



Module: Analyse 3 -  
Fonctions de Plusieurs  
Variables-

PROFESSEUR A. MOUSSAID

Devoir Libre

A Rendre le 11/01/2021

A.P. 2: 2020-2021

**EXERCICE 1 (3 pts)**

Soient  $(E; d)$  un espace métrique,  $A$  un sous-ensemble non vide de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $x \in \bar{A}$
- b)  $d(x, A) = 0$
- c) il existe une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$

**EXERCICE 2 (3 pts)**

Soit  $E$  l'espace des fonctions réelles continues définies sur  $I = [0, \pi]$ .

On munit  $E$  de la norme  $\|f\|$  associée au produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$ .

Montrer que la suite  $(f_n)$  de  $E$  définie par

$$f_n(0) = n, \quad f_n(x) = \inf(n, x^{-\frac{1}{3}}) \quad \text{pour } x > 0$$

est une suite de Cauchy de l'espace  $E$ . l'espace  $E$  est-il complet pour cette norme ?

**EXERCICE 3 (6 pts)**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1°) La fonction  $f$  est-elle continue en  $\mathbb{R}^2$ ?
- 2°) Calculer  $\nabla f(x, y)$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ , calculer ensuite  $\nabla f(0, 0)$
- 3°) La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
- 4°) La fonction  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$

**EXERCICE 4 (4 pts)**

On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui est définie par

$$f(x, y, z) = (x + y^2 + z, xy^2z, x^2z + xy)$$

Justifier la différentiabilité de  $f$ , préciser sa différentielle et sa matrice jacobienne. Peut-on calculer le Jacobien de  $f$ ?

**EXERCICE 5 (4 pts)**

On considère la courbe plane d'équation

$$ye^x + e^y \sin(2x) = 0 \quad (1)$$

- 1. Vérifier que l'équation (1) définit une et une seule fonction  $y = \varphi(x)$  au voisinage de  $(0, 0)$ .
- 2. Calculer  $\varphi'(0)$  et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction  $\varphi$  en le point  $(0, \varphi(0))$
- 3. En déduire la limite de  $\frac{y}{x}$  quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$

**Bon Courage**