

Ch. II

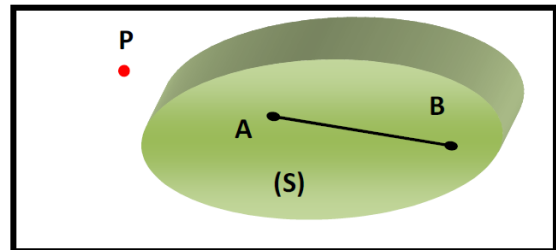
CINEMATIQUE DU SOLIDE

I. Généralités et définitions

D'une manière générale, la cinématique est l'étude d'un mouvement indépendamment des causes (forces) qui le produisent.

1. Solide indéformable

Un solide indéformable ou rigide, (S), est un ensemble de points telle que, la distance entre deux points quelconques parmi tous ses points, reste constante au cours du temps, et ceci quel que soit le mouvement du solide:



$$\forall A, B \in (S), \quad \forall t \quad \|\overrightarrow{AB}(t)\| = \text{Cste}$$

Remarques

- Tout vecteur joignant deux points d'un solide rigide (S) est un vecteur de (S) :

$$\forall A, B \in (S), \quad \forall t \quad \overrightarrow{AB}(t) \in (S)$$

- Un point P est dit rigidement lié à (S) s'il est immobile par rapport à tout point de (S) :

$$\forall A \in (S), \quad \forall t \quad \|\overrightarrow{AP}(t)\| = \text{Cste}$$

2. Référentiel, Repère

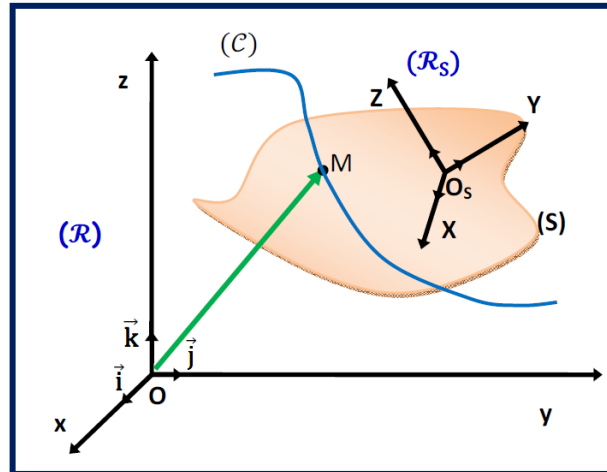
Un **repère d'espace** $\mathcal{R}(O; \mathcal{B})$, est un ensemble de points *rigidement liés*, défini par la donnée d'une origine O (Observateur) et d'une base \mathcal{B} . Le repère est dit orthonormé direct si sa base associée \mathcal{B} l'est aussi. L'adjonction du temps (Horloge) à un repère définit un **référentiel**. Tout repère d'espace ou référentiel est un « *solide rigide* » fictif.

En mécanique classique (c'est-à-dire non relativiste), l'espace physique est euclidien, de dimension 3, **homogène** (indépendant de la position), **isotrope** (indépendant de la direction) et est caractérisé par un temps **absolu** (indépendant de l'observateur).

3. Point d'un solide

La position d'un **point matériel M** quelconque d'un solide (S) dans un référentiel (\mathcal{R}), à l'instant t, est le **point géométrique** de l'espace, noté $M(t)$, occupé par M à l'instant t. Au cours du mouvement du solide, le point matériel M décrit dans (\mathcal{R}) une courbe (\mathcal{C}) appelée trajectoire du point M dans (\mathcal{R}).

Le **vecteur position** d'un point M du solide (S), par rapport au repère (\mathcal{R}) d'origine O, à l'instant t, est le vecteur \overrightarrow{OM} joignant l'origine O du repère et la position M(t). On définit :



Vecteur vitesse (m/s) : $\vec{v}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$

Vecteur accélération: (m/s²) : $\vec{\gamma}(M/R) = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d \vec{v}(M/R)}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$

4. Paramétrage de la position d'un solide

Le mouvement d'un solide (S) dans un référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ peut, en général, être décomposé en:

- un mouvement de **translation** suite aux changements de sa position
- un mouvement de **rotation** suite aux changements de son orientation

