Exercices corrigés d'algèbre linéaire

Pierre-Jean Hormière

« A chaque minute nous sommes écrasés par l'idée et la sensation du temps. Et il n'y a que deux moyens pour échapper à ce cauchemar, – pour l'oublier : le Plaisir et le Travail. Le Plaisir nous use. Le Travail nous fortifie. Choisissons. »

Baudelaire (Hygiène, Journaux intimes)

Le travail, donc ! Mais le travail est aussi source de plaisir… Voici quelques exercices classiques d'algèbre linéaire, choisis pour leur consistance plus que pour leur difficulté. Ils sont groupés par thèmes, mais cette classification est approximative, et les solutions proposées supposent connu tout le cours d'algèbre linéaire. Les corrigés mettent en lumière la pluralité des points de vue et des méthodes de résolution. Cette démarche peut dérouter ou déranger certains lecteurs, habitués aux solutions uniques, mais elle peut aussi en stimuler d'autres. J'ai parfois disposé les exercices de façon telle que le suivant généralise le précédent, et en donne la clé. Parfois même j'ai donné plusieurs versions du même exercice, pour montrer comment de légères variations dans l'énoncé mènent à des pistes fort différentes. Enfin, beaucoup de solutions sont conduites avec Maple.
Les § 10 et 11 sont mentionnés pour mémoire ; ils font l'objet d'un fascicule séparé.

1. *Espaces vectoriels, sous-espaces.*

Exercice 1 : indépendance des axiomes.

On rappelle que si **K** est un corps commutatif d'éléments neutres 0 et 1, on appelle **K-espace vectoriel** tout ensemble E muni :

- d'une loi interne, additive $(x, y) \in E^2 \to x + y \in E$ faisant de E un groupe commutatif ;
- d'une loi externe, $(\lambda, x) \in \mathbf{K}\times E \to \lambda.x \in E$, vérifiant les quatre axiomes :

(EV I) $\forall\lambda \in \mathbf{K}$ $\forall(x, y) \in E^2$ $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$;

(EV II) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ $\forall x \in E$ $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;

(EV III) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ $\forall x \in E$ $\lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$;

(EV IV) $\forall x \in E$ $1.x = x$.

1) Montrer que la commutativité de l'addition découle des autres axiomes.
2) Montrer que l'axiome (EV I) ne découle pas des autres, à moins que **K** ne soit un corps premier.
3) Montrer que l'axiome (EV II) ne découle pas des autres.
4) Montrer que l'axiome (EV III) ne découle pas des autres.
5) Montrer que l'axiome (EV IV) ne découle pas des autres.

Solution : 1) Notons 2 = 1 + 1.

En vertu de (EV I) et (EV II) : $2.(x + y) = 2.x + 2.y = (x + x) + (y + y)$.
En vertu de (EV II) : $2.(x + y) = (1 + 1).(x + y) = (x + y) + (x + y)$.
Par soustraction, il vient $x + y = y + x$.

2) Soient E un **C**-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, D une droite vectorielle de E.

Posons $\lambda * x = \lambda.x$ si $x \in D$, $\lambda * x = \overline{\lambda}.x$ si $x \notin D$.
Le lecteur s'assurera que (E, +, $*$) satisfait tous les axiomes, sauf (EV I).

Rappelons qu'un corps premier est un corps **K** n'ayant pas d'autre sous-corps que **K**.
Il est isomorphe, soit à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier), soit à **Q**. Alors (EV I) découle des autres axiomes.

3) Soient E un **R**-espace vectoriel non réduit à {0}. Posons $\lambda * x = x$ pour tout $x \in E$.
Le lecteur s'assurera que (E, +, $*$) satisfait tous les axiomes, sauf (EV II).

4) Soit E un **C**-espace vectoriel non réduit à {0}. Munissons E de la loi externe $\lambda * x = \mathrm{Re}(\lambda).x$.
(E, +, $*$) satisfait à tous les axiomes, sauf (EV III) car $i^2 * x = -x$, tandis que $i * (i * x) = 0$.

Plus généralement, soient E un **K**-espace vectoriel non réduit à {0} et $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ un endomorphisme du groupe additif **K**, tel que $f(1) = 1$ et qui n'est pas un morphisme pour la multiplication, alors (E, + $*$), où $\lambda * x = f(\lambda).x$, satisfait tous les axiomes sauf (EV III).

5) Munissons **K**×**K** de l'addition usuelle des couples et de la loi externe $\lambda * (x, y) = (\lambda x, 0)$. On s'assurera que (**K**×**K** , +, $*$) satisfait à tous les axiomes, sauf (EV IV), car $1 * (0, 1) = (0, 0) \neq (0, 1)$.

Plus généralement, soient E un **K**-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires $\neq$ {0}, p le projecteur sur F parallèlement à G, alors (E, +, $*$), où $\lambda * x = \lambda.p(x)$, satisfait tous les axiomes, sauf (EV IV).

Référence : B. Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses.

Exercice 2 : Montrer que $\mathbf{R}^*_+$ est un **R**-espace vectoriel pour les deux lois suivantes :

- addition $(x, y) \to x \oplus y = x.y$
- multiplication par un scalaire $(\alpha, x) \to \alpha \circ x = x^\alpha$.

Solution : On peut bien sûr vérifier tous les axiomes.
Le mieux toutefois est de considérer le logarithme $x \to \ln x$.
C'est une bijection qui envoie $(\mathbf{R}^*_+, \oplus, \circ)$ sur $(\mathbf{R}, +, \times)$, et vérifie identiquement

$$\ln(x \oplus y) = \ln x + \ln y \quad \text{et} \quad \ln(\alpha \circ x) = \alpha.\ln x.$$

On ne peut dire que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, mais qu'elle transporte la structure de **R**, considéré comme **R**-espace vectoriel, sur celle de ($\mathbf{R}^*_+$, $\oplus$, o).
Alors ($\mathbf{R}^*_+$, $\oplus$, o) devient un **R**-espace vectoriel, isomorphe à **R**.

Exercice 3 : Peut-on munir **R**×**R** d'une structure de **R**-espace vectoriel de façon telle qu'il devienne une droite vectorielle ?

Solution : La réponse est paradoxalement *positive*.
En effet, il existe une *bijection* f : $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Munissons **R**×**R** d'une addition et d'une multiplication externe, définies resp. par $x + y = f^{-1}(f(x) + f(y))$ et $\lambda.x = f^{-1}(\lambda.f(x))$. Muni de ces deux lois, **R**×**R** est un **R**-espace vectoriel isomorphe au **R**-espace vectoriel **R**, via f. C'est donc une droite vectorielle.
Inutile de dire que cette structure vectorielle est de peu d'intérêt.
On peut remplacer **R** par tout corps infini.
Remarque : les deux exercices précédents rentrent dans le même cadre : tout ensemble équipotent à un corps commutatif **K** peut être muni d'une structure de droite vectorielle sur **K**, par transport de structure.

Exercice 4 : **thème et variations sur les sous-espaces vectoriels**.
Si E est un espace vectoriel, on note V(E) l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E, ordonné par l'inclusion.
1) Montrer que V(E) est un treillis pour l'inclusion, *i.e.* que deux éléments ont un sup et un inf.
2) Montrer que V(E) vérifie les identités dites "modulaires" : quels que soient F, G, H $\in$ V(E)

$$G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H) = G + (F \cap H)$$
$$G \supset F \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H) = G \cap (F + H)$$

Montrer l'implication $[F \cap G = F \cap H , F + G = F + H , G \subset H] \Rightarrow G = H$.
3) Soient U, V, U' et V' des sous-espaces vectoriels de E, tels que $U \cap V = U' \cap V'$.
Montrer que $U = (U + (V \cap U')) \cap (U + (V \cap V'))$.
4) Montrer que si E n'est pas de dimension 0 ou 1, le treillis V(E) n'est pas distributif, *i.e.* aucune des lois $\cap$ et + n'est distributive par rapport à l'autre.
5) Quels sont les éléments minimaux pour l'inclusion de V(E) − {{0}} ?
Quels sont les éléments maximaux pour l'inclusion de V(E) − {E} ?
6) Soient F et G deux sev de E. Montrer que $F \cup G$ est un sev ssi $F \supset G$ ou $G \supset F$.
Soit H un sev de E. Montrer que $H \subset F \cup G \Rightarrow H \subset F$ ou $H \subset G$.

Solution :
1) V(E) est un treillis complet.
Deux sous-espaces vectoriels F et G ont un plus petit majorant et un plus grand minorant pour l'inclusion : leur somme F + G, et leur intersection $F \cap G$.
Mieux, même : le treillis V(E) est « achevé », ou « complet », en ce sens que toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels a une borne supérieure $\sum_{i\in I} F_i$ et une borne inférieure $\bigcap_{i\in I} F_i$.
Rappelons que $\sum_{i\in I} F_i$ est l'ensemble des sommes $\sum_{i\in I} x_i$, où $(x_i)\in \prod_{i\in I} F_i$ est à support fini.

2) V(E) est un treillis « modulaire ».
a) Montrons que $G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H) = G + (F \cap H)$.
On a toujours $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
Si de plus $G \subset F$, soit $x \in F \cap (G + H)$; alors $x = y + z$, où $(y, z) \in G\times H$.
On a $y \in F$ et $z = x - y \in F \cap H$, donc $x \in (F \cap G) + (F \cap H) = G + (F \cap H)$.
b) Montrons que $G \supset F \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H) = G \cap (F + H)$.

On a toujours $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.
Si de plus $G \supset F$, soit $x \in (F + G)\cap(F + H)$; alors $x = y + z = u + v$, où $(y, z)\in F\times G$ et $(u, v)\in F\times H$.
Comme y et z sont éléments de G, x appartient à G. Comme u est élément de G, $v = x - u \in G \cap H$.
Du coup, $x = u + v$ implique que $x \in F + (G \cap H)$.

c) Montrons que $[F \cap G = F \cap H , F + G = F + H , G \subset H] \Rightarrow G = H$.
Soit $z \in H$; comme $z \in F + H$, $\exists(x, y) \in F\times G$ $z = x + y$. Comme $G \subset H$, $y \in H$ donc $x \in F \cap H$.
Comme $F \cap G = F \cap H$, $x\in F \cap G$, donc $z = x + y \in G$. cqfd.
Remarques : 1) Si F, G et H sont de dimension finie, la formule de Grassmann implique dim G = dim H, donc G = H.

2) Soit $(X, \leq)$ un treillis ; on peut montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- $\forall(x, z)$ $x \leq z \Rightarrow \forall y$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$;
- $\forall(x, y, z)$ $x \wedge (y \vee z) = x \wedge \{ [y \wedge (x \vee z)] \vee z \}$;
- $\forall(x, z)$ $z \leq x \Rightarrow \forall y$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$.

Il est dit modulaire s'il vérifie ces propriétés.

3) Soient U, V, U' et V' des sous-espaces vectoriels de E, tels que $U \cap V = U' \cap V'$.
Montrons que $U = (U + (V \cap U')) \cap (U + (V \cap V'))$.
Il est clair que $U \subset (U + (V \cap U')) \cap (U + (V \cap V'))$.
Soit $x \in (U + (V \cap U')) \cap (U + (V \cap V'))$.
Ecrivons $x = u + v = u' + v'$, où u et $u' \in U$, $v \in V \cap U'$ et $v' \in V \cap V'$.
Du coup, $u - u' = v' - v \in U \cap V = U' \cap V'$. Comme $v \in U'$, $v' = v' - v + v \in U'$.
Donc $v \in V \cap V' \cap U' = V \cap (U \cap V) = U \cap V$, donc $v \in U$. Finalement, $x = u + v \in U$. cqfd.

4) Le treillis V(E) n'est pas distributif en général.

Si E n'est pas de dimension 0 ou 1, le treillis V(E) n'est pas distributif, *i.e.* aucune des lois $\cap$ et + n'est distributive par rapport à l'autre.
En effet, il y a dans E deux vecteurs libres x et y. Soient $z = x + y$, $F = \mathbf{K}z$, $G = \mathbf{K}x$, $H = \mathbf{K}y$.
$(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\} + \{0\} = \{0\}$, mais $F \cap (G + H) = F$.
$(F + G) \cap (F + H) = \text{Vect}(x, y)$, tandis que $F + (G \cap H) = F + \{0\} = F$.
Remarque : c'est parce que V(E) n'est pas distributif que la formule de Grassmann ne s'étend pas à trois sous-espaces vectoriels de dim. finie.

5) Les éléments minimaux pour l'inclusion de $V(E) - \{\{0\}\}$ sont les droites vectorielles.
Les éléments maximaux pour l'inclusion de $V(E) - \{E\}$ sont les hyperplans.

6) Réunion de deux sous-espaces.

a) Soient F et G deux sev de E. Montrons par absurde que $F \cup G$ est un sev ssi $F \supset G$ ou $G \supset F$.
S'il existe $x \in F$, $x \notin G$ et $y \in G$, $y \notin F$, alors $z = x + y \in F \cup G$ car c'est un sev.
Mais $z \in F$ impliquerait $y = z - x \in F$, et $z \in G$ impliquerait $x = z - y \in G$.

b) Soit H un sev de E. Montrons que $H \subset F \cup G \Rightarrow H \subset F$ ou $H \subset G$.
Pour varier, montrons que $[H \subset F \cup G$ et $H \not\subset F] \Rightarrow H \subset G$.
Soit $x_0 \in H$ tel que $x_0 \notin F$; alors $x_0 \in G$.
Soit alors $y \in H$, $y \in F \cup G$ et $x_0 + y \in H \subset F \cup G$.
Si $y \in F$, $x_0 \notin F$ implique $x_0 + y \notin F$, donc $x_0 + y \in G$; comme $x_0 \in G$, $y \in G$. Sinon, $y \in G$.
Ainsi, dans tous les cas, $y \in G$.

Références : pour 3), Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, p. 35, ex. 5.

Exercice 5 : Sous-espaces transversaux.
Soit E un espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **transversaux** si tout sous-espace affine parallèle à F et tout sous-espace affine parallèle à G se rencontrent.
Démontrer que cette condition équivaut à $F + G = E$.

Solution :
1) Supposons F + G = E, et montrons que $\forall(a, b) \in E\times E \quad (a + F) \cap (b + G) \neq \emptyset$,
c'est-à-dire que $\quad \exists(x, y) \in F \times G \quad a + x = b + y$.
Comme F + G = E, $\exists(x, y) \in F \times G \quad x - y = b - a$.
2) Réciproquement, supposons F et G tranversaux.
En particulier $\forall b \in E \quad F \cap (b + G) \neq \emptyset$, i.e. $\forall b \in E \ \exists(x, y) \in F \times G \quad x = b + y$.
Donc $\forall b \in E \ \exists(x, y) \in F \times G \quad b = x - y$. C'est dire que E = F + G.

Exercice 6 : Soit **K** un corps commutatif. Montrer l'équivalence des propriétés :
i) **K** est infini ;
ii) pour tout **K**-espace vectoriel E, la réunion d'une famille finie de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un d'eux contient tous les autres ;
iii) aucun **K**-espace vectoriel n'est réunion d'une famille finie d'hyperplans.

Solution : i) $\Rightarrow$ ii) Soient **K** un corps infini, E un **K**-espace vectoriel. Montrons que si $F_1, \dots, F_p$ sont p sev de E tels que soit un sev, alors l'un des F_i contient tous les autres, par récurrence sur p.
C'est immédiat pour $p = 1$. C'est toujours vrai si $p = 2$: si $F_1 \cup F_2$ est un sev, $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$, alors $\exists a \in F_1$, $a \notin F_2$ et $\exists b \in F_2$, $b \notin F_1$. Alors $x = a + b \in F_1 \cup F_2$.
Or $x \in F_1$ impliquerait $b = x - a \in F_1$ et $x \in F_2$ impliquerait $a = x - b \in F_2$: impossible !
Supposons la propriété vraie au rang p. Soient $p + 1$ sev tels que $F_1 \cup \dots \cup F_p \cup F_{p+1}$ soit un sev.
1er cas : $F_{p+1} \supset F_1 \cup \dots \cup F_p$. C'est évident.
2ème cas : $F_{p+1} \subset F_1 \cup \dots \cup F_p$. Alors $F_1 \cup \dots \cup F_p \cup F_{p+1} = F_1 \cup \dots \cup F_p$ est un sev. L'un des F_i $(1 \leq i \leq p)$ contient $F_1 , \dots , F_p$; et il contient aussi F_{p+1}.
3ème cas : F_{p+1} et $F_1 \cup \dots \cup F_p$ ne sont pas inclus l'un dans l'autre.
Soient $x \in F_{p+1}$, $x \notin F_1 \cup \dots \cup F_p$ et $y \in F_1 \cup \dots \cup F_p$ et $y \notin F_{p+1}$.
Pour tout $\alpha \in$ **K**, $y + \alpha.x \in F_1 \cup \dots \cup F_{p+1}$ et $y + \alpha.x \notin F_{p+1}$, sans quoi y appartiendrait à F_{p+1}.
Donc, pour tout $\alpha \in$ **K**, $y + \alpha x \in F_1 \cup \dots \cup F_p$. Or $\alpha \to z(\alpha) = y + \alpha.x$ est injective.
En vertu du principe des tiroirs, deux des $z(\alpha)$ appartiennent au même F_i $(1 \leq i \leq p)$, disons $z(\lambda)$ et $z(\mu)$ $(\lambda \neq \mu)$. Alors $x = \dfrac{z(\lambda)-z(\mu)}{\lambda-\mu} \in F_i$, contredisant $x \notin F_1 \cup \dots \cup F_p$.
ii) $\Rightarrow$ iii) est évident.
iii) $\Rightarrow$ i) car si **K** est fini de cardinal q, E = $\mathbf{K}^2$ est un plan vectoriel sur **K**, de cardinal q^2 et réunion de ses droites, qui sont au nombre de $q + 1 = \dfrac{q^2-1}{q-1}$.

Remarques : 1) On peut donner d'autres démonstrations du résultat suivant :
Si **K** est infini, et E un **K**-ev de dimension finie, E n'est pas réunion d'une famille finie d'hyperplans.
Si dim E = n et $E = H_1 \cup \dots \cup H_p$, où H_i a pour équation $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ dans une base de E, alors $\prod_i P_i = 0$. Il reste à conclure par intégrité de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$
De plus, si **K** = **R** ou **C**, on peut donner des preuves tirées de l'analyse :
• Une raison topologique : si on munit E de sa topologie standard, alors un hyperplan est un germé d'intérieur vide. Une réunion finie (ou même dénombrable) sera encore d'intérieur vide.
• Une raison issue de la théorie de la mesure : un hyperplan est de mesure de Lebesgue nulle. Une réunion finie (ou dénombrable) itou.
2) Le lecteur pourra démontrer en exercice les deux résultats complémentaires suivants :

Soit **K** un corps commutatif. Pour tout **K**-ev E et tout entier p tel que $2 \leq p \leq \text{card } \mathbf{K}$, la réunion de p sev de E est un sev ssi l'un d'eux contient tous les autres.

Si E est réunion d'une famille d'hyperplans $(H_i)_{i\in I}$, alors :

$$\text{card } I \geq 1 + \text{card } \mathbf{K} \quad \text{si } \mathbf{K} \text{ est fini,} \quad \text{card } I \geq \aleph_0 = \text{card } \mathbf{N} \quad \text{si } \mathbf{K} \text{ est infini.}$$

<u>Références</u> : Bourbaki, Algèbre linéaire, A II 193, n° 5.

<u>Exercice 7</u> : 1) Donner un exemple de plan vectoriel réunion de trois droites vectorielles.
2) Donner un exemple de **K**-espace vectoriel de dimension infinie, réunion de trois hyperplans vectoriels.

<u>Solution</u> : Cet exercice complète le précédent. Prenons pour corps de base $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
1) Le plan vectoriel $\mathbf{K}\times\mathbf{K}$, rapporté à sa base canonique (e_1, e_2), a 4 éléments : (0, 0), (1, 0), (0, 1) et (1, 1). Il a exactement 3 droites vectorielles, $\mathbf{K}e_1$, $\mathbf{K}e_2$ et $\mathbf{K}(e_1 + e_2)$, et il est réunion de ces droites.
2) Considérons l'espace vectoriel **K**[X] des polynômes $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ à coefficients dans **K**.

K[X] est réunion de trois hyperplans : $H_1 = \{P ; a_0 = 0\}$, $H_2 = \{P ; a_1 = 0\}$ et $H_3 = \{P ; a_0 + a_1 = 0\}$, car si P n'appartient ni à H_1 ni à H_2, alors $a_0 = a_1 = 1$ et P appartient à H_3 .

<u>Exercice 8</u> : Soit E un **R**-espace vectoriel de dimension finie n. On dit qu'une famille $\mathfrak{F}$ de vecteurs de E est en position générale si toute sous-famille de cardinal n d'éléments de $\mathfrak{F}$ est une base de E.
1) Donner un exemple pour $n = 2$ de famille infinie $\mathfrak{F}$ en position générale.
2) Donner un exemple pour $n \geq 3$ de famille infinie $\mathfrak{F}$ en position générale.
3) Montrer que E n'est pas réunion finie d'hyperplans.

<u>Solution</u> : [Oral ENS PC, 2009]
Plaçons-nous pour simplifier dans $\mathbf{K}^n$ canonique (**K** infini), et considérons

$$\mathfrak{F} = \{ (1, x) ; x \in \mathbf{K} \} \text{ et, plus généralement, } \mathfrak{F} = \{ (1, x, \dots, x^{n-1}) ; x \in \mathbf{K} \} .$$

Ces familles sont infinies en position générale (Vandermonde). La question 3) a déjà été abordée.

<u>Exercice 9</u> : 1) Soit E un espace vectoriel, (F_n) une suite croissante pour l'inclusion de sous-espaces vectoriels. Montrer que $\bigcup_{n\in N} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) Plus généralement, une famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels est dite filtrante supérieurement si $\forall(i, j) \in I\times I \;\; \exists k \in I \;\; F_k \supset F_i$ et $F_k \supset F_j$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

3) <u>Applications</u> :
a) Montrer que les suites $u = (u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ périodiques forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. En indiquer une ou deux familles génératrices, ainsi qu'une base.
b) Montrer que les suites récurrentes linéaires à coefficiens constants forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

<u>Solution</u> : Montrons 2), qui contient visiblement 1). Tout d'abord, $0 \in F = \bigcup_{i\in I} F_i$.

De plus, si x et y sont éléments de F, il existe des indices i et j tels que $x\in F_i$ et $y\in F_j$. Si l'indice k est comme ci-dessus, $\lambda x + y \in F_k \subset F$. cqfd.
3) a) Pour tout entier $a \geq 1$, l'ensemble P_a des suites a-périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. La famille (P_a) est filtrante supérieurement, car P_a et P_b sont inclus dans P_c, où c = ppcm(a, b).

La réunion de cette famille est un sev de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ en vertu de 2).

P_a admet deux bases intéressantes : l'une est sa base canonique B_a , l'autre sa base de Fourier F_a.
Si a = 1, ces deux bases coincident : c'est la suite $(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
Si a = 2, B_2 est formée des deux suites $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$
$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$
tandis que F_2 est formée des deux suites $(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
Si a = 3, B_3 est formée des trois suites $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$
$(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
$(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)$
tandis que F_3 est formée des trois suites $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
$(1, j, j^2, 1, j, j^2, 1, \dots)$
$(1, j^2, j, 1, j^2, j, 1, \dots)$, etc.

Le lecteur montrera que la réunion des B_a est une famille génératrice de P, mais non une famille libre, tandis que la réunion des F_a est une base de P.

b) Comment montrer que les suites récurrentes linéaires à coefficients constants forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$?
<u>1ère méthode</u> : ces suites sont les éléments de Ker P(T), où T est l'opérateur de décalage et P un polynôme unitaire. Or la famille $(\text{Ker } P(T))_{P\in U}$ est filtrante croissante, car Ker P(T) et Ker Q(T) sont tous deux contenus dans Ker (P.Q)(T) ou, mieux, dans Ker M(T), où M = ppcm(P, Q).

<u>2ème méthode</u> : les suites récurrentes linéaires sont exactement les combinaisons linéaires des $(n^k.\lambda^n)$, où k décrit $\mathbf{N}$ et λ décrit $\mathbf{C}$.

<u>Exercice 10</u> : Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace de dimension finie de E et (G_n) une suite décroissante pour l'inclusion de sous-espaces vectoriels. Montrer que $\bigcap_{n\in N}(F+G_n) = F + \bigcap_{n\in N} G_n$.

<u>Solution</u> :

1) Une inclusion est toujours vraie : $(\forall n)$ $F + \bigcap_{n\in N} G_n \subset F + G_n$, donc $F + \bigcap_{n\in N} G_n \subset \bigcap_{n\in N}(F+G_n)$.

2) Si l'on suppose G_0 de dimension finie, (G_n) est une suite décroissante de sev de G_0. Elle est nécessairement stationnaire (car la suite de ses dimensions l'est). Ainsi $(\exists n_0)$ $(\forall n \ge n_0)$ $G_n = G_{n_0}$.

Du coup, $\bigcap_{n\in N} G_n = G_{n_0}$ et $\bigcap_{n\in N}(F+G_n) = F + G_{n_0}$. Cela ne suppose pas F de dimension finie.

3) Revenons au cas général. Soit $x \in \bigcap_{n\in N}(F+G_n)$. Alors $(\forall n)$ $\exists(x_n, y_n) \in F\times G_n$ $x = x_n + y_n$.

On a : $y_n = x - x_n \in G_n \cap (F + \mathbf{K}x) = H_n$.

Comme $F + \mathbf{K}x$ est de dimension finie, (H_n) est une suite décroissante pour l'inclusion de sous-espaces de dimension finie. Donc $(\forall n)$ $x = x_n + y_n$, où $(x_n, y_n) \in F\times H_n$, donc $x \in \bigcap_{n\in N}(F+H_n)$.

En vertu de 2) $\bigcap_{n\in N}(F+H_n) = F + \bigcap_{n\in N} H_n \subset F + \bigcap_{n\in N} G_n$, donc $x \in F + \bigcap_{n\in N} G_n$.

<u>Exercice 11</u> : Soit E = $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de **R** dans **R**. Soient
$E_0 = \{ f\in E ; f \text{ constante} \}$, $E_+ = \{ f\in E ; (\forall x \le 0)\ f(x) = 0 \}$, $E_- = \{ f\in E ; (\forall x \ge 0)\ f(x) = 0 \}$.
Montrer que : $E = E_0 \oplus E_+ \oplus E_-$.

Solution : Cet exercice illustre la notion de somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels.

Il faut montrer que $E = E_0 + E_+ + E_-$, mais attention ! Pour montrer que la somme est directe, il ne suffit pas de montrer que les intersections deux à deux des trois sous-espaces sont réduites à {0}. Aussi, mieux vaut montrer par analyse et par synthèse que :

$$\forall f \in E \quad \exists!(f_0 , f_+ , f_-) \in E_0 \times E_+ \times E_- \quad f = f_0 + f_+ + f_- .$$

Analyse :

Soit $f \in E$. Supposons que $\exists(f_0 , f_+ , f_-) \in E_0 \times E_+ \times E_- \quad f = f_0 + f_+ + f_-$.

Faisons x = 0 ; il vient $f_0(0) = f(0)$; comme f_0 est constante, $(\forall x)\ f_0(x) = f(0)$.

Faisons $x \geq 0$; il vient $f(x) = f(0) + f_+(x)$; donc $f_+(x) = f(x) - f(0)$ pour $x \geq 0$, $f_+(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

Faisons $x \leq 0$; il vient $f(x) = f(0) + f_-(x)$; donc $f_-(x) = 0$ pour $x \geq 0$, $f_-(x) = f(x) - f(0)$ pour $x \leq 0$.

Ceci montre au passage l'unicité du triplet (f_0 , f_+ , f_-)

Synthèse :

f_0 , f_+ et f_- étant ainsi définies, sont continues sur **R**, notamment à droite et à gauche en 0, éléments respectifs de E_0 , E_+ et E_- et telles que $f = f_0 + f_+ + f_-$. CQFD.

Exercice 12 : Soit $E = \mathbf{C}^{\mathbf{C}}$. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$ on pose $F_k = \{ f \in E ; \forall z \in \mathbf{C}\ \ f(j z) = j^k f(z) \}$.
Montrer que $E = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$.

Solution : [Oral Mines MP 2010, RMS n° 415]

1ère solution : Il est facile de montrer que F_0, F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.

Analyse : Soit $f \in E$. Cherchons $(a , b , c) \in F_0 \times F_1 \times F_2 \quad f = a + b + c$.

On aurait alors $\forall z \in \mathbf{C} \quad f(z) = a(z) + b(z) + c(z)$

Et du coup : $\quad f(j.z) = a(z) + j.b(z) + j^2.c(z)$

Et aussi : $\quad f(j^2.z) = a(z) + j^2.b(z) + j.c(z)$

De ces trois relations on déduit, par combinaisons linéaires :

$$a(z) = \frac{f(z)+ f(jz)+ f(j^2z)}{3} \ , \ b(z) = \frac{f(z)+ j^2.f(jz)+ j.f(j^2z)}{3} \ , \ c(z) = \frac{f(z)+ j.f(jz)+ j^2.f(j^2z)}{3} .$$

Cela montre l'unicité du triplet cherché.

Synthèse : Réciproquement, les fonctions a, b, c ainsi définies appartiennent resp. à F_0, F_1 et F_2 , et l'on a bien $f = a + b + c$.

2ère solution : introduisons l'endomorphisme $T : f \to g$ de E, où g est définie par $(\forall z)\ \ g(z) = f(jz)$.
Il est immédiat que $T^3 = Id_E$. Il suffit alors d'appliquer le « grand » théorème des noyaux à T…

2. *Applications linéaires.*

Exercice 1 : axiomes des applications linéaires.
Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire** si :

(A) additivité : $\forall (x, y) \in E^2 \quad u(x + y) = u(x) + u(y)$;

(H) homogénéité : $\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K}\times E \quad u(\lambda.x) = \lambda.u(x)$.

1) Montrer que si **K** est un corps premier, (H) découle de (A).
2) Si **K** = **R**, E et F sont deux espaces vectoriels normés, et u est continue, alors (H) découle de (A).
3) Donner un exemple où (A) est vrai, et non (H).

Solution :

1) Un corps premier est un corps qui n'admet pas d'autre sous-corps que lui-même.
Or si un corps **K** est de caractéristique nulle, il contient le corps **Q** à isomorphisme près, puisque le morphisme d'anneaux $n \in \mathbf{Z} \to n.1_{\mathbf{K}} \in \mathbf{K}$ est injectif et permet de constuire un plongement de **Q** dans **K**. Si **K** est de caractéristique p, p est premier et le morphisme d'anneaux $n \in \mathbf{Z} \to n.1_{\mathbf{K}} \in \mathbf{K}$ se factorise en un morphisme injectif de corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{K}$.
Ainsi, un corps premier est isomorphe, soit à **Q**, soit à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p premier.
Si u vérifie (A), alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $u(nx) = nu(x)$ (par récurrence sur n et imparité).
Si $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on en déduit $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ par simple factorisation via $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$: tout scalaire est somme d'un nombre entier de 1_K.
Si $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, $b.u(\frac{a}{b}x) = u(ax) = au(x)$ pour tout $(a, b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$, donc $u(\frac{a}{b}x) = \frac{a}{b}u(x)$.
2) Conclure par densité de **Q** dans **R**.
3) L'application $z \to \bar{z}$ de **C** dans **C** est additive et **R**-linéaire, mais n'est pas **C**-linéaire.
Plus généralement, soient E un **C**-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, f un endomorphisme non nul de E, par exemple l'identité. L'application $u : x \to \overline{f(x)}$ vérifie (A) mais non (H).
En effet elle est semi-linéaire : $u(\lambda x) = \bar{\lambda}u(x)$; si $u(x) \neq 0$ et $\lambda = i$, alors $u(\lambda x) \neq \lambda u(x)$.
Autre exemple : Considérons **R** comme **Q**-espace vectoriel. **Q** étant un sous-espace vectoriel de **R**, soit V un supplémentaire de **Q** dans **R** : $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \oplus V$, et p le projecteur de **R** sur **Q** associé à cette somme directe. L'application $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est additive, et même **Q**-linéaire, mais non **R**-linéaire.
En effet $p(\lambda x) \equiv \lambda p(x)$ impliquerait $p(\sqrt{2}\sqrt{2}) = p(2) = 2$ et $p(\sqrt{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,p(\sqrt{2})$, donc $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$.

Exercice 2 : Montrer les identités suivantes :

♦ $\forall P \in \mathbf{C}_3[X]$ $\quad \int_a^b P(x).dx = \frac{b-a}{6}[\,P(a) + 4P(\frac{a+b}{2}) + P(b)\,]$.

♥ $\forall P \in \mathbf{C}_5[X]$ $\quad \int_0^1 P(x).dx = \frac{1}{18}[5P(u) + 8P(\frac{1}{2}) + 5P(v)]$, où u et v sont les racines de $x^2 - x + \frac{1}{10}$.

♠ $\forall P \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ $\quad P(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\exp\frac{2ik\pi}{n})$.

• $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ $\quad P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}).d\theta$.

■ $\forall P = \sum a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$ $\quad \forall n \quad \forall r > 0 \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}).e^{-in\theta}.d\theta$.

♣ $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ $\quad \int_{-1}^{+1} P(x).dx + i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta}).e^{i\theta}.d\theta = 0$.

♦ $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ $\quad \Delta P(x + iy) = 0$, où $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

♥ $\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{K})\times M_n(\mathbf{K})$ $\quad \forall P \in \mathbf{K}[X]$ $\quad \mathrm{tr}\,P(AB) = \mathrm{tr}\,P(BA)$.

Solution : Toutes ces identités sont linéaires, en ce sens que les deux membres sont des formes linéaires de P. Or pour vérifier que deux applications linéaires $E \to F$ sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coincident sur une base ou une famille génératrice de E.
1) La 1ère identité est la formule des trois niveaux. Elle se vérifie sur la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{C}_3[X]$, ou, mieux, sur la base $(1, X - \frac{a+b}{2}, (X - a)(X - b), (X - a)(X - \frac{a+b}{2})(X - b))$.

2) La $2^{\text{ème}}$ formule se vérifie sur la base canonique de $\mathbf{C}_5[X]$. Point n'est besoin de calculer u et v, mais seulement les sommes $N_k = u^k + v^k$ pour $0 \le k \le 5$. Or les N_k se calculent sans calculer u et v, car elles obéissent aux formules récurrentes : $N_0 = 2$, $N_1 = 1$, $N_{k+2} = N_{k+1} - \frac{1}{10} N_k$.

On peut aussi vérifier cette formule sur une base plus adaptée : si $P = X^2 - X + \frac{1}{10} = (X - u)(X - v)$, on peut prendre $(1 , X - \frac{1}{2} , P , (X - \frac{1}{2}).P , (X - \frac{1}{2})^2.P , (X - \frac{1}{2})^3.P)$; cela simplifie le calcul du second membre, mais complique le calcul de l'intégrale.

3) La $4^{\text{ème}}$ formule se vérifie sur les monômes X^p, $0 \le p \le n - 1$.
Pour $p = 0$, elle donne $1 = 1$; sinon, elle donne $0 = 0$.

4) La $5^{\text{ème}}$ formule se vérifie sur les monômes X^p . Pour $p = 0$, elle donne $1 = 1$; sinon, $0 = 0$.

5) Cette formule généralise la précédente : faire $n = 0$, et $r = 1$. Comme $P \to a_n(P)$ est une forme linéaire (forme coordonnée), il suffit de la vérifier pour $P = X^p$. Or :

$$\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}).e^{-in\theta}.d\theta = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} r^k e^{i(k-n)\theta}.d\theta = \delta_{n,p} = a_n(P).$$

6) La $6^{\text{ère}}$ identité se vérifie sur les monômes $P = X^k$: elle s'écrit $\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1} = 0$.

7) Idem pour la $7^{\text{ème}}$ identité : $\Delta((x + iy)^k) = k^2 (x + iy)^{k-2} - k^2 (x + iy)^{k-2} = 0$.

8) La 8ème identité se montre par linéarité. Il suffit de montrer tr P(AB) = tr P(BA) pour tous les monômes $P = X^p$. Pour $p = 0$, tr I = tr I = $n.1_{\mathbf{K}}$. Pour $p = 1$, elle s'écrit tr(AB) = tr(BA), propriété bien connue de la trace. Pour $p \ge 2$, $\mathrm{tr}((AB)^p) = \mathrm{tr}(ABAB \dots AB) = \mathrm{tr}(BABA \dots BA) = \mathrm{tr}((BA)^p)$.

<u>Remarques</u> : 1) La formule des trois niveaux sera mieux comprise dans les exercices sur la dualité.

2) On peut déduire 4) de 3) par sommes de Riemann : $P(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\exp\frac{2ik\pi}{n})$ pour tout $n > d° P$; reste à faire tendre n vers $+\infty$.

3) La $2^{\text{ème}}$ formule relève des formules de quadrature de Gauss.

4) Pour établir la $6^{\text{ème}}$ formule, on est tenté de faire le changement de variable $x = e^{i\theta}$.

Mais attention ! cette idée est illicite dans le cadre de l'intégrale de fonctions de variable réelle.
En revanche, si l'on écrit que $\int_\Gamma P(z).dz = 0$, où Γ est le lacet obtenu en recollant $x \in [-1, 1] \to [x, 0]$ et le demi-cercle $\theta \in [0, \pi] \to e^{i\theta}$, on obtient le résultat.

On peut aussi noter, plus simplement, que si Q est une primitive de P,

$$\int_{-1}^{+1} P(x).dx + i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta}).e^{i\theta}.d\theta = Q(1) - Q(-1) + Q(-1) - Q(1) = 0 .$$

<u>Exercice 3</u> : On dit que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est harmonique si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$.
Montrer que les fonctions $(x, y) \to \mathrm{Re}(P(x + iy))$ et $(x, y) \to \mathrm{Im}(P(x + iy))$ sont harmoniques.

<u>Solution</u> : [Oral X PC 2013, RMS n° 422]
Par linéarité, il suffit de montrer cela pour $P(z) = z^n$…

<u>Exercice 4</u> : Soient E, F, G trois **K**-espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ linéaires.
1) a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
b) Montrer que l'inclusion est parfois stricte.
c) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.
2) a) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

b) Montrer que l'inclusion est parfois stricte.
c) Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}\, g \Leftrightarrow F = \text{Im}\, f + \text{Ker}\, g$.

Solution :

1) a) Soit $x \in \text{Ker}\, f$; alors $f(x) = 0$, donc $g(f(x)) = 0$ et $x \in \text{Ker}(g \circ f)$. Ainsi $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}(g \circ f)$.

b) L'inclusion est parfois stricte. Prendre $E = F = G = \mathbf{K}^2$, $f = g : (x, y) \to (y, 0)$.
On a $g \circ f = 0$, donc $\text{Ker}(g \circ f) = \mathbf{K}^2$ et $\text{Ker}\, f = \{0\}\times \mathbf{K}$.

c) Supposons $\text{Ker}\, f = \text{Ker}(g \circ f)$. Soit $y \in \text{Im}\, f \cap \text{Ker}\, g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $g(y) = 0$.
Alors $g(f(x)) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$, donc $x \in \text{Ker}\, f$, donc $y = f(x) = 0$. cqfd.
Supposons $\text{Im}\, f \cap \text{Ker}\, g = \{0\}$, et montrons $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}\, f$, l'autre inclusion étant acquise.
Soit $x \in \text{Ker}(g \circ f)$. Alors $f(x) \in \text{Im}\, f \cap \text{Ker}\, g$, donc $f(x) = 0$. cqfd.

2) a) Soit $z \in \text{Im}(g \circ f)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$; alors $z = g(f(x)) \in \text{Im}\, g$.
Ainsi $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}\, g$.

b) L'inclusion est parfois stricte. Prendre $E = F = G = \mathbf{K}^2$, $f = g : (x, y) \to (y, 0)$.
On a $g \circ f = 0$, donc $\text{Im}(g \circ f) = \{0\}$ et $\text{Im}\, g = \mathbf{K} \times \{0\}$.

c) Supposons $F = \text{Im}\, f + \text{Ker}\, g$. Soit $z \in \text{Im}\, g$. Il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
y s'écrit $f(a) + b$, où $a \in E$ et $b \in \text{Ker}\, g$. Alors $z = g(f(a)) + g(b) = (g \circ f)(a) \in \text{Im}(g \circ f)$.
Ainsi $\text{Im}\, g \subset \text{Im}(g \circ f)$. L'autre inclusion est toujours vraie.
Supposons $\text{Im}\, g = \text{Im}(g \circ f)$. Soit $y \in F$; $g(y) \in \text{Im}\, g$, donc $\exists x \in E\ \ g(y) = (g \circ f)(x)$.
Alors $y - f(x) \in \text{Ker}\, g$, et $y = f(x) + y - f(x) \in \text{Im}\, f + \text{Ker}\, g$. cqfd.

Exercice 5 : Soient E, F, G trois **K**-espaces vectoriels, $u : E \to F$ et $v : F \to G$ linéaires, $w = v \circ u$.
Montrer que w est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ [v est surjective, u est injective et $F = \text{Im}\, u \oplus \text{Ker}\, v$].

Solution :

Exercice 6 : Construction d'applications linéaires à l'aide de familles génératrices [1] :
Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels, $(a_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, $(b_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Pour qu'il existe une application linéaire $u : E \to F$ telle que : $(\forall i \in I)\ \ u(a_i) = b_i$, il faut et il suffit que toute relation linéaire vérifiée par les a_i soit aussi vérifiée par les b_i :

$$\forall \lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}\quad \sum_{i\in I} \lambda_i a_i = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i\in I} \lambda_i b_i = 0 \quad ; \quad \text{u est alors unique.}$$

Solution : Soit x un vecteur de E. Il s'écrit sous la forme $x = \sum_{i\in I} \xi_i\, a_i$, où la famille de scalaires (ξ_i) est à support fini. Alors on doit poser $u(x) = \sum_{i\in I} \xi_i\, b_i$. Cela montre l'unicité de u.

Encore faut-il s'assurer que $y = \sum_{i\in I} \xi_i\, b_i$ ne dépend pas de la famille (ξ_i) choisie. Or si $x = \sum_{i\in I} \eta_i\, a_i$, alors $\sum_{i\in I} (\xi_i - \eta_i) a_i = 0$; or cela implique $\sum_{i\in I} (\xi_i - \eta_i) b_i$, c'est-à-dire $\sum_{i\in I} \xi_i\, b_i = \sum_{i\in I} \eta_i\, a_i$.
L'application u est bien définie. Reste à montrer sa linéarité ; c'est facile.
Si la seule relation linéaire vérifiée par (a_i) est la relation triviale, alors (a_i) est une base de E, et, pour toute famille (b_i) de vecteurs de F, il existe une application linéaire $u : E \to F$ telle que $(\forall i \in I)$ $u(a_i) = b_i$.

[1] Mon professeur de taupe affectionnait beaucoup cet énoncé, dont il faisait un élégant usage, tant dans l'étude des torseurs que dans celle de l'intégrale des fonctions en escaliers.

Exercice 7 : Soient E et H deux espaces vectoriels, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Soient $u : F \to H$ et $v : G \to H$ deux applications linéaires coincidant sur $F \cap G$.
Montrer qu'elles se prolongent de manière unique en une application linéaire $w : F + G \to H$.

Solution : Cet exercice s'apparente au précédent.
Si x est un vecteur de F + G, écrivons $x = y + z$, où $(y, z) \in F \times G$. Alors on doit poser $w(x) = u(y) + v(z)$. Ceci montre l'unicité de w. Encore faut-il s'assurer que la valeur w(x) ne dépend pas du couple (y, z) choisi. Or si l'on a $x = y + z = y' + z'$, $y - y' = z' - z \in F \cap G$, donc $u(y - y') = v(z' - z)$, donc $u(y) + v(z) = u(y') + v(z')$. w est donc bien définie sur F + G.
La linéarité de w est évidente. Elle prolonge bien u et v.
Lorsque F et G sont en somme directe, la condition de recollement est automatiquement satisfaite. L'application w se note alors parfois $w = u \oplus v$.

Remarque : Cet exercice s'applique aux intégrales de Riemann et de Newton. F est l'espace vectoriel des fonctions Riemann-intégrables sur [a, b], u est l'intégrale de Riemann, G est l'espace des fonctions dérivées, v est l'intégrale dite de Newton $v(g) = G(b) - G(a)$, où G est une primitive de g. Une fonction dérivée n'est pas toujours Riemann-intégrable, mais, si elle l'est, alors les deux intégrales coincident. L'intégrale de Henstock est un prolongement commun des deux intégrales.

Exercice 8 : Soient E un **K**-espace vectoriel, u un endomorphisme de E.
On suppose qu'il existe un unique endomorphisme v tel que $u \circ v = id_E$; montrer que u est un automorphisme. Même question s'il existe un unique endomorphisme tel que $v \circ u = id_E$.

Solution :
1) Voici une solution purement calculatoire :
Il s'agit de montrer que $v \circ u = id_E$. Soit donc $w = v \circ u - id_E$.
$u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ v \circ u - u = id_E + u - u = id_E$.
De l'unicité de v, on déduit que w = 0. Cqfd.

2) Autre solution : Il découle de $u \circ v = id_E$ que u est surjective.
De plus, $u \circ v' = id_E \Leftrightarrow u \circ (v' - v) = 0 \Leftrightarrow v' = v + f$, où $\text{Im } f \subset \text{Ker } u$.
L'unicité de v signifie que $\text{Im } f \subset \text{Ker } u \Leftrightarrow f = 0$.
Cela impose $\text{Ker } u = \{0\}$, en prenant pour f un projecteur d'image Ker u.
Du coup, u est injective. Cqfd.
N B : cette méthode est plus coûteuse que la première (existence de projecteurs).
3) Le deuxième problème est laissé au lecteur.

Exercice 9 : Une suite exacte scindée.
Soient E, F, G trois **K**-espaces vectoriels, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $s : G \to F$ trois applications linéaires telles que $\text{Ker } f = \{0\}$, $\text{Im } g = G$, $\text{Im } f = \text{Ker } g$ et $g \circ s = id_G$.
1) Montrer que $F = \text{Im } f \oplus \text{Ker } g$, et que F est isomorphe à $E \times G$.
2) Formuler et établir une récirpoque.

