Exercices Corrigés
Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 – On considére le sous-espace vectoriel F_1 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2-x_3+2x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array}\right. .$$

et le sous-espace vectoriel F_2 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(**)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E_1') \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array}\right. .$$

Préciser F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ et une base de ces trois sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 2 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Notons : $u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $u_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$, $u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$ et considérons $H = Vect(u_1, u_2, u_3)$.
1) Donner à l'aide d'un algorithme du cours une base de H. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) ?
2) Donner à l'aide d'un algorithme du cours des équations de H relativement à la base $\mathcal{B}$.
3) Déterminer l'ensemble des réels a, b, c tels que :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad .$$

Exercice 3 – 1) On considére le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 0 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Donner une base de F. Quelle est sa dimension ?
2) Soit $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (2,-1,2,-1), u_3 = (4,1,4,1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Soit $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Donner une base de G constituée de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ échelonnées relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
3) Donner un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 4 – Soir E un K-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$. On note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
1) Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre. Pourquoi (u_1, u_2) est alors une base de F.
2) Donner un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.
On note $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
3) Préciser une base de G. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
4) Montrer que $F \cap G = \{0\}$. En déduire $E = F \oplus G$.

Exercice 5 – Soir E un K-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$, $u_3 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $u_4 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_4$.
On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
1) Donner une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?
2) Donner un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Quelle est la dimension de F ?
On note $G = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
3) Préciser une base de G. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
4) En déduire $E = F \oplus G$.
5) Préciser la décomposition du vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 6 – Soit E un K-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$ $u_2 = 2e_1 - 3e_2 + e_4$ et $u_3 = 3e_1 - 5e_2 + e_3 + e_4$. On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
1) Donner une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.
2) Donner un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Dimension de F ?
On note $G = \text{Vect}(e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
3) Préciser une base de G. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
4) En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
5) Préciser la décomposition du vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 7 – Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$. On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.
1) Donner une base de F échelonnée relativement à la base $\mathcal{B}$. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel F.
2) Donner un système d'équations de F.
On note $D = \text{Vect}(e_1)$.
3) Montrer que $D \cap F = \{0\}$.
4) En déduire $E = D \oplus F$.

Exercice 8 – Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ d'équation :

$$H \ : \ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \, . \end{cases}$$

Posons $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 0, 0)$. Notons $L = \text{Vect}(u, v)$.
1) Déterminer le sous-espace vectoriel $H \cap L$. Puis préciser une base de H. 2) Montrer que H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.
3) Soit a, b, c, d quatre réels, préciser la décomposition du vecteur (a, b, c, d) de $\mathbf{R}^4$, comme somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de L.

Exercice 9 – Soit $u_1 = (1, 1, -1, -1), u_2 = (1, 2, 1, -3), u_3 = (-2, 1, -2, 1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Soit $H = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
1) Donner une base de H constituée de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ échelonnées relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
2) Donner un système d'équations de H relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
3) Soit $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ et $F = \text{Vect}(u_4)$. Montrer que $F \cap H = \{0\}$. En déduire que H et F sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.
4) Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$. Déterminer $v \in F$ et $w \in H$ tels que $u = v + w$. Préciser v et w.

Exercice 10 – Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \end{cases}$$

1) Sans calcul, justifier que P est de dimension 2. Puis déterminer une base (u_1, u_2) de P.
Soit $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 0, 1, 0)$. On note $V = \text{vect}(v_1, v_2)$.
2) Montrer que (v_1, v_2) est une base de V.
3) Montrer que $P + V = \text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. En déduire une base de $P + V$ échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
4) En déduire que P et V ne sont pas supplémentaires. Donner une base de $P \cap V$.
Soit $v_3 = (1, 1, 0, 0)$. On note $W = \text{vect}(v_1, v_3)$.
5) On admettra que P et W sont supplémentaires. Expliciter la projection sur W parallélement à P.

Correction de l'exercice 1

Le sous-espace vectoriel F_1 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \quad (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \quad (E_2) \end{cases} .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_3 et x_4. Résolvons le en suivant notre algorithme. On obtient :

$$x_2 = x_3 - 2x_4 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -2(x_3 - 2x_4) - x_3 - x_4 = -3x_3 + 3x_4 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 = \{(-3x_3 + 3x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 = \{x_3(-3, 1, 1, 0) + x_4(3, -2, 0, 1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, la famille de deux vecteurs $(-3, 1, 1, 0), (3, -2, 0, 1)$ est une famille génératrice de F_1. Elle est libre, en renversant les calculs :

$$x_3(-3, 1, 1, 0) + x_4(3, -2, 0, 1) = (-3x_3 + 3x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = 0$$

implique clairement $x_3 = x_4 = 0$. C'est une base de F_1.

Le sous-espace vectoriel F_2 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1') \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array}\right. .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_2 et x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. On obtient :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_2 = \{(-2x_2 - x_3, x_2, x_3, 0) \text{ tels que } x_2\ ,\ x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit :

$$F_2 = \{x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) \text{ tels que } x_2\ ,\ x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, la famille de deux vecteurs $(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)$ est une famille génératrice de F_2. Elle est libre (même argument que précedemment). C'est une base de F_2.

L'ensemble $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ comme intersection de deux tels sous-espaces vectoriels. Il est constitué des solutions du systéme d'équations linéaires homogènes :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1') \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array}\right. .$$

Soit :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array}\right. .$$

Ce système est triangulé. Il possède uen seule variable libre : x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. On obtient :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_2 = x_3 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -3x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 \cap F_2 = \{(-3x_3, x_3, x_3, 0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 \cap F_2 = \{x_3(-3, 1, 1, 0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, la famille d'un vecteur $(-3, 1, 1, 0)$ est une famille génératrice de $F_1 \cap F_2$. Elle est libre, car est ce vecteur est non nul. C'est une base de $F_1 \cap F_2$.