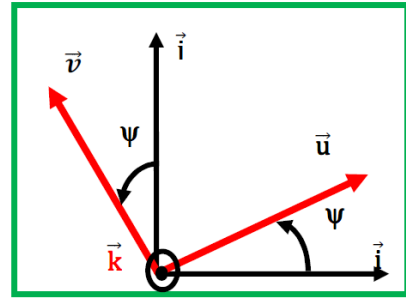
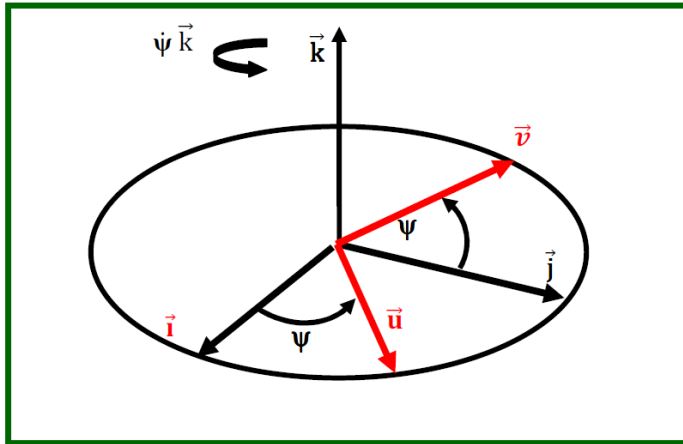
Pour étudier le mouvement de (S), on lui **lie rigidement** un référentiel orthonormé direct arbitraire, $\mathcal{R}_s(O_s; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ayant pour origine un point quelconque, O_s lié à (S) (généralement son centre de gravité). Le mouvement de (S) dans (\mathcal{R}) est alors complètement déterminé par le mouvement de (\mathcal{R}_s) dans (\mathcal{R}). Par conséquent, il suffit de paramétrer **la position** de l'origine O_s et **l'orientation** de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de (\mathcal{R}_s) par rapport à (\mathcal{R}).

- **Paramétrage de la position de l'origine O_s :** comme l'**origine** O_s est un point matériel, sa position est habituellement **paramétrée** par :
 - les coordonnées cartésiennes : (x, y, z)
 - les coordonnées cylindriques : (ρ, θ, z)
 - les coordonnées sphériques : (r, θ, φ) .
- **Paramétrage de l'orientation de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:** L'orientation de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de (\mathcal{R}_s) par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de (\mathcal{R}) est **paramétrée**, par les trois **angles d'Euler: ψ, θ et φ** . Le

mouvement de rotation (S) peut être décomposé en trois rotations planes successives autour de trois axes de rotation. Fixons l'origine O_s de (\mathcal{R}_s) avec l'origine O de (\mathcal{R}) afin d'éliminer la translation.

- La première rotation s'effectue autour de l'axe $(O_s \vec{k})$ avec l'angle ψ tel que : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ s'appelle première base intermédiaire

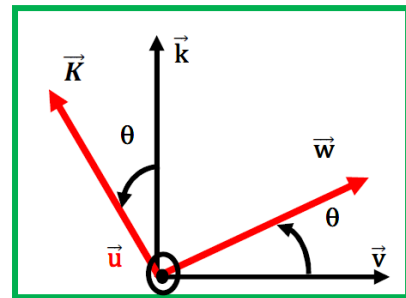
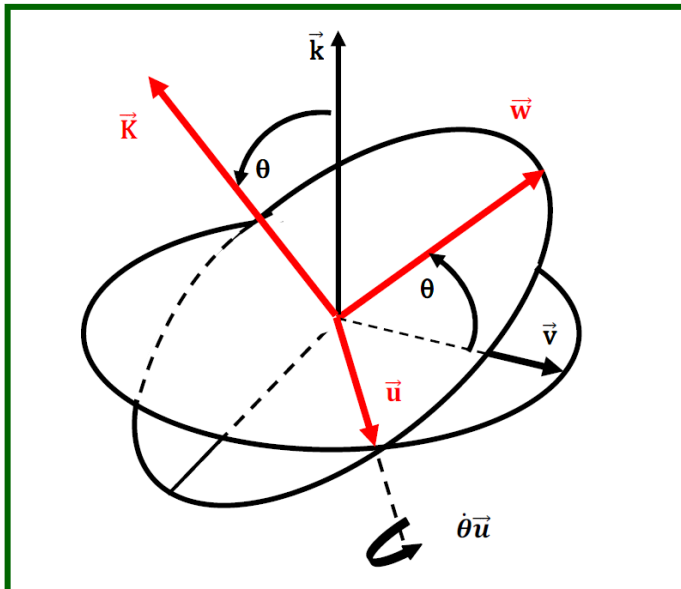