Solution :

Exercice 10 : **Grand lemme des cinq**.
On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \to & E_2 & \to & E_3 & \to & E_4 & \to & E_5 \\ f_1\downarrow & & f_2\downarrow & & f_3\downarrow & & f_4\downarrow & & f_5\downarrow \\ E'_1 & \to & E'_2 & \to & E'_3 & \to & E'_4 & \to & E'_5 \end{array}$$

formé d'espaces vectoriels et d'applications linéaires $u_i : E_1 \to E_2$ et $u'_i : E_i \to E_{i+1}$.
On suppose que ses lignes sont exactes, en ce sens que $(\forall i)$ $\text{Ker } u_{i+1} = \text{Im } u_i$ et $\text{Ker } u'_{i+1} = \text{Im } u'_i$,

et que le diagramme est commutatif, en ce sens que : $(\forall i)\ f_{i+1} \circ u_i = u'_i \circ f_i$.

1) Montrer que si f_2 et f_4 sont injectives, et f_1 surjective, alors f_3 est injective ;

2) Montrer que si f_2 et f_4 sont surjectives, et f_5 injective, alors f_3 est surjective ;

3) En déduire que si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont bijectives, alors f_3 aussi.

Solution : Cet exercice, extrêmement agréable à résoudre — il suffit de se laisser porter par les hypothèses — relève d'une branche de l'algèbre appelée algèbre homologique.

Nous noterons x_k un élément de E_k, x'_k un élément de E'_k.

1) Il s'agit de montrer que $f_3(x_3) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$.

$f_3(x_3) = 0 \Rightarrow (u'_3 \circ f_3)(x_3) = 0 \Rightarrow (f_4 \circ u_3)(x_3) = 0 \Rightarrow u_3(x_3) = 0$ car f_4 est injective,

$\Rightarrow x_3 \in \text{Ker } u_3 = \text{Im } u_2 \Rightarrow \exists x_2\ x_3 = u_2(x_2)$

$\Rightarrow (f_3 \circ u_2)(x_2) = 0 \Rightarrow (u'_2 \circ f_2)(x_2) = 0 \Rightarrow f_2(x_2) \in \text{Ker } u'_2 = \text{Im } u'_1$

$\Rightarrow \exists x'_1\ f_2(x_2) = u'_1(x'_1)$. Or f_1 est surjectif, donc $\exists x_1\ x'_1 = f_1(x_1)$

$\Rightarrow f_2(x_2) = (u'_1 \circ f_1)(x_1) = (f_2 \circ u_1)(x_1)$. Or f_2 est surjectif, donc $x_2 = u_1(x_1)$.

Récapitulons! $x_3 = u_2(x_2)$ et $x_2 = u_1(x_1)$, donc $x_3 = (u_2 \circ u_1)(x_1) = 0$, car $\text{Im } u_1 = \text{Ker } u_2$. CQFD !

2) Il s'agit de montrer que $\forall x'_3\ \exists y_3\ x'_3 = f_3(y_3)$.

Tout d'abord $u'_3(x_3) \in F'_4$. Comme f'_4 est surjectif, il existe x_4 tel que $u'_3(x'_3) = f_4(x_4)$.

Alors $0 = (u'_4 \circ u'_3)(x'_3) = (u'_4 \circ f_4)(x_4) = (f_5 \circ u_4)(x_4)$.

Comme f_5 est injectif, $u_4(x_4) = 0$: $x_4 \in \text{Ker } u_4 = \text{Im } u_3$. Donc $\exists x_3\ x_4 = u_3(x_3)$.

Ainsi, $u'_3(x'_3) = (f_4 \circ u_3)(x_3) = (u'_3 \circ f_3)(x_3)$.

Par conséquent $x'_3 - f_3(x_3) \in \text{Ker } u'_3 = \text{Im } u'_2$.

Donc il existe x'_2 tel que $x'_3 - f_3(x_3) = u'_2(x'_2)$.

Comme f_2 est surjectif, il existe x_2 tel que $x'_2 = f_2(x_2)$.

Alors $x'_3 - f_3(x_3) = (u'_2 \circ f_2)(x_2) = (f_3 \circ u_2)(x_2)$.

Conséquence : $x'_3 = f_3(x_3 + u_2(x_2))$: voilà notre lascar !

3) découle aussitôt de 1) et 2).

Remarques : 1) On pouvait certes déduire 2) de 1) par dualité, mais c'eût été manquer de courage !
2) On trouvera dans Bourbaki, Algèbre, chap. X, d'autres facéties de ce genre : le lemme du serpent, etc. Il paraît qu'elles sont fort utiles…

Exercice 11 : Soient I un intervalle de **R** contenant 0, $E = C(I, \mathbf{R})$, $F = \{ f \in C^1(I, \mathbf{R}) ; f(0) = 0 \}$. On note $J : F \to E$ l'injection canonique, I_E l'identité de E, I_F celle de F, $D : f \in F \to f' \in E$ la dérivation. Pour toute $f \in E$, on note $U(f)$ et $V(f)$ les fonctions définies dans I par :

$$U(f)(x) = \int_0^x f(t).dt \quad \text{et} \quad V(f)(x) = \int_0^x e^{x-t}.f(t).dt\ .$$

1) Montrer que U et V sont des applications linéaires de E dans F.

2) Montrer que $D \circ U = I_E$, $U \circ D = I_F$, $D \circ V = I_E + J \circ V$, $V \circ D = I_F + V \circ J$.

3) En déduire $U \circ J \circ V = V \circ J \circ U = V - U$.

4) Montrer que $I_E - J \circ U$ et $I_E + J \circ V$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

5) Soit $h \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : I \to \mathbf{R}$ telle que :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) - \int_0^x f(t).dt = h(x).$$

Solution :

1) Si f est élément de E, la fonction U(f) est C^1 en vertu du théorème de Newton-Leibniz, V(f) aussi si l'on écrit $V(f)(x) = e^x\int_0^x e^{-t}.f(t).dt$; enfin U(f) et V(f) sont nulles en 0.

2) Si $f \in$ E, (D o U)(f) = f , car U(f)' = f ; et si g $\in$ F, $(U \circ D)(g)(x) = \int_0^x g'(t).dt = g(x) - g(0) = g(x)$.

$V(f)'(x) = e^x\int_0^x e^{-t}.f(t).dt + f(x) = V(f)(x) + f(x)$, donc D o V = I_E + J o V.

$(V \circ D)(g)(x) = \int_0^x e^{x-t}.g'(t).dt = [e^{x-t}.g(t)]_0^x + \int_0^x e^{x-t}.g(t).dt = g(x) + \int_0^x e^{x-t}.g(t).dt$ par parties.

3) U o J o V = U o (D o V – I_E) = (U o D) o V – U = I_F o V – U = V – U .
V o J o U = (V o D – I_F) o U = V o (D o U) – U = V o I_E – U = V – U .

4) Il découle de 3) que:
(I_E – J o U) o (I_E + J o V) = I_E + J o V – J o U – J o U o J o V = I_E + J o V – J o U – J o (V – U) = I_E
(I_E + J o V) o (I_E – J o U) = I_E + J o V – J o U – J o V o J o U = I_E + J o V – J o U – J o (V – U) = I_E

5) L'équation fonctionnelle proposée s'écrit (I_E – J o U)(f) = h.
Comme I_E – J o U est un isomorphisme, elle a une solution unique, f = (I_E + J o V)(h).

<u>Conclusion</u> : $(\forall x \in I) \quad f(x) - \int_0^x f(t).dt = h(x) \iff (\forall x \in I) \quad f(x) = h(x) + \int_0^x e^{x-t}.h(t).dt$.

<u>Remarque</u> : cet exercice un peu dogmatique dévisse avec soin, du point de vue linéaire, la résolution de l'équation fonctionnelle $f(x) - \int_0^x f(t).dt = h(x)$. Une démarche plus naturelle consiste à poser $F(x) = \int_0^x f(t).dt$. Il vient F'(x) – F(x) = h(x) et F(0) = 0 : équation différentielle que l'on résout, et il reste à faire la réciproque.

<u>Exercice 12</u> : Soient E un **K**-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel, G_0 un supplémentaire de F dans E.
1) Montrer que toute application linéaire $f : G_0 \to F$ est la restriction d'un projecteur sur F.
2) Montrer que l'application $f \to \{ x - f(x) ; x \in G_0 \}$ réalise une bijection de $\mathcal{L}(G_0, F)$ sur l'ensemble des supplémentaires de F dans E.
3) <u>Application</u> : Si **K** est un corps fini de cardinal q, E est de dimension n et F de dimension k, combien F admet-il de supplémentaires ?

<u>Solution</u> :
1) Qu'est-ce qu'un projecteur de E sur F ? C'est un endomorphisme p de E laissant stable F, induisant dans F l'identité, et tel que Im $p \subset$ F. Pour se donner un tel endomorphisme, il suffit de se donner sa restriction $f = p|_{G_0}^{F}$ à un supplémentaire G_0 de F.

Alors, si x = y + z , (y, z) $\in F\times G_0$ on posera p(x) = y + f(z).

<u>Conclusions</u> :
i) L'application $p \to f = p|_{G_0}^{F}$ met en bijection l'ensemble $\mathcal{P}$(F) des projecteurs sur F et l'espace vectoriel $\mathcal{L}(G_0, F)$.
ii) Les projecteurs sur F forment un sous-espace affine de $\mathcal{L}$(E). Si p_0 est le projecteur sur F parallèlement à G_0 , $\mathcal{P}(F) = p_0 + V$, où $V = \{ u \in \mathcal{L}(E) ; u|_F = 0, u(G_0) \subset F \}$, espace isomorphe à $\mathcal{L}(G_0, F)$.

2) Cette question s'éclaire grandement si elle fait suite à la précédente.
Soit en effet f un élément de $\mathcal{L}(G_0, F)$, p(f) le projecteur de E sur F qui prolonge f.

Ker p(f) est un supplémentaire de F. L'application $f \to$ Ker p(f) est une bijection de $\mathcal{L}(G_0, F)$ sur l'ensemble des supplémentaires de F comme composée de bijections.
Or je dis que Ker p(f) = { z – f(z) ; z ∈ G_0 }.
En effet, si x = z – f(z) , où z ∈ G_0 , alors p(f)(x) = – f(z) + f(z) = 0.
Si p(f)(x) = 0, alors x = y + z, où y = – f(z), donc x = z – f(z), où z ∈ G_0 .
Matriciellement (en dim. finie, par conséquent) soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_{G0})$ une base de E, recollée d'une base de F et d'une base de G_0. Pour que p soit un projecteur d'image F, il faut et il suffit que

$$\mathrm{Mat}(p, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} I & A \\ O & O \end{bmatrix}.$$

Donc Ker $p = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} ; X = -AY \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -AY \\ Y \end{bmatrix} ; Y \right\}$.

3) <u>Application au dénombrement des supplémentaires</u> :
Si G_0 est un supplémentaire de F dans E, $\mathcal{L}(G_0, F)$ est un **K-**espace vectoriel de dimension $k(n-k)$, donc card $\mathcal{L}(G_0, F) = q^{k(n-k)}$: c'est le nombre cherché.
Pour une variante et des compléments, cf. mes problèmes d'algèbre linéaire.

<u>Exercice 13</u> : On admet ici que tout sous-espace vectoriel F d'un **K-**espace vectoriel E admet au moins un supplémentaire. On considère **R** comme **Q-**espace vectoriel.
1) Montrer qu'il est de dimension infinie.
2) Soient V un supplémentaire de **Q** dans **R** : **R** = **Q** ⊕ V, p le projecteur sur **Q** parallèlement à V. Montrer que $\forall(x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ $p(x + y) = p(x) + p(y)$, mais que p n'est continue en aucun point de **R**.
3) On note $f(x) = p(x)^2$ pour tout réel x. Montrer que $\forall(x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ $f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$, mais que f n'est convexe sur aucun intervalle de **R**.

<u>Solution</u> :
1) Si **R** admettait une **Q-**base finie ($e_1, \dots , e_n$), **R** serait équipotent à $\mathbf{Q}^n$, donc dénombrable. Or Cantor a montré que ce n'était pas le cas.
2) p est **Q-**linéaire, donc satisfait l'équation de Cauchy $\forall(x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ $p(x + y) = p(x) + p(y)$.
Par ailleurs $p(x) = x$ pour tout $x \in$ **Q** et $p(x) = 0$ pour tout $x \in$ V. Mais **Q** et V sont denses dans **R**.
En effet, si e est un élément non nul de V, **Q**.e est dense dans **R** et inclus dans V.
Du coup, p est discontinue en tout réel ≠ 0.
Elle ne peut être continue en 0, sans quoi elle serait continue en tout point.
3) $f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ s'écrit $p(\frac{x+y}{2})^2 \le \frac{p(x)^2+p(y)^2}{2}$, *i.e.* $(\frac{p(x)+p(y)}{2})^2 \le \frac{p(x)^2+p(y)^2}{2}$.
Or on sait que $(\frac{a+b}{2})^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$. De plus $f(x) = x^2$ pour tout $x \in$ **Q** et $f(x) = 0$ pour tout $x \in$ V.
Les densités de **Q** et de V interdisent à f d'être convexe sur un intervalle non trivial.

<u>Exercice 14</u> : Soient **K** un corps de caractéristique ≠ 2, E un **K-**espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E. Montrer l'équivalence des propriétés :
i) p.q = q.p = 0 ii) p + q est un projecteur ; iii) p.q = – q.p ; iv) $\exists\alpha \notin \{0, 1\}$ p.q = α.q.p .

<u>Solution</u> : i) ⇒ ii) car alors $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + p.q + q.p = p + q$.
ii) ⇔ iii) $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + p.q + q.p = p + q + p.q + q.p$; donc $(p + q)^2 = p + q$ ⇔ p.q + q.p = 0.
iii) ⇒ iv) découle de l'hypothèse faite sur la caractéristique de K, car $-1 \notin \{0, 1\}$.

iv) $\Rightarrow$ i) $x \in \operatorname{Im} q \Rightarrow x = q(x) \Rightarrow p(x) = (p.q)(x) = \alpha.q(p(x)) \Rightarrow p(x) \in \operatorname{Ker}(\alpha q - I) = \operatorname{Ker}(q - \alpha^{-1}I) = \{0\}$, car $\alpha \neq 0$ et α^{-1} n'est pas valeur propre de q. Ainsi $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$, i.e. $p.q = 0$.
De même, en échangeant les rôles de p et q, α devenant α^{-1}, $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} p$, i.e. $q.p = 0$.
iv) $\Rightarrow$ i) par le calcul.
Tout d'abord $p.q.p = \alpha.q.p.p = \alpha.q.p = p.q$, donc $p.q.p.q = p.q.q = p.q$; ainsi, p.q est un projecteur.
$p.q = \alpha.q.p \Rightarrow (p.q)^2 = \alpha^2.(q.p)^2 \Rightarrow p.q = \alpha^2.(q.p)^2 \Rightarrow \alpha.q.p = \alpha^2.(q.p)^2 \Rightarrow q.p = \alpha.(q.p)^2$ (car $\alpha \neq 0$)
$\Rightarrow q.p = \alpha.q.p.q.p = p.q.q.p = p.q.p$; donc $p.q.p = p.q = q.p = \alpha.q.p$; comme $\alpha \neq 1$, $q.p = p.q = 0$.
iv) $\Rightarrow$ i) par les matrices (en dimension finie).
Choisissons une base de E telle que p ait pour matrice $\begin{bmatrix} I & O \\ O & O \end{bmatrix}$; soit alors $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ celle de q.
La relation $p.q = \alpha.q.p$ se traduit par $A = \alpha A$, $B = O$ et $O = \alpha C$. Comme α est différent de 0 et 1, A, B et C sont nulles, et $M = \begin{bmatrix} O & O \\ O & D \end{bmatrix}$. Il est immédiat que $p.q = q.p = 0$.
Cette méthode s'étend sans peine en dimension infinie, si l'on généralise les matrices-blocs.

<u>Exercice 15</u> : Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, E un **K**-espace vectoriel et $f \in \mathfrak{L}(E)$.
Montrer que $f \circ f = 0$ si et seulement s'il existe un projecteur $p \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $f = f \circ p - p \circ f$.

<u>Solution</u> : [Oral Mines PC 2012, RMS n° 625]
1) Supposons qu'existe un projecteur $p \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $f = f \circ p - p \circ f$.
Alors on aurait $f \circ p = f \circ p - p \circ f \circ p$, donc $p \circ f \circ p = 0$.
On aurait aussi $p \circ f = p \circ f \circ p - p \circ f$, donc $p \circ f = - p \circ f$, et $p \circ f = 0$.
Alors $f = f \circ p$, donc $f \circ f = f \circ p \circ f = 0$.
2) Réciproquement, supposons $f \circ f = 0$, i.e. $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
Soit p un projecteur quelconque tel que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} f$.
Alors $p \circ f = 0$ et $\operatorname{Im}(I - p) \subset \operatorname{Ker} f$, donc $f - f \circ p = 0$. On a bien $f = f \circ p - p \circ f$. cqfd.

<u>Exercice 16</u> : Soient **K** un corps de caractéristique 0, E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n.
1) Soit $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ un k-uplet d'endomorphismes de E, de somme $I = id_E$.
Montrer l'équivalence des propriétés :
i) $\operatorname{rg} u_1 + \dots + \operatorname{rg} u_k = n$;
ii) $\forall (i, j) \quad i \neq j \Rightarrow u_i.u_j = 0$;
iii) Pour tout i, u_i est un projecteur.
2) Soit $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ un k-uplet de projecteurs de E. Montrer l'équivalence des propriétés :
i) $\forall (i, j) \quad i \neq j \Rightarrow p_i.p_j = 0$; ii) $p_1 + p_2 + \dots + p_k$ est un projecteur.

<u>Solution</u> :
0) L'idée est que « <u>le rang d'un projecteur est égal à sa trace</u> ». Précisons cette idée, car elle n'est pas tout à fait juste : le rang est un entier naturel, la trace est un élément de **K**.
Mais si p est un projecteur d'un **K**-ev de dimension finie, $\operatorname{tr} p = (\operatorname{rg} p).1_{\mathbf{K}}$.
Si la caractéristique de **K** est nulle, on peut plonger **N** (et même **Q**) dans **K** et identifier 1 et $1_{\mathbf{K}}$.
Si elle est non nulle, il n'en est plus de même : la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est de trace nulle.
Nous dirons que deux projecteurs p et q sont orthogonaux si $p.q = q.p = 0$.
1) <u>Montrons</u> i) $\Rightarrow$ ii) et iii). De $u_1 + u_2 + \dots + u_k = I$, il découle que $E = \sum_i \operatorname{Im} u_i$.

De plus, en vertu de i), $\sum_i \dim(\mathrm{Im}\, u_i) = \sum_i rg(u_i) = n$ = dim E. Donc E = $\oplus$ Im u_i .

Tout x s'écrit x = $\sum_i u_i(x)$, donc $u_i(x)$ est le projeté de x sur Im p_i associé à cette somme directe.

Du coup, les u_i sont des projecteurs deux à deux orthogonaux.

<u>Montrons</u> ii) ⇒ iii). $u_i = u_i.I = u_i.(u_1 + u_2 + \dots + u_k) = (u_i)^2$ en vertu des relations ii).

<u>Montrons</u> iii) ⇒ i). rg u_1 + … + rg u_k = tr u_1 + … + tr u_k = tr(u_1 + … + u_k) = tr I = n ;

<u>Montrons</u> iii) ⇒ ii) … luxe inutile, d'ailleurs !

u_i étant un projecteur, il est en de même de $I - u_i = \sum_{j\neq i} u_j$.

On a, d'une part : Ker u_i = Im $\sum_{j\neq i} u_j \subset \sum_{j\neq i} \mathrm{Im}\, u_j$

d'autre part : $\dim(\mathrm{Im} \sum_{j\neq i} u_j) = \mathrm{tr} \sum_{j\neq i} u_j = \sum_{j\neq i} tr(u_j) = \sum_{j\neq i} \dim(\mathrm{Im}\, u_j)$.

On en déduit que Ker $u_i = \oplus_{j\neq i}$ Im u_j . Pour $j \neq i$, Im $u_j \subset$ Ker u_i , donc $u_i.u_j = 0$. cqfd.

2) Il s'agit de généraliser l'exercice 10, et de montrer qu'une somme de projecteurs est un projecteur si et seulement si les projecteurs sont deux à deux orthogonaux.

<u>Montrons</u> i) ⇒ ii). $(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_k^2 = p_1 + p_2 + \dots + p_k$

<u>Montrons</u> ii) ⇒ i) $P = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ est un projecteur, donc I – P aussi ; notons-le p_{k+1}.

Ainsi $p_1 + \dots + p_{k+1} = I$, et, pour tout i, p_i est un projecteur.

En vertu de 1), on a $p_i.p_j = 0$ pour $i \neq j$. CQFD.

<u>Exercice 17</u> : « <u>Petit théorème des noyaux</u> ».
Soient E un **K**-espace vectoriel, α et β deux scalaires distincts, u un endomorphisme de E.
Montrer que : $\mathrm{Ker}(u^2 - (\alpha + \beta).u + \alpha\beta.I) = \mathrm{Ker}(u - \alpha.I) \oplus \mathrm{Ker}(u - \beta.I)$.

<u>Solution</u> : Cela découle du théorème des noyaux général. Mais en voici une démonstration directe.
Notons $f = u - \alpha.I$, $g = u - \beta.I$ et $h = u^2 - (\alpha + \beta).u + \alpha\beta.I$
On a $h = f \circ g = g \circ f$, donc Ker $f \subset$ Ker h et Ker $g \subset$ Ker h. D'où Ker f + Ker $g \subset$ Ker h.
On a Ker $f \cap$ Ker $g = \{0\}$, car $x \in$ Ker $f \cap$ Ker g implique $u(x) = \alpha.x = \beta.x$, donc x = 0.
Soit $x \in$ Ker h . Cherchons $(y, z) \in$ Ker $f \times$ Ker g tel que $x = y + z$.
<u>Analyse</u> : si le couple cherché (y, z) existe, $u(x) = u(y) + u(z) = \alpha.y + \beta.z$.
D'où $y = \dfrac{u(x)-\beta x}{\alpha-\beta} = \dfrac{g(x)}{\alpha-\beta}$ et $z = \dfrac{u(x)-\alpha x}{\beta-\alpha} = \dfrac{f(x)}{\beta-\alpha}$.
<u>Synthèse</u> : y et z ainsi définis ont bien pour somme x, et appartiennent resp. à Ker f et à Ker g car x appartient à Ker h.

<u>Exercice 18</u> : Soit E l'espace vectoriel des fonctions de **R** dans **R**. Montrer que F = P ⊕ A, où F, P et A sont resp. les sev des fonctions 2-périodiques, 1-périodiques et 1-antipériodiques.

<u>Solution</u> : Considérons l'opérateur de translation T : $f \to T(f)$, où $(\forall x)$ $T(f)(x) = f(x + 1)$.
Il s'agit de montrer que $\mathrm{Ker}(T^2 - I) = \mathrm{Ker}(T - I) \oplus \mathrm{Ker}(T + I)$: c'est le petit théorème des noyaux appliqué à T, avec α = 1, β = –1. En clair, si f est 2-périodique, elle s'écrit de façon unique $f = g + h$, où $g(x) = \dfrac{f(x)+f(x+1)}{2}$, $h(x) = \dfrac{f(x)-f(x+1)}{2}$: g est 1-périodique, h 1-antipériodique.

<u>Exercice 19</u> : Soient E un espace vectoriel, u, v, f, g quatre endomorphismes de E qui deux à deux commutent, et vérifient $u \circ f + v \circ g = id_E$.

1) Montrer que Ker $f \cap$ Ker $g = \{0\}$ et $E = \text{Im} f + \text{Im} g$.
2) Montrer que Ker(f o g) = Ker $f \oplus$ Ker g et Im(f o g) = Im $f \cap$ Im g.
3) On suppose de plus que f o $g = 0$. Montrer que :

$$E = \text{Im} f \oplus \text{Im} g = \text{Ker} g \oplus \text{Ker} f \quad , \quad \text{Ker} f = \text{Im} g \quad , \quad \text{Ker} g = \text{Im} f .$$

Solution : Cet exercice généralise le petit et le grand théorème des noyaux.
1) a) $x \in$ Ker $f \cap$ Ker $g \Rightarrow x = u(f(x)) + v(g(x)) = 0$.
b) $x = (f \text{ o } u)(x) + (g \text{ o } v)(x) \in$ Im f + Im g.
2) a) Il découle de 1 que Ker f et Ker g sont en somme directe.
On a Ker $g \subset$ Ker(f o g) et Ker $f \subset$ Ker(g o f) = Ker(f o g), donc Ker $f \oplus$ Ker $g \subset$ Ker(f o g).
Soit maintenant $x \in$ Ker(f o g) ; écrivons $x = (u \text{ o } f)(x) + (v \text{ o } g)(x)$.
(u o f)(x) $\in$ Ker g , car (g o u o f)(x) = (u o f o g)(x) = 0 ;
(v o g)(x) $\in$ Ker f , car (f o v o g)(x) = (v o f o g)(x) = 0.
b) Im(f o g) $\subset$ Im f et Im(f o g) = Im(g o f) $\subset$ Im g, donc Im(f o g) $\subset$ Im $f \cap$ Im g.
Soit maintenant $x \in$ Im $f \cap$ Im g ; écrivons $x = f(y) = g(z)$. Alors par commutation :

$$x = (u \text{ o } f)(x) + (v \text{ o } g)(x) = (u \text{ o } f \text{ o } g)(z) + (v \text{ o } g \text{ o } f)(y) = (f \text{ o } g)(u(z) + v(y)).$$

3) Si de plus f o $g = 0$, il vient aussitôt E = Ker $f \oplus$ Ker g , et $\{0\}$ = Im $f \cap$ Im g.
Il découle de f o g = g o f = 0 que Im $g \subset$ Ker f et Im $f \subset$ Ker g.
Maintenant, soit $x \in$ Ker f. Alors $x = (u \text{ o } f)(x) + (v \text{ o } g)(x) = (v \text{ o } g)(x) = (g \text{ o } v)(x) \in$ Im g.
De même, Ker $g \subset$ Im f ; au final, Ker g = Im f et Ker f = Im g. cqfd.

Mentionnons pour mémoire deux résultats de linéarité :

Exercice 20 : Soient E un **R**-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
1) Soit f une application de $E \to E$ vérifiant $\forall (x, y) \in E \times E \ \ (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$, resp. $- (x \mid f(y))$.
Montrer que f est linéaire.
2) Soit f une isométrie $E \to E$ (c'est-à-dire une bijection conservant la distance associée à la norme) telle que $f(0) = 0$. Montrer que f est linéaire.

Solution : cf. mes exercices d'algèbre bilinéaire.

Exercice 21 : **théorème de Mazur-Ulam (1932)**.
On se propose de montrer que si E est un **R**-espace vectoriel normé, et f une isométrie $E \to E$ (i.e. une bijection conservant les distances associées aux normes), telle que $f(0) = 0$, alors f est linéaire.
1) Soit (E, d) un espace métrique. Si a et b sont deux points de E, on définit par récurrence :

$$F_1 = \{ x \in E \,;\, d(a, x) = d(b, x) = \frac{1}{2} d(a, b) \} \text{ et } F_{n+1} = \{ x \in F_n \,;\, (\forall y \in F_n) \ d(x, y) \le \frac{1}{2} \text{diam } F_n \}.$$

Montrer que F_n est, soit vide, soit réduit à un singleton, que l'on appelle alors *milieu* de a et b.
2) Montrer que si E est un **R**-evn, a et b ont pour milieu $c = \dfrac{a+b}{2}$.
(On pourra montrer d'abord que les F_n sont invariants par la symétrie de centre c, et contiennent c).
3) Revenant au problème posé, montrer que $f(\dfrac{a+b}{2}) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, et conclure.

___

3. *Dimension, rang.*

Commençons par deux exercices illustrant l'intervention de l'algèbre linéaire en théorie des groupes.

Exercice 1 : **structure des groupes involutifs**.

Soit G un groupe multiplicatif tel que $(\forall x \in G)\ \ x^2 = e$.

1) Montrer que G est commutatif.

2) On suppose désormais G fini de cardinal N et on le note additivement.

En munissant G d'une structure de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel convenable, montrer que N est une puissance de 2 : $N = 2^n$, et que G est isomorphe au groupe additif $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.

Solution :

0) Donnons d'abord des exemples de groupes involutifs :

- $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$ et ses puissances finies $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ et infinies $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^I$ (pour l'addition).
- $\mathbf{U}_2 = (\{\pm 1\}, \times)$ et ses puissances finies et infinies (pour la multiplication). En particulier les matrices diagonales $\mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ forment un sous-groupe à 2^n éléments de $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{R})$.
- Le groupe de Klein $\{e, a, b, c\}$, qui, à vrai dire, est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ ou à $(\mathbf{U}_2)^2$.
- L'ensemble $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ des parties de X, muni de la différence symétrique. Mais à vrai dire $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^X = \mathcal{F}(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

1) On a $(\forall x \in G)\ \ x = x^{-1}$, donc $\forall (x, y) \in G\times G\ \ \ x.y = (x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1} = y.x$.

2) <u>Structure de G</u>. Notons G additivement. Alors $\forall x \in G\ \ x + x = 0$.

Adjoignons à l'addition une loi externe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times G \to G$, définie par $\bar{0}.x = 0$, $\bar{1}.x = x$. Pour ces deux lois, G devient un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel. La vérification des 4 axiomes repose sur $x + x = 0$.

Alors G est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension finie, donc il admet une base finie $(e_1, \dots, e_n)$.

L'application $(x_1, \dots, x_n) \to x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$ est un isomorphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espaces vectoriels, et *a fortiori* un isomorphisme des groupes additifs sous-jacents.

<u>Remarque</u> : cet exercice est traité avec d'autres méthodes dans les exercices d'Algèbre générale.

Exercice 2 : a) Les groupes $(\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Z}^2, +)$ sont-ils isomorphes ?

b) Pour quels entiers *m* et *n* les groupes $(\mathbf{Z}^n, +)$ et $(\mathbf{Z}^m, +)$ sont-ils isomorphes ?

[Oral ENS 2006]

Indications :

a) Les groupes $(\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Z}^2, +)$ ne sont pas isomorphes, car le premier est monogène tandis que le second ne l'est pas.

b) Les groupes $(\mathbf{Z}^n, +)$ et $(\mathbf{Z}^m, +)$ sont isomorphes ssi $m = n$. L'idée est de les considérer comme $\mathbf{Z}$-modules, et de montrer que toute $\mathbf{Z}$-base de $\mathbf{Z}^n$ est une $\mathbf{Q}$-base de $\mathbf{Q}^n$. Nous voilà ramenés à de l'algèbre linéaire. Si *f* est un isomorphisme de groupes de $(\mathbf{Z}^n, +)$ sur $(\mathbf{Z}^m, +)$, c'est un isomorphisme de $\mathbf{Z}$-modules. L'image par *f* de la base canonique de $\mathbf{Z}^n$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathbf{Z}^m$, donc $n = m$.

Exercice 3 : Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et $f : z \in \mathbf{C} \to a\,z + b\,\bar{z}$.

1) Montrer que *f* est un endomorphisme de $\mathbf{C}$ considéré comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

2) Donner la matrice de *f* dans la base $(1, i)$.

3) En discutant selon *a* et *b*, déterminer le noyau et l'image de *f*.

4) Montrer que toute application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ est du type précédent.

Solution : [Oral Mines 2011, RMS n° 379]

1) Il est clair que $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(\lambda z) = \lambda.f(z)$ si λ est *réel*.

2) Notons $a = \alpha + i.\beta$ et $b = \gamma + i.\delta$, α , β , γ et δ étant réels.

Le calcul de $f(1)$ et $f(i)$ donne la matrice de f : $A = \begin{bmatrix} \alpha+\gamma & \delta-\beta \\ \delta+\beta & \alpha-\gamma \end{bmatrix}$.

3) Notons que det $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 = |a|^2 - |b|^2$. On peut alors discuter selon le rang de A.

<u>1er cas : $a = b = 0$</u>. Alors f et A sont nulles, Ker f = **C**, Im f = {0}.

<u>2ème cas : $|a| \neq |b|$</u>. Alors A est inversible, f est bijective et Ker f = {0} et Im f = **C**.

Pour calculer la bijection réciproque, c'est-à-dire résoudre l'équation $f(z) = Z$, on peut inverser la matrice A. Mais on peut aussi rester dans **C** et noter que $a\,z + b\,\bar{z} = Z$ implique $\bar{b}\,z + \bar{a}\,\bar{z} = \bar{Z}$.

Le système $a\,z + b\,\bar{z} = Z$, $\bar{b}\,z + \bar{a}\,\bar{z} = \bar{Z}$ est de Cramer, donc $Z = \dfrac{1}{a\bar{a}-b\bar{b}}(\bar{a}\,Z - b\,\bar{Z})$.

<u>3ème cas : $|a| = |b| \neq 0$</u>. Alors A et f sont de rang 1, Ker f et Im f sont des droites réelles.

Pour les trouver, on peut chercher Ker A et Im A, mais il est plus élégant de rester dans **C**.

Posons $a = \rho.e^{i\alpha}$ et $b = \rho.e^{i\beta}$, $\rho > 0$ (α et β n'ayant pas la même signification que ci-dessus).

Alors si z est non nul $a\,z + b\,\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}}{z} = -\dfrac{b}{a} = e^{i(\beta-\alpha+\pi)}$.

Posant $z = r\,e^{i\theta}$, il vient $e^{i2\theta} = e^{i(\beta-\alpha+\pi)}$, $\theta = \dfrac{\beta-\alpha+\pi}{2} + k\pi$. Ainsi Ker $f = \mathbf{R}.e^{i\frac{\beta-\alpha+\pi}{2}}$.

Par ailleurs, si $z = r\,e^{i\theta}$, $Z = a\,z + b\,\bar{z} = r\rho.(e^{i(\theta+\alpha)} + e^{i(\beta-\theta)}) = 2\,r\rho.e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos(\theta + \dfrac{\alpha-\beta}{2})$

décrit la droite $\mathbf{R}.e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Ainsi, Im $f = \mathbf{R}.e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

4) Il suffit de vérifier que toute matrice $M \in M_2(\mathbf{R})$ s'écrit sous la forme $\begin{bmatrix} \alpha+\gamma & \delta-\beta \\ \delta+\beta & \alpha-\gamma \end{bmatrix}$.

<u>Remarque</u> : cet exercice élémentaire introduit au problème sur les relations entre applications **C**-linéaires et applications **R**-linéaires.

<u>Exercice 4</u> : <u>fractions paires et impaires</u>.

Une fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}(X)$ est dite **paire** si $F(-X) = F(X)$, **impaire** si $F(-X) = -F(X)$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fractions paires, $\mathcal{I}$ l'ensemble des fractions impaires.

1) Montrer que $\mathbf{C}(X) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

2) Montrer que $F \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists G \in \mathbf{C}(X)\ \ F(X) = G(X^2)$ et $F \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists H \in \mathbf{C}(X)\ \ F(X) = X.H(X^2)$

3) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-corps de **C**(X), isomorphe à **C**(X), et que **C**(X) est un $\mathcal{P}$–espace vectoriel de dimension 2.

<u>Solution</u> : Cet exercice met en lumière un léger paradoxe.

1) Ecrire $F(X) = \dfrac{F(X)+F(-X)}{2} + \dfrac{F(X)-F(-X)}{2}$, et noter que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

2) Notons d'abord qu'un polynôme est pair si et seulement s'il est un polynôme en X^2.

Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$. $F(X) = F(-X)$ implique $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{A(-X)}{B(-X)} = \dfrac{A(X)+A(-X)}{B(X)+B(-X)} = \dfrac{S(X^2)}{T(X^2)}$.

Ainsi F est une fraction en X^2. Réciproque évidente. Enfin F est impaire ssi F/X est paire.

3) L'application de substitution $G \in \mathbf{C}(X) \to G(X^2) \in \mathcal{P}$ est un isomorphisme de corps.

Et il découle de 1) et 2) que **C**(X) est un plan vectoriel sur $\mathcal{P}$ de base (1, X).

<u>Exercice 5</u> : Dans un espace vectoriel, soient n vecteurs constituant un système de rang r.

On en extrait p vecteurs constituant un système de rang s. Montrer que $r \leq s + n - p$.

[Oral CCP 1994]

Solution :

Soient $v_1, v_2, \dots, v_n$ les n vecteurs. Quitte à les ré-indexer, on peut supposer que les vecteurs extraits sont $v_1, \dots, v_p$, et que $v_1, \dots, v_s$ sont libres. De sorte que $v_{s+1}, \dots, v_p$ sont combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_s$. Donc $r = \text{rang}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{rang}(v_1, \dots, v_s, v_{p+1}, \dots, v_n) \le s + n - p$.

<u>Autre solution</u> : $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p) + \text{Vect}(v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_n)$.
Passons aux dimensions :

$$\dim \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) \le \dim \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p) + \dim \text{Vect}(v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_n).$$

c'est-à-dire $\quad r \quad \le \quad s \quad + \quad n - p$. CQFD

En termes de matrices, si A est de format $m\times p$ et B de format $m\times(n - p)$, alors :

$$\text{rang}(A \mid B) \le \text{rang}(A) + \text{rang}(B) \le \text{rang}(A) + (n - p) .$$

<u>Exercice 6</u> : Soit A une matrice à m lignes et n colonnes sur un corps **K**. Si r est le rang de A, montrer que le rang d'une sous-matrice à m lignes et p colonnes, obtenue en supprimant $n - p$ colonnes, est $\ge r + p - n$.

Bourbaki, A.II 206, ex. n° 7

Solution : Un instant de réflexion montre que cet exercice est le même que le précédent !
Cependant, nous allons en donner une autre preuve.
Identifions A à l'application linéaire canoniquement associée de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^m$.
La sous-matrice B est la matrice de la restriction de A à un sous-espace F de dimension p de $\mathbf{K}^n$.
Appliquons-lui le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \text{rg } B &= \text{rg } A|_F = \dim F - \dim \text{Ker } A|_F = p - \dim(F \cap \text{Ker } A) \\ &\ge p - \dim(\text{Ker } A) = p - (n - r) = r + p - n. \end{aligned}$$

<u>Exercice 7</u> : Soient E un espace vectoriel, $\mathfrak{F}$ l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de E.

1) Montrer que $d(F, G) = \dim(F + G) - \dim(F \cap G)$ est une distance sur $\mathfrak{F}$.
Montrer que $F \to \dim F$ est continue pour cette distance.

2) On munit $\mathfrak{F}$ d'une structure de graphe en convenant que F et G sont liés si l'un des deux est un hyperplan de l'autre. Montrer que $\mathfrak{F}$ est un graphe connexe par arcs, et que F et G sont liés par un chemin de longueur d(F, G).

3) On suppose qu'existe un chemin de longueur r reliant F et G : $F = V_0 , V_1 , V_2 , \dots , V_r = G$.
Montrer qu'alors il existe un chemin de longueur $s \le r$ reliant F et G, de la forme :
$F = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{p-1} \subset W_p \supset W_{p+1} \supset \dots \supset W_s = G$. [Raisonner par récurrence sur r.]

4) En déduire que d(F, G) est la longueur minimum d'un chemin reliant F et G.

Solution : 1) L'application $d : \mathfrak{F} \to \mathbf{N}$ satisfait aux trois axiomes des distances :

- $d(F, G) = \dim(F + G) - \dim(F \cap G) = 0 \iff F \cap G = F + G \iff F = G$.
- $d(F, G) = d(G, F)$.
- $d(F, H) \le d(F, G) + d(G, H)$ équivaut par Grassmann à :

$$\dim F + \dim H - 2 \dim(F\cap H) \le \dim F + \dim G - 2\dim(F\cap G) + \dim G + \dim H - 2\dim(G\cap H)$$

ou encore à : $\dim(F \cap G) + \dim(G \cap H) \le \dim G + \dim(F \cap H)$.

or : $$\begin{aligned} \dim(F \cap G) + \dim(G \cap H) &= \dim((F \cap G) + (G \cap H)) + \dim(F \cap G \cap H) \\ &\le \dim G + \dim(F \cap H). \end{aligned}$$

car $(F \cap G) + (G \cap H) \subset G$ et $F \cap G \cap H \subset F \cap H$.

L'application $F \to \dim F$ est continue car lipschitzienne pour cette distance.

En effet $\dim F - \dim G \le \dim(F + G) - \dim(F \cap G) = d(F, G)$, puis échanger F et G.

2) Soit $\Gamma = (\mathcal{F}, A)$ le graphe dont les sommets sont les sev de dim finie, et les arêtes, les paires de sev $\{F, G\}$ où l'un des deux est un hyperplan de l'autre.
On notera que $d(F, G) = 1 \Leftrightarrow \{F, G\}$ est une arête de ce graphe.

• Γ est connexe par arcs, car tout sev F de dimension finie est relié à $\{0\}$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F, $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $F_0 = \{0\}$, alors $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ est un chemin de longueur $k = \dim F$ reliant $\{0\}$ à F. Par transitivité, il y a un chemin de longueur $\dim F + \dim G$ reliant F à G.

• Montrons que F et G sont liés par un chemin de longueur $d(F, G)$.
Tout d'abord, si $F \subset G$, $d(F, G) = \dim G - \dim F$; on complète une base de F en une base de G, et on construit facilement un chemin de longueur $d(F, G)$ reliant F à G.
Soit $p = \dim F$, $q = \dim G$, $r = \dim(F + G)$. On vient de voir qu'il existe un chemin de longueur $r - p$ reliant F à F + G, et un chemin de longueur $r - q$ reliant F + G à G. En les composant, on obtient un chemin de longueur $2r - p - q = d(F, G)$ reliant F à G. On aurait aussi pu passer par $F \cap G$.

Nous allons voir dans la suite que ces chemins sont les plus courts.

3) On suppose qu'existe un chemin de longueur r reliant F et G : $F = V_0, V_1, V_2, \dots, V_r = G$.
Montrons qu'alors il existe un chemin de longueur $s \le r$ reliant F et G, de la forme :

$$F = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{p-1} \subset W_p \supset W_{p+1} \supset \dots \supset W_s = G.$$

Raisonnons par récurrence sur r. Si $r = 1$, $F \subset G$ ou $G \subset F$; c'est bon.
Supposons le résultat vrai au rang r. S'il y a une chaîne de longueur $r + 1$ reliant F à G :

$$F = V_0, V_1, \dots, V_{r+1} = G$$

il y a une chaîne de longueur r entre V_1 et G, donc (HR) il y a une chaîne de longueur $s \le r$ entre V_1 et G : $\quad V_1 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{k-1} \subset F_k \supset F_{p+1} \supset \dots \supset F_s = G.$

Si $V_0 \subset V_1$, c'est gagné.

Si $V_0 \supset V_1$, on a $F = V_0 \supset V_1 \subset F_1$. Si $V_0 = F_1$, on peut raccourcir la chaîne.

Sinon, remplacer $F = V_0 \supset V_1 \subset F_1$ par $F = V_0 \subset W \supset F_1$, et, de proche en proche :

$$F \subset W_1 \subset \dots \subset W_{h-1} \subset W_h \supset F_k \supset F_{k+1} \supset \dots \supset F_s = G.$$

4) <u>Montrons que d(F, G) est la longueur minimum d'un chemin reliant F et G</u>.

Soit $F = F_0, F_1, \dots, F_r = G$ un chemin de longueur r joignant F à G.
En vertu de 3), il existe un chemin de longueur $s \le r$ reliant F à G, de la forme :

$$F = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{p-1} \subset W_p \supset W_{p+1} \supset \dots \supset W_s = G.$$

On a $r \ge s = \dim F + 2p - \dim W_p$.

Or $\dim W_p = \dim F + p$ et $\dim W_s = \dim W_p - (s - h) = \dim F - \dim G + 2$.

$$d(F, G) = 2 \dim(F + G) - \dim F - \dim G \le 2 \dim W_p - \dim F - \dim G = s \le r. \text{ CQFD.}$$

En somme, d est la « **distance géodésique** » du graphe Γ.
<u>Remarques</u> :
1) Si u est un isomorphisme de E sur E', $F \to u(F)$ est une isométrie de V(E) sur V(E').
2) On aurait pu aussi munir d'une distance l'ensemble des sous-espaces de codimension finie de E.

$$d(F, G) = \text{codim}(F \cap G) - \text{codim}(F + G).$$

3) D'ailleurs $F \to F°$ envoie les sev de dimension finie de E sur les sev de codimension finie de E*…
4) Cet exercice a un analogue ensembliste intéressant : sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties finies de X, $d(A, B) = \text{card}(A \,\Delta\, B)$ est une distance, et c'est la distance géodésique pour le graphe dont les arêtes sont les paires $\{A, B\}$, où l'un des ensembles se déduit de l'autre en lui adjoignant un élément.

<u>Exercice 8</u> : Soient E un espace vectoriel de dimension n, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E tels que $\dim F_1 + \dim F_2 + \dots + \dim F_p > n(p-1)$. Montrer que $F_1 \cap \dots \cap F_p \neq \{0\}$.

Solution : [CCP, PSI 2011, RMS n° 1192]

1ère méthode : dualité.

Notons G_k l'orthogonal de F_k dans E*. L'hypothèse se traduit par $\sum_{1\le k\le p} \dim G_k < n$.

On veut montrer que $(F_1 \cap \dots \cap F_p)° \neq E^*$, i.e. que $\dim \sum_{1\le k\le p} G_k < n$.

Cela découle de ce que $\dim \sum_{1\le k\le p} G_k \le \sum_{1\le k\le p} \dim G_k$!!!

Variante : Rapportons E à une base.

Soient $d_k = \dim F_k$ et $A_k \in M_K(n - d_k, n)$ une matrice de rang $n - d_k$ telle que :

$A_k.X = 0 \Leftrightarrow X \in F_k$, autrement dit un système fondamental d'équations de F_k.

Considérons alors la matrice-blocs $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_p \end{bmatrix} \in M(pn - D, n)$, où $D = \sum d_k$.

Il s'agit de montrer que Ker A n'est pas réduit à {0}. Or rg $A \le \min(pn - D, n) = np - D < n$.

2ème méthode : Considérons l'application :

$$u : (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \to (x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots, x_1 - x_p) \in E^{p-1} .$$

Elle est linéaire. Son noyau Ker u = { (x, …, x) ; x ∈ est isomorphe à $F_1 \cap \dots \cap F_p$.

Comme $\dim(F_1 \times \dots \times F_p) > \dim E^{p-1}$, u ne saurait être injective.

Par conséquent, il existe un vecteur non nul appartenant à $F_1 \cap \dots \cap F_p$.

3ème méthode (Jouvinroux) : récurrence sur p.

Pour $p = 1$, c'est immédiat.

Pour $p = 2$, il s'agit de montrer que $\dim F_1 + \dim F_2 > n \Rightarrow F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$.

Cela se montre par contraposition ou par Grassmann.

Supposons le résultat vrai au rang p.

