ENSA d'Al-Hoceima
AP-II, Deuxième Année,
Analyse Numérique,

Année 2020/2021
Semestre 4
TD2

Solution de la Série N^{o}2 : Méthodes directes et méthodes itératives pour la résolution de système $Ax = b$

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la factorisation $L.U$ de la matrice A.
2. Jusitifier que A est factorisable selon Cholesky, puis calculer la factorisation de Cholesky de A

Solution 1

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}$

1. Calculons la factorisation $L.U$ de la matrice A : On a

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad \text{pour} \quad k+1 \leq i \leq n$$

– Pour $k = 1$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \ell_{21} &= \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{1} = 2 \\ \ell_{31} &= \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{1} = 3 \\ \ell_{41} &= \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{4}{1} = 4 \end{aligned}$$

donc

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\ell_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -\ell_{31} & 0 & 1 & 0 \\ -\ell_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_1 A = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & 26 & -7 \\ 0 & 2 & -7 & 29 \end{pmatrix}$$

– Pour $k = 2$, alors on obtient

$$\begin{aligned}\ell_{32} &= \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{5}{1} = -5 \\ \ell_{34} &= \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

donc

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell_{32} & 1 & 0 \\ 0 & -\ell_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 L_1 A = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 25 \end{pmatrix}$$

– Pour $k = 3$, alors on obtient

$$\ell_{43} = \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{3}{1} = 3$$

donc

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell_{43} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 L_2 L_1 A = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

On pose $U = A^{(4)}$ alors $L_3 L_2 L_1 A = U$ où

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure.
Donc on obtient $A = (L_3 L_2 L_1)^{-1} U$; en posant $L = (L_3 L_2 L_1)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$ alors

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = LU.$$

2. – La matrice A est factorisable selon Cholesky : en effet, d'après la factorisation LU de A on remarque que

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & O \\ Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ O^T & 16 \end{pmatrix}$$

où $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = (4, 2, 3)$ et $O = (0, 0, 0)^T$. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$, alors

$$U\xi = \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ O^T & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\xi} \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T\widetilde{\xi} + Y^T\xi_4 \\ O^T\widetilde{\xi} + 16\xi_4 \end{pmatrix}$$

où $Y^T\xi_4 = (4\xi_4, 2\xi_4, 3\xi_4)^T$, alors on a

$$(A\xi, \xi) = (LU\xi, \xi) = (U\xi, L^T\xi)$$

où $L^T = \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ O^T & 1 \end{pmatrix}$ et $L^T\xi = \begin{pmatrix} X^T\widetilde{\xi} + Y^T\xi_4 \\ O^T\widetilde{\xi} + \xi_4 \end{pmatrix}$. Donc il vient

$$(A\xi, \xi) = (U\xi, L^T\xi) = (X^T\widetilde{\xi} + Y^T\xi_4, X^T\widetilde{\xi} + Y^T\xi_4) + (16\xi_4, \xi_4) = \|X^T\widetilde{\xi} + Y^T\xi_4\|^2 + 16\xi_4^2$$

d'où $(A\xi, \xi) = \|X^T\widetilde{\xi} + Y^T\xi_4\|^2 + 16\xi_4^2 > 0$ pour tout ξ un vecteur non nul. Ce qui justifie que A est symétrique et définie-positive, d'où A admet une factorisation suivant la méthode de Cholesky.

– Calculons la factorisation de Cholesky BB^t de A : la matrice $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le 4}$ avec

$$\begin{aligned} b_{jj} &= \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2 \right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad 1 \le j \le 4 \\ b_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} \right) / b_{jj} \quad \text{pour} \quad i \ge j+1. \end{aligned}$$

D'après ces deux relations, il vient

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1; b_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2; b_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{et} \quad b_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = 1; b_{32} = \frac{a_{32} - b_{31}b_{21}}{b_{22}} = -5 \quad \text{et} \quad b_{42} = \frac{a_{42} - b_{41}b_{21}}{b_{22}} = 2$$

$$b_{33} = \sqrt{a_{22} - b_{31}^2 - b_{32}^2} = 1 \quad \text{et} \quad b_{43} = \frac{a_{43} - b_{41}b_{31} - b_{42}b_{32}}{b_{33}} = 3$$

$$b_{44} = \sqrt{a_{44} - b_{41}^2 - b_{42}^2 - b_{43}^2} = 4$$

d'où la matrice B est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit A une matrice inversible et b, U et V trois vecteurs. On considère les systèmes :

(i) $Ax = b$,

(ii) $(A + UV^T)y = b$.

