République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf-Oran

Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département des Mathématiques

Cours et exercices corrigés d'Analyse I Première année Licence MI Informatique

Par

Dr OUIKENE Fethia

U.S.T.O – M.B

Année universitaire 2023-2024

Préface

Il y a différentes façon d'apprendre les mathématiques. Pour beaucoup, la meilleure d'entre elles est de faire des exercices. Mais la plus mauvaise façon de faire des exercices est de lire la solution sans avoir réflêchi à l'exercice. C'est une chose qu'on déconseille vivement à l'étudiant. Avant de lire la solution, l'étudiant doit connaître ce qu'il a fait en cours, bien lire l'exercice, bien comprendre les questions, ensuite essayer de résoudre l'exercice plusieurs fois. Si vraiment il n'arrive pas à trouver la solution, à ce moment, il peut la voir.

Cet polycopié est un support de cours d'Analyse, il est principalement déstiné aux étudiants de la première année licence LMD informatique, domaine Mathématiques-informatique ou même les étudiants de la première année ingénieurs en informatique.

Ce polycopié suit le programme du module Analyse I enseignée au premier semestre aux étudiants de la première année licence en informatique.

Ce polycopié, contient cinq chapitres de cours, rédigés d'une façon facile à comprendre et illustrés par de nombreux exemples. A la fin de chaque chapitre, on propose des exercices avec des corrigés détaillés.

Dans le premier chapitre, on abordera le coprs des nombres réels, ensuite on passera au chapitre des nombres complexes, puis le chapitre trois qui concerne les suites réelles, pour enfin passer aux deux derniers chapitres portant sur les fonctions réelles à variable réelle, notions de continuité, dérivabilité, fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques et leurs inverses et le développement de Taylor puis les fonctions convexes et on terminera par les asymptotes des courbes.

Table des Matières

Chapitre 1

Corps des nombres réels

1.1 Introduction

La théorie des ensembles permet de construire l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ muni d'une loi opération $+($ addition) associative, commutative et possédant un élément neutre 0. Toutefois il ne s'agit pas d'une loi de groupe: étant donné deux entiers naturels a et b, il n'existe pas toujours un élément x de $\mathbb{N}$ tel que $a + x = b$, Pour celà, on a construit l'ensemble des entiers relatifs muni de l'addition est un groupe commutatif.

En construisant $\mathbb{Z}$, on a défini une autre opération, c'est la multiplication, dans ce cas il est apparu un problème pour résoudre l'équation: $a.x = b, a \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}$ qui admet des solutions seulement si a divise b, pour celà, on a construit l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. Dans cet ensemble, est apparu un problème, par exemple considérons un triangle ABC rectangle en A. Le théorème de Pytagore dit qu'on a la relation $a^2 = b^2 + c^2$, et si $b = c = 1$, on obtient $a^2 = 2$ alors $a = \sqrt{2}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$($\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel). Dans ce cas, on est amené à construire un ensemble plus vaste, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

On a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.2 Définition axiomatique des nombres réels

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ dans lequel sont définies deux lois

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \text{ l'addition, } \quad \begin{array}{rccc} . : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x.y \end{array} \text{ multiplication,}$$

et une relation d'ordre notée $(\leq)$, satisfaisant les axiomes suivantes:

$A)$ $\mathbb{R}$ est un corps commutatif:

(A_1) : $x+y=y+x$ (commutativité de l'addition).

(A_2) : $(x+y)+z=x+(y+z)$ (l'associativité de l'addition).

(A_3) : Il existe un élément neutre $0 \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathbb{R}, x+0=x$.

(A_4) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément symetrique $(-x) \in \mathbb{R}/x+(-x)=0, -x$ est appelé l'opposé de x.

(A_5) : $x.y=y.x$ (commutativité de la multiplication).

(A_6) : $(x.y).z=x.(y.z)$ (l'associativité de la multiplication).

(A_7) : Il existe un élément neutre $1 \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathbb{R}, x.1=x$.

(A_8) : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un élément symetrique $x^{-1}=\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*/x.\frac{1}{x}=1; \frac{1}{x}$ est appelé l'inverse de x.

(A_9) : $x.(y+z)=x.y+x.z$(distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

$B)$ $\mathbb{R}$ est totalement ordonné:

(A_{10}) : $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$(transitivité).

(A_{11}) : $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x=y$(antisymetrique)

(A_{12}) : Pour deux éléments quelconques $x, y \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$.

Dans ce cas on dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

(A_{13}) : $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$.

(A_{14}) : $0 \leq x$ et $0 \leq y$ alors $0 \leq x.y$.

$C)$ Axiome de la borne supérieure:

(A_{15}) : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

1.3 Valeur absolue

Définition 1.3.1 Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x est le nombre réel noté par $|x|$ et défini par:

$$\begin{array}{rccl} |.| : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Propriétés: Pour tout nombres réels x et y nous avons

1. $|x| \geq 0, -|x| \leq x \leq |x|$.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $|x.y| = |x| . |y|$.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
5. $\forall a \in \mathbb{R}_+; |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
6. $\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$.
7. $\left| |x| - |y| \right| \leq |x + y|$.
8. $\max(x, -x) = |x|$.

Preuve

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ évidente par définition.

Si $x \geq 0$: $|x| = x$ alors $- - |x| = -x \leq x \leq x = |x|$.

Si $x < 0 : |x| = -x$, alors $-|x| = x \leq -x = |x|$.

4. On a 4 cas:

1) Si $x \geq 0, y \geq 0$ alors $x + y \geq 0$ d'où $|x + y| = x + y = |x| + |y|$

2)Si $x \leq 0, y \leq 0$ donc $x + y \leq 0$ d'où $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$

3)Si $x \geq 0, y \leq 0$ alors $x + y \begin{cases} \geq 0, \text{ si } x \geq -y \\ < 0, \text{ si } x < -y \end{cases}$

Si $x \geq -y$ on a $|x + y| = x + y = |x| - |y| \leq |x| \leq |x| + |y|$.

Si $x < -y$ on a $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = -|x| + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$.

4) $x \leq 0, y \geq 0$, même raisonnement que le cas 3.

5. On a $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq -|x|$ et d'aprés la propriété 1., on trouve $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$.

6. D'aprés 5. $\Big|\underbrace{|x| - |y|}_{X}\Big| \leq \underbrace{|x - y|}_{a} \Leftrightarrow -a \leq |X| \leq a \Leftrightarrow -|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|?$

D'aprés la propiété 4, on a:

$|x| = |x - y + y| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \ldots (1)$ d'autre part

$|y| = |y - x + x| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|y - x| = -|-(x - y)| = -|x - y| \ldots (2)$

de (1) et (2) on obtient $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

7. Le même raisonnement utilisé dans 6.

8. $\max(x, -x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases} = |x|$.

1.4 Fonction partie entière

Définition1.4.1 La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x, elle est notée par $[x]$ ou $E(x)$.

Remarque: Pour tout nombre réel x, $[x] \in \mathbb{Z}$ et on a

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

Exemple

$[2.83] = 2$, $\left[\frac{3}{2}\right] = 1, \left[-\frac{3}{2}\right] = -2$ et $[-3.5] = -4$

$[x] = 3 \Leftrightarrow x \in [3, 4[$

Proposition 1.4.1 Tout nombre réel s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$x = [x] + \alpha, \text{ où } \alpha \in [0, 1[\,.$$

Propriétés

Pour tout nombres réels x et y, nous avons:

1. $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]\,.$

2. $[x + a] = [x] + a, \forall a \in \mathbb{Z}.$

Axiome d'Archimed

$1^{ère}$ formule: Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $n > x$.

$2^{ème}$ formule: Pour tous réels positifs x et y, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$.

1.5 Parties bornées de $\mathbb{R}$

Définition 1.5.1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On dit que A est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A; x \leq M.$$

Le réel M est appelé majorant de A. Si $\exists M' \in \mathbb{R}/M \leq M'$, alors M' est aussi un majorant de A, en effet, $x \leq M$ et $M \leq M'$ alors $x \leq M'$.

On en déduit que le majorant de A n'est pas unique.

L'ensemble des majorants de A est noté $Maj\,(A) = [M, +\infty[\,.$

2. On dit que A est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A; x \geq m.$$

Le réel m est appelé minorant de A. Si $\exists m' \in \mathbb{R}/m \geq m'$, alors m' est aussi un minorant de A, en effet, $x \geq m$ et $m \geq m'$ alors $x \geq m'$.

On en déduit que le minorant de A n'est pas unique.

L'ensemble des minorants de A est noté $Min\,(A) =]-\infty, m]\,.$

3. On dit que A est bornée si elle est majorée et minorée.

c'est à dire

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A; m \leq x \leq M.$$

ou bien

$$\exists a > 0, \forall x \in A; |x| \leq a.$$

Exemple

1. $A = [0, 2]\,; \forall x \in A, 0 \leq x \leq 2$ donc A bornée car elle est majorée par 2 et minorée par 0.

2 est un majorant de A et $Maj\,(A) = [2, +\infty[\,.$ 0 est un minorant de A et $Min\,(A) =]-\infty, 0]\,.$

2. $A =]0, 2[\,; \forall x \in A, 0 < x < 2$ donc A bornée car elle est majorée par 2 et minorée par 0.

2 est un majorant de A et $Maj\,(A) = [2, +\infty[\,.$ 0 est un minorant de A et $Min\,(A) =]-\infty, 0]\,.$

3. $A =]-\infty, 3]\,, \forall x \in A, x \leq 3$ donc A n'est pas bornée car elle n'est pas minorée mais elle est majorée par 3.

1.5.1 Maximum et minimum

Définition 1.5.2

1. Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum α si α est un majorant de A et $\alpha \in A$.Et on note $\max A = \alpha$

2. Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ admet un minimum β si β est un minorant de A et $\beta \in A$.Et on note $\min A = \beta$.

Remarque 1.5.1 $\max A$ et $\min A$ s'ils existent, ils sont unique.

1.6 Borne supérieure et borne inférieure

Définition 1.6.1 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

1. On appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A, on la note par $\sup A$.

c'est à dire $\begin{cases} \forall x \in A, x \leq \sup A \\ \forall x \in A, x \leq M \end{cases}$ alors $\sup A \leq M$.

2. On appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A, on la note par $\inf A$.

c'est à dire $\begin{cases} \forall x \in A, x \geq \inf A \\ \forall x \in A, x \geq m \end{cases}$ alors $\inf A \geq m$.

Exemples.

1. $A = [-1, 1]$, $\forall x \in A, -1 \leq x \leq 1$ donc A bornée car elle est majorée par 1 et minorée par -1.

1 est un majorant de A et $Maj\,(A) = [1, +\infty[$ alors $\sup A = 1$. -1 est un minorant de A et $Min\,(A) =]-\infty, -1]$ alors $\inf A = -1$.

2. $A = [0, 1[$, $\forall x \in A, 0 \leq x < 1$ donc A bornée car elle est majorée par 1 et minorée par 0.

1 est un majorant de A et $Maj\,(A) = [1, +\infty[$ alors $\sup A = 1$. 0 est un minorant de A et $Min\,(A) =]-\infty, 0]$ alors $\inf A = 0$.

Remarque 1.6.1 On a les propriétés suivantes:

1. $\sup A$ et $\inf A$ s'ils existent, ils sont unique.

2. Ne pas confondre $\sup A$ avec $\max A$ et $\inf A$ avec $\min A$.

En effet, Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$,

si $\sup A \in A$ alors $\max A = \sup A$,

si $\inf A \in A$ alors $\min A = \inf A$,

si $\sup A \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas,

si $\inf A \notin A$ alors $\min A$ n'existe pas.

Si A n'admet pas une borne supérieure (resp. une borne inférieure), on écrit $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$).

Exemple

1. $A = [0, 1[$; d'aprés l'exemple précédent on a trouvé $\sup A = 1 \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas. $\inf A = 0 \in A$ alors $\min A = 0$.

2. $A = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\right\}$

$x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ et $x^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, donc A est bornée.

$Maj\,(A) = \left[\sqrt{2}, +\infty\right[\Rightarrow \sup A = \sqrt{2} \notin A$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) alors $\max A$ n'existe pas.

$Min\,(A) = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \Rightarrow \inf A = -\sqrt{2} \notin A$ (car -$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) alors $\min A$ n'existe pas.

1.6.1 Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure

Théorème 1.6.1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée, alors

$$\sup A = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \leq M,\ M \text{ est un majorant de } A. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; M - \varepsilon < x_\varepsilon, M \text{ est le plus petit} \\ \text{des majorants.} \end{cases}$$

2. Si A est minorée, alors

$$\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \geq m,\ m \text{ est un minorant de } A. \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; x_\varepsilon < m + \varepsilon,\ m \text{ est le plus grand} \\ \text{des minorants.} \end{cases}$$

Exemple

1. $A = \left\{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, Montrer que $\sup A = 3$ et $\inf A = 2$ et déterminer $\max A$ et $\min A$.

les éléments de l'ensemble A sont de la forme $3 - \frac{1}{n}$ tels que $n \geq 1$. Montrons d'abord que A est bornée.

Soit $x \in A \Leftrightarrow x = 3 - \frac{1}{n}, n \geq 1$, et pour tout $n \geq 1$ on a:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow 2 \leq 1 - \frac{1}{n} < 3$$

donc $\forall x \in A, 2 \leq x < 3$, ainsi A est bornée. De plus on a $Maj\,(A) = [3, +\infty[\,, Min\,(A) =]-\infty, 2]\,.$

Montrons que le $\sup A = 3$.

$$\sup A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \leq 3 \text{ elle est vérifiée car } x < 3 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; 3 - \varepsilon < x_\varepsilon \ldots (*) \end{cases}$$

$$x_\varepsilon \in A \Leftrightarrow x_\varepsilon = 3 - \frac{1}{n_\varepsilon} \text{ et } n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*,$$

donc pour assurer l'existance de x_ε qui vérifi $(*)$, il suffit d'assurer l'existance de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ telque $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; 3-\varepsilon < 3-\frac{1}{n_\varepsilon}$.

Soit $\varepsilon > 0, -3-\varepsilon < 3-\frac{1}{n_\varepsilon} \Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{n_\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$,

alors Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ (ou bien n_ε existe d'aprés Archimed 1ère formule).

On remarque que $\sup A = 3 \notin A$ sinon $3 = 3-\frac{1}{n} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} = 0$ absurde d'où $\max A$ n'existe pas.

Montrons que $\inf A = 2$.

2 est un minorant de A et $2 \in A$ pour $n=1$ donc $\min A = 2 = \inf A$.

2. $A = \left\{\frac{n+1}{n-1}; n \geq 2\right\}$.

Montrer que $\sup A = 3$ et $\inf A = 1$ et déterminer $\max A$ et $\min A$.

Les éléments de l'ensemble A sont de la forme $\frac{n+1}{n-1}$ tels que $n \geq 2$. Montrons d'abord que A est bornée.

Soit $x \in A$ alors $x = \frac{n+1}{n-1} = 1+\frac{2}{n-1}, n \geq 2$.

On a

$$n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n-1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{n-1} \leq 2 \Rightarrow 1 < 1+\frac{2}{n-1} \leq 3,$$

donc $\forall x \in A, 1 < x \leq 3$ d'où A est bornée.

$Maj\,(A) = [3, +\infty[\,, Min\,(A) =]-\infty, 1]\,.$

Montrons que $\sup A = 3$.

3 est un majorant de A et $3 \in A$ pour $n=2$ donc $\max A = 3 = \sup A$.

Montrons que $\inf A = 1$.

$$\inf A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \geq 1 \text{ elle est vérifiée car } x > 1 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 2; 1+\frac{2}{n_\varepsilon - 1} < 1+\varepsilon \end{cases}$$

cherchons $n_\varepsilon \geq 2$ tel que $1+\frac{2}{n_\varepsilon-1}<1+\varepsilon$.

$$1+\frac{2}{n_\varepsilon-1}<1+\varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n_\varepsilon-1}<\varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon>\frac{2}{\varepsilon}+1,$$

alors Il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{2}{\varepsilon}+1\right]+1$.(ou bien n_ε existe d'aprés Archimed 1ère formule).

On remarque que $\inf A=1 \notin A$ sinon $1=1+\frac{2}{n-1} \Leftrightarrow -\frac{2}{n-1}=0$ absurde d'où $\min A$ n'existe pas.

1.6.2 Propriétés de la borne supérieure et la borne inférieure

Soient A et B deux parties non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si $A \subset B$ et B est bornée alors A est bornée et on a

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

2. Si A et B sont bornées alors

$$\begin{aligned} \sup(A \cup B) &= \max(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cup B) &= \min(\inf A, \inf B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup(A \cap B) &\leq \min(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cap B) &\geq \max(\inf A, \inf B) \end{aligned}$$

$$\sup(-A)=-\inf A \text{ avec } -A=\{-x; x \in A\}$$

Preuve

1. Puisque B est bornée alors $\sup B$ et $\inf B$ existent et $\forall x \in B, \inf B \leq x \leq \sup B$ et comme $A \subset B$ alors tout élément x de A est un élément de B,

d'où $\inf B \leq x \leq \sup B$ ainsi A est bornée.

(a) Pour tout $x \in A$, $\inf B \leq x \leq \sup B$ donc $\sup B$ est un majorant de A, mais par définition le $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, d'où $\sup A \leq \sup B$.

(b) $\inf B$ est un minorant de A, mais par définition $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, d'où $\inf A \geq \inf B$. De (a) et (b), on déduit que:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Exemple

$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \geq 1 \right\}$, déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

On a

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1, \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases},$$

on pose alors $B = \left\{ \frac{1}{2n} + 1, n \geq 1 \right\}$ et $C = \left\{ \frac{1}{2n+1} - 1, n \geq 1 \right\}$.

On remarque que $A = B \cup C$. Cherchons $\sup B, \sup C, \inf B$ et $\inf C$.

Soit $x \in B$, $x \in B \Leftrightarrow x = \frac{1}{2n} + 1$

On a

$$n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2}$$

donc B est bornée.

Montrons que $\sup B = \frac{3}{2}$ et $\inf B = 1$.

$\frac{3}{2}$ est un majorant de B et $\frac{3}{2} \in B$ pour $n = 1$ alors $\max B = \frac{3}{2} = \sup B$.

Montrons que $\inf B = 1$

$$\inf B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in B; x \geq 1 \text{ elle est vérifiée car } x > 1 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1; 1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

cherchons $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon$.

$$1 + \frac{1}{2n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon},$$

alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

D'autre part, $\forall x \in C, x = \frac{1}{2n+1} - 1$.

On a

$$n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -1 < \frac{1}{2n+1} - 1 \leq \frac{-2}{3}$$

donc C est bornée.

Montrons que $\sup C = \frac{-2}{3}$ et $\inf B = -1$.

$\frac{-2}{3}$ est un majorant de C et $\frac{-2}{3} \in C$ pour $n = 1$ alors $\max C = \frac{-2}{3} = \sup C$.

Montrons que $\inf C = -1$

$$\inf C = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in C; x \geq 1 \text{ elle est vérifiée car } x > 1 \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1; \frac{1}{2n_\varepsilon+1} - 1 < -1 + \varepsilon \end{cases}$$

cherchons $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\frac{1}{2n_\varepsilon+1} - 1 < -1 + \varepsilon$.

$$\frac{1}{2n_\varepsilon + 1} - 1 < -1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n_\varepsilon + 1} < +\varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\right|\right] + 1$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \sup A &= \sup(B \cup C) = \max(\sup B, \sup C) = \max\left(\frac{3}{2}, \frac{-2}{3}\right) = \frac{3}{2} \\ \inf A &= \inf(B \cup C) = \min(\inf B, \inf C) = \min(1, -1) = -1. \end{aligned}$$

1.7 Intervalles

1. **Intervalles ouverts:** Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, l'ensemble borné $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$ est appelé intervalle ouvert et borné.

Remarque: Les ensembles

$$\begin{aligned}]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R}/x > a\} \\ \text{ou }]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R}/x < -b\} \end{aligned}$$

sont aussi des intervalles ouverts mais ne sont pas bornés.

2. **Intervalles fermés:** Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, l'ensemble borné $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$ est appelé intervalle fermé et borné.

Remarque: Les ensembles

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\} \\ \text{ou }]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}/x \leq -b\} \end{aligned}$$

sont aussi des intervalles fermés mais ne sont pas bornés.

3. **Intervalles semi ouverts:** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, les ensembles

$$\begin{cases} [a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\} \\ \text{et }]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\} \end{cases} \text{sont appelés intervalles semi ouverts.}$$

Théorème 1.7.1 (Critère d'intervalle)

I une partie bornée de $\mathbb{R}$.

$$I \text{ est un intervalle } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow [x_1, x_2] \subset I.$$

Voisinage: Soit $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, on dit que V_{x_0} est un voisinage de x_0 s'il existe un $\varepsilon > 0$, telque

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= V_{x_0}$$

Soit $x \in V_{x_0} \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$.

1.8 Droite réelle achevée

Définition 1.8.1 On appelle droite réelle achevée qu'on note par $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la relation d'ordre total, obtenu en prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}$ par les conditions:

$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x$ et $x < +\infty$.

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est totalement ordonée par la relation définie par $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x$ et $x \leq +\infty$.

Les opérations sur $\mathbb{R}$ s'étendent à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant:

$$\begin{aligned}
x+(+\infty) &= (+\infty)+x=+\infty, \forall x \in \mathbb{R}. \\
x+(-\infty) &= (-\infty)+x=-\infty, \forall x \in \mathbb{R}. \\
x.(+\infty) &= (+\infty).x=\begin{cases} +\infty \text{ si } x>0 \\ -\infty \text{ si } x<0 \end{cases}. \\
x.(-\infty) &= (-\infty).x=\begin{cases} -\infty \text{ si } x>0 \\ +\infty \text{ si } x<0 \end{cases} \\
(+\infty)+(+\infty) &= +\infty. \\
(-\infty)+(-\infty) &= -\infty. \\
(+\infty).(+\infty) &= +\infty. \\
(-\infty).(-\infty) &= +\infty. \\
(+\infty).(-\infty) &= (-\infty).(+\infty)=-\infty.
\end{aligned}$$

La somme $(+\infty)+(-\infty)$ et le produit $0.(+\infty), 0.(-\infty)$ ne sont pas définis.

1.9 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.9.1 Etant donnée deux nombres réels a et b tel que $a<b$, il existe au moins un nombre rationnel r tel que $a<r<b$, on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on note $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

C'est à dire entre deux réels, il existe toujours un rationnel.

Exemple: Montrer que $A=\left\{r^3/r \in \mathbb{Q}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soients $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x<y$, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel

que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$, d'où $x < r^3 < y$ ce qui donne A est dense dans $\mathbb{R}$.

1.10 Exercices

Exercice 1.

I. Montrer que 1. $|x-y| \leq |x|+|y|$, 2. $||x|-|y|| \leq |x+y|$,

3. $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$, 4. $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$,

5. $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}_+$.

II. Soit $[x]$ la partie entière de x, montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 < [x] \leq x$.

2. $\forall x,y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, [x+a] = [x]+a$

III. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $0,336433643364... \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2. On considère l'ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel et A une partie de E, déterminer pour chacun des ensembles suivants: l'ensemble des majorants $Maj(A)$, l'ensemble des minorants $Min(A)$, la borne supérieure $\sup A$, la borne inférieure $\inf A$, le plus petit élément $\min A$ et le plus grand élément $\max A$.

$A = [-2,2], [-2,2[,]-2,2],]-2,2[. E = \mathbb{R}$.

$A = \{\frac{1}{x-1}, x \in]0, \frac{1}{2}[\ \}, E = \mathbb{R}$.

$A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}, E = \mathbb{Q}$.

Exercice 3. En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure montrer que:

1. $\sup A = 0, \ \inf A = -1$ pour $A = \left\{\frac{1}{n^2} - 1 \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2. $\sup B = 2, \ \inf B = 0$ pour $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Déterminer le maximum et le minimum de chacun de ces ensembles s'ils existent.

Exercice 4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que:

$$A = \left\{ \frac{2n}{3n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. Trouver a et b tels que

$$\frac{2n}{3n+1} = a + \frac{b}{3n+1}.$$

2. Montrer que A est bornée.

3. Montrer que $\sup A = \frac{2}{3}$ et $\inf A = 0$ et déterminer $\max A$ et $\min A$ s'ils existent.

Exercice 5 : On note par $P_B(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$, montrer que $\forall A, B \in P_B(\mathbb{R})$:

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$, $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

2. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,où $A + B = \{x + y \ / \ x \in A$ et $y \in B\}$.

Application:

1. Soient $A = \{1\}$ et $B = \left\{ \frac{-2}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Déterminer $\sup A, \inf A, \sup B$ et $\inf B$.

b) En déduire $\sup C, \inf C$ telle que $C = \left\{ \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

2. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in A$. Montrer que si $\sup A > \alpha$ alors

$$\sup A = \sup(A - \{\alpha\}).$$

Solutions

Exercice 1.

1. $|x - y| \leq |x| + |y|$ (on utilise $|X| \leq a \Leftrightarrow -a \leq X \leq a, a \geq 0), X = x - y$ et $a = |x| + |y| \geq 0$, alors on a

$$|x - y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(|x| + |y|) \leq x - y \leq |x| + |y|$$

donc il suffit de démontrer $-(|x|+|y|) \leq x-y \leq |x|+|y|$.

On a

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \ldots.(*) \\ -|y| &\leq y \leq |y| \Leftrightarrow -|y| \leq -y \leq |y| \ldots (**) \end{aligned}$$

$(*)+(**)$ donne

$$-(|x|+|y|) \leq x-y \leq |x|+|y| \Leftrightarrow |x-y| \leq |x|+|y|.$$

2. $||x|-|y|| \leq |x+y| \Leftrightarrow -|x+y| \leq |x|-|y| \leq |x+y|$.

On a

$$\begin{aligned} |x| &= |x+y-y| \\ &= |(x+y)+(-y)| \\ &\leq |x+y|+|-y|, \text{ et } |-y|=|y| \\ &\leq |x+y|+|y| \end{aligned}$$

d'où

$$|x|-|y| \leq |x+y| \ldots (1)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |y| &= |y+x-x| \\ &= |(x+y)+(-x)| \\ &\leq |x+y|+|-x|, \text{ et } |-x|=|x| \\ &\leq |x+y|+|x| \end{aligned}$$

donc

$$-|x+y| \leq |x|-|y| \ldots (2)$$

(1) et (2) donne

$$-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x+y|.$$

3. $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$, On considère les deux cas $x \geq y, y \geq x$.

