Espaces vectoriels de dimension finie

1 Base

Exercice 1

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ et $w = (1,2,-3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000981]

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000901]

Exercice 3

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\big\{(1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\big\}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000996]

Exercice 4

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,-1,i)$, $v_2 = (-1,i,1)$, $v_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001006]

Exercice 5

1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$ (pour $i = 0,1,\ldots,n$) forme une base de E.
2. Écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X-X^2) + d(X^2-X^3)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ puis sous la forme $F = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2) + \delta(1+X+X^2+X^3)$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000992]

2 Dimension

Exercice 6

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001015]

Exercice 7

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$, $F+G$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001019]

Exercice 8

Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001016]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Être une base, c'est être libre et génératrice. Chacune de ces conditions se vérifie par un système linéaire.

Indication pour l'exercice 2 ▲

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Une base comporte trois vecteurs.

Indication pour l'exercice 3 ▲

C'est une base pour $t \neq \pm 1$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Il n'y a aucune difficulté. C'est comme dans $\mathbb{R}^3$ sauf qu'ici les coefficients sont des nombres complexes.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Il suffit de montrer que la famille est libre (pourquoi ?). Prendre ensuite une combinaison linéaire nulle et regarder le terme de plus haut degré.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Partir d'une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de $F \cap G$ et la compléter par des vecteurs $(f_1, \ldots, f_\ell)$ en une base de F. Repartir de $(e_1, \ldots, e_k)$ pour la compléter par des vecteurs $(g_1, \ldots, g_m)$ en une base de G. Montrer que $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_\ell, g_1, \ldots, g_m)$ est une base de $F + G$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Calculer d'abord les dimensions de F et G. Pour celles de $F \cap G$ et $F + G$ servez-vous de la formule $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

On peut utiliser des familles libres.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.

   (a) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0,0,0)$

   $$\begin{aligned} & av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\ \iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\ \iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\ \iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

   (b) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

   $$\begin{aligned} & av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\ \iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\ \iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\ \iff & \begin{cases} b+c=x \\ a+c=y & (L_2) \\ a+b=z & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x & (L'_1) \\ a+c=y \\ b-c=z-y & (L'_3)=(L_3-L_2) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2b=x+z-y & (L'_1+L'_3) \\ a+c=y \\ 2c=x-(z-y) & (L'_1-L'_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b=\frac{1}{2}(x-y+z) \\ c=\frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases} \end{aligned}$$

   Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x,y,z) = v$. Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice.

   (c) La famille est libre et génératrice donc c'est une base.

   (d) Pour écrire $w = (1,1,1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x,y,z), en particulier pour le vecteur $(1,1,1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3) sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Pour montrer que la famille est libre et génératrice les calculs sont similaires à ceux de la question précédente. Notons $\mathscr{B}$ la base (v_1, v_2, v_3).
   Exprimons ensuite e_1 dans cette base, les calculs donnent : $e_1 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
   $e_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
   $e_3 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.
   Les calculs sont ensuite terminés, on remarque que $w = (1,2,-3)$ vaut en fait $w = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ donc par nos calculs précédents $w = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + 2(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3) - 3(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3) = 2v_2 + 3v_3$. Les coordonnées de w dans $\mathscr{B}$ sont $(0,2,3)$.

3. Par exemple la famille $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.

4. La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
   (a) l'origine $(0,0,0,0)$ est dans E,
   (b) si $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$ et $v'=(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)\in E$ alors $v+v'=(x_1+x'_1,x_2+x'_2,x_3+x'_3,x_4+x'_4)$ a des coordonnées qui vérifient l'équation et donc $v+v'\in E$.
   (c) si $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors les coordonnées de $\lambda\cdot v=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\lambda x_4)$ vérifient l'équation et donc $\lambda\cdot v\in E$.
2. Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E. Comme E est dans $\mathbb{R}^4$, il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $v_1=(1,-1,0,0)$. Il est bien clair que v_1 n'engendre pas tout E, on cherche donc un vecteur v_2 linéairement indépendant de v_1, prenons $v_2=(1,0,-1,0)$. Alors $\{v_1,v_2\}$ n'engendrent pas tout E ; par exemple $v_3=(1,0,0,-1)$ est dans E mais n'est pas engendré par v_1 et v_2. Montrons que (v_1,v_2,v_3) est une base de E.
   (a) (v_1,v_2,v_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
&\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0\\
&\Rightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma &=0\\ -\alpha &=0\\ -\beta &=0\\ -\gamma &=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \alpha=0,\beta=0,\gamma=0
\end{aligned}$$

   Donc la famille est libre.
   (b) Montrons que la famille est génératrice : soit $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$. Il faut écrire v comme combinaison linéaire de v_1,v_2,v_3. On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α,β,γ tels que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=v$. On obtient que $v=-x_2v_1-x_3v_2-x_4v_4$ (on utilise $x_1+x_2+x_3+x_4=0$).