1. Calculer $y - x$ en fonction de A, U, V et y.
2. Si on connait x, peut-on calculer y sans résoudre le système (ii) ? Le calcul est-il toujours possible ?
3. En déduire l'inverse de $(A + UV^T)^{-1}$.

Solution 2

Considérons une matrice inversible A et b, U et V trois vecteurs. Soit les systèmes :

(i) $Ax = b$,

(ii) $(A + UV^T)y = b$.

1. Calculons $y - x$ en fonction de A, U, V et y : d'après (i) et (ii) on a $(A + UV^T)y = Ax$, donc

$$A(y - x) = -UV^T y \quad \text{d'où} \quad y - x = -A^{-1}(UV^T y) = -(A^{-1}U) \cdot (V^T y)$$

c'est à dire que $y - x = -(V^T y).A^{-1}U \quad \clubsuit$

car $V^T y = \sum_{i=1}^{n} V_i y_i$ est le produit scalaire entre V et y et $A^{-1}U$ est un vecteur.

2. Supposons que x est donné, d'après $\clubsuit$ on a

$$y = x + (-V^T y).A^{-1}U$$

en multipliant les deux membres de l'égalité par V^T, on obtient

$$V^T y = V^T x - (V^T A^{-1} U) V^T y$$

donc $V^T y + (V^T A^{-1} U) V^T y = V^T x$; d'où $(1 + V^T A^{-1} U) V^T y = V^T x$.
On pose $\lambda = 1 + V^T A^{-1} U$, alors
– si $\lambda \neq$, alors

$$V^T y = \frac{V^T x}{1 + V^T A^{-1} U}$$

en multipliant les deux côtés de l'égalité par U, on obtient

$$UV^T y = \frac{V^T x}{1 + V^T A^{-1} U}\, U$$

donc avec le fait que $UV^T y = b - Ay$ on a

$$b - Ay = \frac{V^T x}{1 + V^T A^{-1} U}\, U \quad \Rightarrow \quad Ay = b - \frac{V^T x}{1 + V^T A^{-1} U}\, U$$

finalement

$$y = A^{-1} b - \frac{V^T x}{1 + V^T A^{-1} U}\, A^{-1} U$$

- si $\lambda = 0$, alors on a
  - si $V^T x = 0$, alors $V^T A^{-1} b = 0$, donc à partir de (ii), on trouve $(A + UV^T)y = b$; d'où x est une solution de l'équation (ii).
  - si $V^T x \neq 0$, alors l'équation (ii) n'a pas de solution.

3. Calculons l'inverse $(A + UV^T)^{-1}$ de $A + UV^T$: pour $\lambda \neq 0$, alors d'après l'égalité

$$y = A^{-1}b - \frac{V^T x}{1 + V^T A^{-1} U} A^{-1} U$$

il vient

$$y = A^{-1}b - \frac{A^{-1}U}{1 + V^T A^{-1} U} V^T A^{-1} b$$

donc

$$y = \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}U}{1 + V^T A^{-1} U} V^T A^{-1} \right) b$$

finalement

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}U}{1 + V^T A^{-1} U} V^T A^{-1}.$$

Exercice 3

Soit A une matrice d'ordre n.

1. Montrer que la factorisation $L.U$ de A, où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U est triangulaire supérieure, est unique.
2. Montrer que la factorisation $A = B.B^T$, où B est triangulaire inférieure avec $b_{ii} > 0$, est unique.

Solution 3

Considérons une matrice A d'ordre n.

