisque $0 \leqslant \lambda < 1$, en utilisant le théorème* 5.1 *du chapitre* 2, *on en déduit que la suite $(v_n)$ est convergente vers* 0, *il en résulte que la suite $(u_n)$ est convergente vers $\alpha$.*