الخطوة الأولى: فهم متغير الإزاحة t (دمج المستويات)

الروبوت يتكون من منصة علوية ثابتة (Base) ومنصة سفلية متحركة (End-effector). للتبسيط الرياضي، لا نريد حساب حركة منصة سفلية كاملة، بل نريد تتبع **نقطة واحدة فقط** (مركز المنصة السفلية).
للقيام بذلك، نقوم بـ "تصغير" المنصة السفلية حتى تصبح نقطة، وفي المقابل نقوم بتصغير المنصة العلوية بنفس المقدار.

- w_b: المسافة من مركز القاعدة العلوية إلى مفصل الموتور.
- u_p: المسافة من مركز المنصة السفلية إلى مفصل الذراع السفلي.

$$t = w_b - u_p$$

المعنى الفيزيائي لـ t: هو المسافة الأفقية الصافية بين مركز الروبوت والموتور، لو افترضنا أن المنصة السفلية أصبحت مجرد "نقطة" تتقاطع فيها الأذرع. هذا التبسيط يسمح لنا بافتراض أن الأذرع السفلية الثلاثة تتقاطع جميعها في نقطة واحدة (x_0, y_0, z_0).

الخطوة الثانية: حساب إحداثيات الكيعان (Elbows)

بناءً على طول الذراع العلوي L والزاوية θ لكل موتور، نحسب إحداثيات نهاية الذراع العلوي (الكوع) في الفراغ.
بما أن المواتير موزعة بزوايا $(90^\circ, 210^\circ, 330^\circ)$، نستخدم حساب المثلثات:

- **الكوع الأول (موجود على محور Y):**

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = -(t + L\cos\theta_1)$$

$$z_1 = -L\sin\theta_1$$

- **الكوع الثاني والكوع الثالث:** يتم تطبيق مصفوفة دوران بزاوية 120° و -120° للحصول على إحداثيات (x_2, y_2, z_2) و (x_3, y_3, z_3).

الخطوة الثالثة: المعادلات الأساسية (معادلات الكرات)

الذراع السفلي (طوله l) يربط بين الكوع والمنصة. بما أن مفصل الكوع كروي، فالذراع السفلي يمكنه الدوران في أي اتجاه، مما يرسم **كرة** في الفراغ نصف قطرها l ومركزها هو الكوع (x_i, y_i, z_i).
بما أن لدينا 3 أذرع، إذن لدينا 3 كرات تتقاطع في نقطة المنصة (x, y, z): PDF

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = l^2 \quad 1$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = l^2 \quad 2$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = l^2 \quad 3$$

الخطوة الرابعة: فك الأقواس وتجهيز المعادلات

نقوم بفك الأقواس التربيعية للمعادلة الأولى كمثال:

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + z^2 - 2zz_1 + z_1^2 = l^2$$

لتسهيل شكل المعادلة، نجمع الثوابت المربعة (إحداثيات الكوع) في متغير واحد نسميه w:

$$w_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

تصبح المعادلات الثلاثة بعد الفك وإعادة الترتيب كالتالي: PDF

1 $x^2 + y^2 + z^2 - 2yy_1 - 2zz_1 = l^2 - w_1$ (علماً بأن $x_1 = 0$)

2 $x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2 = l^2 - w_2$

3 $x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_3 - 2yy_3 - 2zz_3 = l^2 - w_3$

الخطوة الخامسة: الطرح لإنتاج معادلات خطية

المعادلات السابقة من الدرجة الثانية ويصعب حلها معاً. الحيلة الرياضية هي **طرح المعادلات من بعضها** لإلغاء الحدود التربيعية (x^2, y^2, z^2) والحد الثابت (l^2).

- **بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) والقسمة على 2، نحصل على:**

$$x_2x + (y_1 - y_2)y + (z_1 - z_2)z = \frac{w_1 - w_2}{2}$$

- **بطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) والقسمة على 2، نحصل على:**

$$x_3x + (y_1 - y_3)y + (z_1 - z_3)z = \frac{w_1 - w_3}{2}$$

💡 إيه هي قاعدة كرامر؟

تخيل إنك في إعدادي وعندك معادلتين خطيتين زي دول:

1. $2x + 3y = 8$
2. $5x - 4y = 7$

بدل ما تقعد تعوض وتطرح، "كرامر" عمل طريقة سحرية باستخدام **المحددات (Determinants)** بتديك الحل في خطوة واحدة. الطريقة بتقول:

لو عندك معادلتين بالشكل ده:

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

1. **بنجيب حاجة اسمها "المحدد العام" (Δ):** بنضرب مقص بين معاملات x و y:
$$\Delta = (A_1 \times B_2) - (A_2 \times B_1)$$
2. **عشان نجيب قيمة x:**
$$x = \frac{(C_1 \times B_2) - (C_2 \times B_1)}{\Delta}$$
3. **عشان نجيب قيمة y:**
$$y = \frac{(A_1 \times C_2) - (A_2 \times C_1)}{\Delta}$$

🚀 نطبق كرامر على الروبوت بتاعنا بقى:

في **الخطوة 5**، إحنا طرحنا معادلات الكرات من بعض، ونتج عندنا معادلتين كبار. هننقل أي حاجة فيها z للناحية التانية عشان نعتبرها "رقم ثابت" مؤقتاً، ونسيب x و y بس على الشمال.