1. Montrons que la factorisation $L.U$ de A, où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U est triangulaire supérieure, est unique : supposons qu'il existe L, L', U et U' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que
$$A = L\,U = L'\,U'$$
où $\ell_{ii} = \ell'_{ii} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors, il vient $L^{-1}\,L' = U\,U'^{-1}$.
Or l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) et le produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), alors $L^{-1}\,L'$ est une matrice triangulaire inférieure et $U\,U'^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure ; donc $L^{-1}\,L' = U\,U'^{-1} = D$ est une matrice diagonale.
Comme $\ell_{ii} = \ell'_{ii} = 1$, alors on en déduit que $D = I_n$ est la matrice identité d'ordre n. Par conséquence il vient $L = L'$ et $U = U'$.
2. Montrons que la factorisation $A = B.B^T$, où B est triangulaire inférieure avec $b_{ii} > 0$, est unique : supposons qu'il existe B et B' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que
$$A = B\,B^t = B'\,B'^t$$

où $b_{ii} >$ et $b'_{ii} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et B et B' sont deux matrices triangulaires inférieures.
Alors $B^t(B'^t)^{-1} = B^{-1}B' = D$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux

$$d_{ii} = \frac{b'_{ii}}{b_{ii}} = \frac{b_{ii}}{b'_{ii}}$$

donc $b_{ii}^2 = b'^2_{ii}$ pour tout $1 \leq i \leq n$;
or $b_{ii} >$ et $b'_{ii} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $b_{ii} = b'_{ii}$ pour tout $1 \leq i \leq n$; d'où $d_{ii} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$; par suite $B^t = B'^t$ et $B = B'$.

Exercice 4
On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels la méthode de Jacobi est convergente.
2. Déterminer l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Solution 4
Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Les méthodes itératives classiques sont de la forme :

$$\begin{cases} x_0, & \text{valeur initiale donnée} \\ x_{k+1} = B\,x_k + c, k \geq 0 \end{cases}$$

où $B \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$ et $c \in \mathbb{K}^n$ sont donnés en fonction de A et b.

1. Déterminons l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels la méthode de Jacobi est convergente : on en peut parler de la méthode de Jacobi que si la matrice A est inversible, c'est à dire que $\det(A) \neq 0$. Or $\det(A) = 1 - 2\alpha + \beta^2$, alors A est nversible si et seulement si $\det(A) = 1 - 2\alpha + \beta^2 \neq 0$. Supposons que A est inversible, alors la décomposition de Jacobi est $A = D - N$ où

   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ -1 & 0 & -1 \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   donc la matrice de Jacobi est $J = D^{-1}N = N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ -1 & 0 & -1 \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

   Or la méthode itérative de Jacobi converge si et seulement si $\rho(J) < 1$, alors déterminons le polynôme caractéristique de J :

$$P_J(\lambda) = \det(J - \lambda\, I_3) = \lambda(-\lambda^2 + 2\alpha - \beta^2)$$

Le spectre $\mathrm{Sp}(J)$ de la matrice J est l'ensemble des valeurs propres de J, soit

$$\mathrm{Sp}(J) = \{\lambda \,/\, P_J(\lambda) = 0\} = \{-\sqrt{2\alpha - \beta^2}; \sqrt{2\alpha - \beta^2}\}$$

on a $P_J(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + 2\alpha - \beta^2) = 0$ alors $\lambda = 0$ où bien $\lambda^2 = 2\alpha - \beta^2$, donc
– si $2\alpha - \beta^2 \geq 0$, alors $\mathrm{Sp}(J)$ de la matrice J est

$$\mathrm{Sp}(J) = \{-\sqrt{2\alpha - \beta^2}; 0; \sqrt{2\alpha - \beta^2}\}$$

dans ce cas $\rho(J) = \sqrt{2\alpha - \beta^2}$
– si $2\alpha - \beta^2 < 0$, alors $\mathrm{Sp}(J)$ de la matrice J est

$$\mathrm{Sp}(J) = \{-\mathrm{i}\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}; 0; \mathrm{i}\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}\}$$

dans ce cas $\rho(J) = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha}$
donc dans tous les cas $\rho(J) = \sqrt{|2\alpha - \beta^2|}$, ce qui montre que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $|2\alpha - \beta^2| < 1$.

