Projet ECMA - Optimisation Robuste

Problème de tournées de véhicules robuste

Réalisé par :

Mohamed Aziz MHADHBI

Mohamed Iheb KACEM

MPRO

Année universitaire : 2024/2025

Table des matières

Chapitre 1

Description du problème

On considère un problème de tournées de véhicules dans lequel un entrepôt doit livrer des vaccins à un ensemble de clients. Le problème est caractérisé par :

- un ensemble de sommets $V = \{1, \ldots, n\}$ tel que le sommet 1 correspond à l'entrepôt des véhicules où se trouve le stock de vaccins et les autres sommets aux clients qu'il faut livrer. Soit $A = \{ij \in V^2 \mid i \neq j\}$;
- une durée $t_{ij} \in \mathbb{N}$ associée à chaque couple de sommets $(i, j) \in A$, $i \neq j$, correspondant au temps minimal pour qu'un véhicule se rende du sommet i au sommet j ;
- une demande $d_i \in \mathbb{N}$ associée à chaque sommet $i \in V \setminus \{1\}$ correspondant au nombre de vaccins à livrer au client i ;
- une capacité maximale $C \in \mathbb{N}$ correspondant au nombre maximal de vaccins qu'il est possible de stocker dans un véhicule. Cette valeur est identique pour tous les véhicules.

On définit une tournée T comme une suite de sommets $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{|T|}\}$ telle que :

- la tournée débute et termine à l'entrepôt (i.e., $t_1 = t_{|T|} = 1$) ;
- la somme des demandes des clients visités n'excède pas la capacité d'un véhicule (i.e., $\sum_{i=2}^{|T|-1} d_{t_i} \leq C$) ;
- tous les clients visités sont différents (i.e., $t_i \neq t_j \ \forall i, j \in \{2, \ldots, |T| - 1\}, \ i \neq j$).

L'objectif du problème statique consiste à déterminer un ensemble de tournées permettant de visiter l'ensemble des clients tout en minimisant la durée totale des trajets.

Précisions :

- Le nombre de véhicules n'est pas limité et n'intervient pas dans la fonction objectif.
- Chaque client doit être visité dans exactement une tournée. Ainsi, même s'il peut parfois être intéressant de visiter plusieurs fois un même client, ceci n'est pas autorisé.

Ensuite, on souhaite résoudre une version robuste du problème statique car il est possible que les valeurs choisies pour les temps de trajets soient sous-évaluées.

Chapitre 2

Modélisation du problème statique

2.1 Modélisation compacte

On considère le programme en nombre entiers compact suivant :

2.1.1 Variables de décision

$$\begin{aligned}
x_{i,j} \in \{0,1\} &\quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}, \quad \text{indique si l'arc } (i,j) \text{ est utilisé.}\\
u_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} &\quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \text{ordre de visite du nœud } i.\\
q_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} &\quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \text{quantité transportée disponible au nœud } i.
\end{aligned}$$

2.1.2 Objectif

Minimiser la distance totale parcourue :

$$\text{Minimiser} \sum_{1 \leq i,j \leq n} t_{i,j} \cdot x_{i,j}.$$

2.1.3 Contraintes

1. Conservation de flux :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \forall i \in \{2,\dots,n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{j,i} = 1, \quad \forall i \in \{2,\dots,n\}.$$

2. Élimination de cycles (MTZ) : l'entrepôt est le seul sommets qui peut appartenir à des cycles :

$$u_i + x_{i,j} - (n-2)(1 - x_{i,j}) \leq u_j, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{2,\dots,n\}.$$

3. Contraintes de capacité :

$$q_i \leq C, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

4. Satisfaction de la demande et évolution de la quantité q :

$$q_i >= d_i$$

$$q_j = q_i - d_i \text{ si } x_{i,j} = 1$$

la dernière contrainte se traduit de la manière suivante :

$$q_j >= q_i - d_i - M * (1 - x_{i,j})$$

$$q_j <= q_i - d_i + M * (1 - x_{i,j})$$

2.1.4 Programme linéaire résultant

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{1 \leq i,j \leq n} t_{i,j} \cdot x_{i,j} \\
\text{sous les contraintes :} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{j,i} = 1, \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}, \\
& u_i + x_{i,j} - (n-2)(1 - x_{i,j}) \leq u_j, \quad \forall i, j, \\
& q_i \leq C, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\
& q_i \geq d_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\
& q_j \geq q_i - d_i - M(1 - x_{j,i}), \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, n\}, \\
& q_j \leq q_i - d_i + M(1 - x_{j,i}), \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, n\}, \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad u_i \geq 0, \quad q_i \geq 0
\end{aligned}$$

Dans la suite on note :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} = \{ \quad & x, u, q \quad \text{tq :} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{j,i} = 1, \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}, \\
& u_i + x_{i,j} - (n-2)(1 - x_{i,j}) \leq u_j, \quad \forall i, j, \\
& q_i \leq C, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\
& q_i \geq d_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\
& q_j \geq q_i - d_i - M(1 - x_{j,i}), \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}, \\
& q_j \leq q_i - d_i + M(1 - x_{j,i}), \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}, \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad u_i \geq 0, \quad q_i \geq 0 \\
& \}
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Problème Robuste

$$\mathcal{U} = \left\{ \{t'_{ij} = t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\}_{ij\in A} \text{ tel que } \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq T, \\ \displaystyle\sum_{ij\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, \\ \delta^1_{ij} \in [0,1],\ \delta^2_{ij} \in [0,2], \\ \forall ij \in A \end{array} \right\}.$$