Si $\dim F_1 + \dots + \dim F_p + \dim F_{p+1} > n.p$, posons : $G_1 = F_1, \dots, G_{p-1} = F_{p-1}$ et $G_p = F_p \cap F_{p+1}$.

Alors $\dim G_1 + \dots + \dim G_p = \dim F_1 + \dots + \dim F_{p-1} + \dim(F_p \cap F_{p+1})$

$= \dim F_1 + \dots + \dim F_{p-1} + \dim F_p + \dim F_{p+1} - \dim(F_p + F_{p+1}) > np - n = n(p - 1)$.

Par hypothèse de récurrence, $G_1 \cap \dots \cap G_p \neq \{0\}$, donc $F_1 \cap \dots \cap F_{p+1} \neq \{0\}$. Cqfd

4ème méthode : Boutte fait une récurrence sur n.

Exercice 9 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de même dimension. Montrer qu'ils admettent un supplémentaire commun.

Solution : Soient n = dim E , p = dim F = dim G , r = dim(F ∩ G) , p = r + s.

Soit $(a_1, \dots, a_r)$ une base de F ∩ G . Complétons-la en :

- une base $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$ de F ;
- une base $(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_s)$ de G ;

On sait (cf. preuve de Grassmann) que $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_s)$ est une base de F + G.

- une base $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_s, d_1, \dots, d_t)$ de E.

Le lecteur est prié de vérifier que $H = \text{Vect}(b_1 + c_1, \dots, b_s + c_s, d_1, \dots, d_t)$ est un supplémentaire commun de F et G.

Autre preuve, topologique. Elle suppose **K** = **R** ou **C**. Equipons E de sa topologie usuelle.

Soient $(a_1, \dots, a_p)$ une base de F, et $(b_1, \dots, b_p)$ une base de G, n = p + q. Je dis que

$$U = \{ (x_1, \dots, x_q) \in E^q \ ; (a_1, \dots, a_p, x_1, \dots, x_q) \text{ est une base de E } \}$$

est un ouvert dense de E^q. Cela est laissé en exercice.

Idem pour $V = \{ (x_1, \dots, x_q) \in E^q ; (a_1, \dots, a_p, x_1, \dots, x_q)$ est une base de E $\}$.
Par suite $U \cap V$ est un ouvert dense de E^q ; donc il est non vide.

Remarques : 1) Plus généralement, en vertu du théorème de Baire, que je révère[2], si (F_k) est une suite de sous-espaces de même dimension, les F_k admettent un supplémentaire commun.
2) Il existe de nombreuses autres preuves de ce résultat : densité algébrique, théorie de la mesure, récurrences…

Exercice 10 : Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie, f une application linéaire donnée E dans F. Quelle est la dimension de $V = \{ g \in \mathcal{L}(F, E) ; f \circ g \circ f = 0 \}$?

Solution : Il est clair que $V = \{ g \in \mathcal{L}(F, E) ; g(\text{Im} f) \subset \text{Ker} f \}$.
Il en résulte que V est isomorphe à $\mathcal{L}(\text{Im} f, \text{Ker} f) \times \mathcal{L}(F', E)$,
où F' est un supplémentaire de Im f dans E. Du coup,

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim \text{Im} f \times \dim \text{Ker} f + \dim F' \times \dim E \\ &= (\text{rg} f)\times(\dim E - \text{rg} f) + (\dim F - \text{rg} f)\times \dim E \\ &= (\dim E)\times(\dim F) - (\text{rg} f)^2 .\end{aligned}$$

Solution matricielle : choisissons des bases de E et F telles que $\text{Mat}(f) = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

Soit alors $\text{Mat}(g) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ dans les mêmes bases. Alors $f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow A = O$.

$$\dim V = \dim \left\{ \begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix} \right\} = (\dim E)\times(\dim F) - (\text{rg} f)^2 .$$

Exercice 11 : Soient E et H deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie, non réduits à $\{0\}$, F et G deux sous-espaces de E. Soit $\Phi : u \in \mathcal{L}(E, H) \to (u|_F , u|_G) \in \mathcal{L}(F, H) \times \mathcal{L}(G, H)$.
A quelle condition Φ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Solution : L'application Φ est linéaire.
Ker Φ est le sev des applications linéaires de E dans H nulles sur F et G, i.e nulles sur F + G.
Si E' est un supplémentaire de F + G dans E, il est clair que Ker Φ est isomorphe à $\mathcal{L}(E', H)$, puisqu'une application linéaire nulle sur F + G est entièrement déterminée par sa restriction à E'.
Notons $p = \dim E$, $n = \dim H$ et $q = \dim(F + G)$.
On a $\dim \text{Ker} \Phi = n(p - q)$ et (théorème du rang !) $\dim \text{Im} \Phi = np - n(p - q) = nq$.

- Φ est injective si et seulement si $p = q$, i.e. E = F + G.
- Φ est surjective si et seulement si $n.q = (\dim F + \dim G).n$, i.e. $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$, autrement dit ssi F et G sont en somme directe.
- Enfin, Φ est bijective si et seulement si F et G sont supplémentaires.

Remarques :
1) Nous sommes passés par le noyau de Φ parce qu'il semble ardu de passer par son image. On peut cependant passer aussi par l'image de Φ. Je dis que :

$$\text{Im} \Phi = \{ (v, w) \in \mathcal{L}(F, H) \times \mathcal{L}(G, H) ; v|_{F\cap G} = w|_{F\cap G} \}.$$

L'inclusion $\subset$ est facile. Réciproquement, si v et w coincident sur $F \cap G$, on peut les prolonger à F + G, puis à E ; cf. un exercice antérieur. Si F' et G' sont des supplémentaires respectifs de $F \cap G$ dans F et dans G, alors derechef :

$$\dim \text{Im} \Phi = \dim(F \cap G).\dim H + \dim F'.\dim H + \dim G'.\dim H = \dim(F + G).\dim H.$$

2) Il resterait à montrer que ces résultats restent vrais en dimension quelconque.

[2] Je révère Baire… (Ouaf ! Ouaf !)

Exercice 12 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, A et B deux sous-espaces de E. Indiquer une cns portant sur A et B pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant Ker f = A et Im f = B.

Solution : La cns est dim A + dim B = dim E.
La condition est nécessaire en vertu du théorème du rang.
Elle est suffisante, car si dim E = n, dim A = $n - r$, dim B = r, alors soient
$\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n)$ une base de E obtenue en complétant une base $(a_{r+1}, \dots, a_n)$ de A
$\mathcal{B}' = (b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ une base de E obtenue en complétant une base $(b_1, \dots, b_r)$ de B.
L'endomorphisme f de E défini par Mat(f, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$) = $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ est tel que Ker f = A, Im f = B.
L'intérêt de cet exercice est de montrer que, pour un endomorphisme f, la seule relation vérifiée par Im f et Ker f porte sur leurs dimensions.

Exercice 13 : **propriétés additives du rang**.
Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels, u et v deux applications linéaires de E dans F.
1) Comparer Im(u + v) et Im u + Im v , Ker u $\cap$ Ker v et Ker(u + v).
2) Montrer que si u et v sont de rang fini, il en est de même de u + v, et rg(u + v) $\le$ rg u + rg v.
En déduire que | rg u − rg v | $\le$ rg(u + v) $\le$ rg u + rg v.
3) Montrer qu'une application u de rang fini r est somme de r applications de rang 1, mais ne peut s'écrire comme somme de moins de r applications de rang 1.

Solution :
1) On a toujours Im(u + v) $\subset$ Im u + Im v et Ker u $\cap$ Ker v $\subset$ Ker(u + v).
Les inclusions réciproques sont fausses en général : soit E un espace vectoriel non réduit à {0}, u un automorphisme de E, par exemple l'identité, et v = − u.
Im(u + v) = {0}, Im u + Im v = E ; Ker u $\cap$ Ker v = {0}, Ker(u + v) = E.
2) Si u et v sont de rang fini, Im u et Im v sont de dimension finie, ainsi que Im(u + v) en vertu de 1).
De plus rg(u + v) = dim Im(u + v) $\le$ dim(Im u + Im v)
= dim Im u + dim Im v − dim(Im u $\cap$ Im v) (Grassmann)
$\le$ dim Im u + dim Im v = rg u + rg v.
On en déduit que rg u = rg(u + v − v) $\le$ rg(u + v) + rg(−v) = rg(u + v) + rg v.
En échangeant les rôles de u et v, il vient | rg u − rg v | $\le$ rg(u + v) $\le$ rg u + rg v.
3) Décompositions minimales. Soit u une application linéaire de rang fini r.
En vertu de 2), u n'est pas somme de moins de r applications de rang 1.
Soit $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ une base de Im u. Pour tout vecteur x de E, écrivons u(x) = $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i . b_i$.
Chacune des applications $f_i : x \to \lambda_i$ est une forme linéaire sur E.
Ainsi, u est somme des r applications $u_i : x \to f_i(x).b_i$.
Ces applications sont toutes de rang 1, car il existe un vecteur x de E tel que $u(x) = b_i$.

Exercice 14 : **propriétés multiplicatives du rang**.
Tous les espaces vectoriels ici considérés sont de dimension finie.
1) Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels, u $\in \mathcal{L}$(E, F), L un sev de E.
Montrer que dim u(L) = dim L − dim(L $\cap$ Ker u).
2) Soient E, F, G trois **K**-espaces vectoriels, u $\in \mathcal{L}$(E, F), v $\in \mathcal{L}$(F, G).
a) Montrer que rg(v o u) $\le$ min(rg u , rg v).
b) Plus précisément, établir que :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) = \mathrm{rg}\, v + \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v) - \dim F.$$

En déduire l'encadrement :

$$\max(0 , \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim F) \leq \mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}\, u , \mathrm{rg}\, v).$$

Caractériser les cas extrêmes $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, v$, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$, etc.

3) Soit $w \in \mathfrak{L}(G, H)$. Montrer l'inégalité de Frobenius (1911) :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) + \mathrm{rg}(w \circ v) \leq \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(w \circ v \circ u) .$$

Cas particuliers : $w = 0$; $u = 0$; $v = \mathrm{id}_F$; $v = \mathrm{id}_F$ et $w \circ u = 0$.

Application : Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$. Montrer $\mathrm{rg}\, u^{p+q} + \mathrm{rg}\, u^{q+r} \leq \mathrm{rg}\, u^{q} + \mathrm{rg}\, u^{p+q+r}$.

En particulier $(\forall k)$ $2.\mathrm{rg}\, u^{k+1} \leq \mathrm{rg}\, u^{k} + \mathrm{rg}\, u^{k+2}$.

Solution :

1) Il suffit d'appliquer le théorème du rang à la restriction $f = u|_L$, qui est linéaire de L dans F.

$$\dim L = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim u(L) + \dim(L \cap \mathrm{Ker}\, u).$$

2) Soient E, F, G trois **K**-ev de dim finie, $u \in \mathfrak{L}(E, F)$, $v \in \mathfrak{L}(F, G)$.

a) Montrons que $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}\, u , \mathrm{rg}\, v)$.

D'une part, $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$; en passant aux dimensions, $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}\, v$.

D'autre part, $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$; en passant aux dimensions, $\dim E - \mathrm{rg}\, u \leq \dim E - \mathrm{rg}(v \circ u)$.

Remarque : peut-on démontrer $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}\, u$ sans passer par les noyaux ? La réponse est positive. En effet, si $(b_1, \dots, b_r)$ est une base de Im u, il est clair que $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Vect}(v(b_1), \dots, v(b_r))$, donc $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq r = \dim \mathrm{Im}\, u = \mathrm{rg}\, u$. Variante : $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v|_{\mathrm{Im}\, u})$.

b) Expression exacte de $\mathrm{rg}(v \circ u)$.

Montrons que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) = \mathrm{rg}\, v + \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v) - \dim F$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(v \circ u) &= \dim \mathrm{Im}(v \circ u) = \dim v(\mathrm{Im}\, u) \\
&= \dim \mathrm{Im}\, u - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) = \mathrm{rg}\, u - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) && \text{en vertu de 1).} \\
&= \dim \mathrm{Im}\, u - [\, \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Ker}\, v) - \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v)\,] && \text{par Grassmann} \\
&= - \dim(\mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v) \\
&= \mathrm{rg}\, v + \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v) - \dim F.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

♣ $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}\, u$, avec égalité ssi $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0\}$;

♦ $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}\, v$, avec égalité ssi $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v = F$;

• $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, v$ ssi $F = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, v$;

♥ $\mathrm{rg}(v \circ u) \geq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim F$, avec égalité ssi $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Im}\, u$;

♠ $\mathrm{rg}(v \circ u) \geq 0$, avec égalité ssi $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

• $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim F = 0$ ssi $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, v$.

3) L'inégalité $\mathrm{rg}(v \circ u) + \mathrm{rg}(w \circ v) \leq \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(w \circ v \circ u)$.

n'a rien d'évident, car $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(v)$, tandis que $\mathrm{rg}(w \circ v) \geq \mathrm{rg}(w \circ v \circ u)$.

Cependant, elle va découler de ce qui précède, car elle s'écrit aussi :

$\mathrm{rg}\, v + \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v) - \dim F + \mathrm{rg}(w \circ v) \leq \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(w \circ v) + \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}(w \circ v)) - \dim F$.

ou encore, après simplification : $\dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v) \leq \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}(w \circ v))$.

Mais cela est évident, car $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(w \circ v)$.

♣ Si $w = 0$ ou $u = 0$, on retrouve 2.a)

♦ Si $v = \mathrm{id}_F$, il vient $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, w \leq \dim F + \mathrm{rg}(w \circ u)$: c'est la minoration de 2.b).

♠ Application aux endomorphismes $u \in \mathfrak{L}(E)$. On a $\mathrm{rg}(u^{p+q}) + \mathrm{rg}(u^{q+r}) \leq \mathrm{rg}(u^{q}) + \mathrm{rg}(u^{p+q+r})$.

En particulier, $2.\mathrm{rg}(u^{k+1}) \leq \mathrm{rg}(u^{k}) + \mathrm{rg}(u^{k+2})$: la suite $(\mathrm{rg}(u^{k}))$ est convexe.

<u>Exercice 15</u> : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme de E.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note $I_k = \text{Im } u^k$ et $N_k = \text{Ker } u^k$.

1) Montrer que la suite ($\text{rg } u^k$) est décroissante, et stationnaire.
2) Montrer que $\text{rg } u^k = \text{rg } u^{k+1} \Rightarrow \text{rg } u^{k+1} = \text{rg } u^{k+2}$.
3) Montrer que la suite ($\text{rg } u^k - \text{rg } u^{k+1}$) est décroissante.

<u>Solution</u> : exercice très classique, et presque complément de cours !

1) La suite (I_k) est décroissante, et la suite (N_k) croissante pour l'inclusion. $N_0 = \{0\}$, $I_0 = E$.
Du coup, la suite d'entiers naturels ($\text{rg } u^k$) est décroissante, et constante à partir d'un certain rang en vertu du principe de Fermat.

2) $\text{rg } u^k = \text{rg } u^{k+1} \Leftrightarrow N_k = N_{k+1}$ (inclusion + égalité des dimensions).
Comme $N_{k+1} = u^{-1}(N_k)$, $N_k = N_{k+1} \Rightarrow u^{-1}(N_k) = u^{-1}(N_{k+1}) \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}$.
Ainsi, la suite est strictement décroissante, puis constante.

3) a déjà été montré dans l'exercice précédent. Montrons-le directement, au moyen du :

<u>Lemme</u> : $u(N_{k+1}) \subset N_k$. De plus, si $F \oplus N_k = N_{k+1}$, $u(F) \cap N_{k-1} = \{0\}$ et $u|_F$ est injective.

Ce lemme, utile dans la réduction de Jordan des nilpotents, est laissé au lecteur.

Concluons ! u envoie injectivement F dans un sous-espace de N_k en somme directe avec N_{k-1}.

Du coup, $\dim N_{k+1} - \dim N_k = \dim F = \dim u(F) \leq \dim N_k - \dim N_{k-1}$.

<u>Exercice 16</u> : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E.
1) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) $E = \text{Im } u + \text{Ker } u$;
ii) $\text{Im } u = \text{Im } u^2$;
iii) $\text{rg } u = \text{rg } u^2$;
iv) $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$;
v) $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$;
vi) $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$;
vii) Il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que $\text{Mat}(u, \mathfrak{B}) = \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où $A \in Gl_r(\mathbf{K})$, $0 \leq r \leq n$.

2) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces conditions, ne les vérifiant pas.

<u>Solution</u> :

1) **<u>Les équivalences i) ⇔ ii) et iv) ⇔ v) sont vraies même en dimension infinie</u>.**

i) ⇒ ii). On a toujours $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$. Réciproquement, soit $y \in \text{Im } u$. Ecrivons $y = u(x)$.
Comme $E = \text{Ker } u + \text{Im } u$, on peut écrire $x = k + u(z)$, où $k \in \text{Ker } u$. Alors $y = u(x) = u^2(z)$.
Ainsi, $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$.

ii) ⇒ i). Soit $x \in E$. Par hypothèse, $u(x) \in \text{Im } u = \text{Im } u^2$, donc $\exists y \;\; u(x) = u^2(y)$.
Alors $u(x - u(y)) = 0$, et $x = u(y) + (x - u(y)) \in \text{Im } u + \text{Ker } u$. cqfd.

iv) ⇒ v). On a toujours $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$. Réciproquement, soit $x \in \text{Ker } u^2$.
Alors $u(x) \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$, donc $u(x) = 0$. Ainsi $\text{Ker } u^2 \subset \text{Ker } u$. cqfd.

v) ⇒ iv). Soit $y \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u$. Ecrivons $y = u(x)$. On a $u(y) = u^2(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$.
Finalement $y = u(x) = 0$. Cqfd.

L'équivalence ii) ⇔ iii) est facile : $\text{Im } u = \text{Im } u^2$ implique $\text{rg } u \subset \text{rg } u^2$.
Et l'égalité $\text{rg } u = \text{rg } u^2$, jointe à l'inclusion toujours vraie $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$, implique $\text{Im } u = \text{Im } u^2$.

vi) implique i) et iv). Mais i) et iv) impliquent vi) en vertu du **théorème du rang**.
Ainsi, les conditions i) à vi) sont équivalentes.

vi) $\Rightarrow$ vii). Supposons E = Im u $\oplus$ Ker u.
Je dis que Im u est un sous-espace u-stable et que u induit un automorphisme de Im u.
Im u est toujours u-stable, car u(Im u) $\subset$ Im u. Soit v l'endomorphisme induit.
Ker v = Im u $\cap$ Ker u = {0}, donc v est injectif.
Im v = u(Im u) = Im u^2 = Im u en vertu de ii) ; donc v est surjectif.
[Comme nous sommes en dimension finie, l'injectivité seule concluait.]
Soient alors $\mathcal{B}$' une base de Im u, $\mathcal{B}$'' une base de Ker u, et $\mathcal{B}$ = ($\mathcal{B}$', $\mathcal{B}$'').
La matrice de u relativement à cette base est de la forme $\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où A $\in$ $M_r(\mathbf{K})$, $0 \le r \le n$, puis que Im u est u-stable. Et A est inversible, comme matrice de v relativement à $\mathcal{B}$'.

vii) $\Rightarrow$ vi). Car si M = $\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, Ker M = $\left\{ \begin{bmatrix} O \\ Y \end{bmatrix} ; Y \in \mathbf{K}^{n-r} \right\}$ et Im M = $\left\{ \begin{bmatrix} X \\ O \end{bmatrix} ; X \in \mathbf{K}^{r} \right\}$

Donc $\mathbf{K}^n$ = Im M $\oplus$ Ker M.

2) <u>Exemples et contre-exemples</u>.
Les exemples sont nombreux :
– Les projecteurs vérifient E = Im p $\oplus$ Ker p, mais ce ne sont pas les seuls !
– Les automorphismes.
– Les endomorphismes diagonalisables.
Le contre-exemple le plus simple est celui de l'endomorphisme de matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Il vérifie Im u = Ker u = $\mathbf{K}$(1, 0).
Plus généralement, si u est nilpotent non nul, il ne peut vérifier vii), car une matrice de la forme $\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où A $\in$ $Gl_r(\mathbf{K})$, $1 \le r \le n$, n'est jamais nilpotente.

<u>Remarques finales</u> :
1) Il existe des caractérisations plus savantes de ces endomorphismes : cf. ex. sur la réduction.
2) Ces endomorphismes sont dits « pseudo-inversibles »

<u>Exercice 17</u> : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E.
On suppose E = Im f + Im g = Ker f + Ker g. Montrer que les sommes sont directes.
[Oral CCP 2002]

<u>Solution</u> : Appliquons le théorème du rang à f et g :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } g + \dim \text{Im } g \qquad (1).$$

Par Grassmann, $\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \text{Im } g - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$ (2)
Et aussi $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g)$ (3)
Ajoutons (2) et (3) et tenons compte de (1). Il vient $\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = 0$.
On conclut aussitôt.

<u>Remarque</u> : le résultat est faux en dimension infinie, comme le montre l'exemple de E = $\mathbf{R}$[X] et des endomorphismes $f : P \to P(0)$ et $g : P \to P''$.

<u>Exercice 18</u> : Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie, f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrer que rg $g \le$ rg f $\Leftrightarrow$ $\exists h \in Gl(F)$ $\exists k \in \mathcal{L}(E)$ $h \circ g = f \circ k$.

<u>Solution</u> :
• Le sens $\Leftarrow$ est facile, car rg g = rg(h o g) = rg(f o k) $\le$ rg f .
En effet, Im g et Im(h o g) = h(Im g) ont même dimension car h est un isomorphisme.
De plus, Im(f o k) $\subset$ Im f.
• Montrons $\Rightarrow$ en utilisant des bases convenables. Soient p = dim E, n = dim F, r = rg f, s = rg g.

Soient $\mathcal{B}_E = (a_1, \dots, a_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (b_1, \dots, b_n)$ une base de F telles que :

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

Soient $\mathcal{B}'_E = (a'_1, \dots, a'_p)$ une base de E, $\mathcal{B}'_F = (b'_1, \dots, b'_n)$ une base de F telles que :

$$\text{Mat}(g, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

Définissons $h \in \text{Gl}(F)$ par $(\forall i)\ h(b'_i) = b_i$, et $k \in \mathcal{L}(E)$ par $k(a'_j) = a_j$ pour $1 \le j \le s$, 0 pour $j > s$.
Je laisse le lecteur vérifier que $h \circ g = f \circ k$, soit sur la base, soit matriciellement.

<u>Exercice 19</u> : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un automorphisme f et un projecteur p de E tels que $u = p \circ f$.

<u>Solution</u> : Posons $E = \text{Ker } u \oplus E' = \text{Im } u \oplus F'$.

Alors $v = u|_{E'}^{\text{Im}u} \in \text{Isom}(E', \text{Im } u)$. Soit w un isomorphisme de Ker u sur F'.

Soit $f = v \oplus w$: $x = x_{\text{Ker } u} + x_{E'} \to w(x_{\text{Ker } u}) + v(x_{E'}) = w(x_{\text{Ker } u}) + u(x_{E'})$.
$f \in \text{Gl}(E)$ comme somme directe de deux isomorphismes.
Soit p le projecteur sur Im u parallèlement à F'.
Alors $(p \circ f)(x) = (p \circ w)(x_{\text{Ker } u}) + (p \circ u)(x_{E'}) = u(x_{E'}) = u(x)$. cqfd.

<u>Matriciellement</u>, soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ des bases de E telles que $\text{Mat}(u) = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = J_r$.

On a $u(a_i) = b_i$ pour $1 \le i \le r$, $u(a_i) = 0$ pour $i > r$.
Soient f l'isomorphisme de E tel que $(\forall i)\ f(a_i) = b_i$,
et p l'endomorphisme de E défini par $p(b_i) = b_i$ pour $1 \le i \le r$, $p(b_i) = 0$ pour $i > r$.
p est un projecteur et $(p \circ f)(a_i) = b_i = u(a_i)$ pour $1 \le i \le r$, $(p \circ f)(a_i) = 0 = u(a_i)$ pour $i > r$.

Plus sobrement encore, si $Q^{-1}AP = J_r$, $A = Q.J_r.P^{-1} = (Q.J_r.Q^{-1})(QP^{-1})$.

<u>Remarques</u> : 1) On montre aussi que $u = f \circ q$, où f est un automorphisme et q un projecteur de E.
2) Ceci montre que tout endomorphisme est composé de deux endomorphismes pseudo-inversibles (au sens des pseudo-inverses de groupe).

<u>Exercice 20</u> : <u>idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$</u>. Soit E un **K**-espace vectoriel.
1) Soit f un endomorphisme non nul de E. Montrer que, pour toute droite D et tout hyperplan H de E, il existe un couple (u, v) d'endomorphismes de E tel que $u \circ f \circ v$ ait H pour noyau, D pour image.
2) On appelle <u>idéal bilatère</u> de $\mathcal{L}(E)$ un sous-espace vectoriel $\mathfrak{I}$ tel que :

$$\forall f \in \mathfrak{I} \quad \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \quad u \circ f \text{ et } f \circ v \in \mathfrak{I}.$$

a) Montrer que les endomorphismes de rang fini de E forment un idéal bilatère $\mathfrak{I}_0$ de $\mathcal{L}(E)$.
b) Montrer que tout idéal bilatère $\neq \{0\}$ contient $\mathfrak{I}_0$.
3) Si E est de dimension finie, montrer que $\mathcal{L}(E)$ n'admet que deux idéaux bilatères, 0 et $\mathcal{L}(E)$.
Si dim E > 1, y a-t-il un homomorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ dans **K** ?

<u>Solution</u> :
1) Soient a un vecteur non nul tel que $D = \mathbf{K}.a$, b^* une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker } b^*$.
L'endomorphisme g défini par $g(x) = \langle b^*, x \rangle a$ vérifie $\text{Ker } g = H$, $\text{Im } g = D$.
Soient x_0 un vecteur tel que $y_0 = f(x_0) \neq 0$, x_1 un vecteur tel que $\langle b^*, x_1 \rangle = 1$. Alors $E = H \oplus \mathbf{K}.x_1$.
Soient v l'endomorphisme de E défini par $v|_H = 0$ et $v(x_1) = x_0$.

u un endomorphisme quelconque vérifiant $u(y_0) = a$.

Alors g = u o f o v , car tous deux sont nuls sur H et tels que $g(x_1) = a = (u \circ f \circ v)(x_1)$.

2) a) De $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}\, f$ si $\lambda \neq 0$, 0 sinon, on déduit que $\mathfrak{I}_0$ est un sev de $\mathcal{L}$(E). Si f est de rang fini, u o f aussi car Im(u o f) = u(Im f) est de dimension finie. Enfin, f o v aussi car Im(f o v) $\subset$ Im f.

Remarque : il existe d'autres idéaux bilatères, les endomorphismes de rang dénombrable, etc.

b) Soit $\mathfrak{I}$ un idéal bilatère $\neq \{0\}$.

Un endomorphisme de rang fini est somme d'endomorphismes de rang 1.

Or tout endomorphisme f de rang 1 est élément de $\mathfrak{I}$.

En effet, H = Ker f est un hyperplan et D = Im f une droite. Il découle de 1 qu'il existe un élément g de $\mathfrak{I}$ tel que H = Ker g et D = Im g ; g et f sont proportionnels, donc f est aussi élément de $\mathfrak{I}$.

3) Cas de la dimension finie.

Un idéal bilatère est soit {0}, soit contient $\mathfrak{I}_0$, mais $\mathfrak{I}_0 = \mathcal{L}(E)$ si E est de dimension finie.

Soit $\chi : \mathcal{L}(E) \to \mathbf{K}$ un morphisme d'algèbres ; en particulier, $\chi(\mathrm{id}_E) = 1$.

Ker χ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}$(E), différent de $\mathcal{L}$(E) donc égal à {0} ; donc χ est injectif.

Si dim E > 1, c'est impossible.

Remarques : i) En dimension finie, une preuve matricielle est possible.

ii) La recherche des idéaux à droite et à gauche fait l'objet d'un problème (ENSAE 1983).

Exercice 21 : Soient E un **R**-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$(E) tels que $\forall (f, g) \in F \times G \quad f \circ g + g \circ f = 0$.
Montrer que l'on a, soit F = {0}, soit G = {0}.

Solution : Soit I l'identité de $\mathcal{L}$(E). Nous allons montrer que I appartient à $F \cup G$.

Si $I \in F$, alors $(\forall g \in G)\ 2g = I \circ g + g \circ I = 0$, donc G = {0} ; de même $I \in G \Rightarrow F = \{0\}$.

• Ecrivons I = p + q , où $(p, q) \in F \times G$.

Alors $p \circ q = p \circ (I - p) = p - p^2$ et $q \circ p = (I - p) \circ p = p - p^2$ sont opposés, donc $p = p^2$.

Finalement p et q sont deux projecteurs opposés.

• Soit $g \in G$. Je dis que $g(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p$ et $g(\mathrm{Im}\, p) = \{0\}$.

En effet $x \in \mathrm{Ker}\, p \Rightarrow (p \circ g)(x) = -(g \circ p)(x) = 0 \Rightarrow g(x) \in \mathrm{Ker}\, p$.

$y \in \mathrm{Im}\, p \Rightarrow g(y) = (g \circ p)(y) = -(p \circ g)(y) \Rightarrow g(y) = 0$.

En effet, il suffit de recomposer par p : $(p \circ g)(y) = -(p \circ g)(y) = 0$ implique $g(y) = (p \circ g)(y) = 0$, ou de noter que –1 n'est pas valeur propre d'un projecteur.

Du coup, G est inclus dans la sous-algèbre des endomorphismes de E laissant stables Ker p et nuls sur Im p : $\dim G \leq (\dim \mathrm{Ker}\, p)^2$.

• De même : $\dim F \leq (\dim \mathrm{Ker}\, q)^2 = (\dim \mathrm{Im}\, p)^2$.

Finalement $n^2 = \dim \mathcal{L}(E) \leq \dim F + \dim G \leq r^2 + (n - r)^2$, où r = rg p.

On en déduit aussitôt r = 0 ou n, c'est-à-dire p = 0 ou I. Si p = 0 , $I \in G$; si p = I , $I \in F$. cqfd.

Remarque : On a seulement utilisé $\mathcal{L}$(E) = F + G, et le fait que **R** est de caractéristique $\neq 2$.

Exercice 22 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$(E) tels que $\forall (f, g) \in F \times G \quad f \circ g = g \circ f$.
Montrer que l'on a F = {0} ou $\mathbf{K}.\mathrm{Id}_E$, ou bien G = {0} ou $\mathbf{K}.\mathrm{Id}_E$.

Solution : Cet exercice fait le pendant du précédent, mais sa solution anticipe sur la suite.

La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire en raisonnant matriciellement.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de $M_n(\mathbf{K})$, de dimensions ≥ 1, tels que

$$\forall(A, B) \in F\times G \quad A.B = B.A.$$

1) Considérons la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

N est nilpotente d'indice n. Soit N = A + B, où $(A, B) \in F\times G$.
Comme A et B commutent, A et B commutent avec N.
Comme N est monogène, A et B sont des polynômes de N : A = P(N), B = Q(N).
Comme le polynôme minimal de N est X^n, on peut supposer P et Q de degrés $\leq n-1$.
Ils sont alors uniques. Ecrivons $P(X) = \sum_{0\leq k\leq n-1} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{0\leq k\leq n-1} b_k X^k$.

La condition N = P(N) + Q(N) impose $a_1 + b_1 = 1$ et $a_k + b_k = 0$ pour $k \neq 1$.

Donc $a_1 \neq 0$ ou $b_1 \neq 0$.

Si $a_1 \neq 0$, la matrice $A' = A - a_0.I = \sum_{1\leq k\leq n-1} a_k X^k = a_1.N + \dots$ est aussi nilpotente d'indice n .

Son commutant est **K**[A'] = **K**[N]. Comme tout élément de G commute à A, donc à A', $G \subset$ **K**[N].

2) Considérons maintenant la matrice ${}^tN$.

Pour la même raison, F ou G est inclus dans **K**[${}^tN$].

Si le même espace F ou G est inclus dans **K**[N] et dans **K**[${}^tN$], il est inclus dans leur intersection $\mathbf{K}I_n$.

Si l'un, disons F, est inclus dans **K**[N] et l'autre, G, dans **K**[${}^tN$], on aurait :

$n^2 = \dim M_n(\mathbf{K}) = \dim F + \dim G \leq \dim \mathbf{K}[N] + \dim \mathbf{K}[{}^tN] - \dim(\mathbf{K}[N] \cap \mathbf{K}[{}^tN]) = 2n - 1,$

donc $n = 1$, et le résultat est encore vrai.

<u>Référence</u> : R. Antetomaso, RMS octobre 2009, p. 105.

<u>Exercice 23</u> : Soient E = $\mathcal{C}$([a, b], **R**), F = $\mathcal{C}$(**R**, **R**), et P∈**R**[X, Y] un polynôme à deux indéterminées.
Montrer que u : $f \to g$, où $g(x) = \int_a^b \sin(x+y).f(y).dy$, et v : $f \to h$, où $h(x) = \int_a^b P(x,y).f(y).dy$,
sont des applications linéaires de rang fini de E dans F.

<u>Solution</u> : Les linéarités de u et v sont évidentes.

$g(x) = \sin x.\int_a^b \cos y.f(y).dy + \cos x.\int_a^b \sin y.f(y).dy$ appartient au plan vectoriel engendré par (sin, cos),

donc u est de rang ≤ 2, et même de rang 2 si $a \neq b$, car le couple ($\int_a^b \cos y.f(y).dy$, $\int_a^b \sin y.f(y).dy$) peut prendre n'importe quelle valeur.

Ecrivons $P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} A_k(y).x^k$. Il vient $h(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \int_a^b A_k(y).f(y).dy$.

Im v est inclus dans l'espace des polynômes de degré $\leq n$, donc rg v $\leq n + 1$.

<u>Exercice 24</u> : <u>Exemples d'espaces de dimension infinie</u>.
Dans cet exercice, **R** est considéré comme **Q**-espace vectoriel.
1) Soit $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que la suite $(\ln p_k)$ est **Q**-libre dans **R**.
2) Montrer que **R** n'admet pas de **Q**-base finie, ni même dénombrable.

<u>Solution</u> :

1) Par réduction au même dénominateur, (x_k) est **Q**-libre dans **R** si et seulement si (x_k) est **Z**-libre.

Supposons $\sum_{k=1}^{n} a_k . \ln p_k = 0$, où $a_k \in$ **Z** ; on en déduit $\prod_{k=1}^{n} (p_k)^{a_k} = 1$.

Le théorème fondamental de l'arithmétique implique $a_k = 0$ pour tout k.

2) Si **R** admettait une **Q**-base finie $(e_1, \dots, e_n)$, l'application $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . e_i$ serait une bijection de $\mathbf{Q}^n$ sur **R**. Or $\mathbf{Q}^n$ est dénombrable, **R** n'est pas dénombrable.

Si **R** admettait une base dénombrable $(e_1, e_2, e_3, \dots)$, **R** serait réunion des $\mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}(e_1, \dots, e_n)$, donc réunion dénombrable d'ensembles dénombrables : **R** serait dénombrable.

<u>Exercice 25</u> : <u>Exemples d'espaces de dimension infinie</u>.

1) Soit E = C([a, b], **R**), a < b. Indiquer une famille libre non dénombrable dans E.

2) Indiquer une famille libre non dénombrable dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

3) Montrer que l'application u qui à toute $f \in$ E associe la suite de ses moments $\mu_n(f) = \int_a^b f(x).x^n.dx$ de ses moments, est linéaire injective. Retrouver le résultat de 2).

<u>Solution</u> : 1) A tout c ∈]a, b] associons la fonction $f_c(x) = \sup(0, c - x)$.

Il est facile de voir que la famille (f_c) est libre.

2) A tout c ∈]0, 1] associons la suite géométrique $u_c = (c^n)$.

La famille (u_c) est libre dans le sous-espace des suites bornées.

Cela découle du théorème des noyaux, ou d'un argument de comparaison à l'infini.

3) u étant linéaire, il suffit de montrer que son noyau est réduit à {0}.

Cela découle du théorème d'approximation uniforme de Weierstrass (cf. exercices d'intégration).

____

4. <u>*Espaces fonctionnels*</u>.

<u>Exercice 1</u> : 1) Montrer que les fonctions $x \to x$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to \ln x$, $x \to \ln \ln x$, $x \to 1$ sont linéairement indépendantes.

2) Soit $f : x \to \ln(x + 1)$. Montrer que les fonctions f , $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, 1 sont libres.

<u>Solution</u> : 1) Ce sont cinq fonctions de]1, +∞[dans **R**.

Supposons que $(\forall x > 1) \quad a\,x + b\sqrt{x} + c \ln x + d \ln(\ln x) + e = 0$.

Divisons par x et faisons tendre x vers +∞ ; il vient $a = 0$;

Divisons par $\sqrt{x}$ et faisons tendre x vers +∞ ; il vient $b = 0$; et ainsi de suite.

2) Même idée.

Plus généralement, si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions réelles définies au voisinage d'un point x_0 d'un espace métrique, et telles que $f_{i+1} = o(f_i)$ au voisinage de x_0, alors la famille (f_i) est libre.

<u>Exercice 2</u> : Montrer que les fonctions $\varphi_\alpha : x \to x^\alpha$ ($\alpha \in$ **R**) sur]0, +∞[, forment une famille libre.

<u>Solution</u> : Deux méthodes :

- La famille (φ_α) est une échelle de comparaison au V(0+) ou au V(+∞).
- La famille (φ_α) est formée de vecteurs propres de l'opérateur T : $f \to x.f'(x)$ de C^∞(]0, +∞[, **R**).

<u>Exercice 3</u> : 1) Pour tout réel a, soit $f_a : x \in \mathbf{R} \to \exp(ax)$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbf{R}}$ est libre.

2) Pour tout complexe a, soit $f_a : x \in \mathbf{R} \to \exp(ax)$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbf{C}}$ est libre.

Solution :

1) peut se montrer de multiples façons.

1ère méthode : supposons $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et $(\forall x \in \mathbf{R})\ \lambda_1.\exp(a_1.x) + \dots + \lambda_n.\exp(a_n.x) = 0$.

Multiplions par $\exp(-a_n.x)$ et faisons tendre x vers $+\infty$. Il vient $\lambda_n = 0$. Une récurrence conclut.

Au fond, on a $\exp(a_1.x) << \dots << \exp(a_n.x)$ au voisinage de $+\infty$, en notant $<<$ la relation de négligeabilité (synonyme de o) : toute échelle de comparaison est une famille libre.

2ème méthode : dérivons n–1 fois l'identité $(\forall x \in \mathbf{R})\ \lambda_1.\exp(a_1.x) + \dots + \lambda_n.\exp(a_n.x) = 0$ et faisons x = 0. Il vient $\lambda_1.(a_1)^k + \dots + \lambda_n.(a_n)^k = 0$ pour $0 \le k \le n - 1$.

Le déterminant de Vandermonde $V(a_1, \dots, a_n)$ étant non nul, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

3ème méthode : dérivons une fois l'identité $(\forall x \in \mathbf{R})\ \lambda_1.\exp(a_1.x) + \dots + \lambda_n.\exp(a_n.x) = 0$ (1)

Il vient $(\forall x \in \mathbf{R})\ \lambda_1.a_1.\exp(a_1.x) + \dots + \lambda_n.a_n.\exp(a_n.x) = 0$ (2)

Multiplions (1) par a_n et soustrayons. Il vient :

$$(\forall x \in \mathbf{R})\quad \lambda_1(a_n - a_1).\exp(a_1.x) + \dots + \lambda_{n-1}(a_n - a_{n-1}).\exp(a_{n-1}.x) = 0$$

Nous voilà ramenés à une récurrence.

Au fond, la fonction f_a est vecteur propre de l'opérateur de dérivation associé à la valeur propre a. Or on sait que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.

2) Les méthodes 2 et 3 utilisées en 1) s'étendent sans problème.

(La première méthode est beaucoup plus problématique : on peut certes ordonner les a_j selon leurs parties réelles croissantes, mais à parties réelles égales, il n'est pas aisé de conclure.)

Les deux exercices suivants généralisent celui-ci.

Exercice 4 : Pour tout complexe a et tout naturel n, soit $f_{a,n} : x \in \mathbf{R} \to x^n.\exp(ax)$.

Montrer que la famille $(f_{a,n})_{a\in\mathbf{C}}$ est libre.

Solution :

Tout revient à montrer que si $a_1, \dots, a_n$ sont des complexes distincts, et si $\sum_{i=1}^{n} P_i(x).e^{a_i x} = 0$, où les $P_i(x)$ sont des polynômes, alors $(\forall i)\ P_i(x) = 0$. Raisonnons par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que $P(x).e^{ax} = 0$ implique que $P = 0$. Or e^{ax} est non nul.

Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. Notons $f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x).e^{a_i x}$, alors

$$f'(x) - a_i f(x) = (D - a_i.I)\, f(x) = P_i'(x)\, e^{a_i x} + \sum_{j\neq i} (P_j'(x) + (a_j - a_i) P_j(x)).e^{a_j x}$$

$$= P_i'(x)\, e^{a_i x} + \sum_{j\neq i} (T_{i,j} P_j)(x).e^{a_j x} .$$

où $T_{i,j}$ est l'endomorphime $P \to P' + (a_j - a_i).P$. Cet endomorphime conserve le degré, donc est un isomorphisme de $\mathbf{C}[X]$. Plus généralement, si $k > \deg P_i$,

$$(D - a_i.I)^k f(x) = P_i^{(k)}(x).\, e^{a_i x} + \sum_{j\neq i} (T_{i,j}^k P_j)(x).e^{a_j x} = \sum_{j\neq i} (T_{i,j}^k P_j)(x).e^{a_j x} = 0,$$

par hypothèse de récurrence, pour tout $j \neq i$, $T_{i,j}^k P_j = 0$, donc $P_j = 0$.

Remarque : en réalité, tout ceci découle du théorème de noyaux, et se généralise ainsi :

Si u est un endomorphisme de E, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, notons $N(\lambda) = \bigcup_{k\in N} Ker(u - \lambda.I)^k$.

Les sous-espaces N(λ) sont en somme directe.
De plus, lorsque **K** est algébriquement clos, leur somme directe est le module de torsion de E considéré comme **K**[X]-module pour l'addition et la loi externe (P, x) → P(u)(x).

<u>Exercice 5</u> : Montrer que les fonctions $x \to \frac{1}{2}$, $x \to \cos(nx)$ et $x \to \sin(nx)$ ($n \geq 1$) forment une famille libre dans $\mathcal{F}$(**R**, **C**).

<u>Solution</u> : C'est un grand classique.

Il s'agit de montrer que si, $\forall x \in \mathbf{R}$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k.\cos(kx)+b_k.\sin(kx)] = 0$, alors les a_k et b_k sont nuls.

<u>1ère méthode</u> : si l'on repasse par les exponentielles, il s'agit de montrer que :

$\forall x \in \mathbf{R}$ $\sum_{k=-n}^{n} c_k.\exp(ikx) = 0$, alors tous les c_k sont nuls. Or c'est l'objet de l'exercice 3.

<u>2ème méthode</u> : Changeant x en $-x$, on voit que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k.\cos(kx) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} b_k.\sin(kx) = 0.$$

Dérivons deux fois la seconde relation. Il vient : $\sum_{k=1}^{n} k^2 b_k.\sin(kx) = 0$, et par suite :

$\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-k^2)b_k.\sin(kx) = 0$. On est ramenés à une récurrence sur n. Idem pour les cosinus.

Au fond, les fonctions $x \to \sin(kx)$ sont libres en tant que <u>vecteurs propres</u> de l'opérateur D^2 associés à des valeurs propres différentes. Idem pour les fonctions $x \to$ ½ et $x \to \cos(kx)$.

<u>3ème méthode</u> : La meilleure méthode est celle dite de <u>Fourier</u>.

Elle consiste à noter que si $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k.\cos(kx)+b_k.\sin(kx)]$, les a_k et b_k sont les coefficients de Fourier de f : $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos(kx).dx$ et $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\sin(kx).dx$.

Du coup, si f est nulle, les a_k et b_k sont nuls.

<u>Exercice 6</u> : 1) Montrer que les fonctions $x \to \cos^n x$ sont libres.
2) Soient X un ensemble, f une fonction X → **K**. Indiquer une cns pour que la famille (f^n) des puissances de f soit libre dans $\mathcal{F}$(X, **K**).

<u>Solution</u> : 1) Supposons que, pour tout réel x, $\sum_{k=0}^{n} a_k.\cos^k x = 0$.

Comme cos x décrit [−1, 1] quand x décrit **R**, on a $\sum_{k=0}^{n} a_k.u^k = 0$ pour tout u ∈ [−1, 1].

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k.X^k$ a une infinité de racines, donc il est nul. Donc tous les a_k sont nuls.

<u>Autre solution</u> : changeant x en $x - \pi/2$, il vient, pour tout x : $\sum_{k=0}^{n} a_k.\sin^k x = 0$.

Or la famille de fonctions $(\sin^k x)$ est une échelle de comparaison au V(0+).
2) Une cns pour que la suite (f^n) soit libre est que la fonction f prenne une infinité de valeurs.

En effet si f prend une infinité de valeurs et si $\forall x \in X$ $\sum_{k=0}^{n} a_k . f^k(x) = 0$, alors le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k . X^k$ a une infinité de racines.

Réciproquement, si f prend un nombre fini de valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, le polynôme $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$ vérifie $\forall x \in X$ $P(f(x)) = \prod_{k=1}^{n}(f(x)-\lambda_k) = 0$. Cela implique aussitôt que $(1, f, \dots, f^n)$ est liée.

<u>Exercice 7</u> : 1) Montrer que la famille $(\cos^4 x, \cos^3 x.\sin x, \cos^2 x.\sin^2 x, \cos x.\sin^3 x, \sin^4 x)$ est libre.

2) Plus généralement, montrer que, pour tout n, la famille $(\cos^n x, \cos^{n-1} x.\sin x, \dots, \cos x.\sin^{n-1} x, \sin^n x)$ est libre.

3) La famille de fonctions $f_{p,q} : x \to \cos^p x.\sin^q x$, où $(p, q) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, est-elle libre ?

<u>Solution</u> :

2) Supposons $(\forall x)$ $a_0.\cos^n x + a_1.\cos^{n-1} x.\sin x + \dots + a_{n-1}.\cos x.\sin^{n-1} x + a_n.\sin^n x = 0$.

Si $0 < x < \pi/2$, il vient $a_0 + a_1.\tan x + \dots + a_{n-1}.\tan^{n-1} x + a_n.\tan^n x = 0$.

