

**EXERCICE 1 (Equations différentielles à variables séparées)**

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1.  $x + yy' = 0$

2.  $y' - xy = x$

3.  $(x + 2)y' + xy = 0$

4.  $(x + 1)y' + y = (x + 1)\sin(x)$

5.  $\begin{cases} (4 - x^2)yy' = 2(1 + y^2) & ; \\ y(1) = 0, & \end{cases}$

6.  $\begin{cases} (y' = x^2y + x^2 & ; \\ y(0) = 1, & \end{cases}$

**Solution**

déjà fait

**EXERCICE 2 (Equations différentielles homogènes)**

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1.  $x(2y - x)y' - y^2 = 0$

2.  $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$

3.  $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

4.  $(x^2 + y^2) - xyy' = 0$

**Solution**

déjà fait

**EXERCICE 3 (M.V.C)**

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1.  $\begin{cases} (y' + y = xe^{-x} & ; \\ y(0) = 1, & \end{cases}$

2.  $y' - 2y = \frac{-2}{-+e^{-2x}}$

3.  $(\sin(x))y' - (\cos(x))y = x, \quad \text{sur } I = ]0, \frac{\pi}{2}[$

4.  $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$

5.  $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x), \quad \text{sur } I = ]-1, +\infty[$

**Solution**

déjà fait

**EXERCICE 4**

recollement tous les cas ces possibles. Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes:

1.  $xy' - 2y = x^3$
2.  $(1-x)y' - y = x$
3.  $xy' + y - 1 = 0$

**Solution**

déjà fait

**EXERCICE 5 (Equations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre et à coefficients constants.)**

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1.  $y' + 2y = x^2 + 2x + 3$
2.  $y' + y = xe^{-x}$
3.  $y' + 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$
4.  $y' - y = (x+1)e^x$
5.  $y' + y = x - e^x + \cos(x)$

**Solution**

déjà fait

**EXERCICE 6 (Equations de Bernoulli.)**

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1. cherche les solutions positives de

$$y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$$

2. résoudre les équations suivantes

$$y' + y + y^2 = 0$$

$$y' - y = xy^2$$

**Solution**

déjà fait

**EXERCICE 7 (Equation du second ordre à coefficients constants.)**

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1.  $y'' - 2y' + 10y = x \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2$
2.  $y'' + y = x^2 - 1$
3.  $y'' - 4y' + 4y = e^x$
4.  $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$
5.  $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$
6.  $y'' - 5y' - 14y = (3x^2 + 2x - 1)e^x$
7.  $y'' - y' - 6y = (x^2 + 1)e^{3x}$
8.  $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$
9.  $y'' - 2y' + 2y = 2\cos(x) - \sin(x)$
10.  $2y'' + y' - y = 3\cos(2x) - \sin(2x)$

$$11. y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos(2x) + 5x + 3$$

$$12. y'' + y = \frac{1}{\sin^3(x)}$$

### Solution

1- Soit (E):  $y'' - 2y' + 10y = x$   $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$

1<sup>ère</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène ( $E_0$ ) associée à (E).

Soit ( $E_0$ ) l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0): y'' - 2y' + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): r^2 - 2r + 10 = 0$$

Alors

$$\Delta = -36$$

Donc ( $E_c$ ) admet deux racines complexes conjuguées  $r_1 = 1 + 3i$  et  $r_2 = 1 - 3i$

Alors les solutions générales de l'équation ( $E_0$ ) sont de la forme

$$y_0 = e^x [A \cos(3x) + B \sin(3x)]$$

2<sup>ème</sup> étape: On cherche une solution particulier de l'équation (E).

Comme le second membre de (E) sous forme d'un polynôme de degré 1 et le coefficient de  $y$  dans l'équation (E)  $\neq 0$ , alors on va chercher une solution particulier sous la forme d'un polynôme de degré 1.

Soit  $y_p(x) = ax + b$  est une solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2a + 10ax + 10b = x \Leftrightarrow a = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{50}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = e^x [A \cos(3x) + B \sin(3x)] + \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{50}\right)$$

Si on ajoute les conditions  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$

On a alors

$$y'(x) = e^x [(A + 3B) \cos(3x) + (B - 3A) \sin(3x)] + \left(\frac{1}{10}\right)$$

Les conditions initiales fournissent le système :

$$\begin{cases} y(0) = A + \frac{1}{50} = 1 \\ y'(0) = A + 3B + \frac{1}{10} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{49}{50} \\ B = \frac{23}{75} \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie les conditions initiales est donc :

$$y = e^x \left[ \frac{49}{50} \cos(3x) + \frac{23}{75} \sin(3x) \right] + \left( \frac{1}{10}x + \frac{1}{50} \right)$$

2- Soit (E):  $y'' + y = x^2 - 1$

1<sup>ère</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène ( $E_0$ ) associée à (E).

