TIPE: Précession du Périhélie de Mercure

Jean-Julien Fleck

Session 2019

Plan de l'exposé

Introduction historique

Position du problème

- La mécanique newtonienne, une mécanique bien huilée
- Précession du périhélie de Mercure

Introduction historique

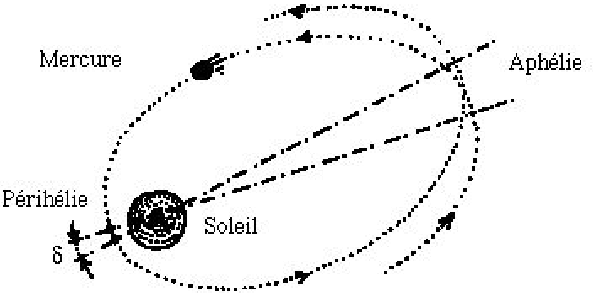
Position du problème

- La mécanique newtonienne, une mécanique bien huilée
- Précession du périhélie de Mercure

Introduction historique

Position du problème

- La mécanique newtonienne, une mécanique bien huilée
- Précession du périhélie de Mercure



Introduction historique

Explication classique

- Théorie des perturbations : explication de $531''$ d'arc/siècle
- Vulcain, un bon candidat (Le Verrier, 1859)
- mais pas de confirmation expérimentale...

Introduction historique

Explication classique

- Théorie des perturbations : explication de 531″ d'arc/siècle
- Vulcain, un bon candidat (Le Verrier, 1859)
- mais pas de confirmation expérimentale...

Introduction historique

Explication classique

- Théorie des perturbations : explication de $531''$ d'arc/siècle
- Vulcain, un bon candidat (Le Verrier, 1859)
- mais pas de confirmation expérimentale...

Introduction historique

Complément relativiste

- La relativité restreinte permet déjà un mieux ($7''$ d'arc en plus par siècle)
- mais c'est la générale qui va sauver la mise en ajoutant les $43''$ qui manquaient

Introduction historique

Complément relativiste

- La relativité restreinte permet déjà un mieux ($7''$ d'arc en plus par siècle)
- mais c'est la générale qui va sauver la mise en ajoutant les $43''$ qui manquaient

Relativité Restreinte

Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant $u = 1/r$, on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{G M m\, E}{L^2\, c^2}}_{\text{Partie usuelle}} + \underbrace{\frac{\left(G M m\right)^2}{L^2\, c^2}\, u}_{\text{Partie relativiste}}$$

Relativité Restreinte

Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant $u = 1/r$, on en arrive à l'équation

Relativité Restreinte

Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant $u = 1/r$, on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{G M m\, E}{L^2\, c^2}}_{\text{Partie usuelle}} + \underbrace{\frac{(G M m)^2}{L^2\, c^2}\, u}_{\text{Partie relativiste}}$$

Relativité Restreinte

Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant $u = 1/r$, on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GMm\,E}{L^2\,c^2}}_{\text{Partie usuelle}} + \underbrace{\frac{(GMm)^2}{L^2\,c^2}\,u}_{\text{Partie relativiste}}$$

Relativité Restreinte

Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant $u = 1/r$, on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{G M m\, E}{L^2\, c^2}}_{\text{Partie usuelle}} + \underbrace{\frac{(G M m)^2}{L^2\, c^2}\, u}_{\text{Partie relativiste}}$$

Relativité Restreinte

Dynamique relativiste

- Nouvelle définition de la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Avec les développements « classiques » et en posant $u = 1/r$, on en arrive à l'équation

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GMm\,E}{L^2\,c^2}}_{\text{Partie usuelle}} + \underbrace{\frac{(GMm)^2}{L^2\,c^2}\,u}_{\text{Partie relativiste}}$$

Relativité Restreinte

Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + B^2\,u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{G M m}{L\,c}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2}\left(1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]\right) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]}$$

Relativité Restreinte

Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + B^2\,u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{L\,c}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2}\left(1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]\right) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]}$$

Relativité Restreinte

Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + B^2\,u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{L\,c}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2}\left(1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]\right) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]}$$

Relativité Restreinte

Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + B^2\,u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{L\,c}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2}\left(1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]\right) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]}$$

Relativité Restreinte

Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + B^2\,u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{L\,c}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2}\left(1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]\right) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]}$$

Relativité Restreinte

Équation de l'ellipse

- Équation différentielle remise en forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + B^2\,u = A \quad \text{avec} \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{GMm}{L\,c}\right)^2}$$

- Équation de l'« ellipse »

$$u = \frac{A}{B^2}\left(1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]\right) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\left[B\left(\theta - \theta_0\right)\right]}$$

Relativité Restreinte

Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs, θ tourne de $2\pi + \delta$ où

$$\boxed{\delta = 2\pi\left(\frac{1}{B} - 1\right) \approx \pi\left(\frac{G\,M\,m}{L\,c}\right)^2 = \pi\,\frac{G\,M}{p\,c^2} = \pi\,\frac{G\,M}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que » $7''$ d'arc par siècle...