Correction de l'exercice 2

1) L'algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ (dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$) une base échelonnée de H relativement à cette base.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Etape 1 : Posons $u'_1 = u_1$, $u'_2 = u_2 - 2u_1$ et $u'_3 = u_3 - u_1$:

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1, u'_2, u'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} .$$

On a $H = \mathrm{Vect}(u'_1, u'_2, u'_3)$.

Etape 2 : Posons $u''_1 = u'_1$, $u''_2 = u'_2$ et $u''_3 = u'_3 - u'_2$:

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a $H = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3) = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2)$, car $u''_3 = 0$.

La famille $u''_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, u''_2 = 3e_2 - 3e_3$ est libre (car échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$) et engendre H. C'est donc une base de H échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.Le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) est par définition la dimension de H. La famille (u_1, u_2, u_3) est donc de rang 2.

2) Un deuxième algorithme du cours donne un système d'équations de H relativement à la base $\mathcal{B}$ de E en partant de $u''_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, u''_2 = 3e_2 - 3e_3$ base de H échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$. Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -2 & 3 & x_2 \\ 1 & -3 & x_3 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u' = u - x_1 u''_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & x_2 + 2x_1 \\ 1 & -3 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u'' = u' - (1/3)(x_2 + 2x_1)u''_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & (x_3 - x_1) + (x_2 + 2x_1) \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} .$$

On a $u \in H$ si et seulement si $u'' \in H$. Le vecteur u'' a sa première coordonnée et sa deuxième cordonnée nulle. Les vecteurs de la famille echelonnée (u''_1, u''_2) sont respectivement d'ordre 1 et 2. Il en résulte, que le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad .$$

Cette équation est donc un système d'équations de H relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) Les coordonnées de $au_1 + bu_2 + cu_3$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+c \\ -2a-b+c \\ a-b-2c \end{pmatrix}$$

Un vecteur est nul si et seulement si ses coordonnées dans une base sont nulles. Ainsi, nous avons à déterminer l'ensemble Σ des triplets de réels (a, b, c) solutions du système homogène d'équations linéaires :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+c &=& 0 & (E_1) \\ -2a-b+c &=& 0 & (E_2) \\ a-b-2c &=& 0 & (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système a même solution que le système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+c &=& 0 & (E_1) \\ 3b+3c &=& 0 & (E'_2 = E_2 + 2E_1) \\ -3b-3c &=& 0 & (E'_3 = E_3 - E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système a même solution que le système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+c &=& 0 & (E_1) \\ 3b+3c &=& 0 & (E'_2) \\ 0 &=& 0 & (E'_3 - E'_2) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système a même solution que le système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+c &=& 0 & (E_1) \\ 3b+3c &=& 0 & (E'_2) \end{array} \right. \quad .$$

qui est un système triangulé de variables libres c. On obtient :

$$b = -c \quad .$$

On obtient alors :

$$a = -2b - c = c \quad .$$

Il en résulte :

$$\Sigma = \{(c, -c, c) \text{ tels que } c \in \mathbf{R}\} \quad .$$

$$\Sigma = \{c(1, -1, 1) \text{ tels que } c \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Pour vérifier ce calcul, on peut constater que $u_1 - u_2 + u_3 = 0$.
Correction de l'exercice 3

1) L'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 est l'ordre naturel. Les trois équations de (E) sont d'ordre 1. Le système est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.
Étape 1 : Utilisons (E_1) pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que (E) :

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 & (E_2' = E_2 - E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Les équations E_1, E_2', sont respectivement d'ordre $1, 2$. Ce sytème est ordonné.
Ce système est triangulé. Le première algorithme est terminé.

Résoudre (E) revient donc à résoudre le système triangulé (E'). La variable de tête de (E_1) est x_1, la variable de tête de (E_2') est x_2, Les variables libres de (E') sont donc x_3, x_4. Résolvons ce système triangulé en suivant la méthode du cours. La dernière équation donne :

$$x_2 = 2x_3 - x_4 \quad .$$

Remplaçons cette valeur de x_2 dans l'équation précédente, on obtient :

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_3 + x_4 = 0 \quad .$$

Nous obtenons :

$$x_1 = -3x_3 \quad .$$

Nous avons ainsi exprimé x_1 et x_2 à l'aide des variables libres. Ainsi, l'ensemble F des solutions de (E) est :

$$F = \{(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit : $F = \{x_3(-3, 2, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4, \in \mathbf{R}\} \quad .$
La famille $(-3, 2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ est donc une famille génératrice de F. Elle est libre car si

$$x_3(-3, 2, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1) = 0 \quad ,$$

on obtient :

$$(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$$

et $x_3 = x_4 = 0$. Ainsi, $((-3, 2, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$ est une base de F.

2) Notons $E = \mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 0, 1) \quad .$$

On a : $v(u_1) = v(u_2) = v(u_3) = 1$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&-1&1\\0&2&4\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad,\quad G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)\quad.$$

Étape 2 : On utilise u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1',u_2',u_3')=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u_1'=u_1 & u_2'=u_2-2u_1 & u_3'=u_3-4u_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-3&-3\\1&0&0\\1&-3&-3\end{pmatrix}\end{array}\quad,\quad G=\mathrm{Vect}(u_1',u_2',u_3')\ .$$

On a $v(u_1')<v(u_2')=v(u_3')=2$.

