ENSA d'Al-Hoceima
AP-II, 2eme année,
Probabilité & Statistique,

Année 2019/2020
Semestre 2
Examen

Examen en probabilité & statistique
à rendre à l'adresse mail :
m.addam@uae.ac.ma
N.B. : Pour la bonne visibilité de vos comptes-rendus, merci de rédiger sur le papier A4

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire discrète avec $J_X = X(\Omega) = \{x_k : \quad k \in \mathbb{N}\}$. On appelle **fonction caractéristique** de X, notée ϕ_X, la fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\mathrm{i}t\,x_k} P([X = x_k])$$

où $P([X = x_k])$ est la probabilité de l'événement $[X = x_k]$.

1. Montrer que la fonction ϕ_X est bien définie et que : $\phi_X(0) = 1$ et $|\phi_X(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction ϕ_X est uniformément continue dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la fonction caractéristique ψ de la variable aléatoire $Y = \alpha X + \beta$ en fonction de ϕ_X, α et β.
4. Montrer que si la variable aléatoire X a une espérance, alors la fonction ϕ_X est dérivable et que
$$\phi'_X(0) = \mathrm{i}\mathbb{E}(X).$$
5. Montrer que si $J_X = \mathbb{N}$, alors $\phi_X(t) = g(e^{\mathrm{i}t})$ où g est la fonction génératrice de X.