Comme $\tan x$ prend une infinité de valeurs, le polynôme $P(X) = a_0 + a_1.X + \dots + a_{n-1}.X^{n-1} + a_n.X^n$ a une infinité de racines, donc est nul. C'est l'argument de l'exercice précédent.

<u>Autre idée</u> : $\cos^n x << \cos^{n-1} x.\sin x << \dots << \cos x.\sin^{n-1} x << \sin^n x$ au V(0).

où $f(x) << g(x)$ signifie $f(x) = o(g(x))$.

<u>Autre idée</u> : Faisons $x = 0$, il vient $a_0 = 0$, donc pour tout x,

$$(\sin x).(a_1.\cos^{n-1} x + \dots + a_{n-1}.\cos x.\sin^{n-2} x + a_n.\sin^{n-1} x) = 0.$$

Si $x \notin \pi\mathbf{Z}$, il vient $a_1.\cos^{n-1} x + \dots + a_{n-1}.\cos x.\sin^{n-2} x + a_n.\sin^{n-1} x = 0$,

et cela reste vrai pour tout x par densité et continuité. Cela nous ramène à une récurrence sur n…

3) La réponse est non : même un belge sait que $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

<u>Exercice 8</u> : On appelle <u>exponentielle-polynôme</u> toute fonction de **R** dans **C** de la forme

$$f(x) = \sum P_k(x).\exp(\alpha_k.x)$$, où les α_k sont des complexes, et les P_k des polynômes.

1) Montrer que les exponentielles-polynômes forment une sous-algèbre E de $\mathfrak{F}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$; en indiquer une base. Montrer que E est stable par dérivation et primitivation.

2) Montrer que la famille $(f_y)_{y\in\mathbf{R}}$ des translatées de f, définies par $f_y : x \to f(x - y)$, est de rang fini dans $\mathfrak{F}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Exemple : $f(x) = x^2.\sin(x).\text{ch}(2x)$.

3) Montrer que les exponentielles-polynômes sont les solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Exemple : $f(x) = x^2.\sin(x).\text{ch}(2x)$.

<u>Solution</u> : 1) $E = \text{Vect}(x^n e^{\alpha x} ; n \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{C})$. Cette famille est même une **C**-base de E.

On peut aussi dire que $E = \oplus_\alpha E_\alpha$, où $E_\alpha = \{ P(x).e^{\alpha x} ; P \in \mathbf{C}[X] \}$.

Cela découle du grand théorème des noyaux, car $E_\alpha = \bigcup_n Ker(D-\alpha I)^n$.

De plus, la famille $(x^n e^{\alpha x})$ est stable par produit, donc E est une algèbre.

Chaque E_α est stable par dérivation : $\frac{d}{dx}(P(x).e^{\alpha x}) = (P'(x) + \alpha P(x)).e^{\alpha x}$.

$E_0 = \mathbf{C}[X]$ est stable par primitivation. Si $\alpha \neq 0$, $P \to P' + \alpha P$ est un endomorphisme de $\mathbf{C}[X]$ conservant le degré, donc un isomorphisme : il y a un polynôme Q tel que $\frac{d}{dx}(Q(x).e^{\alpha x}) = P(x).e^{\alpha x}$.

Les primitives de P(x).$e^{\alpha x}$ sont Q(x).$e^{\alpha x}$ + cte : elles sont éléments de E.

2) Si $f(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, pour tout y, $f_y(x) = f(x - y) = P(x - y)\, e^{\alpha(x-y)}$ est élément de E_α .

La famille (f_y) est de rang fini, ≤ deg P + 1.

Donc si $f(x) = \sum P_k(x) e^{\alpha_k x}$, $f_y(x) = \sum P_k(x-y) e^{-\alpha_k y} e^{\alpha_k x}$, donc (f_y) est de rang fini, ≤ $\sum \deg P_k + 1$.

3) Une équation différentielle linéaire à coefficients constants s'écrit P(D)(y) = 0, où D est l'opérateur de dérivation et P un polynôme.

Si $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{k_i}$, le théorème des noyaux affirme que Ker P(D) = $\bigoplus$ Ker $(D - \lambda_i I)^{k_i}$,

et le lemme du retard que Ker $(D - \lambda_i I)^{k_i}$ = { Q(x)exp(λ_ix) ; deg Q ≤ $k_i - 1$ }.

Finalement Ker P(D) = { $\sum_{i=1}^{r} Q_i(x)$ exp(λ_ix) ; deg $Q_i \le k_i - 1$ }.

Réciproquement, l'exponentielle-polynôme $f(x) = \sum_{i=1}^{r} Q_i(x)$ exp(λ_ix) est solution de P(D)(y) = 0, où

$P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{k_i}$, avec deg $Q_i < k_i$.

<u>Exercice 9</u> : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels > 0 deux à deux distincts.

Montrer que les fonctions $f_i : x \in \mathbf{R} \to \dfrac{1}{x^2 + a_i^2}$ $(1 \le i \le n)$ sont linéairement indépendantes.

<u>Solution</u> : On peut même montrer davantage.

La famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est libre, où $g_i : x \in \mathbf{R} \to \dfrac{x}{x^2 + a_i^2}$. Cela découle de l'unicité de la décomposition en éléments simples et de la bijection entre fonction rationnelle et fraction rationnelle.

Mais on peut aussi établir la liberté en faisant un développement asymptotique en +∞ de $\sum_i \dfrac{\lambda_i}{x^2 + a_i^2}$.

<u>Exercice 10</u> : Soit G un groupe. Montrer que toute famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ d'homomorphismes de groupes de G dans le groupe multiplicatif **K*** d'un corps commutatif **K** est libre.
En déduire que si G est fini à N éléments, il y a au plus N morphismes de groupe de G dans **K***.

<u>Solution</u> : C'est le lemme de Dedekind, fort utile en théorie de Galois.
Raisonnons par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est évident, f_1 ne prenant jamais la valeur 0.
Supposons le théorème vrai au rang $n-1$, et montrons-le au rang n.
On peut supposer $f_1, f_2, \dots, f_n$ deux à deux distincts, sans quoi il n'y a rien à montrer.
Supposons : $(\forall x \in G)\quad \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$ (1).
Ecrivons ceci pour xy, il vient $\forall (x, y) \in G^2 \quad \lambda_1 f_1(x).f_1(y) + \dots + \lambda_n f_n(x).f_n(y) = 0.$ (2).
Multiplions (1) par $f_n(y)$ et soustrayons (2), il vient :

$$\forall (x, y) \in G^2 \quad \lambda_1 f_1(x).(f_n(y) - f_1(y)) + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x).(f_n(y) - f_{n-1}(y)) = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$(\forall y \in G) \quad \lambda_1.(f_n(y) - f_1(y)) = \dots = \lambda_{n-1}.(f_n(y) - f_{n-1}(y)) = 0.$$

Comme les f_i sont deux à deux distincts, pour tout $1 \le i \le n-1$, il existe y tel que $f_n(y) - f_i(y) \ne 0$.
Alors $\lambda_i = 0$, puis $\lambda_n = 0$. Cqfd.
<u>Conséquences</u> :

i) Les $f_a : x \to \exp(ax)$, $a \in \mathbf{C}$, forment une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, en tant que morphismes du groupe $(\mathbf{C}, +)$ dans le groupe $(\mathbf{C}^*, \times)$.
ii) Si G est un groupe fini à N éléments, $\mathcal{F}(G, \mathbf{K})$ est un **K**-espace vectoriel de dimension N, donc Hom(G, **K***) a au plus N éléments.

<u>Exercice 11</u> : Soient $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b)$ une subdivision du segment $[a, b]$, E l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continues, et affines sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$.
Montrer que E est un espace vectoriel. Dimension et bases ?

<u>Solution</u> :
1) Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de $C([a, b], \mathbf{R})$.
2) L'application $\Phi : f \in E \to (f(a_0), f(a_1), \dots , f(a_n)) \in \mathbf{R}^{n+1}$ est linéaire et bijective.
Par conséquent, E est de dimension finie, égale à $n + 1$.
Autre isomorphisme : $\Psi : f \in E \to (f(a_0), p_1, \dots , p_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, où $p_k = \dfrac{f(a_k) - f(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}}$ est la pente de la restriction de f à $[a_{k-1}, a_k]$.
3) On obtient des bases de E en considérant les images réciproques par Φ ou Ψ de la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. Mais voici deux bases plus intéressantes, qui renvoient à l'exercice suivant :

$$(1, (x - a_i)^+ , 0 \leq i \leq n - 1) \quad , \quad (| x - a_i | , 0 \leq i \leq n) .$$

<u>Exercice 12</u> : Pour tout réel a, soit $f_a : x \to | x - a |$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre.

<u>Solution</u> : Il s'agit de montrer que toute sous-famille finie est libre, autrement dit que, si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n réels deux à deux distincts, la famille (f_{a_i}) est libre.

<u>1ère solution</u> : par récurrence sur n. Supposons $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, et

$$(\forall x) \qquad \lambda_1 | x - a_1 | + \dots + \lambda_n | x - a_n | = 0 .$$

Pour tout $x > a_n$, $\qquad \lambda_1 (x - a_1) + \dots + \lambda_{n-1} (x - a_{n-1}) + \lambda_n (x - a_n) = 0$.
Pour tout $a_{n-1} < x < a_n$, $\qquad \lambda_1 (x - a_1) + \dots + \lambda_{n-1} (x - a_{n-1}) - \lambda_n (x - a_n) = 0$.
Or si une fonction affine $x \to \alpha x + \beta$ est nulle pour une infinité de valeurs, $\alpha = \beta = 0$.
Du coup $\qquad \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} - \lambda_n = 0$.
En soustrayant, il vient $\lambda_n = 0$. Nous voilà ramenés à une récurrence.

<u>2ème solution</u> : il suffit de montrer qu'aucune fonction f_a n'est combinaison linéaire des autres. Or il en est bien ainsi, car les f_b , $b \neq a$, sont toutes dérivables au point a, ainsi que leurs combinaisons linéaires. Or f_a n'est pas dérivable en a !

<u>Remarque</u> : On en déduit que, si a < b, l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbf{R})$ contient une famille libre non dénombrable.

<u>Question subsidiaire</u> : Décrire le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ engendré par les f_a .

<u>Exercice 13</u> : Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de **R** dans **R**. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $(f_i(x_j))$ soit inversible.

<u>Solution</u> : Le corps **R** peut être remplacé par n'importe quel corps commutatif **K**.

1) <u>S'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $(f_i(x_j))$ est inversible, $(f_1, \dots, f_n)$ est libre</u>.

En effet, si $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n = 0$, alors $(\forall i)\ \ \alpha_1 f_1(x_i) + \alpha_2 f_2(x_i) + \dots + \alpha_n f_n(x_i) = 0$.

Comme la matrice $A = (f_i(x_j))$ est inversible, tous les α_j sont nuls.

2) Si ($f_1, \dots, f_n$) est libre, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que ($f_i(x_j)$) est inversible.
Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, (f_1) est libre si et seulement f_1 est non nulle ; il existe bien x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$.

• Supposons le résultat acquis au rang $n - 1$, et soit ($f_1, \dots, f_n$) une famille libre.

Alors ($f_1, \dots, f_{n-1}$) est libre, et il existe $(x_1, \dots, x_{n-1})$ tel que $\det(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n-1} \neq 0$.

Je dis qu'il existe x_n tel que $\det(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n} \neq 0$.

Raisonnons par absurde, et supposons que, quel que soit x, $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(x_1) & \dots & f_{n-1}(x_{n-1}) & f_{n-1}(x) \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{vmatrix} = 0$.

Développant par rapport à la dernière colonne, on obtient une relation de la forme :

$$A_1 f_1(x) + \dots + A_{n-1} f_{n-1}(x) + A_n f_n(x) = 0 \ ,$$

où les A_k sont les cofacteurs. L'un d'eux est non nul, par définition : A_n . Ce qui contredit la liberté de la famille ($f_1, \dots, f_n$).

3) Autre solution, par dualité.

Supposons ($f_1, \dots, f_n$) libre. Soit E = Vect($f_1, \dots, f_n$) le sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ engendré.

Les formes linéaires $\varepsilon_x : f \to f(x)$ sur E vérifient $\{ \varepsilon_x ; x \in \mathbf{K} \}^\circ = \{0\}$.

On en déduit que $\text{Vect}(\varepsilon_x ; x \in \mathbf{K}) = E^*$.

On peut extraire de cette famille une base ($\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}$) de E*.

Si $(g_1, \dots, g_n)$ est la base (pré-)duale, on a $g_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

On en déduit facilement que $(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n}$ est inversible.

Exercice 14 : On nomme ici « rectangle » toute partie R de $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ de la forme $A\times B$, où A et B sont des parties de $\mathbf{N}$. Soient $\Delta = \{ (x, x) ; x \in \mathbf{N} \}$, et $E = \mathbf{N}\times\mathbf{N} - \Delta$.
Montrer qu'on ne peut recouvrir E par un nombre fini de rectangles.

Indication : Procéder par absurde, et montrer que 1_E serait du type $1_E(x, y) = \sum_{k=1}^{N} u_k(x).v_k(y)$.

On considérera le sous-espace des fonctions : $\mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ engendré par $(\chi_x)_{x\in\mathbf{N}}$, où $\chi_x(y) = 1_E(x, y)$.

Solutions :

Je vois deux solutions de cet exercice, l'une géométrique directe, l'autre suggérée par l'énoncé.

1) Solution géométrique.

Notons $E_+ = \{ (x, y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N} ; y < x \}$ et $E_- = \{ (x, y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N} ; x < y \}$.

Si E était réunion finie de rectangles, pour des raisons de connexité par arcs, chacun des rectangles serait inclus, soit dans E_+, soit dans E_- .

Il suffit donc de montrer que E_+ n'est pas réunion finie de rectangles.

Or si $A \times B \subset E_+$, alors B est majorée, car si a est le plus petit élément de A, alors $B \subset [0, a[$.

Donc si $E_+ = \bigcup_k (A_k\times B_k)$, alors $E_+ \subset (\bigcup_k A_k)\times(\bigcup_k B_k)$, et E_+ serait inclus dans une bande $\mathbf{N}\times[0, m]$.

C'est impossible.

2) Solution linéaire.

a) Lemme préliminaire.

Notons $1_X = \varphi(X)$ la fonction indicatrice de la partie X de l'ensemble F.

Lemme : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des parties de F : $\varphi(\bigcup_i X_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\dots<i_k}\varphi(X_{i_1})\dots\varphi(X_{i_k})$.

Cela découle des lois de Morgan, qui s'écrivent :

$$F - \bigcup_i X_i = \bigcap_i (F - X_i) \text{ , donc } 1 - \varphi(\bigcup_i X_i) = \prod_i (1-\varphi(X_i)).$$

Il reste à développer ce produit par distributivité.

Ici $X_i = A_i \times B_i$ et $\varphi(X_i) = \varphi(A_i) \otimes \varphi(B_i)$. Donc si E est réunion des X_i ,

$$1_E(x, y) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\dots<i_k}[\varphi(A_{i_1})\dots\varphi(A_{i_k})](x).[\varphi(B_{i_1})\dots\varphi(B_{i_k})](y).$$

Plus globalement, il existerait des fonctions u_h et v_h : $\mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ telles que :

$$1_E(x, y) = \sum_{h=1}^{N} u_h(x).v_h(y) = \sum_{h=1}^{N}(u_h \otimes v_h)(x,y).$$

Où les v_h sont les fonctions $\varphi(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k})$, réindexées.

b) Pour tout $x \in \mathbf{N}$, l'application $\chi_x : y \to 1_E(x, y)$ est combinaison linéaire des applications v_h, donc la famille (v_h) engendre χ_x : <u>la famille</u> (χ_x) <u>est de rang fini</u>.

c) <u>Montrons cependant que la famille</u> (χ_x) <u>est libre</u> :

Supposons que $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\chi_i = 0$, *i.e.* que $\forall y \in \mathbf{N}$ $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i.1_E(i,y) = 0$.

Faisant successivement y = 0, 1, … , *n*, il viendrait :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_0 + \quad + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \quad = 0 \end{cases}$$

Additionnons : il vient $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$; soustrayant, il vient : $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

d) Il y a contradiction. CQFD

<u>Exercice 15</u> : Soient I un intervalle non trivial de **R**,
- C^k(I, **R**) l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k sur I ,
- D^k(I, **R**) l'espace vectoriel des fonctions *k* fois dérivables sur I.

Montrer qu'on a une chaîne d'inclusions strictes :

$C^0(I, \mathbf{R}) \supset D^1(I, \mathbf{R}) \supset C^1(I, \mathbf{R}) \supset \dots \supset C^k(I, \mathbf{R}) \supset D^{k+1}(I, \mathbf{R}) \supset C^{k+1}(I, \mathbf{R}) \supset \dots \supset C^\infty(I, \mathbf{R})$.

<u>Solution</u> : Prenons I = [−1, 1]. Si *f* est une fonction continue, définissons par récurrence (f_n) ainsi :

$f_0 = f$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t).dt$. Autrement dit, f_n est une primitive *n*-ème de *f*.

Il y a une formule donnant f_n pour $n \geq 1$: $f_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t).dt$.

Considérons la fonction $f(x) = |x|$. Elle est élément de C^0(I, **R**), non de D^1(I, **R**).
Sa primitive *n*-ème sera élément de C^n(I, **R**), non de D^{n+1}(I, **R**).
Si, au lieu de $|x|$ on choisit une fonction continue nulle part dérivable, on obtient une fonction de classe C^n, qui n'est $(n+1)$-fois dérivable en aucun point.

Considérons maintenant la fonction $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Elle est élément de D^1(I, **R**), non de C^1(I, **R**).

Sa primitive *n*-ème sera élément de D^{n+1}(I, **R**), non de C^{n+1}(I, **R**).

5. *Algèbres.*

Exercice 1 : Soit E une sous-algèbre unifère de $M_n(\mathbf{K})$. Montrer que si A appartient à E et est inversible, son inverse appartient à E.

Solution :

1ère méthode : L'application linéaire $f : B \to AB$ induit un endomorphisme de E. Cet endomorphisme est injectif, donc bijectif. Par suite, il existe $B \in E$ tel que $f(B) = I_n$; on en déduit que $B = A^{-1} \in E$.

2ème méthode : Si $A \in Gl_n(\mathbf{K})$, A^{-1} est un polynôme de A. Cela découle du th. de Hamilton-Cayley : le polynôme caractéristique de A, $\det(X.I - A) = X^n - \tau_1(A).X^{n-1} + \dots + (-1)^n.\det A$ annule A.
Or la relation $A^n - \tau_1(A).A^{n-1} + \dots + (-1)^n.\det A.I_n = 0$ implique aussitôt :

$$A^{-1} = \frac{(-1)^n}{\det A}(A^{n-1} - \tau_1(A).A^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\,\tau_{n-1}(A).I_n) .$$

On en déduit aussitôt que A^{-1} est élément de E.

Remarque : Cela découle aussi de la théorie du polynôme minimal : A est inversible ssi son polynôme minimal est de valuation nulle.

Application aux matrices triangulaires supérieures, aux matrices en damier, de quaternions, etc.

Exercice 2 : Trouver les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Solution : Soit A une sous-algèbre, unitaire ou non, de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Si f appartient à A, f^2, f^3, … aussi.
Si f prend une infinité de valeurs, $(f , f^2 , f^3 , \dots)$ est une famille libre, car :
$a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + a_3 f^3(x) + \dots = 0$ $(\forall x)$ implique $a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots = 0$ pour une infinité de valeurs de y, donc $(\forall i)$ $a_i = 0$.
Si donc A est de dimension finie, f prend un nombre fini de valeurs. Mais alors, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, f est constante. Ainsi A = {0} ou A est la droite des fonctions constantes.
Réciproque immédiate.

Exercice 3 : Quelle est la dimension du sous $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $\mathbf{C}$ engendré par les racines cinquièmes de l'unité ?

Solution : [Oral Polytechnique 2007]

Soit $P(X) = X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = (X - 1)\prod_{k=1}^{4}(X-\omega^k) = \prod_{k=0}^{4}(X-\omega^k)$

où $\omega = \exp\frac{2i\pi}{5}$. Il s'agit de décrire $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}(1 , \omega , \omega^2 , \omega^3 , \omega^4) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}(1 , \omega , \omega^2 , \omega^3)$.

Je dis que $(1, \omega , \omega^2 , \omega^3)$ est une $\mathbf{Q}$-base de E.

Il revient au même de dire que $\Phi(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ est le polynôme minimal de ω sur $\mathbf{Q}$.
Pour montrer ce résultat il suffit de montrer que $\Phi(X)$ est irréductible sur le corps $\mathbf{Q}$.

1ère idée : Dans $\mathbf{R}[X]$, $\Phi(X) = (X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}.X + 1)\,(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}.X + 1)$ a quatre diviseurs unitaires : 1 , $X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}.X + 1$, $X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}.X + 1$ et $\Phi(X)$.

Or aucun des polynômes $X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}.X + 1$, $X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}.X + 1$ n'appartient à $\mathbf{Q}[X]$, car

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{et} \quad \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ s'écrit $z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$, donc $w^2 + w - 1 = 0$, où $w = z + \frac{1}{z}$.

Cela donne $w = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} = 2.\cos\frac{2\pi}{5}$ ou $2.\cos\frac{4\pi}{5}$. On conclut en vertu de $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$.

On en déduit que Φ n'a que deux diviseurs unitaires dans $\mathbf{Q}[X]$: il est irréductible.

2ème idée : on peut montrer directement que l'on ne peut écrire $\Phi = A.B$ où $A \in \mathbf{Q}[X]$ est unitaire de degré 1 ou 2.

• A n'est pas de degré 1, autrement dit Φ n'a pas de racine rationelle p/q, $(p, q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$, $p \wedge q = 1$. On aurait en effet $p^4 + p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^4 = 0$, donc q divise p^4 et p divise q^4, donc $q = 1$, $p = \pm1$; or ±1 n'est pas racine de Φ.

• A n'est pas de degré 2, autrement dit on n'a pas $\Phi = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, $(a, b, c, d) \in \mathbf{Q}^4$. Identifiant, il viendrait $a + c = 1$, $b + ac + d = 1$, $ad + bc = 1$, $bd = 1$. Donc $c = 1-a$, $d = 1/b$, puis $a/b + b(1-a) = 1$ permet de tirer a en fonction de b : $b = \pm1$ ou $a = \frac{b}{1+b}$. Reportant ces valeurs dans $b + ac + d = 1$, on obtient que b annule un polynôme. Or on montre comme précédemment que ce polynôme n'a pas de racines rationnelles. Le cas $b = \pm1$ est également impossible.

Compléments : 1) L'irréductibilité de Φ découle aussi du critère d'Eisenstein, ou du théorème de Gauss relatif à l'irréductibilité sur $\mathbf{Q}$ de tous les polynômes cyclotomiques..

2) E est une algèbre de dimension 4 sur $\mathbf{Q}$, et un corps, obtenu au moyen de deux extensions quadratiques successives, comme le montre la 1ère idée ci-dessus : $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}[\sqrt{5}] \subset E$, et $\dim_{\mathbf{Q}} E = 4$ par mutiplicativité des dimensions.

Exercice 4 : Soit $E = \{ x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\ ;\ (a, b, c, d) \in \mathbf{Q}^4 \}$.

1) Montrer que, pour les lois usuelles, E est un **Q**-espace vectoriel de dimension 4, et un anneau intègre.

2) Montrer que E est un corps.

3) Soit $\theta = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$. Montrer que $(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$ est une base de E. Quel est le polynôme minimal de θ ?

Solution :

1) Montrons que E est une sous **Q**-algèbre de **R** considéré comme **Q**-algèbre.

Tout d'abord E est le sous **Q**-espace vectoriel de **R** engendré par $(1, \sqrt{2} , \sqrt{3} , \sqrt{6})$.

De plus, la table de multiplication de cette famille et la **Q**-bilinéarité du produit montrent que :

$$\forall(x, y) \in E\times E \quad x \times y \in E .$$ Comme $1 \in E$, E est une sous-algèbre de **R**.

C'est *a fortiori* un sous-anneau, et il est intègre en tant que sous-anneau d'un anneau intègre.

$\times$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$
1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	3	$3\sqrt{2}$

$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	6

Le point délicat est de montrer que $\mathcal{B} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une **Q**-base de E.
C'est une famille génératrice. Montrons qu'elle est libre.

Supposons que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, où $(a, b, c, d) \in \mathbf{Q}^4$.

L'idée fondamentale est d'observer que cela s'écrit : $a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}\,(c + d\sqrt{2}) = 0$.

Si $c + d\sqrt{2}$ était non nul, cela s'écrirait : $\sqrt{3} = -\dfrac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$.

Comme $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \ ; a, b \in \mathbf{Q} \}$ est un sous-corps de **R**, $\sqrt{3}$ s'écrit sous la forme

$$\sqrt{3} = A + B\sqrt{2} \ , \text{ où } (A, B) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}.$$

Elevons au carré ! Il vient $3 = A^2 + 2B^2 + 2AB\sqrt{2}$, donc $A^2 + 2B^2 = 3$ et $2AB = 0$.

Si $B = 0$, $A^2 = 3$, ce qui est impossible : $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$.

Si $B \neq 0$, $A = 0$ et $2.B^2 = 3$, ce qui également impossible : $4B^2 = 6$, or $\sqrt{6} \notin \mathbf{Q}$.

Finalement $c + d\sqrt{2} = a + b\sqrt{2} = 0$, donc $a = b = c = d = 0$. cqfd.

Remarque : Cette situation illustre le théorème de multiplicativité des dimensions :
E est un $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$-espace vectoriel, dont une base est $(1, \sqrt{3})$, et $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ est un **Q**-espace vectoriel dont une base est $(1, \sqrt{2})$.

2) Pour montrer que E est un sous-corps de **R**, il reste à montrer que $\forall x \in E-\{0\}$ $1/x \in E$.
Cela peut se faire par deux moyens très distincts :

1ère méthode : fixons $x \in E-\{0\}$ et considérons l'application $m : y \in E \to x\times y \in E$.
Elle est **Q**-linéaire, et injective, en vertu de l'intégrité de E. Comme E est de **Q**-dimension finie, elle est bijective, donc il existe $x' \in E$ tel que $m(x') = 1$; c'est dire que $1/x$ est élément de E.
Cette méthode purement linéaire conduit à chercher $1/x$ par ses coordonnées en résolvant un système cramérien de 4 équations à 4 inconnues.

2ème méthode, autrement plus profonde. Ecrivons $x = a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}\,(c + d\sqrt{2})$.

Alors $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}} = \dfrac{1}{a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}(c+d\sqrt{2})} = \dfrac{a+b\sqrt{2}-\sqrt{3}(c+d\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})^2-3(c+d\sqrt{2})^2}$

si l'on multiplie par la quantité conjuguée « en $\sqrt{3}$ ». Le dénominateur étant de la forme $p + q\sqrt{2}$, multiplions par la quantité conjuguée « en $\sqrt{2}$ ». Il vient :

$$\frac{1}{x} = \frac{a+b\sqrt{2}-\sqrt{3}(c+d\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})^2-3(c+d\sqrt{2})^2}\ \frac{(a-b\sqrt{2})^2-3(c-d\sqrt{2})^2}{(a-b\sqrt{2})^2-3(c-d\sqrt{2})^2} .$$

Cette fois-ci le dénominateur est rationnel, ce qui montre que $1/x$ est élément de E. cqfd.
A noter que :

$$\frac{1}{x} = \frac{(a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6}).(a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}-d\sqrt{6}).(a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}{(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}).(a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6}).(a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}-d\sqrt{6}).(a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}+d\sqrt{6})} .$$

On a multiplié le dénominateur x par ses trois conjugués de Galois.

3) Avec Maple :

```
> with(linalg):with(polytools):
> theta:=1+sqrt(2)+sqrt(3)+sqrt(6);theta2:=simplify(expand(theta^2));
theta3:=simplify(expand(theta^3));theta4:=simplify(expand(theta^4));
```

$$\theta := 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$
$$\theta 2 := 12 + 8\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\sqrt{3}$$
$$\theta 3 := 70 + 42\sqrt{3} + 30\sqrt{2}\sqrt{3} + 50\sqrt{2}$$
$$\theta 4 := 476 + 272\sqrt{3} + 192\sqrt{2}\sqrt{3} + 336\sqrt{2}$$

```
> A:=transpose(matrix(4,4,[1,0,0,0,1,1,1,1,12,8,6,4,70,50,42,30]));
B:=transpose(matrix(5,4,[1,0,0,0,1,1,1,1,12,8,6,4,70,50,42,30,476,336,272,192]));
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 12 & 70 \\ 0 & 1 & 8 & 50 \\ 0 & 1 & 6 & 42 \\ 0 & 1 & 4 & 30 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 12 & 70 & 476 \\ 0 & 1 & 8 & 50 & 336 \\ 0 & 1 & 6 & 42 & 272 \\ 0 & 1 & 4 & 30 & 192 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);rank(B);kernel(B);
```

$$4$$
$$4$$
$$\{[4, -8, -16, -4, 1]\}$$

```
> P:=minpoly(theta,4);Q:=factor(P,sqrt(2));factor(Q,sqrt(3));
```

$$P := 4 - 8\_X - 16\_X^2 - 4\_X^3 + \_X^4$$

$$Q := (\_X^2 - 2\_X + 2\_X\sqrt{2} - 6 + 4\sqrt{2})(\_X^2 - 2\_X - 2\_X\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{2})$$

$$(\_X - 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3})(\_X - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3})$$
$$(\_X - 1 - \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3})(\_X - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3})$$

Exercice 5 : Soient p, q, r trois projecteurs d'un **C**-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $p + \sqrt{2}\, q + \sqrt{3}\, r$ est un projecteur. Montrer que q = r = 0.

Solution : [Oral X MP 2012, RMS n° 153]

Prenons la trace : $\operatorname{tr}(p) + \sqrt{2}\operatorname{tr}(q) + \sqrt{3}\operatorname{tr}(r) \in \mathbf{N}$.

Or la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est **Q**-libre ; cela est démontré dans l'exercice précédent !

Donc tr q = tr r = 0 , et q = r = 0.

Exercice 6 : Représentation matricielle des nombres complexes.

1) On considère **C** comme **R**-algèbre. Soit $z = x + iy \in$ **C**, m(z) : z' → zz'. Quelle est la matrice M(z) de m(z) relativement à la base (1, *i*) de **C** ? Montrer que l'ensemble de ces matrices est une sous-algèbre commutative de $M_2(\mathbf{R})$, et un corps.

2) Déduire de 1) une méthode de construction du corps des complexes.

3) Application : calculer $\exp\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$.

Solution :

1) L'application m(z) est **R**-linéaire (et même **C**-linéaire).

Comme m(z)(1) = z et m(z)(*i*) = – y + *i* x , sa matrice est $M(z) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$.

On a m(z) + m(z') = m(z + z') , m(λz) = λm(z) pour $\lambda \in \mathbf{R}$, m(z) o m(z') = m(z.z'), en vertu de l'associativité de la mutliplication dans **C**, m(1) = Id et m(z) = 0 ⇒ m(z)(1) = 0 ⇒ z = 0.

Ainsi z → m(z) est un morphisme injectif de **R**-algèbres de **C** dans $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$.

Par composition, z → M(z) est un morphisme injectif de **R**-algèbres de **C** dans $M_2(\mathbf{R})$.

L'ensemble image est donc une sous-algèbre commutative de $M_2(\mathbf{R})$, et un corps, isomorphe à **C**.

2) Ceci suggère la méthode suivante de construction de **C**, en plusieurs étapes :

• On montre que $A = \left\{ M = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \right\}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbf{R})$, et un corps.

Ce dernier point découle de ce que $\det M(x, y) = x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$, et alors

$$M(x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = M\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

• Une **R**-base de A est (E, I), où $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; E est le neutre, et $I^2 = -E$.

• L'application $x \to M(x, 0) = x.E$ est un morphisme injectif de corps de **R** dans A.
• Il reste à plonger **R** dans A, à identifier x et x.E, et à poser $M(x, y) = x.E + y.I = x + y\,i$.

L'avantage de cette construction par rapport à la construction habituelle via **R**×**R** muni de deux lois convenables est que l'on évite de vérifier l'associativité de la mutiplication complexe, puisqu'elle découle aussitôt de celle de $M_2(\mathbf{R})$. Cet avantage sera surtout manifeste lors de la construction matricielle des quaternions : voir un peu plus loin.

3) <u>Application</u> : L'application $z \to M(x, y)$ étant continue, il vient :

$$\exp\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \exp(x + i\,y) = e^x(\cos y + i \sin y) = \begin{bmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{bmatrix}.$$

<u>Exercice 7</u> : <u>Réalisation matricielle des extensions quadratiques</u>.

On se place dans **K**[X] et $M_2(\mathbf{K})$, et l'on note $P(X) = X^2 + aX + b$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix}$.

1) Que dire de P(A) ?

2) Montrer que E = Vect(I, A) est une sous-algèbre commutative de dimension 2 de $M_2(\mathbf{K})$.

3) Montrer que si P a deux racines distinctes dans **K**, E est isomorphe à l'algèbre **K**×**K**. Résoudre l'équation P(M) = 0 dans E.

4) Montrer que si P est sans racine dans **K**, E est un corps. Résoudre l'équation P(M) = 0 dans E.

5) <u>Applications</u> :

a) Montrer que $E = \left\{\begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{Z}/11\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}\right\}$ est un corps commutatif à 121 éléments.

b) Montrer que $E = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\right\}$ est un corps commutatif à 4 éléments.

<u>Solution</u> :

1) On vérifie aussitôt que P(A) = 0.
Cela découle aussi de Hamilton-Cayley, car P est le polynôme caractéristique de A.
2) E est un plan vectoriel, car I et A sont libres.
E est une sous-algèbre commutative, comme le montre la table de multiplication :

$$I.I = I \quad , \quad I.A = A.I = A \quad , \quad A^2 = -a.A - b.I .$$

3) Si P a deux racines λ et μ dans **K**, A est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{K})$.

$$\exists Q \in Gl_2(\mathbf{K}) \quad Q^{-1}.A.Q = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

$$Q^{-1}.(xI + yA).Q = \begin{bmatrix} x+\lambda y & 0 \\ 0 & x+\mu y \end{bmatrix}.$$

L'algèbre E est conjuguée de l'algèbre D des matrices diagonales, laquelle est isomorphe à **K**×**K**.
4) Si P est sans racines dans **K**, donc irréductible,
5) a) Soit **K** = **Z**/11**Z**, $P = X^2 - 2$ est sans racines dans **K**. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$E = \text{Vect}(I, A) = \left\{\begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{Z}/11\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}\right\}$ est un corps commutatif à 121 éléments. Les racines de P dans ce sur-corps sont ± A.

b) Soit **K** = **Z**/2**Z**, $P = X^2 + X + 1$ est sans racines dans **K**, et si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

E = Vect(I, A) = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \right\}$ est un corps commutatif à 4 éléments : O, I, A et B = I + A. Les racines de P dans ce sur-corps sont A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et B = A + I = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

> **<u>Exercice 8</u>** : Montrer que E = $\left\{ \begin{bmatrix} 3x+y & 3x+3y \\ -x-y & x-y \end{bmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \right\}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbf{R})$, et un corps isomorphe à **C**.

<u>Solution</u> : 1) M(x, y) = $\begin{bmatrix} 3x+y & 3x+3y \\ -x-y & x-y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ = x.A + y.B.

Donc E = Vect(A, B) est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$, et en fait un plan car (A, B) est libre.
On constate que I = M(1/2, −1/2) ∈ E, et que :

$$A^2 = M(1, 3) = A + 3B \ ,\ B^2 = M(-1, 1) = -A + B \ ,\ AB = BA = M(-1, 3) = -A + 3B .$$

<u>Conclusion</u> : E est une sous-algèbre unitaire commutative de dimension 2 de $M_2(\mathbf{R})$.

2) <u>Montrons que E est un corps</u>.
On a det M(x, y) = $6x^2 + 4xy + 2y^2 = 4x^2 + 2(x+y)^2 \geq 0$ et det M(x, y) = 0 ⇔ M = 0.
Enfin, si M ∈ E est non nulle, elle est inversible et son inverse est élément de E, soit en vertu d'un calcul direct, soit en vertu de Hamilton-Cayley : $M^2 - (\text{tr } M).M + (\det M).I = 0$ (cf. aussi ex. 5).

3) <u>Cherchons à résoudre l'équation $M^2 = -I$ dans E</u>.
Si M = M(x, y), il vient $x^2 - 2xy - y^2 = -½$, $3x^2 + 6xy + y^2 = ½$.
Après calculs (x, y) = $(0, \pm 1/\sqrt{2})$.
Changeons de base : (I , Ω = M(0, $1/\sqrt{2}$)) est une **R**-base de E telle que $\Omega^2 = -I$.
L'isomorphisme de E avec **C** (en tant que **R**-algèbre et que corps) est alors évident.

4) <u>La réduction simultanée de A et B éclaire tout ceci</u>.
En effet, A et B sont simultanément diagonalisables dans $M_2(\mathbf{C})$, comme le montre Maple :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[3,3,-1,1]);B:=matrix(2,2,[1,3,-1,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> SpA:=eigenvects(A);
```

$$SpA := [2 + I\sqrt{2}, 1, \{[-1 - I\sqrt{2}, 1]\}], [2 - I\sqrt{2}, 1, \{[-1 + I\sqrt{2}, 1]\}]$$

```
> P:=transpose(matrix([op(SpA[1][3]),op(SpA[2][3])]));
```

$$P := \begin{bmatrix} -1 - I\sqrt{2} & -1 + I\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> RA:=map(simplify,multiply(inverse(P),A,P));
RB:=map(simplify,multiply(inverse(P),B,P));evalm(x*RA+y*RB);
```

$$RA := \begin{bmatrix} 2 + I\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - I\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad RB := \begin{bmatrix} I\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -I\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(2 + I\sqrt{2}) + I y\sqrt{2} & 0 \\ 0 & x(2 - I\sqrt{2}) - I y\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Concluons : il existe une matrice P ∈ $Gl_2(\mathbf{C})$ telle que $\{ P^{-1}.M.P \ ; P \in E \} = \{ \text{diag}(z, \bar{z}) \ ; z \in \mathbf{C} \}$.
Or E' = { diag(z , $\bar{z}$) ; z ∈ **C** } est une sous **R**-algèbre de $M_2(\mathbf{C})$ isomorphe à **C** via z → diag(z, $\bar{z}$).
E aussi en tant que conjuguée (ou image par automorphisme intérieur).

Exercice 9 : On se place dans $M_3(\mathbf{R})$. Soit $\mathcal{V}$ le sous-espace engendré par les deux matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Les matrices $M \in \mathcal{V}$ sont-elles inversibles ?

2) Montrer que $(\mathcal{V}, +, \times)$ est un corps commutatif, isomorphe à $\mathbf{C}$.

Solution :

1) $\mathcal{V}$ est un plan vectoriel. Aucune des matrices de ce plan n'est inversible, car le vecteur ${}^t(1, 1, 1)$ annule chacune d'elles. Le résultat demandé en 2) paraît donc hautement paradoxal.

2) On peut procéder de manière terre-à-terre, comme dans l'exercice précédent : écrire la table de multiplication de la base (A, B), en déduire la stabilité pour $\times$, chercher un élément neutre E dans $\mathcal{V}$ (nécessairement différent de I, puisque I n'est pas élément de $\mathcal{V}$!), montrer que toute matrice non nulle de $\mathcal{V}$ est inversible relativement à ce neutre, et enfin chercher à compléter dans $\mathcal{V}$, le neutre E en une base (E, J) telle que $J^2 = -E$. On trouve $E = -\frac{1}{3}(A + B)$.

Enfin, si $(a, b) \neq (0, 0)$, la recherche de (x, y) tel que $(x.A + y.B)(a.A + b.B) = E$ conduit à résoudre un système cramérien comme le montre Maple ci-dessous.

$\times$	A	B
A	$-2A + B$	$-A - B$
B	$-A - B$	$A - 2B$

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[-2*a-b,-a+b,a-b,-a-2*b]);v:=array([-1/3,-1/3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -2a - b & -a + b \\ a - b & -a - 2b \end{bmatrix} \qquad v := \left[\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right]$$

```
> det(A);
```

$$3a^2 + 3ab + 3b^2$$

```
> linsolve(A,v);
```

$$\left[\frac{1}{3}\,\frac{b}{a^2 + ab + b^2}, \frac{1}{3}\,\frac{a}{a^2 + ab + b^2}\right]$$

Conclusion : l'inverse de $aA + bB$ est $\frac{1}{3(a^2+ab+b^2)}(bA+aB)$.

3) Il y a une méthode plus profonde : la réduction simultanée de A et B.

Or A et B sont cycliques : $A = -I + \Omega^2$ et $B = -I + \Omega$, où $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

$P^{-1}.\Omega.P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{bmatrix}$, si $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}$. D'où $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1+j \end{bmatrix}$, $P^{-1}.B.P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1+j^2 \end{bmatrix}$

et enfin $P^{-1}.(xA + yB).P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x(-1+j^2)+y(-1+j) & 0 \\ 0 & 0 & x(-1+j)+y(-1+j^2) \end{bmatrix}$.

En résumé, $\mathcal{V} = \left\{ M(z) = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z} \end{bmatrix}P^{-1} \ ; z \in \mathbf{C} \right\}$, et l'application $z \in \mathbf{C} \to M(z)$ est un isomorphisme de **R**-algèbres de **C** dans $\mathcal{V}$. Le neutre E n'est autre que $M(1) = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 10 : Soit A une **R**-algèbre commutative et intègre de dimension $n \geq 2$, de neutre 1.
On identifie **R** et **R**.1.

a) Soit $x_0 \in A - \mathbf{R}$. Montrer que $(1, x_0, x_0^2)$ est liée et en déduire l'existence de $y_0 \in \text{Vect}(1, x_0)$ tel que $y_0^2 = -1$.

b) Montrer que $a + ib \in \mathbf{C} \to a + by_0$ est un isomorphisme de corps.

c) Montrer que A est un corps isomorphe à **C**. [Oral Centrale 2008]

Solution :

a) Comme A est de dimension finie, tout élément x_0 de A est algébrique sur **R**. Comme A est intègre, le polynôme minimal de x_0 est irréductible sur **R**. Si x_0 est réel, il est de degré 1 ; sinon, il est de la forme $X^2 + aX + b$, avec $a^2 - 4b < 0$.

Cherchons $y_0 = \lambda + \mu x_0$ Vect$(1, x_0)$ tel que $y_0^2 = -1$; on veut $\lambda^2 + 2\lambda\mu x_0 - \mu^2(ax_0 + b) = -1$, donc $\lambda^2 - \mu^2 b = -1$ et $2\lambda\mu - \mu^2 a = 0$; $\mu = 0$ est impossible, donc $\lambda = \frac{a}{2}\mu$.

En reportant dans $\lambda^2 - \mu^2 b = -1$ on trouve deux valeurs de λ, donc deux y_0 possibles.

b) L'application $a + ib \in \mathbf{C} \to a + by_0$ est **R**-linéaire et, comme $y_0^2 = -1$, c'est même un morphisme de **R**-algèbres. Comme **C** est un corps, son image aussi.

c) L'équation $z^2 = -1$ a au plus deux solutions dans A (équation polynomiale de degré 2 dans un anneau intègre), donc exactement deux solutions, y_0 et $-y_0$.

Soit alors x_1 un autre élément non réel de A. On a Vect$(1, x_1)$ = Vect$(1, y_0)$ = Vect$(1, x_0)$.

Cela montre que $(1, y_0)$ est une **R**-base de A. En résumé, on a obtenu le résultat suivant :

Théorème : Toute **R**-algèbre associative, commutative, unifère, sans diviseurs de zéro, de dimension finie est isomorphe, soit à **R**, soit à **C**.

Remarque : Si l'on enlève l'hypothèse de commutativité, on montre que A est isomorphe à **R**, **C** ou **H**, algèbre et corps des quaternions : c'est le théorème de Frobenius.

Exercice 11 : Rappelons qu'une **K**-algèbre A est un espace vectoriel muni d'une multiplication interne bilinéaire. Elle est dite « à division » si, pour tout $a \in A - \{0\}$ et tout $b \in A$, les équations $ax = b$ et $xa = b$ ont des solutions uniques.

Soit A une **R**-algèbre à division unitaire d'unité e, et de dimension impaire.

1) Soit $a \in A$, et $f : x \to a.x$. Montrer que f est une application **R**-linéaire, et que f admet au moins une valeur propre réelle.

2) En déduire que A est de dimension 1 : A = **R**.e.

Solution :

1) f est un endomorphisme de **K**-espace vectoriel de A, et un isomorphisme si $a \neq 0$.

Son polynôme caractéristique, P, est de degré impair, donc il s'annule sur **R** en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre réelle de f.

2) Le polynôme P annule f en vertu du théorème de Hamilton-Cayley.

Le polynôme minimal M de f divise P et a les mêmes racines que lui.

De plus, M est aussi le polynôme minimal de a, et, comme A est à division, M est irréductible. Comme il est divisible par $X - \lambda$, ce ne peut être que $X - \lambda$. Finalement, A est de dimension 1.

Remarque : ainsi, on ne peut munir l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ d'une multiplication interne bilinéaire qui en fasse une algèbre à division : cela explique pourquoi Hamilton a cherché sans succès pendant 15 ans une telle structure, avant d'en découvrir une… en dimension 4 : les quaternions.

Exercice 12 : présentation matricielle des quaternions.

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E la matrice unité de $M_4(\mathbf{K})$.

Si $(t, x, y, z) \in \mathbf{K}^4$, on note $M(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} t & -x & -y & -z \\ x & t & -z & y \\ y & z & t & -x \\ z & -y & x & t \end{bmatrix}$.

1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{H}$ des matrices M(t, x, y, z) est un espace vectoriel pour les lois usuelles. En indiquer la dimension et une base (E, I, J, K).

2) Effectuer les produits deux à deux des matrices E, I, J, K, et présenter les résultats dans un tableau en précisant l'ordre. En déduire que $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre de $M_4(\mathbf{K})$.
Est-elle commutative ? Quel est son centre ?

3) a) Montrer que $M \to {}^tM$ définit un antiautomorphisme involutif de $\mathbf{H}$. Quand a-t-on $M = {}^tM$?

b) Soit $M \in \mathbf{H}$. Vérifier que $M.{}^tM = {}^tM.M = N(M).E$, où $N(M) \in \mathbf{K}$, et $N(M.M') = N(M).N(M')$.

c) En déduire une caractérisation des éléments inversibles de $\mathbf{H}$, et calculer leur inverse.

