

ENSA-ALHOCEIMA
ANALYSE 3
CP II
SEMESTRE 1
Exercice1 :

Montrer que pour tous nombres réels x et y on a :

$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$

Exercice2 :

Soit E un ensemble non vide et d une distance.

Montrer que :

- 1- $\forall (x, y, z) \in E^3: \quad d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$
- 2- $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n: \quad d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$

Exercice3 :

Soit E l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2.

Pour $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(X) = a'x^2 + b'x + c'$ dans E , on pose :

$$\begin{cases} d(P, Q) = 3 & \text{si } a \neq a' \\ d(P, Q) = 2 & \text{si } a = a' \text{ et } b \neq b' \\ d(P, Q) = 1 & \text{si } a = a', b = b' \text{ et } c \neq c' \\ d(P, Q) = 0 & \text{si } P = Q \end{cases}$$

Montrer que d est une distance sur E .

Exercice4:

Sur l'espace vectoriel $IK[X]$ des polynômes réels ou complexes, on définit les normes suivantes:

Pour $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|, \quad N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \sup_{0 \leq i \leq n} |a_i|$$

- 1- Montrer que $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$
- 2- On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n(X) = 1 + X + \dots + X^n$$

- a- Calculer $\frac{N_2}{N_\infty}(P_n)$ et $\frac{N_1}{N_2}(P_n)$
- b- Ces normes peuvent-elles être équivalentes ? justifier.

Exercice5 :

Soit $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f: E \rightarrow F$ une application et $a \in E$.

Montrer que si $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers a , alors cette limite est unique.