Le vecteur rotation instantané de $\mathcal{R}_1(O_s; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ par rapport à (\mathcal{R}) autour de l'axe de rotation $(O_s \vec{k})$ avec la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ est :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\psi} \vec{k}$$

- La deuxième rotation s'effectue autour de l'axe $(O_s \vec{u})$ avec l'angle θ : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$

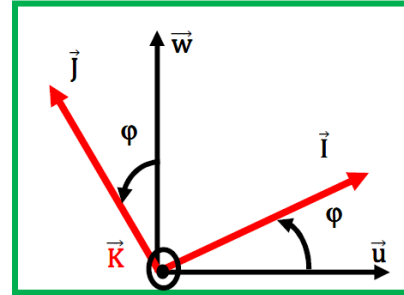
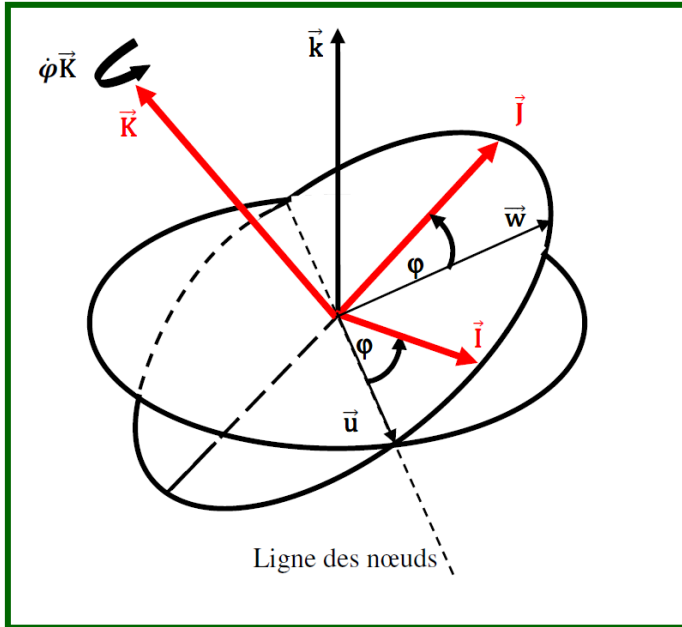
La base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$ s'appelle deuxième base intermédiaire



Le vecteur rotation instantané de $\mathcal{R}_2(O_S; \vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$ par rapport à $\mathcal{R}_1(O_S; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ autour de l'axe de rotation $(O_S \vec{u})$ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\theta} \vec{k}$$

- La troisième rotation s'effectue autour de l'axe $(O_S \vec{K})$ avec l'angle ϕ tel que : $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{K}) \rightarrow (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$



Le vecteur rotation instantané de $\mathcal{R}_s(O_S; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par rapport à $\mathcal{R}_2(O_S; \vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$ autour de l'axe de rotation $(O_S \vec{K})$ avec la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_2) = \dot{\phi} \vec{K}$$

L'appellation des angles d'Euler est d'origine astronomique :

Ψ : s'appelle angle de **précession** qui est le mouvement de rotation lent autour de la verticale.

Θ : s'appelle angle de **nutation** qui est le mouvement d'oscillation de l'axe de rotation propre du solide.

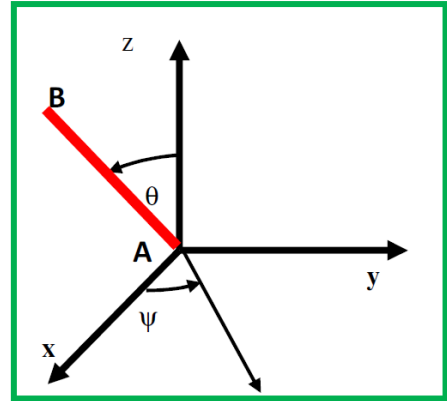
ϕ : s'appelle angle de **rotation propre** qui est le mouvement de rotation autour de l'axe du solide.