4) Soit $\Sigma = \{ z \in \mathbf{K}^* \,;\, \exists(x, y) \in \mathbf{K}\times\mathbf{K} \;\; z = x^2 + y^2 \}$. Montrer que Σ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{K}^*$. Montrer l'équivalence : $\mathbf{H}$ est un corps $\Leftrightarrow -1 \notin \Sigma$.
Examiner les cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier > 2).

Solution :

1) L'ensemble $\mathbf{H}$ des matrices M(t, x, y, z) est le sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbf{K})$ engendré par les matrices $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Or ces matrices sont libres ; elles forment donc une base de $\mathbf{H}$.

2) Table de multiplication de la base (E, I, J, K).

×	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	–E	K	–J
J	J	–K	–E	I
K	K	J	–I	–E

Par bilinéarité, on en déduit que $(M, M') \in \mathbf{H}\times\mathbf{H} \Rightarrow M.M' \in \mathbf{H}$.
Donc $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre unifère de $M_4(\mathbf{K})$.
Elle n'est pas commutative, car $I.J \neq J.I$.
Son centre est $\mathbf{K}$.E. En effet, M appartient au centre de $\mathbf{H}$ ssi elle commute avec E, I, J, et K. Comme E est le neutre et K = I.J, L appartient au centre de H ssi M commute avec I et J.
Or le calcul montre que M commute à I ssi $M \in$ Vect(E, I) et M commute à J ssi $M \in$ Vect(E, J).

3) Conjugaison, inversion.

a) Si M est élément de $\mathbf{H}$, ${}^tM$ aussi, car ${}^tM(t, x, y, z) = M(t, -x, -y, -z)$

Et $M \to {}^tM$ est un antiautomorphisme involutif de $\mathbf{H}$. On a $M = {}^tM \Leftrightarrow M \in \mathbf{K}.E$.

b) Soit $M \in \mathbf{H}$. On vérifie que $M.{}^tM = {}^tM.M = N(M).E$, où $N(M) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbf{K}$, et $N(M.M') = N(M).N(M')$. Ceci n'est autre que l'identité des quatre carrés due à Euler.

c) Pour que M soit inversible, il faut et il suffit que $N(M) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ soit non nul.

En effet, si M est inversible, son déterminant n'est pas nul, donc N(M) ≠ 0. Réciproquement, si N(M) ≠ 0, M est inversible dans M_4(**K**) et même dans **H**, car $M^{-1} = \frac{1}{N(M)}.{}^tM$ en vertu de b).

```
> with(linalg):
> M:=(x,y,z,t)->matrix(4,4,[t,-x,-y,-z,x,t,-z,y,y,z,t,-x,z,-y,x,t]);
M(t,x,y,z);
```

$$\begin{bmatrix} z & -t & -x & -y \\ t & z & -y & x \\ x & y & z & -t \\ y & -x & t & z \end{bmatrix}$$

```
> factor(det(M(t,x,y,z)));N:=(t,x,y,z)->t^2+x^2+y^2+z^2;
```

$$(t^2+z^2+x^2+y^2)^2$$

```
> inverse(M(t,x,y,z));
```

$$\begin{bmatrix} \frac{z}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{t}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{x}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{y}{t^2+z^2+x^2+y^2} \\ -\frac{t}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{z}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{y}{t^2+z^2+x^2+y^2} & -\frac{x}{t^2+z^2+x^2+y^2} \\ -\frac{x}{t^2+z^2+x^2+y^2} & -\frac{y}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{z}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{t}{t^2+z^2+x^2+y^2} \\ -\frac{y}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{x}{t^2+z^2+x^2+y^2} & -\frac{t}{t^2+z^2+x^2+y^2} & \frac{z}{t^2+z^2+x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

```
> A:=multiply(M(t1,x1,y1,z1),M(t2,x2,y2,z2));
> expand(N(t1,x1,y1,z1)*N(t2,x2,y2,z2)-sum(A[1,k]^2,k=1..4));
```

$$0$$

4) Corps de quaternions sur K.

Montrons que Σ est un sous-groupe multiplicatif de **K***. En effet, 1 ∈ Σ, car $1 = 1^2 + 0^2$.
De plus $z = x^2 + y^2$ et $z' = x'^2 + y'^2 \Rightarrow z.z' = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2$.

Et enfin $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2$. Ce sous-groupe contient le groupe des carrés de **K***.

Montrons l'équivalence des trois propriétés suivantes :
i) **H**(**K**) est un corps ;
ii) $\forall(t, x, y, z) \in \mathbf{K}^4 \quad t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow t = x = y = z = 0$;
iii) $-1 \notin \Sigma$.

L'équivalence de i) et ii) découle de 3).
ii) ⇒ iii) car si $-1 = a^2 + b^2$, alors $(t, x, y, z) = (1, 0, a, b)$ serait ≠ 0 et tel que $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$.
iii) ⇒ ii) Supposons en effet $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Si $t^2 + x^2 \neq 0$, alors $-1 = \frac{y^2+z^2}{t^2+x^2}$, donc $-1 \in \Sigma \cup \{0\}$: impossible. Donc $t^2 + x^2 = y^2 + z^2 = 0$.

Si $t \neq 0$, alors $-1 = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \in \Sigma$: impossible, donc $t = x = 0$, et de même $y = z = 0$.

Exemples :

i) Les corps **Q** et **R** vérifient $-1 \notin \Sigma$; plus généralement, un corps ordonné vérifie $-1 \notin \Sigma$, car $-1 < 0$. On obtient donc autant d'algèbres associatives, unifères, de dimension 4, qui sont des corps non commutatifs : H(**Q**), H(**R**), etc.
Mais, tandis que les seules algèbres à division de dimension finie sur **R** sont de dimension 1, 2 ou 4 (théorème de Frobenius), il n'en est pas de même sur **Q**.
Le corps **Q**[$\sqrt{2}$], considéré comme sous-corps de **R**, est ordonné ; le corps des quaternions H(**Q**[$\sqrt{2}$]) sur ce corps est de **Q**-dimension 8. De même, le corps **Q**[$\sqrt{2}, \sqrt{3}$] est ordonné et de **Q**-

dimension 4 ; le corps des quaternions H($\mathbf{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$) sur ce corps est de **Q**-dimension 16. Et l'on peut de même exhiber des corps de **Q**-dimension 4×2^n.

Les polynômes P = $X^3 - 3X + 1$, $X^3 - X + 1$, $X^3 + X^2 - 2X - 1$ sont irréductibles sur **Q**. Si α est une de leurs racines réelles, $\mathbf{Q}[\alpha]$ est un sous-corps de **R** de **Q**-dimension 3. Donc H($\mathbf{Q}[\alpha]$) est de **Q**-dimension 12.

ii) Le corps **C** ne vérifie pas $-1 \notin \Sigma$, car -1 est un carré ; donc H(**C**) est une **C**-algèbre associative, unifère, non commutative, de dimension 4, mais n'est pas un corps. Il en est de même pour tout corps algébriquement clos, ou seulement stable par racine carrée.

iii) Les corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier impair) ne vérifient pas $-1 \notin \Sigma$; plus précisément, $\Sigma = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.

En effet, le groupe Γ des carrés a $\frac{p-1}{2}$ éléments.

Soit z un élément de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Si z est un carré, c'est un élément de Σ.

Sinon, $z - (\Gamma \cup \{0\})$ a $\frac{p-1}{2}$ éléments, donc rencontre nécessairement Γ, et z est somme de 2 carrés.

Donc H($\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) est une $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-algèbre associative, unifère, non commutative, de dimension 4, mais n'est pas un corps.

iv) Soit **K** = **Q**(T, X, Y, Z]) le corps de fractions rationnelles à 4 indéterminées sur **Q**. Le corps H(**Q**[T, X, Y, Z]) est non commutatif. C'est dans un tels corps que les calculs Maple ci-dessus ont été effectués.

<u>Remarques</u> : 1) Le résultat concernant $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ n'est pas surprenant : tout corps fini est commutatif.
2) On peut construire une **Q**-algèbre associative, unifère, non commutative, de dimension 9, qui est un corps. La construction de ce corps « gauche », *i.e.* non commutatif, repose sur la théorie de Galois (cf. J.-M. Arnaudiès, *Problèmes de préparation à l'agrégation de mathématiques*, t. 2, Ellipses.)

<u>Exercice 13</u> : **<u>algèbres diagonales</u>**.

Une **K**-algèbre de dimension N est dite <u>diagonale</u> si elle est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{K}^N$ pour les lois usuelles sur les N-uplets.

1) Montrer que E = $\mathcal{F}(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}, \mathbf{C})$ est une **C**-algèbre commutative, associative, unitaire de dimension N pour l'addition et la multiplication par un scalaire usuelles des fonctions, et pour la loi $*$ définie par $(f * g)(x) = \sum_{y\in Z/NZ} f(y).g(x-y)$. Préciser son élément neutre.

2) On pose $\omega = \exp\frac{2i\pi}{N}$. Pour tout $x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, on pose $\omega^x = \omega^k$, pour tout entier k dont la classe modulo N est x. Si f est élément de E, on pose, pour tout x : $(\mathcal{F} f)(x) = \sum_{a\in Z/NZ} \omega^{ax} f(a)$.

a) Calculer $\sum_{x\in Z/NZ} \omega^{ax}$ en distinguant deux cas ;

b) Montrer que, pour tout a, $f(a) = \frac{1}{N} \sum_{x\in Z/NZ} \omega^{-ax} (\mathcal{F} f)(x)$;

c) Soient f et g deux éléments de E. Montrer que $\sum_{a\in Z/NZ} f(a).g(a) = \frac{1}{N} \sum_{x\in Z/NZ} (\mathcal{F} f)(x).(\mathcal{F} g)(-x)$.

d) Montrer que, pour tout x : $\mathcal{F}(f * g)(x) = (\mathcal{F} f)(x).(\mathcal{F} g)(x)$.

e) En déduire que E est une algèbre diagonale. Caractériser ses éléments inversibles.

<u>Solution</u> : cf. mes notes sur la transformation de Fourier discrète.

<u>Exercice 14</u> : **<u>polynômes trigonométriques</u>**.

Soient n un entier ≥ 1, et E l'ensemble des fonctions de **R** dans **C** de la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k.\cos(kx)+b_k.\sin(kx)) = \sum_{k=-n}^{n} c_k.e^{ikx}.$$

1) Montrer les formules de Fourier :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kx)f(x).dx \ , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kx)f(x).dx \ , \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikx}f(x).dx \ .$$

En déduire que E est un **C**-espace vectoriel de dimension $2n + 1$.

2) On munit E de la loi $(f, g) \to f * g$, où $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t).dt$.

Montrer que E est une algèbre associative, commutative et unifère. Quel est son élément neutre ?

3) Montrer que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{C}^{2n+1}$.

4) Montrer que E est stable par dérivation et que $\exists \Delta_n \in E \quad \forall f \in E \quad f' = \Delta_n * f$.

Solution : cf. mes notes sur Séries de Fourier.

6. *Matrices.*

Ce chapitre est composite. En voici les différentes sections :

1. **Calculs matriciels.**
2. **Groupes matriciels.**
3. **Inversion.**
4. **Equivalence et rang.**
5. **Matrices particulières.**
6. **Similitude et réduction : première approche.**

1. *Calculs matriciels.*

Exercice 1 : On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a & b & a+b \\ c & d & c+d \\ a+c & b+d & a+b+c+d \end{bmatrix}$.

Exprimer B en fonction de A, puis A en fonction de B, à l'aide de produits matriciels.

Solution :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & a+b \\ c & d & c+d \\ a+c & b+d & a+b+c+d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = J'.B.J \ .$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & a+b \\ c & d & c+d \\ a+c & b+d & a+b+c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = H'.A.H \ .$$

A est une sous-matrice de B. Toute sous-matrice peut s'exprimer par des produits matriciels.
En d'autres termes, les applications

$f : A \in M_2(\mathbf{K}) \to B = H'.A.H \in M_3(\mathbf{K})$ et $g : Q \in M_3(\mathbf{K}) \to P = J'.Q.J \in M_2(\mathbf{K})$

sont linéaires et vérifient $g \circ f = id_{M_2(K)}$; f est injective, et g surjective.

Exercice 2 : <u>matrices-blocs</u>.

1) La <u>concaténée</u> des matrices $A = (\alpha_{ij}) \in M_{\mathbf{K}}(n, p)$ et $B = (\beta_{ik}) \in M_{\mathbf{K}}(n, q)$ est la matrice $C = \text{concat}(A, B) = (A \mid B) \in M_{\mathbf{K}}(n, p+q)$ obtenue en juxtaposant A et B.
Interpréter cette matrice en termes d'applications linéaires. Exprimer Im C à l'aide de Im A et Im B.

2) La <u>superposée</u> des matrices A = $(\alpha_{ik}) \in M_{\mathbf{K}}(m, p)$ et B = $(\beta_{jk}) \in M_{\mathbf{K}}(n, p)$ est la matrice C = stack(A, B) = $\left(\frac{A}{B}\right) \in M_{\mathbf{K}}(m+n, p)$ obtenue en superposant A et B.
Interprétation en termes d'applications linéaires. Exprimer Ker C à l'aide de Ker A et Ker B.

3) Justifier les formules $(A \mid B)\left(\frac{C}{D}\right) = A.C + B.D$ et $\left(\frac{C}{D}\right)(A \mid B) = \begin{bmatrix} CA & CB \\ DA & DB \end{bmatrix}$.

4) La <u>somme directe</u> des matrices A = $(\alpha_{ik}) \in M_{\mathbf{K}}(m, p)$ et B = $(\beta_{jk}) \in M_{\mathbf{K}}(n, p)$ est la matrice C = A ⊕ B = diag(A, B) = $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, de format (m+n , p+q).
Interpréter cette matrice en termes d'applications linéaires.

5) Si A, B, C et D ont des formats convenables, on forme la <u>matrice-blocs</u> M = $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.
Interpréter M en termes d'applications linéaires.

6) Inversement, si M = $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est une matrice-blocs, interpréter les matrices $\left[\frac{A}{C}\right]$ et A en termes d'applications linéaires.

<u>Solution</u> :

1) Soient E, F, G trois **K**-espaces vectoriels, u ∈ $\mathcal{L}$(E, G), v ∈ $\mathcal{L}$(F, G).
L'application f : E × F → G définie par $f(x, y) = u(x) + v(y)$ est linéaire.
Si E, F et G sont de dimensions finies p, q et n resp., et rapportés à des bases convenables $(a_1, \dots, a_p)$, $(b_1, \dots, b_q)$, $(c_1, \dots, c_n)$, la matrice de f relative aux bases $((a_1, 0), \dots, (a_p, 0), (0, b_1), \dots, (0, b_q))$ et $(c_1, \dots, c_n)$ est la concaténée (A | B) des matrices A et B respectives de u et v.
Il est clair que Im f = Im u + Im v , donc Im (A | B) = Im A + Im B.

2) Soient E, F, G trois **K**-espaces vectoriels, u ∈ $\mathcal{L}$(E, F), v ∈ $\mathcal{L}$(E, G).
L'application g : E → F × G définie par $g(x) = (u(x), v(x))$ est linéaire, et se note $g = u \times v$.
Si E, F et G sont de dim. finies resp. p, m et n, et rapportés à des bases convenables $(a_1, \dots, a_p)$, $(b_1, \dots, b_m)$ et $(c_1, \dots, c_n)$, la matrice de g relative aux bases $(a_1, \dots, a_p)$ et $((b_1, 0), \dots, (b_m, 0), (0, c_1), \dots, (0, c_n))$ est la superposée des matrices A et B respectives de u et v.
Il est clair que Ker g = Ker u ∩ Ker v, ce qui se traduit par Ker $\left(\frac{A}{B}\right)$ = Ker A ∩ Ker B.

3) Si $f(x, y) = a(x) + b(y)$ et $g(z) = (c(z), d(z))$, alors $(f \circ g)(z) = f(c(z), d(z)) = (a \circ c)(z) + (b \circ d)(z)$ et $(g \circ f)(x, y) = g(a(x) + b(y)) = ((c \circ a)(x) + (c \circ b)(y), (d \circ a)(x) + (d \circ b)(y))$.

4) Soient E, F, G, H quatre **K**-espaces vectoriels, u ∈ $\mathcal{L}$(E, G), v ∈ $\mathcal{L}$(F, H). L'application h : (x, y) ∈ E×F → (u(x), v(y)) ∈ G×H est linéaire et se note u ⊕ v. En dimension finie, la matrice de h est la somme directe des matrices respectives A et B de u et v : C = A ⊕ B = diag(A, B) = $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$.

5) Soient E, F, G, H quatre **K**-espaces vectoriels, u ∈ $\mathcal{L}$(E, G), v ∈ $\mathcal{L}$(F, G), p ∈ $\mathcal{L}$(E, H), q ∈ $\mathcal{L}$(F, H).
L'application Φ : (x, y) ∈ E × F → (u(x) + v(y), p(x) + q(y)) ∈ G × H est linéaire et se note $\begin{bmatrix} u & v \\ p & q \end{bmatrix}$.
En dim. finie, la matrice de Φ est M = $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, où A, B, C, D sont les matrices resp. de u, v, p et q.

6) Si M = $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est la matrice d'une application linéaire f , $\left[\frac{A}{C}\right]$ est la matrice de la restriction de f à un sous-espace V convenable, et A est la matrice de q o $f\,|_V$, où q est un projecteur.

Exercice 3 : Dans $\mathbf{K}^3$, soient P le plan d'équation $ax + by + cz = 0$, et D la droite engendrée par le vecteur (α, β, γ). On suppose que $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, de sorte que $\mathbf{K}^3 = P \oplus D$.
Ecrire les matrices des projecteurs et des symétries associées à cette somme directe. Généraliser.

Solution :
Analysons le problème, et écrivons $X = \lambda E + U$, où $X = {}^t(x, y, z)$, $E = {}^t(\alpha, \beta, \gamma)$, et $U = {}^t(u, v, w) \in P$.

$$ax + by + cz = \lambda\,(a\alpha + b\beta + c\gamma)\ ,\ \text{donc}\ \ \lambda = \frac{ax+by+cz}{a\alpha+b\beta+c\gamma}.$$

$$p_D(X) = \frac{ax+by+cz}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \frac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \frac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}\alpha a & \alpha b & \alpha c\\ \beta a & \beta b & \beta c\\ \gamma a & \gamma b & \gamma c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

$$p_P(X) = X - p_D(X) = \frac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}b\beta+c\gamma & -\alpha b & -\alpha c\\ -\beta a & a\alpha+c\gamma & -\beta c\\ -\gamma a & -\gamma b & a\alpha+b\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

<u>Bilan</u> : $\mathrm{Mat}(p_D) = \dfrac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}\alpha a & \alpha b & \alpha c\\ \beta a & \beta b & \beta c\\ \gamma a & \gamma b & \gamma c\end{bmatrix}$, $\mathrm{Mat}(p_P) = \dfrac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}b\beta+c\gamma & -\alpha b & -\alpha c\\ -\beta a & a\alpha+c\gamma & -\beta c\\ -\gamma a & -\gamma b & a\alpha+b\beta\end{bmatrix}$

Pour les symétries, on suppose **K** de caractéristique $\neq 2$:

$$s_D = p_D - p_P = 2\,p_D - I = \frac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}\alpha a-\beta b-\gamma c & 2\alpha b & 2\alpha c\\ 2\beta a & -\alpha a+\beta b-\gamma c & 2\beta c\\ 2\gamma a & 2\gamma b & -\alpha a-\beta b+\gamma c\end{bmatrix}$$

$$s_P = p_P - p_D = -s_D = \frac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}-\alpha a+\beta b+\gamma c & -2\alpha b & -2\alpha c\\ -2\beta a & \alpha a-\beta b+\gamma c & -2\beta c\\ -2\gamma a & -2\gamma b & \alpha a+\beta b-\gamma c\end{bmatrix}$$

On peut retrouver ces résultats par <u>changement de base</u>.
Complétons le vecteur (α, β, γ) en une base de $\mathbf{K}^3$ au moyen d'une base de P.

Soit Q la matrice obtenue : $Q = \begin{bmatrix}\alpha & * & *\\ \beta & * & *\\ \gamma & * & *\end{bmatrix}$. On a $[\,a\ \ b\ \ c\,].Q = [\,a\alpha + b\beta + c\gamma\ \ 0\ \ 0\,]$

Donc $[\,1\ \ 0\ \ 0\,].Q^{-1} = \dfrac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}[\,a\ \ b\ \ c\,]$

$Q^{-1}.P_D.Q = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, donc $P_D = Q.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.Q^{-1} = \begin{bmatrix}\alpha&0&0\\ \beta&0&0\\ \gamma&0&0\end{bmatrix}.Q^{-1} = \dfrac{1}{a\alpha+b\beta+c\gamma}\begin{bmatrix}\alpha a & \alpha b & \alpha c\\ \beta a & \beta b & \beta c\\ \gamma a & \gamma b & \gamma c\end{bmatrix}$.

Exercice 4 : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté, rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soit $\vec{u}\,(a, b, c)$. Ecrire la matrice de l'application $\vec{X} \to \vec{u} \wedge \vec{X}$.
2) Montrer la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{v}).\vec{w} - (\vec{u} \mid \vec{w}).\vec{v}.$$

Solution :

1) $\vec{Y} = \vec{u} \wedge \vec{X} = \begin{bmatrix}-cy+bz\\ cx-az\\ -bx+ay\end{bmatrix}$. Donc la matrice cherchée est $\begin{bmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}$.

2) Si $\vec{v}(p, q, r)$, la matrice de l'application linéaire $\vec{w} \to \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -bq-cr & bp & cp \\ aq & -ap-cr & cq \\ ar & br & -ap-bq \end{bmatrix}$$

La matrice de $\vec{w} \to (\vec{u}\,|\,\vec{w}).\vec{v} - (\vec{u}\,|\,\vec{v}).\vec{w}$ est :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}[\,a \;\; b \;\; c\,] - (\,ap + bq + cr\,)\, I_3 = \begin{bmatrix} -bq-cr & bp & cp \\ aq & -ap-cr & cq \\ ar & br & -ap-bq \end{bmatrix}.$$

car $(\vec{u}\,|\,\vec{w}).\vec{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}[\,a \;\; b \;\; c\,]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Bien entendu, il existe d'autres méthodes pour vérifier cette formule.

<u>Exercice 5</u> : Soit $\mathbf{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, à coefficients dans **K**.
Soient A un élément de **K**[X], et B un polynôme non nul de degré n.
On note P mod B le reste de la division euclidienne de P par B dans **K**[X].
1) Montrer que P $\to$ AP mod B est un endomorphisme de **K**[X].
2) Soient $B = X^3 - 1$ et $A = cX^2 + bX + a$.
Ecrire la matrice de P $\to$ AP mod B relativement à la base $(1, X, X^2)$.

<u>Solution</u> :

1) L'application f : P $\to$ AP mod B est linéaire, comme composée de P $\to$ AP et de Q $\to$ Q mod B, qui est un projecteur de **K**[X] : le projecteur sur $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ parallèlement à B.**K**[X].

2) La matrice cherchée est $\begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$.

En effet, A mod B = A ,

$AX \bmod B = cX^3 + bX^2 + aX \bmod B = c + aX + bX^2$,

$AX^2 \bmod B = cX^4 + bX^3 + aX^2 \bmod B = aX^2 + b + cX$.

<u>Exercice 5</u> : On rapporte $M_2(\mathbf{K})$ à sa base canonique $\mathfrak{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
Soient $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $G_A : M \to AM$ et $D_B : M \to MB$.
1) Ecrire les matrices de G_A et D_B relativement à la base $\mathfrak{B}$.
2) Ecrire la matrice de $F_{AB} : M \to AMB$ relativement à cette même base.
3) Déterminants de G_A, D_B, F_{AB} ? CNS pour que G_A, resp. D_B et F_{AB}, soient bijectives ?

<u>Solution</u> : Les matrices demandées sont de format 4×4.

1) Si $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, $AM = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}$. Cela s'écrit $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$.

Si $MB = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\alpha+y\gamma & x\beta+y\delta \\ z\alpha+t\gamma & z\beta+t\delta \end{bmatrix}$. Cela s'écrit $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$.

Conclusion : La matrice de G_A est $\begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix}$; celle de D_B est diag (${}^tB$, ${}^tB$).

2) La matrice demandée est le produit des matrices précédentes : $\begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^tB & O \\ O & {}^tB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,{}^tB & b\,{}^tB \\ c\,{}^tB & d\,{}^tB \end{bmatrix}$.

On reconnaît le produit tensoriel $A \otimes {}^tB$ étudié dans les exercices et problèmes ultérieurs.

3) Enfin, det G_A = (det A)^2 , det D_B = (det B)^2 , det F_{AB} = (det A)^2.(det B)^2 .

On en déduit que G_A est bijective ssi det A ≠ 0, que D_B est bijective ssi det B ≠ 0, et que F_{AB} est bijective ssi det A ≠ 0 et det B ≠ 0.

Exercice 7 : On rapporte $M_2(\mathbf{K})$ à sa base canonique $\mathcal{B}$ = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}).

Soient A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, f : M → A.M – M.A.

1) Ecrire la matrice M de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

2) Discuter selon les valeurs de a, b, c, d le rang de f.

Solution : Il s'agit d'étudier à la main la dimension du commutant d'une matrice 2×2.

1) Il découle de l'exercice précédent que f a pour matrice :

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

2) La matrice M est de rang ≤ 3, car ses colonnes (et lignes) d'indices 1 et 4 sont opposées.

Du coup, $$\text{rg } M = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ -b & a-d & 0 \\ c & 0 & d-a \\ 0 & c & -b \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ -b & a-d & 0 \\ c & 0 & d-a \end{bmatrix}.$$

Ainsi dim Im f ≤ 3 et dim Ker f ≥ 1 ; c'est logique car on a toujours I ∈ Ker f.

Si $b = c = 0$ et $a = d$, i.e. si A est scalaire, M = O.

Si $b = c = 0$ et $a \neq d$, rg M = 2. D'ailleurs Ker M est le plan des matrices diagonales.

Si $b \neq c$, l'un des deux au moins est non nul, et rg $\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ -b & a-d & 0 \\ c & 0 & d-a \end{bmatrix}$ = 2, car

det $\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ -b & a-d & 0 \\ c & 0 & d-a \end{bmatrix}$ = 0 et un déterminant extrait d'ordre 2 est non nul. Alors rg M = 2.

Conclusion : Si A est scalaire, $f = 0$; Sinon, dim Im f = dim Ker f = 2.

Exercice 8 : 1) On se place dans le corps $\mathbf{F}_4$ = { 0, 1, a, b } à 4 éléments, considéré comme $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel. Montrer que σ : x → x^2 est un endomorphisme de $\mathbf{F}_4$; quelle est sa matrice relativement à la base (1, a) ?

2) On se place dans le corps $\mathbf{F}_8$ = { 0, 1, a, a + 1, a^2, a^2 + 1, a^2 + a, a^2 + a + 1 } à 8 éléments, considéré comme $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel. Montrer que σ : x → x^2 est un endomorphisme de $\mathbf{F}_8$; quelle est sa matrice relativement à la base (1, a, a^2) ?

Solution : Cet exercice suppose un peu connue la théorie des corps finis.

1) « Rappelons » que $\mathbf{F}_4$ est le corps de décomposition du polynôme $X^2 + X + 1$, qui est irréductible dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$[X]. C'est un plan vectoriel sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et un corps de caractéristique 2.

σ est l'endomorphisme de Frobenius ; $a^2 = b = a + 1$, donc σ a pour matrice S = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On a $\forall x \in \mathbf{F}_4\ x^4 = x$ (petit théorème de Fermat), donc $\sigma^2 = I$, ce qui s'écrit $(\sigma - I)^2 = 0$.

2) De même, $\mathbf{F}_8$ est le corps de décomposition du polynôme $X^3 + X + 1$, qui est irréductible dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$. C'est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension 3, et un corps de caractéristique 2.

L'endomorphisme de Frobenius σ a pour matrice S = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On a $\forall x \in \mathbf{F}_3\ x^8 = x$ (petit théorème de Fermat), donc $\sigma^3 = I$.

Exercice 9 : 1) Montrer que, pour tout nombre complexe x

$$\begin{bmatrix} x & 1+x \\ 1-x & -x \end{bmatrix}^2 = I_2 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 3-4x & 2-4x & 2-4x \\ -1+2x & 2x & -1+2x \\ -3+2x & -3+2x & -2+2x \end{bmatrix}^2 = I_3 .$$

2) Trouver les couples $(A, B) \in M_n(\mathbf{C})\times M_n(\mathbf{C})$ tels que $\forall x \in \mathbf{C}\ (A + xB)^2 = I$.

Solution :

1) Maple vérifie très bien cela… dans $M_n(\mathbf{Q}[X])$ il est vrai. Il reste à substituer à X un complexe.
On dispose donc de droites affines formées d'involutions, c'est-à-dire de symétries vectorielles.

2) On se place dans un corps infini de caractéristique $\neq 2$, et on note ici O une matrice nulle de format quelconque.

$(A + xB)^2 = A^2 + x(AB + BA) + x^2 B^2 = I$ pour tout x si et seulement si $A^2 = I$, $AB + BA = B^2 = O$.

A étant une symétrie, il existe $P \in Gl_n(\mathbf{K})$ telle que $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & -I_q \end{bmatrix}$.

Posons alors $P^{-1} B P = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$. $AB + BA = B^2 = O$ se traduit par $X = T = YZ = ZY = O$.

Les couples cherchés sont du type $\left(P \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & -I_q \end{bmatrix} P^{-1} , P \begin{bmatrix} O & Y \\ Z & O \end{bmatrix} P^{-1} \right)$, où $p + q = n$, $YZ = ZY = 0$.

Exercice 10 : Résoudre dans $M_2(\mathbf{K})$ les équations matricielles :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution : Nous allons attaquer cet exercice par un calcul direct, et faire mention de considérations linéaires en remarque.

Posons $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, de sorte que $A^2 = \begin{bmatrix} x^2+yz & y(x+t) \\ z(x+t) & t^2+yz \end{bmatrix}$.

♣ Résolution de $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il vient : $x^2 + y.z = t^2 + y.z = y.(x + t) = z.(x + t) = 0$.

$x + t \neq 0 \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow x = t = 0$; impossible.

Donc t = x et $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$, où $x^2 + y.z = 0$.

Conclusion : Les matrices nilpotentes sont incluses dans un sous-espace de dimension 3 de $M_2(\mathbf{K})$, l'hyperplan des matrices de trace nulle. Dans ce sous-espace, elles forment un cône du second degré.

C'est pourquoi on parle du cône nilpotent.

♦ Résolution de $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il vient : $x^2 + y.z = t^2 + y.z = z.(x + t) = 0$, $y.(x + t) = 1$.

La dernière équation implique $x + t \neq 0$, donc $z = 0$, donc $x = t = 0$. impossible.

Conclusion : Il n'y a pas de matrice ayant pour carré $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque : Des considérations d'indice de nilpotence rendaient ce résultat prévisible : A serait d'indice de nilpotence 3 ou 4, ce qui est impossible.

♥ Résolution de $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il vient : $x^2 + y.z = 1$, $t^2 + y.z = z.(x + t) = y.(x + t) = 0$.

$x + t = 0$ impliquerait $x^2 + y.z = 1$ et $x^2 + y.z = 0$: impossible.

$x + t \neq 0$ implique $y = z = 0$, puis $t = 0$ et $x^2 = 1$.

Conclusion :

Si **K** est de caractéristique ≠ 2, il y a deux matrices telles que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: $A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si **K** est de caractéristique 2, il y a une seule matrice telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque : on pouvait simplifier tout cela en notant que si $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, A commute avec $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc est diagonale.

♠ Résolution de $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Il vient : $x^2 + y.z = t^2 + y.z = 1$, $z.(x + t) = y.(x + t) = 0$.

$x + t \neq 0$ implique $y = z = 0$, puis $x^2 = t^2 = 1$.
En caractéristique ≠ 2, $(x, t) = (1, 1)$ ou $(-1, -1)$.
En caractéristique 2, il vient $x = t = 1$, donc $x + t = 0$: impossible.

$x + t = 0$ implique $x^2 + y.z = 1$.

Or dans $\mathbf{K}^3$, $x^2 + y.z = 1$ est l'équation d'une quadrique Q de centre O, et réglée ; en tout point de cette quadrique passent des droites. Les droites d'équations

$$D_\lambda : y = \lambda(1 - x) \ , \ z = \lambda^{-1}(1 + x) \quad \text{et} \quad D'_\mu : y = \mu(1 + x) \ , \ z = \mu^{-1}(1 - x)$$

sont tracées sur Q.

Si **K** est de caractéristique ≠ 2, les matrices telles que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se répartissent en trois types :

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, et les matrices de la forme $\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$, où $x^2 + yz = 1$.

Ces dernières sont incluses dans un sous-espace de dimension 3 de $M_2(\mathbf{K})$, l'hyperplan des matrices de trace nulle. Dans ce sous-espace, elles forment une quadrique à centre, réglée.
Si **K** = **R**, cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe.

Si **K** est de caractéristique 2, les matrices telles que $A^2 = I$ sont les matrices $\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$, où $x^2 + yz = 1$.

Même commentaire.

Remarques :
1) La seule différence en caractéristique 2 est que les matrices ±I appartiennent à la quadrique Q.
2) Les matrices A telles que $A^2 = I$ sont les symétries vectorielles.

En caractéristique $\neq 2$, elles sont semblables à I , –I ou $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. C'est la classe de similitude de cette dernière matrice qui est la quadrique Q = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} ; x^2 + yz = 1 \right\}$.
Si K = **R** ou **C**, Q est connexe par arc et non bornée.
L'exercice précédent fournit des droites tracées sur Q.
En caractéristique 2, elles sont semblables à I ou à $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. *Groupes matriciels*.

Exercice 10 : Montrer que les matrices R = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et S = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ engendrent un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$ à 6 éléments, isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3$ des permutations de {1, 2, 3}.

Solution : Notons G le groupe engendré, et I la matrice unité.
1) Inventaire de G. G contient les 6 matrices :

$$I , R , S , A = R.S = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , B = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } T = S.R.S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons que $A^3 = B^3 = R^2 = S^2 = T^2 = I$. Je dis que G = { I, A, B, R, S, T }.
En effet, notons H cet ensemble. Il suffit de montrer que c'est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$.
$H \subset Gl_2(\mathbf{R})$, $I \in H$, et $M \in H \Rightarrow M^{-1} \in H$. Reste à montrer la stabilité.
$R.T = R.S.R.S = A^2 = B$, $S.R = A^{-1} = B$, $S.T = R.S = A$, $T.S = A^{-1} = B$, $T.R = B^{-1} = A$, etc.

×	I	A	B	R	S	T
I	I	A	B	R	S	T
A	A	B	I	T	R	S
B	B	I	A	S	T	R
R	R	S	T	I	A	B
S	S	T	R	B	I	A
T	T	R	S	A	B	I

2) Montrons que les groupes G et $\mathfrak{S}_3$ sont isomorphes.
Associons à I la permutation $e = (1\ 2\ 3)$, à A le cycle $a = (2\ 3\ 1)$, à B le cycle $b = (3, 1, 2)$, à R la transposition $r = (1, 3, 2)$, à S la transposition $s = (3, 2, 1)$ et à T la transposition $t = (2, 1, 3)$.
On constate que les tables de G et $\mathfrak{S}_3$ sont alors les mêmes.
3) Nous avons constaté que les groupes étaient isomorphes, sans vraiment expliquer pourquoi.
Considérons dans $\mathbf{R}^2$ les 3 vecteurs i = (1, 0), j = (–1, 1) et k = (0, –1), de somme nulle et de rang 2.
L'ensemble Γ des automorphismes de $\mathbf{R}^2$ laissant stable {i, j, k} est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$.
Et ce sous-groupe a 6 éléments. En effet, il y a 6 couples (i, j), (j, i), (i, k), (k, i), (j, k), (k, j) formant base de $\mathbf{R}^2$, et 6 automorphismes u de $\mathbf{R}^2$ envoyant (i, j) sur chacun de ces six couples. La condition u(i) + u(j) + u(k) = 0 détermine automatiquement u(k).
L'application qui à $u \in G$ associe la permutation de {i, j, k} qu'il induit est un isomorphisme du groupe Γ sur le groupe symétrique de {i, j, k}.
Or les matrices des éléments de Γ sont exactement les matrices trouvées ci-dessus.
Plus généralement, si E est un plan vectoriel sur un corps **K**, et si (a, b, c) est un triplet de vecteurs de somme nulle et de rang 2, l'ensemble Γ des automorphismes de $\mathbf{R}^2$ laissant stable $\{a, b, c\}$ est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{K})$ isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 11 : Expliciter le groupe $Gl_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. A quel groupe est-il isomorphe ?

Solution : 1) Inventaire. $Gl_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , ad - bc = 1 \right\}$ a 6 éléments, car

soit $ad = 1$ et $bc = 0$: alors $(a, d, b, c) = (1, 1, 0, 1)$ ou $(1, 1, 1, 0)$ ou $(1, 1, 0, 0)$
soit $bc = 1$ et $ad = 0$: alors $(a, d, b, c) = (1, 0, 1, 1)$ ou $(0, 1, 1, 1)$ ou $(0, 0, 1, 1)$.

$$Gl_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Une autre façon de dresser cet inventaire est de compter les bases de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. Il y a 3 vecteurs non nuls $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$ et $c = (1, 1)$, qui donnent 6 bases : (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).

2) Ce groupe est engendré par $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

En effet, tout élément φ de $Gl_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ laisse fixe le vecteur nul 0 et permute les vecteurs a, b, c.
Soit $\sigma(\varphi)$ la permutation de $\{a, b, c\}$ qu'elle induit. L'application $\varphi \to \sigma(\varphi)$ est un morphisme injectif de groupes $Gl_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to \mathfrak{S}_3$. L'égalité des cardinaux implique que c'est un isomorphisme.
3) Cet exercice rentre exactement dans la remarque faite à la fin de l'exercice précédent.

Exercice 12 : Montrer que $G = \{R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} ; \theta \in \mathbf{R} \}$ et $H = \{S(\theta) = \begin{bmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{bmatrix} ; \theta \in \mathbf{R} \}$ sont des sous-groupes multiplicatifs de $Gl_2(\mathbf{R})$.

Solution : $\det R(\theta) = \det S(\theta) = 1$, donc G et H sont inclus dans $Gl_2(\mathbf{R})$.
De plus, on vérifie sans peine que $R(\theta + \varphi) = R(\theta).R(\varphi)$ et $S(\theta + \varphi) = S(\theta).S(\varphi)$.
R et S sont des morphismes de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $Gl_2(\mathbf{R})$.
Leurs images respectives, G et H, sont donc des sous-groupes commutatifs de $Gl_2(\mathbf{R})$.
A noter que R n'est pas injectif : son noyau est $2\pi\mathbf{Z}$; S est injectif. R et S sont continus.
On dit que G et H sont des sous-groupes à un paramètre de $Gl_2(\mathbf{R})$.

Remarques : 1) $R(\theta) = \exp(\theta A)$ et $S(\theta) = \exp(\theta B)$, où $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2) G est le groupe des rotations du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ muni de la forme $q = x^2 + y^2$; il est inclus dans un plan vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$, le plan des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

H est le groupe des rotations du plan $\mathbf{R}^2$ muni de la forme quadratique non euclidienne $q = x^2 - y^2$ (plan dit hyperbolique ou artinien) ; il est inclus dans le plan vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$ des matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Exercice 13 : Décrire le sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$ engendré par les matrices :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solution : Soit G le groupe engendré par R et S.

G contient les matrices $R^k = \begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix}$ $(0 \le k \le n - 1)$, qui forment un sous-groupe cyclique à n éléments, et les n matrices $R^k.S = \begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & -\cos\frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix}$ $(0 \le k \le n - 1)$.

Ces deux ensembles sont disjoints car les R^k ont pour détermiant 1, les R^k S pour déterminant $-$ 1.
Je dis que G est exactement leur réunion. L'idée est que $R^n = S^2 = (R^k.S)^2 = I$.
L'inverse de R^k est R^{n-k} ; l'inverse de R^k S est R^k S .
$R^h.R^k.S = R^{h+k}.S$ et $R^k.S.R^h = R^{k+n-h}.S$, etc.

Exercice 14 : Soit $D = \mathbf{R} - (\mathbf{Z}\pi + \frac{\pi}{2})$.

Montrer que l'ensemble $G = \{ M(a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos a} & \tan a \\ \tan a & \frac{1}{\cos a} \end{bmatrix} ; a \in D \}$ est un groupe multiplicatif.

Montrer que $H = \{ M(a) ; |a| < \frac{\pi}{2} \}$ est un sous-groupe distingué de G, d'indice 2.

Solution : 1) Si $a \in D$, M(a) est bien définie et $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$.
Donc det M(a) = 1, et G est inclus dans $Gl_2(\mathbf{R})$.
Il est facile de vérifier que $M(a)^{-1} = M(-a)$, soit par comatrice, soit directement.
Cela dit, il n'y a pas de formule simple donnant M(a).M(b) : on n'a pas M(a).M(b) = M(a + b), comme on pouvait croire , mais $M(a).M(b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, où $A = \frac{1+\sin a.\sin b}{\cos a.\cos b}$ et $B = \frac{\sin a+\sin b}{\cos a.\cos b}$.

Cependant, je dis qu'il existe $c \in D$ tel que $A = \frac{1}{\cos c}$, et B = tan c , ou plutôt tel que

$$\cos c = \frac{\cos a.\cos b}{1+\sin a.\sin b} = P \quad \text{et} \quad \sin c = \frac{\sin a+\sin b}{1+\sin a.\sin b} = Q.$$

Tout d'abord, $|\sin a| < 1$ et $|\sin b| < 1$, donc $1 + \sin a.\sin b > 0$. De plus $P^2 + Q^2 = 1$.
Enfin, $|\sin c| < 1$. Et l'on conclut à l'existence de c.
Une solution élégante, mais détournée, consiste à montrer que :

$G' = \{ \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} ; (A, B) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} , A^2 - B^2 = 1 \}$ est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$, et que G' = G.

Le premier point est laissé au lecteur. Il est clair que $G \subset G'$.
Réciproquement, $A^2 - B^2 = 1$ implique $|A| \ge 1$, donc il existe $c \in D$ tel que $A = \frac{1}{\cos c}$.
Alors B = ± tan c. Quitte à changer c en $-$ c, on peut faire que B = tan c. Donc $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \in G$.

Ceci fournit une troisième description, plus commode, de G : $G = \{ \begin{bmatrix} \pm ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & \pm ch\theta \end{bmatrix} ; \theta \in \mathbf{R} \}$.

2) On voit qu'alors $H = \{ \begin{bmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{bmatrix} ; \theta \in \mathbf{R} \}$; on retrouve l'exercice précédent, et l'on conclut facilement.

Remarque : Si l'on introduit la fonction de Gudermann g(x) = Argsh(tan x), qui est une bijection croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur **R**, alors, si $|a| < \frac{\pi}{2}$, $M(a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos a} & \tan a \\ \tan a & \frac{1}{\cos a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{bmatrix}$, où θ = g(*a*),

donc M(*a*).M(*b*) = S(g(*a*)).S(g(*b*)) = S(g(*a*) + g(*b*)) = $M(g^{-1}(g(a) + g(b)))$. Il y a bien de l'addition, mais sous une forme détournée…

Exercice 15 : Pour tout t ∈ **R**, on pose $U(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t+\frac{3t^2}{2} \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer U(s).U(t). En déduire $U(t)^{-1}$.

1) Montrer que G = { U(*t*) ; *t* ∈ **R** } est un sous-groupe de $Gl_3(\mathbf{R})$.

2) Trouver une matrice N telle que (∀t) $U(t) = I + t\,N + t^2\frac{N^2}{2!}$, et $N^3 = 0$. Retrouver ce qui précède.

Solution :

1) On vérifie que U(s).U(t) = U(s + t). Comme $U(0) = I_3$, on en déduit que $U(t)^{-1} = U(-t)$.
Comme (∀t) $U(t) \in GL_3(\mathbf{R})$, U est un homorphisme de groupes de (**R**, +) dans ($GL_3(\mathbf{R})$, ×).
Ce morphisme est de plus injectif et continu.
Du coup, G = { U(*t*) ; *t* ∈ **R** } est un sous-groupe de $Gl_3(\mathbf{R})$ isomorphe à (**R**, +).
C'est un groupe à un paramètre de matrices unipotentes.

2) Si l'on suppose le problème résolu, alors $N = U'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Cette matrice est nilpotente d'indice 3, et l'on vérifie que (∀t) $U(t) = I + t\,N + t^2\frac{N^2}{2!} = \exp(tN)$.

Cela permet de retrouver tout ce qui précède, notamment U(s).U(t) = exp((s + t).N)…

```
> with(linalg):
> U:=t->matrix(3,3,[1,t,2*t+3*t^2/2,0,1,3*t,0,0,1]):U(t);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 2t+\frac{3}{2}t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(U(s),U(t));inverse(U(t));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & t+s & 2t+\frac{3}{2}t^2+3st+2s+\frac{3}{2}s^2 \\ 0 & 1 & 3t+3s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -t & \frac{3}{2}t^2-2t \\ 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> N:=matrix(3,3,[0,1,2,0,0,3,0,0,0]);exponential(N,t);
```

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & t & 2t+\frac{3}{2}t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 16 : Soient $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ dans $M_2(\mathbf{R})$.

1) Pour tout couple (x, y) ∈ $\mathbf{R}^2$, et tout *n* ∈ **N**, calculer $(x.A + y.B)^n$, puis exp(x.A + y.B).

2) Montrer que { exp(x.A + y.B) ; (x, y) ∈ $\mathbf{R}^2$ } est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$. [Oral Mines 2002]

Solution :

1) On constate que $A^2 = I$, $B^2 = O$, $AB = -B$, $BA = B$. A et B ne commutent pas.
$M = xA + yB$ vérifie $M^2 = x^2 I$, d'où, après calcul des puissances de M :

$$\exp M = (\operatorname{ch} x).I + \frac{shx}{x}.M = \begin{bmatrix} \exp(-x)+y.\frac{shx}{x} & y\frac{shx}{x} \\ 2shx-y.\frac{shx}{x} & \exp(x)+y.\frac{shx}{x} \end{bmatrix}.$$

avec la convention $\frac{shx}{x} = 1$ pour x = 0.

2) Soit G l'image du plan Vect(A, B) par l'exponentielle.
Il est immédiat que $G \subset Gl_2(\mathbf{R})$, et même $G \subset Sl_2(\mathbf{R})$, $I \in Gl_2(\mathbf{R})$, $M \in G \Rightarrow M^{-1} \in G$.
En revanche, montrer la stabilité de G par × semble périlleux.
Nous allons procéder par réduction simultanée de A et B. A est diagonalisable, B nilpotente.
Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A'$ et $P^{-1}.B.P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B'$. Du coup ,

$P^{-1}.M.P = xA' + yB' = \begin{bmatrix} -x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} = M'$ et $\exp M' = (\operatorname{ch} x).I + \frac{shx}{x}.M' = \begin{bmatrix} \exp(-x) & y.\frac{shx}{x} \\ 0 & \exp(x) \end{bmatrix}$.