Si $x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0$ et $|x-y| = x - y$.

$\max(x,y) = x$,

et $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x = \max(x,y)$.

Si $y \geq x \Rightarrow x - y \leq 0$ et $|x-y| = -(x-y) = y - x$.

$\max(x,y) = y$,

et $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = y = \max(x,y)$.

Dans les deux cas on a trouvé $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

4. $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$. Même raisonnement que 4.

5. $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+$.

On a $xy \geq 0$, alors $2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x+y+2\sqrt{xy}}_{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \geq x+y$, d'où $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq x+y = \left(\sqrt{x+y}\right)^2$.

Ce qui donne

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}.$$

II. $[x]$ partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x$.

On a par définition de la partie entière de $x, [x] \leq x < [x] + 1$

$$x < [x] + 1 \Leftrightarrow x - 1 < [x]$$

et

$$[x] \leq x$$

donc

$$x-1<[x]\leq x.$$

2. $\forall x,y\in\mathbb{R},x\leq y\Rightarrow[x]\leq[y]$.

On a $\forall x,y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}[x] &\leq x<[x]+1\\ [y] &\leq y<[y]+1\end{aligned}$$

et $x\leq y$ donc $[x]\leq x\leq y\Rightarrow\underbrace{[x]}_{entier}\leq y$.

$[x]$ est un entier inférieur ou égal à y mais par définition $[y]$ est le **plus grand** entier inférieur ou égal à y alors

$$[x]\leq[y].$$

3. $\forall x\in\mathbb{R},\forall a\in\mathbb{Z},[x+a]=[x]+a$.

On pose $m=[x+a]$, alors $m\leq x+a<m+1$,

et si on pose $[x]=n$, alors $\underbrace{(n+a)}_{entier}\leq x+a<(n+a)+1$,

par définition $[x+a]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x+a$ et il est unique d'où $m=n+a$, c'est à dire $[x+a]=[x]+a$.

III. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, alors $\exists a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}^{*}a\wedge b=1/\ \sqrt{2}=\frac{a}{b}$.

$2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a^2\ pair\Rightarrow a\ pair,a=2k,k\in\mathbb{N}$ ainsi $a^2=4k^2=2b^2\Leftrightarrow b^2=2k^2\Leftrightarrow b^2$ pair$\Rightarrow b$ pair.

On obtient que 2 divise a et b, contradiction avec le fait qu'on a supposé que a et b sont premier entre eux, donc $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

$0.336433643364...\in\mathbb{Q}$.

On pose $x=0.\underbrace{3364}\underbrace{3364}\underbrace{3364}...$

$10^{-4}x = 3364.33643364...$ et

$$\begin{aligned} 10^{-4}x - x &= 3364 \\ x\,(9999) &= 3364 \\ x &= \frac{3364}{9999} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

$A = [-2, 2]\,, \forall x \in A, -2 \leq x \leq 2$

$Maj\,(A) = [2, +\infty[\;\Rightarrow \sup A = 2 \in A \Rightarrow \max A = 2.$

$Min\,(A) = \,]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \in A \Rightarrow \min A = -2.$

$A = [-2, 2[\,, \forall x \in A, -2 \leq x < 2$

$Maj\,(A) = [2, +\infty[\;\Rightarrow \sup A = 2 \notin A \Rightarrow \max A$ n'existe pas.

$Min\,(A) = \,]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \in A \Rightarrow \min A = -2.$

$A = \,]-2, 2]\,, \forall x \in A, -2 < x \leq 2$

$Maj\,(A) = [2, +\infty[\;\Rightarrow \sup A = 2 \in A \Rightarrow \max A = 2.$

$Min\,(A) = \,]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \notin A \Rightarrow \min A$ n′existe pas.

$A = \,]-2, 2[\,, \forall x \in A, -2 < x < 2$

$Maj\,(A) = [2, +\infty[\;\Rightarrow \sup A = 2 \notin A \Rightarrow \max A$ n'existe pas.

$Min\,(A) = \,]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \notin A \Rightarrow \min A$ n′existe pas.

$A = \left\{ \frac{1}{x-1}, x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right\}$

Soit $X \in A, X = \frac{1}{x-1}, x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

on a $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < x-1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1-x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{1-x} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{1}{x-1} < -1,$ alors $-2 < X < -1.$

$Maj\,(A) = [-1, +\infty[\;\Rightarrow \sup A = -1 \notin A \Rightarrow \max A$ n'existe pas.

$Min\,(A) = \,]-\infty, -2] \Rightarrow \inf A = -2 \notin A \Rightarrow \min A$ n′existe pas.

$A = \left\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\right\}, E = \mathbb{R}.$

Soit $x \in A, x \in \mathbb{Q}$ et $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$

$Maj\,(A) = \left[\sqrt{2}, +\infty\right[\Rightarrow \sup A = \sqrt{2} \notin A$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \max A$ n'existe pas.

$Min\,(A) = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \Rightarrow \inf A = -\sqrt{2} \notin A$ car $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \min A$ n′existe pas.

Exercice 3.

1. $A = \left\{\frac{1}{n^2} - 1, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Montrons d'abord que A est bornée.

Soit $x \in A \Leftrightarrow x = \frac{1}{n^2} - 1, n \geq 1 (n \in \mathbb{N}^*).$

On a $n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{n^2} - 1 \leq 0$, d'où $\forall x \in A, -1 < x \leq 0 \Leftrightarrow A$ est bornée (majorée par 0 et minorée par -1).

On a $0 = \frac{1}{1^2} - 1 \in A$ (pour $n = 1$) et 0 est un majorant de A et puisque il appartient à A alors $\max A = 0 = \sup A.$

Montrons maintenant que $\inf A = -1$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

$$\inf A = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq -1 \text{ vérifiée} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A / x_\varepsilon < -1 + \varepsilon \end{cases}$$

Pour chercher $x_\varepsilon \in A$, il suffit de chercher $n_\varepsilon \geq 1 / x_\varepsilon = \frac{1}{n_\varepsilon^2} - 1 < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n_\varepsilon^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n_\varepsilon^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$

Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1.$ (ou bien n_ε existe d'aprés la première formule d'Archimed).

2. $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Montrons d'abord que B est bornée.

Soit $x \in B \Leftrightarrow x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1, n \geq 1 (n \in \mathbb{N}^*).$

On a $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1$, et $n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2,$

d'où $\forall x \in B, 0 < x \leq 2 \Leftrightarrow B$ est bornée (majorée par 2 et minorée par 0).

On a $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1^2} \in B$ (pour $n = 1$) et 2 est un majorant de B et puisque il appartient à B alors $\max B = 0 = \sup B$.

Montrons maintenant que $\inf B = 0$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure.

$$\inf B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in B, x \geq 0 \text{ vérifiée} \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in B / x_\varepsilon < 0 + \varepsilon \end{cases}$$

Pour chercher $x_\varepsilon \in B$, il suffit de chercher $n_\varepsilon \geq 1/x_\varepsilon = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_\varepsilon^2} < 0 + \varepsilon$,

On a $\frac{1}{n_\varepsilon} < \frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{1}{n_\varepsilon^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Exercice 4.

$A = \left\{\frac{2n}{3n+1}, n \in \mathbb{N}\right\} 2$

1. $\frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3n+1}, a = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3}$.

2. Soit $x \in A, x = \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3n+1}$,

$n \geq 0 \Rightarrow 3n + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3n+1} \leq 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{-\frac{2}{3}}{3n+1} < 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3n+1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \forall x \in A, 0 \leq x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow A$ est bornée.

3. On a $0 = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3.0+1} \in A($ pour $n = 0)$ et 0 est un minorant de A et puisque il appartient à A alors $\min A = 0 = \inf A$.

Montrons maintenant que $\sup A = \frac{2}{3}$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

$$\sup A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \frac{2}{3} \text{ vérifiée} \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A / \frac{2}{3} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

Pour chercher $x_\varepsilon \in A$, il suffit de chercher $n_\varepsilon \geq 0 / x_\varepsilon = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon$,

$\frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon \Rightarrow \frac{-\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1} > -\varepsilon \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{3n_\varepsilon+1} < \varepsilon \Rightarrow 3n_\varepsilon + 1 > \frac{2}{3\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{\frac{2}{3\varepsilon}-1}{3} = \frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}$,

Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}\right|\right] + 1$ (on prend la valeur absolue de $\frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}$ car on n'a pas le signe de $\frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}$, on cherche un entier naturel $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$).

Exercice 5.

1. A et B sont bornées alors $A \cup B$ est bornée.

En effet, Soit $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \Leftrightarrow \inf A \leq x \leq \sup A$ ou $\inf B \leq x \leq \sup B$ (car A et B sont bornées)$\Leftrightarrow A \cup B$ est bornée.

Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)}_{(1)} \\ et \\ \underbrace{\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)}_{(2)} \end{cases}$$

On montre (1) et (2).

On a $\begin{cases} A \subset A \cup B \Rightarrow \sup A \leq \sup(A \cup B) \\ B \subset A \cup B \Rightarrow \sup B \leq \sup(A \cup B) \end{cases} \Rightarrow \sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$ d'où (2) est démontrer.

On a aussi

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \Leftrightarrow x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B \Rightarrow \sup A$ est un majorant de $A \cup B$ ou $\sup B$ est un majorant de $A \cup B$, mais par définition $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, par conséquent, $\sup(A \cup B) \leq \sup A$ et $\sup(A \cup B) \leq \sup B$ ce qui donne $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$ d'où (1) est démontrer.

Même raisonnement pour $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

2. $A + B = \{z = x + y; x \in A, y \in B\}$

A et B sont bornées alors $A + B$ est bornée.

En effet, soit $z \in A + B$ alors $z = x + y / x \in A$ et $y \in B$.

$\left.\begin{array}{l} x \in A \text{ et } A \text{ est bornée alors } \inf A \leq x \leq \sup A \\ y \in B \text{ et } B \text{ est bornée alors } \inf B \leq y \leq \sup B \end{array}\right\} \Rightarrow \inf A + \inf B \leq x + y \leq \sup A + \sup B$

$\Rightarrow \inf A + \inf B \leq z \leq \sup A + \sup B \Leftrightarrow A + B$ bornée.

Montrons que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

$$\begin{cases} \forall x \in A, x \leq \sup A \ldots (1) \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A; \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon \ldots (2) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \forall y \in B, y \leq \sup B \ldots (1') \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in B; \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < y_\varepsilon \ldots (2') \end{cases}$$

Prenons $(1) + (1')$ et $(2) + (2')$.

$$\begin{cases} \forall x \in A, \forall y \in B, x + y \leq \sup A + \sup B \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, \exists y_\varepsilon \in B; \sup A + \sup B - \varepsilon < x_\varepsilon + y_\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

Même raisonnement pour $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Application:

$A = \{1\}, B = \left\{\frac{-2}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

a. $\forall x \in A; x = 1 \Leftrightarrow \sup A = \inf A = 1$.

$\forall y \in B; y = \frac{2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$,

on a $n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \frac{-2}{n+1} < 0 \Leftrightarrow -2 \leq y < 0 \Leftrightarrow B$ est bornée.

Pour $n = 0, y = -2 = \frac{-2}{0+1} \in B$ et -2 est un minorant de B qui appartient à B donc $\min B = -2 = \inf B$.

Montrons que $\sup B = 0$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

$$\sup B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in B, y \leq 0 \text{ vérifiée} \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in B / 0 - \varepsilon < y_\varepsilon. \end{cases}$$

Pour chercher $y_\varepsilon \in B$, on cherche $n_\varepsilon \geq 0 / -\varepsilon < y_\varepsilon$,

$-\varepsilon < \frac{2}{n_\varepsilon+1} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2}{n_\varepsilon+1} \Leftrightarrow n_\varepsilon + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{2}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$.

b. Déduire $\sup C$ et $\inf C / C = \left\{\frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

On a $\frac{n-1}{n+1} = 1 + \frac{-2}{n+1}$, alors $\forall z \in C, z = \underbrace{1}_{\in A} + \underbrace{\frac{-2}{n+1}}_{\in B}$ donc $z \in A + B$ ce qui donne $C = A + B$.

Donc $\sup C = \sup (A+B) = \sup A + \sup B = 1 + 0 = 1$

$$\inf C = \inf (A+B) = \inf A + \inf B = 1 + (-2) = -1.$$

2. $A \neq \phi, A$ majorée$\Rightarrow \sup A$ existe.

$\alpha \in A$; Montrons que $\sup A = \sup (A - \{\alpha\})$ si $\alpha < \sup A$,

On a $A = (A - \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}$, donc

$$\begin{aligned} \sup A &= \sup ((A - \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}) \\ &= \max (\sup (A - \{\alpha\}), \sup (\{\alpha\})) \\ &= \max (\sup (A - \{\alpha\}), \alpha), \end{aligned}$$

puisque $\alpha < \sup A$ c'est à dire $\sup A \neq \alpha$ alors

$$\sup A = \sup (A - \{\alpha\}).$$

Chapitre 2

Corps des nombres complexes

2.1 Nombres complexes

Définition 2.1.1 On appelle l'ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble contenant les nombres réels tel que

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy / \, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}$$

où $x = \operatorname{Re}(z)$ est dite partie réelle de z et $y = \operatorname{Im}(z)$ est dite partie imaginaire de z, l'écriture

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

est dite la représentation algèbrique du nombre complexe z.

Propriétés

1. Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ alors $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
2. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

2.2 Représentation graphique

Dans le plan complexe, à tout point $M(x, y)$ on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et que M est l'image ponctuelle de z et que $\overrightarrow{OM}$ est l'image vectorielle de z. .

Dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sur l'axe horizontal, il y a les nombres réels dont la partie imaginaire est nulle et sur l'axe vertical, il y a les nombres imaginaire pure dont la partie réelle est nulle.

Dans le plan complexe, le module de z noté $|z|$, est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$; c'est à dire si $z = x + iy$ est l'affixe du point $M(x, y)$ on a: $|z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

L'argument de z est la mesure de l'angle entre l'axe des réels et $\overrightarrow{OM}$, orienté suivant le sens trigonométrique on note $\arg z$.

Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.

$\overline{z}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ (vecteur symetrique à $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe horizontal des réels).

Propriétés

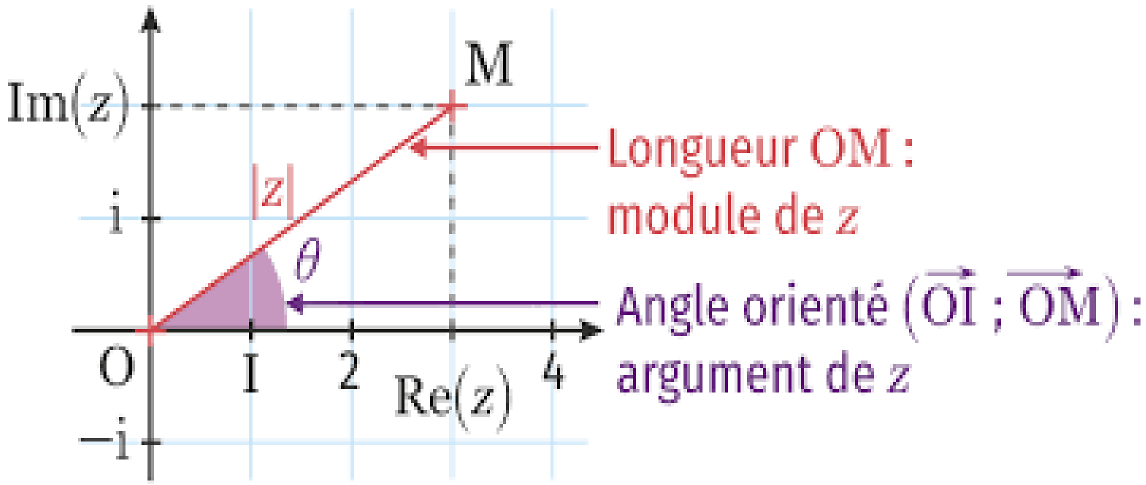
1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $\overline{\overline{z}} = z$.
3. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
5. z imaginaire pur$\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.
6. $z\overline{z} = |z|^2$.

2.3 Représentation trigonométrique

Tout nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r \geq 0$$

où $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ est le module de z et $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ où θ est l'argument de z. $\tan\theta = \frac{y}{x}$ avec $x \neq 0$.



Propriétés:

1. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ alors

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

2. Si $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = |x|$ et $\arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Si $z = iy \Rightarrow |z| = |y|$ et $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors,

a) $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, c'est à dire $\arg(\overline{z}) = -\arg z$.

b) $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(-\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$ c'est à dire $\arg(-z) = \arg z + \pi$.

Exemple

1. Si $z = 3+3i$ alors $\operatorname{Re} z = 3, \operatorname{Im} z = 3, |z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$,

d'où z peut s'écrire sous la forme

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2. $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}, \operatorname{Re} z = \sqrt{6}$ et $\operatorname{Im} z = \sqrt{2}, |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

d'où z peut s'écrire sous la forme

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Exemple: Soient les nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 - i \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

1. Déterminer la forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Déterminer la forme algèbrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

3. En déduire les valeurs exactes de: $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution:

1. $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$

d'où

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$|z_2| = \sqrt{2} \text{ et } \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

d'où

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

2. Forme algèbrique de $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-2i}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

3. Par identification de la forme algèbrique avec le forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$, on obtient:

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= -\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right). \end{aligned}$$

2.4 Forme exponentielle

Pour tout nombre réel θ, on appelle exponentielle complexe noté $e^{i\theta}$, le nombre complexe de module 1 et d'argument θ,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

par suite on a la formule d'Euler

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \end{aligned}$$

par conséquent, pour tout nombre complexe $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, où $r_1 = |z_1|$, on a

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } \overline{z_1} = r_1 e^{-i\theta_1}$$

et pour $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, où $r_2 = |z_2| / r_2 > 0$, on a

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 On a

1.

$$e^{2\pi i} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\pi} = -1 \text{ et } e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

2.

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}, \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Propriétés. On a

1.

$$\forall\theta, \theta' \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \text{ et } \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

2.

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \text{ et } \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}.$$

2.5 Opérations sur les nombres complexes

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1e^{i\theta_1} \\ z_2 &= x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2e^{i\theta_2} \end{aligned}$$

1. L'addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \text{...forme algèbrique} \\ z_1 + z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \text{...forme trigonométrique} \\ z_1 + z_2 &= r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2} \text{...forme exponentielle.} \end{aligned}$$

2. Le produit

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \text{...forme algèbrique} \\ z_1.z_2 &= r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \text{...forme trigonométrique} \\ z_1.z_2 &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{...forme exponentielle.} \end{aligned}$$

3. Division Si $z_2 \neq 0$ (i.e. $r_2 > 0$), on a

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \text{...forme algèbrique} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \text{...forme trigonométrique} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \text{...forme exponentielle.} \end{aligned}$$

Propriétés:

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $z_2 \neq 0$ alors

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2. $|z_1.z_2| = |z_1| . |z_2|$.

3. $z_1.\overline{z_1} = |z_1|^2 \in \mathbb{R}_+$.

4. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

5. $\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

2.6 Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe de module $r = 1$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

Alors

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette formule est appelée formule de Moivre.

2.7 Racine n^{ième} d'un nombre complexe

Soit $\omega \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n = \omega,$$

on pose $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, cherchons r et θ tels que

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

$$z^n = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On trouve les solutions pour $k = 0, 1, 2, ..., \mathbf{n-1}$.

Exemple

Trouver la racine cubique du nombre complexe $\omega = 1$.

On a $\omega = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$ et cherchons $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que $z^3 = 1$

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi),$$

par identification

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2 \end{cases},$$

par conséquent, on a trois racines cubiques

$$\begin{aligned} \text{Pour } k &= 0,\ z_1 = 1 \\ \text{Pour } k &= 1,\ z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Pour } k &= 2,\ z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Racine carrée d'un nombre complexe:

Exemple d'application: Déterminer les racines carrées de $\omega = 3 + 4i$.

On a $|\omega| = 5$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$ on remarque que $\arg\alpha$ n'est pas parmis les argument connus, pour celà on va utiliser la forme algèbrique.

Cherchons un $z = x + iy$ tel que $z^2 = \omega$. On a,

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 - y^2 + 2ixy = \omega = 3 + 4i \\ \text{et } |z|^2 &= x^2 + y^2 = |\omega| = 5, \end{aligned}$$

donc

$$z^2 = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 1) \text{ ou } (x, y) = (-2, -1),$$

d'où les racines carrées de $\omega = 3 + 4i$ sont $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = -2 - i$.

2.8 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Etant donnée l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$. Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

puis on distingue les trois cas:

1^{er} cas: $\Delta > 0, z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$2^{ème}$ cas: $\Delta = 0, z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

$3^{ème}$ cas: $\Delta < 0, z_1 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque 2.7.1 Si les coéfficients $a, b, c \in \mathbb{C}$ alors le discriminant Δ pourrait être un nombre complexe, donc il faudra calculer sa racine carrée.

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (7+i)\,z + 12 + 3i = 0,$$

$\Delta = 2i$ et $\sqrt{\Delta} = 1 + i$ ou $-1 - i$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{7+i+1+i}{2} = 4 + i \\ z_2 &= \frac{7+i-1-i}{2} = 3. \end{aligned}$$

2.9 Exercices

Exercice 1. Donner la forme algèbrique des nombres complexs suivants:

$z_1 = (2-i)\,(3+8i)\,, z_2 = (1+i)\,\overline{(1+i)}, z_3 = (1+i)^3\,,$

$z_4 = \frac{1}{1+i}, z_5 = \frac{1-2i}{3+i}.$

Exercice 2. 1. Calculer le module et l'argument des nombres complexs suivants:

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i, z_3 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}, z_4 = (1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right).$

2. Soit $z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

Ecrire z sous la forme algèbrique.

Ecrire z sous la la forme trigonométrque.

Ecrire $\frac{1}{z}, z^{2009}, \overline{z}$ sous la la forme trigonométrque.

3. Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexs suivants:

$$z_1 = 2 - 2i, z_2 = 3\sqrt{3} - 3i, z_3 = \frac{5}{4}i, z_4 = -1.$$

Exercice 3. On considére les nombres complexs suivants:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i, z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

a) Ecrire z_3 forme algèbrique.

b) Ecrire z_3 forme trigonométrque.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}, \sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4. 1. Calculer les racines carées de $1, i, 3+4i$.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

$z^2 + z + 1 = 0, z^2 - (1+2i)z + i = 0.$

b) Trouver la racine cubique de $2 - 2i$.

Exercice 5. Soient a et b deux entiers naturels.

1.Déterminer a et b pour que $\left(a + b\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 - \left(2 + \left(1-\sqrt{3}\right)i\right)z + 1 + \sqrt{3} + \left(1-\sqrt{3}\right)i = 0$

3. Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation précédente telles que $|z_1| < |z_2|$.

Ecrire alors $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ sous forme algèbrique et sous forme trigonométrique.

En déduire $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 6. Dans le plan complexe; muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; on considère les points A, B, C, E et F dont les affixes sont données par:

$z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = i, z_E = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}}, z_F = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

1. Ecrire z_A, z_B sous la forme exponentielle et z_E et z_F sous la forme algèbrique.

2. Vérifier que $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013} + \left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013} = -1 - i$.

- Soit le nombre complexe $2\alpha = \left(-1 + \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$,

a) Déterminer le nombre complexe z_D tel que $z_D = \alpha^2$, puis l'écrire sous la forme exponentielle.

b) Déterminer l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, tel que $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n \in \mathbb{R}$.

Solutions

Exercice 1. Forme algèbrique

$z_1 = (2 - i)(3 + 8i) = 14 - 13i$

$z_2 = (1 + i)\overline{(1 + i)} = 2$

$z_3 = (1 + i)^3 = 2i - 2$

$z_4 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$z_5 = \frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)(3-i)}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$.

Exercice 2. Forme trigonométrique: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ et $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 1 - i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{2} \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$z_3 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}} \Rightarrow |z_2| = \frac{|1+i|}{\left|-1-i\sqrt{3}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg z_3 = \arg(1+i) - \arg\left(-1-i\sqrt{3}\right) = \theta_1 - \theta_2$
$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$

$z_4 = (1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right) \Rightarrow |1+i|\left|-1-i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{2}.$

$\arg z_4 = \arg(1+i) + \arg\left(-1-i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}.$

$$z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$$

2. $z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

1. Forme algèbrique $z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} = \left(1-\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right).$

2. Forme trigonométrique . $|z| = \frac{|4+4i|}{\left|1-i\sqrt{3}\right|} = 2\sqrt{2}, \arg z = \underbrace{\arg(4+4i)}_{\theta_1} - \underbrace{\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)}_{\theta_2}.$

$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right), \text{ car } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \arg\frac{1}{z} = -\arg z.$$

. $z^{2009} = \left(2\sqrt{2}\right)^{2009}\left(\cos\left(\frac{2009.7}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2009.7}{12}\right)\right) =$

$= 2^{3013.5}\left(\cos\left(\left(1171 + \frac{11}{12}\right)\pi\right) + i\sin\left(\left(1171 + \frac{11}{12}\right)\pi\right)\right) =$

$= 2^{3013.5}\left(\cos\left(\left(\frac{23}{12}\right)\pi\right) + i\sin\left(\left(\frac{23}{12}\right)\pi\right)\right)$

$= 2^{3013.5}\left(\cos\left(\left(\frac{23}{12}\right)\pi\right) + i\sin\left(\left(\frac{23}{12}\right)\pi\right)\right).$

. $\overline{z} = |z|\left(\cos\left(-\arg z\right) + i\sin\left(-\arg z\right)\right) = z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right).$

3. Forme exponentielle:

$z_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, z_2 = 3\sqrt{3} - 3i = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_3 = \frac{5}{4}i = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}, z_4 = -1 = e^{i\pi}.$

Exercice 3. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i, z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$

1. $z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$

2. $|z_3| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \arg z_3 = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

3. On a $\begin{cases} z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$

Par identification de la forme algèbrique avec la forme trigonométrique

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Exercice 4.