Étape 3 : On utilise u_2' pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'',u_2'',u_3'')=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u_1''=u_1' & u_2''=u_2' & u_3''=u_3'-u_2'\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-3&0\\0&0&0\\1&-3&0\end{pmatrix}\end{array}\quad,\quad G=\mathrm{Vect}(u_1'',u_2'')\ .$$

On a $v(u_1'')<v(u_2'')$ L'algorithme est terminé et la famille $(u_1''=(1,1,1,1),u_2''=(0,-3,0,-3))$ est donc une base de G échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3) La famille (u_1'',u_2'') est échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Soit u de coordonnées (x_1,x_2,x_3,x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$. .

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'',u_2'',u)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u_1'' & u_2'' & u\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&x_1\\1&-3&x_2\\1&0&x_3\\1&-3&x_4\end{pmatrix}\end{array}\quad.$$

Étape 1 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'',u_2'',u-x_1u_1'')=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u_1'' & u_2'' & u^{(1)}=u-x_1u_1''\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-3&x_2-x_1\\1&0&x_3-x_1\\1&-3&x_4-x_1\end{pmatrix}\end{array}\quad,\quad u^{(1)}=u-x_1u_1''\ .$$

On a $u\in F$ équivaut à $u^{(1)}\in F$.

Étape 2 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', , u^{(2)} = u^{(1)} + (1/3)(x_2 - x_1)u_2'' = \begin{pmatrix} u_1'' & u_2'' & u^{(2)} = u^{(1)} + (1/3)(x_2 - x_1)u_2'' \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 1 & -3 & x_4 - x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

et $u \in F$ équivaut à $u^{(2)} = (0, 0, x_3 - x_1, x_4 - x_2) \in F$.

L'algorithme est terminé. Les deux premières coordonnées de $u^{(2)}$ sont nulles et u_1'', u_2'' sont d'ordre 1 et 2 relativement à $\mathcal{B}$ Le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$ est dans F si et seulement si $u^{(2)} = 0$. Donc, si et seulement si :

$$x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 0 \quad .$$

Le système :

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \quad . \end{cases}$$

est un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Correction de l'exercice 4

1) Soient a, b réels tels que $au_1 + be_2 = 0$. On obtient :

$$a(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) + b(e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4) = 0 \quad .$$

Soit :

$$(a + b)e_1 + (a + 2b)e_2 + (-a + b)e_3 + (a + b) = 0 \quad .$$

Comme (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E, c'est une famille libre. On obtient alors :

$$(a + b) = (a + 2b) = (-a + b) = (a + b) = 0 \quad .$$

On en déduit $a = b = 0$. La famille (u_1, u_2) est donc libre. Par définition de F, tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2. Ainsi, (u_1, u_2) est une famille génératrice de F. Or, c'est une famille libre. C'est donc, (u_1, u_2) est une base de F.

2) Considérons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 dans la $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Utilisons la première colonne de cette matrice pour faire monter l'ordre de la deuxième :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Cette matrice est echelonnée. Donc, $(u_1, u_2 - u_1)$ est une base de F echelonnée par rapport la base $\mathcal{B}$. En fait, cela remontre aussi que (u_1, u_2) est une famille libre (voir le cours).
Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1, u - x_1u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ -1 & 2 & x_3 + x_1 \\ 1 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} .$$

Nous avons : $u \in F$ si et seulement si $u - x_1u_1 \in F$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1, u - x_1u_1 - (x_2 - x_1)(u_2 - u_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & x_3 + x_1 - 2(x_2 - x_1) \\ 1 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} .$$

Nous avons $u \in F$ si et seulement si $u - x_1u_1 - (x_2 - x_1)(u_2 - u_1) \in F$. Le vecteur $u - x_1u_1 - (x_2 - x_1)(u_2 - u_1)$ a sa première coordonnée et sa deuxième cordonnée nulle. Les vecteurs de la famille echelonnée $(u_1, u_2 - u_1)$ sont respectivement d'ordre 1 et 2. Il en résulte, $u \in F$ si et seulement si : $x_3 + x_1 - 2(x_2 - x_1) = x_4 - x_1 = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_4 - x_1 &= 0 \end{cases} .$$

est un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.
3) La famille (e_1, e_2) est libre, car c'est une sous-famille de la famille libre (e_1, e_2, e_3, e_4). Comme (e_1, e_2) engendre G, c'est une base de G. Si $u \in F \cap G$, u est un vecteur de G. Ainsi, il existe deux réels a et b tels que $u = ae_1 + be_2$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(a, b, 0, 0)$. Ces coordonnées vérifient dons le système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, nous obtenons :

$$3a - 2b = -a = 0$$

On en déduit $a = b = 0$ et $u = 0$. Il en résulte $F \cap G = \{0\}$.

4) En utilisant la formule de dimension :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G = 2 + 2 = 4$$

Le sous-espace vectoriel $F + G$ est donc un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E. Il est donc égal à E. On a donc $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$. Ainsi, $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 5

1) L'algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ (dont la j-ième colonne

est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$) une base échelonnée de F relativement à cette base.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3,u_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Etape 1 : Posons $u'_1=u_1$, $u'_2=u_2-u_1$, $u'_3=u_3-u_1$, et $u'_4=u_4-2u_1$:

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1,u'_2,u'_3,u'_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $F=\mathrm{Vect}(u'_1,u'_2,u'_3,u'_4)$.
Etape 2 : Posons $u''_1=u'_1$, $u''_2=u'_2$, $u''_3=u'_3+2u'_1$, et $u''_4=u'_4-u'_2$:

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1,u''_2,u''_3,u''_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $F=\mathrm{Vect}(u''_1,u''_2,u''_3,u''_4)=\mathrm{Vect}(u''_1,u''_2,u''_3)$, car $u''_4=0$.
La famille $u''_1=e_1+e_2-e_3+e_4, u''_2=e_2+2e_3, u''_3=6e_3-2e_4$ est libre (car échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$) et engendre F. C'est donc une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Le rang de la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est par définition la dimension de F. La famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est donc de rang 3.