Le problème statique est le suivant :

$$\begin{array}{rl} \text{Min} & \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} t_{i,j} \cdot x_{i,j} \\ \text{s.t.} & x, u, q \in \mathcal{X} \end{array}$$

On considère le problème robuste :

$$min_{x,u,q\in\mathcal{X}} \quad max_{t'_{i,j}\in\mathcal{U}} \sum_{1\leq i,j\leq n} t'_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

3.1 Résolution par plans coupants et LazyCallback

3.1.1 Modification du problème afin que la robustesse n'apparaisse plus dans l'expression de l'objectif mais dans les contraintes

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\min_{x,u,q,z} & z \\ \text{s.t.} & z \geq \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} t'_{i,j} \cdot x_{i,j} \quad \forall t'_{i,j} \in \mathcal{U} \\ & x, u, q \in \mathcal{X} \end{array}$$

3.1.2 Problème maître

$$
\begin{aligned}
\min_{x,u,q,z} \quad & z \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{1 \leq i,j \leq n} t'_{i,j} \cdot x_{i,j} \leq z \quad \forall t'_{i,j} \in \mathcal{U}^* \\
& x, u, q \in \mathcal{X}
\end{aligned}
$$

On peut considérer initialement l'ensemble

$$
\mathcal{U}^* = \left\{ \{t'_{ij} = t_{ij}\}_{ij \in A} \text{ i.e. } \delta^1_{ij} = 0 \ \delta^2_{ij} = 0, \forall ij \in A \right\}.
$$

3.1.3 Le sous-problème

Pour procéder à la résolution par plan coupant on considère le sous-problème (SP) suivant pour la génération des coupes :

$$
\begin{aligned}
\max_{(\delta^1_{ij}),(\delta^2_{ij})} \quad & \sum_{1 \leq i,j \leq n} (t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j) \cdot x^*_{i,j} \\
& \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq T, \\
& \sum_{ij \in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, \\
& \delta^1_{ij} \in [0,1], \delta^2_{ij} \in [0,2], \forall ij
\end{aligned}
$$

Conditions d'optimalité

Pour qu'une solution (x^*, z^*) du problème maître soit optimale il faut avoir une solution ${t'_{i,j}}^*$ de SP telle que (aucune contrainte robuste n'est violée) :

$$
\sum_{1 \leq i,j \leq n} {t'_{i,j}}^* \cdot x^*_{i,j} \leq z^*
$$

Expression des coupes ajoutées :

Les coupes ajoutées par le sous-problème sont de la forme :

$$
\sum_{1 \leq i,j \leq n} {t'_{i,j}}^* \cdot x_{i,j} \leq z
$$

3.2 Résolution par dualisation

Pour résoudre le problème robuste par dualisation, on procède selon les étapes suivantes :

- On reformule l'objectif du problème robuste afin d'isoler le terme faisant intervenir les variables δ^1_{ij} et δ^2_{ij} d'ou on obtient :

$$min_{x,u,q\in\mathcal{X}} \quad max_{t'_{i,j}\in\mathcal{U}} \sum_{1\leq i,j\leq n} t'_{i,j}\cdot x_{i,j}$$

$=$

$$min_{x,u,q\in\mathcal{X}} \quad max_{(\delta^1_{ij}),(\delta^2_{ij})} \quad \sum_{1\leq i,j\leq n} (t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j)\cdot x_{i,j}$$

$=$

$$min_{x,u,q\in\mathcal{X}} \sum_{1\leq i,j\leq n} t_{i,j}\cdot x_{i,j} + \quad max_{(\delta^1_{ij}),(\delta^2_{ij})} \quad \sum_{1\leq i,j\leq n} x_{i,j}(\hat{t}_i + \hat{t}_j)\delta^1_{ij} + x_{i,j}\hat{t}_i\hat{t}_j\delta^2_{ij}$$

- Le problème interne lié à ces variables s'écrit :

$$\begin{aligned}
max_{(\delta^1_{ij}),(\delta^2_{ij})} \quad & \sum_{1\leq i,j\leq n} x_{i,j}(\hat{t}_i + \hat{t}_j)\delta^1_{ij} + x_{i,j}\hat{t}_i\hat{t}_j\delta^2_{ij} \\
& \sum_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq T, \\
& \sum_{ij\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, \\
& \delta^1_{ij} \in [0,1], \delta^2_{ij} \in [0,2], \forall ij
\end{aligned}$$

- On dualise ce problème d'ou on obtient :

$$\begin{aligned}
min_{\alpha,\beta} \quad & T\cdot\alpha + T^2\cdot\beta \\
& \alpha \geq x_{i,j}(\hat{t}_i + \hat{t}_j)\forall ij \\
& \beta \geq x_{i,j}\hat{t}_i\hat{t}_j\forall ij \\
& \alpha \geq 0, \beta \geq 0, entiers
\end{aligned}$$

- Finalement,le problème robuste s'écrit sous la forme de ce PLNE :

$$\begin{aligned}
min_{\alpha,\beta} \quad & \sum_{1\leq i,j\leq n} t_{i,j}\cdot x_{i,j} + T\cdot\alpha + T^2\cdot\beta \\
& \alpha \geq x_{i,j}(\hat{t}_i + \hat{t}_j)\forall ij \\
& \beta \geq x_{i,j}\hat{t}_i\hat{t}_j\forall ij \\
& \alpha \geq 0, \beta \geq 0, entiers
\end{aligned}$$