La droite $D(O_S, \vec{u})$ s'appelle **axe nodal** ou **ligne des nœuds**.

En conclusion, le paramétrage d'un solide **non rectiligne libre** est donné par $n = 3 + 3 = 6$ **coordonnées généralisées** (3 pour la translation et 3 pour la rotation) qui doivent être des **variables indépendantes** et qu'on appelle **paramètres primitifs**.

Exemples :

1. Un point matériel **libre** dans l'espace (peut être considéré comme un solide ponctuel) est décrit par $n = 3$ paramètres primitifs: les trois coordonnées de sa position.
2. Un solide **rectiligne** (AB) non ponctuel **libre** dans l'espace (par exemple une barre rigide) possède $n = 5$ coordonnées généralisées
 - ❖ 3 degrés de translation : trois coordonnées de $A(x_A, y_A, z_A)$
 - ❖ 2 degrés de rotation : 2 angles d'Euler : ψ (précession) et θ (nutation).
3. La position d'un système matériel, constitué de n_1 solides non rectilignes libres, de n_2 solides rectilignes non ponctuels libres et de n_3 points matériels libres, dépend de n coordonnées généralisées tel que:



$$n = 6 n_1 + 5 n_2 + 3 n_3$$

II. Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide

Dérivation vectorielle. Formule de Varignon.

Soient (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') deux référentiels tel que (\mathcal{R}') soit en mouvement par rapport à (\mathcal{R}) . Soit \vec{U} un vecteur quelconque alors la formule dite de **Varignon** s'écrit:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{U}$$

Remarque

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$$

Formule fondamentale de la cinématique du solide (F.F.C.S).

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}_S) un référentiel lié à (S). D'après la formule de Varignon, $\forall A$ et $B \in (S)$:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

\overrightarrow{AB} est un vecteur constant dans le référentiel (\mathcal{R}_S) lié au solide (S), donc : $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_S} = \vec{0}$

De plus :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(B/\mathcal{R}) - \vec{v}(A/\mathcal{R})$$

Comme (S) et (\mathcal{R}_S) sont rigidement liés: $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$

Par conséquent:

$$\forall A, B \in (S) \quad \vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

C'est la **Formule Fondamentale de la Cinématique du Solide (F.F.C.S.)** ou de Varignon.

III. Torseur cinématique

D'après la F.F.C.S., le champ des vecteurs vitesse \vec{v} de vecteur associé $\vec{\Omega}$ est antisymétrique et par conséquent c'est un torseur. On l'appelle **torseur cinématique** ou torseur **distributeur des vitesses** noté:

$$[\mathcal{V}(S/\mathcal{R})]_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}) \end{array} \right\} \text{ ou } [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}), \vec{v}(A/\mathcal{R})]$$

Ses éléments de réduction en un point A de S ($A \in S$) sont :

$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$: résultante du torseur cinématique = vecteur rotation instantané de (S) par rapport à (\mathcal{R})

$\vec{v}(A/\mathcal{R})$: moment en A du torseur cinématique = vecteur vitesse de $A \in S$ par rapport à (\mathcal{R})

REMARQUES

1. Si $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$, alors l'axe central (Δ) du torseur cinématique existe et on l'appelle **axe instantané de rotation et de glissement** ou encore **axe de viration**

2. Le champ de vitesses est équiprojectif : $\forall A, B \in (S) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}(B/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}(A/\mathcal{R})$

IV. Mouvements de Translation et de rotation

I. Mouvement de translation - Couple

Le mouvement d'un solide (S) par rapport à (\mathcal{R}) est un mouvement de translation si tout vecteur de (S) reste équipollent à lui-même au cours du mouvement :

$$\forall A, B \in (S) \quad \forall t \quad \overrightarrow{AB}(t) = \overrightarrow{AB}$$

Dans un mouvement de translation d'un solide, le torseur cinématique est un **couple** :

