Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

AP1: Analyse 2 — Année: 2019/2020

Devoir Libre

A Rendre le 03/04/2020

Professeur A. MOUSSAID

Exercice 1

Résoudre les équations différentiellles suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $y^{'} - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$
2. $y^{'} - 2xy = -(2x-1)e^{x}$
3. $xy^{'} + 2y = \frac{x}{1+x^2}$
4. $y^{''} - 4y^{'} + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos(x)$
5. $y^{''} - 2y^{'} + 5y = -4xe^{-x}\cos(x) + +7e^{-x}\sin(x) - 4e^{x}\sin(2x)$

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, vérifiant, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}(\int_0^x f(t)dt)^2$$

Exercice 3

Soient $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries et n_0 un entier tel que pour $n \geq n_0$, $0 \leq U_n \leq V_n$, Pour tout $n \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \qquad et \qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$$

1) Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont croissantes à partir de n_0, et qu'il existe un réel a tel que pour tout $n \in \mathbb{R}$, $s_n \leq t_n + a$
2) En déduire que si $\sum V_n$ converge, alors $\sum U_n$ converge et si $\sum U_n$ diverge, alors $\sum V_n$ diverge.
3) On suppose que U_n est équivalent à V_n quand n tend vers l'infini. Démontrer que $\sum U_n$ converge si et seulement si $\sum V_n$ converge.
4) On suppose que $\sum U_n$ diverge. Démontrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{S_n}$ converge.

Exercice 4

1) Montrer que la série de terme général

$$U_n = \frac{1}{4n^2-1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

est convergente.
Déterminer une suite (x_n) telle que $U_n = x_{n-1} - x_n$
En déduire le calcule de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$$

2) On pose $V_n = \frac{1}{(4n^2-1)^2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$
Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ est convergente.

Exprimer V_n *en fonction des* U_n , W_n *et* W_n *où* $W_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$
3) En supposant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n = \frac{\pi^2}{8}$$

, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$$

Exercice 5
Pour $n \in \mathbb{N}$*, on pose :*

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \qquad et \qquad V_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1)
a- Calculer U_0
b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

2)
a-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$U_n + U_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

b- En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} V_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n U_n$$

c- Montrer que la série de terme général V_n *converge et calculer sa somme.*

Bon Courage