1. Racine carrée de $1, i$ et $3 + 4i$.

Pour $w = 1$, cherchons un $z = x + iy$ tel que $z^2 = w$

$$\begin{aligned} z^2 &= w = 1 \\ x^2 - y^2 + 2ixy &= 1, \text{ et } |z| = 1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow z_1=1 \text{ ou } z_2=-1$$

Pour $w=i$ cherchons un $z=x+iy$ telle que $z^2=w$

$$\begin{aligned} z^2 &= w=i \\ x^2-y^2+2ixy &= i, \text{ et } |z|=1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x=\frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ou } z_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Pour $w=3+4i$ cherchons un $z=x+iy$ tel que $z^2=w$

$$\begin{aligned} z^2 &= w=3+4i \\ x^2-y^2+2ixy &= 3+4i, \text{ et } |z|=5, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow z_1=2+i \text{ ou } z_2=-2-i.$$

2. Résoudre les équations:

$$z^2+z+1=0, \Delta=-3=i^2 3 \Rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$z^2-(1+2i)\,z+i=0, \Delta=-1=i^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{1+3i}{2} \\ z_2=\frac{1+i}{2} \end{cases}.$$

3. Racine cubique de $2-2i$.

$w=2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, cherchons un $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ tel que

$$\begin{aligned} z^3 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ r^3\left(\cos 3\theta+i\sin 3\theta\right) &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} r^3=2\sqrt{2} \\ 3\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k=0,1,2. \end{cases}$$
$$\begin{cases} r=\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \\ \theta=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}, k=0,1,2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k &= 0\Rightarrow\theta=\frac{-\pi}{12}\Rightarrow z_1=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right) \\ k &= 1\Rightarrow\theta=\frac{7\pi}{12}\Rightarrow z_2=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-7\pi}{12}+i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right) \\ k &= 2\Rightarrow\theta=\frac{15\pi}{12}\Rightarrow z_2=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$

Exercice 5. $a,b\in\mathbb{N}$

1. $\left(a+b\sqrt{3}\right)=4+2\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2+3b^2+2ab\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$.
$\begin{cases} a^2+3b^2=4 \\ 2ab=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2+3b^2=4 \\ ab=1 \end{cases}\Rightarrow\{a=1 \text{ et } b=1 \text{ d'où } \left(1+\sqrt{3}\right)^2=4+2\sqrt{3}.$

2. $z^2-\left(2+\left(1-\sqrt{3}\right)\right)z+1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i=0.$

$\Delta=-4-2\sqrt{3}=-\left(4+2\sqrt{3}\right)=i^2\left(1+\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow\begin{cases} z_1=1+i \\ z_2=1-i\sqrt{3} \end{cases}.$

$|z_1|=\sqrt{2},|z_2|=2.$

3. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}.$

$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2=\frac{7\pi}{12},\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

Par identification de la forme algèbrique et la forme trigonométrique.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Exercice 6.

1. $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_E = -\sqrt{3} - i, z_F = 2i.$

2. a) $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013} = e^{i\frac{\pi}{6}2013} = e^{i\pi\left(335+\frac{1}{2}\right)} = \underbrace{e^{i\pi 334}}_{=1} e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i.$

$\left(i\frac{z_E}{2}\right)^{2013} = (-1)^{2013}\left(e^{i\pi\frac{2}{3}2013}\right) = (-1)\underbrace{\left(e^{i2\pi 671}\right)}_{=1} = -1.$

D'où $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013} + \left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013} = -i - 1.$

$2\alpha = \left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right).$

$z_D = \alpha^2 = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5}{6}\pi}.$

b) $\frac{z_D}{z_E} = -ie^{i\frac{\pi}{6}} = \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}.$

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n &= e^{i\frac{5n\pi}{3}} = e^{in\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)} = e^{-in\frac{\pi}{3}} \\ &= \cos\left(-n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n &\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow -n\frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}_- \\ n &= -3k, k \in \mathbb{Z}_-. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Les suites de nombres réels

3.1 Suites numériques

Définition 3.1.1 On appelle suite réelle d'éléments de $\mathbb{R}$, toute application U de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} U: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & U(n). \end{array}$$

On note l'image de n par U_n au lieu de $U(n)$, il est appelé terme général de la suite U.

U_0 est appelé premier terme de la suite U.

On note la suite U par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(U_n)_n$.

On appelle l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite $(U_n)_n$.

Exemples

1. $U_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, U_1 = 1$ est le premier terme.

2. $U_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, U_0 = 1$ est le premier terme.

3. La suite récurrente définie par: $U_1 = 1, U_n = 1 + \frac{1}{U_{n-1}}$,$U_2 = 1 + \frac{1}{U_1} = 2, U_3 = 1 + \frac{1}{U_2} = \frac{3}{2}, \ldots$

4. On dit que $(U_n)_n$ est une suite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}; U_{n+1} - U_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$,

dans ce cas $U_n = U_0 + nr$, et

$$S = U_0 + U_1 + ... + U_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2} = \frac{\text{(nombre de terme)(premierterme+dernier terme)}}{2}.$$

5. On dit que $(U_n)_n$ est une suite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}^*$; $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q, \forall n \in \mathbb{N}$, dans ce cas $U_n = U_0 q^n$, et

$$S = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \text{premier terme}\left(\frac{1-Raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison}\right).$$

3.2 Suites bornées

Définition 3.2.1 Soit $(U_n)_n$ une suite réelle, on dit que:

1. $(U_n)_n$ est une suite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq M$.

2. $(U_n)_n$ est une suite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; U_n \geq m$.

3. $(U_n)_n$ est une suite bornée si $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; m \leq U_n \leq M$.

ou bien $\exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}; |U_n| \leq \alpha$.

Exemples

1. $U_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

On a, $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow (U_n)$ est bornée (majorée par 1 et minorée par 0).

2. $U_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

On a, $n \geq 0 \Rightarrow 2^n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} \leq 1 \Rightarrow (U_n)$ est bornée (majorée par 1 et minorée par 0).

3. $U_n = \sin n, n \in \mathbb{N}$.

On a, $1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow |\sin n| \leq 1 \Rightarrow (U_n)$ est bornée (majorée par 1 et minorée par -1).

4. $U_n = n + 1, n \in \mathbb{N}$.

On a, $n+1 \geq 1 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas bornée car elle n'est pas majorée mais elle est minorée par 1.

5. $U_n = -(n!), n \in \mathbb{N}$.

On a, $n \geq 0 \Rightarrow n! \geq 1 \Rightarrow -(n!) \leq -1 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas bornée car elle n'est pas minorée mais elle majorée est par -1.

3.3 Suites monotones

Définition 3.3.1 Soit (U_n) une suite réelle, on dit que

1. (U_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$.
2. (U_n) est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$.
3. (U_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$.
4. (U_n) est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} < U_n$.
5. (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque 3.3.1

1. Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
2. Pour étudier la monotonie d'une suite à termes positifs on compare le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est croissante.

Exemples

1. $U_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

ou bien on remarque que $U_n > 0$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

2. $U_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2_n}\left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

ou bien on remarque que $U_n > 0$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante.

3. $U_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est croissante.

3.4 Sous suites (suites extraites)

Définition 3.4.1 Soit (U_n) une suite réelle, on appelle suite extraite ou sous suite de (U_n), toute suite de la forme $\left(U_{\varphi(n)}\right)$ telle que φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Exemple

1. (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont des sous suites de (U_n).
2. $U_{2n} = 2$ et $U_{2n+1} = \frac{1}{2}$ sont des sous suites de la suite de terme générale $U_n = 2^{(-1)^n}$.
3. (U_{n+1}) est une suite extraite de (U_n).

3.5 Nature d'une suite (convergence, divergence)

Suite convergente

Définition 3.5.1 Soit (U_n) une suite réelle, on dit qu'elle est convergente et admet pour limite le nombre l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$.

C'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_A \Rightarrow U_n > A$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty \Leftrightarrow \forall B<0, \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_B \Rightarrow U_n < B$$

Exemple

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n+1}{n+1} = -2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2n+1}{n+1} - (-2)\right| < \varepsilon)$.

$\left|\frac{-2n+1}{n+1} - (-2)\right| = \left|\frac{-2n+1}{n+1} + 2\right| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+1}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$.

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{3}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$.

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon)$.

$\left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$.

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right|\right] + 1$.

Théorème 3.5.1 Si (U_n) converge vers une limite l alors l est unique.

Preuve. Supposons que (U_n) admet deux limites $l \neq l'$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_1 \Rightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_2 \Rightarrow \left|U_n - l'\right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Choisissons $N_3 = \max(N_1, N_2)$

$$\begin{aligned}
\left|l - l'\right| &= \left|l - l' + U_n - U_n\right| = \left|(l - U_n) + \big(U_n - l'\big)\right| \\
&\leq |(l - U_n)| + \left|U_n - l'\right| \\
&\leq |U_n - l| + \left|U_n - l'\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

d'où $l = l'$ contradiction, alors l est unique.

Théorème 3.5.2 Toute suite convergente est bornée.

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

Pour $n > N_\varepsilon, -\varepsilon < U_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow (U_n)$ bornée pour $n > N_\varepsilon$ donc bornée $\forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.5.1 Toute suite bornée n'est pas convergente.

En effet, la suite $U_n = (-1)^n$ bornée non convergente (elle admet deux limites 1 et -1)

$$(U_n) \text{ convergente } \Rightarrow (U_n) \text{ bornée}$$

$$(U_n) \text{ bornée } \nRightarrow (U_n) \text{ convergente.}$$

Proposition3.5.1 Toute sous suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite. La reciproque n'est pas vraie. Une suite divergente peut admettre des sous suites convergentes

Exemple. $U_n = 2^{(-1)^n}$ divergente car elle admet deux limites 2 et $\frac{1}{2}$, mais sa sous suite $U_{2n} = 2$ est convergente.

Remarque 3.5.2 Par contraposé, il suffit qu'une sous suite soit divergente pour que la suite soit divergente, ou bien deux sous suites n'ont pas la même limite pour que la suite soit divergente.

Exemple. $U_n = \cos n\pi$ est divergente car elle admet des sous suites qui n'ont pas la même limite.

Les sous suites sont $\begin{cases} U_{2n} = \cos 2n\pi = 1 \text{ convergente} \\ U_{2n+1} = \cos(2n+1) = -1 \text{ convergente} \end{cases}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = 1 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = -1$.

3.6 Opérations sur les suites convergentes

Soient $(U_n), (V_n)$ deux suites convergentes vers l et l' et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors les suites $(U_n + V_n), (U_nV_n), \left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ et (αU_n) sont convergentes et on a:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l + l'$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_nV_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n . \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l.l'$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n} = \frac{l}{l'}, l' \neq 0$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha U_n) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha l$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right| = |l|$.

Remarque 3.6.1

1. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.
2. U_n est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_nV_n = \infty$.
3. $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \geq 0$.
4. $U_n < V_n, \forall n > n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

3.7 Théorème des trois suites

Théorème 3.7.1 Si deux suites (U_n) et (V_n) convergent vers le même nombre réel l et si à partir d'un certain rang, la suite (W_n) vérifie l'inégalité

$$U_n \leq W_n \leq V_n$$

alors la suite (W_n) converge vers l.

Preuve

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon).$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N'_\varepsilon \Rightarrow |V_n - l| < \varepsilon).$$

donc $\forall n > N_\varepsilon, |U_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon.$

$\forall n > N'_\varepsilon, |V_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < V_n < l + \varepsilon.$

mais $\forall n > n_0, U_n \leq W_n \leq V_n,$

alors $\forall n > \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon, n_0), l - \varepsilon < U_n < W_n < V_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N''_\varepsilon = \max\left(N_\varepsilon, N'_\varepsilon, n_0\right), \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N''_\varepsilon \Rightarrow |W_n - l| < \varepsilon).$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} W_n = l$$

Exemple. 1. $W_n = \frac{\cos n}{n}$,

On a $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$

2. $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}$

On a

$$\begin{aligned}
1 &\leq k \leq n \\
n^2 + 1 &\leq n^2 + k \leq n^2 + n \\
\frac{1}{n^2+n} &\leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1} \\
\frac{n}{n^2+n} &\leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1} \\
n\left(\frac{n}{n^2+n}\right) &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq n\left(\frac{n}{n^2+1}\right)
\end{aligned}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = 1.$

Théorème 3.7.2 Soient (U_n) et (V_n) deux suites réelles telles que:

i) $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$

ii) (V_n) est bornée.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n V_n = 0.$$

Preuve.

$$(V_n) \text{ bornée} \Leftrightarrow \exists\alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |V_n| \leq \alpha$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - 0| < \frac{\varepsilon}{\alpha}).$$

alors $\forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n|\ |V_n| < \frac{\varepsilon}{\alpha}.\alpha = \varepsilon$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = 0$.

Exemple:

1. $U_n = \frac{\sin n!}{n+1}$.

Posons $V_n = \sin n!$ bornée car $|\sin n!| \leq 1$, et $W_n = \frac{1}{n+1} \to 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n!.\frac{1}{n+1} = 0$.

2. $U_n = \frac{(-1)^n}{n} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 0.$

3.8 Théorème de convergence sur les suites monotones

Théorème 3.8.1 Soient (U_n) une suite réelle et

$$A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$$

alors

1. Si (U_n) est **croissante** et **majorée** alors (U_n) est **convergente** vers $l = \sup A$ et $\inf A = U_0$ (premier terme).

2. Si (U_n) est **décroissante** et **minorée** alors (U_n) est **convergente** vers $l = \inf A$ et $\sup A = U_0$ (premier terme).

Preuve

Soit (U_n) une suite **croissante** et **majorée,** donc l'ensemble $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée par conséquent A admet une borne supérieure l.

$$\sup A = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq l \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, l - \varepsilon < U_{N_\varepsilon} \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < \underbrace{U_{N_\varepsilon} < U_n}_{U_n \text{ croissante}} \leq l < l + \varepsilon \\ \forall \varepsilon &> 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = l = \sup A. \end{aligned}$$

Exemple: $U_n = \frac{2}{n!}, n \in \mathbb{N}$. $A = \left\{\frac{2}{n!}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{n!} = \frac{2}{n!}\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = \frac{2}{n!}\left(\frac{-n}{n+1}\right) \leq 0$, donc (U_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est minorée.

(U_n) est **décroissante** et **minorée** alors (U_n) est **convergente** vers $0 = \inf A$.

3.9 Suites adjacentes

Définition 3.9.1 On dit que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si l'une d'elle est croissante et l'autre est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Théorème 3.9.1 Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.

Preuve

On pose $W_n = U_n - V_n$ alors $\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

On suppose que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante. Etudions la monotonie de W_n.

$W_{n+1} - W_n = U_{n+1} - V_{n+1} - (U_n - V_n) = \underbrace{(U_{n+1} - U_n)}_{\geq 0} - \underbrace{(V_{n+1} - V_n)}_{\leq 0} \geq 0.$

Alors (W_n) est une suite croissante et convergente vers 0 donc (W_n) est majorée par $0 \Rightarrow W_n \leq 0 \Rightarrow U_n \leq V_n$.

$U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq ...U_{n-1} \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq ... \leq V_2 \leq V_1 \leq V_0.$

On obtient (U_n) est croissante et majorée par $V_0 \Rightarrow$ convergente vers l.

(V_n) est décroissante et minorée par $U_0 \Rightarrow$ convergente vers l'.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n - \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \Leftrightarrow l - l' = 0 \Leftrightarrow l = l'$.

Exemple: $\begin{cases} U_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &\quad - \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} > 0 \Rightarrow (U_n) \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} + \frac{1}{n+2} - \left(U_n + \frac{1}{n+1}\right) = U_{n+1} - U_n + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{-n-2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \leq 0 \Rightarrow (V_n) \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc (U_n) et (V_n) sont adjacentes et convergentes vers la même limite.

3.10 Suite récurrentes

Définition3.10.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f(D) \subset D$. On appelle suite récurrente une suite (U_n) définie par la donnée du premier terme $U_0 \in D$ et la relation

$$U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Monotonie: On a $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - f(U_{n-1})$.

Donc l'étude de la monotonie de la suite (U_n) revient à celle de la fonction f.

Si f est croissante alors (U_n) est monotone, elle est croissante si $U_1 - U_0 \geq 0$, et décroissante si $U_1 - U_0 \leq 0$.

Si f est décroissante alors (U_n) n'est pas monotone car $U_{n+1} - U_n$ est alternativement positif et négatif.

Convergence

Supposons que f est continue sur D et croissante, si la suite (U_n) converge vers $l \in D$, cette limite vérifie $l = f(l)$.

Exemple.

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.
2. Etudier la monotonie de(U_n).
3. Déduire la convergence de (U_n) et déterminer sa limite.
4. Donner $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Solution: 1. Montrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.

Pour $n = 0, 0 \leq U_0 = 0 < 3$.

Supposons que $0 \leq U_n < 3$ et montrons $0 \leq U_{n+1} < 3$.

On a $0 \leq U_n < 3 \Rightarrow 6 \leq U_n + 6 < 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{U_n + 6} < 3$. d'où $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.

2. Monotonie de (U_n) :

On pose $f(x) = \sqrt{x+6}, 0 \leq x < 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0 \Rightarrow f$ est croissante ce qui donne que (U_n) est monotone.

$U_1 - U_0 = \sqrt{6} - 0 = \sqrt{6} > 0$ alors (U_n) est croissante.

3. On a (U_n) est **croissante** et **majorée** alors elle est convergente vers l donc $0 \leq l \leq 3$ et l vérifie $l = f(l)$

$l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{l+6} \Leftrightarrow l^2 = l + 6 \Leftrightarrow l^2 - l - 6 = 0, \Delta = 25$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ l_2 = \frac{1-5}{2} = -2 < 0 \text{ refusé car } l \geq 0. \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3.$

4. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

(U_n) est convergente et croissante alors

$$\begin{cases} \sup E = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3 \\ \inf E = U_0 = 0. \end{cases}$$

3.11 Suites de Cauchy

Définition 3.11.1 On dit que la suite (U_n) est une suite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon)$$

Proposition 3.11.1 Toute suite convergente est de Cauchy .

Preuve Soit

$$l = \lim_{n \to +\infty} U_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient p et q tels que $p > q \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| &= |U_p - l + l - U_q| \\ &\leq |U_p - l| + |l - U_q| \\ &\leq |U_p - l| + |U_q - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

d'où (U_n) est de Cauchy.

Théorème 3.11.1 (Critère de Cauchy)

Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente vers un nombre réel. On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

Remarque 3.11.1 Le critère de Cauchy est un critère de convergence permettant de reconnaître qu'une suite réelle est convergente sans avoir besoin de connaître sa limite.

Théorème 3.11.2

$$(U_n) \text{ converge dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow (U_n) \text{ de Cauchy.}$$

Remarque 3.11.2 Pour démontrer qu'une suite est divergente, il suffit de démontrer qu'elle n'est pas de Cauchy.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N \wedge |U_p - U_q| \geq \varepsilon).$$

Exemple.

1. $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos n}{3^k} = \frac{\cos n}{3^0} + \frac{\cos n}{3^1} + ... + \frac{\cos n}{3^n}, n \in \mathbb{N}$

Montrons que (U_n) est de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $p > q$

$$\begin{aligned}
|U_p - U_q| &= \left|\sum_{k=0}^{p} \frac{\cos n}{3^k} - \sum_{k=0}^{q} \frac{\cos n}{3^k}\right| \\
&= \left|\frac{\cos n}{3^0} + \frac{\cos n}{3^1} + ... + \frac{\cos n}{3^q} + \frac{\cos n}{3^{q+1}} + ... + \frac{\cos n}{3^p} - \left(\frac{\cos n}{3^0} + \frac{\cos n}{3^1} + ... + \frac{\cos n}{3^q}\right)\right| \\
&= \left|\frac{\cos n}{3^{q+1}} + \frac{\cos n}{3^{q+2}} + ... + \frac{\cos n}{3^p}\right| \\
&\leq \left|\frac{\cos n}{3^{q+1}}\right| + \left|\frac{\cos n}{3^{q+2}}\right| + ... + \left|\frac{\cos n}{3^p}\right| \\
&\leq \frac{1}{3^{q+1}} + \frac{1}{3^{q+2}} + ... + \frac{1}{3^p}, \text{ car } |\cos n| \leq 1. \\
&\leq \frac{1}{3^q} \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{p-q}}\right)}_{\text{somme d'une suite géométrique}} \\
&\leq \frac{1}{3^q}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{p-q}}{1-\frac{1}{3}}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{3^{q+1}} \frac{3}{2} \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{p-q}\right)}_{<1} \\
&\leq \frac{1}{3^q.2},
\end{aligned}$$

$\frac{1}{3^q.2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3^q} < 2\varepsilon \Rightarrow 3^q > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow q\ln 3 > \ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \Rightarrow q > \frac{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)}{\ln 3}$.

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)}{\ln 3}\right|\right] + 1$.

2. $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que (U_n) n'est pas de Cauchy

$$\exists ?\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N \wedge |U_p - U_q| \geq \varepsilon).$$

Soit $N \in \mathbb{N}, \exists p = 2N, q = N,$

$$\begin{aligned}
|U_p - U_q| &= |U_{2N} - U_N| \\
&= \left| \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N} \\ -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{N}\right) \end{array} \right| \\
&= \left| \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N} \right| \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + ... + \frac{1}{2N}}_{N \text{ fois}} \text{ car } N+1 \leq 2N, N+2 \leq 2N, ..., 2N \leq 2N \\
&\geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

3.12 Limite supérieure et limite inférieure

Théorème de Bolzano Weierstrass

Théorème 3.12.1 Toute suite bornée de nombres réels admet une sous suite convergente.

D'aprés le théorème de Bolzano Weierstrass, toute suite bornée admet des sous suites convergentes vers des limite finies. Notons L l'ensemble de ces limites, alors

Définition 3.12.1 On appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) de (U_n) la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de L. On notera

$$\overline{\lim} U_n = \lim_{n \to +\infty} \sup (U_n) = \sup L \text{ (resp. } \underline{\lim} U_n = \lim_{n \to +\infty} \inf (U_n) = \inf L.$$

Remarque 3.12.1 Pour que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ existe, il faut et il suffit que

$$\overline{\lim} U_n = \underline{\lim} U_n = \lim_{n \to +\infty} U_n$$

Exemple. $U_n = (-1)^n$ divergente car elle admet deux limites différentes, mais elle est bornée, $|U_n| \leq 1$.

$$\text{Les sous suites} \begin{cases} U_{2n} = 1 \to 1 \\ U_{2n+1} = -1 \to -1 \end{cases}, L = \{1, -1\} \text{ alors}$$

$$\overline{\lim} U_n = \sup L = 1$$

$$\underline{\lim} U_n = \inf L = -1.$$

3.13 Exercices

Exercice 1.

I. Déterminer la limite des suites numériques suivantes

$$1. U_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n},\ 2.\ U_n = \frac{n \sin n}{n^2+1},\ 3.\ U_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n},\ 4.\ U_n = n^2 a^{-\sqrt{n}}, a \in \mathbb{R}_+^*$$

$$5.\ U_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n},\ 6.\ U_n = (n+1)^{\frac{1}{\ln n}},\ 7.\ U_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

II. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}, \lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$$

Exercice 2.

I. Soit (U_n) une suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$.

2. Etudier la monotonie de (U_n).

3. Déduire la convergence de (U_n) et calculer sa limite.

4. Déterminer $\sup E, \inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

II. Soit (U_n) une suite définie par

$$\begin{cases} 0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ U_{n+1} = U_n - 2U_n^3, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Etudier la monotonie de (U_n).

3. Déduire la convergence de (U_n) et calculer sa limite.

4. Déterminer $\sup E, \inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

III. Soit la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < 4$.

2. Etudier la monotonie de(U_n).

3. Déduire la convergence de (U_n) et déterminer sa limite.

4. Donner $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3.

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b, a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3. Soient U_0 et V_0 des réels strictement positifs avec $U_0 < V_0$. On définit deux suites (U_n) et (V_n) de la façon suivantes:

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}, V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

a) Montrer que $U_n \leq V_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.

c) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes vers la même limite.

Exercice 4.

1. Montrer que la suite $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}, 0 < k < 1$ est une suite de Cauchy.

2. Montrer que la suite $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, n'est pas une suite de Cauchy.

Solutions

Exercice 1.

I. Calcule de limites.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{\sqrt{n}}{n}\right) = +\infty.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\sin n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{\to 0} \underbrace{\sin n}_{\textit{bornée}} = 0.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{(-1)^n}_{\textit{bornée}} = 0.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a^{-\sqrt{n}}, a>0.$

Pour $a=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a^{-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty.$

Pour $a\neq 1$.

On calcule d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(n^2 a^{-\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\ln n + -\sqrt{n}\ln a = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(2\underbrace{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}_{\to 0} + \ln a\right) =$

$$\begin{cases} +\infty, \text{ si } 0<a<1 \\ -\infty, \text{ si } a>1 \end{cases}.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a^{-\sqrt{n}} = \begin{cases} +\infty, \text{ si } 0<a\leq 1 \\ 0, \text{ si } a>1 \end{cases}.$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1} = 3$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0, \left(0<\frac{2}{3}<1\right).$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{\ln n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln\left((n+1)^{\frac{1}{\ln n}}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln n}\ln(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln n}\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln n}\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{1+\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}_{\to 0}} = e.$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$. On utilise le théorème des trois suites.

On a $n^2\leq k\leq (n+1)^2 \Rightarrow n\leq\sqrt{k}\leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n}, \forall k, n^2\leq k\leq (n+1)^2$

D'où $\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{n+1} \le \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{n} \Leftrightarrow \left(\underbrace{(n+1)^2 - n^2 + 1}_{nombre\ de\ termes}\right) \frac{1}{n+1} \le \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \left(\underbrace{(n+1)^2 - n^2 + 1}_{nombre\ de\ termes}\right) \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2n+2}{n+1}}_{\to 2} \le \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \underbrace{\frac{2n+2}{n}}_{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

II. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n+3-(6n-2)}{3(3n-1)}\right| = \left|\frac{5}{3(3n-1)}\right| = \frac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} + 1\right).$

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} + 1\right)\right] + 1$.

Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N_A \Rightarrow e^n > A$$

Soit $A > 0, e^n > A \Leftrightarrow n > \ln A$.

Il suffit de prendre $N_A = [|\ln A|] + 1$.

Exercice 2.

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$. Montrons par recurrence.

Pour $n = 0, U_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < U_0 < 1$.

Supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$.

On a $U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n}$.

$0 < U_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 2U_n < 2 \Leftrightarrow 1 < 1 + 2U_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{1+2U_n} < 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+2U_n} < 1$.

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$.

2. La monotonie de (U_n).

$1^{ère}$ méthode:

$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{1+2U_n} - U_n = \frac{3Un-U_n-2U_n^2}{1+2U_n} = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n} > 0$ car $0 < U_n < 1$, ce qui donne (U_n) est croissante.

$2^{ème}$ méthode:

Posons $f(x) = \frac{3x}{1+2x} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+2x}, 0 < x < 1$.

