Nom : AFKIR Mohamed

Niveau : Première Année Cycle Préparatoire (CP1)

Sujet : 7

CNE : S135210617

Examen du Module AP21 : “Algèbre Linéaire”

Exercice 1 :

1. $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2) \ (\forall((x, y), (x', y')) \in (E_1 \times E_2)^2)$

$$\alpha(x, y) + \beta(x', y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') &= \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' \\ &= \alpha.(x + y) + \beta.(x' + y') \\ &= \alpha.f(x, y) + \beta.f(x', y') \end{aligned}$$

   Alors f est une application linéaire de $E_1 \times E_2$ dans E.

   Le noyau de f :

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{ (x, y) \in E_1 \times E_2 \ / \ f(x, y) = 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in E_1 \times E_2 \ / \ x + y = 0 \}. \end{aligned}$$

2. On a $(x, y) \in Ker(f)$.

   On a $x \in E_1$ et $y \in E_2$ et $y = -x$, alors $x \in E_2$, Donc $x \in E_1 \cap E_2$.

   Réciproquement, si $x \in E_1 \cap E_2$ alors $(x, -x) \in Ker(f)$
   Donc $Ker(f) = \{ (x, -x) \ / \ x \in E_1 \cap E_2\}$.

   Par l'application $x \rightarrow (x, -x)$, Ker(f) est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

3. $(\forall(x, y) \in E_1 \times E_2) \quad (x, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1)$

   On pose : $a = (1, 0)$ et $b = (0, 1)$

   (a, b) est une famille génératrice de $E_1 \times E_2$.

   Pour tout α et β dans $\mathbb{K}$, $\alpha.a + \beta.b = 0$

$$\alpha.a + \beta.b = \alpha.(1, 0) + \beta.(0, 1) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = (\alpha, \beta)$$

$$(\alpha, \beta) = (0, 0)$$

Alors $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Donc (a, b) est une famille libre et génératrice de $E_1 \cap E_2$.

Donc { a, b } est une base de $E_1 \times E_2$.

4. On a $\dim(E) = n$ et on pose $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = k$.

<u>Montrons que $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$:</u>

Soit $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ est une base de Ker(f) et $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-k}\}$ une famille de vecteurs de E telle que $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_{n-k}\}$ est une base de E.

On pose $B = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.

- <u>Montrons que B engendre Im(f) :</u>

  Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im}(f)$. x s'écrit de manière unique :

  $$x = a_1.u_1 + a_2.u_2 + \ldots + a_k.u_k + b_1.v_1 + b_2.v_2 + \ldots + b_{n-k}.v_{n-k}$$

  avec $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k}) \in \mathbb{K}^n$.

  $$\begin{aligned} y = f(x) &= f(a_1.u_1 + a_2.u_2 + \ldots + a_k.u_k + b_1.v_1 + b_2.v_2 + \ldots + b_{n-k}.v_{n-k}) \\ &= a_1.f(u_1) + \ldots + a_k.f(u_k) + b_1.f(v_1) + \ldots + b_{n-k}.f(v_{n-k}) \end{aligned}$$

  On a $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de Ker(f) alors :

  $$y = b_1.f(v_1) + b_2.f(v_2) + \ldots + b_{n-k}.f(v_{n-k})$$

  Alors y est une combinaison linéaire des $f(v_i)_{1\leq i \leq n-k}$ donc B engendre Im(f).

- <u>Montrons que B est une famille libre de F :</u>

  Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}) \in \mathbb{K}^{n-k}$ tels que : $\alpha_1.f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-k}.f(v_{n-k}) = 0$

  Par linéarité de f :
  $$\alpha_1.f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-k}.f(v_{n-k}) = f(\alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_{n-k}.v_{n-k}) = 0$$

  Alors $\alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_{n-k}.v_{n-k} \in \operatorname{Ker}(f)$. Donc $\exists(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \mathbb{K}^k$ tels que :
  $$\alpha_1.v_1 + \ldots + \alpha_{n-k}.v_{n-k} = \beta_1.u_1 + \beta_2.u_2 + \ldots + \beta_k.u_k$$

  Alors la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-k})$ est libre. Donc on déduit que :
  $$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-k} = 0$$

  Donc B est libre.

  Alors B est une base de Im(f). Donc $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n-k$

  $$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = k + n - k = n = \dim(E)$$

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f))}$$

5. On a $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E, (x, y) \rightarrow f(x, y) = x + y$

D'après la question (4) on a montré que :
$$\dim (E_1 \times E_2) = \dim (Ker(f)) + \dim (Im(f))$$

D'après la question (2), il y a un isomorphisme entre Ker(f) et $E_1 \cap E_2$, Alors :
$$\dim (Ker(f)) = \dim (E_1 \cap E_2)$$
et on a :
$$\dim (E_1 \times E_2) = \dim (E_1) + \dim (E_2)$$

Donc :
$$\dim (E_1) + \dim (E_2) = \dim (E_1 \cap E_2) + \dim (Im(f))$$

On a $u \in Im(f)$. u s'écrit de manière unique sous forme de $u = f(x, y) = x + y$ tel que $x \in E_1$ et $y \in E_2$. Alors : $Im(f) = E_1 + E_2$, Donc :
$$\dim (Im(f)) = \dim (E_1 + E_2)$$

On en déduit que :
$$\dim (E_1) + \dim (E_2) = \dim (E_1 \cap E_2) + \dim (E_1 + E_2)$$

$$\boxed{\dim (E_1 + E_2) = \dim (E_1) + \dim(E_2) - \dim (E_1 \cap E_2)}$$