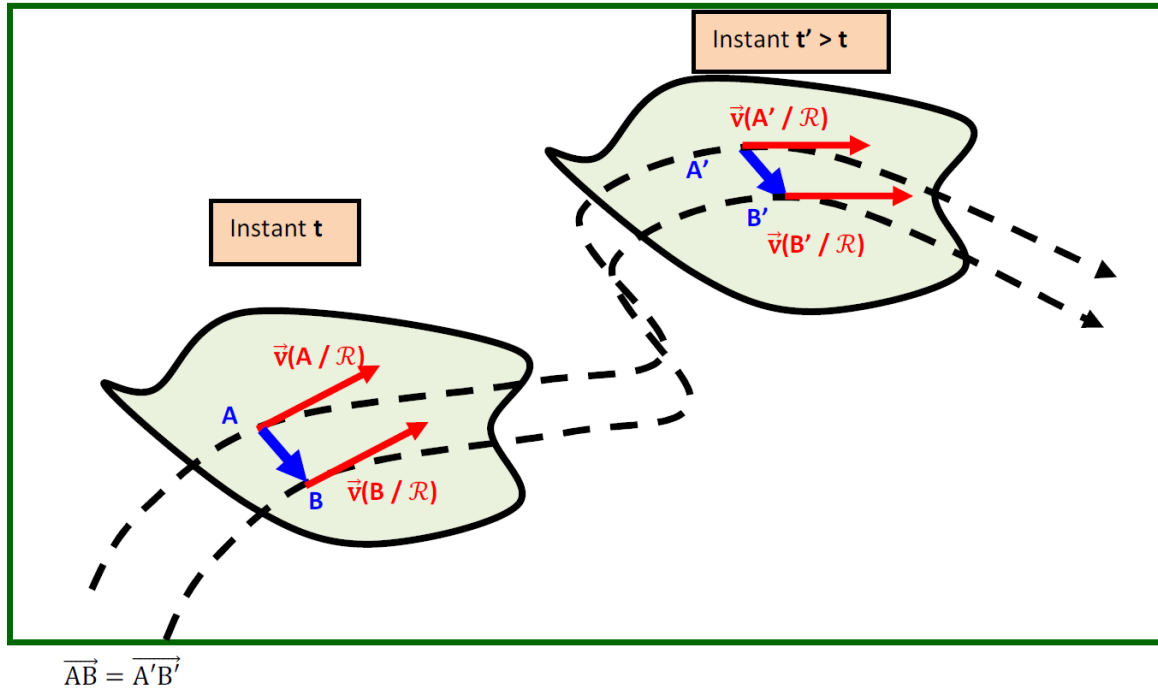
- Le champ des vitesses est uniforme
- le vecteur rotation instantané est nul : $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

Preuve :

1. Comme $\overrightarrow{AB}(t) = \overrightarrow{cte}$, alors : $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$

Ce qui donne : $\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(t) \quad \forall t$

Par conséquent, à un instant t donné, tous les vecteurs vitesse des points du solide ont une même direction.
Le champ des vitesses est uniforme.



Instant t : $\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(t)$

Instant $t' = t + dt$: $\vec{v}(B'/\mathcal{R}) = \vec{v}(A'/\mathcal{R}) = \vec{v}(t')$

Remarque

Dans un mouvement de translation du solide (S) par rapport à $\mathcal{R} (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}_s(O_s; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, lié au solide (S) gardent des directions fixes dans (\mathcal{R}).

$$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

2. D'après la F.F.C.S. on a : $\forall A, B \in (S) \quad \vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) \implies \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