$f\prime(x) = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0 \Rightarrow (U_n)$ monotone.

$U_1 - U_0 = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow (U_n)$ croissante.

3. Déduire que (U_n) est convergente.

Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente vers la borne supérieure.

Calculons la limite: (U_n) est convergente vers l, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l \Leftrightarrow l = \frac{3l}{1+2l} \Leftrightarrow l+2l^2 = 3l \Leftrightarrow 2l^2-2l = 0 \Leftrightarrow 2l(l-1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} l = 0 \text{ refusée car } (U_n) \text{ est croissante(converge vers la borne supérieure).} \\ \vee l = 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

4. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Puisque (U_n) est convergente et croissante alors

$$\begin{aligned} \sup E &= \lim_{n\to+\infty} U_n = 1. \\ \inf E &= U_0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Remarque 1 est un minorant pour E mais $\frac{1}{2}$ est le plus gand des minorants de E.

II.

$$\begin{cases} 0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ U_{n+1} = U_n - 2U_n^3, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$, montrons par recurrence.

Pour $n = 1, 0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ vraie.

Supposons que $0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et montrons que $0 < U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a $U_{n+1} = U_n - 2U_n^3 = U_n\left(1 - 2U_n^2\right)$ et

$0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < U_n^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < -2U_n^2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 - 2U_n^2 < 1 \\ \text{et} \\ 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow 0 < U_n\left(1 - 2U_n^2\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}.1 \Rightarrow 0 < U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. La monotonie de (U_n).

$1^{\text{ère}}$ méthode:

$U_{n+1} - U_n = U_n - 2U_n^3 - U_n = -2U_n^3 < 0$ (car $U_n > 0$) $\Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

3. Déduire que (U_n) est convergente.

Puisque (U_n) est décroissante et minorée alors elle est convergente vers la borne inférieure.

Calculons la limite: (U_n) est convergente vers l, alors

$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = l \Leftrightarrow l = l - 2l^3 \Rightarrow l = 0.$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$

4. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Puisque (U_n) est convergente et décroissante alors

$$\begin{aligned}\inf E &= \lim_{n\to+\infty} U_n = 0.\\ \sup E &= U_1/0 < U_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}.0\end{aligned}$$

III.

Exercice 2.

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < 4$ par recurrence.

Pour $n = 0, 1 < U_0 = 2 < 4$ vraie.

Supposons que $1 < U_n < 4$ et montrons que $1 < U_{n+1} < 4$.

On a $U_{n+1} = \frac{5U_n-4}{U_n} = 5 - \frac{4}{U_n}$ et on a aussi $1 < U_n < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{U_n} < 1 \Leftrightarrow -4 < \frac{-4}{U_n} < -1$

$\Leftrightarrow 1 < 5 - \frac{4}{U_n} < 4 \Leftrightarrow 1 < U_{n+1} < 4.$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < 4$.

2. Monotonie:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{5U_n - 4}{U_n} - U_n \\ &= \frac{5U_n - 4 - U_n^2}{U_n} \end{aligned}$$

$-x^2 + 5x - 4 = 0, \Delta = 9, x_1 = 1, x_2 = 4$, si $1 < x < 4, -x^2 + 5x - 4 \geq 0$.

D'où pour $x = U_n, 5U_n - 4 - U_n^2 \geq 0$, car $1 < U_n < 4$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{\left(5U_n - 4 - U_n^2\right) \geq 0}{U_n \geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne (U_n) est croissante.

3. Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente vers l.

Calculons la limite: (U_n) est convergente vers l, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l \Leftrightarrow l = \frac{5l-4}{l} \Leftrightarrow l^2 = 5l - 4 \Leftrightarrow -l^2 + 5l - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$-(l-1)(l-4) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} l = 1 \text{ refusée car } (U_n) \text{ est croissante(converge vers la borne supérieure).} \\ \text{ou} \\ l = 4 \end{cases}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 4.$$

4. $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Puisque (U_n) est convergente et croissante alors

$$\begin{aligned} \sup E &= \lim_{n\to+\infty} U_n = 4. \\ \inf E &= U_0 = 1. \end{aligned}$$

Exercice 3. $a, b > 0$.

On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

On a $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$$

2. $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b, a \leq \sqrt{ab} \leq b$?

$a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{R}$ est totalement ordonné alors soit $a \leq b$ ou $a \geq b$.

Supposons que $a \leq b$.

On a $\left.\begin{array}{l} \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \\ \\ \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$

De même $\left.\begin{array}{l} 0 < \sqrt{a} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \\ \\ 0 < \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq b.$

3. U_0, V_0 avec $U_0 < V_0, U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}, V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$. Montrons par recurrence.

Pour $n = 0, U_0 < V_0$ vraie.

On remarque que $U_n > 0$ et $V_n > 0$. (on peut la démontrer par recurrence).

Supposons que $U_n \leq V_n$ et montrons que $U_{n+1} \leq V_{n+1}$.

$$U_{n+1} = \underbrace{\sqrt{U_n V_n} \leq \frac{U_n + V_n}{2}}_{D'après\ 1.} = V_{n+1},$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$.

b) Monotonie

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n V_n} - U_n \geq 0$ d'aprés 2. $a = U_n, b = V_n \left(U_n \leq \sqrt{U_n V_n} \leq V_n\right)$. Ce qui donne que (U_n) est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n+V_n}{2} - V_n \leq 0$ d'aprés 2. $a = U_n, b = V_n \left(U_n \leq \frac{U_n+V_n}{2} \leq V_n\right)$. Ce qui donne que (V_n) est décroissante.

c) (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante alors

$$U_0 \leq U_1 \leq ... \leq U_{n-1} \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq ... \leq V_1 \leq V_0$$

On a (U_n) est croissante et majorée$\Rightarrow$convergente vers l.

(V_n) est décroissante et minorée$\Rightarrow$convergente vers l'.

et $\left\{\begin{array}{l} U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \Rightarrow l = \sqrt{ll'} \\ \\ V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \Rightarrow l' = \frac{l+l'}{2} \end{array}\right. . \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} l^2 = ll' \\ \\ 2l' = l + l' \end{array}\right. \Rightarrow l = l'.$

Exercice 4.

1. $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}, 0 < k < 1$ est une suite de Cauchy$\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}; (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|U_p - U_q| = |k^p - k^q| = \left|k^q \left(k^{p-q} - 1\right)\right| < k^q \left|k^{p-q} - 1\right|$$

On a $0 < k < 1, p - q > 0 \Rightarrow 0 < k^{p-q} < 1 \Rightarrow - - 1 < k^{p-q} - 1 < 0 \Rightarrow |k^{p-q} - 1| < 1$,

donc

$$|U_p - U_q| = \left|k^q \left(k^{p-q} - 1\right)\right| < k^q < \varepsilon \Rightarrow q\underbrace{\ln k}_{<0} < \ln\varepsilon \Rightarrow q > \frac{\ln\varepsilon}{\ln k}.$$

Il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln k}\right|\right] + 1$.

2. $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, n'est pas une suite de Cauchy$\Leftrightarrow$

$$\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}; (p > q \geq N \text{ et } |U_p - U_q| \geq \varepsilon).$$

Posons $p = 2N, q = N$.

$$|U_{2N} - U_N| = |\ln 2N - \ln N| = |\ln 2 + \ln N - \ln N| = |\ln 2| = \ln 2 = \varepsilon$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \ln 2$.

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Généralités

1. **Définition 4.1.1** On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute application de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$. On notera

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

x s'appelle l'antécédent et $f(x)$ est l'image de x par f. On notera

$$f(E) = \{f(x) \ / \ x \in E\}.$$

2. **Graphe d'une fonction réelle (ou courbe représentative de f)**

On appelle graphe d'une fonction $f : E \rightarrow F$ toute partie $\Gamma(f)$ du produit cartésien $E \times F$ telle que

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) / x \in E\}.$$

3. Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de $x \in E$ pour lesquelles la fonction f est bien définie. On note par D_f.

$$D_f = \{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Exemples

1. $f(x) = e^x, D_f = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R}^*$.
3. $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$,

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}/x + 2 > 0 \text{ et } \ln(x+2) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x > -2 \text{ et } x + 2 \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x > -2 \text{ et } x \neq -1\} \\ &=]-2, -1[\cup]-1, +\infty[. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \tan x$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ \cos x \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ / x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

4. Parité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I symetrique par rapport à 0.

On dit que f est paire si $\forall x \in I; f(-x) = f(x)$.

On dit que f est impaire si $\forall x \in I; f(-x) = -f(x)$.

Remarque 4.1.1

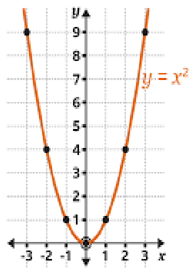
1. Si f est paire alors son graphe est symetrique par rapport à l'axe des ordonnées.

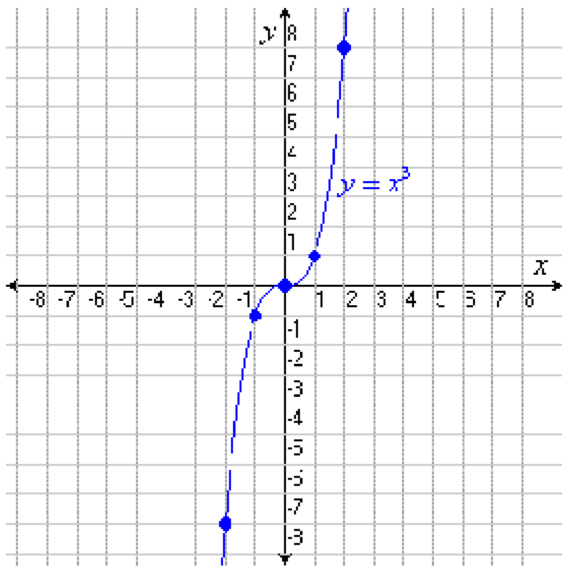
2. Si f est impaire alors son graphe est symetrique par rapport à l'origine.

Exemples.

$f(x) = x^2$ est paire car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

$f(x) = x^3$ est impaire car $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.





5. Périodicité d'une fonction

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. T est appelé période de f.

Remarque 4.1.2 Si T est une période de f alors tout nombre de la forme $kT, k \in \mathbb{N}^*$ est aussi une période de f.

Exemples.

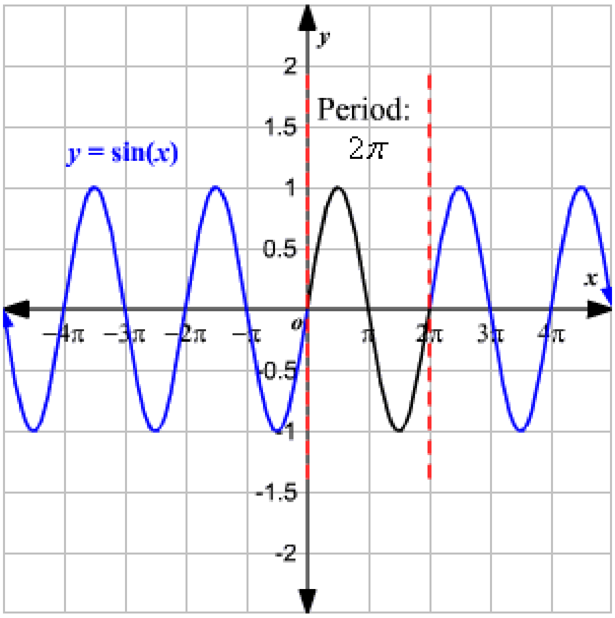
1. $f(x) = \sin x, T = 2\pi.$

2. $f(x) = x - [x], T = 1$ car $f(x+1) = x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = x+[x] = f(x).$

3. $f(x) = \tan x, T = \pi$ car $f(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$

Remarque 4.1.3 Si f est périodique alors il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T et tracer le graphe. Le graphe complet se déduit du graphe précédent par des translations de valeurs $(kT)\,, k \in \mathbb{Z}$.

Par exemple le graphe de la fonction $f(x) = \sin x$



4.2 Fonctions bornées et fonctions monotones

Fonctions bornées

Définitin 4.2.1 Soit $f : E \to F$. On dira que

1. f est majorée si l'ensemble $f(E)$ est majorée, c'est à dire

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E / f(x) \leq M.$$

2. f est minorée si l'ensemble $f(E)$ est minorée, c'est à dire

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E / f(x) \geq m.$$

3. f est bornée si elle est majorée et minorée (l'ensemble $f(E)$ est borrée), c'est à dire

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E / |f(x)| \leq \alpha.$$

Exemples.

1. $f(x) = \sin x, -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow f$ bornée.
2. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in]0,1]$, n'est pas bornée mais elle est minorée par 0.

Remarque 3.2.1

Si f est majorée alors elle admet une borne supérieure

$$\sup_{x\in E} f(x) = \sup f(E) = \sup \{f(x) / x \in E\}.$$

Si f est minorée alors elle admet une borne inférieure

$$\inf_{x\in E} f(x) = \inf f(E) = \inf \{f(x) / x \in E\}.$$

Fonctions monotones

Définitin 4.2.2 Soit $f : E \to F$. On dira que

1. f est croissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. f est strictement croissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

3. f est décroissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

4. f est strictement décroissante dans E si

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

4.3 Opérations sur les fonctions réelles

Soient f et g deux fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. $(\lambda f)(x) = \lambda.f(x), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(fg)(x) = f(x).g(x)$.
4. $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} (f \neq 0)$.

4.4 Limite d'une fonction

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition 4.4.1 On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0) a une limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $f \underset{x \to x_0}{\to} l$.

c'est à dire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exemples. 1. $f(x) = 2x + 1$

$$\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 2| < \eta \Rightarrow |2x + 1 - 5| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|2x - 4| = |2(x - 2)| = 2|(x - 2)| < 2\eta = \varepsilon \Rightarrow \eta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$.

2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 mais admet une limite $l = 1$ en 0.

Remarque 4.4.1 1. Pour prouver que f n'admet pas une limite l quand $x \to x_0$, on peut prendre la négation, c'est à dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon.$$

2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors on n'a pas toujours $f(x_0) = l$ ou $f(x_0)$ existe, par exemple

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 2, \text{ si } x = 0 \end{cases},$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 2 = f(0)$.

Unicité de la limite

Théorème 4.4.1 Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.

Preuve

Supposons que la fonction f admet deux limites l et l' au point x_0, alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta_1 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l' \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta_2 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow \left|f(x) - l'\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|l - l'\right| &= \left|l - f(x) + f(x) - l'\right| \\
&\leq |l - f(x)| + \left|f(x) - l'\right| \\
&\leq |f(x) - l| + \left|f(x) - l'\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

On a obtenu $\forall\varepsilon > 0, |l - l'| < \varepsilon \Leftrightarrow l - l' = 0 \Leftrightarrow l = l'$.

Limite à droite et limite à gauche

Définition 4.4.2

1. On dit que f admet une limite à droite au point x_0 si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On notera $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$.

2. On dit que f admet une limite à gauche au point x_0 si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, -\eta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On notera $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Exemple.

$$f(x) = 1 + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x < 0 \end{cases},$$

on a $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = 2$, $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = 0$.

Remarque 4.4.2

.Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ existe alors $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$.

. Inversement, si $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ existent et sont égales alors la limite de f existe, elle est égale à la valeur commune.

Limites infinies

$$\begin{aligned}
1. \lim_{x \to +\infty} f(x) &= l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \\
2. \lim_{x \to -\infty} f(x) &= l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \\
3. \lim_{x \to x_0} f(x) &= +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A. \\
4. \lim_{x \to x_0} f(x) &= -\infty \Leftrightarrow \forall B < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < B. \\
5. \lim_{x \to +\infty} f(x) &= +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \Rightarrow f(x) > A. \\
6. \lim_{x \to +\infty} f(x) &= -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \Rightarrow f(x) < A. \\
7. \lim_{x \to -\infty} f(x) &= +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x < B \Rightarrow f(x) > A. \\
8. \lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x < B \Rightarrow f(x) < A.
\end{aligned}$$

Exemple. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - 1| < \eta \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > A,$$

Soit $A > 0$, $\frac{1}{(x-1)^2} > A \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{A} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{A}} = \eta$, il suffit de prendre $\eta = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

Théorème sur les limites

Théorème 4.4.2 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in [a,b]$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n, x_n \in [a,b] \ / \ \underset{n \to +\infty}{x_n \to x_0} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l.$$

Preuve

($\Rightarrow$) On a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a,b], |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

et on a

$$x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon'.$$

Pour $\varepsilon' = \eta$, on a $|x_n - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

($\Leftarrow$) Par l'absurde. Supposons que $x_n \to x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq l$.

$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in [a,b], |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$, en particulier pour $\eta = \frac{1}{n} \Rightarrow$ $\forall n \geq 1, \exists x_n \in [a,b]; |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$,

or $\frac{1}{n} - x_0 < x_n < \frac{1}{n} + x_0$, c'est à dire $x_n \to x_0$, mais $f(x_n)$ ne tend pas vers l contradiction.

Remarque 4.4.3 On peut utiliser ce théorème pour démontrer la non existance de la limite d'une fonction.

S'il existe deux suites $(x_n), (y_n)$ qui ont la même limite mais $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n)$.

S'il existe une suite $(x_n) / x_n \to x_0$ mais $f(x_n)$ n'admet pas de limite.

Exemple.

1. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$, montrons que f n'admet pas delimite en 0.

Posons $\left.\begin{array}{l} x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0 \text{ et } f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1. \\ y_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \text{ et } f(y_n) = \cos((2n+1)\pi) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) \Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'exite pas.

2. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, montrons que f n'admet pas delimite en 0.

Posons $x_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{(2n+1)\pi} \to 0$ et $f(x_n) = \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$ qui admet deux limites 1 et -1 alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'exite pas.

Proposition 4.4.1 Si f admet une limite en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0.

Preuve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

donc pour $\varepsilon = 1$ (par exemple), $\exists\eta_1 > 0, \forall \in I, |x - x_0 < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < 1,$ d'où $|\forall x \in]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[\Rightarrow \underbrace{l-1}_{m} < f(x) < \underbrace{l+1}_{M} \Rightarrow f$ est bornée dans $]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[$ qui est un voisinage de x_0.

Remarque 4.4.4 La réciproque n'est pas vraie. En effet, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ est bornée mais elle n'admet pas une limite en 0 (exemple précédent).

4.5 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et admettant des limites finies l et l' au point x_0. Alors:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l + l'$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l, \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = l.l'$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}, l' \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.

Limite et relation d'ordre

Théorème 4.5.1 Soient $x_0 \in E$ et f, g, h trois fonctions définies sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \alpha > 0$.

1. $f(x) < g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \text{et } f(x) \leq g(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$

3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\ \text{et } g(x) \leq f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty.$

4. $\left.\begin{array}{c}f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \text{et } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l.$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et g est bornée au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = 0.$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et g est bornée$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \infty.$

Forme indéterminées

Lorsque les limites ne sont pas finies, On a quatre formes indéterminées lorsque $x \to x_0$.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, $f+g$ se présente sous la forme indéterminée

(F.I.) $+\infty - \infty$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\frac{f}{g}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $\frac{f}{g}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $f.g$ se présente sous la forme indéterminée $0.\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $(g)^f$ se présente sous la forme indéterminée ∞^0

Lorsque les limites sont finies, On a une formes indéterminée lorsque $x \to x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $(f)^g$ se présente sous la forme indéterminée 1^0.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $(f)^g$ se présente sous la forme indéterminée 0^0

On résout le problème par des transformations élémentaires.

Exemples.

$\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^3-a^3} = \frac{0}{0}$, F.I.

On a $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

et $\quad x^3 - a^3 = (x-a)\left(x^2 + ax + a^2\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3} &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(x+a)}{(x^2+ax+a^2)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{2a}{3a^2}=\frac{2}{3a}.\end{aligned}$$

4.6 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point (notation de Landau)

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage du point x_0 (sauf peut être en x_0).

Définition 4.6.1 On dit que la fonction f est négligeable devant g lorsque $x \to x_0$ et on écrit $f = o(g)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|)$$

ou bien pour $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \varepsilon).$$

c'est à dire

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Remarque 4.6.1

1. $f = o(g) \Leftrightarrow f(x) = h(x)\, g(x) / h(x) \to 0$, quand $x \to x_0$.

2. Si $g(x) = 1, f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

3. De la même façon, on définit $f = o(g)$ au voisinage de ∞.

Exemples.

1. $x^4 = o(x)$ en 0 car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x} = 0$.

2. $x = o\left(x^4\right)$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^4} = 0.$

3. $x = o\left(e^x\right)$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

Définition 4.6.2. On dit que la fonction f est dominée par g lorsque $x \to x_0$ et on écrit $f = O(g)$ si

$$\exists k > 0, \exists \delta > 0, \forall x \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq k\, |g(x)|\right),$$

c'est à dire

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \text{ bornée au voisinage de } x_0.$$

Remarque 4.6.2

1. Pour démontrer que $f = O(g)$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,(l \in \mathbb{R})$. (car si elle admet une limite finie, elle est bornée au voisinage de x_0 (proposition 4.4.1)).

2. $f = O(1)$ en $x_0 \Rightarrow f$ est bornée au voisinage de x_0.

3. Même définition pour $x_0 = \infty$.

Exemples.

1. $x \sin x = O(x)$ en $+\infty$ car $\left|\frac{x \sin x}{x}\right| = |\sin x| \leq 1$ i.e. bornée.

2. $\tan x = O(2x)$ en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\tan x}{2x}$ bornée au voisinage de 0.

Les symboles o et O s'appellent notation de Landau.

4.6.1 Fonctions équivalentes

Définition 4.6.3 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.

On dit que f est équivalente à g lorsque $x \to x_0$ et on note $f \overset{x_0}{\sim} g$ si

$$f - g = o(f),\, x \to x_0\ .$$

ou encore $f(x) = g(x)\, U(x)$ telle que $U(x) \to 1$ quand $x \to x_0$.

Remarque 4.6.3 Si f et g ne sont pas nulles au voisinage de x_0 alors

$$1. f \overset{x_0}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$2. f \overset{x_0}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x) / \varepsilon(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to x_0.$$

3. On peut définir l'équivalence au voisinage de ∞ de la même façon.

Exemples.

1. $\ln(1+x) \overset{0}{\sim} x$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
2. $\sin x \overset{0}{\sim} x$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
3. $1 - \cos x \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1.$
4. $e^x - 1 \overset{0}{\sim} x$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Opérations sur les notations de Landau

a) o et O.

1. $f = o(g) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f = O(g)$, car $f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ bornée.
2. $f = O(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g) \Leftrightarrow O(g) + O(g) = O(g).$
3. $f = o(g), h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g) \Leftrightarrow o(g) + o(g) = o(g).$
4. $f = o(g), h = o(1) \Rightarrow f.h = o(g) \Leftrightarrow o(g).o(1) = o(g).$
5. $f = o(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g) \Leftrightarrow o(g) + O(g) = O(g).$
6. $f = o(g), h = O(1) \Rightarrow f.h = O(g) \Leftrightarrow o(g) O(1) = O(g).$
7. $f = o(g), h = O(f) \Rightarrow h = o(g) \Leftrightarrow O(o(g)) = o(g).$
8. $f = O(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g) \Leftrightarrow O(o(g)) = o(g).$

b) $\sim$ en x_0.

1. $\left.\begin{array}{l} f_1 \overset{x_0}{\sim} g_1 \\ \\ f_2 \overset{x_0}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 f_2 \overset{x_0}{\sim} g_1 g_2.$

2. $\left.\begin{array}{l} f_1 \overset{x_0}{\sim} g_1 \\ \\ f_2 \overset{x_0}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \overset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}, f_2 \neq 0, g_2 \neq 0.$

3. $\left.\begin{array}{l} f_1 \overset{x_0}{\sim} g_1 \\ \\ f_2 \overset{x_0}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \not\Rightarrow f_1 + f_2 \overset{x_0}{\sim} g_1 + g_2.$

Voici un contre exemple

$\left.\begin{array}{r} \cos x \overset{0}{\sim} x+1 \\ \\ -1 \overset{0}{\sim} -1 \end{array}\right\}$ mais $\cos x - 1 \overset{0}{\nsim} x$, car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$

Corollaire 4.6.1 Dans le calcule des limites, on peut remplacer une fonction par une fonction équivalente dans le produit et la division seulement.

Ceci n'est pas vrai pour la somme.

Exemple:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x-1)(\tan x)^2}{x(1-cox)} = \frac{0}{0}$ F.I.

On a $e^x - 1 \overset{0}{\sim} x$ et $\tan x \overset{0}{\sim} x$ et $1 - \cos x \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)(\tan x)^2}{x(1-cox)} = \lim_{x\to 0} \frac{x.x^2}{x.\frac{x^2}{2}} = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\left(\sqrt{\cos x}+1\right)\ln\left(1+(\tan x)^2\right)} = \frac{0}{0}$ F.I.

On a $\cos x - 1 \overset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $\ln\left(1+(\tan x)^2\right) \overset{0}{\sim} (\tan x)^2 \overset{0}{\sim} x^2$.

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{(\sqrt{\cos x}+1)\ln\left(1+(\tan x)^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{(\sqrt{\cos x}+1)\,x^2} = \frac{1}{4}.$$

4.7 Fonctions continues

Continuité en un point

Définition 4.7.1 Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I\left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$$

où le réel η dépend de x_0 et de ε.

Exemple.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

$D_f = \mathbb{R}, x_0 = 0 \in D_f$.

Etude de la continuité de f en 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{Bornée} = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

Continuité à gauche et à droite d'un point

Définition 4.7.2 On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I\left(0 \leq (x - x_0) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$$

Définition 4.7.3 De même, on dira que la fonction f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I\left(-\eta < (x - x_0) \leq 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$$

Définition 4.7.4 La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

C'est à dire

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exemple: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, .

Etude de la continuité de f en 0, on a $f(0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à droite en } 0. \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{x^2}{-x} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} -x = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à gauche en } 0. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = f(0)$.

D'où f est cotinue en 0.

Proposition 4.7.1 Soit f une fonction défini_e de $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est cotinue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset I / x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x_0)$.

Exemple.

1.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Continuité en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} \nexists$ car pour $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ et $\cos x_n = \cos n\pi = (-1)^n \Rightarrow f(x_n)$ n'admet pas de limite alors f n'est pas continue en 0.

2. $f(x) = [x], D_f = \mathbb{R}$.