2) Un deuxième algorithme du cours donne un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Il part de la base (u''_1,u''_2,u''_3) de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1,x_2,x_3,x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1,u''_2,u''_3,u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 2 & 6 & x_3 \\ 1 & 0 & -2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1,u''_2,u''_3,u'=u-x_1u''_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ -1 & 2 & 6 & x_3+x_1 \\ 1 & 0 & -2 & x_4-x_1 \end{pmatrix}.$$

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1,u''_2,u''_3,u''=u'-(x_2-x_1)u''_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & x_3+x_1-2(x_2-x_1) \\ 1 & 0 & -2 & x_4-x_1 \end{pmatrix}.$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & x_3+3x_1-2x_2 \\ 1 & 0 & -2 & x_4-x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u''') = u'' - \frac{1}{6}(x_3+3x_1-2x_2)u_3'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & x_4-x_1-2(-(1/6)(x_3+3x_1-2x_2) \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u - x_1u_1'' - (x_2-x_1)u_2'' - (-\frac{1}{6}(x_3+3x_1-2x_2)u_3'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & x_4+\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_2) \end{pmatrix} \quad .$$

On a $u \in F$ si et seulement si $u''' \in F$. Le vecteur u''' a ses trois premières coordonnées nulles et les vecteurs u_1'', u_2'', u_3'' sont respectivemnt d'ordre 1, 2 et 3 par rapport à la base $\mathcal{B}$. Ainsi, le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à F si et seulement si

$$x_4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \quad .$$

Cette équation est donc un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) La famille réduite à l'élément $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est libre, car le vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est non nul (Pour tout $\lambda \in K$ et $v \in E$, $\lambda v = 0$ et $\lambda \neq 0$, implique $v = 0$. Donc $v \neq 0$ et $\lambda v = 0$ implique $\lambda = 0$). Ce vecteur engendre G par définition. La famille $\{e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est donc une base de G.

Si $u \in G$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = a(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont alors (a, a, a, a). Si de plus, $u \in F$, les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation :

$$a + (1/3)a - (2/3)a = 0 \quad .$$

Il en résulte $a = 0$, puis $u = 0$. Donc, $F \cap G = \{0\}$.

4) D'après la formule de dimension :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G) - \dim(F \cap G) = 3 + 1 - 0 = 4 \quad .$$

Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de E qui est un espace vectoriel de dimension 4. Donc, $F + G = E$. Commme $F \cap G = \{0\}$, on a bien $E = F \oplus G$.

5) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$. Il s'écrit d'après la question précédente de façon unique :

$$u = u' + u'' \quad \text{avec} \quad u' \in F \quad \text{et} \quad u'' \in G \quad .$$

Soit (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) les coordonnées de u' dans le base $\mathcal{B}$ et $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ les coordonnées de u'' dans le base $\mathcal{B}$. Comme $u'' \in G$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = a(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Nous avons donc : $x''_1 = x''_2 = x''_3 = x''_4 = a$. Comme $u = u' + u''$: $x_i = x'_i + x''_i = x'_i + a$. On en déduit $x'_i = x_i - a$. Comme $u' \in F$, les corrdonnées de u' dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation déterminée à la question 2. Ainsi :

$$(x_4 - a) + \frac{1}{3}(x_3 - a) - \frac{2}{3}(x_2 - a) = 0$$

Il en résulte :

$$\frac{2}{3}a = x_4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2 \quad \text{et} \quad a = \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2$$

Ainsi :

$$u'' = (\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad .$$

$$u' = u - u'' = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 - (\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad .$$

Soit :

$$u' = (x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4)e_1 + (2x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4)e_2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4)e_3 + (x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4)e_4 \quad .$$

Correction de l'exercice 6

1) Un algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ (dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$) une base échelonnée de F relativement à cette base.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Etape 1 : Posons $u'_1 = u_1$, $u'_2 = u_2 - 2u_1$ et $u'_3 = u_3 - 3u_1$:

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1, u'_2, u'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

On a $F = \text{Vect}(u'_1, u'_2, u'_3)$.
Etape 2 : Posons $u''_1 = u'_1$, $u''_2 = u'_2$ et $u''_3 = u'_3 - u'_2$:

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On a $F = \text{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3) = \text{Vect}(u''_1, u''_2)$, car $u''_3 = 0$.
La famille $u''_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, u''_2 = e_2 - 2e_3 + e_4$ est libre (car échelonnée par rapport à la la

base $\mathcal{B}$) et engendre F. C'est donc une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.

2) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -2 & 1 & x_2 \\ 1 & -2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u - x_1 u_1'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & x_2 + 2x_1 \\ 1 & -2 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons : $u \in F$ si et seulement si $u - x_1 u_1'' \in F$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u - x_1 u_1'' - (x_2 + 2x_1)u_2'')) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & (x_3 - x_1) + 2(x_2 + 2x_1) \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons $u \in F$ si et seulement si $u'' = u - x_1 u_1'' - (x_2 + 2x_1)u_2'' \in F$. Les deux premières coordonnées de u'' sont nulles et les vecteurs u_1'', u_2'' d'ordres respectivement 1 et 2 dans la base $\mathcal{B}$. On obtient alors, $u \in F$ si et seulement si : $(x_3 - x_1) + 2(x_2 + 2x_1) = x_4 - x_2 - 2x_1 = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases} \quad .$$

Ce système est donc un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) Montrons que la famille $\{e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est libre. Soit a, b deux réels tels que :

$$ae_1 + b(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 0 \quad .$$

On obtient :

$$(a + b)e_1 + be_2 + be_3 + be_4 = 0 \quad .$$

Il en résulte :

$$a + b = b = 0 \quad .$$

Soit $a = b = 0$. Ainsi la famille $\{e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est libre. Comme cette famille engendre G, la famille $\{e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est une base de G.

On notera que la famille $\{e_1, e_2 + e_3 + e_4\}$ est une base de G echelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Par la suite, on utilisera cette base de G pour simplifier les calculs.

Si $u \in G$, il existe a, b deux réels tels que $u = ae_1 + b(e_2 + e_3 + e_4)$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont donc (a, b, b, b). Si l'on suppose alors que u appartient aussi à F, les coordonnées de u vérifient le système d'équation de F. On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} 3a + 2b + b = 0 \\ -2a - b + b = 0 \end{array}\right. .$$

D'où, $a = b = 0$ et $u = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0\}$.

4) On vient de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Comme :

$$\dim(E) = 4 = 2 + 2 = \dim F + \dim G \quad ,$$

il en résulte que $E = F \oplus G$.

5) Soit $u \in E$, u s'écrit de façon unique $u = u' + u''$ avec $u' \in F$ et $u'' \in G$. Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) les coordonnées de u' dans la base $\mathcal{B}$. Il existe λ et μ deux réels tel que

$$u'' = \lambda e_1 + \mu(e_2 + e_3 + e_4) \quad .$$

Déterminons (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) et (λ, μ) à l'aide de (x_1, x_2, x_3, x_4). En passant en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, l'équation $u = u' + u''$ se traduit par :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) + (\lambda, \mu, \mu, \mu) \quad .$$

Il en résulte :

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = (x_1 - \lambda, x_2 - \mu, x_3 - \mu, x_4 - \mu) \quad .$$

Ainsi, $(x_1 - \lambda, x_2 - \mu, x_3 - \mu, x_4 - \mu)$ est solution du système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3\lambda + 3\mu \\ -2x_1 - x_2 + x_4 & = & -2\lambda \end{array}\right. .$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & x_1 + \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_4}{2} \\ \mu & = & \dfrac{1}{6}x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 \end{array}\right. .$$

Donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'' & = & \lambda e_1 + \mu(e_2 + e_3 + e_4) \\ & = & (x_1 + \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_4}{2})e_1 + (\dfrac{1}{6}x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4)(e_2 + e_3 + e_4) \\ u' & = & u - u'' \\ & = & (-\frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2})e_1 + (\frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_4)e_2 + (-\frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{2}x_4)e_3 + (-\frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{2}x_4)e_4 \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice 7

1) Considérons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 dans la $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Utilisons la première colonne de cette matrice pour faire monter l'ordre de la deuxième :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Cette matrice est echelonnée. Donc, $(u_1, u_2 - u_1)$ est une base de $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$. On a $u_2 - u_1 = e_2$, ainsi (u_1, e_2) est une base de F. La dimension de F est donc égal à 2. Le rang de la famille (u_1, u_2) est donc aussi égal à 2.

2) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, e_2, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, e_2, x - x_1u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, e_2, x - x_1u_1 - (x_2 - x_1)e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons $u \in F$ si et seulement $u'' = x - x_1u_1 - (x_2 - x_1)e_2 \in F$. Les deux premières coordonnées de u'' sont nulles et les vecteurs (u_1, e_2) de la base échelonnée de F dans la base $\mathcal{B}$ sont d'ordres respectivement 1 et 2 dans la base $\mathcal{B}$. On obtient alors, $u \in F$ si et seulement si : $x_3 - x_1 = 0$. Ainsi,

$$x_3 - x_1 = 0$$

est un système d'équation de F dans la base $\mathcal{B}$.

3) Soit $u \in D \cap F = \{0\}$. Comme u appartient à D, il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda e_1$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont donc : $(\lambda, 0, 0)$. Traduisons en utilisant le système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$ donné dans la question précédente que $u \in F$. On obtient $\lambda - 0 = 0$. Soit $\lambda = 0$, soit $u = 0$. On a ainsi montré que $D \cap F = \{0\}$.

4) D'aprés un résultat du cours, D et F sont supplémentaire si :

$$\dim_K D + \dim_K F = \dim_K E \quad \text{et} \quad D \cap F = \{0\} \quad .$$

Le vecteur e_1 est non nul. C'est donc une base de $D = \text{Vect}(e_1)$. Ainsi, D est de dimension 1. Nous avons vu que F est de dimension 2. Ainsi, $1 + 2 = 3 = \dim_K E$. Comme, d'après la question précédente $D \cap F = \{0\}$, nous avons bien :

$$E = D \oplus F$$

Correction de l'exercice 8

1) Soit $w \in H \cap L$. Traduisons que $w \in L$: il existe a et b réels tels que :

$$w = au + bv = a(1,1,1,1) + b(1,0,0,0) = (a+b, a, a, a) \quad .$$

Comme $w \in H$, ses ocordonnées vérifient les équations de H. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a+b) + a + a + a &=& 0 \\ (a+b) - a + a - a &=& 0 \, . \end{array} \right.$$