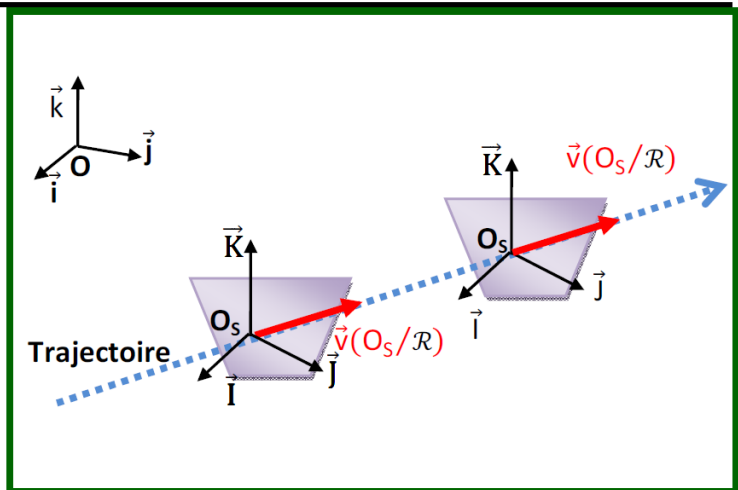
Comme $I_{[v]} = \vec{v}(A/\mathcal{R})$, $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$

Alors le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère (\mathcal{R}) est un **couple**:

$$[\mathcal{V}(S/\mathcal{R})]_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}) \neq \vec{0} \end{array} \right\}$$

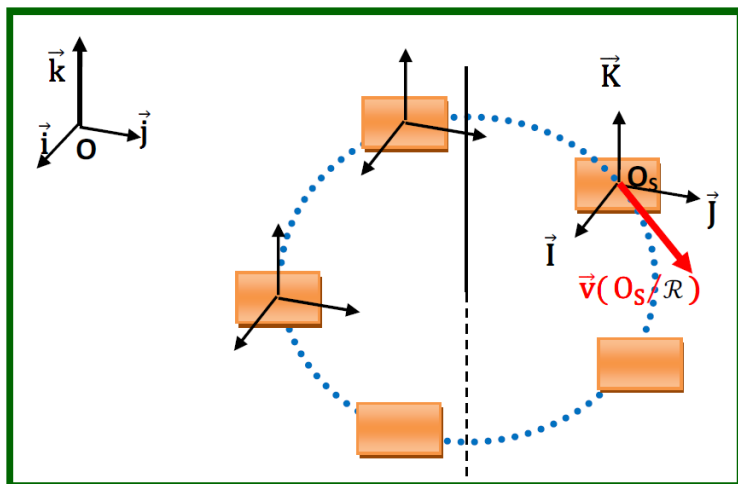
Mouvement de translation rectiligne

Le mouvement de translation de (S) par rapport à (\mathcal{R}) est dit **rectiligne** si la trajectoire d'un point quelconque de (S) dans (\mathcal{R}) est une **droite**.



Mouvement de translation circulaire

Le mouvement de translation de (S) par rapport à (\mathcal{R}) est dit **circulaire** si la trajectoire d'un point quelconque de (S) dans (\mathcal{R}) est un **cercle**.

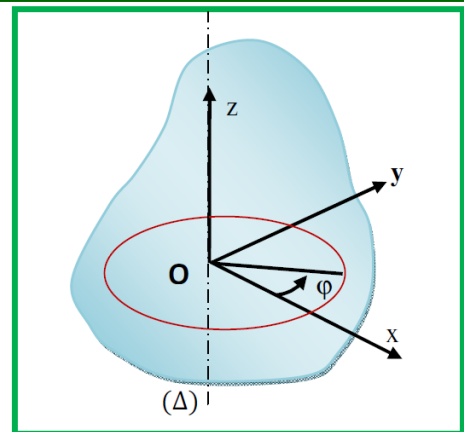


2. Solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Soit (S) un solide en rotation autour d'un axe (Δ) **fixe** dans un référentiel (\mathcal{R}).

Soit $O \in (\Delta)$: $\vec{v}(O/\mathcal{R}) = \vec{0}$

La distance du point O à tout point du solide (S) est constante au cours du temps. Donc O est lié au solide (S) :



$$\mathbf{M} \in (S) \quad \vec{v}(\mathbf{M}/\mathcal{R}) = \vec{v}(O/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}$$

Donc : $I_{[v]} = \vec{v}(\mathbf{M}/\mathcal{R})$, $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \mathbf{0}$

Le torseur cinématique est un **glisseur** dont l'axe central est l'axe instantané de rotation (Δ).