2. Déterminons l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels la méthode de Gauss-Seidel est convergente : Supposons que A est inversible, alors la décomposition de Jacobi est $A = D - E - F$ où

$$D - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc la matrice de Jacobi est $\mathscr{L}_1 = (D - E)^{-1}F$.
La méthode itérative de Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(\mathscr{L}_1) < 1$. On a bien

$$\mathscr{L}_1 = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \alpha + \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathscr{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta - 1 \\ 0 & -\alpha(\alpha + \beta) & \alpha - \beta(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice de Gauss-Seidel est

$$P_{\mathscr{L}_1}(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 + \lambda(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha) - \alpha\beta\right)$$

or $P_{\mathscr{L}_1}(\lambda) = 0$ implique $\lambda = 0$ où bien $\lambda^2 + \lambda(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha) - \alpha\beta = 0$

$$\Delta = (\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha)^2 + 4\alpha\beta$$

– si $\Delta \geq 0$, alors

$$\lambda_2 = -\frac{\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha)^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

$$\lambda_3 = -\frac{\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha - \sqrt{(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha)^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

dans ce cas

$$\rho(\mathscr{L}_1) = \frac{\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha)^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

– si $\Delta < 0$, alors

$$\lambda_2 = -\frac{\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha + \mathrm{i}\sqrt{(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha)^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

$$\lambda_3 = -\frac{\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha - \mathrm{i}\sqrt{(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha)^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

dans ce cas

$$\rho(\mathscr{L}_1) = \frac{\sqrt{2(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha)^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

Dans les deux cas, la convergence est assurée si et seulement si $\rho(\mathscr{L}_1) < 1$.

Exercice 5

On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de α la matrice A est définie positive.
2. Montrer que la méthode de Jacobi est convergente si et seulement si $A = D - E - F$ et $D + E + F$ sont définies positives simultanément.

Solution 5

Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Les valeurs de α la matrice A soit définie positive sont telles que les valeurs propres de A soient strictement positive. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_3) = (1 + 2\alpha - \lambda)(1 - x - \alpha)^2$$

   Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1 - \alpha$ double et $\lambda_2 = 1 + 2\alpha$ simple.
   La matrice A est définie-positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset]0; +\infty[$, ce qui est équivalement à ce que $1 - \alpha > 0$ et $1 + 2\alpha > 0$; d'où $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}; 1\right[$. C'est à dire que A est définie-positive si et seulement si $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}; 1\right[$.

2. Montrons que la méthode de Jacobi est convergente si et seulement si $A = D - E - F$ et $D + E + F$ sont définies positives simultanément : en effet, A se décompose selon $A = D - E - F$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Jacobi $J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

le polynôme caractéristique de J est $P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I_3) = -(\lambda - \alpha)^2(\lambda + 2\alpha)$; donc les valeurs propres de J sont $\beta_1 = \alpha$ double et $\beta_2 = -2\alpha$ simple. La méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(J) < 1$; or $\rho(J) = \max(|\alpha|; 2|\alpha|) < 1$, alors $2|\alpha| < 1$; donc $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$; d'où $\rho(J) < 1$ si et seulement si $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right[$.

La matrice $C = D + E + F = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$, alors le polynôme cara ctéristique de C est $P_C(\lambda) = -(\lambda - 1 - \alpha)^2(\lambda - 1 + 2\alpha)$; donc le spectre de C est

$$\mathrm{Sp}(C) = \{1 + \alpha; 1 - 2\alpha\}\cdot$$

– la méthode de Jacobi converge, c'est à dire que $\rho(J) < 1$ équivalent à $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right[$

– les matrices $A = D - E - F$ et $D + E + F$ sont définies positives simultanément équivalent à $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ et $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$; donc $A = D - E - F$ et $D + E + F$ sont définies positives simultanément équivalent à $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{2}; 1\right[\cap \left]-1; \dfrac{1}{2}\right[= \left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right[$

on remarque que la méthode de Jacobi converge si et seulement si les matrices $A = D - E - F$ et $D + E + F$ sont définies positives simultanément ; c'est à dire que $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right[$.

Exercice 6

Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$, et la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 + \alpha_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \alpha_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + \alpha_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est définie positive.
2. Pour $\beta \geq 0$, soit la décomposition $A = M_\beta - N_\beta$ où $N_\beta = \mathrm{diag}(\beta - \alpha_i)$.
   Étudier la convergence de la méthode itérative associée à cette décomposition suivant les valeurs de β.