   Bien sûr vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Correction de l'exercice 3 ▲

Quand le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre *être une famille libre* et *être une famille génératrice* et donc aussi *être une base*.
Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ forment donc une base si et seulement s'ils forment une famille libre. Vérifions quand c'est le cas.

$$
\begin{aligned}
& a(1,0,t)+b(1,1,t)+c(t,0,1)=(0,0,0)\\
\iff & (a+b+tc,b,at+bt+c)=(0,0,0)\\
\iff & \begin{cases} a+b+tc=0\\ b=0\\ at+bt+c=0\end{cases} \iff \begin{cases} b=0\\ a+tc=0\\ at+c=0\end{cases}\\
\iff & \begin{cases} b=0\\ a=-tc\\ (-tc)t+c=0\end{cases} \iff \begin{cases} b=0\\ a=-tc\\ (t^2-1)c=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

Premier cas : si $t \neq \pm 1$. Alors $t^2-1 \neq 0$ et donc la seule solution du système est $(a=0,b=0,c=0)$. Dans ce cas la famille est libre et est donc aussi une base.
Deuxième cas : si $t=\pm 1$. Alors la dernière ligne du système disparaît et il existe des solutions non triviales (par exemple si $t=1$, $(a=1,b=0,c=-1)$ est une solution). La famille n'est pas libre et n'est donc pas une base.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. C'est bien une base. Comme nous avons trois vecteurs et nous souhaitons montrer qu'ils forment un base d'un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de montrer que soit la famille est libre, soit elle est génératrice (ces conditions sont équivalentes pour n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n).
Il est plus simple de montrer que la famille est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1+bv_2+cv_3=0$ il faut montrer que $a=b=c=0$. Mais attention ici le corps de base est $K=\mathbb{C}$ donc a,b,c sont des nombres complexes.

$$
\begin{aligned}
& av_1+bv_2+cv_3=0\\
\iff & a(1,-1,i)+b(-1,i,1)+c(i,1,-1)=(0,0,0)\\
\iff & (a-b+ic,-a+ib+c,ia+b-c)=(0,0,0)\\
\iff & \begin{cases} a-b+ic=0\\ -a+ib+c=0\\ ia+b-c=0\end{cases}\\
\iff & \cdots \text{ on résout le système}\\
\iff & a=0,b=0,c=0
\end{aligned}
$$

La famille (v_1,v_2,v_3) est libre, donc aussi génératrice ; c'est donc une base de $\mathbb{C}^3$.
2. On cherche $a,b,c\in\mathbb{C}$ tels que $av_1+bv_2+cv_3=v$. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$
\begin{cases} a-b+ic=1+i\\ -a+ib+c=1-i\\ ia+b-c=i\end{cases}
$$

On trouve $a=0$, $b=\frac{1}{2}(1-i)$, $c=\frac{1}{2}(1-3i)$. Nous avons donc $v=\frac{1}{2}(1-i)v_2+\frac{1}{2}(1-3i)v_3$ et ainsi les coordonnées de v dans la base (v_1,v_2,v_3) sont $(0,\frac{1}{2}(1-i),\frac{1}{2}(1-3i))$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Tout d'abord la famille $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ contient $n+1$ vecteurs dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$. Ici un vecteur est un polynôme : P_0 est un polynôme constant non nul, P_1 est un polynôme de degré exactement 1,... Rappelons que lorsque le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre *être une famille libre* et *être une famille génératrice* et donc aussi *être une base*.

   Nous allons donc montrer que $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une famille libre. Soit une combinaison linéaire nulle :

   $$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0.$$

   Introduisons l'hypothèse concernant les degrés : $\deg P_0 = 0$, $\deg P_1 = 1$, ..., $\deg P_n = n$. Définissons le polynôme $P(X) = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$.

   Nous allons montrer successivement $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_0 = 0$.
   Par l'absurde supposons $\lambda_n \neq 0$ et écrivons $P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, comme $\deg P_n(X) = n$ alors $a_n \neq 0$. Maintenant $P(X)$ est aussi un polynôme de degré exactement n qui s'écrit

   $$P(X) = \lambda_n \cdot a_n \cdot X^n + \text{termes de plus bas degré}$$

   La combinaison linéaire nulle implique que $P(X) = 0$ (le polynôme nul). Donc en identifiant les coefficients devant X^n on obtient $\lambda_n \cdot a_n = 0$ On obtient $a_n = 0$ ou $\lambda_n = 0$. Ce qui est une contradiction. Conclusion $\lambda_n = 0$.

   Maintenant la combinaison linéaire nulle s'écrit $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$. Par récurrence descendante on trouve $\lambda_{n-1} = 0$, ..., jusqu'à $\lambda_0 = 0$.
   Bilan : $\lambda_0 = 0$, ..., $\lambda_n = 0$ donc la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est libre, elle donc aussi génératrice ; ainsi $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

   Un point que nous avons utilisé et qu'il est peut-être utile de détailler est le suivant : si un polynôme égal le polynôme nul alors tous ces coefficients sont nul.
   Voici une justification : écrivons $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ et divisons par X^n :

   $$a_n + \frac{a_{n-1}}{X} + \frac{a_{n-2}}{X^2} + \cdots + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n} = 0$$

   Lorsque l'on fait tendre X vers $+\infty$ alors le terme de gauche tend vers a_n et celui de droite vaut 0 donc par unicité de la limite $a_n = 0$. On fait ensuite une récurrence descendante pour prouver $a_{n-1} = 0, \dots, a_0 = 0$.
   Une conséquence est que si deux polynômes sont égaux alors leurs coefficients sont égaux. Et une autre formulation est de dire que $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $F \cap G$ avec $k = \dim F \cap G$.