G est conjugué de $G' = \left\{ \begin{bmatrix} \exp(-x) & y.\frac{shx}{x} \\ 0 & \exp(x) \end{bmatrix} ; (x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \right\}$ par automorphisme intérieur. Or on note que $G' = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} ; (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^*_+\times\mathbf{R} \right\}$, et il est clair que ceci est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$.

Remarque : Est-ce que l'image par l'exponentielle de tout plan vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$? Je ne sais. Le lecteur calculera l'exponentielle des matrices $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 17 : 1) Soit p un nombre premier. Cardinaux des groupes $Gl_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ et $Sl_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$?
2) Montrer que $G = \left\{ \begin{bmatrix} k & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} ; (k, m) \in (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^*\times(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}) \right\}$ est un groupe multiplicatif à 20 éléments, ayant deux générateurs A et B vérifiant $A^5 = B^4 = I$, $AB = BA^2$.

Solution :

1) card $Gl_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = (p^2 - 1)(p^2 - p)$, card $Sl_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \frac{1}{p-1}$ card $Gl_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = p(p-1)(p+1)$.

La première assertion peut se démontrer en comptant les matrices $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ telles que $ad = bc$, et en ôtant ce nombre de p^4. Mais mieux obersver que, pour fabriquer une matrice inversible $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, il faut se donner un vecteur (a, b) non nul ($p^2 - 1$ possibilités) et un vecteur (c, d) qui ne lui soit pas colinéaire ($p^2 - p$ possibilités). Enfin, A → det A obéit au principe des bergers, d'où $Sl_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$…

2) G est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})$ à 20 éléments.
Les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ vérifient les relations indiquées.

Pour $0 \le m \le 4$, $A^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$, et A est d'ordre 5. Et $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^*$ est cyclique engendré par 2, donc :

$B^k = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$ selon que k = 0, 1, 2 ou 3, et B est d'ordre 4.

$\begin{bmatrix}k&0\\m&1\end{bmatrix}$. B^{-k} est de la forme $\begin{bmatrix}1&0\\m&1\end{bmatrix}$, donc est une puissance de A. cqfd.

Exercice 18 : les groupes $Gl_2(\mathbf{Z})$ et $Sl_2(\mathbf{Z})$.

1) Soit $Gl_2(\mathbf{Z})$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $M_2(\mathbf{Z})$.
Montrer que $Gl_2(\mathbf{Z}) = \{ M \in M_2(\mathbf{Z}) ; \det M = \pm 1 \}$.
CNS pour que $(a, b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ soit la première ligne d'un élément de $Gl_2(\mathbf{Z})$?

2) Montrer que le sous-groupe $Sl_2(\mathbf{Z}) = \{ M \in M_2(\mathbf{Z}) ; \det M = 1 \}$ est engendré par les matrices :
$S = \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, mais aussi par les matrices T et $U = {}^tT$, ou S et $V = \begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$.

3) Générateurs de $Gl_2(\mathbf{Z})$?

Solution : cf. mes problèmes d'algèbre linéaire.

Exercice 19 : Dans $M_4(\mathbf{C})$, on considère les quatre matrices :

$$A = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

1) Calculer pour $(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4$, le carré de la matrice M = xA + yB + zC + tD. Quelles relations en déduit-on pour A, B, C, D ?

2) Soit G le sous-groupe de $Gl_4(\mathbf{C})$ engendré par A, B, C et D. Montrer que toute matrice de G se met sous la forme $\pm A^\alpha.B^\beta.C^\gamma.D^\delta$, où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{0, 1\}^4$.

3) Trouver le cardinal de G.

[Oral Centrale 2002]

Solution :

1) Faisons confiance à Maple : $M^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2).I_4$.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0]):
B:=matrix(4,4,[0,0,0,I,0,0,-I,0,0,I,0,0,-I,0,0,0]):
C:=matrix(4,4,[0,0,1,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,-1,0,0]):
DD:=diag(1,1,-1,-1):M:=evalm(x*A+y*B+z*C+t*DD);map(simplify,evalm(M^2));
```

$$M := \begin{bmatrix} t & 0 & z & x+Iy \\ 0 & t & x-Iy & -z \\ z & x+Iy & -t & 0 \\ x-Iy & -z & 0 & -t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t^2+z^2+x^2+y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2+z^2+x^2+y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2+z^2+x^2+y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2+z^2+x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

En prenant pour (x, y, z, t) les vecteurs canoniques, on en déduit $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = I_4$.
En prenant (x, y, z, t) = (1, 1, 0, 0), il vient : $2I_4 = (A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = 2I_4 + AB + BA$, donc AB + BA = 0. De même, BC + CB = 0, etc.

Conclusion : A, B, C, D sont quatre symétries deux à deux anticommutantes.

2) Soit G le sous-groupe de $Gl_4(\mathbf{C})$ engendré par A, B, C et D. Il est formé des composés de A, B, C, D dans n'importe quel ordre, mais, en vertu des relations précédentes, on va pouvoir en donner une description plus simple. Montrons que $G = \{ \pm A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta} ; (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{0, 1\}^4 \}$.

Notons $H = \{ \pm A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta} ; (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{0, 1\}^4 \}$.

- H est inclus dans G car $-I_4 = ABAB$.
- H est un sous-groupe de $Gl_4(\mathbf{C})$, car $I_4 \in$ H et, en vertu des relations d'anticommutation, $\varepsilon.A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta}.\varepsilon'.A^{\alpha'}.B^{\beta'}.C^{\gamma'}.D^{\delta'}$ peut se mettre sous la forme $\varepsilon.\varepsilon'.A^{\alpha''}.B^{\beta''}.C^{\gamma''}.D^{\delta''}$.

De plus, l'inverse de $\varepsilon.A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta}$, qui est $\varepsilon.D^{\delta}.C^{\gamma}.B^{\beta}.A^{\alpha}$, peut se mettre également sous la forme $\varepsilon'.A^{\alpha'}.B^{\beta'}.C^{\gamma'}.D^{\delta'}$ en vertu des relations d'anticommutation.

- Enfin, H contient A, B, C et D. On en déduit que H = G.

3) Cardinal de G. Il découle de 2) que card G ≤ 32. Montrons que card G = 32.

Montrons d'abord que $\varepsilon.A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta} = I_4$ implique $\varepsilon = 1$ et $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

$B^{\beta}.e_1 = \varepsilon.A^{\alpha}.D^{\delta}.C^{\gamma}.e_1$ est réelle ; or B est imaginaire pure ; cela implique déjà $\beta = 0$.

Comme $D^{\delta}.e_1 = e_1$, on a $\varepsilon.A^{\alpha}.C^{\gamma}.e_1 = e_1$. Si $\gamma = 1$, on trouve $A^{\alpha}.e_3 = \varepsilon.e_1$: impossible.

Donc $\gamma = 0$, puis $\alpha = \delta = 0$ et $\varepsilon = 1$.

Montrons maintenant que $\varepsilon.A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta} = \varepsilon'.A^{\alpha'}.B^{\beta'}.C^{\gamma'}.D^{\delta'}$ implique $\varepsilon = \varepsilon'$, $\alpha = \alpha'$, etc.

$\varepsilon.A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}.D^{\delta} = \varepsilon'.A^{\alpha'}.B^{\beta'}.C^{\gamma'}.D^{\delta'}$ implique $A^{\alpha-\alpha'}.B^{\beta-\beta'}.C^{\gamma-\gamma'}.D^{\delta-\delta'} = \pm I_4$, et on est ramené au résultat précédent : $\alpha = \alpha'$, etc., puis $\varepsilon = \varepsilon'$.

Références : Problème X M' 1987, 2ème composition de maths.

Exercice 20 : Montrer que les deux ensembles suivants sont des groupes multiplicatifs :

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} ; (a, b) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} , a^2 - 2b^2 = 1 \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} ; x \in \mathbf{R}^* \right\} .$$

Solution : intéressant exemple de faux amis !

- $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} ; (a, b) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} , a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$ est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{Q})$.

Tout d'abord G est inclus dans $Gl_2(\mathbf{Q})$. G contient I.

$\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A \end{bmatrix}$, où $A = ac + 2bd$, $B = bc + ad$; $A^2 - 2B^2 = 1$ comme déterminant.

Enfin, l'inverse de $\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{bmatrix}$, qui est élément de G.

- $H = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} ; x \in \mathbf{R}^* \right\}$ n'est pas un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$, car il n'est pas inclus dans $Gl_2(\mathbf{R})$!

Cependant, (H, ×) est bien un groupe multiplicatif.

En effet $\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ xy & 0 \end{bmatrix}$, où $xy \neq 0$: la loi est donc interne.

Elle est associative comme restriction d'une loi associative . Elle est de plus commutative.

H admet comme neutre $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ a pour inverse dans H $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 \\ x^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

En résumé, H est un groupe isomorphe à ($\mathbf{R}^*$, ×).

Exercice 21 : Quel est le groupe engendré par les matrices diagonalisables de $Gl_n(\mathbf{R})$?

[Oral ENS 2002]

Solution : En vertu de la méthode du pivot dit de Gauss, $Gl_n(\mathbf{R})$ est engendré par :
- Les matrices d'affinité $\text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$, qui sont diagonales.
- Les matrices de transposition P_{ij}, qui sont involutives. Ce sont des symétries vectorielles hyperplanes ; elles sont donc diagonalisables.
- Les transvections $T_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$). Ces transvections ne sont jamais diagonalisables, mais sont produits de diagonalisables.

Ainsi, $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, produit de deux diagonalisables (valeurs propres distinctes).

Ceci se généralise à des matrices carrées d'ordre $n \geq 3$.

Conclusion : Le sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{R})$ engendré par les matrices diagonalisables est $Gl_n(\mathbf{R})$.

Remarque : Cela reste vrai dans $Gl_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}$ de caractéristique $\neq 2$.

En revanche, $Gl_2(\mathbf{F}_2)$, qui a 6 éléments, n'est pas engendré par les diagonalisables, car la seule matrice diagonalisable dans $Gl_2(\mathbf{F}_2)$ est I_2.

Exercice 22 : Soit $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

1) Montrer que $G = \{ A^k \,;\, k \in \mathbf{N}^* \}$ est un groupe pour la multiplication. Quel est son cardinal ? Si U est la matrice élément neutre de ce groupe, quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme canoniquement associé à U ?

2) Montrer que exp A est une rotation. [Oral Mines 2007]

Solution :

1) On constate que $A^3 = -A$, $A^4 = -A^2$, puis $A^5 = A$, de sorte que $G = \{ A, A^2, A^3, A^4 \}$.
G a 4 éléments, est stable pour la multiplication, et la loi induite est commutative.

$\times$	A	A^2	A^3	A^4
A	A^2	A^3	A^4	A
A^2	A^3	A^4	A	A^2
A^3	A^4	A	A^2	A^3
A^4	A	A^2	A^3	A^4

On voit sur la table que l'élément neutre est $E = A^4$, et que tout élément est inversible.
Ainsi, G est un groupe, d'ailleurs cyclique et engendré par A.
$E^2 = E$, donc E est un projecteur, auto-adjoint car A est antisymétrique.
On constate après calcul que c'est l'orthoprojecteur sur le plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$.
Plus généralement, si A est une matrice telle que $A^k = A$, où $k \geq 2$, k étant le plus petit indice tel que $A^k = A$, alors $G = \{ A^n , n \geq 1\}$ est un groupe multiplicatif à k éléments, de neutre A^{k-1}, et cyclique.

2) A est antisymétrique réelle. C'est la matrice de $X \to \Omega \wedge X$, où $\Omega(1/3, -2/3, 2/3)$ est unitaire.
Donc exp A est une rotation.

$$\exp A = I + A.\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots\right) + A^2.\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} + \dots\right) = I + (\sin 1).A + (\cos 1).A^2 .$$

Remarques :

1) Pour les éléments de la rotation, cf. mes exercices d'algèbre bilinéaire et sur l'exponentielle.
2) A est pseudo-inversible au sens des groupes ; cf. mes problèmes d'algèbre linéaire.

Exercice 23 : Soient A = $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, et E = {A, B, A^{-1}, B^{-1}}. On se propose d'étudier le sous-groupe < A , B > de $Sl_2(\mathbf{Z})$ = { M ∈ $M_2(\mathbf{Z})$; det M = 1 } engendré par A et B.

1) Soit (a_n) une suite d'entiers relatifs non nuls. On définit les suites (x_n) et (y_n) par :
$\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{bmatrix} = C^{a_n}\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$, où C = A si n est impair, B si n est pair. On pose $u_n = y_{2n}$.
Montrer que $|x_n| < |y_n|$ si n est pair , et $|x_n| > |y_n|$ si n est impair.
En déduire que la suite $(|u_n|)$ est strictement croissante.

2) En déduire que pour tout $n \geq 1$ et toute suite $(M_1, \dots, M_n) \in E^n$ telle que $M_k.M_{k+1} \neq I$ pour tout $k \in [1, n-1]$, on a : $M_1.M_2\dots M_n \neq I$. Décrire avec précision le groupe < A, B >.

[Oral Polytechnique 1994]

Solution : très bel exemple de « groupe libre ».
cf. mes notes sur les groupes définis par générateurs et relations.

Remarque : On rencontre un autre exemple de groupe libre d'origine géométrique dans le paradoxe de Banach-Tarski, où il joue un rôle-clé.

3. *Inversion.*

Exercice 24 : Inverser les matrices suivantes dans $M_n(\mathbf{R})$:

$$J = \begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & \dots & 0\end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}1 & q & q^2 & \dots & q^{n-1}\\ 0 & 1 & q & \dots & q^{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & q\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

Solution : 1) Inversion de J.
a) Méthode du système linéaire. On écrit le système linéaire associé Y = J.X.
Ajoutant les équations, il vient $x_1 + \dots + x_n = \frac{1}{n-1}.(y_1 + \dots + y_n)$

Puis, par soustraction : (∀i) $x_i = \frac{y_1}{n-1} + \dots + \frac{2-n}{n-1} y_i + \dots + \frac{y_n}{n-1}$.

Ces formules montrent l'inversibilité de J, car Y = 0 ⇒ X = 0. Et $J^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{bmatrix}2-n & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2-n & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & \dots & 2-n\end{bmatrix}$.

b) Méthode polynomiale : $J^2 = (n-1).I + (n-2).J$.
Du coup : $J.(J + (2-n).I) = (J + (2-n).I).J = (n-1).I$ et $J^{-1} = \frac{1}{n-1}(J + (2-n).I)$ derechef.

c) Méthode par pivot. Pratiquée habilement, elle donne aussi l'inverse.
En effet, on ramène J à l'identité en effectuant les opérations suivantes sur les colonnes :
♣ ajouter à la première la somme des autres ;
♦ diviser la première colonne par $n - 1$;
♥ retrancher à chaque colonne d'indice > 1 la première ;
♠ multiplier chaque colonne d'indice > 1 par –1.

$$J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(n-1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} = I .$$

Il reste à faire le produit des 4 matrices ci-dessus. On note au passage que $\det J = (-1)^{n-1}(n-1)$.

2) <u>Inversion de A</u>. On voit que A est trigonale supérieure inversible. Son inverse itou.
La méthode du système linéaire est ici la plus indiquée. Le système linéaire A.X = Y s'inverse en

$$x_1 = y_1 - y_2 \ , \ x_2 = y_2 - y_3 \ , \ \dots \ , \ x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \ , \ x_n = y_n .$$

Du coup : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

3) <u>Inversion de B</u>. On voit que B est trigonale supérieure inversible. Son inverse itou.
La méthode du système linéaire est ici la plus indiquée. Le système linéaire B.X = Y s'inverse en deux temps :

$$x_1 + \dots + x_n = y_1 - y_2 \ , \ x_2 + \dots + x_n = y_2 - y_3 \ , \ \dots \ , \ x_{n-1} + x_n = y_{n-1} - y_n \ , \ x_n = y_n .$$

Puis : $x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3$, $x_2 = y_2 - 2y_3 + y_4$, … , $x_{n-1} = y_{n-1} - 2y_n$, $x_n = y_n$.

Du coup : $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Remarque</u> : en vérité ces calculs suggèrent que $B = A^2$, donc $B^{-1} = (A^{-1})^2$.

4) Enfin, C s'inverse comme A, qu'elle généralise : $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -q & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Remarque</u> : plus généralement, si N est nilpotente, I – N est inversible, d'inverse $I + N + N^2 + \dots$
On peut reprendre ces questions à l'aide des séries entières formelles.
Ecrivons $B = I + 2N + 3N^2 + \dots$, où N est nilpotente.
Introduisons la série formelle $1 + 2X + 3X^2 + \dots = D(\frac{1}{1-X}) = \frac{1}{(1-X)^2}$.
Autrement dit $(1 - X)^2 (1 + 2X + 3X^2 + \dots) = 1$. Substituant B à X dans cette identité, il vient $B^{-1} = I - 2N + N^2$.

<u>Exercice 25</u> : 1) Inverser la matrice $M = (C_j^i)_{0\le i,j\le n}$ d'ordre $n+1$ (avec les conventions habituelles sur les binômiaux). Pour cela, on considérera l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ ayant pour matrice M dans la base canonique.

2) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Montrer l'équivalence :

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \ \ v_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . u_k \iff (\forall n \in \mathbf{N}) \ \ u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} . C_n^k . v_k .$$

3) <u>Application</u> : Soit $d(n)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes.

Montrer que $(\forall n \in \mathbf{N}) \quad n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.d(k)$. En déduire une expression de d(n), puis $\lim \frac{d(n)}{n!}$.

<u>Solution</u> : 1) Soit T l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ ayant M = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & C_n^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pour matrice dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Pour tout j, $T(X^j) = \sum_{i=0}^{j} C_j^i X^i = (X+1)^j$, donc par linéarité T(P) = P(X + 1).

T est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ d'inverse U : P → P(X − 1) ; $U(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} C_j^i X^i$.

Donc $M^{-1} = ((-1)^{j-i} C_j^i)_{0 \le i,j \le n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \dots & (-1)^{n-1}C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -C_n^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Remarque</u> : En écrivant que $M.M^{-1} = I$, on obtient, pour $0 \le i \le k \le n$ $\sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} C_j^i C_k^j = \delta_{i,k}$.

On peut la vérifier directement.

2) <u>Une formule d'inversion</u>. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Montrons l'équivalence :

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.u_k \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}.C_n^k.v_k .$$

Fixons n, et notons $U_n = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_n)$ et $V_n = {}^t(v_0, v_1, \dots, v_n)$.

Tout découle de ce que $V_n = M.U_n \Leftrightarrow U_n = M^{-1}.V_n$.

3) <u>Application aux dérangements</u>.

Notons $d_k(n)$ le nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ ayant k points fixes.

Je dis que $d_k(n) = C_n^k.d(n-k)$, car, pour se donner une permutation ayant k points fixes, il faut se donner ses points fixes, c'est-à-dire une partie A à k éléments de $\{1, \dots, n\}$, et une permutation sans point fixe du complémentaire.

Par suite $\qquad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad n! = \sum_{k=0}^{n} d_k(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.d(n-k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.d(k)$.

La formule d'inversion du 2) donne alors :

$$d(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}.C_n^k.k! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}.\frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} .$$

<u>Conséquence</u> : $\frac{d(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to e^{-1}$ (Montmort, 1708).

Autrement dit, si lors des soupers du Régent, n roués et leurs épouses font l'amour dans le noir, il y a une probabilité voisine de e^{-1} pour qu'aucun ne fasse l'amour à sa femme.

<u>Exercice 26</u> : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $(\forall i) \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$.

Montrer que B = I – A est inversible. Exprimer B^{-1} sous forme de série.
Si A est réelle, montrer que det B > 0.

<u>Solution</u> : 1) <u>B est inversible</u>.

Il suffit de montrer que B.X = 0 $\Rightarrow$ X = 0, autrement dit que A.X = X $\Rightarrow$ X = 0.

On a, pour tout i : $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j$, donc $|x_i| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$.

Supposons X $\neq$ 0, soit i un indice tel que $|x_i| = \max |x_k|$. Alors $|x_i| \le (\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|).|x_i| < |x_i|$. Impossible !

<u>Autre solution</u> : B est diagonalement dominante, donc obéit au théorème d'Hadamard.
En effet, pour tout i : $|b_{ii}| = |1 - a_{ii}| \ge 1 - |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$.

<u>Autre solution</u> : Munissons $\mathbf{C}^n$ de la norme $\|X\|_\infty$.

Si Y = AX, pour tout i, $|y_i| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .\|X\|_\infty \le \max_i(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|).\|X\|_\infty$. Donc $\|AX\|_\infty \le \max_i(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|).\|X\|_\infty$

On en déduit que $|||A||| < 1$, puis aussitôt : AX = X $\Rightarrow$ X = 0.

2) <u>Calcul de B^{-1}</u> . Il découle de la 3ème méthode que $B^{-1} = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

<u>Autre solution</u> : BX = Y $\Leftrightarrow$ X = AX + Y $\Leftrightarrow$ X = F(X), où F(X) = Y + AX.
La fonction F est affine contractante. D'après le théorème de Picard-Banach, elle admet un unique point fixe, limite de la suite (X_k) définie par $X_0 = 0$, $X_{k+1} = F(X_k)$.

3) Considérons la fonction f : t $\in$ [0, 1] $\to$ det(I – tA).
La matrice I – tA est inversible pour tout t $\in$ [0, 1], car tA vérifie les mêmes hypothèses que A.
La fonction f est continue sur [0, 1], à valeurs $\neq$ 0, et telle que $f(0) = 1$.
En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, $f(t) > 0$ sur [0, 1], donc $f(1)$ = det B > 0.

<u>Exercice 27</u> : Soit M = $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ une matrice-blocs carrée, où A et D sont carrées.

Montrer que M est inversible ssi A et D le sont, et calculer M^{-1}.

<u>Solution</u> : 1) Avec les déterminants, tout est facile : det M = (det A).(det D).
Autre solution : Si M est inversible, M.Z = 0 $\Rightarrow$ Z = 0.

A.X = 0 $\Rightarrow$ M $\begin{bmatrix} X \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ X = 0 ; donc A est inversible.

D.Y = 0 $\Rightarrow$ M $\begin{bmatrix} O \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ Y = 0 ; donc D est inversible.

Réciproquement, si A et D sont inversibles, le raisonnement <u>ci-dessous</u> montre que :

$$M \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix} \Rightarrow X = 0 \text{ et } Y = 0.$$

2) Pour inverser M, formons le système linéaire par blocs associé :

M $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$ s'écrit A.X + B.Y = X' , D.Y = Y', qui s'inverse en

$$Y = D^{-1}.Y' \quad , \quad X = A^{-1}.(X' - B.Y) = A^{-1}.(X' - B.D^{-1}.Y').$$

Repassant aux matrices, il vient : $M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}.B.D^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$.

<u>Exercice 28</u> : Soit M = $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ une matrice-blocs carrée, où A est supposée *inversible*.

1) Montrer que det M = det(A).det(D – C.A^{-1}.B) .

2) On suppose que B est le vecteur-colonne X , C un vecteur-ligne ${}^tY$, D = (z).

a) Indiquer une cns pour que M soit inversible. On note $M^{-1} = \begin{bmatrix} B & U \\ {}^tV & w \end{bmatrix}$.

b) Exprimer B, U, V, w à l'aide de A, X, Y et z . On trouvera :

$w = (z - {}^tY.A^{-1}.X)^{-1}$, $B = A^{-1} + w.A^{-1}.X.{}^tY.A^{-1}$, $U = - w.A^{-1}.X$ et $V = - w.{}^tA^{-1}.Y$.

c) Si l'on connaît A^{-1}, combien d'opérations sont nécessaires pour calculer M^{-1} ?

d) <u>Exemple</u> : inverser les matrices $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

<u>Solution</u> :

<u>Exercice 29</u> : Soient $a \in \mathbf{Z}$, A et B $\in M_n(\mathbf{Z})$. On suppose que tous les coefficients de $AB - I_n$ sont multiples de a. Montrer que tous les coefficients de $BA - I_n$ sont multiples de a.

<u>Solution</u> : [Jean-Denis Eiden, Exercices corrigés]

4. *Equivalence et rang*.

<u>Exercice 30</u> : On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $A_{n,p} = (F_{i+j-2})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$.
Quel est le rang de la matrice $A_{n,p}$? Trouver son image, son noyau.

<u>Solution</u> :

Si n et p sont ≥ 2, je dis que $\mathrm{rg}(A_{n,p}) = 2$.

En effet, chaque colonne est la somme des deux précédentes.

En effet, si l'on note $c_1, \dots, c_p$ les colonnes de $A_{n,p}$ on a de proche en proche :

$$\mathrm{rg}(A_{n,p}) = \mathrm{rg}(c_1 , \dots, c_p) = \mathrm{rg}(c_1 , \dots, c_{p-1}) = \mathrm{rg}(c_1 , \dots, c_{p-2}) = \mathrm{rg}(c_1, c_2) = 2.$$

Plus précisément, si l'on note $P_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \in Gl_n(\mathbf{R})$, alors :

$${}^tP_n.A_{n,p}.P_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ donc } {}^tP_n.A_{n,p}.P_p.\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = J_2.$$

$\mathrm{Im}(A_{n,p}) = \mathrm{Vect}(c_1, c_2)$, et si l'on note $f_1, \dots, f_n$ les lignes en tant que formes linéaires, alors

$$A_{n,p}.X = 0 \iff \langle f_1 , X \rangle = \langle f_2 , X \rangle = 0.$$

x_1 et x_2 s'expriment en fonction de $x_3, \dots, x_p$.

<u>Exercice 31</u> : Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{\mathbf{K}}(5, 6)$.

Calculer rg A. Base et équations de Ker A. Base et équations de Im A. Résoudre le système AX = B.

Solution : Calculons une réduite échelonnée en lignes de A.

Opérations	Matrices associées	Produits cumulés	Métamorphoses de A
		$I = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 2&1&1&0&0&0 \\ 1&2&0&2&1&2 \\ 0&0&1&2&2&1 \\ 2&1&2&2&0&0 \\ 1&2&2&1&1&2 \end{bmatrix}$
$L_1 \to -L_1$	$P_1 = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$Q_1 = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$A_1 = \begin{bmatrix} 1&2&2&0&0&0 \\ 1&2&0&2&1&2 \\ 0&0&1&2&2&1 \\ 2&1&2&2&0&0 \\ 1&2&2&1&1&2 \end{bmatrix}$
$L_2 \to L_2 - L_1$ $L_4 \to L_4 + L_1$ $L_5 \to L_5 - L_1$	$P_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ -1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0 \\ -1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$Q_2 = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ -1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$A_2 = \begin{bmatrix} 1&2&2&0&0&0 \\ 0&0&1&2&1&2 \\ 0&0&1&2&2&1 \\ 0&0&1&2&0&0 \\ 0&0&0&1&1&2 \end{bmatrix}$
$L_1 \to L_1 + L_3$ $L_3 \to L_3 - L_2$ $L_4 \to L_4 - L_2$	$P_3 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&-1&1&0&0 \\ 0&-1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$Q_3 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 2&2&1&0&0 \\ 1&2&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$A_3 = \begin{bmatrix} 1&2&0&2&1&2 \\ 0&0&1&2&1&2 \\ 0&0&0&0&1&2 \\ 0&0&0&0&2&1 \\ 0&0&0&1&1&2 \end{bmatrix}$
$L_3 \leftrightarrow L_5$	$P_4 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$	$Q_4 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&2&0&1&0 \\ 2&2&1&0&0 \end{bmatrix}$	$A_4 = \begin{bmatrix} 2&1&1&0&0&0 \\ 1&2&0&2&1&2 \\ 0&0&1&2&2&1 \\ 2&1&2&2&0&0 \\ 1&2&2&1&1&2 \end{bmatrix}$
$L_1 \to L_1 + L_3$ $L_2 \to L_2 + L_3$	$P_5 = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$Q_5 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&1 \\ 2&1&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&2&0&1&0 \\ 2&2&1&0&0 \end{bmatrix}$	$A_5 = \begin{bmatrix} 1&2&0&0&2&1 \\ 0&0&1&0&2&1 \\ 0&0&0&1&1&2 \\ 0&0&0&0&2&1 \\ 0&0&0&0&1&2 \end{bmatrix}$
$L_4 \to -L_4$	$P_6 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$Q_6 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1 \\ 2&1&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 2&1&0&2&0 \\ 2&2&1&0&0 \end{bmatrix}$	$A_6 = \begin{bmatrix} 1&2&0&0&2&1 \\ 0&0&1&0&2&1 \\ 0&0&0&1&1&2 \\ 0&0&0&0&1&2 \\ 0&0&0&0&1&2 \end{bmatrix}$
$L_1 \to L_1 + L_4$ $L_2 \to L_2 + L_4$ $L_3 \to L_3 + 2.L_4$ $L_5 \to L_5 + 2.L_4$	$P_7 = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&2&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&2&1 \end{bmatrix}$	$Q_7 = \begin{bmatrix} 0&2&0&2&1 \\ 1&2&0&2&1 \\ 2&2&0&1&1 \\ 2&1&0&2&0 \\ 0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$	$A_7 = \begin{bmatrix} 1&2&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&2 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

Conclusion : $Q_7.A = A_7$ et $A.X = B \Leftrightarrow A_7.X = Q_7.B$.
Rg A = 4 et A.X = B se traduit par

$$\begin{cases} x_1 + 2.x_2 = 2.b_2 + 2.b_4 + b_5 \\ x_3 = b_1 + 2.b_2 + 2.b_4 + b_5 \\ x_4 = 2.b_1 + 2.b_2 + b_4 + b_5 \\ x_5 + x_6 = 2.b_1 + b_2 + 2.b_4 \\ 0 = b_2 + b_3 + b_4 \end{cases}$$

Noyau de A. C'est un plan dans $\mathbf{K}^6$.

Equations cartésiennes : $x_1 + 2.x_2 = x_3 = x_4 = x_5 + x_6 = 0$.
Equations paramétriques : Ker A = $\{ (a, a, 0, 0, b, 2b) ; (a, b) \in \mathbf{K}\times\mathbf{K} \}$.
Base : ((1, 1, 0, 0, 0, 0) , (0, 0, 0, 0, 1, 2)).

<u>Image de A</u>. C'est un hyperplan de $\mathbf{K}^5$.

Equation cartésienne : $b_2 + b_3 + b_4 = 0$.
Base : ((1, 0, 0, 0, 0) , (0, 0, 0, 0, 1) , (0, 1, 2, 0, 0) , (0, 0, 1, 2, 0)).

<u>Résolution du système A.X = B</u>.

• Si $b_2 + b_3 + b_4 \neq 0$, système impossible.

• Si $b_2 + b_3 + b_4 = 0$, les solutions forment un plan affine.

$$\begin{cases} x_1 = 2.b_2 + 2.b_4 + b_5 + x_2 \\ x_3 = b_1 + 2.b_2 + 2.b_4 + b_5 \\ x_4 = 2.b_1 + 2.b_2 + b_4 + b_5 \\ x_5 = 2.b_1 + b_2 + 2.b_4 + 2.x_6 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : dans **K**, et plus généralement dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou dans un corps fini, les calculs sont exacts : pas d'erreurs d'arrondi ! L'Algèbre avec un A !

<u>Exercice 33</u> : Soient A, B deux matrices appartenant à $M_{\mathbf{K}}(n, p)$. S'il existe deux matrices carrées P et P' d'ordre n, et deux matrices carrées Q et Q' d'ordre p telles que B = P.A.Q et A = P'.B.Q' , montrer que A et B sont équivalentes.

<u>Solution</u> : Il faut et il suffit de montrer que A et B ont même rang.
Or rg(B) = rg(P.A.Q) ≤ rg(P.A) ≤ rg(A) et rg(A) = rg(P'.B.Q') ≤ rg(P'.B) ≤ rg(B).

<u>Remarque</u> : Procéder autrement s'avère impossible, car O = O.O.O et O = O.O.O : montrer que P et Q sont inversibles, ou P' et Q' ne marche pas…

<u>Exercice 34</u> : Soient A, A', B, B' quatre matrices carrées d'ordre n sur un corps commutatif **K**, telles que A soit inversible. Pour qu'il existe deux matrices carrées inversibles P, Q d'ordre n telles que A' = PAQ et B' = PBQ, il faut et il suffit que A' soit inversible et que BA^{-1} et $B'A'^{-1}$ soient semblables.

<u>Solution</u> :
« Il faut » : si A' = PAQ et B' = PBQ où P et Q sont inversibles, alors A' est inversible, et
$B'A'^{-1} = P.B.Q.Q^{-1}.A^{-1}.P^{-1} = P.B.A^{-1}.P^{-1}$, donc $B'A'^{-1}$ et BA^{-1} sont semblables.

« Il suffit » : supposons A' et P inversibles, telles que $B'A'^{-1} = P.B.A^{-1}.P^{-1}$.

La matrice $Q = A^{-1} P^{-1}.A'$ est inversible et vérifie B' = PBQ ; de plus A' = PAQ ! cqfd.

<u>Références</u> : Bourbaki, A.II 206, n° 10, Jean Dieudonné, Œuvres mathématiques, t. 2, p. 86-102.

<u>Exercice 35</u> : Soient $A \in M_{\mathbf{K}}(m, n)$ et $B \in M_{\mathbf{K}}(p, q)$.
Montrer que $[\ \forall X \in M_{\mathbf{K}}(n, p) \quad A.X.B = O\ ] \Rightarrow A = O$ ou $B = O$.

<u>Solutions</u> :
<u>Preuve directe</u> : On montre que $A \neq O \Rightarrow B = O$.

Ecrivons que $A.E_{jk}.B = O$ pour tout couple (j, k). Or $A.E_{jk}.B = (a_{ij}.b_{kh})_{ih}$.

Donc $\forall(i, j, k, h)$ $a_{ij}.b_{kh} = 0$. Si l'un des a_{ij} est non nul, tous les b_{kh} sont nuls.

<u>Autre preuve directe</u> : $\forall x \in M_{\mathbf{K}}(n, 1) = \mathbf{K}^n$ $\forall y \in M_{\mathbf{K}}(p, 1) = \mathbf{K}^p$ $A.x.{}^ty.B = 0$. Or :

Lemme : $\forall u \in M_{\mathbf{K}}(m, 1) = \mathbf{K}^m \quad \forall v \in M_{\mathbf{K}}(p, 1) = \mathbf{K}^q \quad u.{}^t v = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$.

Donc $A \neq O \Rightarrow \exists x \ A.x \neq 0 \Rightarrow \forall y \ {}^t y.B = 0 \Rightarrow B = O$.

Contraposition : Ce raisonnement est souvent indiqué pour montrer que $P \Rightarrow Q$ ou R .

Si A et B sont non nulles, supposons par exemple a_{ij} et $b_{kl} \neq 0$. Je dis que $Y = A.E_{jk}.B \neq O$.

En effet $Y_{il} = a_{ij}.b_{kl}$.

On peut aussi donner une preuve linéaire.

Exercice 36 : Soit $A \in M_{\mathbf{K}}(n, p)$. Trouver $\dim \{ X \in M_{\mathbf{K}}(p, n) \,;\, A.X = O \text{ et } X.A = O \}$.

Solutions :

1) Solution linéaire : identifions A et X aux applications linéaires canoniquement associées.
Alors $A.X = O$ et $X.A = O \Leftrightarrow \operatorname{Im} X \subset \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} X$.
X est nulle sur Im A, et à valeurs dans Ker A.
Si $\mathbf{K}^n = \operatorname{Im} A \oplus F$, pour se donner X il suffit de se donner sa restriction à F : elle est linéaire de F dans Ker A. Ainsi $\{ X \in M_{\mathbf{K}}(p, n) \,;\, A.X = O \text{ et } X.A = O \}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(F, \operatorname{Ker} A)$. Donc

$$\boxed{\dim \{ X \in M_{\mathbf{K}}(p, n) \,;\, A.X = O \text{ et } X.A = O \} = (n - \operatorname{rg} A) \times \dim \operatorname{Ker} A = (n - \operatorname{rg} A) \times (p - \operatorname{rg} A).}$$

2) Solution matricielle : Il existe $(P, Q) \in Gl_p(\mathbf{K}) \times Gl_n(\mathbf{K})$ $Q^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ où $r = \operatorname{rg} A$.

Cherchons X sous la forme $P^{-1}.X.Q = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$.

$A.X = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow R = S = O$; $X.A = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow R = T = O$.

Finalement $A.X = O$ et $X.A = O \Leftrightarrow P^{-1}.X.Q = \begin{bmatrix} O & O \\ O & U \end{bmatrix}$. On retrouve aussitôt 1).

Exercice 37 : Soient $A \in Gl_n(\mathbf{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, $C \in M_{p,n}(\mathbf{R})$, $D \in M_p(\mathbf{R})$, $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

Condition nécessaire et suffisante pour que rg M = *n* ?

Solution : [Oral Centrale MP 2012, RMS n° 717]

M a même rang que $M' = \begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$.

Par conséquent, $\operatorname{rg} M = n + \operatorname{rg}(D - C.A^{-1}.B)$, donc $\operatorname{rg} M = n$ ssi $D = C.A^{-1}.B$.

Exercice 38 : **Inversible × nilpotente**.
Dans $M_n(\mathbf{K})$, caractériser les matrices M de la forme $M = A.B$, où A est inversible, et B est nilpotente.

Solution : [Jean-Denis Eiden, artisan…]
Si M est de la forme indiquée, M n'est pas inversible.
Réciproquement, supposons M non inversible.

Soient $r < n$ son rang, P et Q deux matrices inversibles telles que $P^{-1}.M.Q = \begin{bmatrix} O & I_r \\ O & O \end{bmatrix}$.

Ecrivons $M = P.\begin{bmatrix} O & I_r \\ O & O \end{bmatrix}.Q^{-1} = P.Q^{-1}.Q.\begin{bmatrix} O & I_r \\ O & O \end{bmatrix}.Q^{-1} = A.B$, où $A = P.Q^{-1}$ et $B = Q.\begin{bmatrix} O & I_r \\ O & O \end{bmatrix}.Q^{-1}$.

A est bien inversible et B est nilpotente.

Exercice 39 : 1) Dans $M_n(\mathbf{K})$, montrer que toute matrice de rang $< n$ est équivalente à une matrice nilpotente.

2) Soit $f : M_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ une application non constante vérifiant $\forall(A, B)\ f(A.B) = f(A).f(B)$.

Montrer que A non inversible $\Leftrightarrow$ $f(A) = 0$.

3) Exemples de telles fonctions f ?

Solution :

1) Toute matrice de rang $r < n$ est équivalente à $N = \begin{bmatrix} O & I_r \\ O & O \end{bmatrix}$ (car même rang). Or N est nilpotente.

2) Soit $f : M_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ une application non constante vérifiant $\forall(A, B)\ f(A.B) = f(A).f(B)$.

• On a $f(O_n) = f(O_n)^2$, donc $f(O_n) = 0$ ou 1. Mais $f(O_n) = 1$ impliquerait $1 = f(O_n) = f(O_n).f(A) = f(A)$ pour toute A : impossible, car f n'est pas constante. Donc $f(O_n) = 0$.

• On a $f(I_n) = f(I_n)^2$, donc $f(I_n) = 0$ ou 1. Mais $f(I_n) = 0$ impliquerait $f(A) = f(I_n).f(A) = 0$ pour toute A : impossible, car f n'est pas constante. Donc $f(I_n) = 1$.

♦ Si P est inversible, $1 = f(P).f(P^{-1})$, donc $f(P) \neq 0$.

♦ Si P n'est pas inversible, d'après 1), P est équivalente à une matrice nilpotente N : $P = A^{-1}.N.B$ (A et B inversibles), donc $f(P) = f(A^{-1}).f(N).f(B)$.

Or $0 = f(O_n) = f(N^r) = f(N)^r$; donc $f(N) = 0$, et $f(P) = 0$. cqfd.

3) Exemples de telles applications f : $A \to \det A$, $A \to (\det A)^2$, $A \to (\det A)^m$, etc.

Exercice 40 : **factorisation matricielle**.

1) Soient $A \in M_{\mathbf{K}}(n, p)$, $B \in M_{\mathbf{K}}(n, q)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) Il existe $X \in M_{\mathbf{K}}(p, q)$ telle que $A.X = B$;

ii) $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg } A$;

iii) $\text{Im } B \subset \text{Im } A$.

Si ces conditions sont remplies, montrer que l'ensemble des $X \in M_{\mathbf{K}}(p, q)$ telles que $A.X = B$ est un sous-espace affine ; quelle est sa dimension ?

2) Soient $A \in M_{\mathbf{K}}(p, q)$, $B \in M_{\mathbf{K}}(n, q)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) Il existe $X \in M_{\mathbf{K}}(n, p)$ telle que $X.A = B$;

ii) $\text{rg}\left(\frac{A}{B}\right) = \text{rg } A$;

iii) $\text{Ker } A \subset \text{Ker } B$.

Dans ces conditions, montrer que l'ensemble des $X \in M_{\mathbf{K}}(n, p)$ telles que $X.A = B$ est un sous-espace affine ; quelle est sa dimension ?

3) Exemples : Résoudre : $A.X = B$, où $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Résoudre l'équation : $X.A = B$, où $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Solution : Donnons de cet exercice une approche essentiellement matricielle. Les aspects linéaires sont traités dans mes problèmes d'algèbre linéaire.

1) Factorisation à droite. Soient A ∈ $M_{\mathbf{K}}(n, p)$, B ∈ $M_{\mathbf{K}}(n, q)$.

Lemme 1 : Im (A | B) = Im A + Im B.

Preuve : Si $a_1, \dots, a_p$ sont les colonnes de A, $b_1, \dots, b_q$ celles de B,

Im (A | B) = Vect $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ = Vect$(a_1, \dots, a_p)$ + Vect$(b_1, \dots, b_q)$ = Im A + Im B.

Autre solution : Im (A | B) = { Ax + By ; x ∈ $\mathbf{K}^p$, y ∈ $\mathbf{K}^q$ }.

Corollaire : max(rg A , rg B) ≤ rg(A | B) ≤ rg A + rg B.

Preuve : Cela découle aussitôt du lemme, via Grassmann.

i) ⇒ ii) et iii) S'il existe X ∈ $M_{\mathbf{K}}(p, q)$ telle que A.X = B, les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A. Ainsi, le rang des colonnes de (A | B) est le même que celui des colonnes de A, et Im B ⊂ Im A.

iii) ⇒ ii), car Im B ⊂ Im A ⇔ Im A + Im B = Im A ⇒ rg(A | B) = rg A.

ii) ⇒ iii), car rg(A | B) = rg A et Im A ⊂ Im(A | B) ⇒ Im A = Im A + Im B ⇒ Im B ⊂ Im A.

iii) ⇒ i), car Im B ⊂ Im A : si les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A, alors il existe X telle que B = A.X : la matrice X donne les coefficients de ces combinaisons linéaires.

Ces conditions supposées remplies, l'ensemble des X ∈ $M_{\mathbf{K}}(p, q)$ telles que A.X = B est un sous-espace affine de $M_{\mathbf{K}}(p, q)$, de dimension q×(rg A), car A.Z = 0 ⇔ Im Z ⊂ Im A ; Z « est » une application linéaire de $\mathbf{K}^q$ dans Im A.

2) Factorisation à gauche. Soient A ∈ $M_{\mathbf{K}}(p, q)$, B ∈ $M_{\mathbf{K}}(n, q)$.

Lemme 2 : Ker $\left(\frac{A}{B}\right)$ = Ker A ∩ Ker B.

Cela découle aussitôt de $\left(\frac{A}{B}\right)$ X = $\left(\frac{AX}{BX}\right)$

Corollaire : max(rg A , rg B) ≤ rg$\left(\frac{A}{B}\right)$ ≤ rg A + rg B.

Preuve : Cela découle aussitôt du lemme, via Grassmann et le théorème du rang.

L'équivalence i) ⇔ ii) se montre comme en 1) en considérant les lignes.

i) ⇒ iii) car X.A = B ⇒ Ker A ⊂ Ker B , car A.z = 0 ⇒ X.A.z = 0 ⇒ B.x = 0.

iii) ⇒ ii) Ker A ⊂ Ker B ⇒ Ker$\left(\frac{A}{B}\right)$ = Ker A ⇒ rg$\left(\frac{A}{B}\right)$ = q – dim Ker$\left(\frac{A}{B}\right)$ = q –dim KerA = rg A.

Si ces conditions sont remplies, l'ensemble des X ∈ $M_{\mathbf{K}}(n, p)$ telles que X.A = B est un sous-espace affine, de direction vectorielle { Z ∈ $M_{\mathbf{K}}(n, p)$; Z.A = O }, qui est de dimension

n×(p – dim Im A) = n×Ker A.

3) Exemples.

Maple fait très bien cela, via la commande linsolve ; la seconde équation est sans solution.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[2,1,0,-3,-1,1,1,0,-1]);
B:=matrix(3,3,[1,1,3,-2,0,-3,1,-1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} \_t_{1_1} & \_t_{2_1} & \_t_{3_1} \\ 1-2\_t_{1_1} & 1-2\_t_{2_1} & 3-2\_t_{3_1} \\ -1+\_t_{1_1} & 1+\_t_{2_1} & \_t_{3_1} \end{bmatrix}$$

```
> A:=matrix(3,3,[3,1,1,2,-1,1,0,0,0]);
B:=matrix(3,3,[1,-2,1,1,-2,1,1,-2,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(transpose(A),transpose(B));
```

Exercice 41 : Soient A ∈ $M_{3,2}(\mathbf{R})$ et B ∈ $M_{2,3}(\mathbf{R})$ telles que AB = $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Montrer que AB est une matrice de projecteur. b) Montrer que BA = I_2 .

Solution : a) Pour la première question, faisons confiance à Maple :

```
> with(linalg):
> P:=matrix(3,3,[0,-1,-1,-1,0,-1,1,1,2]);evalm(P^2);rank(P);
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2$$

Conclusion : P = AB est un projecteur de rang 2.

b) On a 2 = rg(AB) ≤ rg(A) ≤ 2, donc rg(A) = 2 et 2 = rg(AB) ≤ rg(B) ≤ 2, donc rg(B) = 2.
A est donc injective, et B surjective, en tant qu'applications linéaires.
Or $P^2 = P$ s'écrit ABAB = AB , ou encore $A.(BA - I_2).B = 0$.
Comme A est injective, $(BA - I_2).B = 0$ [car ∀X $A.(BA - I_2).B.X = 0 \Rightarrow (BA - I_2).B.X = 0$].
Comme B est surjective, $BA - I_2 = 0$ [car ∀Y ∃X Y = BA ; donc $(BA - I_2).Y = (BA - I_2).B.X = 0$].
Rappelons que rg(AB) ≤ rg(A) découle de Im(AB) ⊂ Im A et que rg(AB) ≤ rg(B) découle de Ker(AB) ⊃ Ker B et du théorème du rang.

