ENSA d'Al-HOCEIMA **CP-II**
ANALYSE 3 **Semestre 1**

Exercice 1 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x, y) = (x + y, xy)$$

1- Donner le domaine de définition D de f
et étudier sa différentiabilité sur D.
2- Déterminer la matrice jacobienne $J_f(x, y)$ de f
et son jacobien $j_f(x, y)$.
3- Montrer que la restriction de f à l'ouvert

$$U = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 / x < |y|\}$$

est un C^1-difféomorphisme sur son image.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x, y, z) = (e^{2x} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$$

Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert V .

Exercice 3 :

Montrer qu'il existe une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , x \mapsto y = f(x)$$

de classe C^∞ au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$
et définie implicitement par l'équation:

$$Arctan(xy) + 1 = e^{x+y}.$$

Exercice 4 :

1- Montrer qu'au voisinage de (1,2), l'ensemble:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 : xlny + ylnx = ln2\}$$

est un arc paramétré.

2- Montrer qu'au voisinage de (1,2,0), l'ensemble:

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \epsilon \mathbb{R}^3 : x^2 + \sin(xyz) + e^z = 2\}$$

est un graphe fonctionnel.

3- Montrer qu'au voisinage de $(1,1)$ l'équation:

$$x^y - y^x = 0$$

définit implicitement y comme une fonction de x de classe C^1.

Exercice 5 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \to \mathbb{R}^n$

une fonction de classe C^1 telle que:

$$\forall a \epsilon U: j_f(a) \neq 0.$$

1- Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local de U dans $\mathbb{R}^n$.
2- Montrer que $f(U)$ est un ouvert.
3- Si de plus f est injective,
montrer que f est un C^1-difféomorphisme global.

4- **Application:**
Considérons la fonction: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

a- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.
b- Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
c- Déterminer un ouvert U, pour que f soit un C^1-difféomorphisme global sur U.