Soit $4a + b = 0$ et $b = 0$. Ainsi, $a = b = 0$ et $w = 0$. Nous avons ainsi montré que $H \cap L = \{0\}$.
2) Le vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 0 \, . \end{array} \right.$$

ou encore si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \, . \end{array} \right.$$

Ce système est triangulé de variable libre x_4 et x_3, on obtient : $x_2 = -x_4$ et $x_1 = -x_3$. Ainsi, $H = \{x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1)$ tels que $x_3 \ , \ x_4 \in \mathbf{R}\}$. La famille $(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)$ est donc une famille générarice de H. Elle est libre, car si

$$x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1) = 0$$

on obtient :

$$(-x_3 n - x_4, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$$

et $x_3 = x_4 = 0$. Ainsi, $(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)$ est une base de H. En particulier, $\dim_{\mathbf{R}}(H) = 2$.

On montre facilement que la famille (u, v) est libre. Elle engendre L par définition. C'est donc une base de L et $\dim_{\mathbf{R}}(L) = 2$.

Ainsi, nous avons :

$$H \cap L = \{0\} \quad , \quad \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^4 = 2 + 2 = \dim_{\mathbf{R}}(H) + \dim_{\mathbf{R}}(L) \quad .$$

Cela assure que H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.

2) Comme H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$, le vecteur (a, b, c, d) de $\mathbf{R}^4$ s'écrit de façon unique :

$$(a, b, c, d) = l + h \quad \text{avec} \quad l \in L \quad \text{et} \quad h \in H \quad .$$

Traduisons que $l \in L$: il existe a et b réels tels que :

$$l = \alpha u + \beta v = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,0,0,0) = (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha) \quad .$$

On obtient :

$$h = (a,b,c,d) - (\alpha+\beta,\alpha,\alpha,\alpha) = (a-\alpha-\beta, b-\alpha, c-\alpha, d-\alpha) \quad .$$

Exprimons que $h \in H$, on obtient :

$$\begin{cases} a+b+c+d &= 4\alpha+\beta \\ a-b+c-d &= \beta \ . \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} \beta &= a-b+c-d \\ \alpha &= \frac{1}{2}(b+d) \ . \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$l = (a - \frac{b}{2} + c - \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}) \quad , \quad h = (\frac{b}{2} - c + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{d}{2}, -\frac{b}{2} + c\frac{d}{2}, -\frac{b}{2} + \frac{d}{2}) \quad .$$

Correction de l'exercice 9

1) Notons $E = \mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$:

$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_3 = (0,0,0,1) \quad .$$

On a : $v(u_1) = v(u_2) = v(u_3) = 1$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad H = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \quad .$$

Étape 2 : On utilise u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1,u'_2,u'_3) = \begin{pmatrix} u'_1 = u_1 & u'_2 = u_2 - u_1 & u'_3 = u_3 + 2u_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad H = \mathrm{Vect}(u'_1,u'_2,u'_3) \ .$$

On a $v(u'_1) < v(u'_2) = v(u'_3) = 2$.

Étape 3 : On utilise u'_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1,u''_2,u''_3) = \begin{pmatrix} u''_1 = u'_1 & u''_2 = u'_2 & u''_3 = u'_3 - 3u'_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad H = \mathrm{Vect}(u''_1,u''_2,u''_3) \ .$$

On a $v(u''_1) < v(u''_2) < v(u''_3)$ L'algorithme est terminé et la famille :

$$(u''_1 = (1,1,-1,-1), u''_2 = (0,1,2,2), u''_3 = (0,0,-10,5))$$

est donc une base de H échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

2) La famille (u_1'', u_2'', u_3'') est échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Soit u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1'' & u_2'' & u_3'' & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 2 & -10 & x_3 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 1 : $u^{(1)} = u - x_1 u_1''$:

$$M_{\mathcal{B}}(, u_2'', u_3'', u^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1'' & u_2'' & u_3'' & u^{(1)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 - x_1 \\ -1 & 2 & -10 & x_3 + x_1 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 + x_1 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

On a $u \in F$ équivaut à $u^{(1)} \in F$.

Étape 2 : $u^{(2)} = u^{(1)} - (x_2 - x_1)u_2''$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u^{(2)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1'' & u_2'' & u_3'' & u^{(2)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & x_3 + 3x_1 - 2x_2 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 - x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

et $u \in F$ équivaut à $u^{(2)} = (0, 0, x_3 + 3x_1 - 2x_2, x_4 - x_1 + 2x_2) \in F$.

Étape 3 : $u^{(3)} = u^{(2)} + (1/10)(x_3 + 3x_1 - 2x_2)u_3'''$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1''', u_2''', u_3''', u^{(3)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1'' & u_2'' & u_3'' & u^{(3)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 + (1/2)x_1 + x_2 + (1/2)x_3 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

et $u \in F$ équivaut à $u^{(3)} = (0, 0, 0, x_4 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3) \in F$.