Remarque : L'exercice suivant généralise cela !

Exercice 42 : Soient A ∈ $M_{\mathbf{K}}(n, p)$ et B ∈ $M_{\mathbf{K}}(p, n)$. Montrer que $\text{rg}(I_p - BA) + n = p + \text{rg}(I_n - AB)$.
En déduire que $\text{rg}(I_n - AB) = n - p \Leftrightarrow BA = I_p$.

Solution : Les questions de rang relèvent de l'équivalence matricielle

1ère solution : Soient Q et P inversibles telles que $Q^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$. Posons $P^{-1}.B.Q = \begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix}$.

Alors $AB = Q.\begin{bmatrix} X & Y \\ O & O \end{bmatrix}.Q^{-1}$ et $BA = P.\begin{bmatrix} X & O \\ U & O \end{bmatrix}.P^{-1}$.

D'où : $P^{-1}.(I_p - BA).P = \begin{bmatrix} I_r - X & O \\ -U & I_{p-r} \end{bmatrix}$ et $Q^{-1}.(I_n - AB).Q = \begin{bmatrix} I_r - X & -Y \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}$.

Or $\text{rg}\begin{bmatrix} D & Y \\ O & I_r \end{bmatrix} = r + \text{rg}\, D$ … pourquoi ?

Donc $\text{rg}(I_p - BA) = p - r + \text{rg}(I_r - X)$ et $\text{rg}(I_n - AB) = n - r + \text{rg}(I_r - X)$. C'est fini !

2ème solution : tout revient à montrer que $\text{Ker}(I_n - AB)$ et $\text{Ker}(I_p - BA)$ ont même dimension, en vertu du théorème du rang.
Or je dis que X → AX induit un isomorphisme Φ de $\text{Ker}(I_p - BA)$ sur $\text{Ker}(I_n - AB)$. En effet :

• $X \in \text{Ker}(I_p - BA) \Rightarrow AX \in \text{Ker}(I_n - AB)$, car $(I_n - AB).AX = AX - ABAX = ABAX - ABAX = 0$.

• $X \in \mathrm{Ker}(I_p - BA)$ et $AX = 0 \Rightarrow X = BAX = 0$: Φ est donc injectif.

• Enfin, soit $Y \in \mathrm{Ker}(I_n - AB)$. On a $Y = ABY$. Je dis que $Z = BY$ est élément de $\mathrm{Ker}(I_p - BA)$.
En effet $BAZ = BABY = BY = Z$. De plus, $Y = AZ$; donc Φ est surjectif.

<u>Remarque</u> : ceci nous aiguille sur les comparaisons spectrales de AB et BA lorsque A et B sont rectangulaires de formats compatibles : cf. un exercice ultérieur.

<u>Exercice 43</u> : **<u>matrices de rang 1, matrices de rang r</u>**. On se place dans $M_{\mathbf{K}}(n, p)$.

1) Montrer que A est de rang 1 ssi A s'écrit sous la forme :

$$X.{}^tY \quad , \quad \text{où} \quad X \in \mathbf{K}^n = M_{\mathbf{K}}(n, 1) \quad \text{et} \quad Y \in \mathbf{K}^p = M_{\mathbf{K}}(p, 1)$$

sont des vecteurs-colonnes *non nuls*. La décomposition est-elle unique ?

Exprimer Im A et Ker A à l'aide de X et Y.

En déduire un procédé pratique pour multiplier deux matrices de rang 1.

2) Montrer que A est de rang r ssi A s'écrit sous la forme $A = X_1.{}^tY_1 + \dots + X_r.{}^tY_r$, où $X_1, \dots , X_r$ sont des vecteurs-colonnes libres dans $\mathbf{K}^n$, et $Y_1 , \dots , Y_r$ des vecteurs-colonnes libres dans $\mathbf{K}^p$.

<u>Solution</u> :

1) <u>Description des matrices de rang 1</u>.

Si $A = X.{}^tY$, où X et Y sont non nuls, A a pour colonnes $(y_1X, \dots, y_pX)$, donc $\mathrm{Im}\, A \subset \mathbf{K}X$ et $\mathrm{rg}\, A \leq 1$. De plus A est non nulle, donc $\mathrm{Im}\, A = \mathbf{K}.X$ et $\mathrm{rg}\, A = 1$.

Réciproquement, si rg A = 1, soit X un vecteur non nul appartenant à Im A (par exemple une colonne non nulle). Alors si c_j est la j-ème colonne de A, on peut écrire $c_j = y_j.X$ et $A = X.{}^tY$; Y n'est pas nul, sans quoi A serait nulle.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

La décomposition $A = X.{}^tY$ n'est pas unique ; on a aussi : $A = (\lambda X).{}^t(\frac{Y}{\lambda})$, où $\lambda \neq 0$.

$\mathrm{Im}\, A = \mathbf{K}.X$ et $\mathrm{Ker}\, A = \{ Z \in \mathbf{K}^p \,;\, {}^tY.Z = 0 \}$.

Si A et B sont de rang 1, $A = X.{}^tY$, $B = U.{}^tV$, alors $AB = X.{}^tY.U.{}^tV = ({}^tY.U).(X.{}^tV)$.

AB est de rang 0 ou 1 selon que ${}^tY.U = 0$ ou $\neq 0$.

En particulier, si n = p, $A^2 = ({}^tY.X).(X.{}^tY) = ({}^tY.X).A = (\mathrm{tr}\, A).A$.

2) <u>Description des matrices de rang r</u>.

Nous noterons (E_{ij}) la base canonique de $M_{\mathbf{K}}(n, p)$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n \equiv M_{\mathbf{K}}(n, 1)$ et $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{K}^p \equiv M_{\mathbf{K}}(p, 1)$ (le chevauchement de notations ne prête pas à conséquence). Avec ces notations, $E_{ij} = e_i.{}^te_j$.

Soit A une matrice de rang r. Alors $\exists (Q, P) \in Gl_n(\mathbf{K}) \times Gl_p(\mathbf{K}) \quad Q^{-1}.A.P = J_r = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

D'où $\quad A = Q\, J_r\, P^{-1} = Q \sum_{1 \leq i \leq r} E_{i,i}\, P^{-1} = Q \sum_{1 \leq i \leq r} e_i\, {}^te_i\, P^{-1} = \sum_{1 \leq i \leq r} Qe_i\, {}^te_i\, P^{-1} = \sum_{1 \leq i \leq r} X_i\, {}^tY_i$,

en notant $X_i = Q.e_i$ et $Y_i = {}^tP^{-1}.e_i$ les colonnes respectives de Q et de ${}^tP^{-1}$.

Ces colonnes sont libres car ce sont les r premières colonnes de matrices inversibles.

Conclusion : A s'écrit sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq r} X_i\, {}^tY_i$, où $X_1, \dots , X_r$ sont des vecteurs-colonnes libres dans $\mathbf{K}^n$, et $Y_1 , \dots , Y_r$ des vecteurs-colonnes libres dans $\mathbf{K}^p$.

Réciproquement, supposons que A = $\sum_{1\le i\le r} X_i\,{}^tY_i$, où $X_1, \dots, X_r$ sont des vecteurs-colonnes libres dans $\mathbf{K}^n$, et $Y_1, \dots, Y_r$ des vecteurs-colonnes libres dans $\mathbf{K}^p$. Complétons $(X_1, \dots, X_r)$ en une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbf{K}^n$ et $(Y_1, \dots, Y_r)$ en une base $(Y_1, \dots, Y_p)$ de $\mathbf{K}^p$.
Soit Q la matrice de colonnes $(X_1, \dots, X_n)$ et ${}^tP^{-1}$ la matrice de colonnes $(Y_1, \dots, Y_p)$. Alors :

$$A = \sum_{1\le i\le r} X_i\,{}^tY_i = \sum_{1\le i\le r} Qe_i\,{}^te_i\,P^{-1} = Q\sum_{1\le i\le r} e_i\,{}^te_i\,P^{-1} = Q\sum_{1\le i\le r} E_{i,i}\,P^{-1} = Q\,J_r\,P^{-1}\text{, donc rg } A = r\text{ . cqfd.}$$

Traduction en termes linéaires : Soit u une application linéaire de E dans F, où dim E = p, dim F = n. u est de rang r si et seulement si l'on a $(\forall x \in E)\quad u(x) = \sum_{1\le i\le r} \langle f_i \mid x\rangle . b_i$,

où $(f_1, \dots, f_r)$ est une famille libre de E*, et $(b_1, \dots, b_r)$ une famille libre de F.

Référence : le problème de l'X 1988 utilise ces résultats.

Exercice 44 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, f un automorphisme de E, g un endomorphisme de rang 1 de E. Montrer que $f + g \in Gl(E) \Leftrightarrow \text{tr}(f^{-1} \circ g) \neq -1$.

Solution :
$f + g \in Gl(E) \Leftrightarrow I + f^{-1} \circ g \in Gl(E)$. Posant $h = f^{-1} \circ g$, qui est aussi de rang 1, tout revient à montrer que si h est de rang 1, alors $I + h \in Gl(E) \Leftrightarrow \text{tr}\, h \neq -1$.
Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E obtenue en complétant une base $(e_2, \dots, e_n)$ de Ker h.

La matrice de I + h relativement à cette base est de la forme : $\begin{bmatrix} a_1+1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Elle a pour déterminant $1 + a_1 = 1 + \text{tr}\, h$. La conclusion tombe aussitôt.

Voici une solution plus alambiquée.
Si h est de rang 1, on sait que $h^2 = (\text{tr}\, h).h$, donc $u = I + h$ vérifie $u^2 = (2 + \text{tr}\, h).u - (1 + \text{tr}\, h).I$.
Si tr $h \neq -1$, on voit aussitôt que u est inversible.
Si tr $h = -1$, $u^2 = u$; si u était inversible, on aurait $u = I$, donc $h = 0$; or h est de rang 1.

Voici maintenant une solution frontale.
Soient $A \in Gl_n(\mathbf{K})$, $B \in M_n(\mathbf{K})$ de rang 1 ; B s'écrit $B = X.{}^tY$, où X et Y sont non nuls.
Calculons det(A + B) à l'aide des colonnes de A et B :

$$\det(A + B) = \det(c_1 + y_1.x, c_2 + y_2.x, \dots, c_n + y_n.x)\text{ . Développons par multilinéarité !}$$

$$= \det(c_1, c_2, \dots, c_n) + \sum_{j=1}^{n} y_j.\det(c_1,\dots,c_{j-1},x,c_{j+1},\dots c_n)$$

Développons maintenant chacun des déterminants par rapport à la colonne de x :

$$\det(A + B) = \det A + \sum_{j=1}^{n} y_j.\sum_{i=1}^{n} x_i\,(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

$$= \det A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\,(-1)^{i+j}\det(A_{ij}).y_j = \det A + {}^tX.\text{comA}.Y$$

$$= (\det A).(1 + {}^tX.{}^tA^{-1}.Y) = (\det A).(1 + \text{tr}({}^tX.{}^tA^{-1}.Y))\text{ , pour des raisons de format.}$$

Or $\quad \text{tr}({}^tX.{}^tA^{-1}.Y) = \text{tr}({}^tY.A^{-1}.X) = \text{tr}(A^{-1}.X.{}^tY) = \text{tr}(A^{-1}.B)$. Cqfd.

Remarques : Les méthodes proposées illustrent bien le « **principe de donnant-donnant** » en maths. Les méthodes frontales consomment beaucoup de calcul, les méthodes de fractionnement économisent du calcul mais bouffent du concept. Les unes et les autres sont intelligentes, mais l'intelligence est dépensée différemment.

L'exercice suivant reprend ces questions sous un autre angle.

Exercice 45 : On se place dans $M_n(\mathbf{K})$; X, Y, U, V… désignent des vecteurs-colonnes, α, β, γ … des scalaires. On pose : $H(\alpha, X, Y) = I_n - \alpha\, X.{}^tY$.

1) Montrer que $H(\alpha, X, Y).H(\beta, X, Y) = H(\gamma, X, Y)$, avec γ à calculer.

2) Montrer que $H(\alpha, X, Y) \in Gl_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow \alpha\,({}^tY.X) \neq 1$, et qu'alors $H(\alpha, X, Y)^{-1} = H(\beta, X, Y)$, avec β à calculer.

3) Soient $A \in Gl_n(\mathbf{K})$, $B = A - U.{}^tV$. Cns pour que $B \in Gl_n(\mathbf{K})$.

Montrer qu'alors $B^{-1} = A^{-1} - \dfrac{(A^{-1}U)({}^tVA^{-1})}{{}^tVA^{-1}U - 1}$.

Solution :

1) On a $(X.{}^tY)^2 = X.{}^tY.X.{}^tY = ({}^tY.X).(X.{}^tY)$, où ${}^tY.X = tr(X.{}^tY)$, . On en déduit :

$H(\alpha, X, Y).H(\beta, X, Y) = H(\gamma, X, Y)$, avec $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta.({}^tY.X)$.

De plus $H(0, X, Y) = I$. Ainsi $\{ H(\alpha, X, Y) ; \alpha \in \mathbf{K} \}$ est un sous-monoïde multiplicatif de $M_n(\mathbf{K})$.

2) CNS pour $H(\alpha, X, Y)$ que soit inversible.

• Si $\alpha.({}^tY.X) \neq 1$, posons $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha({}^tY.X) - 1}$.

Alors $H(\alpha, X, Y).H(\beta, X, Y) = H(\beta, X, Y).H(\alpha, X, Y) = H(0, X, Y) = I$.

• Si $\alpha.({}^tY.X) = 1$, $H(\alpha, X, Y)$ n'est pas inversible.

En effet, $Z \in \operatorname{Ker} H(\alpha, X, Y) \Leftrightarrow Z = \alpha.(X.{}^tY).Z = \alpha.({}^tY.Z).X \Rightarrow Z \in \mathbf{K}.X$.

Soit $Z = \lambda.X$, $\lambda.(1 - \alpha.({}^tY.X)).X = 0$.

Si $\alpha.({}^tY.X) = 1$, X est non nul, et $\operatorname{Ker} H(\alpha, X, Y) = \mathbf{K}.X$, donc $H(\alpha, X, Y)$ n'est pas inversible.

3) Formule de Sherman-Morrison-Woodbury.

Soient $A \in Gl_n(\mathbf{K})$, $B = A - U.{}^tV$. Montrons que $B \in Gl_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow {}^tV.A^{-1}.U \neq 1$.

Or : $B = A.(I - X.{}^tV)$, où $X = A^{-1}.U$. Nous voici ramenés à 2).

Exercice 46 : **idéaux bilatères de $M_n(\mathbf{K})$**. Un idéal bilatère $\mathfrak{I}$ de $M_n(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{K})$ tel que $\forall (M, A) \in \mathfrak{I}\times M_n(\mathbf{K})$ $A.M \in \mathfrak{I}$ et $M.A \in \mathfrak{I}$.

1) Montrer que les seuls idéaux bilatères de $M_n(\mathbf{K})$ sont $\{0\}$ et $M_n(\mathbf{K})$.

2) Y a-t-il un homomorphisme d'algèbres $\varphi : M_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ tel que $\varphi(I_n) = 1$?

3) Soit N une semi-norme sur $M_n(\mathbf{C})$ vérifiant $\forall (A, B)$ $N(A.B) \leq N(A).N(B)$. Montrer que N est identiquement nulle, ou que N est une norme.

Solution :

1) Donnons une solution purement matricielle de ce résultat.

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal bilatère $\neq \{0\}$: $\forall M \in \mathfrak{I}$ $\forall (i, j, p, q)$ $E_{ij}.M.E_{pq} \in \mathfrak{I}$. Or $E_{ij}.M.E_{pq} = m_{jp}.E_{iq}$.

Si l'on choisit (j, p) tel que $m_{jp} \neq 0$, on voit que $\forall (i, q)$ $E_{iq} \in \mathfrak{I}$. Donc $\mathfrak{I} = M_n(\mathbf{K})$.

Autre solution : soit $\mathfrak{I}$ un idéal bilatère $\neq \{0\}$, M un élément non nul de $\mathfrak{I}$ de rang r.

M est équivalente à $J_r = diag(I_r , O)$, donc J_r est élément de $\mathfrak{I}$.

On en déduit aussitôt que $J_1 = E_{11} = J_1.J_r$ est élément de $\mathfrak{I}$.

Par suite, $\mathfrak{I}$ contient toutes les matrices de rang 1, lesquelles engendrent $M_n(\mathbf{K})$.

2) Le noyau de φ serait un idéal bilatère. Comme $\varphi \neq 0$, cet idéal serait $\{0\}$ et φ serait injectif.

Si $n \geq 2$, c'est impossible pour des raisons de dimension. Si $n = 1$, φ existe : l'identité.

3) Soit N une semi-norme sur; F = { A ; N(A) = 0 } est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{C})$.
La propriété vérifiée par N implique que F est un idéal bilatère.
Si F = {0}, N est une norme ; si F = $\mathbf{C}^n$, N = 0.   [Oral ENS 1991]

---

5. *Matrices particulières*.

Exercice 47 : **matrices en damier**.
Une matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est dite « en damier » si $m_{ij} = 0$ pour $i + j \equiv 1 \pmod 2$,
1) Montrer que les matrices en damier forment une sous-algèbre $D_n(\mathbf{K})$ de $M_n(\mathbf{K})$. Quelle est sa dimension ? Montrer que $D_n(\mathbf{K})$ est isomorphe à un produit $M_p(\mathbf{K})\times M_q(\mathbf{K})$, pour un couple (p, q) convenable. Indiquer une cns pour qu'une matrice en damier soit inversible, et montrer que son inverse est également en damier.
2) Indiquer un sous-espace supplémentaire $A_n(\mathbf{K})$ de $D_n(\mathbf{K})$, et préciser ses relations avec $D_n(\mathbf{K})$.

Solution : On peut donner une solution purement matricielle de cet exercice, mais une appoche linéaire est bien plus judicieuse. Rapportons $\mathbf{K}^n$ à sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, et notons F et G les sous-espaces supplémentaires définis par :

$$F = \text{Vect}(e_1, e_3, \dots, e_{2p-1}) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(e_2, e_4, \dots, e_{2q}) \ , \ \text{où} \ p = [\tfrac{n+1}{2}] \ \text{et} \ q = [\tfrac{n}{2}] .$$

Ainsi, si $n = 2m$, alors $p = q = m$; si $n = 2m + 1$, alors $p = m + 1$, $q = m$.
Identifions la matrice M avec l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé.
Pour que M soit en damier, il faut et il suffit que F et G soient M-stables.
On en déduit aussitôt que $D_n(\mathbf{K})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{K})$, isomorphe à $\mathcal{L}(F)\times\mathcal{L}(G)$, c'est-à-dire à $M_p(\mathbf{K})\times M_q(\mathbf{K})$, donc de dimension $p^2 + q^2$.
Au fond, si P est la matrice de permutation de passage de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base $(e_1, e_3, \dots, e_{2p-1}, e_2, e_4, \dots, e_{2q})$, M est en damier ssi $P^{-1}.M.P = \text{diag}(A, B)$.
Alors det M = (det A).(det B), M est inversible ssi A et B le sont, et $M^{-1} = \text{diag}(A^{-1}, B^{-1})$, donc M^{-1} est en damier.
2) Un supplémentaire naturel de $D_n(\mathbf{K})$ dans $M_n(\mathbf{K})$ est formé des matrices M en « anti-damier », c'est-à-dire telles que $m_{ij} = 0$ pour $i \equiv j \pmod 2$. Soit $A_n(\mathbf{K})$ l'ensemble de ces matrices.
Géométriquement ce sont celles qui envoient F dans G et G dans F. Leur dimension est 2pq.
De plus, le produit de deux matrices en antidamier est en damier…

Exercice 48 : **matrices centrosymétriques**.
Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique ≠ 2. On note
$C_n(\mathbf{K}) = \{ A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K}) ; \forall(i, j) \ a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij} \}$ l'ensemble des matrices centrosymétriques,
$A_n(\mathbf{K}) = \{ A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K}) ; \forall(i, j) \ a_{n+1-i,n+1-j} = -a_{ij} \}$ celui des matrices anticentrosymétriques.

a) Soit $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer J^2 ; interprétation géométrique ?

b) Calculer J.A.J ; en déduire que $A \in C_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow A.J = J.A$ et $A \in A_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow A.J = -J.A$.

c) Montrer que $C_n(\mathbf{K})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{K})$.

d) Montrer que $M_n(\mathbf{K}) = C_n(\mathbf{K}) \oplus A_n(\mathbf{K})$. Dimensions de $C_n(\mathbf{K})$ et $A_n(\mathbf{K})$?

Solution : On confond les matrices carrées et les endomorphismes canoniquement associés.

a) Il est clair que $J^2 = I_n$; cela se voit quand on calcule J.J.X. Ainsi, J est une symétrie vectorielle, par rapport à F = { X ; J.X = X }, sous-espace des vecteurs « centrosymétriques », parallèlement à G = { X ; J.X = –X }, sous-espace des vecteurs anti-centrosymétriques.
Si $n = 2m$, dim F = dim G = m ; si $n = 2m + 1$, dim F = $m + 1$, dim G = m.

b) Notons $\varepsilon_{ij} = \delta_{i,n+1-j}$ l'élément général de J.

On a : A.J = B, où $b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{j,n+1-k} = a_{i,n+1-k}$; c'est la matrice obtenue en rangeant les colonnes de A dans l'ordre inverse. De même, J.A = C, où $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,n+1-j}a_{j,k} = a_{n+1-i,k}$, est la matrice obtenue en rangeant les lignes de A dans l'ordre inverse.
Enfin, $\Sigma(A) = J.A.J = J^{-1}.A.J = (a_{n+1-i,n+1-j})$ est la « centrosymétrisée » de A.

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\Sigma(A) = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$; si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$, $\Sigma(A) = \begin{bmatrix} w & v & u \\ r & q & p \\ c & b & a \end{bmatrix}$

Les équivalences demandées en découlent.

c) Le commutant de tout élément de $M_n(\mathbf{K})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{K})$.

d) Je dis que $M_n(\mathbf{K}) = C_n(\mathbf{K}) \oplus A_n(\mathbf{K})$.

En effet $M = \dfrac{M+JMJ}{2} + \dfrac{M-JMJ}{2}$, et cette décomposition est unique.

Enfin, si $n = 2m$, dim $C_n(\mathbf{K})$ = dim $A_n(\mathbf{K}) = 2m^2$.
Si $n = 2m + 1$, dim $C_n(\mathbf{K}) = 2m^2 + 2m + 1$, dim $A_n(\mathbf{K}) = 2m^2 + 2m$.
Cela peut se montrer en exhibant des bases.

Remarques : 1) Plus précisément, je dis que :

- Si $n = 2m$, $C_n(\mathbf{K})$ est isomorphe à l'algèbre $M_m(\mathbf{K})\times M_m(\mathbf{K})$;
- Si $n = 2m+1$, $C_n(\mathbf{K})$ est isomorphe à l'algèbre $M_{m+1}(\mathbf{K})\times M_m(\mathbf{K})$.

En effet, pour qu'un endomorhisme u commute à une symétrie s, il faut et il suffit qu'il laisse stable Ker(s – I) et Ker(s + I). Du coup le commutant de s, C(s), est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(E)$ isomorphe à $\mathfrak{L}(\mathrm{Ker}(s - I))\times\mathfrak{L}(\mathrm{Ker}(s + I))$.

2) Le produit de deux éléments de $A_n(\mathbf{K})$ est élément de $C_n(\mathbf{K})$.

Exercice 49 : **matrices codiagonales, cotrigonales**.
Une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est dite codiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i + j \neq n + 1$
cotrigonale supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i + j > n + 1$
cotrigonale inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i + j < n + 1$.
Indiquer une cns pour qu'une matrice codiagonale, resp. cotrigonale supérieure, resp. cotrigonale inférieure, soit inversible, et indiquer, dans chaque cas, la forme de l'inverse.

Solution :
Plusieurs solutions sont possibles. Les unes passent par les endomorphismes associés, les autres par la matrice J de l'exercice précédent. Je ne vois pas l'intérêt d'en dire plus.

Exercice 50 : **matrices cycliques et circulantes**.
Une matrice carrée d'ordre n est dite :

cyclique si elle est de la forme A = $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & \dots & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$,

circulante si elle est de la forme B = $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \end{bmatrix}$.

1) Montrer que les matrices cycliques forment une sous-algèbre commutative Γ_n de dimension n de $M_n(\mathbf{K})$, et que c'est exactement l'ensemble des matrices qui commutent à $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Montrer que les matrices circulantes forment un sous-espace vectoriel C_n de dimension n de $M_n(\mathbf{K})$. Etudier $C_n \cap \Gamma_n$ selon la parité de n.

3) Soit J = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Si A est cyclique, que dire de J.A ?

4) Montrer que $C_n + \Gamma_n$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{K})$, de dimension $2n - 2$ si n est pair, $2n - 1$ si n est impair.

Solution :

Exercice 51 : **matrices monomiales**.

On nomme ainsi les matrices carrées ayant un et un seul élément non nul dans chaque ligne et chaque colonne.

1) Montrer que ces matrices forment un groupe multiplicatif, dont on étudiera la structure.

2) Montrer que, pour tout nombre premier p et tout entier $n > 0$,

$$n!\times(p-1)^n \quad \text{divise} \quad (p^n - 1)(p^n - p)\dots(p^n - p^{n-1}) .$$

3) Soit $A \in Gl_n(\mathbf{R})$. Montrer que A et A^{-1} sont à coefficients ≥ 0 ssi A est à coefficients ≥ 0, et monomiale.

Solution : Ne pas confondre monomiales et moniales, quoi que…

1) Une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est monomiale ss'il existe un n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^{*n}$ et une permtutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telles que $a_{ij} = \alpha_i$ si $i = \sigma(j)$, 0 sinon, autrement dit $a_{ij} = \alpha_i.\delta_{i\sigma(j)}$.

Si $(e_1, \dots , e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, pour tout j , $A.e_j = \alpha_{\sigma(j)}.e_{\sigma(j)}$ (*)

$$A = D.P_\sigma = P_\sigma.D' ,$$

où $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D' = \text{diag}(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$ et P_σ est la matrice de permutation associée à σ.

La matrice A est inversible, car $\det A = \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n \times \varepsilon(\sigma) \neq 0$.

Soit $B = \Delta.P_\tau = P_\tau.\Delta'$, où $\Delta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Alors $A.B = \Omega.P_{\sigma o \tau}$, où $\Omega = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, avec $\gamma_i = \alpha_i\ \beta_{\sigma^{-1}(i)}$, et A^{-1} est monomiale.

Conclusion : Les matrices monomiales forment un sous-groupe $\mathcal{M}_n$ de $Gl_n(\mathbf{K})$.

Ce groupe contient deux sous-groupes importants :

• le groupe $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonales inversibles, qui est isomorphe à $\mathbf{K}^{*n}$;

• le groupe $\mathcal{P}_n$ des matrices de permutation, qui est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

L'application $A \to P_\sigma$ de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathcal{P}_n$ définie par (*) est un morphisme surjectif de groupes.

Son noyau $\mathcal{D}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{M}_n$. D'où l'isomorphisme de groupes $\mathcal{M}_n / \mathcal{D}_n \approx \mathcal{P}_n$.

Les ensembles $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{D}_n \times \mathcal{P}_n$ sont isomorphes, mais les groupes ne le sont pas.

2) Il suffit d'écrire que le cardinal du groupe des matrices monomiales divise le cardinal de $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{K})$.

3) Soit $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{R})$.

• Si A est à coefficients ≥ 0, et monomiale, $A = D.P_\sigma = P_\sigma.D'$, où $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$.

Alors $A^{-1} = D'^{-1} P_{\sigma^{-1}}$ est à coefficients ≥ 0.

• Réciproquement, soit $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{R})$ telle que A et $B = A^{-1}$ sont à coefficients ≥ 0.

Soit C = AB. On a pour tout i : $c_{ii} = \sum_j a_{ij} b_{ji} = 1$ et pour $i \neq k$: $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} = 0$.

Pour tout i, $c_{ii} = 1$, donc il existe j_0 tel que $a_{ij_0} > 0$ et $b_{j_0 i} > 0$.

Pour $i \neq k$, $c_{ik} = 0$, donc $(\forall j)$ $a_{ij} > 0$ implique $b_{jk} = 0$ et vice versa.

En particulier $b_{j_0 k} = 0$ pour tout $k \neq i$ et $a_{hj_0} = 0$ pour tout $h \neq i$.

Ainsi, la colonne d'indice j_0 de A ne contient qu'un élément non nul. S'il existait deux indices $j_0 \neq j_1$ tels que $a_{ij_0} > 0$ et $a_{ij_1} > 0$, alors les colonnes d'indices j_0 et j_1 seraient liées. Donc la ligne d'indice i contient exactement un élément > 0. Cqfd.

Exercice 52 : Soit V l'ensemble des endomorphismes de $M_n(\mathbf{R})$ tels que $(\forall M)$ $u({}^tM) = {}^tu(M)$.
Déterminer la structure de V et calculer sa dimension. [Oral Mines 1997]

Solution : Pour bien comprendre cet exercice, mieux vaut le généraliser :

Lemme 1 : Soient E un **K**-espace vectoriel, *f* un endomorphisme de E.
Le commutant $C(f) = \{ g \in \mathcal{L}(E) ; g \circ f = f \circ g \}$ de *f* est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Lemme 2 : Soit **K** un corps de caractéristique $\neq 2$, E un **K**-espace vectoriel, s une symétrie de E. Pour qu'un endomorphisme u de E commute à s, il faut et il suffit qu'il laisse stable $\mathrm{Ker}(s - I)$ et $\mathrm{Ker}(s + I)$.

Ces deux lemmes sont laissés en exercice. Il en découle que le commutant C(s) de s est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{L}(\mathrm{Ker}(s - I)) \times \mathcal{L}(\mathrm{Ker}(s + I))$.

Appliquons ceci à l'endomorphisme $s : M \to {}^tM$ de $M_n(\mathbf{R})$, qui est la symétrie parallèlement au sev $S_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques, parallèlement au sev $A_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques.

Alors V est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))$, isomorphe à $\mathcal{L}(S_n(\mathbf{R})) \times \mathcal{L}(A_n(\mathbf{R}))$, donc de dimension :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Exercice 53 : **matrices de tournoi**.
Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients dans {0, 1} telle que :

$$(\forall i) \;\; a_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \;\; i \neq j \;\Rightarrow\; a_{ij} + a_{ji} = 1.$$

Prouver que le rang de A est au moins $n - 1$.

Solution : $A + {}^tA = J - I$, où $J \in M_n(\mathbf{R})$ est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

Soit $X \in \mathbf{R}^n$. Considérons le système de $n + 1$ équations à n inconnues $MX = 0$, où $M = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Montrons que M est injective, donc que rg M = n.

$M.X = 0 \Leftrightarrow A.X = 0$ et $J.X = 0 \Rightarrow {}^tX.(A + {}^tA).X = {}^tX.(J - I).X = {}^tX.J.X - {}^tX.X = {}^tX.X = 0 \Rightarrow X = 0$.

Si l'on avait rg A $\leq n - 2$, les n lignes de A seraient de rang $\leq n - 2$, donc les $n + 1$ lignes de M seraient de rang $\leq n - 1$. Donc rg A $= n - 1$ ou n.

Remarque : A est la matrice d'un tournoi (cf. RMS mai-juin 1995, p. 707).

---

6. *Similitude et réduction : premiers exemples.*

Décider si deux matrices sont semblables est un problème plus ardu que décider si elles sont équivalentes. L'équivalence renvoie au calcul du rang, à des déterminations d'images ou de noyaux. La similtude est beaucoup plus précise.
On peut démontrer en effet que, si **K** est algébriquement clos, deux matrices carrées A et B d'ordre n sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout $k \geq 1$, $\text{rg}(A - \lambda.I)^k = \text{rg}(B - \lambda.I)^k$.
Ce critère de Weyr, purement théorique, et peu usité (voir cependant ex. 55) ramène la vérification de la similitude à la vérification de l'équivalence d'une infinité de matrices !
Cependant, on dispose de conditions nécessaires ou suffisantes de similitude simples. Ces questions seront reprises de manière plus systématique dans le fascicule d'exercices sur la réduction.

Exercice 54 : Classifier à équivalence près, puis à similitude près, les matrices élémentaires E_{ij} de $M_n(\mathbf{K})$.

Solution :
1) Les matrices E_{ij} sont toutes de même rang, 1, donc elles sont équivalentes.
2) Elles ne peuvent être semblables, car elles n'ont pas même trace.
Je dis que les E_{ii} sont toutes semblables, et que les E_{ij} ($i \neq j$) sont toutes semblables.
En effet, si un endomorphisme admet E_{ii} pour matrice relativement à la base $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_n)$, il a pour matrice E_{ii} relativement à la base $\mathfrak{B} = (e_i, \dots, e_1, \dots, e_n)$.
Et s'il a pour matrice E_{ij} relativement à la base $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_n)$, il aura pour matrice E_{12} relativement à la base $\mathfrak{B} = (e_i, e_j, e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 55 : Montrer que toute matrice de $M_2(\mathbf{K})$ est semblable, soit à $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, soit à $\begin{bmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{bmatrix}$, où λ, t et d sont uniques.

Solution :
On sait en effet qu'un endomorphisme f de E est une homothétie ssi, pour tout x, (x, f(x)) est liée.
Du coup, si E est un plan, et si f n'est pas une homothétie, il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que f ait pour matrice $\begin{bmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{bmatrix}$. Le couple (t, d) est unique, car c'est le couple trace-déterminant.

Exercice 56 : A quelle condition les matrices $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Solution : [Oral Mines MP 2013, posé à David Banquet]

Commençons par montrer que, si a est non nul, $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est semblable à $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

En effet, si un endomorphisme f du plan a pour matrice $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ relativement à la base (e_1, e_2), il aura pour matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ relativement à la base (ae_1, e_2).

Si $a = b = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont semblables et même égales.

Si a et b sont non nuls, $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont semblables car semblables à $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Enfin, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ne sont pas semblables, car la seule matrice semblable à I_2 est elle-même.

<u>Conclusion</u> : $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont semblables ssi $a = b = 0$ ou a et b sont non nuls.

Exercice 57 : Les matrices A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Solution : Ici, A et B ont même trace et même déterminant.
Nous allons donner des méthodes simples, élémentaires, pour attaquer ce problème.
<u>1ère solution, purement matricielle</u>. Il s'agit de chercher $P \in Gl_3(\mathbf{K})$ telle que $P^{-1}.A.P = B$.
Cette matrice P vérifie $A.P = P.B$.
Les matrices vérifiant $A.P = P.B$ forment un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{K})$.
Elles sont faciles à déterminer, et il restera à savoir s'il y en a qui sont inversibles.
Or un calcul par coefficients indéterminés montre que $A.P = P.B \Leftrightarrow P = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Ces matrices forment un sev de dimension 3 de $M_3(\mathbf{K})$, aucune d'elles n'est inversible.
Conclusion : A et B ne sont pas semblables.
<u>2ème solution, plus linéaire</u>. S'il existe $P \in Gl_3(\mathbf{K})$ telle que $P^{-1}.A.P = B$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout $k \geq 1$, $P^{-1}.(A - \lambda.I)^k.P = (B - \lambda.I)^k$.
A fortiori pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout $k \geq 1$, $(A - \lambda.I)^k$ et $(B - \lambda.I)^k$ sont équivalentes, et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout $k \geq 1$, $\text{rg} (A - \lambda.I)^k = \text{rg} (B - \lambda.I)^k$.
Or ici $1 = \text{rg} (A - I)^2 \neq \text{rg} (B - \lambda.I)^2 = 0$
<u>3ème solution</u>, anticipant sur la suite : A et B ont même polynôme caractéristique $(X - 1)^3$, mais pas même polynôme minimal : celui de A est $(X - 1)^3$, celui de B est $(X - 1)^2$.

Exercice 58 : Matrices de rang 1.

1) Classifier à équivalence près les matrices $A \in M_n(\mathbf{K})$ de rang 1.
2) Montrer que toute matrice de rang 1 est semblable, soit à une matrice diag(a, 0, …, 0), où $a \in \mathbf{K}^*$, soit à E_{12}.

3) En déduire que dans $M_n(\mathbf{K})$ deux matrices de rang 1 sont semblables ssi elles ont même trace.
4) Si **K** est fini de cardinal q, combien y a-t-il de matrices de rang 1 dans $M_n(\mathbf{K})$? Combien y a-t-il de classes de similitudes de telles matrices ? Quel est le cardinal de chacune d'elles ?

<u>Solution</u> :

1) Les matrices de rang 1 sont les matrices équivalentes à E_{11} (ou à E_{ij}) ; elles forment une seule classe d'équivalence.
2) Passons par les endomorphismes.
Soient E un espace vectoriel de dimension n, u un endomormhisme de rang 1 de E.
D = Im u est une droite, H = Ker u un hyperplan de E, stables par u. De deux choses l'une :

- Soit D et H sont supplémentaires. Choisissant une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ adaptée à cette somme directe, la matrice de u est diag$(a, 0, \dots, 0)$, où a est non nul ; c'est la trace de u.
- Soit $D \subset H$. Soient e_2 un vecteur non nul de D, e_1 un vecteur tel que $e_2 = u(e_1)$.

e_1 n'est pas élément de H, donc $E = \mathbf{K}e_1 \oplus H$. Si l'on complète e_2 en une base $(e_2, \dots, e_n)$ de H, on obtient une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E relativement à laquelle u a pour matrice E_{12}.
Au fond, l'alternative est : soit u est diagonalisable, soit il ne l'est pas.
3) se déduit de 2).
4) Si **K** a q éléments, il y a $\dfrac{(q^n-1)(q^n-1)}{q-1}$ matrices de rang 1 dans $M_n(\mathbf{K})$, car de telles matrices s'écrivent $A = X.{}^tY$, où X et Y sont des vecteurs colonnes non nuls, définis à scalaire près.
En vertu de 2) elles forment $q - 1 + 1 = q$ classes de similitude.
Pour calculer les cardinaux, il faut dénombrer le commutant dans $Gl_n(\mathbf{K})$ des matrices réduites trouvées en 2).

<u>Exercice 59</u> : Soient E un **K**-ev de dimension finie n , $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

i) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$;

ii) n est pair, $n = 2m$, et il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} O & I_m \\ O & O \end{bmatrix}$;

iii) $f \circ f = 0$ et il existe un endomorphisme h de E tel que $id_E = h \circ f + f \circ h$.

<u>Solution</u> :

i) $\Rightarrow$ ii) Soit $m = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$. Le théorème du rang affirme que $n = 2m$.
L'examen attentif du résultat à atteindre nous dicte la marche à suivre.
Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de Ker f. Comme Ker f = Im f , chaque vecteur e_i a un antécédant $e_i = f(e_{m+i})$ par f . Je dis que $(e_1, \dots, e_m , e_{m+1}, \dots, e_n)$ est libre. En effet

$$\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_m.e_m + \lambda_{m+1}.e_{m+1} + \dots + \lambda_n.e_n = 0$$

s'écrit $$\lambda_1.f(e_{m+1}) + \dots + \lambda_m.f(e_{2m}) + \lambda_{m+1}.e_{m+1} + \dots + \lambda_n.e_n = 0$$

Appliquons f. Il vient : $\lambda_{m+1}.e_1 + \dots + \lambda_n.e_m = 0$, donc $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$.
Puis $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_m.e_m = 0$, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.
La famille $(e_1, \dots, e_m , e_{m+1}, \dots, e_n)$ à n vecteurs est libre, donc est une base.
La matrice de f relativement à cette base est bien $\begin{bmatrix} O & I_m \\ O & O \end{bmatrix}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) La matrice N = $\begin{bmatrix} O & I_m \\ O & O \end{bmatrix}$ vérifie $N^2 = 0$. De plus, cherchons une matrice-blocs M = $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ telle que I_n = M.N + N.M. Un calcul montre que M.N + N.M = $\begin{bmatrix} C & A+D \\ O & C \end{bmatrix}$. Il suffit de considérer un endomorphisme h de matrice M = $\begin{bmatrix} A & B \\ I_m & -A \end{bmatrix}$, en particulier celui de matrice $\begin{bmatrix} O & O \\ I_m & O \end{bmatrix}$.

iii) $\Rightarrow$ i) $f \circ f = 0$ implique, et même équivaut à $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
De plus, si $\mathrm{id}_E = h \circ f + f \circ h$, alors $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x = h(f(x)) + f(h(x)) = f(h(x)) \in \operatorname{Im} f$. cqfd.

Exercice 60 : Soient E un **K**-ev de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$.
Montrer que r = rg $f \le n/2$ et qu'il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que Mat(f, $\mathfrak{B}$) = $\begin{bmatrix} O & I_r \\ O & O \end{bmatrix}$.

Solution : Il s'agit de réduire les endomorphismes nilpotents d'indice ≤ 2.
1) $f \circ f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \Rightarrow \operatorname{rg} f \le n - \operatorname{rg} f \Leftrightarrow 2 \operatorname{rg} f \le n$.
2) L'examen attentif du résultat montre comment construire la (une) base $\mathfrak{B}$ cherchée.
Considérons d'abord une base $(e_1, \dots, e_r)$ de Im f.
Complétons-la en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ de Ker f.
Choisissons, pour chaque indice $1 \le i \le r$, un vecteur e_{n-r+i} tel que $e_i = f(e_{n-r+i})$.
Montrons que $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ est une base de E.
Pour cela, il suffit de montrer que la famille est libre. Le lecteur est prié de le faire.
La matrice de f relativement à cette base a bien la forme voulue.

Exercice 61 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension $3n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et rg $f = 2n$.
Montrer qu'il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que Mat(f, $\mathfrak{B}$) = $\begin{bmatrix} O & O & O \\ I_n & O & O \\ O & I_n & O \end{bmatrix}$.

Solution : Bel exercice d'analyse et de synthèse.
L'examen attentif du résultat conduit à montrer que Ker $f \subset$ Im f, dim Ker $f = n$, dim Im $f = 2n$.
Or il est clair que

$$\begin{array}{ccccccccl} \{0\} & \subset & \operatorname{Ker} f & \subset & \operatorname{Ker} f^2 & \subset & E & & \dim \operatorname{Ker} f = n \\ & & \cup & & \cup & & & & \\ \{0\} & \subset & \operatorname{Im} f^2 & \subset & \operatorname{Im} f & \subset & E & & \dim \operatorname{Im} f = 2n. \end{array}$$

Appliquons le théorème du rang à $u = f|_{\operatorname{Im} f}$ par exemple.
$2n = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) + \dim \operatorname{Im} f^2$
$\le \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f^2 \le 2 \dim \operatorname{Ker} f \le 2n$.
De cela on déduit que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^2$.
Soit alors $(a_1, \dots, a_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^2$.
Pour chaque i, posons $a_i = f^2(c_i)$, puis $b_i = f(c_i)$.
Je dis que $(c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n)$ est une base de E. En effet, elle est libre à $3n$ éléments.
$\sum \gamma_i c_i + \sum \beta_i b_i + \sum \alpha_i a_i = 0$ s'écrit $\sum \gamma_i c_i + \sum \beta_i f(c_i) + \sum \alpha_i f^2(a_i) = 0$
Cela implique en appliquant f^2 : $\sum \gamma_i a_i = 0$. Comme les a_i sont libres, tous les γ_i sont nuls.
Donc $\sum \beta_i f(c_i) + \sum \alpha_i f^2(a_i) = 0$. Appliquons f : il vient $\sum \beta_i a_i = 0$, donc les β_i sont nuls.

Enfin, $\sum \alpha_i a_i = 0$, et tous les α_i sont sont nuls. cqfd

Il reste à considérer la matrice de f dans cette base.

Remarques :

1) Il revenait au même de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \mathrm{diag}(N, N, \dots, N) \text{ , où } N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Le théorème de Jordan dit que, comme $f^3 = 0$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}(f, B) = \mathrm{diag}(N, N, \dots, N', N', \dots, N'', N'', \dots) \text{ , où } N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, N' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } N'' = [0] .$$

Si k_1 (resp. k_2, k_3) est le nombre de blocs égaux à N (resp. N', N''), on a :

$3.k_1 + 2.k_2 + k_3 = 3n$ et $k_1 + k_2 + k_3 = n$, donc $k_2 = k_3 = 0$ et $k_1 = n$. cqfd.

Exercice 62 : Trouver $\lim_{n\to+\infty} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{bmatrix}^n$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) .

Solution : Posons $\frac{\alpha}{n} = \tan\theta_n$, ou plutôt $\theta_n = \mathrm{Arctan}\,\frac{\alpha}{n}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta_n \\ -\tan\theta_n & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta_n}\begin{bmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix} = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}\begin{bmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{bmatrix}^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n/2}\begin{bmatrix} \cos(n\theta_n) & \sin(n\theta_n) \\ -\sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{bmatrix}.$$

$n.\theta_n = n.\mathrm{Arctan}\frac{\alpha}{n} \to \alpha$ quand $n \to +\infty$, et $\frac{n}{2}\ln(1+\frac{\alpha^2}{n^2}) = \frac{n}{2}(\frac{\alpha^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \to 0$.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Remarques :

1) On aurait pu aussi diagonaliser $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{bmatrix}$, ou confondre A et le nombre complexe $1 + i\frac{\alpha}{n}$, via l'identification bien connue $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \leftrightarrow a + ib$.

2) Cet exercice rentre dans un résultat général relatif aux exponentielles : $\left(I + \frac{1}{n}M\right)^n \to \exp M$.

---

7. *Dualité.*

Exercice 1 : 1) Soit $E = \mathbf{R}^3$. Déterminer la forme linéaire f sur E telle que :

$f(4, 2, 0) = 2$, $f(1, 2, -3) = -7$, $f(0, 2, 5) = -1$.

2) Soient $E = \mathbf{R}^4$, f la forme linéaire : $X = (x, y, z, t) \to 3.x - 5.y + z - 2.t$. Comment s'exprime f dans la base $a_1 = (2, 1, 0, 4)$, $a_2 = (1, 0, 3, 2)$, $a_3 = (0, 1, -3, 2)$, $a_4 = (1, 1, 2, 2)$?