Solution 6

Pour $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$, considérons la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+\alpha_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2+\alpha_n \end{pmatrix}$$

1. Montrons que A est définie positive : en effet, soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que x est non nul, montrons que $x^T A x = (Ax, x) > 0$. Le vecteur x est représenté par ses coordonnées $x = (x_1, x_1, \dots, x_n)^T$, alors on a

$$Ax = \begin{pmatrix} 2+\alpha_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+\alpha_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2+\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\alpha_1)x_1 - x_2 \\ -x_1 + (2+\alpha_2)x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{i-1} + (2+\alpha_i)x_i - x_{i+1} \\ \vdots \\ -x_{n-2} + (2+\alpha_{n-1})x_{n-1} - x_n \\ -x_{n-1} + (2+\alpha_n)x_n \end{pmatrix}$$

en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, on aura

$$Ax = \begin{pmatrix} -x_0 + (2+\alpha_1)x_1 - x_2 \\ -x_1 + (2+\alpha_2)x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{i-1} + (2+\alpha_i)x_i - x_{i+1} \\ \vdots \\ -x_{n-2} + (2+\alpha_{n-1})x_{n-1} - x_n \\ -x_{n-1} + (2+\alpha_n)x_n - x_{n+1} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
x^T A x &= \sum_{i=0}^{n-1} (-x_i + (2+\alpha_{i+1})x_{i+1} - x_{i+2})x_{i+1} \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} (2+\alpha_{i+1})x_{i+1}x_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+2}x_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}x_{i+1}^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+2}x_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}x_{i+1}^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \quad \text{car} \quad x_0 = 0 = x_{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}x_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}x_{i+1}^2 + x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}x_{i+1}^2 + x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2
\end{aligned}$$

or on a $x_1^2 + x_n^2 \geq 0$, et on a $\alpha_{i+1}x_{i+1}^2 \geq 0$ et $(x_{i+1} - x_i)^2 \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}x_{i+1}^2 + x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \geq 0$$

d'où $x^T A x \geq 0$; ce qui prouve que A est positive. Et, $x^T A x = 0$ est équivalent à

$$\begin{cases} x_{i+1} - x_i = 0, \text{pour tout } \ i \in \{1, \ldots, n\} \\ x_1 = x_n = 0 \\ \alpha_{i+1}\, x_{i+1}^2 = 0 \end{cases}$$

d'où $x^T A x > 0$ pour tout x vecteur non nul ; et finalement A est définie-positive.

2. Pour $\beta \geq 0$, soit la décomposition $A = M_\beta - N_\beta$ où $N_\beta = \mathrm{diag}(\beta - \alpha_i)$: la convergence de la méthode itérative associée à cette décomposition suivant les valeurs de β, en effet, on a

$$M_\beta = A + N_\beta = \begin{pmatrix} 2+\beta & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2+\beta & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2+\beta \end{pmatrix}$$

et

$$M_\beta^T + N_\beta = \begin{pmatrix} 2+2\beta-\alpha_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2+2\beta-\alpha_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2+2\beta-\alpha_n \end{pmatrix}$$

alors

$$M_\beta^T + N_\beta = A + 2N_\beta$$

Si $2\beta - \alpha_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors $M_\beta^T + N_\beta$ est définie-positive ; par conséquence, la méthode itéraative associée à cette décomposition converge. La méthode est convergente si $\beta \geq \frac{1}{2}\alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\beta \geq \frac{1}{2}\max\{\alpha_i \ : \ 1 \leq i \leq n\}$.

Exercice 7

Pour résoudre le système $Ax = b$, où A est une matrice réelle inversible mais mal conditionnée, on propose la méthode suivante :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \alpha > 0 \text{ sont donnés,} \\ \\ (A^TA + \alpha I)x_{m+1} = \alpha x_m + A^Tb \end{cases}$$

1. Vérifier que la suite $(x_m)_{m\geq 0}$ est bien définie.
2. Calculer $\kappa_2(A^TA + \alpha I)$.
3. Trouver $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \kappa_2(A^TA + \alpha I)$.
4. Montrer que la suite $(x_m)_{m\geq 0}$ converge vers la solution du système $Ax = b$ pour tout $\alpha > 0$.
5. Étudier la vitesse de convergence de la méthode en fonction de α.