   $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille libre dans F donc on peut la compléter en une base de F par le théorème de la base incomplète. Soient donc $(f_1, \dots, f_\ell)$ des vecteurs de F tels que $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell)$ soit une base de F. Nous savons que $k + \ell = \dim F$. Remarquons que les vecteurs f_i sont dans $F \setminus G$ (car ils sont dans F mais pas dans $F \cap G$).

   Nous repartons de la famille $(e_1, \dots, e_k)$ mais cette fois nous la complétons en une base de G : soit donc $(g_1, \dots, g_m)$ des vecteurs de G tels que $(e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m)$ soit une base de G. Nous savons que $k + m = \dim G$. Remarquons que cette fois les vecteurs g_i sont dans $G \setminus F$.
2. Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_m)$ est une base de $F + G$.
   C'est une famille génératrice car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. Donc $F + G \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.

C'est une famille libre : en effet soit une combinaison linéaire nulle

$$a_1e_1+\cdots+a_ke_k \quad + \quad b_1f_1+\cdots+b_\ell f_\ell \quad + \quad c_1g_1+\cdots+c_mg_m=0.$$

Notons $e=a_1e_1+\ldots+a_ke_k$, $f=b_1f_1+\cdots+b_\ell f_\ell$, $g=c_1g_1+\cdots+c_mg_m$. Donc la combinaison linéaire devient :

$$e+f+g=0.$$

Donc $g=-e-f$, or e et f sont dans F donc g appartient à F. Or les vecteurs g_i ne sont pas dans F. Donc $g=c_1g_1+\cdots+c_mg_m$ est nécessairement le vecteur nul. Nous obtenons $c_1g_1+\cdots+c_mg_m=0$ c'est donc une combinaison linéaire nulle pour la famille libre $(g_1,\ldots,g_m)$. Donc tous les coefficients $c_1,\ldots,c_m$ sont nuls.

Le reste de l'équation devient $a_1e_1+\cdots+a_ke_k+b_1f_1+\cdots+b_\ell f_\ell=0$, or $(e_1,\ldots,e_k,f_1,\ldots,f_\ell)$ est une base de F donc tous les coefficients $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_\ell$ sont nuls.

Bilan : tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre. Comme elle était génératrice, c'est une base.

3. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $F+G$ alors la dimension de $F+G$ est le nombre de vecteurs de la base $\mathscr{B}$:

$$\dim(F+G)=k+\ell+m.$$

Or $k=\dim F\cap G$, $\ell=\dim F-k$, $m=\dim G-k$, donc

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. G est engendré par deux vecteurs donc $\dim G\leqslant 2$. Clairement v_4 et v_5 ne sont pas liés donc $\dim G\geqslant 2$ c'est-à-dire $\dim G=2$.
2. F est engendré par trois vecteurs donc $\dim F\leqslant 3$. Un calcul montre que la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre, d'où $\dim F\geqslant 3$ et donc $\dim F=3$.
3. Essayons d'abord d'estimer la dimension de $F\cap G$. D'une part $F\cap G\subset G$ donc $\dim(F\cap G)\leqslant 2$. Utilisons d'autre part la formule $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$. Comme $F+G\subset\mathbb{R}^4$, on a $\dim(F+G)\leqslant 4$ d'où on tire l'inégalité $\dim(F\cap G)\geqslant 1$. Donc soit $\dim(F\cap G)=1$ ou bien $\dim(F\cap G)=2$.

   Supposons que $\dim(F\cap G)$ soit égale à 2. Comme $F\cap G\subset G$ on aurait dans ce cas $F\cap G=G$ et donc $G\subset F$. En particulier il existerait $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $v_4=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, ainsi $\dim(F\cap G)$ n'est pas égale à 2. On peut donc conclure $\dim(F\cap G)=1$
4. Par la formule $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$, on obtient $\dim(F+G)=2+3-1=4$. Cela entraîne $F+G=\mathbb{R}^4$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Par l'absurde supposons que F ne soit pas de dimension finie, alors il existe $v_1,\ldots,v_{n+1}$, $n+1$ vecteurs de F linéairement indépendants dans F. Mais ils sont aussi linéairement indépendants dans E. Donc la dimension de E est au moins $n+1$. Contradiction.

Deux remarques :
— En fait on a même montré que la dimension de F est plus petite que la dimension de E.
— On a utilisé le résultat suivant : si E admet une famille libre à k éléments alors la dimension de E est plus grande que k (ou est infini). Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de la base incomplète.