L'algorithme est terminé. Le vecteur $u^{(3)}$ a ses trois premières coordonnées nulles et u_1''', u_2''', u_3''' sont respectivement d'ordre 1, 2 et 3 relativement à la base $\mathcal{B}$. Le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$ est dans H si et seulement si $u^{(3)} = 0$. Donc, si et seulement si :

$$x_4 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \quad .$$

Cette équation est est un système d'équations de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
3) Soit $u \in F \cap H$. Donc , $u \in F$. Par définition de F, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$u = au_4 = a(1,1,1,1) = (a,a,a,a) \quad .$$

Comme $u \in H$, les coordonnés de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ vérifient l'équation de H. On doit alors avoir :

$$a + \frac{1}{2}a + a + \frac{1}{2}a = 0 \quad .$$

Soit $3a = 0$, soit $a = 0$ et $u = 0$. Ainsi, $F \cap H = \{0\}$.
Dans la question 2, nous avons vu que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 3. Comme F est engendré par un vecteur non nul, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 1. Ainsi :

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^4 = 4 = 1 + 3 = \dim_{\mathbf{R}} F + \dim_{\mathbf{R}} H \quad .$$

Comme nous venons de montrer que $F \cap H = \{0\}$, F et H sont donc supplémentaires :

$$\mathbf{R}^4 = F \oplus H \quad ;$$

4) Puisque F et H sont supplémentaires, il existe $v \in F$ et $w \in H$ uniques tels que $u = v + w$. Comme $v \in F$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$v = au_4 = a(1,1,1,1) = (a,a,a,a) \quad .$$

Il en résulte :

$$w = u - v = (x_1, x_2, x_3, x_4) - (a,a,a,a) = (x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, x_4 - a) \in H \quad .$$

Écrivons que les coordonnées de w dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ vérifient l'équation de H :

$$(x_4 - a) + \frac{1}{2}(x_1 - a) + (x_2 - a) + \frac{1}{2}(x_3 - a) = 0 \quad .$$

On en déduit :

$$a = \frac{x_4 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3}{3} = \frac{2x_4 + x_1 + 2x_2 + x_3}{6}$$

Ainsi :

$$v = \frac{2x_4 + x_1 + 2x_2 + x_3}{6}(1,1,1,1)$$

$$w = (\frac{-2x_4 + 5x_1 - 2x_2 - x_3}{6}, \frac{-2x_4 - x_1 + 4x_2 - x_3}{6}, \frac{-2x_4 - x_1 - 2x_2 + 5x_3}{6}, \frac{4x_4 - x_1 - 2x_2 - x_3}{6})$$

Correction de l'exercice 10
1) Un vecteur $(x,y,z,t) \in P$ si et seulement si (x,y,z,t) une solution du systéme d'équations linéaires homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ y + 2z + t & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Les variables x, y, z, t étant ordonnés naturellement, ce système est triangulé et admet deux variables libres z et t. Ainsi, l'espace vectoriel de ses solutions est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Résolvons ce système. On obtient :

$$y = -2z - t \quad , \quad \text{puis } x = -y - z - t = 2z + t - z - t = z \quad .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P &= \{(z, -2z - t, z, t) \text{ tels que } z\,,\ t\ \in \mathbf{R}\} \\ &= \{z(1, -2, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1) \text{ tels que } z\,,\ t\ \in \mathbf{R}\} \quad . \end{aligned}$$

La famille $(u_1 = (1, -2, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1))$ est génératrice de P. Elle est libre. Si $z(1, -2, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1) = 0$, $(z, -2z - t, z, t)$ est nul et $z = t = 0$. La famille $(u_1 = (1, -2, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1))$ est donc une base de P.

2) Par définition, V est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1 et v_2. Donc, la famille (v_1, v_2) est une famille génératrice de V. Pour montrer que c' est une base, il suffit donc de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soit $a, b \in \mathbf{R}$, tels que $av_1 + bv_2 = 0$. Il vient : $(a + b, a, a + b, a) = 0$. D'où $a = 0$, puis $b = 0$.

3) Soit $w \in P + V$. Par définition de $P + V$, il existe $w_1 \in P$ et $w_2 \in V$ tels que $w = w_1 + w_2$. Comme $w_1 \in P$, w_1 s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de sa base (u_1, u_2) : il existe, $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $w_1 = au_1 + bu_2$. De même, $w_2 \in V$ et w_2 s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de sa base (v_1, v_2) : il existe, $c, d \in \mathbf{R}$ tels que $w_2 = cv_1 + dv_2$. Il en résulte $w = au_1 + bu_2 + cv_1 + dv_2$. Donc, $w \in \text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. On a donc montré $P + V \subset \text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. Inversement, si $w \in \text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$, il existe $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tels que $w = au_1 + bu_2 + cv_1 + dv_2$. Ainsi, $w = (au_1 + bu_2) + (cv_1 + dv_2)$. Comme $au_1 + bu_2 \in P$ et $cv_1 + dv_2 \in V$, on obtient $w \in P + V$ et $\text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset P + V$. Finalement, $P + V = \text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$.

Nous connaissons les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, v_1, v_2 dans une base (la base canonique de $\mathbf{R}^4$). Utilisons l'algorithme qui nous donnera une base de $\text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$ échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P + V = \text{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) \quad .$$

Étape 2 : On utilise u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, v_1', v_2') = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & v_1' = v_1 - u_1 & v_2' = v_2 - u_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P+V = \text{Vect}(u_1, u_2, v_1', v_2') \; .$$

On a $v(u_1) < v(u_2) = v(v'_1) = v(v'_2) = 2$.

Étape 3 : On utilise u_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, v''_1, v''_2) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & v''_1 = v'_1 + 3u_2 & v''_2 = v'_2 + 2u_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad P+V = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v''_1, v''_2) .$$

On a $v(u_1) < v(u_2) < v(v''_1) = v(v''_2) = 4$
Étape 4 : On utilise u_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, v''_1, v'''_2) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & v''_1 & v'''_2 = v''_2 - (1/2)v''_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P+V = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v''_1) .$$

On a $v(u_1) < v(u_2) < v(v''_1)$. L'algorithme est terminé et la famille :

$$(u_1 = (1, -2, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1), v''_1 = (0, 0, 0, 4))$$

est donc une base de $P + V$ échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. $P + V$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 3.