Solution 7

Soit à résoudre le système $Ax = b$, où A est une matrice réelle inversible et mal conditionnée, on propose la méthode suivante :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \alpha > 0 \text{ sont donnés,} \\ \\ (A^TA + \alpha I)x_{m+1} = \alpha x_m + A^Tb \end{cases}$$

1. La suite $(x_m)_{m\geq 0}$ est bien définie, en effet, il suffit de vérifier que la suite $(x_m)_{m\geq 0}$ existe ; alors pour cela il suffit de montrer que $\mathrm{Sp}(A^TA + \alpha I) \subset]0; +\infty[$.
   Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^TA)$, alors $\lambda \geq 0$.
   Soit $\beta \in \mathrm{Sp}(A^TA + \alpha I)$, alors $\beta = \lambda + \alpha > 0$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^TA)$;
   donc $A^TA + \alpha I$ est symétrique, définie-positive et inversible ; d'où $\mathrm{Sp}(A^TA + \alpha I) \subset]0; +\infty[$; d'où la suite $(x_m)_{m\geq 0}$ est bien définie.
2. Calculons le conditionnement $\kappa_2(A^TA + \alpha I)$: par définition, on a

   $$\kappa_2(A^TA + \alpha I) = \|A^TA + \alpha I\|_2 \, \|(A^TA + \alpha I)^{-1}\|_2$$

   alors

   $$\kappa_2(A^TA + \alpha I) = \rho(A^TA + \alpha I)\, \rho((A^TA + \alpha I)^{-1})$$

   soit $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A^TA rangées dans l'ordre croissant, alors

   $$\rho(A^TA + \alpha I) = \max\{\lambda_i + \alpha \ : \ i = 1, \ldots, n\} = \lambda_{max} + \alpha$$

et

$$\rho((A^TA+\alpha I)^{-1}) = \max\{(\lambda_i+\alpha)^{-1} \; : \; i=1,\dots,n\} = \frac{1}{\lambda_{min}+\alpha}$$

d'où

$$\kappa_2(A^TA+\alpha I) = \frac{\lambda_{max}+\alpha}{\lambda_{min}+\alpha}$$

où $\lambda_{max} = \max\{\lambda \; : \; \lambda \in \mathrm{Sp}(A^TA)\}$ et $\lambda_{min} = \min\{\lambda \; : \; \lambda \in \mathrm{Sp}(A^TA)\}$.

3. La limite $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \kappa_2(A^TA+\alpha I)$: on a

$$\kappa_2(A^TA+\alpha I) = \frac{\lambda_{max}+\alpha}{\lambda_{min}+\alpha} = \frac{1+\dfrac{\lambda_{max}}{\alpha}}{1+\dfrac{\lambda_{min}}{\alpha}}$$

comme $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\lambda_{max}}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\lambda_{min}}{\alpha} = 0$, alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \kappa_2(A^TA+\alpha I) = 1$, donc, lorsque α est très grand alors la matrice $A^TA+\alpha I$ est bien conditionnée.

4. La suite $(x_m)_{m\geq 0}$ converge vers la solution du système $Ax=b$ pour tout $\alpha>0$ si et seulement si $\rho(A^TA+\alpha I)<1$. On a

$$(A^TA+\alpha I)x_{m+1} = \alpha x_m + A^Tb, \quad \forall m\geq 0$$

alors

$$x_{m+1} = \alpha(A^TA+\alpha I)^{-1}\, x_m + (A^TA+\alpha I)^{-1}\, A^Tb, \quad \forall m\geq 0$$

comme $\lambda_{min}>0$, alors $\rho(\alpha(A^TA+\alpha I)^{-1}) = \alpha\,\rho((A^TA+\alpha I)^{-1}) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\lambda_{min}} < 1$; d'où $(x_m)_{m\geq 0}$ converge pour tout $\alpha>0$.

Supposons que la suite $(x_m)_{m\geq 0}$ converge vers x^* lorsque $m\to+\infty$, montrons que $Ax^*=b$?