المعادلتين هيبقوا بالشكل ده:

1 $$x_2 \cdot x + (y_2 - y_1) \cdot y = \left[\frac{w_2 - w_1}{2} - (z_2 - z_1)z\right]$$

2 $$x_3 \cdot x + (y_3 - y_1) \cdot y = \left[\frac{w_3 - w_1}{2} - (z_3 - z_1)z\right]$$

تعالى نطلع ال- A وال- B وال- C بتوع كرامر من المعادلات دي:

- **المعادلة الأولى:** $A_1 = x_2$
  $B_1 = (y_2 - y_1)$
  الجزء الكبير اللي بين القوسين المربعين فوق $= C_1$
- **المعادلة التانية:**
  $A_2 = x_3$
  $B_2 = (y_3 - y_1)$
  الجزء الكبير التاني $= C_2$

⚙️ التفكيك في الكود (سطر بسطر):

1. حساب المقام المشترك (`dnm`):

في كرامر، ال- x وال- y مقسومين على المحدد (Δ). الكود بيحسب محدد معكوس الإشارة اسمه `dnm` (عشان يظبط إشارات التعويض بعدين):

```
dnm = (y2 - y1)*x3 - (y3 - y1)*x2
```

(ده حرفياً هو ناتج $B_1A_2 - B_2A_1$)

2. حساب بسط ال- x (`a1` و `b1`):

قانون كرامر لل- x هو بسط مقسوم على مقام. البسط ده فيه جزء مضروب في z، وجزء أرقام ثابته مفيهاش z.

- الكود لم كل الرموز المضروبة فى z وسمّاها `a1` :

```
a1 = (z2 - z1)*(y3 - y1) - (z3 - z1)*(y2 - y1)
```

- ولم كل الأرقام الثابتة اللي مفيهاش z وسمّاها `b1` :

```
b1 = -((w2 - w1)*(y3 - y1) - (w3 - w1)*(y2 - y1)) / 2.0
```

- **إذن المعادلة النهائية لل- x بقت:**

$$x = \frac{a_1 \cdot z + b_1}{dnm}$$

3. حساب بسط الـ y (`a2` و `b2`):

بنفس الطريقة بالضبط طبقنا قانون كرامر للـ y.

- الجزء المضروب في z سمّيناه `a2` :

```
a2 = -(z2 - z1)*x3 + (z3 - z1)*x2
```

- الجزء الثابت سمّيناه `b2` :

```
b2 = ((w2 - w1)*x3 - (w3 - w1)*x2) / 2.0
```

- **إذن المعادلة النهائية للـ y بقت:**

$$y = \frac{a_2 \cdot z + b_2}{dnm}$$

💥 الخطوة السابعة: الضربة القاضية (تكوين المعادلة التربيعية)

إحنا كده معانا x و y كمعادلات صغيرة بدلالة الـ z.
هنمسك المعادلة الأصلية بتاعة أول كرة خالص:

$$x^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = l^2$$

وهنشيل الـ x ونحط مكانها $\left(\frac{a_1 z + b_1}{dnm}\right)$، ونشيل الـ y ونحط $\left(\frac{a_2 z + b_2}{dnm}\right)$.
عشان نطير المقامات دي وميبقاش عندنا كسور، بنضرب المعادلة كلها في dnm^2. ولما نفك الأقواس التربيعية دي كلها ونجمع اللي شبه بعضه، هيتكون عندنا معادلة من الدرجة التانية في مجهول واحد بس (z) شكلها كده:

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

من هنا جت السطور التلاتة دول في الكود (دول ناتج فك الأقواس وتجميع المعاملات):

- **تجميع كل اللى مضروب في z^2 (المعامل a):**
  `a = a12 + a22 + dnm2`
- **تجميع كل اللي مضروب في z (المعامل b):**
  `b = 2 * (a1*b1 + a2*(b2 - y1*dnm) - z1*dnm2)`
- **تجميع الأرقام الثابتة (المعامل c):**
  `c = (b2 - y1*dnm)2 + b12 + dnm2*(z12 - self.l2)`

بمجرد ما الكود بيحسب الأرقام دي (`a, b, c`)، بيطبق قانون حل المعادلة التربيعية العادي جداً (بتاع المميز والجذر) عشان يطلع قيمة z، وبعدها يعوض بيها في المعادلات الصغيرة اللي فوق عشان يجيب x و y.

كده الكود مابقاش طلاسم، ده مجرد آلة حاسبة سريعة بتنفذ قاعدة كرامر خطوة بخطوة!

يعني إيه t بالبلدي؟ ☕

تخيل إن الروبوت بتاعك شايل "صينية" (اللي هي المنصة السفلية End-effector). الصينية دي ليها حجم (نص قطرها اسمه u_p). المواتير فوق متثبتة على قاعدة كبيرة (نص قطرها اسمه w_b).

الدراعات الفضية (الـ Passive links) متوصلة بطروف الصينية من تحت. عشان الرياضيين يسهلوا على نفسهم الحسابات المعقدة دي، قالوا: **"إيه رأيك نعتبر الصينية دي صغرت وكشت لحد ما بقت مجرد (نقطة واحدة) في النص؟"** الفكرة دي ممتازة وهتخلي الـ 3 دراعات يتقاطعوا في نقطة واحدة بدل ما يتقاطعوا في 3 نقط مختلفة على طروف الصينية. **بس في مشكلة:** لو إنت صغرت الصينية من تحت، وسيبت مقاس القاعدة اللي فوق زي ما هو، الدراعات هتميل للداخل وزواياها هتبوظ!

الحل: زي ما خصمنا حجم الصينية من تحت، لازم "نخصم" نفس المقدار من القاعدة اللي فوق.
يعني هنقول: المقاس اللي هنشتغل عليه في الحسابات للقاعدة اللي فوق هو (w_b ناقص u_p). ناتج الطرح ده هو اللي بنسميه t.

إذن t ببساطة هي: **المسافة الصافية للمواتير فوق، بعد ما ضغطنا المنصة السفلية واعتبرناها مجرد نقطة عشان نسهل الحسابات.**