Continuité en $x_0 = k \in \mathbb{Z}, f(k) = [k] = k$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to k}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to k}} [x] = k \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to k}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to k}} [x] = k - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ n'est pas continue en } k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ \\ 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Continuité en $x_0 = 0, f(0) = 0^2 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x^2 = 0 = f(0) \ \Rightarrow f \text{ est continue à droite en } 0. \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} 1 = 1 \neq 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ n'est continue à gauche en } 0. \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ n'estpas}$$

continue en 0.

Continuité sur un intervalle:

Définition 4.7.5 On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Notation 4.7.1 On note l'ensemble des fonctions continues sur I par $C(I)$.

4.8 Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 alors:

1. $f + g$ est continue en x_0.

2. (λf) est continue en $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. $f.g$ est continue en x_0.

4. $\frac{f}{g}$ est continue en x_0, si $g(x_0) \neq 0$.

5. $|f|$ est continue en x_0.

6. Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ telles que f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Preuve

6. f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$.

g est continue en $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0, \forall y \in J \left(|y - y_0| < \eta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon\right)$.

Pour $\varepsilon = \eta' > 0$, on associe un $\eta_{\eta'} > 0 / \forall x \in I, |x - x_0| < \eta_{\eta'} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta' \Rightarrow$ $|y - y_0| < \eta'$

Comme $x \in I$, alors $f(x) \in J$, donc

$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta_{\eta'} > 0 \forall x \in I,$

$\left(|x - x_0| < \eta_{\eta'} \Rightarrow |y - y_0| < \eta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon' \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon'\right).$

Par suite $g \circ f$ est continue en x_0.

4.9 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

Théorème 4.9.1 Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est une fonction bornée sur $[a, b]$.

Théorème 4.9.2. Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ atteint au moins une fois ses bornes, autrement dit

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] / f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x), f(x_2) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Preuve. f continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ est une fonction bornée, alors $\sup f(x)$ et $\inf f(x)$ existent.

Montrons qu'ils existent $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b] / f(x_1) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x), f(x_2) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Par l'absurde on pose $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ alors $\forall x \in [a, b], f(x) < M$.

La fonction $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ continue sur $[a, b]$ donc bornée, soit alors $C = \sup\limits_{x \in [a,b]} g(x), C > 0$ car $g > 0$.

$\forall x \in [a, b], g(x) \leq C \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], \frac{1}{M - f(x)} \leq C \Rightarrow f(x) \leq \underbrace{M - \frac{1}{C}}_{\text{majorant} < M}$ contradiction car $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ est le plus petit des majorants.

Théorème 4.9.3 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in \left]a,b\right[\text{ tel que } f(c) = 0.$$

Exemple. $f(x) = x^5 - 3x + 1.$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0,1[$.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [0,1] \text{ car c'est un polynôme} \\ f(0) = 1.f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in \left]0,1\right[\text{ tel que } f(c) = 0.$$

Théorème 4.9.4. (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, I étant un intervalle quelconque. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I tels que $x_1 < x_2$ alors $\forall y \in \left]f(x_1), f(x_2)\right[, \exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[, y = f(x_0)$.

Preuve.

Soient $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ et $y \in \left]f(x_1), f(x_2)\right[$.

On pose $\begin{array}{rccc} g: & [x_1, x_2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = f(x) - y \end{array}$, g est continue sur $[x_1, x_2]$ car somme de fonctions continues.

$g(x_1) = f(x_1) - y < 0$ car $f(x_1) < y < f(x_2)$.

$g(x_2) = f(x_2) - y > 0$ car $f(x_1) < y < f(x_2)$.

D'aprés le théorème 3, $\exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[/ g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - y = 0 \Leftrightarrow y = f(x_0)$.

Résultat 4.9.1

1. L'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné.

$f : \; [a,b] \;\to\; \mathbb{R}$ continue, $f([a,b]) = [m, M], m, M \in \mathbb{R}$.

2. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, en général, $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$.

3. $f(]a,b[)$ n'est pas toujours ouvert, borné.

4. Si f est continue et monotone sur I. Alors

. $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ si f est croissante.

. $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ si f est décroissante.

. $f([a,+\infty[) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ si f est croissante.

. $f([a,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)\right]$ si f est décroissante.

. $f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$ si f est croissante.

. $f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$ si f est décroissante.

4.10 Prolongement par continuité

Définition 4.10.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf peut être en x_0 telle que f admet une limite finie l au point x_0, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l, \text{ si } x = x_0 \end{cases}.$$

est continue sur I, elle s'appelle le prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple.

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}, D_f = \mathbb{R}^*$, on a $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ alors f admet un prolongement par continuité en 0 défini par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

2. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x-1}\right), 1 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to1} \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \nexists$ alors f n'admet pas un prolongement par continuité en 1.

4.11 Contnuité uniforme d'une fonction sur un intervalle

Définition 4.11.1 Une fonction f définie sur un intervalle I est dite uniformement continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x', x'' \in I \left(\left| x' - x'' \right| < \eta \Rightarrow \left| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right| < \varepsilon \right).$$

η ne dépend que de ε seulement.

Remarque 4.11.1

1. Toute fonction uniformement continue sur I est une fonction continue sur I. La réciproque est fausse.

2. La continuité uniforme est la continuité sur tout l'intervalle, alors que la continuité sur l'intervalle I est la continuité en tout point de l'intervalle (η dépend de ε et x_0).

Exemple.

1. $f(x) = x^2$ continue uniformement sur $]0,1]$, en effet,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x', x'' \in \left]0,1\right]; \left| x' - x'' \right| < \eta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left| \left(x'\right)^2 - \left(x''\right)^2 \right| = \left| \left(x' - x''\right)\left(x' + x''\right) \right| \\ = \left| x' - x'' \right| \left| x' + x'' \right| \\ \leq 2\left| x' - x'' \right| < \varepsilon, \\ \text{car } 0 < x' \leq 1 \text{ et } 0 < x'' \leq 1, 0 < x' + x'' \leq 2 \end{array} \right.$$

Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$.

2. $f(x) = x^2$ continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas uniformement continue sur $[0, +\infty[$, en effet, pour montrer que f n'est pas uniformement continue sur $[0, +\infty[$, il faut montrer que la proposition

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x', x'' \in [0, +\infty[\left(\left| x' - x'' \right| < \eta \text{ et } \left| \left(x'\right)^2 - \left(x''\right)^2 \right| \geq \varepsilon \right)$$

est vraie.

Pour $\varepsilon = 2$ et pour $\eta > 0, \exists x' = n, \exists x'' = n + \frac{1}{n} \in [0, +\infty[, |x' - x''| = \frac{1}{n} < \eta$

et $\left|n^2-\left(n^2+\frac{1}{n^2}+2\right)\right| = \left|-\frac{1}{n^2}-2\right| = \frac{1}{n^2}+2>2=\varepsilon$ est vraie car pour tout réel positif η, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0}<\eta$.

3. $f(x)=\ln x$ continue sur $]0,+\infty[$ mais n'est pas uniformement continue sur $]0,+\infty[$, en effet, f n'est pas uniformement continue sur $]0,+\infty[$si et seulement si

$$\exists\varepsilon>0, \forall\eta>0, \exists x', x'' \in \left]0,+\infty\right[\left(\left|x'-x''\right|<\eta \text{ et } \left|\ln x'-\ln x''\right| \geq \varepsilon\right).$$

Pour $\varepsilon=\ln 2$ et pour tout $\eta>0, \exists x'=\frac{\eta}{2}, x''=\eta \in \left]0,+\infty\right[$.

$|x'-x''|=\frac{\eta}{2}<\eta$ et $\left|\ln\frac{\eta}{2}-\ln\eta\right| = |-\ln 2| = \ln 2=\varepsilon$. D'où f n'est pas uniformement continue sur $]0,+\infty[$.

Théorème 4.11.1 (Théorème de Heine)

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé bornée $[a,b]$ alors

$$f \text{ est continue sur } [a,b] \Leftrightarrow f \text{ est uniformement continue sur } [a,b].$$

Fonctions Lipschitzienne:

Définition 4.11.2 Soit $f: I \to \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne, si

$$\exists k \geq 0, \forall x', x'' \in I; \left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right| \leq k\left|x'-x''\right|.$$

Définition 4.11.3 Soit $f: I \to \mathbb{R}$ est dite contractante si elle est Lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.

Théorème 4.11.2 Toute fonction Lipschitzienne sur I est uniformement continue sur I.

Preuve

$$\exists k \geq 0, \left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right| \leq k\left|x'-x''\right| < k\eta=\varepsilon.$$

Il suffit de prendre $\eta=\frac{\varepsilon}{k}$.

Exemple $\begin{array}{cccc} f: & [1,+\infty[& :\to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array},$

$|f(x') - f(x'')| = \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \left|\frac{x'-x''}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\right| \leq \frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}} \leq \frac{1}{2}|x' - x''|$, car $x' \geq 1$ et $x'' \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x'} + \sqrt{x''} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}} \leq \frac{1}{2}$.

Donc f est contractante.

4.12 Théorème du point fixe

Théorème 4.12.1 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et prend ses valeurs dans $[a,b]$ $(f : [a,b] \to [a,b])$, alors il existe au moins un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $\in f(x_0) = x_0$.

c'est à dire la droite $y = x$ rencontre le graphe de f.

Preuve

On définit la fonction $\begin{array}{cccc} g: & [a,b] & :\to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - x \end{array},$

g est continue sur $[a,b]$ car somme de fonctions continues sur $[a,b]$.

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $a \leq f(a) \leq b. (f : [a,b] \to [a,b])$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $a \leq f(b) \leq b. (f : [a,b] \to [a,b])$.

Si $g(a) = 0$ alors $f(a) = a$ et $x_0 = a$.

Si $g(b) = 0$ alors $f(b) = b$ et $x_0 = b$.

Si $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$ alors il existe $x_0 \in]a,b[/ g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

(D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires).

Théorème 4.12.2 Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction contractante, alors f admet un point fixe et un seule.

Preuve

Puisque f est contractante sur $[a,b]$ alors elle est uniformement continue sur $[a,b]$ donc continue sur $[a,b]$ et d'aprés le théorème du point fixe la fonction f admet un point fixe $x_0 = f(x_0)$.

Montrons que x_0 est unique. Par l'absurde. Supposons $\exists x_0, x_1 \in [a,b] / f(x_0) = x$ et $f(x_1) = x_1 / x_0 \neq x_1$.

$\exists 0 \leq k < 1, |f(x_1) - f(x_0)| \leq k|x_1 - x_0| \Leftrightarrow |x_1 - x_0| \leq k|x_1 - x_0| \Leftrightarrow 1 \leq k$ contradiction car $k < 1$.

4.13 Fonctions inverses des fonctions continues strictement monotones sur I

Théorème 4.13.1 Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective sur I.

Preuve

$$f \text{ injective sur } I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Soit $x_1, x_2 \in I / x_1 \neq x_2$ alors soit $x_1 > x_2$ ou $x_1 < x_2$.

Supposons que $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ si } f \text{ est strictement croissante} \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ si } f \text{ est strictement décroissante} \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Théorème 4.13.2 Si la fonction f est définie et continue sur $[a,b]$ et f est strictement monotone sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$ alors $\exists! c \in]a,b[/ f(c) = 0$.

Preuve

D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires $\exists c \in]a,b[/ f(c) = 0$.

Montrons que c est unique.

Supposons que $\exists c, c' \in]a,b[, c \neq c'$ et $f(c) = f(c')$.

$f(c) = f(c') \Rightarrow c = c'$ car f est strictement monotone donc injective, alors c est unique.

Proposition 4.13.1 Si f est une fonction strictement monotone sur $X \subset \mathbb{R}$ alors $f : X \to f(X)$ est bijective et en plus f^{-1} est strictement monotone sur $f(X)$ (même monotonie que f).

Preuve $f : X \to f(X)$ est surjective et puisque f est strictement monotone alors f est injective d'où f est bijective, ainsi f^{-1} existe.

Montrons que f^{-1} est strictement monotone.

supposons que f est strictement croissante, alors $\forall x_1, x_2 \in X, \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0.$

Soient $y_1, y_2 \in f(X)/y_1 < y_2 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X/y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$.

$\forall y_1, y_2 \in f(X)/y_1 < y_2, \frac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2} = \frac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)} > 0 \Leftrightarrow f^{-1}$ est strictement croissante.

Proposition 4.13.2 Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone alors

$$f \text{ continue sur } I \Leftrightarrow f(I) \text{ est un intervalle.}$$

Théorème des fonctions inverses:

Théorème 4.13.3 Si la fonction f est continue et strictement monotone sur I alors l'application $f : I \to f(I)$ est bijective et $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et monotone sur $f(I)$ (la même monotonie que f). De plus, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f^{-1} est symetrique par rapport à la première bissectrice($y = x$) de la courbe représentative de f.

Preuve D'aprés la proposition 4.13.1 f est strictement monotone sur $I \Rightarrow f : I \to f(I)$ est bijective et $f^{-1} : f(I) \to I$ est est strictement monotone sur $f(I)$. Reste à montrer que f^{-1} est continue.

On a $f^{-1}(f(I)) = I$ d'aprés la proposition 4.13.2 f^{-1} est continue.

4.13.1 Fonctions trigonométriques inverses

1. Fonction $x \mapsto \arcsin x$:

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle admet un inverse défini par

$$f^{-1} \begin{array}{ccc} [-1,1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arcsin y \end{array}$$

D'où on a

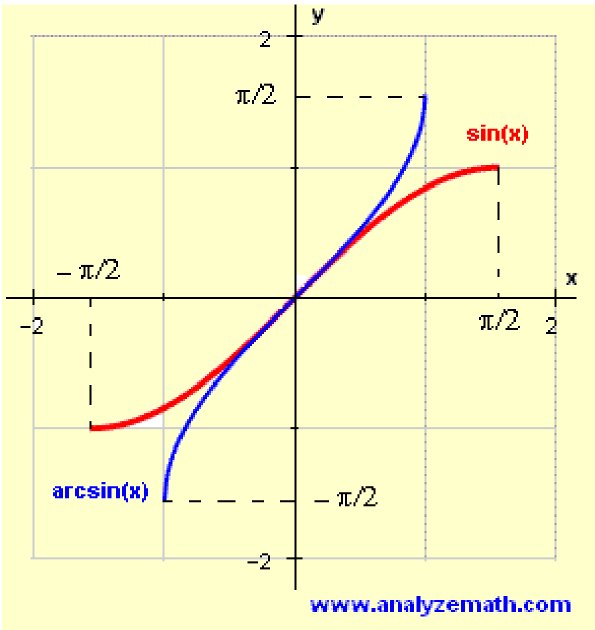
$$\left(\begin{array}{c} y = \sin x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x = \arcsin y \\ y \in [-1,1] \end{array}\right)$$

On a $\arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Domaine de définition:

$f(x) = \arcsin x \Rightarrow D_f = [-1,1]$.

$f(x) = \arcsin(h(x)) \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq h(x) \leq 1\} \cap D_h$.



2. Fonction $x \mapsto \arccos x$:

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x)=\cos x \end{array}$$

f est continue sur $[0,\pi]$ et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ donc elle admet un inverse défini par

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\arccos y \end{array}$$

D'où on a

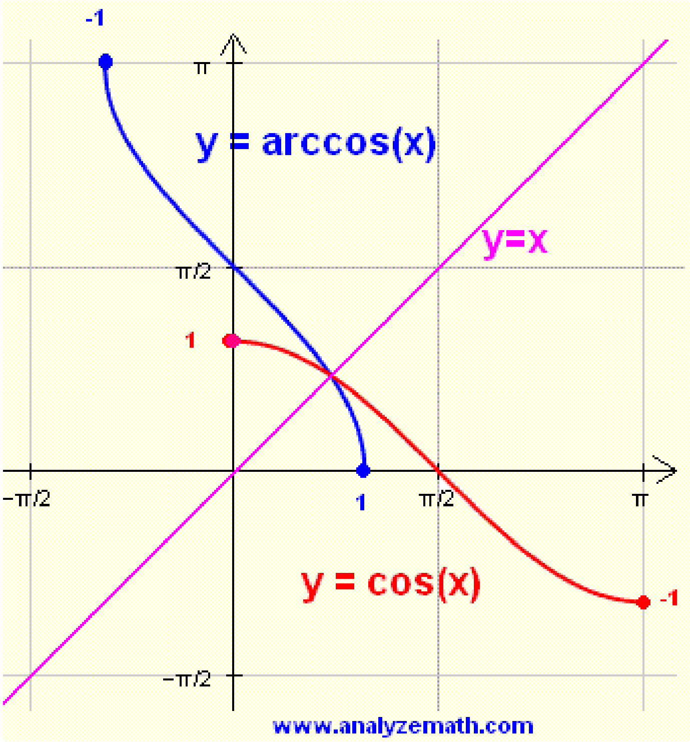
$$\begin{pmatrix} y=\cos x \\ x\in[0,\pi] \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=\arccos y \\ y\in[-1,1] \end{pmatrix}$$

On a $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \arccos 1 = 0, \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Domaine de définition:

$f(x) = \arccos x \Rightarrow D_f = [-1,1]$.

$f(x) = \arccos(h(x)) \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / -1 \le h(x) \le 1\} \cap D_h$.



3. Fonction $x \mapsto \arctan x$:

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \tan x \end{array}$$

f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle admet un inverse défini par

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & \mathbb{R} & \rightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arctan y \end{array}$$

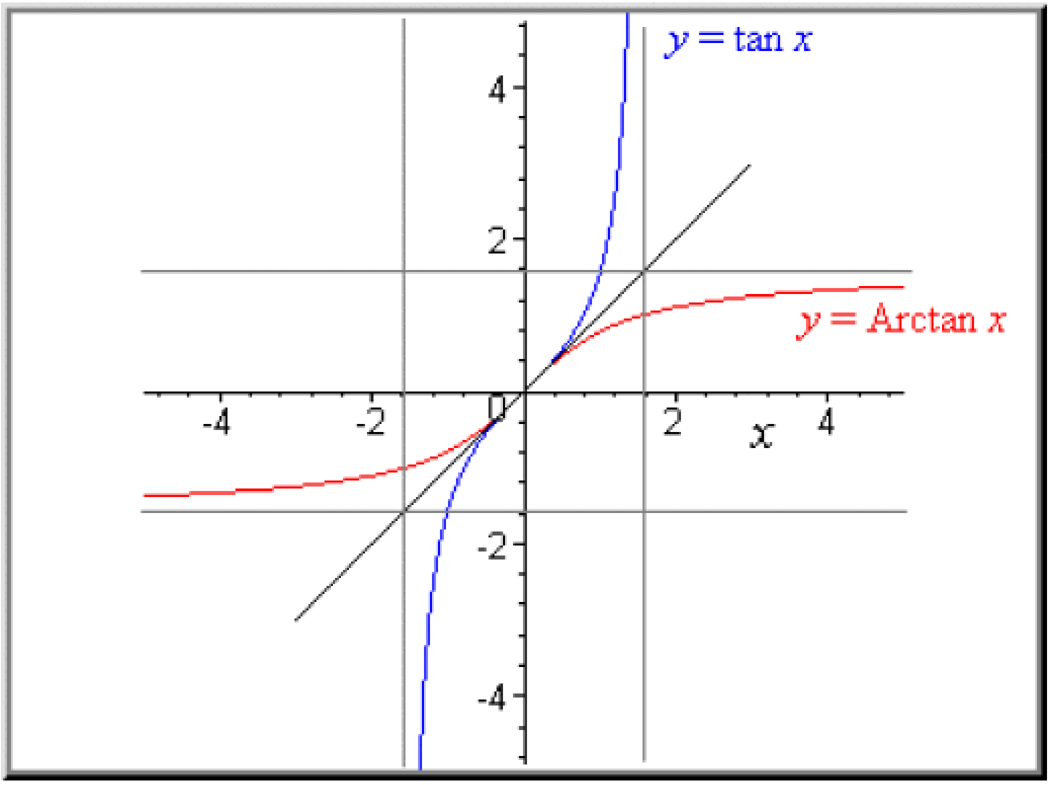
D'où on a

$$\begin{pmatrix} y = \tan x \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \arctan y \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

On a $\arctan 0 = 0, \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}, = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Domaine de définition: $f(x) = arc\tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = \arctan(h(x)) \Rightarrow D_f = D_h$.



4.13.2 Fonctions hyperboliques et leur inverses

1. Fonction sh **et** ch :

Définition 4.13.1 On appelle sinus hyperbolique (resp. cosinus hyperbolique) la fonction notée

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (resp. } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{).}$$

Propriétés:

1. chx est une fonction paire, $ch(-x) = chx$.
2. shx est une fonction impaire, $sh(-x) = -shx$.
3. $chx + shx = e^x$.
4. $chx - shx = e^{-x}$.
5. $(chx)^2 - (shx)^2 = 1$.
6. $ch(x+y) = chxchy + shxshy$.

7. $ch\,(x-y) = chxchy - shxshy.$

8. $sh\,(x+y) = shxchy + shychx.$

9. $sh\,(x-y) = shxchy - shychx.$

En particulier pour $x = y$.

$ch2x = (chx)^2 + (shx)^2$.

$sh2x = 2shxchx.$

$(chx)^2 = \frac{ch(2x)+1}{2}, (shx)^2 = \frac{ch(2x)-1}{2}.$

Variation:

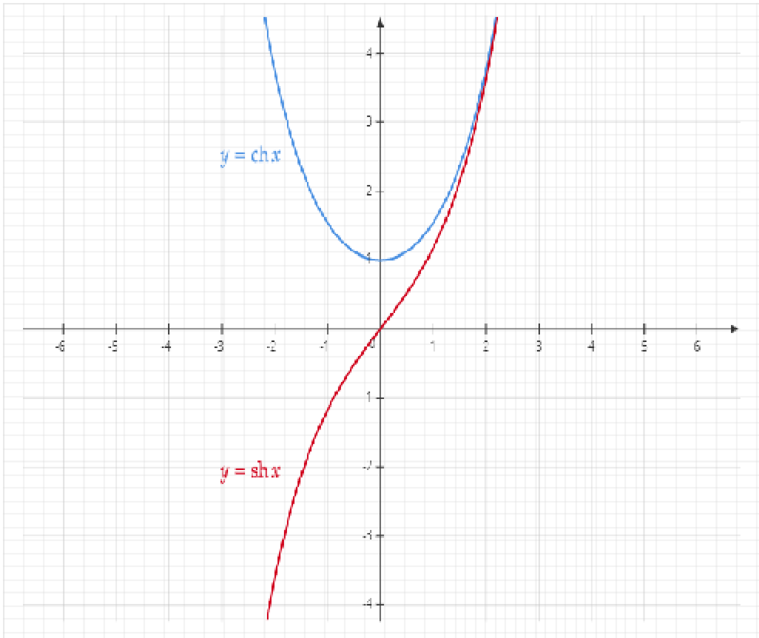
ch étant paire et sh étant impaire, on peut se borner à les étudier dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

La fonction ch est toujours positive.

La fonction sh est positive si $[0, +\infty[$ car $shx = \frac{e^x}{2}\left(1 - e^{-2x}\right) > 0$ si $x > 0$.

$(chx)' = shx$ et $(shx)' = chx$.

La fonction chx est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et la fonction shx est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.



Fonction tangente hyperbolique:

On appelle fonction tangente hyperbolique (resp. cotangente hyperbolique) la fonction définie et notée par

$$thx = \frac{shx}{chx}, x \in \mathbb{R}(\text{ resp. } cothx = \frac{chx}{shx}, x \in \mathbb{R}^*).$$

Propriétés

1. Les fonctions thx et $\coth x$ sont impaires.
2. $\frac{1}{(chx)^2} = 1 - (thx)^2$.
3. $th\,(x+y) = \frac{thx+thy}{1+thxthy}, th\,(x-y) = \frac{thx-thy}{1+thxthy}, th2x = \frac{2thx}{1+(thx)^2}$.

Variation:

$(thx)' = \frac{1}{(chx)^2} > 0, (\coth x)' = \frac{1}{(shx)^2} > 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} thx = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \cot hx = 1.$

4.13.3 Fonctions hyperboliques inverses

1. Fonction $\arg chx$:

La fonction chx est continue sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument cosinus hyperbolique notée $\arg chx$.

On a $x = chy \Leftrightarrow y = \arg chx, y \geq 0$.

Expression au moyen de logarithme

$y = \arg chx \Leftrightarrow x = chy$ et $shy = \sqrt{ch^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$,

or $chy + shy = e^y$ i.e. $x + \sqrt{x^2-1} = e^y \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

d'où

$$\arg chx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

2. Fonction $\arg shx$:

La fonction shx est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty]$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument sinus hyperbolique notée $\arg shx$.

On a $x = shy \Leftrightarrow y = \arg shx, y \geq 0$.

Expression au moyen de logarithme

$y = \arg shx \Leftrightarrow x = shy$ et $chy = \sqrt{sh^2 y + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$,

or $chy + shy = e^y$ i.e. $\sqrt{x^2+1} + x = e^y \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

d'où

$$\arg shx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

3. Fonction $\arg thx$:

La fonction thx est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction inverse continue et strictement croissante sur $]-1,1[$ appelée argument tangente hyperbolique notée $\arg thx$.

On a $x = thy \Leftrightarrow y = \arg thx, x \in\,]-1,1[$.

Expression au moyen de logarithme

$$y = \arg thx \Leftrightarrow x = thy = \tfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow x = \tfrac{1-e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \Leftrightarrow x\left(1+e^{-2y}\right) = 1 - e^{-2y}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\, e^{-2y} = 1 - x \Leftrightarrow e^{-2y} = \tfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow e^{2y} = \tfrac{1+x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1.$$

d'où

$$\arg thx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1.$$

4.14 Exercices

Exercice 1.

I. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes:

$$1. f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}, 2. f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, 3. f(x) = \sqrt{4-3x^2},$$

$$4. f(x) = \tan(2x), 5. f(x) = \frac{x \sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}, 6. f(x) = \begin{cases} \ln x, \text{ si } x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \text{ si } x < 1 \end{cases}.$$

II. Déterminer , $f \circ f, g \circ g, f \circ g, g \circ f$ dans les cas suivants:

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= 1 - x^3, g(x) = \frac{1}{x}. \\ 2. f(x) &= \sqrt{2x+3}, g(x) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

Exercice 2. **I.** Calculer les limites suivantes:

$$1. \lim_{\substack{> \\ x \to -3}} \frac{1}{-2x-6}, 2. \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+2-3x}{x}, 3. \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{-x}}, 4. \lim_{\substack{> \\ x\to 2}} \frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}},$$

$$5. \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x, a > 0, 6. \lim_{x\to 0} e^{\frac{|x|}{x}}, 7. \lim_{x\to 1} |x-1| \cos\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

$$8.\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x},\alpha,\beta\in\mathbb{R},9.\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

II. En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que:

$$1.\lim_{x\to 4}(2x-1)=7,2.\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3}{2},3.\lim_{x\to +\infty}\ln(\ln x)=+\infty.$$

Exercice 3. En utilisant les fonctions équivalentes, calculer les limites suivantes:

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4},2.\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1},3.\lim_{x\to 0}x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}},$$

$$4.\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{tg(6x)},5.\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}},6.\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x},a>1,b>1.$$

Exercice 4. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur le domaine de définition et possibilité de prolongement par continuité.

$$1.f_1(x)=\frac{1-\cos x}{x^2},2.f_2(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right),3.f_3(x)=\frac{\sin(\pi x)}{|x-1|}.$$

$$4.f_4(x)=\begin{cases} e^x,x\geq 0\\ \cos x,x<0\end{cases},5.f_5(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases},$$

$$6.f_6(x)=\begin{cases} x+1,x\leq -1\\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),x>-1\end{cases},7.f_7(x)=\begin{cases} x^2\arctan\frac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}.$$

Exercicev5. Soit la fonction définie par:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x-\pi},x\neq\pi\\ \alpha,x=\pi\end{cases}$$

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue sur son domaine de définition.

Exercice 6.

1. Montrer que $xe^x = 1$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

2. Montrer que l'équation $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ admet exactement trois solutions dans $]-1,1[$.

Exercice 7.

1. Montrer que $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Résoudre l'équation suivante:

$$\arcsin x + \arcsin\left(\sqrt{3}x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction f puis la simplifier

$$f(x) = \arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Solutions

Exercice 1.

1. $f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 3x + 2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{-1,-2\} \\ &=]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup]-1,+\infty[. \end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

On a $\sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car si $y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = y^3 \in \mathbb{R}$

et $\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ car si $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2 \in \mathbb{R}^+$.

Donc,

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/\sqrt{x} \text{ définie } \textbf{et } \sqrt[3]{x} \text{ est définie}\right\} \\ D_f &= \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/4 - 3x^2 \geq 0\right\} \\ &= \left[\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]. \end{aligned}$$

4. $f(x) = \tan(2x)$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}/\cos(2x) \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

5. $f(x) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \text{ et } 1 - x^2 > 0\right\} \\ &= \left]-1, 0\right[\cup \left]0, 1\right[. \end{aligned}$$

6. $f(x) = \begin{cases} \ln x, \text{ si } x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \text{ si } x < 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} D_f &= D_1 \cup D_2 \\ D_1 &= \{x \geq 1/x > 0\} = [1, +\infty[\\ \text{et } D_2 &= \{x < 1/1 - x > 0\} =]-\infty, 1[\\ \text{d'où } D_f &= [1, +\infty[\cup]-\infty, 1[= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II. Composition des fonctions.

1. $f(x) = 1 - x^3, g(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}^*$

$f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f \circ g(x) = f(g(x)) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^3$.

$g \circ f$ est définie telle que $f(x) \neq 0$ c.a.d. $x \neq 1$ donc $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{1\}$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{1-x^3}$.

$f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f \circ f\ (x) = f\,(f\,(x)) = 1 - \left(1 - x^3\right)^3$.

$g \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $g \circ g\,(x) = g\,(g\,(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

2. $f\,(x) = \sqrt{2x+3}, g\,(x) = x^2 + 2, D_f = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[, D_g = \mathbb{R}$.

$f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f \circ g\,(x) = f\,(g\,(x)) = \sqrt{2\,(x^2+2)+3} = \sqrt{2x^2+7}$.

$g \circ f$ est définie sur $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ et $g \circ f\,(x) = g\,(f\,(x)) = .\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + 2 = 2x+5$.

$f \circ f$ est définie sur $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ et $f \circ f\ (x) = f\,(f\,(x)) = \sqrt{2\sqrt{2x+3}+3}$

$g \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $g \circ g\,(x) = g\,(g\,(x)) = \left(x^2+2\right)^2 + 2$.

Exercice2.

I. Calcule de limite:

1. $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} \frac{1}{-2x-6} = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}+2-3x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x} - 3\right)}{x} = -3$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2\left(\sqrt{-x}\right)^2+5}{\sqrt{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{-x}\left(-2\sqrt{-x} + \frac{5}{\sqrt{-x}}\right)}{\sqrt{-x}} = -\infty$.

4. $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} \frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} \frac{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{2-x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} \frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{2-x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} -(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right) =$
$-8\sqrt{2}$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a > 0,$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} e^{\underbrace{a\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}}_{\to 1}} = e^a\ .$$

6. $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{|x|}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} e^{\frac{|x|}{x}} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} e^{\frac{x}{x}} = e \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} e^{\frac{|x|}{x}} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} e^{\frac{-x}{x}} = e^{-1} \end{array}\right\} \text{limite à droite} \neq \text{limite à gauche alors } \lim_{x \to 0} e^{\frac{|x|}{x}} \text{ n'existe pas.}$$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \underbrace{|x-1|}_{\to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{bornée} = 0$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-1+1-e^{\beta x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\frac{e^{\beta x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\alpha\underbrace{\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}}_{\to1}-\beta\underbrace{\frac{e^{\beta x}-1}{\beta x}}_{\to1}=\alpha-\beta.$

ou bien $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\underbrace{e^{\beta x}}_{\to1}\underbrace{\left(\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{x}\right)}_{=\left(e^{(\alpha-\beta)x}\right)'(0)}=\left(e^{(\alpha-\beta)x}\right)'(0)=\alpha-\beta.$

9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$
$\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3}{2}.$

II. Définition de la limite.

1.

$$\lim_{x\to4}(2x-1)=7\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in\mathbb{R};(|x-4|<\eta\Rightarrow|(2x-1)-7|<\varepsilon)$$

Soit $\varepsilon>0,|(2x-1)-7|=|2x-8|=2|x-4|<2\eta=\varepsilon.$

Il suffit de prendre $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$.

2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x\in\mathbb{R};\left(x>A\Rightarrow\left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)$$

Soit $\varepsilon>0,\left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-5}{2(2x+1)}\right|=\frac{5}{2(2x+1)}<\varepsilon\Rightarrow4x+2>\frac{5}{\varepsilon}\Rightarrow x>\frac{\left(\frac{5}{\varepsilon}-2\right)}{4}=A.$

Il suffit de prendre $A=\frac{\left(\frac{5}{\varepsilon}-2\right)}{4}$.

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)=+\infty\Leftrightarrow\forall A>0,\exists B>0,\forall x>1;(x>B\Rightarrow\ln\ln x>A)$$

Soit $A>0,\ln\ln x>A\Rightarrow\ln x>e^A\Rightarrow x>e^{e^A}=B.$

Il suffit de prendre $B=e^{e^A}$.

Exercice 3. Fonctions équivalentes:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$, on a $1-\cos x\sim^0\frac{x^2}{2}$ d'où

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}(1+2x)}{x^2-x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(1+2x)}{1-x^2}=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1}$, On a $cosx-1\overset{0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$, et $e^{\cos x}-e=e\left(e^{\cos x-1}-1\right)\overset{0}{\sim}e\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)\overset{0}{\sim}$ $e\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{-\frac{x^2}{2}}=e.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}x\left(3+x\right)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$, on a $3+x\overset{0}{\sim}3$ et $\sqrt{x+3}\overset{0}{\sim}\sqrt{3}$ et $\sin\sqrt{x}\overset{0}{\sim}\sqrt{x}$, d'où

$$\lim_{x\to 0}x\left(3+x\right)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}x.3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=3\sqrt{3}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$, on a $\sin x\overset{0}{\sim}x\Rightarrow\ln\left(1+\sin x\right)\overset{0}{\sim}\sin x\overset{0}{\sim}x$ et $\tan\left(6x\right)\overset{0}{\sim}6x$, d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{tg\left(6x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}-1+1\right)}$,

On a $\frac{x}{\sin x}-1\to 0$ pour $x\to 0$ donc $\ln\left(\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)+1\right)\sim^0\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)$, d'où

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} &= \lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}-1+1\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)}=e.\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x, a>1, b>1.$

On a $\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=e^{x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}=e^{x\ln\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)+1\right)}$ et $\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)\to 0$ pour $x\to+\infty$, alors

$$\ln\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)+1\right)\sim^{+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right) &= \frac{e^{\frac{1}{x}\ln a}+e^{\frac{1}{x}\ln b}}{2}-1\\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}\ln a}+e^{\frac{1}{x}\ln b}-2}{2}\\ &= \frac{\left(e^{\frac{1}{x}\ln a}-1\right)+\left(e^{\frac{1}{x}\ln b}-1\right)}{2}\end{aligned}$$

et on a encore

$$\begin{aligned}\left(e^{\frac{1}{x}\ln a}-1\right) &\sim {}_{+\infty}\frac{1}{x}\ln a\\ \left(e^{\frac{1}{x}\ln b}-1\right) &\sim {}_{+\infty}\frac{1}{x}\ln b\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)+1\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{\left(e^{\frac{1}{x}\ln a}-1\right)+\left(e^{\frac{1}{x}\ln b}-1\right)}{2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{\frac{1}{x}\ln a+\frac{1}{x}\ln b}{2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}\\ &= e^{\frac{1}{2}\ln ab}=e^{\ln(ab)^{\frac{1}{2}}}\\ &= (ab)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. $f_1(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}, D_{f_1}=\mathbb{R}^*$.

f_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$ car somme et quotient de fonctions continues sue $\mathbb{R}^*$.

$0 \notin D_{f_1}$ mais f_1 est définie au voisinage de 0, étudions la possibilité du prolongement par continuité en 0, pour celà calculons la limite

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

d'où f_1 admet un prolongement par continuité en 0 donné par

$$\widetilde{f_1}(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, x = 0 \end{cases}.$$

2. $f_2(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), D_{f_2} = \mathbb{R}^*.$

f_2 est continue sur $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions continues sue $\mathbb{R}^*$.

$0 \notin D_{f_2}$ mais f_2 est définie au voisinage de 0, étudions la possibilité du prolongement par continuité en 0, pour celà calculons la limite

$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bornée} = 0,$$

d'où f_2 admet un prolongement par continuité en 0 donné par

$$\widetilde{f_2}(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}.$$

3. $f_3(x) = \frac{\sin(\pi x)}{|x-1|}, D_{f_3} = \mathbb{R} - \{1\}.$

f_3 est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car quotient de fonctions continues sue $\mathbb{R} - \{1\}$.

$1 \notin D_{f_3}$ mais f_3 est définie au voisinage de 0, étudions la possibilité du prolongement par continuité en 1, pour celà calculons la limite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f_3(x) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{\sin(\pi x)}{|x-1|} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ y\to 0}} \frac{\sin(\pi(y+1))}{y} = \lim_{\substack{> \\ y\to 0}} \frac{-\sin \pi y}{y} = \lim_{\substack{> \\ y\to 0}} \frac{-\pi y}{y} = -\pi. \\ \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f_3(x) &= \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{\sin(\pi x)}{|x-1|} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{\sin(\pi x)}{-(x-1)} = \lim_{\substack{< \\ y\to 0}} \frac{\sin(\pi(y+1))}{-y} = \lim_{\substack{< \\ y\to 0}} \frac{-\sin \pi y}{-y} = \lim_{\substack{> \\ y\to 0}} \frac{-\pi y}{-y} = \pi. \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f_3(x) \neq \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f_3(x)$$

d'où f_3 n'admet pas un prolongement par continuité en 1.

4. $f_4(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ \cos x, x < 0 \end{cases}, D_{f_4} = \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$:

*) $x > 0, f_4(x) = e^x$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$.

*) $x < 0, f_4(x) = \cos x$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}_-^*$.

*) $x = 0, f_4(0) = e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f_4(x) &= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} e^x = 1 = f_4(0) \Rightarrow f_4 \text{ est continue à droite de } 0. \\ \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f_4(x) &= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \cos x = 1 = f_4(0) \Rightarrow f_4 \text{ est continue à gauche de } 0. \end{aligned}$$

D'où f_4 est continue en 0, par conséquent f_4 est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_4}$.

5. $f_5(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_5} = \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$:

*) $x \neq 0, f_5(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ continue $\mathbb{R}^*$ car produit et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

*) $x = 0, f_5(0) = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f_5(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{bornée} = 0 = f_5(0),$$

D'où f_5 est continue en 0, par conséquent f_5 est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_5}$.

6. $f_6(x) = \begin{cases} x + 1, x \leq -1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), x > -1 \end{cases}, D_{f_6} = \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$:

*) $x > -1, f_6(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ continue sur $]-1,+\infty[$ car produit et composition de fonctions continues sur $]-1,+\infty[$.

*) $x < -1, f_6(x) = x+1$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,-1[$ car c'est un polynôme.

*) $x = -1, f_4(-1) = -1+1 = 0.$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to -1}} f_6(x) &= \lim_{\substack{> \\ x\to -1}} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 = f_6(0) \Rightarrow f_6 \text{ est continue à droite de } -1. \\
\lim_{\substack{< \\ x\to -1}} f_6(x) &= \lim_{\substack{< \\ x\to -1}} x+1 = 0 = f_6(-1) \Rightarrow f_6 \text{ est continue à gauche de } -1.
\end{aligned}$$

D'où f_6 est continue en -1, par conséquent f_6 est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_6}$.

7. $f_7(x) = \begin{cases} x^2 \arctan\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_7} == \mathbb{R}.$

Continuité sur $\mathbb{R}$:

*) $x \neq 0, f_7(x) = x^2 \arctan\frac{1}{x}$ continue $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

*) $x = 0, f_7(0) = 0.$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f_7(x) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x^2 \arctan\frac{1}{x} = 0.\frac{\pi}{2} = f_7(0) \Rightarrow f_7 \text{ est continue à droite de } 0, \\
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f_7(x) &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2 \arctan\frac{1}{x} = 0.\frac{-\pi}{2} = f_7(0) \Rightarrow f_7 \text{ est continue à gauche de } 0,
\end{aligned}$$

D'où f_7 est continue en 0, par conséquent f_7 est continue sur $\mathbb{R} = D_{f_7}$.

Exercice 5.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x-\pi}, x \neq \pi \\ \alpha, x = \pi \end{cases},$$

$D_f = \mathbb{R}$.

Continuité sur $\mathbb{R}$.

Si $x \neq \pi, f(x) = \frac{\sin x}{x-\pi}$ continue sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$ car quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R} - \{\pi\}$.

Si $x = \pi, f(\pi) = \alpha$.

f est continue en $\pi \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pi} f)x = f(\pi) = \alpha$.

$$\alpha = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{y} = -1,$$

d'où

$$\alpha = -1.$$

Exercice 6.

1. $xe^x = 1$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires pour $f(x) = xe^x - 1$ sur $[0,1]$.

f est continue sur $[0,1]$ car somme et produit de fonctions continues sur $[0,1]$.

$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = e - 1 > 0$.

d'où d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires $\exists x_0 \in]0,1[/ f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = 1$.

2. $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ admet exactement trois solutions dans $]-1,1[$.

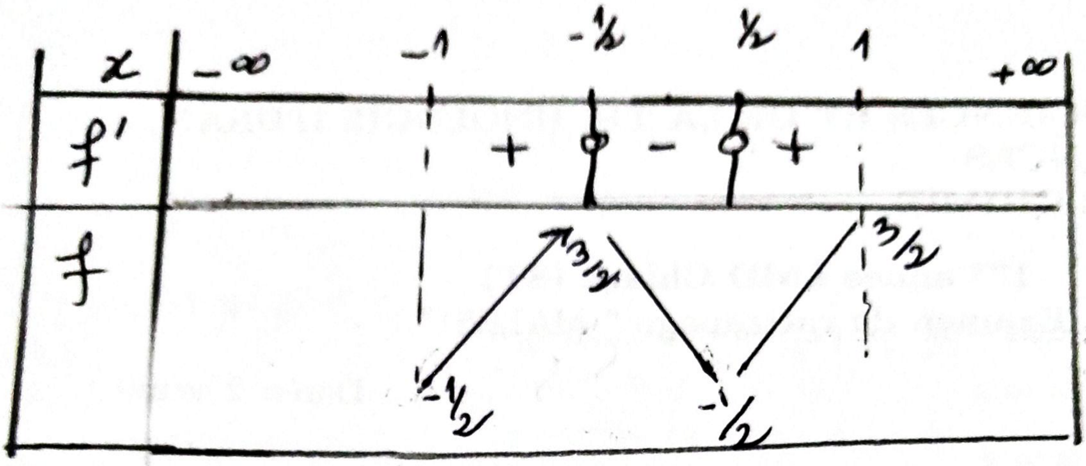
Posons $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-1,1]$ car c'est un polynôme.

$f(-1) = \frac{-1}{2} < 0, f(1) = \frac{3}{2} > 0$,

d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins une solution de $f(x) = 0$ sur $]-1,1[$.

Etudions les variations de f pour avoir le nombre de solution.

$f'(x) = 12x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ ou $x_2 = -\frac{1}{2}$.



On a:

$f(-1) = -\frac{1}{2} < 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0, f$ continue sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ et croissante donc $\exists! x_1 \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[/ f(x_1) = 0.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0, f$ continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante donc $\exists! x_2 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[/ f(x_2) = 0.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0, f(1) = \frac{3}{2} > 0, f$ continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et croissante donc $\exists! x_3 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[/ f(x_3) = 0.$

En conclusion sur $]-1, 1[$, il existe trois solutions de $f(x) = 0, x_1 \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[, x_2 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, x_3 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$

Exercice 7.

1. $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$

On a $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}.$

Posons $y = \arccos x$, on obtient

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. $\arcsin x + \arcsin \sqrt{3}x = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\arcsin \sqrt{3}x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\
\sin\left(\arcsin \sqrt{3}x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \\
\sqrt{3}x &= \sin\frac{\pi}{2}\cos(\arcsin x) - \cos\frac{\pi}{2}\sin(\arcsin x) \\
\sqrt{3}x &= \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \\
3x^2 &= 1 - x^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \\
x &= \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{cases} \text{pour } x = \frac{1}{2}, \arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ \text{pour } x = -\frac{1}{2}, \arcsin -\frac{1}{2} + \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc $x = -\frac{1}{2}$ ne vérifie pas l'équation, alors $x = \frac{1}{2}$ est la seule solution de l'équation $\arcsin x + \arcsin \sqrt{3}x = \frac{\pi}{2}$.

3. $f(x) = \arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}^* / \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1\right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) &\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x > 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$D_f =]0, +\infty[\,.$$

Simplifions f : L'expression logarithmique de $\arg chx$.

$$\arg chx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2-1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{4x^2}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\sqrt{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{4x^2}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\frac{\left|x^2-1\right|}{2x}\right)\\
&= \begin{cases} \ln x, x>1 \\ -\ln x, 0<x<1 \end{cases}\\
&= \left|\ln x\right|.
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 5.1.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite suivante existe et finie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cette limite est unique, elle est appelée dérivée de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.(on notera aussi $Df(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$.

Remarque 5.1.1 La définition précédente permet d'écrire $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x)$ tel que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$, donc on peut écrire:

$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f\prime(x_0) + \varepsilon(x)) / \varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Si on pose $h = x - x_0$, on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Exemple.

1. Si $f = \textit{constante}$ alors $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + h^2 + 2x_0 h - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2x_0 h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h + 2x_0 = 2x_0. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sinh - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 (\cosh - 1) + \cos x_0 \sinh}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \left(-\frac{h^2}{2}\right)}{h} + \frac{\sinh}{h} \cos x_0 \\ &= \sin x_0 \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} + \lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h} \cos x_0 \\ &= \cos x_0. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) = 0.$$

5.1.1 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 5.1.2 On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) du point x_0, si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche), elle est appelée dérivée à droite (resp.à gauche) de f au point x_0, elle est notée $f'_d(x_0)$ ou $f'(x_0+0)$ (resp. $f'_g(x_0)$ ou $f'(x_0-0)$).

$$f \text{ est dérivable au point } x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) \text{ et } f'_g(x_0) \text{ existent et } f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

Alors on a

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0).$$

Exemples.

1. $f(x) = |x|$ continue en 0.

Dérivabilité:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x}{x} = 1 = f'_d(0).\\
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x}{x} = -1 = f'_g(0).
\end{aligned}$$

On a $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3)}{|x|}, \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

a) Continuité en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sin(x^3)}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x^2 \underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{\to 1} = 0 = f(0).\\
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\sin(x^3)}{-x} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2 \frac{\sin(x^3)}{-x^3} = 0 = f(0).
\end{aligned}$$

f est continue en 0.

b) Dérivabilité en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\frac{\sin(x^3)}{x}-0}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sin(x^3)}{x^2} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x\frac{\sin(x^3)}{x^3} = 0 = f'_d(0)\\
\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\frac{\sin(x^3)}{-x}-0}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\sin(x^3)}{-x^2} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} -x\frac{\sin(x^3)}{x^3} = 0 = f'_g(0)
\end{aligned}$$

On a $f'_d(0) = f'_g(0)$ alors f est dérivable en 0.

3. $f(x) = \sqrt{x}$. Continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = f(0)$.

Dérivabilité en 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 = f'(0).$$

Alors f est dérivable en 0.

5.2 Dérivabilité et continuité

Proposition 5.2.1 Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Preuve

Soit f une fonction dérivable en x_0, alors

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) + \varepsilon(x) / \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0, \\
&\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon(x)\right) / \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0, \\
&\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon(x)\right) / \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0, \\
&\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + (x - x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon(x)\right), \\
\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0)
\end{aligned}$$

alors f est continue en x_0.

Remarque 5.2.1

1. La reciproque de la proposition est fausse.

$$f \text{ est continue en } x_0 \nRightarrow f \text{ est dérivable en } x_0.$$

2. Contraposé de (f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0) est

$$f \text{ n'est pas continue en } x_0 \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } x_0.$$

Exemples.

1. $f(x) = |x|$ continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Continuité en 0.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite de 0.

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{-x} = -1 \neq f(0) \Rightarrow f$ n'est pas continue à gauche de 0.

f n'est pas continue en $0 \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\mathcal{C})$ son graphe.

M_0 un point de $(\mathcal{C}) / M_0 = (x_0, f(x_0))$ et

M est un point de $(\mathcal{C}) / M = (x, f(x))$.

La droite $(M_0 M) = (D_x)$

Montrons que l'équation de la tangente (D) en M_0 est:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

La pente de $(D_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

On remarque que si $x \to x_0$ alors $M \to M_0$ et $(D_x) \to (D)$

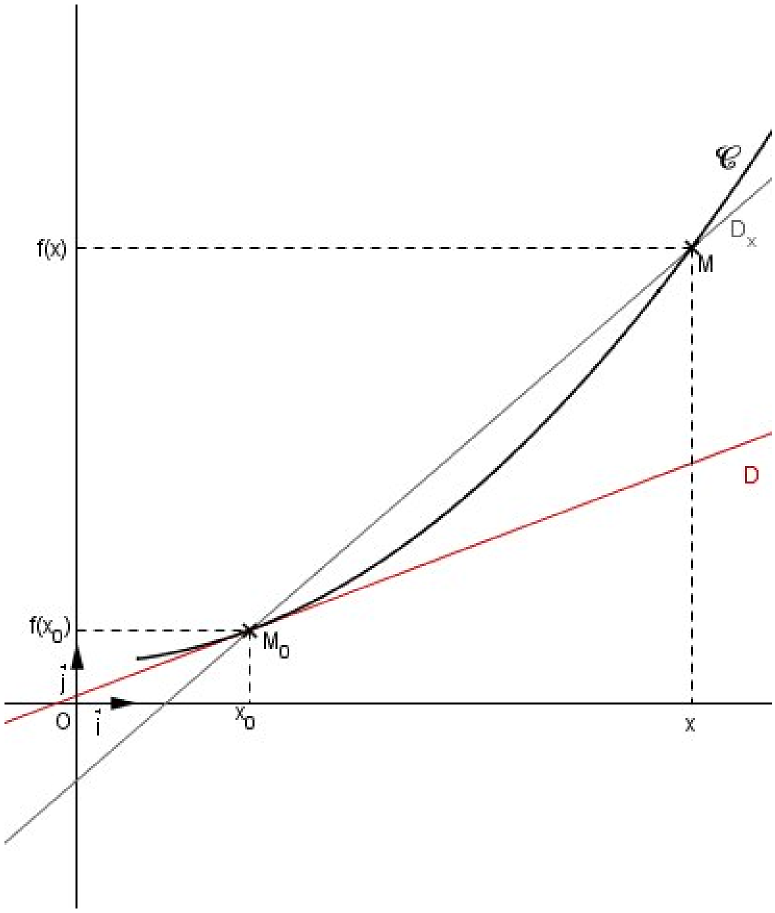
alors la pente de (D) est $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

D'où $(D) : y = f'(x_0)x + b$.

$M_0 \in (D) \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

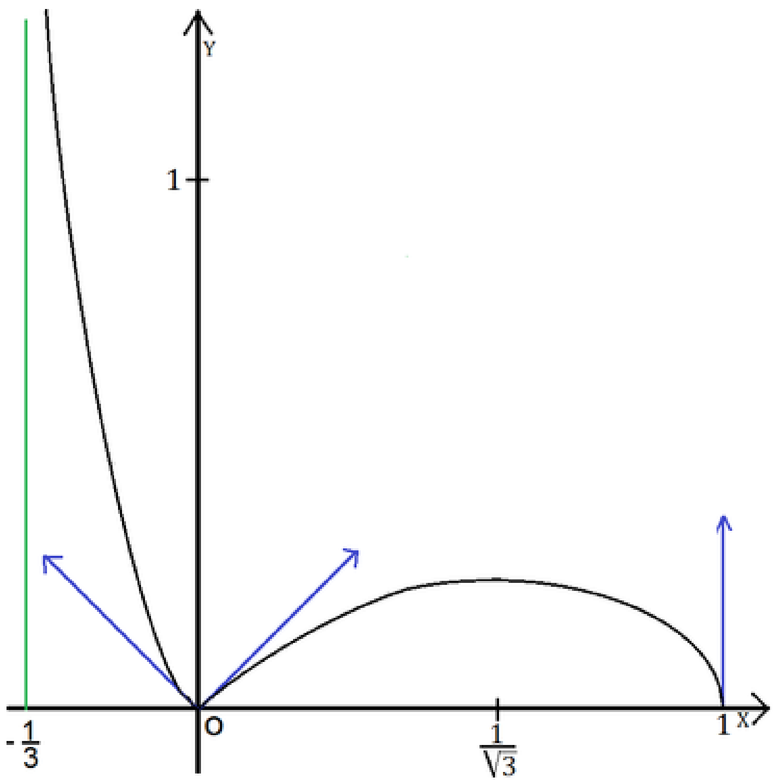
Donc $(D) : y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Points anguleux: Si f admet une dérivée à gauche différente à la dérivée à droite du point x_0, alors le graphe de f admet au point x_0 deux demi tangentes et le point M_0 est un point anguleux.