à la limité $m\to+\infty$, alors $(A^TA+\alpha I)x^* = \alpha x^* + A^Tb$, donc $(A^TA+\alpha I-\alpha\, I)x^* = A^Tb$; d'où $A^TAx^* = A^Tb$ et comme A^T est inversible et définie-positive, alors il vient $Ax^*=b$; d'où $x^*=x$ puisque $Ax=b=Ax^*$ et A est inversible. D'où $(x_m)_{m\geq 0}$ converge vers la solution x du système $Ax=b$.

5. La vitesse de convergence de la méthode en fonction de α : Par définition, la vitesse de convergence est

$$v(\alpha) = -\ln\Big(\rho(\alpha(A^TA+\alpha I)^{-1})\Big). \quad \text{Posons} \quad f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_{min}}\cdot$$

La fonction f est une fonction de variable α positive, alors $f'(\alpha) = \dfrac{\lambda_{min}}{(\alpha+\lambda_{min})^2} > 0$ pour tout $\alpha>0$; donc v est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$.

– Plus que α est petit, alors plus que le taux de convergence (vitesse de convergence) est grand,
– Plus que α est grand, alors plus que le taux de convergence est petit, dans ce cas $A^TA+\alpha I$ est bien conditionnée

La meilleur vitesse est celle obtenue lorsque α est plus proche de 0.

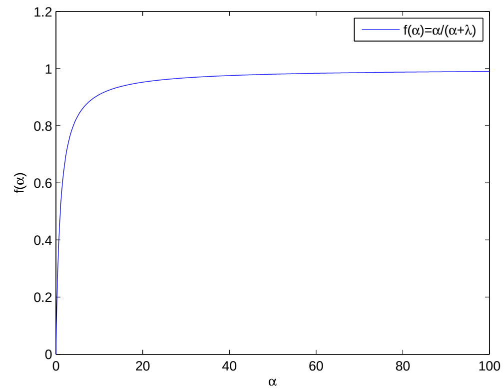

FIGURE 1 – Représentation de la fonction $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_{min}}$

Exercice 8

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique définie positive et soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$. Soit la matrice $D = diag(a_{ii})$.

1. Montrer que la matrice D est inversible.
2. Vérifier que les valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de la matrice $D^{-1}A$ sont réelles strictement positives.
3. Pour résoudre le problème linéaire $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \omega \in \mathbb{R}^* \text{ sont donnés,} \\ \\ x_{k+1} = (I - \omega D^{-1}A)x_k + \omega D^{-1}b. \end{cases}$$

   (a) Vérifier que pour $\omega = 1$, cette méthode n'est autre que celle de Jacobi.

   (b) Vérifier que si cette méthode converge, alors elle convergera vers la solution du système linéaire.

   (c) Pour quelles valeurs de ω (en fonction des λ_i) cette méthode converge-t-elle ?

   (d) Quel est le choix optimal de ω ?

Solution 8

Considérons une matrice symétrique définie positive $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et un vecteur b de $\mathbb{R}^n$. Proposons de résoudre le système linéaire $Ax = b$. On note $D = diag(a_{ii})$ la matrice formée des éléments diagonaux de la matrice A.

1. Montrons que la matrice D est inversible : en effet, la matrice D est inversible si et seulement si $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$, ce qui est équivalent à dire que $a_{ii} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. La matrice A est symétrique et définie-positive, alors $x^T Ax > 0$ pour tout vecteur non nul x. En particulier, pour les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc pour $x = e_i$ on a $e_i^T Ae_i = a_{ii}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Or e_i est un vecteur non nul, alors $e_i^T Ae_i = a_{ii} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$;
   d'où $a_{ii} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$; finalement D est inversible et définie-positive même.

2. Vérifions que les valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de la matrice $D^{-1}A$ sont réelles strictement positives : soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs propres de $D^{-1}A$, soit x un vecteur propre de $D^{-1}A$ associé à la valeur propre λ, alors on a $D^{-1}A\ x = \lambda\, x$, donc $A\,x = \lambda\, D\, x$ et $x^TAx = \lambda\, x^TDx$.
   Or A est définie-positive alors $x^TAx > 0$, donc $\lambda\, x^TDx > 0$;
   et comme D est définie-positive, alors $x^TDx > 0$; d'où $\lambda > 0$;
   finalement $\mathrm{Sp}(D^{-1}A) \subset]0; +\infty[$; ce qui prouve que $D^{-1}A$ est définie-positive.
3. Pour résoudre le problème linéaire $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \omega \in \mathbb{R}^* \text{ sont donnés,} \\ \\ x_{k+1} = (I - \omega D^{-1}A)x_k + \omega D^{-1}b. \end{cases}$$