Si tous les points du solide (S) sont en mouvement sur des trajectoires circulaires centrées sur l'axe (Δ) de vecteur unitaire \vec{k} , à la même vitesse angulaire, $\dot{\phi}$, alors :

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \dot{\phi} \vec{k}$$

V. Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère (\mathcal{R}). La formule de transport :

$$\forall \mathbf{A} \text{ et } \mathbf{B} \in (\mathbf{S}) \quad \vec{v}(\mathbf{B}/\mathcal{R}) = \vec{v}(\mathbf{A}/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overline{\mathbf{AB}}$$

En dérivant par rapport au temps, dans (\mathcal{R}), on obtient :

$$\vec{\gamma}(\mathbf{B}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\mathbf{A}/\mathcal{R}) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \wedge \overline{\mathbf{AB}} + \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \left[\frac{d\overline{\mathbf{AB}}}{dt} \right]_{\mathcal{R}}$$

Sachant que :

$$\left[\frac{d\overline{\mathbf{AB}}}{dt} \right]_{\mathcal{R}} = \vec{v}(\mathbf{B}/\mathcal{R}) - \vec{v}(\mathbf{A}/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overline{\mathbf{AB}}$$

On arrive à :

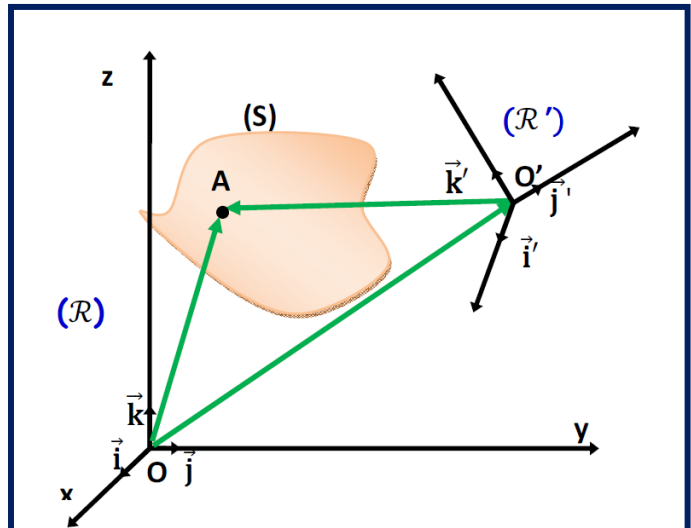
$$\vec{\gamma}(\mathbf{B}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\mathbf{A}/\mathcal{R}) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \wedge \overline{\mathbf{AB}} + \vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge [\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overline{\mathbf{AB}}]$$

Le dernier terme $\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge [\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overline{\mathbf{AB}}]$ est en général non nul. Par suite, le champ des vecteurs accélération des points d'un solide n'est pas représentable par un torseur.

VI. Composition de mouvements

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à deux référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}'). Le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est choisi comme étant absolu et le référentiel $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est choisi comme étant un référentiel relatif en mouvement relatif par rapport à (\mathcal{R}). Soit A un point du solide (S). D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$



1. Composition des vecteurs rotation

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}') + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}') = -\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/S)$$

Généralisation :

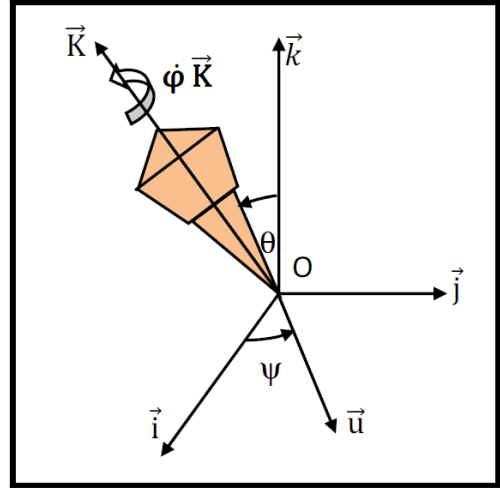
$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{\Omega}(\mathcal{R}_i/\mathcal{R}_{i+1})$$