Si $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ et $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors le graphe admet une tangente verticale $(T) : x = x_0$.



5.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 5.3.1 Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0, alors

1. $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2. αf est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

3. $f.g$ est dérivable en x_0 et $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.

4. $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2} / g(x_0) \neq 0$.

5.3.1 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 5.3.1 Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}, x_0 \in I$, si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a:

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0)).$$

Exemples.

1. $\left(e^{f}\right)'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}$.

2. $(\ln f)'(x) = f'(x)\,(\ln)'(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

3. $(\sin f)'(x) = f'(x)\,(\sin)'(f(x)) = f'(x)\cos(f(x))$.

4. $\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. $\left(\tan\left(x^2\right)\right)' = \left(x^2\right)'(\tan)'\left(x^2\right) = 2x.\frac{1}{\cos(x^2)}$.

6. $$\begin{aligned}\left((chx)^{shx}\right)' = \left(e^{shx\ln chx}\right)' &= (shx\ln chx)'\, e^{shx\ln chx}\\ &= \left((shx)'\ln chx + shx\,(\ln chx)'\right) e^{shx\ln chx}\\ &= \left(chx\ln chx + shx\frac{(chx)'}{chx}\right) e^{shx\ln chx}\\ &= \left(chx\ln chx + \frac{(shx)^2}{chx}\right) e^{shx\ln chx}.\end{aligned}$$

5.3.2 Dérivée d'une fonction inverse

Théorème 5.3.1 Soit f une application bijective et continue de $I \to J$, dérivable en $x_0 \in I$ telle que $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$ et on a:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

5.3.3 Dérivée de fonctions trigonométriques inverses

1. Fonction $\arcsin \mathbf{x}$:

On a

$$\underset{-1\leq x\leq 1}{y = \arcsin x} \Leftrightarrow \underset{-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}}{x = \sin y}$$

$(\arcsin x)' = \left(\sin^{-1}\right)(x) = \frac{1}{(\sin)'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$. D'où

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arcsin f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}, -1 < f(x) < 1 \text{ et } x \in D_f.$$

2. Fonction $\arccos \mathbf{x}$:

On a

$$\underset{-1\leq x\leq 1}{y = \arccos x} \Leftrightarrow \underset{0\leq y\leq \pi}{x = \cos y}$$

$(\arccos x)' = \left(\cos^{-1}\right)(x) = \frac{1}{(\cos)'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos y)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$. D'où

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arccos f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}, -1 < f(x) < 1 \text{ et } x \in D_f.$$

3. Fonction $\arctan \mathbf{x}$:

On a

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{y = \arctan x} \Leftrightarrow \underset{-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}}{x = \tan y}$$

$(\arctan x)' = \left(\tan^{-1}\right)(x) = \frac{1}{(\tan)'(y)} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$. D'où

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

En général,

$$(\arctan f)' = \frac{f'}{1+f^2}, x \in D_f.$$

5.3.4 Dérivée de fonctions hyperboliques inverses

1. **Fonction argchx** :

On a

$$y = \underset{x\geq 1}{\arg chx} \Leftrightarrow x = \underset{y\geq 0}{chy}$$

$(\arg chx)' = \frac{1}{ch'(y)} = \frac{1}{shy} = \frac{1}{\sqrt{ch^2y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. D'où

$$(\arg chx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1.$$

En général,

$$(\arg chf)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}, f(x) > 1 \text{ et } x \in D_f.$$

1. **Fonction** arg **shx** :

On a

$$y = \underset{x\in\mathbb{R}}{\arg shx} \Leftrightarrow x = \underset{y\in\mathbb{R}}{shy}$$

$(\arg shx)' = \frac{1}{sh'(y)} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D'où

$$(\arg shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

En général,

$$(\arg shf)' = \frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}, x \in D_f$$

1. **Fonction** arg **thx** :

On a

$$y = \underset{-1<x<1}{\arg thx} \Leftrightarrow x = \underset{y\in\mathbb{R}}{thy}$$

$(\arg thx)' = \frac{1}{th'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{ch^2y}} = \frac{1}{1-th^2x} = \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1$. D'où

$$(\arg thx)' = \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1.$$

En général,

$$(\arg thf)' = \frac{f'}{1-f^2}, -1 < f(x) < 1 \text{ et } x \in D_f.$$

5.4 Fonctions de classe C^n

5.4.1 Dérivées successives

Définition 5.4.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors la fonction f' est appelée dérivée première de f ou dérivée d'ordre 1 de f et si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors la fonction $(f')'$ est appelée dérivée deuxième de f ou dérivée d'ordre 2 de f et on note f'' ou $f^{(2)}$. En général, pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ est la fonction vérifiante:

1. $f^{(0)} = f$.
2. $f^{(p+1)} = \left(f^{(p)}\right)', 0 \leq p \leq n$.

$f^{(n)}$ est la dérivée $n^{ième}$ de f ou dérivée d'ordre n de f.

Fonction de classe C^n

Définition 5.4.2 On dit que f est de classe $C^n\,(f \in C^n\,(I))$ si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n.

C'est à dire

$$f \in C^n\,(I) \Leftrightarrow f \text{ continue sur } I \text{ et } f', f'', ..., f^{(n)} \text{ existent et continues sur } I\ .$$

Exemples.

1. $f\,(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}\,(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$ continue $\Rightarrow e^x \in C^n\,(\mathbb{R})$.
2. $f\,(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)}\,(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ continue $\Rightarrow \cos x \in C^n\,(\mathbb{R})$.
3. $f\,(x) = \sin x \Rightarrow f^{(n)}\,(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ continue $\Rightarrow \sin x \in C^n\,(\mathbb{R})$.
4. $f\,(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}, D_f = \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f \in C^0\,(\mathbb{R})$ mais n'est pas de classe $C^1\,(\mathbb{R})$ car f' n'est pas continue en 0.

Définition 5.4.3

$$f \text{ est dite de classe } C^{\infty}(I) \Leftrightarrow f \in C^{n}(I), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$f(x) = e^{x} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ car $e^{x} \in C^{n}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$. $f(x) = \sin x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ car $\sin x \in C^{n}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$.

5.4.2 Formule de Leibeniz

Proposition 5.4.1 Soient $f, g : I \to \mathbb{R}, x \in I$, si $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$ existent, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $(f.g)$ admet une dérivée $n^{ième}$ au point x définie par

$$\begin{aligned}
(f.g)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x) \quad / \; C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= C_n^0 f^{(n)}(x)\, g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)\, g'(x) + C_n^2 f^{(n-2)}(x)\, g''(x) + ... + C_n^n f(x)\, g^{(n)}(x) \\
&= f^{(n)}(x)\, g(x) + n f^{(n-1)}(x)\, g'(x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}(x)\, g''(x) + ... + f(x)\, g^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Exemples.

1. $f(x) = e^{x} \sin x$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (e^{x} \sin x)^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{x})^{(n-k)} \sin^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{x} \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \\
&= e^{x} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

2. $f(x) = e^x\left(5x^2+3x+1\right)$

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \left(e^x\left(5x^2+3x+1\right)\right)^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^x\right)^{(n-k)} \left(5x^2+3x+1\right)^{(k)}(x) \\
&= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(5x^2+3x+1\right)^{(k)}(x) \\
&= e^x\left(C_n^0\left(5x^2+3x+1\right) + C_n^1(10x+3) + C_n^2(10) + C_n^3(0) + 0 + 0 + \ldots + 0\right) \\
&= e^x\left(5x^2+3x+1+n(10x+3)+5n(n-1)+0+\ldots 0\right). \\
&= e^x\left(5x^2+(10n+3)x+5n^2-2n+1\right).
\end{aligned}
$$

5.5 Extremum

Définition 5.5.1 On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \,(\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Un maximum local en x_0 ou un minimum local en x_0 est dit extremum local en x_0.

Théorème de Fermat: (condition necessaire d'extremum)

Théorème 5.5.1 Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ telle que f admet un extremum local en $x_0 \in \,]a,b[$, alors $f'(x_0) = 0$.

autrement dit: si f dérivable sur $]a,b[$

$$f \text{ admet un extremum local en } x_0 \in \,]a,b[\, \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Condition suffisante d'extremum:

Théorème 5.5.2 f, f', f'' étant continues sur $[a,b]$, si $x_0 \in \,]a,b[, f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f admet un extremum local en x_0. Il sagit d'un maximum si $f''(x_0) < 0$ et d'un monimum local si $f''(x_0) > 0$.

Autrement dit,

$$f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f \text{ admet un extremum en } x_0 \begin{cases} \text{un maximum si } f''(x_0) < 0 \\ \text{un minimum si } f''(x_0) > 0 \end{cases}.$$

Exemples.

$f(x) = x^2, [-1, 1]$.

$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$

$f''(x) = 2 \neq 0.$

Alors f admet un extremum local en $x_0 = 0$ et puisque $f''(0) = 2 > 0$ alors f admet un minimum local en 0.

5.6 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finies

5.6.1 Théorème de Rolle

Théorème 5.6.1 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[/ f'(c) = 0.$

Autrement dit,

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a, b[/ f'(c) = 0.$$

Preuve.

1. Si f est constante sur $[a, b] \Rightarrow f'(c) = 0, \forall c \in]a, b[$.

2. Si f n'est pas constante.

f est continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ atteint ses bornes.

i.e. $\exists x_1, x_2 \in [a, b] / f(x_1) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x), f(x_2) = \inf_{a \leq x \leq b} f(x).$

On a: $x_1 \neq a$ et b et $x_2 \neq a$ et b car sinon

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b \Rightarrow f(x_1) = f(b) \\ \\ x_2 = a \Rightarrow f(x_2) = f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\,(\sup f(x) = \inf f(x)) \Rightarrow f \text{ constante}$$

contradiction.

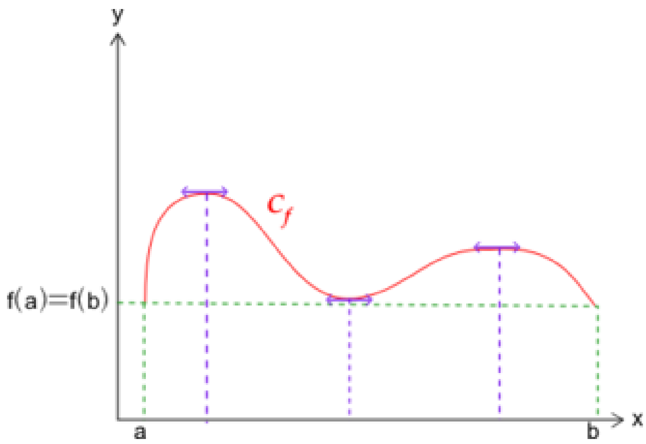
Donc $x_1, x_2 \in \left]a, b\right[$.

Si on pose $c = x_1$ (ou $c = x_2$) et f est dérivable sur $\left]a, b\right[$ et $f(x) \leq f(x_1) = \sup f(x) = f(c), \forall x \in [a, b]$.

Alors $f(c)$ est un maximum de f et d'aprés le théorème de fermat $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique:

Si f est continue sur $[a, b]$ alors son graphe est continue entre $M_a = (a, f(a))$ et $M_b = (b, f(b))$ et puisque f est dérivable sur $\left]a, b\right[$ le graphe G_f admet une tangente en tout point entre M_a et M_b et si $f(a) = f(b)$ alors il existe un point $M_c = (c, f(c))$ où la tangente est parallèle à la droite passante par M_a et M_b et l'axe des abcisses.



Remarque. Toutes les conditions du théorème de Rolle sont essentielles pour la validité du théorème.

1. La fonction $f(x) = \begin{cases} 1-x, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, vérifie $f(0) = f(1)$, mais elle n'est pas continue en 0 donc pas continue sur $[0,1]$ et $\nexists c \in \left]0,1\right[/ f'(c) = 0$.

2. La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $[-1,1]$ et $f(-1) = f(1)$ mais elle n'est pas dérivable en 0 donc n'est pas dérivable sur $\left]-1,1\right[$.

3. La fonction $f(x) = x^3$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $\left]-1,1\right[$ mais $f(-1) \neq f(1)$ et $\nexists c \in \left]-1,1\right[/ f'(c) = 0$.

Exemple.

Montrer que l'équation $4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0$ admet une solution dans $\left]1,3\right[$.

On pose $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[1,3]$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left]1,3\right[$ (car c'est un polynôme).

$f(1) = 0, f(3) = 0$, d'aprés le théorème de Rolle $\exists c \in \left]1,3\right[/ f'(c) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6$ et $f'(c) = 0 \Leftrightarrow 4c^3 - 18c^2 + 22c - 6 = 0, c \in \left]1,3\right[$.

5.6.2 Théorème des accroissements finis (T.A.F.)

Théorème 5.6.2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors $\exists c \in]a, b[/ f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

c'est à dire

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a, b[/ \ f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Preuve

Posons

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

φ est continue sur $[a, b]$ car somme de fonctions continues sur $[a, b]$.

φ est dérivable sur $]a, b[$ car somme de fonctions continues sur $]a, b[$.

$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0.$

D'aprés le théorème de Rolle

$$\exists c \in]a, b[/ \ \varphi'(c) = f\left('c\right) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

donc

$$\exists c \in]a, b[\ / \ f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Corollaire 5.6.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, alors $\forall x_1, x_2 \in I$, on a

$$\exists c \in]x_1, x_2[/ \ f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

Autre formule du théorème des accroissements finis:

Si $c \in]a, b[\Rightarrow c = a + \theta(b - a)$, où $0 < \theta < 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \theta \in]0, 1[/ \ f(b) - f(a) = (b - a) f'(a + \theta(b - a)).$$

Si on pose $b-a=h$, on obtient

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h).$$

5.6.3 Application du théorème des accroissements finis

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x>0, \frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x.$$

On pose $f(t)=\ln(t+1), t\in[a,b]=[0,x]$, appliquons le T.A.F. sur la fonction $f(t)=\ln(t+1)$ définie sur l'intervalle $[0,x]$.

$$\left.\begin{array}{r}\ln(t+1) \text{ continue sur } [0,x] \\ \ln(t+1) \text{ dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in]0,x[\,/\ f(x)-f(0)=(x-0)f'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c\in]0,x[\,/\ \ln(x+1)-\ln(0+1)=(x-0)\left(\frac{1}{c+1}\right)$$

$$\Rightarrow \exists c\in]0,x[\,/\ \ln(x+1)=\frac{x}{c+1}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &< c<x\Rightarrow 1<c+1<x+1\Rightarrow \frac{1}{x+1}<\frac{1}{c+1}<1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{x+1}<\frac{x}{c+1}<x, \forall x>0. \end{aligned}$$

Mais $\ln(x+1)=\frac{x}{c+1}$, d'où

$$\forall x>0, \frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x.$$

2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x\in]0,1[, x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On pose $f(t) = \arcsin t, 0 < t < x$, appliquons le T.A.F. pour f sur $]0, x[$.

$$\left.\begin{array}{r} \arcsin t \text{ continue sur } [0, x] \\ \arcsin t \text{ dérivable sur }]0, x[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]0, x[\,/\, f(x) - f(0) = (x - 0) f'(c).$$

$$\begin{aligned} c &\in]0, x[\,/\, \arcsin x - \arcsin 0 = (x - 0) \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}. \\ \arcsin x &= \frac{x}{\sqrt{1 - c^2}}, 0 < c < x. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &< c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow -x^2 < -c^2 < 0 \Rightarrow 0 < 1 - x^2 < 1 - c^2 < 1 \\ \sqrt{1 - x^2} &< \sqrt{1 - c^2} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow x < \frac{x}{\sqrt{1 - c^2}} < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{d'où } x &< \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1 - c^2}} < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall x \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Corollaire 5.6.2 Si f est une fonction continue et dérivable sur I, alors

1. f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.
2. f est décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.
3. f est constante sur $I \Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in I$.

5.6.4 Théorème des accroissements finis généralisés (T.A.F.G.)

proposition 5.6.1 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, si $g'(x) \neq 0$ alors

$$\exists c \in]a, b[\,/\, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve

On pose $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(x)$.

F est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f et g le sont.

$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(a) = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} = F(b)$, d'aprés le théorème de Rolle , $\exists c \in]a,b[/ F'(c) = 0$.

$\exists c \in]a,b[/ F'(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]a,b[\,; f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]a,b[\,; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

5.6.5 Règle de l'Hôpital

On l'utilise pour enlever les formes indéterminées de la forme $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Proposition 5.6.2 Si f et g sont deux fonctions dérivables dans un voisinage de $x_0 \in I$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ admet la même limite en x_0.

c.à.d.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Preuve

T.A.F.G. sur $[x_0, x]$ donne

$$\exists c \in]x_0, x[/ \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\text{Si } x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0 \text{ et donc } \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 5.6.1

1. La règle de l'Hôpital reste valable pour $x_0 = \infty$.

2. On peut appliquer la règle de l'Hôpital plusieurs fois, il suffit que les conditions soit vérifiées.

3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \nexists \not\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \nexists$, en effet, Soient $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = \sin x$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \nexists$, par contre $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{bornée}\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}=0.$

Exemple:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{cox-1}=\frac{0}{0}$, on a $e^{x^2}-1$ et $cox-1$ sont dérivables, alors $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}-2\frac{x}{\sin x}e^{x^2}=$

$-2.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty,$

on a $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$, $x-\sin x$ et $x\sin x$ sont dérivables.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}$, $1-\cos x$ et $\sin x+x\cos x$ sont

dérivables.

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

Pour trouver le résultat, on a utiliser la règle de l'Hôpital deux fois.

3. $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}x^\alpha\ln x,\alpha>0$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}x^\alpha\ln x=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}\overset{H}{=}\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$

5.7 Formule de Taylors

Une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable en $x_0\in\,]a,b[$ peut s'écrire au voisinage de x_0 sous la forme

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x),$$

où $R(x)=(x-x_0)\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0.$

Cela revient à dire qu'au voisinage de x_0, f peut être approximée par le polynôme de degré 1 : $P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ et l'erreur commise par cette aproximation tend vers zéro quand $x\to x_0$.

La formule de Taylors généralise ce résultat pour des fonctions n fois dérivables qui peuvent être approximées dans un voisinage de x_0 par des polynômes de degré n.

i.e.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

l'erreur $R_n(x)$ est appelée reste d'ordre n. On peut en donner divers évaluations ce qui entraine divers formes de la formule de Taylors.

Formule de Taylors avec reste de Lagrange

Théorème 5.7.1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^n(]a, b[)$ et $f^{(n)}$ dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in]a, b[$. Alors $\forall x \in [a, b]$ / $x \neq x_0$, on a:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

où $c \in]x_0, x[$, le terme

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

est appelé reste de Lagrange.

Remarque 5.7.1

1.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

2. On pose $h = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + h$ et $c \in]x_0, x_0 + h[\Rightarrow c = x_0 + \theta h / 0 < \theta < 1$ et on a:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

Le reste

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h), 0 < \theta < 1$$

est appelé reste de Cauchy.

Développement de Maclaurin

Théorème 5.7.2 Soit $f \in C^n([0,x])$, $f^{(n+1)}$ existe sur $]0,x[$, alors $\exists\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

C'est le développement de Taylors au voisinage de $x_0 = 0$ avec reste de Cauchy.

Exemple:

1. $f(x) = e^x, f \in C^\infty, x_0 = 0$ et $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

2. $f(x) = \sin x \in C^\infty, x_0 = 0$ et $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sin(\theta x).$$

3. $f(x) = \cos x \in C^\infty, x_0 = 0$ et $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + .. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x).$$

Formule de Taylors avec reste de Young

Théorème 5.7.3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x_0 \in]a,b[$. Supposons que $f^{(n)}$ existe. Alors

$\forall x \in [a,b]; f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$

$\underbrace{(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)}_{=o((x-x_0)^n)} / \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

ou bien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Formule de Maclaurin-young

Théorème 5.7.4 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, 0 \in [a,b]$. Supposons que $f^{(n)}(0)$ existe. Alors $\forall x \in [a,b]$;

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

ou bien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Exemples.

1. $f(x) = (1+x)^\alpha$ sur $]-1, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1))\,x^{\alpha-k} \\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1)) \\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1). \end{aligned}$$

D'où

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Si $\alpha = -1$, $f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$, alors le développement de Maclaurin-Young de f est

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$, alors le développement de Maclaurin-Young de f est

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

5.8 Fonctions convexes

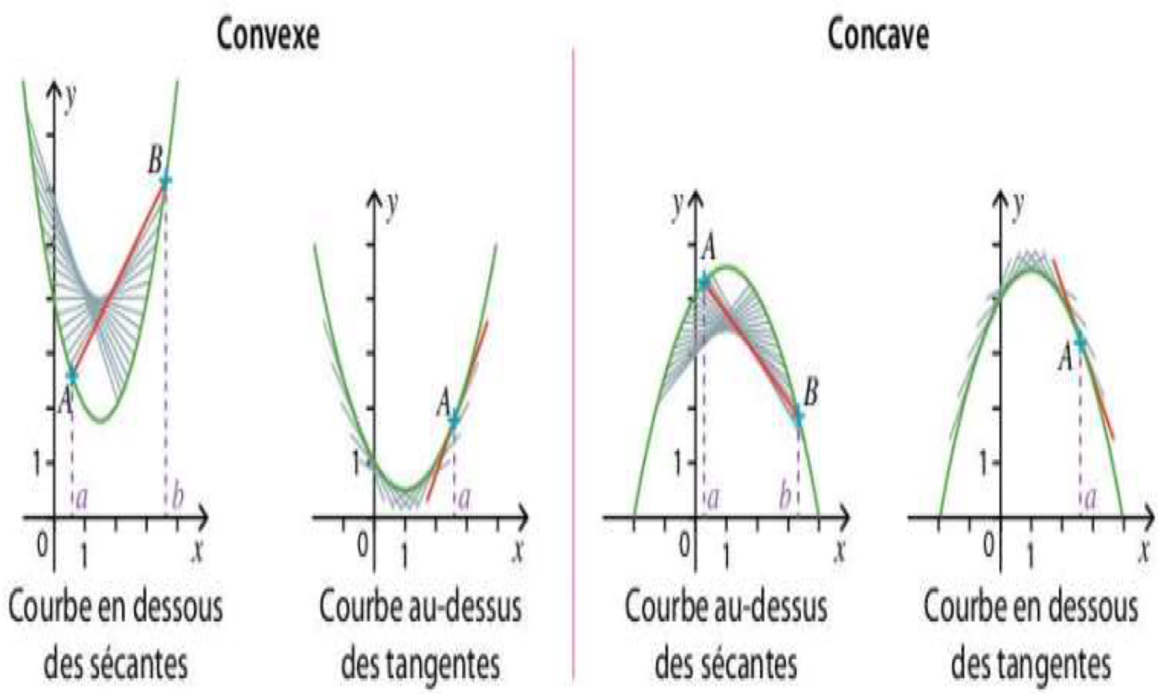
Définition 5.8.1

Approche graphique: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et G_f sa courbe représentative.

On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative G_f est au dessus de toutes ses tangente sur I ou bien si G_f est au dessous de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

On dit que f est concave sur I si si sa courbe représentative G_f est au dessous de toutes ses tangente sur I ou bien si G_f est au dessus de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

Illustration de la remarque :



Approche analytique: Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est convexe sur I, si $\lambda \in [0,1]\,, x, y \in I$, on a

$$f\,(\lambda x + (1-\lambda)\,y) \leq \lambda f\,(x) + (1-\lambda)\,f\,(y)\,.$$

Lorsqu'on a l'inégalité dans l'autre sens, on dit que f est concave.

Remarque 5.8.1 f est concave si $-f$ est convexe.

Proposition 5.8.1

Si f est une fonction dérivable sur I alors on a l'équivalence des assertions suivantes:

1. f est convexe sur I.

2. f' est croissante sur I.

3. f'' est positive sur I.

4. G_f est au dessus de toutes ses tangentes sur I.

5. G_f est au dessous de toutes ses cordes (sécantes) sur I.

Exemples.

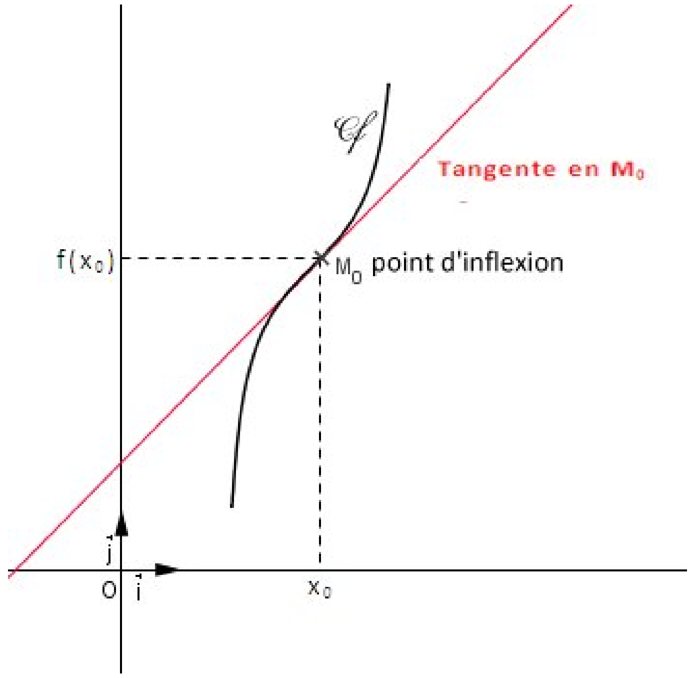
1. $f(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Point d'inflexion

Soient f une fonction dérivable sur I, G_f sa courbe représentative et $A(a, f(a)) \in G_f$.

On dit que A est un point d'inflexion de G_f si et seulement si la courbe G_f traverse sa tangente en ce point A.



Propriété

Si A est un point d'inflexion d'abscisse a, f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en a.