4) Dire que P et V sont supplémentaires, c 'est dire $P+V = \mathbf{R}^4$ et $P \cap V\{0\}$. Or, $P+V = \mathbf{R}^4$ est impossible puisque $\mathbf{R}^4$ est de dimension 4 et que nous venons de voir que $P + V$ est de dimension 3. Nous savons que :

$$\dim_{\mathbf{K}} P + \dim_{\mathbf{K}} V = \dim_{\mathbf{K}}(P + V) + \dim_{\mathbf{K}}(P \cap V)$$

Il en résulte $2 + 2 = 3 + \dim_{\mathbf{K}}(P \cap V)$. Soit $\dim_{\mathbf{K}}(P \cap V) = 1$. Une base de $(P \cap V)$ est donc formée par un vecteur non nul de $P \cap V$; or l'algorithme de la question précédente donne :

$$\begin{aligned} 0 &= v'''_2 = v''_2 - \frac{1}{2}v''_1 \\ &= (v'_2 + 2u_2) - \frac{1}{2}(v'_1 + 3u_2) \\ &= (v_2 - u_1 + 2u_2) - \frac{1}{2}(v_1 - u_1 + 3u_2) \\ &= \frac{1}{2}(2v_2 - 2u_1 + 4u_2 - v_1 + u_1 - 3u_2) = \frac{1}{2}(2v_2 - u_1 + u_2 - v_1) \quad . \end{aligned}$$

Il en résulte : $u_1 - u_2 = 2v_2 - v_1$. Le vecteur $u_1 - u_2 = (1, -1, 1, -1)$ est dans P puisque combinaison linéaire de u_1, u_2. Or, il est égal au vecteur $2v_2 - v_1$ qui est dans V comme combinaison linéaire de v_1, v_2. Ainsi, $u_1 - u_2 \in P \cap V$. Ce vecteur est non nul. On a donc montré que $(u_1 - u_2 = (1, -1, 1, -1))$ est une base de $P \cap V$.

Une autre façon de déterminer une base de $P \cap V$ est de commencer par déterminer un système d'équations de V. Pour cela, on commence comme usuellement à déterminer une base échelonnée de V relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$: les calculs donnent que $(v_1 == (1,1,1,1), v' = (0,-1,0,1)$ est une base échelonnée de V relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. L'algorithme du cours nous permet alors de montrer que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-z & = & 0 \\ y-t & = & 0 \end{array}\right. .$$

est un système d'équations linéaires de V. Ainsi, $P \cap V$ admet comme systéme d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ y+2z+t & = & 0 \\ x-z & = & 0 \\ y-t & = & 0 \end{array}\right. .$$

Pour retrouver $P \cap V$, il reste à résoudre ce système ce qui est laissé au lecteur.

5) On admet donc que $\mathbf{R}^4 = P \oplus W$. Ainsi, tout vecteur $u = (x,y,z,t)$ sécrit de façon unique : $u = l + w$ avec $l \in P$ et $w \in W$. La projection p sur W parallélement à P est l'application :

$$p \ : \ \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4 \quad , \quad u \longmapsto p(u) = w \quad .$$

Précisons $p(u) = w$ à l'aide de (x,y,z,t). Il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $w = av_1 + bv_3$. Il en résulte :

$$l = (x,y,z,t) - a(1,1,1,1) - b(1,1,0,0) = (x-a-b, y-a-b, z-a, t-a) \in P \quad .$$

Ainsi les coordonnées de l vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t-4a-2b & = & 0 \\ y+2z+t-4a-b & = & 0 \end{array}\right. .$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4a+2b & = & x+y+z+t \\ 4a+b & = & y+2z+t \end{array}\right. .$$

Résolvons ce système d'équations linéaires en a, b. La première variable étant a, la deuxième b, le système équaivalent suivant est triangulé :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4a+2b & = & x+y+z+t \\ b & = & x-z \end{array}\right. .$$

Il vient :

$$b = x - z \quad , \quad 4a = x+y+z+t-2x+2z = -x+y+3z+t \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{4}(-x+y+3z+t) \; .$$

On a ainsi :

$$\begin{array}{rcl} p(u) = w & = & \frac{1}{4}(-x+y+3z+t)v_1 + (x-z)v_3 \\ & = & \frac{1}{4}(-x+y+3z+t)(1,1,1,1) + (x-z)(1,1,0,0) \\ & = & (\frac{1}{4}(3x+y-z+t), \frac{1}{4}(3x+y-z+t), \frac{1}{4}(-x+y+3z+t), \frac{1}{4}(-x+y+3z+t)) \end{array}$$

Remarque : Commme $\dim_{\mathbf{K}} P + \dim_{\mathbf{K}} W = \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{R}^4$, le cours nous apprends que pour montrer que P et W sont supplémentaires, il suffit soit de montrer que $P+W = \mathbf{R}^4$, soit de montrer que $P \cap W = \{0\}$. Le plus rapide est alors de montrer que $P+W = \mathbf{R}^4$. Pour ce faire, on remarque (analogue à la question 3) $P+W = \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_3)$. Il reste à montrer que $\mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_3)$ est de dimension 4. L'algorithme du cours qui donne une base échelonnée de $\mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_3)$ relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$ permettra de conclure rapidement.