Soit ( $E_0$ ) l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0): y'' + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): r^2 + 1 = 0$$

Donc  $(E_c)$  admet deux racines complexes conjuguées  $r_1 = i$  et  $r_2 = -i$   
 Alors les solutions générales de l'équation  $(E_0)$  sont de la forme

$$y_0 = A \cos(x) + B \sin(x)$$

2<sup>me</sup> étape: On cherche une solution particulier de l'équation (E).

Comme le second membre de (E) sous forme d'un polynôme de degré 2 et le coefficient de  $y$  dans l'équation (E)  $\neq 0$ , alors on va chercher une solution particulier sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Soit  $y_p(x) = ax^2 + bx + c$  est une solution de (E) si et seulement si

$$ax^2 + bx + (2a + c) = x^2 - 1 \Leftrightarrow a = 1 \quad \text{et} \quad b = 0 \quad \text{et} \quad c = -3$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = A \cos(x) + B \sin(x) + (x^2 - 3)$$

**3-**(E)  $y'' - 4y' + 4y = e^x$

1<sup>ere</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène  $(E_0)$  associée à (E).

Soit  $(E_0)$  l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c) : r^2 - 4r + 4 = 0$$

Alors

$$\Delta = 0$$

dont 2 est racine double de  $(E_c)$ .

Alors les solutions générales de l'équation  $(E_0)$  sont de la forme

$$y_0 = e^{2x}[A + Bx]$$

2<sup>me</sup> étape:

On cherche une solution particulier de l'équation (E).

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique  $(E_c)$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $y_p(x) = \alpha e^x$ . En dérivant, on trouve  $\alpha = 1$  d'où

$$y_p(x) = e^x$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = e^x + e^{2x}[A + Bx] \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

**4-** (E)  $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$

1<sup>ere</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène  $(E_0)$  associée à (E).

Soit  $(E_0)$  l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0) : y'' - 4y' + 3y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c) : r^2 - 4r + 3 = 0$$

Alors

$$\Delta = 4$$

dont les racines de  $(E_c)$  sont 1 et 3. .

Alors les solutions générales de l'équation  $(E_0)$  sont de la forme

$$y_0 = Ae^x + Be^{3x} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

2<sup>me</sup> étape:

On cherche une solution particulier de l'équation (E).

Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique  $(E_c)$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $y_p(x) = (ax^2 + bx)e^x$  (on peut trouver un polynôme sans terme constant car la fonction  $x \rightarrow e^x$  est solution de l'équation homogène).

En dérivant, on trouve  $a = \frac{-1}{2}$  et  $b = 1$  d'où

$$y_p(x) = \left(\frac{-1}{2}x^2 + x\right)e^x$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = \left(\frac{-1}{2}x^2 + x\right)e^x + Ae^x + Be^{3x} \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$5-y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$$

L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque que  $-1$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme  $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}$

En dérivant, on trouve  $a = \frac{1}{4}$  et  $b = \frac{5}{16}$  d'où

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + Be^{3x} \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

**Equation 6 et 7 comme les équations 3, 4 et 5 .**

$$8-(E) \quad y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$$

1<sup>ere</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène  $(E_0)$  associée à (E).

Soit  $(E_0)$  l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0) : \quad y'' - 2y' + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c) : \quad r^2 - 2r + 1 = 0$$

Alors

$$\Delta = 0$$

Alors l'équation caractéristique ( $E_c$ ) admet 1 comme racine double

Alors les solutions générales de l'équation ( $E_0$ ) sont de la forme

$$y_0 = (Ax + B)e^x \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

2<sup>me</sup> étape:

On cherche une solution particulière de l'équation générale (E) en utilisant le principe de superposition des solutions.

\* On commence donc à chercher une solution de

$$(E_1) \quad y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$$

On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme

$$y_{1p} = P(x)e^x$$

Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique ( $E_c$ ), on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 4. on trouve

$$P''(x)e^x = (x^2 + 1)e^x$$

On obtient

$$P(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}$$

d'où

$$y_{1p}(x) = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x$$

\*\*On cherche maintenant une solution particulière de

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + y = e^{3x}$$

Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique ( $E_c$ ), et on peut chercher une solution particulière sous la forme

$$y_{2p} = \alpha e^{3x}$$

. On obtient, en introduisant dans l'équation

$$9\alpha - 6\alpha + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

d'où

$$y_{2p}(x) = \frac{1}{4}e^{3x}$$

. Donc la solution particulière de (E) est:

$$y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}$$

Les solutions générale de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$y = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}(Ax + B)e^x \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Rq: l'équation 9 comme l'équation 10

$$10-2y'' + y' - y = 3\cos(2x) - \sin(2x)$$

1<sup>ere</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène  $(E_0)$  associée à (E).

Soit  $(E_0)$  l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0): \quad 2y'' + y' - y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \quad 2r^2 + r - 1 = 0$$

Alors

$$\Delta = 9$$

dont les racines de  $(E_c)$  sont  $-1$  et  $\frac{1}{2}$ .