Théorème 5.8.1

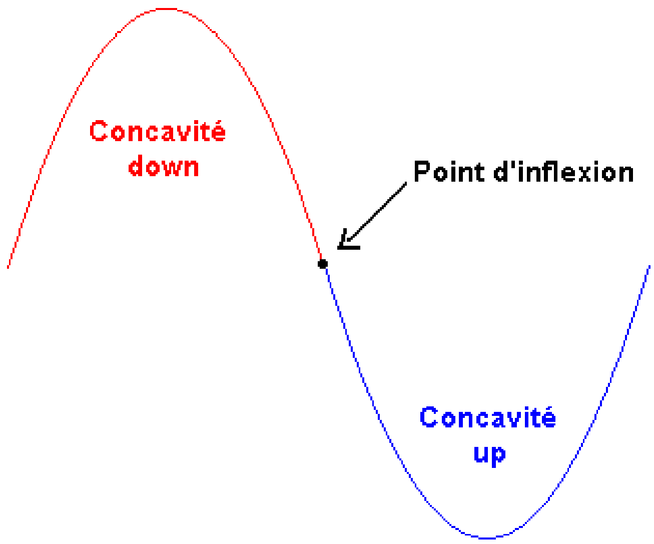
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, de courbe représentative G_f. le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de G_f si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

Exemple: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 2x - 2.$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $f''(x) \geq 0$ si $x \geq 1$ et $f''(x) \leq 0$ si $x \leq 1$, donc f'' change de signe en 1. Donc le point A d'abscisse 1 d'ordonnée $f(1) = \frac{1}{3}$ est un point d'inflexion.



Exercice: Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x,$$

et G_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Etudier la convexité de la fonction f.

3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser les coordonnées de A.

4. Qu'elle est l'équation de la tangente à G_f au point A? En déduire que pour tout $x \geq 1 : e^{x-1} \geq \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$.

Solution:

1. $f'(x) = 2e^{x-1} - 2x - 1, f'$est dérivable et on a

$f''(x) = 2e^{x-1} - 2.$

2. f est convexe si $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \ln e^{x-1} \geq \ln 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$

Donc f est convexe sur $[1, +\infty[$ et elle est concave sur $]-\infty, 0]$.

3. Le point d'inflexion corespond au passage de convexe à concave ou de concave à convexe. D'aprés la question précédente, le point d'inflexion d'abscisse 1 et d'ordonnée

$f(1) = 2e^{1-1} - 21^2 - 1 = 0.$

Le point d'inflexion $A = (1, 0)$.

4. La tangente en A.

$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) = 1 - x$. Alors l'équation de la tangente au point $(1, 0)$ est:

$$(T) : y = 1 - x.$$

On a $\forall x \geq 1, f$ est convexe alors f est au dessus de toutes ses tangentes en particulier au dessus de (T),

C'est à dire

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 1 - x \Leftrightarrow 2e^{x-1} - x^2 - x \geq 1 - x \\ &\Leftrightarrow 2e^{x-1} \geq x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow e^{x-1}\frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right). \end{aligned}$$

5.9 Les asymptotes d'une courbe

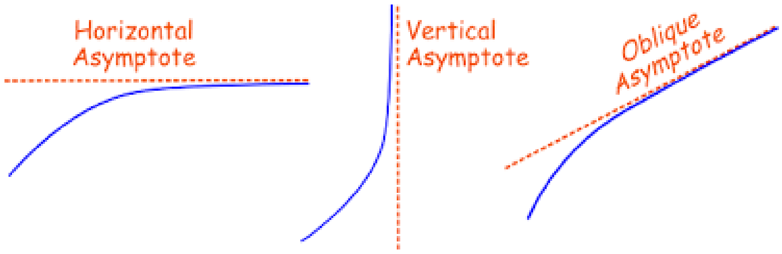
Définition 5.9.1 Une droite asymptote à une courbe est une droite telle que lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.

Nous étudions 3 cas en particulier.

Asymptote verticale, asymptote horizontale, asymptote oblique.

Définition 5.9.2. Soit f une fonction définie sur I sauf en a. La droite $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \infty$.

Méthode pour déterminer les asymptotes verticales:



Les asymptotes verticales sont à chercher parmi les valeurs interdites. On calculera donc la $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pour tout $a \notin D_f$.

Si cette limite vaut ∞ alors la droite $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $y = f(x)$.

Exemple. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-6}, D_f = \mathbb{R} - \{2, -3\}$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow x = 2$ est une asymptote verticale de $y = f(x)$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{\substack{< \\ x \to -3}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow x = -3$ est une asymptote verticale de $y = f(x)$.

Définition 5.9.3 Soit f une fonction définie sur I.

La droite $y = b_1$ est une asymptote horozontale à droite de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_1$.

La droite $y = b_2$ est une asymptote horozontale à gauche de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_2$.

Si $b_1 = b_2$, alors on dira simplement que cette droite est l'asymptote horizontale à la courbe $y = f(x)$.

Méthode pour déterminer les asymptotes horizontales

La courbe de la forme $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si le degré de $P(x) \leq$ degré de $Q(x)$.

Exemple: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2}, D_f = \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe

$y = f(x)$.

Définition 5.9.4 La droite $y = ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0.$$

Méthode pour déterminer les asymptotes obliques

$y = ax + b$.

a est donné par la formule $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et b est donné par la formule $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$.

Remarque 5.9.1

1. L'asymptote oblique ou horizontale n'est pas forcement la même vers $+\infty$ ou $-\infty$. Il faut étudier les deux cas.

2. Pour déterminer l'équation d'une asymptote oblique, il faut commencer par calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, puis calculer $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Si $a = \infty$, il n'y a pas d'asymptote, la courbe a une branche parabolique.

Si $a = 0$, on dit que f admet une asymptote horizontale $y = b$, si b existe.

Si $a \neq 0$ et b existe, la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique.

Exemple. $f(x) = \frac{3x^2-x+1}{x-1}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = 2$.

Alors $y = 3x + 2$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) - 3x = 2$.

Alors $y = 3x + 2$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique ou horizontale:

Soit $M = (x, f(x))$ un point du graphe de f. $(\Delta) : y = ax+b$ son asymptote au voisinage de ∞.

M est au dessus de l'asymptote oblique si $f(x) > ax + b$.

M est au dessous de l'asymptote oblique si $f(x) < ax + b$.

M est un point de l'asymptote oblique si $f(x) = ax + b$.

M est au dessus de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) > b$.

M est au dessous de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) < b$.

M est un point de l'asymptote horizontale $y = b$ si $f(x) = b$.

Exemple.

1. $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-1}, D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to \to \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \to \infty} f(x) - 2x = 1$, alors la droite $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de ∞.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = -\infty, x = 1$ est une asymptote verticale.

Position du graphe par rapport à $(\Delta) : y = 2x + 1$.

Cherchons le signe de $f(x) - y$.

$f(x) - y = \frac{2x^2-x+1}{x-1} - (2x+1) = \frac{2}{x-1}$ est de signe $x - 1$.

G_f est au dessus de (Δ) si $x > 1$.

G_f est au dessous de (Δ) si $x < 1$.

5.10 Exercices

Exercice 1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur le domaine de définition

$$1. f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, 2. f_2(x) = \begin{cases} x + 1, x \leq -1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), x > -1 \end{cases}, 3. f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, x \in]0, \pi[\\ 0, x = 0 \end{cases}.$$

$$4. f_4(x) = \begin{cases} x^2+x, x \leq 0 \\ \sin x, 0 < x \leq \pi \\ 1+\cos x, x > \pi \end{cases}, 5. f_5(x) = \begin{cases} e^x - 1, x \leq 0 \\ \sin \pi x, 0 < x \leq 1 \\ -\pi \ln x, x > 1 \end{cases}.$$

Donner la dérivée de chaque fonction sur son domaine de dérivation.

Exercice 2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

1) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, 2) $f(x) = tg\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$, 3) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$,
4) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, 5) $f(x) = e^{arc\tan x^2}$, 6) $f(x) = \arg sh\left(\frac{x}{1+x}\right)$,
7. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$, 8. $f(x) = (chx)^{shx}$.

Exercice 3.

I. Soit f la fonction définie de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $[0,1]$, on suppose que:

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 1.$$

Montrer en utilisant le théorème de Rolle que f'' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[0,1]$.

II. a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que:

$$1) \forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} < arc\tan x < x.$$

b) Etant donné $\ln(100) = 4,6052$, en appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'en écrivant: $\ln(101) = 4,6151$ on commet une erreur inférieur à 10^{-4}.

Exercice 4.

En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\cos x - 1}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$, 3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1}{(x-1)^2}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arc\sin x}{x}$, 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(shx)^2 - 1}{3x}$.

Exercice 5. En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n, montrer que

$$\forall x > 0, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} < e^x$$

En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 2, montrer que $\frac{8}{3} < e < 3$.

En déduire que

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Exercice 6. Soit la fonction $g(x) = e^{2x} - 2$.

1. Etudier la convexité de la fonction g.

2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right) \geq x$.

Exercice supplémentaire. (Rattrapge 2021)

I- On considère la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ \arctan \frac{x}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.

2. Etudier la continuité de la fonction f sur son domaine de définition.

3. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition.

4. Donner la dérivée de la fonction f sur son domaine de dérivation.

II- Soit la fonction $\ln(x+1)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. Appliquer le théorème des accroissements finies pour cette fonction sur $[0, x]$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[: g(x) \leq 0$.

Solutions

Exercice1. Dérivabilité sur le domaine de définition

$$1. f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_1} = \mathbb{R}.$$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $x \neq \mathbf{0}$**;** $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car produit et composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x = \mathbf{0}$; $f_1(0) = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f_1$ est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

Par suit f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$2. f_2(x) = \begin{cases} x + 1, x \leq -1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), x > -1 \end{cases}, D_{f_2} = \mathbb{R}.$$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour $\mathbf{x} < -\mathbf{1}$**;** $f_2(x) = x + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, -1[$ car c'est un polynôme.

Pour $\mathbf{x} > -\mathbf{1}$**;** $f_2(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-1, +\infty[$ car produit de fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$.

Pour $\mathbf{x} = -\mathbf{1}$; $f_2(-1) = -1 + 1 = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{f_2(x) - f_2(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{x+1-0}{x+1} = 1 \Rightarrow f_2$ est dérivable à gauche de -1 et on a $f'_{2g}(-1) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} \frac{f_2(x) - f_2(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 0}{x+1} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to -0}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi(t-1)}{2}\right)}{t} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to -0}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{t} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to -0}} \frac{\frac{\pi}{2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} t} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to -0}} \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} t} = 0 \Rightarrow f_2$ est dérivable à droite de -1 et on a $f'_{2d}(-1) = 0$.

On a $f'_{2g}(-1) \neq f'_{2d}(-1)$ alors f_2 n'est pas dérivable en -1 par suit n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$3.f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}, x \in]0,\pi[\\ \\ 0, x = 0 \end{cases}, D_{f_3} = [0,\pi[.$$

Dérivabilité sur $[0,\pi[$.

Pour x $\in]0,\pi[$: $f_3(x) = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ dérivable sur $]0,\pi[$ car produit, composition et quotient de fonctions dérivables sur $]0,\pi[$.

Pour x $= \mathbf{0}$, $f_3(0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\sin\frac{1}{x}$ n'exite pas$\Rightarrow f_3$ n'est pas dérivable en 0 par suit n'est pas dérivable sur $[0,\pi[$.

$$4.f_4(x) = \begin{cases} x^2 + x, x \le 0 \\ \\ \sin x, 0 < x \le \pi \\ \\ 1 + \cos x, x > \pi \end{cases}, D_{f_4} = \mathbb{R}.$$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour x $<$ **0;** $f_4(x) = x^2 + x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,0[$ car c'est un polynôme.

Pour 0 $<$ **x** $<$ $\boldsymbol{\pi}$**;** $f_4(x) = \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,\pi[$.

Pour x $>$ $\boldsymbol{\pi}$;$f_4(x) = 1 + \cos x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]\pi,+\infty[$.

Pour x $= \mathbf{0}$; $f_4(0) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -0}} \frac{f_4(x)-f_4(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{x^2+x-0}{x} = 1 \Rightarrow f_4$ est dérivable à gauche de 0 et on a $f'_{4g}(0) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f_4(x)-f_4(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow f_4$ est dérivable à droite de 0 et on a $f'_{4d}(0) = 1$.

On a $f'_{4g}(0) = f'_{4d}(0) = 1 \Rightarrow f_4$ est dérivable en 0 et on a $f'_4(0) = f'_{4g}(0) = f'_{4d}(0) = 1$.

Pour x $= \boldsymbol{\pi}$; $f_4(\pi) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -\pi}} \frac{f_4(x)-f_4(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to \pi}} \frac{\sin x - 0}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{< \\ t\to 0}} \frac{\sin(t+\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{< \\ t\to 0}} \frac{-\sin t}{t} = -1 \Rightarrow f_4$ est dérivable à gauche de π et on a $f'_{4g}(\pi) = -1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to \pi}} \frac{f_4(x)-f_4(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to \pi}} \frac{1+\cos x}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{> \\ t\to 0}} \frac{1+\cos(t+\pi)}{t} = \lim\limits_{\substack{> \\ t\to 0}} \frac{1-\cos t}{t} = \lim\limits_{\substack{> \\ t\to 0}} \frac{\frac{t^2}{2}}{t} = 0 \Rightarrow f_4$ est dérivable à droite de π et on a $f'_{4d}(\pi) = 0$.

On a $f'_{4g}(\pi) \neq f'_{4d}(\pi) \Rightarrow f_4$ n'est pas dérivable en π.

Ce qui donne que f_4 n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$5.f_5(x) = \begin{cases} e^x - 1, x \leq 0 \\ \sin \pi x, 0 < x \leq 1 \\ -\pi \ln x, x > 1 \end{cases}, D_{f_5} = \mathbb{R}.$$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

Pour x $<$ 0; $f_5(x) = e^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$.

Pour 0 $<$ x $<$ 1; $f_5(x) = \sin \pi x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0, 1[$.

Pour x $>$ 1;$f_5(x) = \pi \ln x$ dérivable sur $]0, +\infty[$ en particulier sur $]1, +\infty[$.

Pour x = 0; $f_5(0) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -0}} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{e^x - 1 - 0}{x} = 1 \Rightarrow f_5$ est dérivable à gauche de 0 et on a $f'_{5g}(0) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin \pi x}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \pi \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \pi \Rightarrow f_5$ est dérivable à droite de 0 et on a $f'_{5d}(0) = \pi$.

On a $f'_{5g}(0) \neq f'_{5d}(0) \Rightarrow f_5$ n'est pas dérivable en 0.

Pour x = 1; $f_5(1) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{f_5(x) - f_5(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{\sin \pi x - 0}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \frac{\sin \pi (t+1)}{t} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \frac{-\sin \pi t}{t} = \lim\limits_{\substack{< \\ t \to 0}} \pi \frac{-\sin \pi t}{\pi t} = -\pi \Rightarrow f_5$ est dérivable à gauche de 1 et on a $f'_{5g}(1) = -\pi$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{f_5(x) - f_5(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{-\pi \ln x}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} -\pi \frac{\ln(t+1)}{t} = -\pi \Rightarrow f_5$ est dérivable à droite de 1 et on a $f'_{5d}(\pi) = -\pi$.

On a $f'_{5g}(1) = f'_{5d}(1) \Rightarrow f_5$ est dérivable en 1 et on a $f'_5(1) = -\pi$.

Ce qui donne que f_5 n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcule de dérivée:

1. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_1(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

2. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et $f_2'(x)=\begin{cases} 1, x<-1 \\ -2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), x>-1 \end{cases}$.

3. f_3 est dérivable sur $]0,\pi[$ et $f_3'(x)=\frac{\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)\sin x-x^2\cos x\sin\frac{1}{x}}{(\sin x)^2}$.

4. f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}-\{\pi\}$ et $f_4'(x)=\begin{cases} 2x+1, x\leq 0 \\ \cos x, 0<x<\pi \\ -\sin x, x>\pi \end{cases}$.

5. f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f_5'(x)=\begin{cases} e^x, x<0 \\ \pi\cos\pi x, 0<x\leq 1 \\ \frac{-\pi}{x}, x>1 \end{cases}$.

Exercice2. Dérivée de fonctions composé

1) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$.

2) $f(x)=tg\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)'}{\cos^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)}=\frac{\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}}{\cos^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)}=\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2\cos^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)}$.

3) $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}=\frac{-2\left(x^2-1\right)}{(x^2+1)|x^2-1|}$

$f'(x)=\begin{cases} \frac{-2}{1+x^2},\ \text{si } x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\\ \frac{2}{1+x^2},\ \text{si } x\in\,]-1,1[\end{cases}$.

4) $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{-1}{1+x^2}$.

5) $f(x)=e^{\arctan x^2}\Rightarrow f'(x)=\left(arc\tan x^2\right)' e^{arc\tan x^2}=\frac{2x}{1+x^4}e^{\arctan x^2}$.

6) $f(x)=\arg shx\left(\frac{x}{1+x}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}}=\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)^2}}}=\frac{|x+1|}{(x+1)^2\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

7. $f(x)=\ln(\ln(\ln x))\Rightarrow f'(x)=\frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)}=\frac{\frac{(\ln x)'}{\ln x}}{\ln(\ln x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x\ln(\ln x)}=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

8. $f(x)=(chx)^{shx}=e^{shx\ln(chx)}\Rightarrow f'(x)=(shx\ln(\,chx))' e^{shx\ln(chx)}=\left(chx\ln chx+shx\frac{(chx)'}{chx}\right)e^{s}$

$f'(x)=\left(chx\ln chx+\frac{(shx)^2}{chx}\right)e^{shx\ln(chx)}$.

Exercice 3.

I. f définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $[0,1]$, et $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 1$.

Montrer en utilisant le théorème de Rolle que f'' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[0,1]$.

f deux fois dérivable sur $[0,1] \Rightarrow f''$ existe $[0,1] \Rightarrow f'$ dérivable sur $[0,1] \Rightarrow f'$ continue sur $[0,1] \Rightarrow f$ est dérivable sur $[0,1] \Rightarrow f$ continue sur $[0,1]$.

Appliquons le théorème de Rolle pour la fonction f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ f \text{ dérivable sur } \left]0,\frac{1}{2}\right[\\ f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists c_1 \in \left]0,\frac{1}{2}\right[/ f'(c_1) = 0 ...(1)$$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } \left[\frac{1}{2},1\right] \\ f \text{ dérivable sur } \left]\frac{1}{2},1\right[\\ f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) \end{array}\right\} \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists c_2 \in \left]\frac{1}{2},1\right[/ f'(c_2) = 0 ...(2)$$

On a $c_1 < c_2$ car $0 < c_1 < \frac{1}{2} < c_2 < 1$. Appliquons le théorème de Rolle pour la fonction f' sur $[c_1, c_2]$.

$$\left.\begin{array}{c} f' \text{ continue sur } [c_1,c_2] \subset [0,1] \\ f' \text{ dérivable sur }]c_1,c_2[\subset [0,1] \\ \text{de (1) et (2)}, f'(c_1) = f'(c_2) = 0 \end{array}\right\} \overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists c_3 \in]c_1,c_2[/ f''(c_3) = 0.$$

II. Montrons que $\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} < arc\tan x < x$.

Posons $f(t) = arctgt$, appliquons le théorème des accroissement finis (T.A.F.) sur $[0,x]$.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [0,x] \\ f \text{ dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Rightarrow} \exists c \in]0,x[/ f(x) - f(0) = (x-0) f'(c).$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \arctan x - \arctan 0 &= x\frac{1}{1+c^2} \\ \arctan x &= \frac{x}{1+c^2} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &< c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow 1 < 1 + c^2 < 1 + x^2 \\ \frac{1}{1+x^2} &< \frac{1}{1+c^2} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x, x > 0. \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x = \frac{x}{1+c^2} < x.$$

b) $\ln(100) = 4,6052$, Montrons qu'en écrivant: $\ln(101) = 4,6151$ on commet une erreur inférieur à 10^{-4}.

Appliquons le théorème des accroissement finis sur $[100, 101]$ pour la fonction $\ln x$.

$$\left.\begin{array}{r} \ln x \text{ continue sur } [100,101] \\ \\ \ln x \text{ dérivable sur }]100,101[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Rightarrow} \exists c \in]100,101[\,/\, \ln 101 - \ln 100 = (101-100)\,\tfrac{1}{c}.$$

donc

$$\begin{aligned} \ln 101 - \ln 100 &= \frac{1}{c} \\ \ln 101 &= \ln 100 + \frac{1}{c} \end{aligned}$$

l'erreur commise est $E = \ln 101 - 4,6151 = \ln 100 + \frac{1}{c} - 4,6151 = 4,6052 - 4,6151 + \frac{1}{c}$.

Et on a $100 < c < 101 \Rightarrow \frac{1}{101} < \frac{1}{c} < \frac{1}{100}$.

Ce qui donne

$$\begin{aligned} E &= 4,6052 - 4,6151 + \frac{1}{c} \\ E &< 4,6052 - 4,6151 + \frac{1}{100} \\ E &< -0,0099 + 0,01 \\ E &< 0,0001 = 10^{-4}. \end{aligned}$$

Exercice4. En utilisant la règle de l'Hopital, calculer les limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e}{\cos x - 1} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x e^{\cos x}}{-\sin x} = e$ ($e^{\cos x} - e, \cos x - 1$ sont dérivables sur D_f.)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(\cos x)^2}-\cos x}{1-\cos x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin x}{(\cos x)^3}+\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{(\cos x)^3}+1=3.$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-1}{(x-1)^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{2(x-1)}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{2}=-\frac{\pi^2}{8}.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin x}{x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1.$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(shx)^2-1}{3x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2chxshx}{3}=0.$

Exercice 5. En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n, pour la fonction e^x, on obtient

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}}_{rest\ de\ Cauchy},0<\theta<1$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} &> 0,\forall x>0\Rightarrow 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c>1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\\ &\Rightarrow e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!},\forall x>0\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 2, montrons que $\frac{8}{3}<e<3$.

On a

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}e^{\theta x},0<\theta<1.$$

Pour $x=1$, on obtient

$$\begin{aligned}e &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}e^{\theta},0<\theta<1.\\ e &= \frac{5}{2}+\frac{1}{6}e^{\theta}\end{aligned}$$

On a $0<\theta<1\Rightarrow 1<e^\theta<e\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{e^\theta}{6}<\frac{e}{6}\Rightarrow\frac{5}{2}+\frac{1}{6}<\underbrace{\dfrac{5}{2}+\dfrac{e^\theta}{6}}_{=e}<\frac{5}{2}+\frac{e}{6}$, donc

$$\frac{8}{3}=\frac{16}{6}<e...(1)$$

et

$$e<\frac{5}{2}+\frac{e}{6}\Rightarrow e-\frac{e}{6}<\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{5e}{6}<\frac{5}{2}\Rightarrow e<\frac{6}{2}=3...(2)$$

De (1) et (2)

$$\frac{8}{3} < e < 3.$$

On a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, 0 < \theta < 1$$

Pour $x = 1$, on aura

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}, 0 < \theta < 1$$

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$

et d'aprés la question précédente on a

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta} < \frac{1}{(n+1)!}e < \frac{3}{(n+1)!} \text{ car } e < 3$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Exercice 6. Soit la fonction $g(x) = e^{2x} - 2$.

1. Convexité de la fonction g.

$g'(x) = 2e^{2x}, g''(x) = 4e^{2x} > 0 \Rightarrow g$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Equation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

$(T) : y = g'(0)(x - 0) + g(0) = 2x - 1$.

$y = 2x - 1$ est l'équation de la tangente à la courbe de g.

3. Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right) \geq x$.

Puisque g est convexe sur $\mathbb{R}$ alors sa courbe représentative est au dessus de toutes ses tangentes, alors $g(x) \geq y$.

c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 2 \geq 2x - 1 \Rightarrow e^{2x} - 1 \geq 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right).$

Exercice supplementaire.

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ \arctan \frac{x}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. $D_f = \mathbb{R}$.

2. Continuité sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < 0, f(x) = e^x - 1$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$.

Pour $x > 0, f(x) = \arctan \frac{x}{1+x}$ continue sur $]0, +\infty[$ car quotient et composition de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

Pour $x = 0, f(0) = \arctan 0 = 0$.

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} e^x - 1 = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à gauche de 0.
$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \arctan \frac{x}{1+x} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continue à droite de 0.
d'où f continue en 0, par suit f continue sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < 0, f(x) = e^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$.

Pour $x > 0, f(x) = \arctan \frac{x}{1+x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ car quotient et composition de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

Pour $x = 0, f(0) = \arctan 0 = 0$.

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow f$ dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\arctan \frac{x}{1+x}}{x} \stackrel{H}{=} \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2}}{1} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{1 + 2x + 2x^2} = 1 \Rightarrow f$ dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 1$.

On a $f'_g(0) = f'_d(0) = 1 \Rightarrow f$ dérivable en 0 et on a $f'(0) = 1$

par suit f dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{1+2x+2x^2}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

II. Soit la fonction $\ln(x+1)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. Appliquer le théorème des accroissements finies pour cette fonction sur $[0, x]$.

$$\left.\begin{array}{c} \ln(t+1) \text{ continue sur } [0,+\infty[\text{ en particulier sur } [0,x] \\ \ln(t+1) \text{ dérivable sur }]0,x[\end{array}\right\} \overset{T.A.F.}{\Rightarrow} \exists c \in]0,x[\, / \ln(x+1) - \ln(0+1) = (x-0)\frac{1}{c+1}$$

donc

$$\ln(x+1) = \frac{x}{c+1}, \forall x > 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

D'aprés la première question $\ln(x+1) = \frac{x}{c+1}, 0 < c < x$, alors $1 < c+1 < x+1 \Rightarrow$ $\cdot \frac{x}{1+x} < \frac{x}{c+1} = \ln(x+1) \Rightarrow \frac{x}{1+x} - \ln(x+1) < 0, \forall x > 0.$

Pour $x = 0, g(0) = 0$ alors $\forall x \geq 0, g(x) \leq 0.$

REFERENCES

[**1**] Allab K., Eléments d'Analyse. O.P.U., 1984.

[**2**] Azoulay E., Avignant J., Auliac G., Problèmes corrigés de Mathématiques. DEUG MIAS/SM, Ediscience Dunod, Paris 2002.

[**3**] Baba-Hamed C., Benhabib K. , Analyse 1- Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985.

[**4**] Chambadal L., Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

[**5**] Calvo B., Doyen J., Boschet F., Cours d'Analyse. Paris, 1976.

[**6**] Monier J.M., Analyse PCSI-PTSI. Dunod, Paris, 2003.