Relativité Restreinte

Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs, θ tourne de $2\pi + \delta$ où

$$\boxed{\delta = 2\pi\left(\frac{1}{B} - 1\right) \approx \pi\left(\frac{G\,M\,m}{L\,c}\right)^2 = \pi\,\frac{GM}{p\,c^2} = \pi\,\frac{GM}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que » $7''$ d'arc par siècle...

Relativité Restreinte

Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs, θ tourne de $2\pi + \delta$ où

$$\boxed{\delta = 2\pi\left(\frac{1}{B} - 1\right) \approx \pi\left(\frac{G\,M\,m}{L\,c}\right)^2 = \pi\,\frac{GM}{p\,c^2} = \pi\,\frac{GM}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que » $7''$ d'arc par siècle...

Relativité Restreinte

Avance du périhélie

- L'« ellipse » ne se referme pas sur elle-même du fait que $B \neq 1$
- Entre deux périhélies successifs, θ tourne de $2\pi + \delta$ où

$$\boxed{\delta = 2\pi \left(\frac{1}{B} - 1\right) \approx \pi \left(\frac{G\,M\,m}{L\,c}\right)^2 = \pi\,\frac{GM}{p\,c^2} = \pi\,\frac{GM}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

- Malheureusement, l'application numérique ne donne « que » $7''$ d'arc par siècle...

Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}}_{\text{Partie classique}} + \underbrace{\frac{3\,GM}{c^2}\,u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\boxed{\delta = 6\,\pi\,\frac{GM}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}}_{\text{Partie classique}} + \underbrace{\frac{3\,GM}{c^2}\,u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\boxed{\delta = 6\,\pi\,\frac{GM}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{G M m^2}{L^2}}_{\text{Partie classique}} + \underbrace{\frac{3\,GM}{c^2}\,u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\boxed{\delta = 6\,\pi\,\frac{GM}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

Relativité Générale

Et zut...

- Il n'y a plus guère de temps pour parler
- Alors zou, on balance le résultat des calculs

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}}_{\text{Partie classique}} + \underbrace{\frac{3\,GM}{c^2}\,u^2}_{\text{RG}}$$

- Après avoir bien bossé, on obtient finalement

$$\boxed{\delta = 6\,\pi\,\frac{GM}{a\,c^2\,(1-e^2)}}$$

Relativité Générale

Le code informatique

```
k+knimport n+nnscipy k+knas n+nnsp
k+knimport n+nnscipy.optimize

kdef n+nfmafonctionp(nxp):
    kreturn p[]

c+c1 À vous de remplir les choses adéquates...
```

Conclusion

sous forme de tableau

Newton	Rel. Restreinte	Rel. Générale
$531''$/siècle	($+7''$/siècle)	$+43''$/siècle
Observations : $574''$/siècle		

Table – Effet des différentes théories

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2e page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4e (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3e et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2e page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4e (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3e et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2e page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4e (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3e et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparitions successives

- Ce point apparaît en premier et reste tout le temps
- Celui-ci ne n'apparaîtra que à la 2^e page de cette diapo (mais l'espace reste disponible)
- ...avant donc l'apparition du 4^e (mais c'est bizarre de procéder ainsi)
- Et celui-ci vient en 3^e et reste jusqu'à la fin...

Exemples

Apparition d'une figure

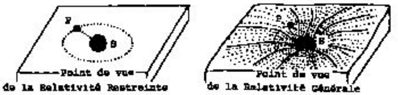
On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure

Et le texte qui suit

Exemples

Apparition d'une figure

On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure

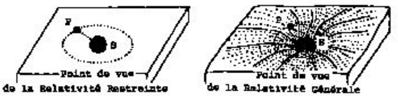


Et le texte qui suit

Exemples

Apparition d'une figure

On peut aussi mettre du texte brut avant apparition d'une figure



Et le texte qui suit

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times{\omega_0}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times\theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times{\omega_0}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1\times\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2}\times\theta=\overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times{\omega_0}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1\times\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2}\times\theta=\overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times{\omega_0}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times{\omega_0}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times{\omega_0}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times \omega_0{}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1\times\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2}\times\theta=\overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1\times\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\overbrace{\frac{g}{\ell}}^{=\omega_0{}^2}\times\theta=\overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}}\times\omega_0{}^2}$$

Exemples

Apparition d'une équation en plusieurs temps

L'idée est d'utiliser `\onslide` pour faire apparaître les morceaux uns à uns. Cela correspond à des bascules qui imposent le comportement de tout ce qui suit jusqu'au prochain `\onslide`. Par exemple, avec votre vieil ami l'oscillateur harmonique

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times {\omega_0}^2}$$

Le mieux est d'écrire l'équation voulue en une fois avec tous les rajouts et de découper ensuite. Par exemple ici, ce serait

$$1 \times \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \overbrace{\frac{g}{\ell}}^{={\omega_0}^2} \times \theta = \overbrace{A}^{=\theta_{\text{éq}} \times {\omega_0}^2}$$