Exemple : Rotation autour d'un point fixe

Soit $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère fixe et $\mathcal{R}_S(O_S \equiv O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ un repère lié à un solide (S) qui est en rotation autour du point fixe $O_S \equiv O$ (mouvement de rotation d'une toupie par exemple). Le vecteur rotation instantané de (S) par rapport à (\mathcal{R}) :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \\ &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}(O_S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{(\vec{k}, \psi)} \mathcal{R}_1(O_S; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \xrightarrow{(\vec{u}, \theta)} \mathcal{R}_2(O_S; \vec{u}, \vec{w}, \vec{K}) \xrightarrow{(\vec{K}, \phi)} \mathcal{R}_S(O_S; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$$



En fonction des angles d'Euler :

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{K}$$

2. Composition des vecteurs vitesse

La vitesse absolue du point A du solide (S) par rapport à $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la somme de sa vitesse relative par rapport à $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ et de sa vitesse d'entraînement :

$$\vec{v}_a(A) = \vec{v}_r(A) + \vec{v}_e(A)$$

Vecteur vitesse absolue : $\vec{v}_a(A) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$

Vecteur vitesse relative : $\vec{v}_r(A) = \vec{v}(A/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\vec{O'A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$

Vecteur vitesse d'entraînement :

$$\vec{v}_e(A) = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'A}$$

La vitesse d'entraînement est la vitesse absolue d'un point coïncidant A' fixe dans le repère relatif (\mathcal{R}') ($\vec{v}_r(A') = \vec{0}$) et qui coïncide, à l'instant t , avec le point A dans son mouvement par rapport à (\mathcal{R}) . Les points A et A' occupent la même position à l'instant t . On utilisera dans la suite la notation $\mathbf{A} \in \mathcal{R}'$ pour désigner le point coïncidant A' :

$$A' \equiv \mathbf{A} \in \mathcal{R}'$$

$$\vec{v}_r(A') = \vec{v}(A'/\mathcal{R}') = \vec{v}(\mathbf{A} \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}') = \vec{0}$$

Par conséquent, la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{v}_e(A) = \vec{v}_a(A \in \mathcal{R}') = \vec{v}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

Finalement on peut écrire:

$$\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}') + \vec{v}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

Remarque :

$$\vec{v}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -\vec{v}(A \in \mathcal{R}/\mathcal{R}')$$

$$\vec{v}(A \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{v}(A \in \mathcal{R}_i/\mathcal{R}_{i+1})$$

On obtient également l'égalité des torseurs :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}') \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}') \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$$

D'où la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$[\mathcal{V}(S/\mathcal{R})] = [\mathcal{V}(S/\mathcal{R}')] + [\mathcal{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})]$$

3. Composition des vecteurs accélération

L'accélération absolue d'un point A de (S) par rapport à (\mathcal{R}) est la somme de son accélération relative par rapport à (\mathcal{R}') , de son accélération d'entraînement et de son accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_a(A) = \vec{\gamma}_r(A) + \vec{\gamma}_e(A) + \vec{\gamma}_c(A)$$

Accélération absolue : $\vec{\gamma}_a(A) = \vec{\gamma}(A/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}_a(A)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$

Accélération relative : $\vec{\gamma}_r(A) = \vec{\gamma}(A/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\vec{v}_r(A)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d^2 \vec{O'A}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'}$

Accélération de Coriolis ou Complémentaire : $\vec{\gamma}_c(A) = 2 \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}_r(A)$

L'accélération de Coriolis n'est non nulle que dans le cas d'un mouvement relatif par rapport à un repère en rotation !

Accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_e(A) = \vec{\gamma}(O'/\mathcal{R}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'A} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'A})$

L'accélération d'entraînement est l'accélération absolue d'un point coïncidant $A \in \mathcal{R}'$ fixe dans le repère relatif (\mathcal{R}') et qui coïncide, à l'instant t , avec le point A dans son mouvement par rapport à (\mathcal{R}) :

$$\vec{\gamma}_e(A) = \vec{\gamma}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

On retrouve la relation de transfert obtenue dans le cas d'un champ d'accélération du fait que les points O' et $A \in \mathcal{R}'$ sont deux points du même référentiel solide (\mathcal{R}').

Finalement :

$$\vec{\gamma}(A/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(A/\mathcal{R}') + \vec{\gamma}(A \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) + 2 \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}')$$

Remarque

$$\vec{\gamma}_e(A) \neq \left(\frac{d\vec{v}_e(A)}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$