

Série N°7 : Systèmes, systèmes de Cramer et systèmes inversibles

Exercice 1

1. Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et calculer son indice de nilpotence

p . Calculer “ $\exp(tN)$ ” pour tout réel t .

*Montrer que le système $\{v, Nv, N^{p-1}v\}$ est une base de \mathbb{R}^3 pour tout vecteur non nul v de \mathbb{R}^3 .

2. Vérifier que $(0, 0, 0, 0, 0)$ est solution du système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 &= 0 \end{cases}$$

Montrer que L'ensemble E des solutions \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 . Quelle est sa dimension? Déterminer une base de E .

3. Vérifier que le système suivant est compatible

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= -4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 &= 9 \end{cases}$$

puis le résoudre dans \mathbb{R}^5 . L'ensemble des solutions \mathcal{S} est-il un plan vectoriel de \mathbb{R}^5 ?

Exercice 2

On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

1. Écrire le système (\mathcal{S}) sous forme matricielle.
2. Soit A la matrice du système (\mathcal{S}) . Calculer A^2 et A^3 , puis en déduire $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3$ et w_3
3. Déduire les expressions des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de A , n et (u_0, v_0, w_0) .

Exercice 3

On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= u_n - w_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n \end{cases}$$

1. Écrire le système (\mathcal{S}) sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Montrer que A est inversible, puis calculer sa matrice inverse.
3. Soit P une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$ où B est une matrice diagonale d'éléments diagonaux λ_1, λ_2 et λ_3 . Montrer que $B^n = P^{-1}A^nP$.
4. Calculer A^2 et A^3 .
5. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \{1, 2\}$.

Exercice 4

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Soit (\mathcal{S}) le système différentiel linéaire avec second membre

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= 3x(t) + 9y(t) - 9z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) \\ z'(t) &= 3x(t) + 3y(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On pose $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Calculer B^2 et B^3 , puis calculer $\exp(tB)$
2. Ecrire le système différentiel linéaire (\mathcal{S}) sous la forme $X'(t) = A.X(t)$ où A est une matrice à déterminer.
3. Déterminer toutes les solutions du système (\mathcal{S}) . Que peut-on déduire ?