   (a) Vérifions que pour $\omega = 1$, cette méthode n'est autre que celle de Jacobi : en effet, on a

$$x_{k+1} = (I - \omega D^{-1}A)x_k + \omega D^{-1}b = (I - D^{-1}A)x_k + D^{-1}b$$

   donc $Dx_{k+1} = (D - A)x_k + b$. Si la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ converge vers x^*, alors x^* réalise l'équation $Dx^* = (D - A)x^* + b$, soit $(D + (A - D))x^* = b$. On pose $D - A = E + F$, alors

$$x_{k+1} = D^{-1}(E + F)x_k + D^{-1}b$$

   d'où la méthode de Jacobi et $J = D^{-1}(E + F)$.

   (b) Vérifions que si cette méthode converge, alors elle convergera vers la solution du système linéaire : en effet, supposons que la méthode converge, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x^*$, montrons que $x^* = x$?

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \quad &\Leftrightarrow \quad x^* = (I - \omega D^{-1}A)x^* + \omega D^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad (I - I + \omega D^{-1}A)x^* = \omega D^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad \omega D^{-1}A\, x^* = \omega D^{-1}b \end{aligned}$$

   or $\omega \neq 0$, alors $D^{-1}A\, x^* = D^{-1}b$; et comme D^{-1} est inversible alors $A\, x^* = b$
   comme $A\, x^* = b = A\, x$, alors $A^{-1}A\, x^* = x$; d'où $x^* = x$ puisque $A^{-1}A = I$.
   Finalement, la méthode converge vers la solution de $A\, x = b$.

   (c) Les valeurs de ω (en fonction des λ_i) pour assurer la convergence de la méthode méthode : en effet, la méthode converge sit et seulement si $\rho(I - \omega D^{-1}A) < 1$; alors $\max_{1\leq i\leq n} |1 - \omega\, \lambda_i| < 1$, donc $-1 < 1 - \omega\, \lambda_i < 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad -2 < -\omega\, \lambda_i < 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$,
   d'où $0 < \omega\, \lambda_i < 2$ pour tout $1 \leq i \leq n$; soit $0 < \omega < \frac{2}{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$; ce qui montre que

$$0 < \omega < \min\left\{\frac{2}{\lambda_i} \;:\; 1 \leq i \leq n\right\} = \frac{2}{\lambda_{max}}$$

   où λ_{max} est la plus grande valeur propre de $D^{-1}A$.
   Finalement, la méthode converge si $\omega \in \left]0; \dfrac{2}{\lambda_{max}}\right[$.

(d) Le choix optimal de ω : on a

$$\rho(I - \omega D^{-1}A) = \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \omega\,\lambda_i| = \max\{|1 - \omega\,\lambda_{min}|; |1 - \omega\,\lambda_{max}|\}$$

Le choix optimal de ω est obtenu lorsque $|1 - \omega\,\lambda_{min}| = |1 - \omega\,\lambda_{max}|$; soit $1 - \omega\,\lambda_{min} = -(1 - \omega\,\lambda_{max})$, d'où $\omega_{opt} = \dfrac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$ et on remarque bien que

$$0 < \omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

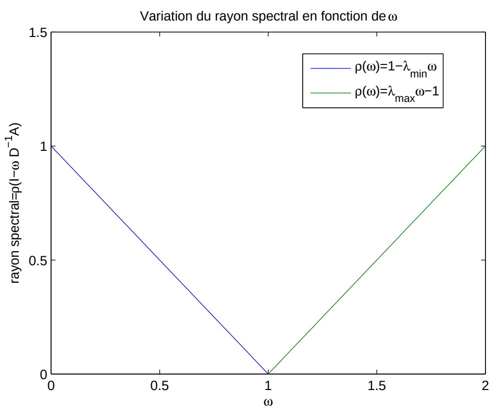

FIGURE 2 – Représentation du rayon spectral $\rho(\omega) = \rho(I - \omega D^{-1}A)$ en fonction de ω