Alors les solutions générales de l'équation  $(E_0)$  sont de la forme

$$y_0 = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

2<sup>me</sup> étape:

On cherche une solution particulier de l'équation (E).

on cherche une solution particulière sous la forme  $y_p(x) = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$

En dérivant, on trouve  $\alpha = \frac{-5}{17}$  et  $\beta = \frac{3}{17}$  d'où

$$y_p(x) = \frac{-5}{17} \cos(2x) + \frac{3}{17} \sin(2x)$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = \frac{-5}{17} \cos(2x) + \frac{3}{17} \sin(2x) + Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}} \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

**11-** (E):  $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos(2x) + 5x + 3$

1<sup>ere</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène  $(E_0)$  associée à (E).

Soit  $(E_0)$  l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0): \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \quad r^2 - 2r + 5 = 0$$

Alors

$$\Delta = -16$$

Alors les racines de l'équation caractéristique  $(E_c)$  sont  $r_1 = 1 - 2i$  et  $r_2 = 1 + 2i$

Alors les solutions générales de l'équation  $(E_0)$  sont de la forme

$$y_0 = (A \cos(2x) + B \sin(2x))e^x \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

2<sup>me</sup> étape:

On cherche une solution particulière de l'équation générale (E) en utilisant le principe de superposition des solutions.

\* On commence donc à chercher une solution de

$$(E_1) \quad y'' - 2y' + 5y = 5x + 3$$

Comme le second membre de  $(E_1)$  sous forme d'un polynôme de degré 1 et le coefficient de  $y$  dans l'équation  $(E_1) \neq 0$ , alors on va chercher une solution particulier sous la forme d'un polynôme de degré 1.

Soit  $y_{1p}(x) = ax + b$  est une solution de  $(E_1)$  si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2a + 5ax + 5b = 5x + 3 \Leftrightarrow a = 1 \quad \text{et} \quad b = 1$$

d'où

$$y_{1p}(x) = x + 1$$

\*\*On cherche maintenant une solution particulière de

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos(2x)$$

On va en fait chercher une solution particulière de  $y'' - 2y' + 5y = xe^{(1+2i)x}$  et on en prendra la partie réelle.  $1 + 2i$  est un solution de l'équation caractéristique ( $E_0$ ), on cherche une solution sous la forme

$$x \rightarrow (ax^2 + bx)e^{(1+2i)x}$$

Après dérivation et identification, on trouve  $a = \frac{-i}{8}$  et  $b = \frac{1}{16}$

d'où

$$x \rightarrow \left(\frac{-i}{8}x^2 + \frac{1}{16}x\right)e^{(1+2i)x}$$

. Prenant la partie réelle, une solution particulière de

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos(2x)$$

est obtenue par

$$y_{2p} = \left[\frac{x}{16} \cos(2x) + \frac{x^2}{8} \sin(2x)\right]e^x$$

Donc la solution particulière de (E) est:

$$y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}$$

Les solutions générale de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$y = y_p(x) + y_0(x)$$

**11-** (E):  $y'' + y = \frac{1}{\sin^3(x)}$   
1<sup>ere</sup> étape:

On commence par résoudre l'équation homogène ( $E_0$ ) associée à (E).

Soit ( $E_0$ ) l'équation homogène associée à (E) avec

$$(E_0) : \quad y'' + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c) : \quad r^2 + 1 = 0$$

Alors les racines de l'équation caractéristique ( $E_c$ ) sont  $r_1 = i$  et  $r_2 = -i$

Alors les solutions générales de l'équation ( $E_0$ ) sont de la forme

$$y_0 = A \cos(x) + B \sin(x) \quad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

2<sup>me</sup> étape:

On cherche une solution particulière de l'équation générale (E) sous la forme,  $y_p(x) = A(x)y_1 + B(x)y_2$  avec  $A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0$  telque  $y_1 = \cos(x)$  et  $y_2 = \sin(x)$

Donc,  $A'(x)$  et  $B'(x)$  sont solutions du système:

$$\begin{cases} A'(x) \cos(x) + B'(x) \sin(x) = 0 \\ -A'(x) \sin(x) + B'(x) \cos(x) = \frac{1}{\sin^3(x)} \end{cases}$$

donc

$$A'(x) = \frac{-1}{W(x)} \left( \frac{1}{\sin^3(x)} \times \sin(x) \right) \quad \text{et} \quad B'(x) = \frac{1}{W(x)} \left( \frac{1}{\sin^3(x)} \times \cos(x) \right)$$



en effet leur wronskien vaut  $W(x) = 1$ .

alors

$$A'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} \quad \text{et} \quad B'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

avec les primitives on trouve

$$A(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{-1}{2 \sin^2(x)}$$

On a donc la solution particulière

$$y_p(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + \frac{-\sin(x)}{2 \sin^2(x)} = \frac{\cos(2x)}{2 \sin(x)}$$

Les solutions générale de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$y = y_p(x) + y_0(x)$$