3) Soit E = $\mathbf{R}^3$. Montrer que les formes linéaires, où X = (x, y, z) :

$$f_1(X) = 2.x + 4.y + 3.z \ , \ f_2(X) = y + z \ , \ f_3(X) = 2.x + 2.y - z$$

forment une base de E* ; quelle est la base duale ?

Solution : Maple fait ici merveille…

1) Soit f : (x, y, z) → ax + by + cz. Tout revient à résoudre un système linéaire qui est cramérien.

```
> f:=a*x+b*y+c*z;e1:=subs([x=4,y=2,z=0],f);e2:=subs([x=1,y=2,z=-3],f);
e3:=subs([x=0,y=2,z=5],f);
```

$$f := a\,x + b\,y + c\,z$$

$$e1 := 4\,a + 2\,b \qquad e2 := a + 2\,b - 3\,c \qquad e3 := 2\,b + 5\,c$$

```
> s:=solve({e1=2,e2=-7,e3=-1},{a,b,c});assign(s);f;
```

$$s := \{a = 2, c = 1, b = -3\}$$

$$2\,x - 3\,y + z$$

2) Dans la base canonique f(X) = L.X, où L = [3, –5, 1, –2] et X = ^{t}[x, y, z, t].

Si P est la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base, les nouvelles coordonnées de X sont données par X = PX'. Donc f(X) = L.P.X'.

```
> with(linalg):f:=(x,y,z,t)->3*x-5*y+z-2*t;
```

$$f := (x, y, z, t) \to 3\,x - 5\,y + z - 2\,t$$

```
> a1:=vector([2,1,0,4]);a2:=vector([1,0,3,2]);a3:=vector([0,1,-3,2]);
a4:=vector([1,1,2,2]);
```

$$a1 := [2, 1, 0, 4] \qquad a2 := [1, 0, 3, 2] \qquad a3 := [0, 1, -3, 2] \qquad a4 := [1, 1, 2, 2]$$

```
> P:==transpose(matrix([a1,a2,a3,a4]));det(P);
```

$$P := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$10$$

```
> L:=multiply(vector([3,-5,1,-2]),P,vector([X,Y,Z,T]));
```

$$L := -7\,X + 2\,Y - 12\,Z - 4\,T$$

3) Analysons le problème posé.

On veut que x' = f(x, y, z), y' = g(x, y, z), z' = h(x, y, z) soient les coordonnées du vecteur X dans le repère cherché. Or, si Q est inversible, la formule X' = QX s'inverse en X = Q^{-1}.X'. La matrice de passage est donc P = Q^{-1} : ses colonnes donnent les nouveaux vecteurs de base.

```
> with(linalg):f:=2*x+4*y+3*z;g:=y+z;h:=2*x+2*y-z;
Q:=jacobian([f,g,h],[x,y,z]);det(Q);P:=inverse(Q);
```

$$f := 2\,x + 4\,y + 3\,z \qquad g := y + z \qquad h := 2\,x + 2\,y - z$$

$$Q := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad -4 \qquad P := \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Exercice 2 : Soit E = $\mathbf{K}_n$[X]. Pour tout c ∈ **K**, soit ε_c la forme d'évaluation : P → P(c).

Soient a_0, a_1 …, a_n n + 1 scalaires distincts.

1) Montrer que (ε_{a_0}, ε_{a_1} …, ε_{a_n}) est une base de E*. Quelle est la base duale ?

2) On suppose **K** = **C**. Soient a et b deux réels tels que a < b. Montrer que :

$\exists!(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n \qquad \forall P \in E \qquad \int_a^b P(x).dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$.

Comment trouver les λ_i ?

3) Montrer que $\forall P \in \mathbf{C}_3[X] \qquad \int_a^b P(x).dx = \frac{b-a}{6}\,[\, P(a) + 4P(\frac{a+b}{2}) + P(b)\,]$.

Solution :

1) Comme dim E* = n + 1, il suffit de montrer que la famille ($\varepsilon_{a_0}, \varepsilon_{a_1} \ldots, \varepsilon_{a_n}$) est libre.

Supposons $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i.\varepsilon_{a_i} = 0$, *i.e.* $\forall P \in E \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i) = 0$.

Ecrivons ceci pour $P = 1, X, \ldots, X^n$ il vient : $V.\Lambda = 0$, où $\Lambda = {}^t(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et V est la matrice de Vandermonde de $a_0, a_1 \ldots, a_n$. Comme cette matrice est inversible, $\Lambda = 0$. cqfd.

La base duale, ou préduale, est la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ de E telle que $\forall(i, j) \quad \varepsilon_{a_i}(L_j) = \delta_{i,j}$.

On reconnaît la base de Lagrange $L_j(X) = \prod_{i\neq j}(\frac{X-a_i}{a_j-a_i})$.

2) découle aussitôt de ce qui précède : la forme linéaire $P \to \int_a^b P(x).dx$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des formes d'évaluation $\varepsilon_{a_0}, \varepsilon_{a_1}, \ldots, \varepsilon_{a_n}$. Et $\lambda_j = \int_a^b L_j(x).dx$.

On dispose donc d'une méthode d'intégration exacte par simple évaluation de P en certains points $a_0, a_1 \ldots, a_n$, appelés « nœuds » de la formule d'intégration.

3) <u>Formule des trois niveaux</u>.

Il suffit d'appliquer ce qui précède aux formes d'évaluation $P \to P(a)$, $P \to P(\frac{a+b}{2})$ et $P \to P(b)$.

On trouve aussitôt $\forall P \in \mathbf{C}_2[X] \qquad \int_a^b P(x).dx = \frac{b-a}{6}\,[\, P(a) + 4P(\frac{a+b}{2}) + P(b)\,]$.

Mais la disposition symétrique des nœuds implique que la formule reste vraie pour tout $P \in \mathbf{C}_3[X]$, car elle est vraie pour $P(X) = (X - a)(X - \frac{a+b}{2})(X - b)$: en effet ce polynôme vérifie

$$\int_a^b P(x).dx = 0 = \frac{b-a}{6}\,[\, P(a) + 4P(\frac{a+b}{2}) + P(b)\,] \text{ . Cqfd.}$$

<u>Exercice 3</u>. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(c_1, \ldots , c_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X] \qquad \int_{-1}^{+1} P = 2\,P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k.[P(k)+P(-k)-2P(0)].$$

<u>Solution</u> : [Oral Mines 2009, RMS n° 415]

En vertu de l'exercice précédent, il existe un unique $(c_{-n}, \ldots , c_0, \ldots , c_n) \in \mathbf{R}^{2n+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n}[X] \qquad \int_{-1}^{+1} P = \sum_{k=-n}^{n} c_k.P(k) .$$

La disposition symétrique des nœuds k ($- n \leq k \leq n$) implique $c_{-k} = c_k$: il suffit d'applique la formule au polynôme $Q(X) = P(-X)$. Il reste à noter que $2 = \sum_{k=-n}^{n} c_k = c_0 + 2\sum_{k=1}^{n} c_k$.

Enfin, la formule reste vraie pour X^{2n+1} (et plus généralement pour tous les polynômes impairs). Donc elle est valable pour tout $P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X]$.

Exercice 4 : 1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists! P \in \mathbf{R}_n[X]$ $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\int_k^{k+1} P(t).dt = \frac{1}{k+1}$.

2) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbf{N}$ $\int_k^{k+1} P(t).dt = \frac{1}{k+1}$?

Solution : c'est une question d'interpolation.

1) Notons $Q(x) = \int_0^x P(t).dt$. L'hypothèse se traduit par P = Q', où

$$Q \in \mathbf{R}_{n+1}[X],\ Q(0) = 0,\ Q(1) = 1,\ Q(2) = 1 + \frac{1}{2},\ \dots,\ Q(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}.$$

Si on pose $H_0 = 0$ et $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$, P est dérivée d'un polynôme d'interpolation.

Soit $(L_0, L_1, \dots, L_{n+1})$ la base de Lagrange de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ (associée à $(0, 1, \dots, n+1)$, il vient

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n+1} H_k.L_k(X) \quad \text{et} \quad P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} H_k.L_k'(X) \qquad (*).$$

Plus généralement, montrons que les formes linéaires $f_k : P \to \int_k^{k+1} P(t).dt$ forment base de $\mathbf{R}_n[X]^*$, et cherchons la base duale. Notons $Q(x) = \int_0^x P(t).dt$, de sorte que $f_k(P) = Q(k+1) - Q(k)$.

$f_p(P) = 1$ et $f_q(P) = 0$ pour $q \neq p$ $\Leftrightarrow$ $Q(0) = \dots = Q(p) = 0$ et $Q(p+1) + \dots = Q(n+1) = 1$.

Notons $(L_0, L_1, \dots, L_{n+1})$ la base de Lagrange de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ (associée à $(0, 1, \dots, n+1)$, il vient

$$Q = L_{p+1} + \dots + L_{n+1} \quad \text{et} \quad P = Q'.$$

Il est facile ensuite de conclure que les f_k forment une base de $\mathbf{R}_n[X]^*$, et de retrouver (*).

2) La réponse est non. En effet, le polynôme $Q(x) = \int_0^x P(t).dt$ vérifierait

$Q(0) = 0$, et, pour tout $n \geq 1$, $Q(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Donc $Q(n) \sim \ln n$ pour $n \to +\infty$.

Or aucune fonction polynomiale ne vérifie une telle propriété asymptotique.

Remarque : la base de Lagrange utilisée en 1) est moins pratique que celle de Newton $(N_0, N_1, \dots, N_{n+1})$, qui a l'avantage d'être progressive. Laissons ici cette question de côté. Elle fournirait une autre expression de P, et une autre solution de 2).

Exercice 5 : Soient **K** un corps de caractéristique 0, $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires distincts. Montrer par deux méthodes que les polynômes $P_k(X) = (X + a_k)^n$ $(0 \leq k \leq n)$, forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Solution :

1ère méthode, directe. Le binôme donne $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (a_j)^i.X^{n-i}$.

La matrice de passage de $(X^n, \dots, X, 1)$ à $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est : $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_n^1 a_0 & C_n^1 a_1 & \dots & C_n^1 a_n \\ C_n^2 a_0^2 & C_n^2 a_1^2 & \dots & C_n^2 a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^n a_0^n & C_n^n a_1^n & \dots & C_n^n a_n^n \end{bmatrix}$.

Cette matrice est inversible, car son déterminant est :

$$\det H = \left(\prod_{k=0}^{n} C_n^k\right).V(a_0, a_1, \dots, a_n), \text{ où V est le Vandermonde.}$$

2ème méthode, par dualité. Soit f une forme linéaire sur $\mathbf{K}_n[X]$ telle que $(\forall j)$ $f(P_j) = 0$.

Alors, pour tout j : $\sum_{i=0}^{n} C_n^i (a_j)^i . f(X^{n-i}) = 0$. Introduisons le polynôme Q(T) = $\sum_{i=0}^{n} C_n^i f(X^{n-i}).T^i$.

Il est de degré $\leq n$ et admet $n + 1$ racines distinctes : les a_k.

Par suite, il est nul, donc : $\forall i \in [0, n]$ $C_n^i f(X^{n-i}) = 0$.

K étant de caractéristique nulle, $\forall i \in [0, n]$ $f(X^{n-i}) = 0$, et f est nulle.

Comme $\text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_n)° = \{0\}$, $\text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_n) = \mathbf{K}_n[X]$.

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est génératrice, donc est une base.

Exercice 6 : 1) Soit B une matrice de $M_n(\mathbf{K})$ vérifiant $\forall A \in M_n(\mathbf{K})$ tr A = 0 $\Rightarrow$ tr(A.B) = 0.
Montrer que B est une matrice scalaire.
2) Soient E = $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$, g un élément de E vérifiant :

$$(\forall f \in E) \quad \int_a^b f(x).dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x).g(x).dx = 0 .$$

Montrer que g est constante.

Solution :
Rappelons que si φ et ψ sont deux formes linéaires sur E, Ker $\varphi \subset$ Ker $\psi \Leftrightarrow (\exists\lambda\in\mathbf{K})\ \psi = \lambda\varphi$.
1) Ici, φ est la trace et $\psi : A \to \text{tr}(AB)$. Alors $(\exists\lambda \in \mathbf{K})$ $(\forall A)$ tr(A.B) = λ.tr(A).
Du coup, $(\forall A)$ tr(A.(B $-$ λ.I)) = 0 , et on en déduit que B = λ.I.
(prendre pour A les matrices canoniques E_{ij}).

2) Ici, $\varphi : f \to \int_a^b f(x).dx$ et $\psi : f \to \int_a^b f(x).g(x).dx$. Alors $(\exists\lambda)$ $(\forall f)$ $\int_a^b f(x).g(x).dx = \lambda \int_a^b f(x).dx$.

Alors $(\forall f)$ $\int_a^b f(x).(g(x)-\lambda).dx = 0$, donc $g(x) \equiv \lambda$.

(prendre f = g $-$ λ et appliquer le lemme relatif aux fonctions continues positives d'intégrale nulle).

Exercice 7 : Soient p un nombre premier, E un $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension n.
Combien E admet-il de droites vectorielles ? de droites affines ? d'hyperplans vectoriels ? affines ?

Solution : E a p^n éléments (considérer une base, et les coordonnées de chaque vecteur).

♣ Chaque vecteur non nul définit une droite vectorielle D, qui a p éléments.
Mais plusieurs vecteurs engendrent la même droite D : tous les vecteurs non nuls de D.

En vertu des bergers, il y a $\frac{p^n-1}{p-1}$ droites vectorielles.

♦ Une droite affine D' est de la forme D + a, où D est une droite vectorielles : il y a $p^n \frac{p^n-1}{p-1}$ tels couples. Mais plusieurs couples (D, b) définissent la même droite D' : les (D, b), où $b - a \in$ D.

En vertu des bergers, il y a $p^{n-1} \frac{p^n-1}{p-1}$ droites affines.

♥ L'orthogonalité met en bijection les droites vectorielles de E et les hyperplans vectoriels de E*.

Il y a donc $\frac{p^n-1}{p-1}$ hyperplans vectoriels dans E* doncdans E.

♠ Un hyperplan affine est de la forme H + a, où H est un hyperplan vectoriel et a un vecteur de E.
Mais plusieurs couples (H, b) définissent le même hyperplan, à savoir les (H, b) où $b - a \in$ H.

En vertu des bergers, il y a $\frac{p^n-1}{p-1} \times \frac{p^n}{p^{n-1}} = p\frac{p^n-1}{p-1}$ hyperplans affines dans E.

Référence : Un problème d'algèbre linéaire généralise ceci et propose bien d'autres dénombrements.

Exercice 8 : Soit E un **K**-ev de dimension n. La donnée d'une famille $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de vecteurs de E définit une application linéaire : $u : f \in E^* \to (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p)) \in \mathbf{K}^p$.

Montrer $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est libre $\Leftrightarrow$ u est surjective ;

$(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est génératrice $\Leftrightarrow$ u est injective ;

$(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une base $\Leftrightarrow$ u est un isomorphisme .

Solution : Le concept d'orthogonalité forme-vecteur va permettre de résoudre cet exercice.

$\text{Ker } u = \{ f \in E^* ; f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_p) = 0 \} = \{ a_1, a_2, \dots, a_p \}^\circ = \text{Vect}(a_1, a_2, \dots, a_p)^\circ$.

Du coup, $\dim \text{Ker } u = n - \dim \text{Vect}(a_1, a_2, \dots, a_p \}) = n - \text{rg}(a_1, a_2, \dots, a_p)$

Et, en vertu du théorème du rang, $\dim \text{Im } u = \text{rg}(a_1, a_2, \dots, a_p)$.

Les trois équivalences sont laissées au lecteur.

Autre solution, partielle, de la première équivalence, à titre de curiosité.

• Si u est surjective, $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est libre. En effet, supposons $\lambda_1.a_1 + \lambda_2.a_2 + \dots + \lambda_p.a_p = 0$. Prenons l'image par f : $\lambda_1.f(a_1) + \lambda_2.f(a_2) + \dots + \lambda_p.f(a_p) = 0$. En vertu de la surjectivité de u, cela s'écrit $\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + \dots + \lambda_p.x_p = 0$ pour tout p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$. En particulier les p-uplets canoniques. Donc tous les λ_k sont nuls.

• Si $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est libre, complétons-la en une base $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Alors on a vu dans le cours que $f \in E^* \to (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)) \in \mathbf{K}^n$ est un isomorphisme.

Par suite, $f \in E^* \to (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p)) \in \mathbf{K}^p$ est surjective.

Exercice 9 : Soit E un **K**-ev de dimension n. La donnée d'une famille $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ de formes linéaires sur E définit une application linéaire $v : x \in E \to (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbf{K}^p$.

Montrer $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est libre $\Leftrightarrow$ v est surjective ;

$(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est génératrice $\Leftrightarrow$ v est injective ;

$(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base $\Leftrightarrow$ v est un isomorphisme .

Solution : Le concept d'orthogonalité forme-vecteur va permettre de résoudre cet exercice.

$\text{Ker } v = \{ x \in E ; f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_p(x) = 0 \} = {}^\circ\{ f_1, f_2, \dots, f_p \} = {}^\circ\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Du coup, $\dim \text{Ker } v = n - \dim \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p) = n - \text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_p)$

Et, en vertu du théorème du rang, $\dim \text{Im } v = \text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Les trois équivalences sont laissées au lecteur.

Remarque : la bidualité ramène cet exercice au précédent.

Exercice 10 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n, E* son dual, $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de vecteurs de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ un n-uplet de formes linéaires sur E. Montrer l'équivalence :

$$\det(< f_i , x_j >) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \text{ est une base de E et } \mathcal{B}' \text{ est une base de E*.}$$

Déterminer alors les bases duales de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Solution : Notons $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$, où $a_{ij} = < f_i , x_j >$.

1) Supposons $A = (a_{ij}) \in Gl_n(\mathbf{K})$. Alors :

$$\lambda_1. f_1 + \dots + \lambda_n. f_n = 0 \;\Rightarrow\; [\lambda_1 , \dots , \lambda_n].A = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

$$\mu_1.x_1 + \dots + \mu_n.x_n = 0 \;\Rightarrow\; A.{}^t[\mu_1 , \dots , \mu_n] = 0 \;\Rightarrow\; \mu_1 = \dots = \mu_n = 0.$$

Par suite, $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ sont des familles libres de n éléments ; donc des bases.

2) Réciproquement, soient $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ des bases de E et E* resp.

$$A.{}^t[\mu_1, \dots, \mu_n] = 0 \iff (\forall i) < f_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j.x_j > = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu_j.x_j = 0 \quad \text{car} \quad {}^\circ\text{Vect}(f_1, ..., f_n) = \{0\}$$

$$\Rightarrow (\forall i)\ \mu_i = 0 \quad \text{car} \quad (x_1, ..., x_n) \text{ est libre.}$$

On en déduit que l'application canoniquement associée à A est injective, donc bijective.

3) Bases duales. Supposons ces conditions réunies.

Soit $(g_1, ..., g_n)$ la base duale de $(x_1, ..., x_n)$, $Q = (q_{ij})$ la matrice de passage de $(f_1, ..., f_n)$ à $(g_1, ..., g_n)$.

On a : $g_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}.f_i$ et $g_j(x_k) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}.f_i\,(x_k) = \delta_{jk}$, donc ${}^tQ.A = I$ et $Q = {}^tA^{-1}$.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base duale de $(f_1, ..., f_n)$, $P = (p_{ij})$ la matrice de passage de $(x_1, ..., x_n)$ à $(e_1, ..., e_n)$.

On a : $e_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.x_i$ et $f_k(e_j) = \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i).p_{ij} = \delta_{jk}$, donc $A.P = I$ et $P = A^{-1}$.

Exercice 11 : **multiplicateurs de Lagrange**.

Soient E un **K**-ev de dimension n, $f_1, \dots, f_p$ et f des formes linéaires sur E.

Pour que tout vecteur annulant $f_1, \dots, f_p$ annule aussi f, il faut et il suffit que f soit combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$: $f = \lambda_1.f_1 + \dots + \lambda_p.f_p$. Les λ_i s'appellent « multiplicateurs de Lagrange ».

Solution : Si p = 1, on retrouve un résultat du cours.
Il s'agit de montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) $\forall x \in E \quad f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_p(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$;

ii) $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p \quad f = \lambda_1.f_1 + \dots + \lambda_p.f_p$.

Ici encore le concept d'orthogonalité fait merveille :

i) s'écrit en effet ${}^\circ\{f_1, f_2, \dots, f_p\} \subset {}^\circ\{f\}$, ou encore ${}^\circ\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p) \subset {}^\circ\text{Vect}(f)$.

Passons à l'orthogonal. Ceci équivaut à $({}^\circ\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p))^\circ \supset ({}^\circ\text{Vect}(f))^\circ$,

c'est-à-dire à $\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p) \supset \text{Vect}(f)$,

ou encore à $f \in \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$. CQFD.

On peut donner une autre preuve, moins conceptuelle, que voici :

• il est clair que ii) $\Rightarrow$ i).

• montrons i) $\Rightarrow$ ii) par contraposition. Supposons que $f \notin \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Soit $r = \text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_p)$; supposons par exemple $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ libres et engendrant les suivantes.

Alors $(f_1, f_2, \dots, f_r, f)$ est libre. On peut la compléter en une base de E*, et considérer la base préduale. Le (r+1)-ème vecteur de cette base annule $f_1, f_2, \dots, f_r$ sans annuler f.

Remarques : 1) On rencontre aussi les multiplicateurs de Lagrange dans la théorie des extrema liés.
2) Le problème de l'X 2010 suggère une démonstration par récurrence sur p.

Exercice 12 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, u, v, w $\in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $\text{Im}(w) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v) \iff \exists(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad w = u \circ a + v \circ b$.

2) Montrer que $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(w) \iff \exists(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad w = a \circ u + b \circ v$.

3) Généraliser ces résultats à $\text{Im}(w) \subset \sum \text{Im}(u_i)$ et $\cap \text{Ker}(u_i) \subset \text{Im}(w)$, pour $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$.

Solution :

1) Il est clair que $w = u \circ a + v \circ b \Rightarrow \mathrm{Im}\, w \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.

Supposons que $\mathrm{Im}\, w \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E .

Pour tout i, il existe des vecteurs a_i et b_i tels que $w(e_i) = u(a_i) + v(b_i)$.

Soient a et b les endomorphismes de E définis par $(\forall i)\ u(e_i) = a_i$ et $v(e_i) = b_i$.

On a $w = u \circ a + v \circ b$ par coïncidence sur la base.

2) L'équivalence $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(w) \Leftrightarrow \exists(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2\ \ w = a \circ u + b \circ v$

peut se montrer directement, mais le plus simple est de la déduire de la précédente par dualité et transposition.

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ker}\, u) \cap (\mathrm{Ker}\, v) \subset \mathrm{Ker}\, w &\Leftrightarrow (\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v)^\circ \supset (\mathrm{Ker}\, w)^\circ \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{Ker}\, u)^\circ + (\mathrm{Ker}\, v)^\circ \supset (\mathrm{Ker}\, w)^\circ \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, {}^t u + \mathrm{Im}\, {}^t v \supset \mathrm{Im}\, {}^t w \\ &\Leftrightarrow \exists(a', b') \in \mathcal{L}(E^*)^2\ \ {}^t w = {}^t u \circ a' + {}^t v \circ b' \\ &\Leftrightarrow \exists(a', b') \in \mathcal{L}(E^*)^2\ \ w = {}^t a' \circ u + {}^t b' \circ v \\ &\Leftrightarrow \exists(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2\ \ \ w = a \circ u + b \circ v.\end{aligned}$$

3) Le résultat concernant les images s'étend facilement, celui concernant les noyaux s'en déduit par dualité-transposition (mais serait difficile à montrer directement).

Remarques : 1) Cet exercice généralise l'exercice sur les multiplicateurs de Lagange. Il généralise aussi le théorème de factorisation d'une application à travers une autre : faire $v = 0$.

2) On s'est limité à des endomorphismes par pure commodité d'écriture. En réalité, cet exercice reste vrai dans le cadre d'applications linéaires convenablement définies. Il implique alors le résultat relatif aux multiplicateurs de Lagrange.

Autre solution : Matriciellement, il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Im}\, W \subset \mathrm{Im}\, U + \mathrm{Im}\, V \Leftrightarrow \exists(A, B)\ \ W = U.A + V.B.$$
$$\mathrm{Ker}\, U \cap \mathrm{Ker}\, V \subset \mathrm{Ker}\, W \Leftrightarrow \exists(A, B)\ \ W = A.U + B.V.$$

Or nous voici ramenés à l'exercice sur la factorisation des matrices, car :

$$\mathrm{Im}\, W \subset \mathrm{Im}\, U + \mathrm{Im}\, V \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, W \subset \mathrm{Im}\,(U \mid V) \Leftrightarrow \exists(A, B)\ \ W = (U \mid V)\left(\frac{A}{B}\right) = U.A + V.B.$$

$$\mathrm{Ker}\, U \cap \mathrm{Ker}\, V \subset \mathrm{Ker}\, W \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\left(\frac{U}{V}\right) \subset \mathrm{Ker}\, W \Leftrightarrow \exists(A, B)\ \ W = (A \mid B)\left(\frac{U}{V}\right) = A.U + B.V.$$

Remarque : on pourrait éviter tout recours aux matrices en introduisant des applications linéaires correspondant à la concaténation et à la superposition des matrices. C'est tout à fait faisable.

Exercice 13 : Notion de codimension.

1) Soient $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ et $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$. Codimension de $F = \{ f \in E ; f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0 \}$? Indiquer un supplémentaire de F.

2) Soient $E = C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $F = \{ g \in E ; g(0) = g(1) = 0 \}$, $G = \{ h \in E ; h'' = h \}$.

Montrer que $E = F \oplus G$. Que dire de G ? de F ?

Solution : Nous sommes ici en dimension infinie.

1) Les formes linéaires $f \to f(a_i)$ sont indépendantes. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de codimension $n+1$ de E. Un supplémentaire de F est le sous-espace G des fonctions continues sur [a, b] et affines sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$. G est un sous-espace de dimension $n+1$, admettant pour base la fonction constante égale à 1 et les fonctions $\varphi_i : x \to (x - a_i)^+$ $(i < n)$.

2) $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est un plan vectoriel. Si $f = g + h$, où $g \in G$, $h = A.\mathrm{ch} + B.\mathrm{sh} \in H$,

nécessairement $A = f(0)$ et $B = \frac{1}{sh1}(f(1) - A.ch1)$ … Bref, F est un sous-espace de codimension 2.

Exercice 14 : co-formule de Grassmann.

Si F et G sont deux sev de codimension finie de E, alors $F \cap G$ et $F + G$ aussi, et l'on a :

$$\text{codim}(F \cap G) + \text{codim}(F + G) = \text{codim}(F) + \text{codim}(G).$$

[Indication : raisonner directement, ou construire une suite exacte :

$$\{0\} \to E / (F \cap G) \to (E/F) \oplus (E/G) \to E / (F + G) \to \{0\}.]$$

Solution : Exercice pour fan des sixties...

Exercice 15 : Soient E un espace vectoriel, E* son dual. Une partie A de E* est dite séparante si

$$\forall(x, y) \in E\times E \quad x \neq y \;\Rightarrow\; \exists f \in A \quad \langle f, x \rangle \neq \langle f, y \rangle .$$

1) On suppose E de dimension finie. Montrer que A est séparante $\Leftrightarrow$ Vect(A) = E*.

2) Montrer que ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie.

Solution :

1) La condition (S) $\forall(x, y) \in E\times E \quad x \neq y \;\Rightarrow\; \exists f \in A \quad \langle f, x \rangle \neq \langle f, y \rangle$

équivaut à celle-ci (S') $\forall(x, y) \in E\times E \quad \forall f \in A \quad \langle f, x \rangle = \langle f, y \rangle \;\Rightarrow\; x = y$,

ou encore à celle-ci (S'') $\forall z \in E \quad \forall f \in A \quad \langle f, z \rangle = 0 \;\Rightarrow\; z = 0$.

Il est clair que A est séparante si et seulement si Vect(A) est séparante.

Or (S'') appliquée à Vect(A) signifie que °Vect(A) = {0} .

En vertu de la théorie de la dualité, cette condition équivaut à Vect(A) = (°Vect(A))° = {0}° = E* .

2) Supposons E de dimension infinie. Soit (e_i) une base de E, (e_i^*) la famille des formes coordonnées relatives à cette base. (e_i^*) est une famille libre de E*, mais non une base de E*, car, par exemple, la forme linéaire $x = \sum x_i e_i \to \sum x_i$ n'est pas combinaison linéaire des e_i^* .

Cependant, (e_i^*) et $\text{Vect}(e_i^*)$ sont des parties séparantes, car $(\forall i)$ $\langle e_i^*, x \rangle = \langle e_i^*, y \rangle \;\Rightarrow\; x = y$.

En dimension infinie subsiste seulement l'implication : Vect(A) = E* $\Rightarrow$ A séparante.

Exercice 16 : **thème et variations sur la trace**.

1) a) Soient A et B $\in M_n(\mathbf{K})$; montrer que tr(A.B) = tr(B.A).

b) En déduire que tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB). A-t-on tr(ABC) = tr(ACB) ?

2) Montrer que toute forme linéaire f sur $M_n(\mathbf{K})$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$f(M) = \text{tr}(AM) \;,\; \text{où } A \in M_n(\mathbf{K}).$$

3) Quelles sont les formes linéaires sur $M_n(\mathbf{K})$ vérifiant $\forall(A, B)$ $f(AB) = f(BA)$?

4) Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbf{K})$ rencontre $Gl_n(\mathbf{K})$.

5) Si **K** est de caractéristique 0, peut-on avoir $A.B - B.A = I_n$?

Solution :

1) est facile. On en déduit que la trace est invariante par permutation circulaire.

En revanche, on n'a pas toujours tr(ABC) = tr(ACB) : prendre $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

AB = O, donc tr(ABC) = 0, ACB = B, donc tr(ACB) = 1.

2) Soit f une forme linéaire sur $M_n(\mathbf{K})$. Elle s'écrit $f(M) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}.m_{ij}$, où $\lambda_{ij} = f(E_{ij})$.

On constate que $f(M) = \text{tr}(AM)$, où $A = (a_{ij}) = (\lambda_{ji})$.

Ainsi, on peut dire que $A \to f_A$ réalise un isomorphisme canonique de $M_n(\mathbf{K})$ sur son dual.

Remarque : Une variante consiste à noter que $\Phi(A, B) = tr(A.B) = \sum_{i,j} a_{ij}.b_{ji}$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $M_n(\mathbf{K})$. De plus, $\Psi(A, B) = tr(A.{}^tB) = \sum_{i,j} a_{ij}.b_{ij}$ est la forme bilinéaire symétrique standard sur $M_n(\mathbf{K})$, *i.e.* le produit scalaire canonique si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

3) Les formes linéaires en question sont les $M \to \alpha.trM$. Cela peut se montrer de deux façons :

• $f(AB) \equiv f(BA) \Leftrightarrow \forall(i, j, k, l)\ f(E_{ij}.E_{kl}) = f(E_{kl}.E_{ij}) \Leftrightarrow \forall(i, j, k, l)\ \delta_{jk}.f(E_{il}) = \delta_{li}.f(E_{kj})$.

On en déduit $\forall(i, j)\ \ f(E_{ii}) = f(E_{jj})$ et $i \neq j \Rightarrow f(E_{ij}) = 0$.

Si $\alpha = f(E_{11})$, on a donc $f(M) = \sum_{i,j} f(E_{ij}).m_{ij} = \alpha \sum_i m_{ii} = \alpha.tr(M)$.

• en utilisant 1). Soit C telle que $(\forall M)\ f(M) = tr(CM)$.

Alors $\forall(A, B)\ tr(CAB) = tr(CBA)$, donc $\forall(A, B)\ \ tr(CAB) = tr(ACB)$, *i.e.* $tr((CA - AC).B) = 0$.

Par unicité on en déduit que $\forall A\ \ CA = AC$, donc C est scalaire : $C = \alpha I_n$. cqfd.

4) Soient $n \geq 2$, $\mathcal{H}$ un hyperplan de $M_n(\mathbf{K})$. En vertu de 1), il existe une matrice non nulle A telle que

$$M \in \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad tr(A.M) = 0.$$

Soient $r = rg\ A \geq 1$, Q et P inversibles telles que $Q^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = J$.

Alors $tr(A.M) = tr(Q.J.P^{-1}.M) = tr(J.P^{-1}.M.Q)$. Chercher M inversible telle que $tr(A.M) = 0$ revient à trouver $M' = P^{-1}.M.Q$ inversible telle que $tr(J.M') = 0$.

Posons $M' = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$. Alors $tr(J.M') = tr(X)$. Il est facile d'exhiber M' inversible telle que $tr(X) = 0$.

• Si $r = 1$, il existe de nombreuses matrices inversibles telles que $m'_{11} = 0$.

• Si $r > 2$, poser $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $T = I_{n-r}$, $Y = Z = O$.

5) Enfin, l'équation $A.B - B.A = I_n$ est sans solution, car elle impliquerait, en passant à la trace : $0 = n.1_{\mathbf{K}}$. C'est impossible si la caractéristique de $\mathbf{K}$ est nulle.

Plus généralement on ne peut avoir $A.B - B.A = \alpha.I_n + N$, où N est nilpotente et $\alpha \in \mathbf{K}^*$.

Remarque : en caractéristique non nulle, ce résultat ne tient plus.

Ainsi, si $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ vérifient bien $AB - BA = I_2$.

Exercice 17 : Parité sur l'échiquier.
Sur un échiquier, on inscrit un nombre entier dans chaque case. On constate que les sommes des éléments de chaque ligne ainsi que les sommes des éléments de chaque colonne sont des nombres pairs. Pourquoi la somme des nombres inscrits sur les cases noires est-elle paire ?

Solution : [Le Monde, *Affaire de logique*, n° 573, 26 février 2008]

Solution du Monde : Soit L_k la somme des nombres de la ligne numéro k et C_j la somme des nombres de la colonne numéro j. On fait alors la somme $S = L_1 + L_3 + L_5 + L_7 - C_1 - C_3 - C_5 - C_7$. Elle est paire, naturellement. On remarque que les nombres inscrits dans les cases blanches n'interviennent pas dans cette somme, soit qu'ils n'appartiennent pas aux lignes et aux colonnes en question, soit qu'ils s'ajoutent et se retranchent. Les nombres inscrits dans les cases noires interviennent tous une fois, précédés du signe + ou du signe –. On peut donc écrire $S = A - B$, alors que la somme des nombres des cases noires est A + B. Or la somme A + B est de même parité que la différence A – B. Elle est donc paire.

<u>Solution taupine</u> : Généralisons l'énoncé à des matrices $n\times n$, où n est pair $n = 2m$, et passons dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Il s'agit de montrer que si une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ a tous ses totaux marginaux nuls, alors $\sum_{i+j\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)} a_{ij} = 0$. Notons $l_i(A)$ la somme des éléments de la i-ème ligne, $c_j(A)$ la somme des éléments de la j-ème colonne, et $f(A) = \sum_{i+j\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)} a_{ij}$. Ce sont toutes des formes linéaires.

Il s'agit de montrer que $l_1(A) = \dots = l_n(A) = c_1(A) = \dots = c_n(A) = 0 \Rightarrow f(A) = 0$.

Pour cela, en vertu de la théorie des <u>multiplicateurs de Lagrange</u>, il suffit de (et il faut) montrer que f est combinaison linéaire de $l_1, \dots , l_n , c_1 , \dots , c_n$.

Utilisons l'isomorphisme canonique de $M_n(\mathbf{K})$ et de son dual, via la trace (cf. exercice précédent).

$l_i(A) = \mathrm{tr}(C_i.A)$, $c_j(A) = \mathrm{tr}(L_j.A)$, où C_i (resp. L_j) est la matrice dont la i-ème colonne (resp. la j-ème ligne) est formée de 1, les autres éléments étant nuls,

et $f(A) = \mathrm{tr}(D.A)$, où $D = (d_{ij})$ où $d_{ij} = 1$ si $i + j \equiv 0 \pmod 2$, 0 sinon.

Il s'agit alors de vérifier que D est combinaison linéaire de $L_1, \dots , L_n , C_1 , \dots , C_n$.

Je dis que $D = C_1 + C_3 + \dots + C_{2m-1} - (L_2 + L_4 + \dots + L_{2m})$.

(– ou +, c'est la même chose dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) .

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}.$$

NB : Si l'on remplace $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par un corps quelconque $\mathbf{K}$, alors l'énoncé devient :

Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$ ayant tous ses totaux marginaux nuls. Alors $\sum_{i et j impairs} a_{ij} = \sum_{i et j pairs} a_{ij}$.

<u>Exercice 18</u> : Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$ ayant tous ses totaux marginaux nuls : $\forall$i $\sum_j a_{ij} = 0$ et $\forall$j $\sum_i a_{ij} = 0$.

Si (I, J) est une partition de {1, 2, …, n}, montrer que $\sum_{i et j \in I} a_{ij} = \sum_{i et j \in J} a_{ij}$.

<u>Solution</u> : Ce résultat généralise le précédent.

Il se démontre directement : écrire $\sum_{i\in I}\sum_j a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_i a_{ij} = 0$ et casser la somme en deux.

<u>Exercice 19</u> : Soient $A, B \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer l'équivalence entre :

i) $\forall C \in M_n(\mathbf{K})$ $AC + CA = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(BC) = 0$ ii) $\exists X \in M_n(\mathbf{K})$ $AX + XA = B$.

<u>Solution</u> : [Oral X MP 2012, RMS n° 167, etc.]

Voilà qui sent la dualité à plein nez ! En d'autres termes : une implication est facile, l'autre, plus difficile, va se déduire de la première !

ii) $\Rightarrow$ i) Supposons $AC + CA = 0$. Alors, par invariance circulaire de la trace :

$$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}((AX + XA)C) = \mathrm{tr}(AXC) + \mathrm{tr}(XAC) = \mathrm{tr}(XCA) + \mathrm{tr}(XAC) = \mathrm{tr}(X(AC + CA)) = 0.$$

Prenons de la hauteur, et introduisons l'endomorphisme $f : M \to AM + MA$ de $M_n(\mathbf{K})$, et la forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\Phi(P, Q) = \mathrm{tr}(PQ)$. Il s'agit de montrer l'équivalence :

$$\mathrm{Ker}\, f \subset B^{\perp} \iff B \in \mathrm{Im}\, f .$$

Or f est autoadjoint pour Φ, en ce sens que $\forall(P, Q)\ \ \Phi(f(P), Q) = \Phi(P, f(Q))$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ (inclusion + égalité des dimensions découlant du fait que Φ est non dégénérée).

Dès lors $\mathrm{Ker}\, f \subset (\mathbf{K}.B)^{\perp} \iff \mathbf{K}.B \subset (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} = \mathrm{Im}\, f \iff B \in \mathrm{Im}\, f$.

Référence : cet exercice fut jadis posé à Bertrand Philibert à l'ENS Cachan en 1991.

Exercice 20 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence des propriétés :
i) f est diagonalisable ;
ii) Il existe n hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_n$ f-stables, tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

« Je t'envie humblement le merveilleux poème
Où, pour douer l'esprit d'un infaillible essor,
L'algèbre, les yeux clos, transposant le problème,
Aux secrets de l'espace ajuste sa clé d'or. »

Sully Prudhomme

Solution : [Oral Mines MP 2009, RMS n° 445]

i) $\Rightarrow$ ii) est bien facile, car si $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base f-propre, les n hyperplans

$$H_i = \mathrm{Vect}(e_j ; j \neq i) \quad (1 \le i \le n)$$

sont f-stables et d'intersection réduite à $\{0\}$.

ii) La réciproque repose sur les propriétés de la transposée ${}^t f$, qui est l'endomorphisme du dual E* défini par $\forall \varphi \in E^* \quad {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$.

Lemme 1 : φ est vecteur propre de ${}^t f$ si et seulement si Ker φ est un hyperplan f-stable.

Preuve : Si φ est vecteur propre de ${}^t f$: ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f = \lambda.\varphi$, alors φ est non nulle et H = Ker φ est un hyperplan. Et H est f-stable, car $x \in H \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow \lambda.\varphi(x) = 0 \Rightarrow (\varphi \circ f)(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in H$.

Réciproquement, si Ker φ est un hyperplan f-stable, la forme linéaire φ est non nulle, et telle que

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow (\varphi \circ f)(x) = 0 .$$

On sait que cela implique que la forme linéaire $\varphi \circ f$ est colinéaire à φ.

Lemme 2 : f est diagonalisable si et seulement si ${}^t f$ est diagonalisable.

Preuve : Il est clair que f et ${}^t f$ ont mêmes polynômes annulateurs. Si l'un d'eux est diagonalisable, il annule un polynôme scindé à racines simples ; ce polynôme annule aussi l'autre, qui est donc diagonalisable.

On peut aussi procéder matriciellement, et noter que $A \in M_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable ssi sa transposée l'est.

Concluons ! Soient $H_1, H_2, \dots, H_n$ n hyperplans f-stables, tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires de noyaux respectifs $H_1, \dots, H_n$.

En vertu du lemme 1, ce sont des vecteurs propres de la transposée ${}^t f$.

L'hypothèse $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$ se traduit par : ° Vect $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \{0\}$,

donc par Vect $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = E^*$, donc par $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de E* .

Ainsi ${}^t f$ admet une base propre, donc est diagonalisable. Il reste à invoquer le lemme 2.

iii) Voici une autre présentation, plus concrète, de la réciproque.

Soient $H_1, H_2, \dots, H_n$ n hyperplans f-stables, tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

Pour montrer que f est diagonalisable, tout revient à trouver n droites f-stables $D_1, D_2, \dots, D_n$, telles que $E = D_1 \oplus \dots \oplus D_n$. Or ces droites, nous les avons sous les yeux : ce sont les $D_i = \bigcap_{j \neq i} H_j$.

En effet, soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires de noyaux respectifs $H_1, \dots, H_n$.
L'hypothèse $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$ se traduit par : ° Vect $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \{0\}$,
donc Vect $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = E^*$, et $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

Soit alors $(a_1, \dots, a_n)$ la base préduale.

Alors $D_i = \bigcap_{j \neq i} H_j = \bigcap_{j \neq i} Ker(\varphi_j) = {}^\circ\mathrm{Vect}(\{ \varphi_j ; j \neq i \}) = \mathbf{K}.a_i$.

Par conséquent, $D_1, D_2, \dots, D_n$ sont des droites, telles que $E = D_1 \oplus \dots \oplus D_n$.
Enfin, elles sont stables comme intersection de sous-espaces stables. Cqfd.

<u>Exercice 21</u> : Soient E un espace euclidien, f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :
(i) $\forall(x, y) \in E\times E \quad x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$ (ii) $\exists(\lambda, u) \in \mathbf{R}_+\times O(E) \quad f = \lambda u$.

<u>Solution</u> : Il s'agit de caractériser géométriquement les similitudes de E.
(ii) ⇒ (i) est facile, car $(f(x) \mid f(y)) = \lambda^2 (u(x) \mid u(y)) = \lambda^2 (x \mid y)$.
(i) ⇒ (ii) peut se montrer par dualité.
En effet l'hypothèse $\forall(x, y) \in E\times E \quad (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$ s'écrit encore
$\forall(x, y) \in E\times E \quad (x \mid y) = 0 \Rightarrow ((f^* \circ f)(x) \mid y) = 0$.
Autrement dit $\mathrm{Ker}\,(x \mid \bullet) \subset \mathrm{Ker}\,((f^* \circ f)(x) \mid \bullet)$. Donc $\forall x \neq 0 \quad \exists\alpha(x) \quad (f^* \circ f)(x) = \alpha(x).x$.
La linéarité de $f^* \circ f$ impose que $x \to \alpha(x)$ est constante. Par suite $\exists\alpha \ \forall x \ (f^* \circ f)(x) = \alpha x$.
Et $\| f(x) \|^2 = ((f^* \circ f)(x) \mid x) = \alpha.\|x\|^2$ implique $\alpha \geq 0$. Si $\alpha = 0$, $f = 0$; si $\alpha > 0$, $f / \sqrt{\alpha} \in O(E)$.

<u>Remarque</u> : une solution existe via les bases, sans dualité.

<u>Exercice 22</u> : Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif infini, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Si $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une famille finie de vecteurs non nuls, montrer qu'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\prod_{i=1}^{p} f(a_i) \neq 0$.

<u>Solution</u> : [Oral Polytechnique 2008]

Cela revient à dire qu'il existe un hyperplan vectoriel H ne contenant aucun des a_k.

Notons d'abord que si a est un vecteur non nul de E, $H(a) = \{ f \in E^* ; f(a) = 0 \}$ est un hyperplan de E* : c'est en effet $\{\mathbf{K}.a\}^\circ$.

Il s'agit donc de montrer que $H(a_1) \cup H(a_2) \cup \dots \cup H(a_p) \neq E^*$.
Or c'est un résultat général, qui a été établi dans un exercice antérieur :
« Si $\mathbf{K}$ est infini, aucun $\mathbf{K}$-espace vectoriel n'est réunion d'une famille finie d'hyperplans. »

<u>Remarque</u> : Ce résultat tombe en défaut si $\mathbf{K}$ est fini : il suffit de prendre pour a_k tous les vecteurs non nuls de E.

<u>Exercice 23</u> : On se propose de montrer que si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, il n'existe pas d'isomorphisme canonique de E sur son dual, sauf dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $n = 2$. On rappelle qu'un isomorphisme canonique ne doit dépendre que de la structure d'espace vectoriel, et aucunement d'un choix de bases.

1) Montrer que si φ était un tel isomorphisme, on aurait pour tout automorphisme u de E :
$$\forall(x, y) \in E^2 \quad < \varphi(x) , y > = < (\varphi \circ u)(x) , u(y) > \qquad (1)$$
2) Si $n > 1$ et $\mathbf{K} \neq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, démontrer qu'il existe un automorphisme u de E ne vérifiant pas (1).

[Prendre u tel que u(x) = λ.x , $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ et u(y) = y].
3) Si $n > 2$ et **K** quelconque, démontrer qu'il existe un automorphisme u de E ne vérifiant pas (1).
[y étant non nul et désignant par F le sous-espace de E orthogonal à φ(y), montrer que l'on peut prendre x $\notin$ F , u(x) $\in$ F , u(y) = y.]
4) Étudier le cas où $n = 2$ et **K** = **Z**/2**Z**.

Solution : Exercice pour fan des sixties. Bourbaki, Althusser, Barthes, Beatles, etc…

---

8. *Déterminants.*

Commençons par quelques exercices d'algèbre multilinéaire.

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
On note $(\vec{x} \mid \vec{y})$ le produit scalaire, $\vec{x} \wedge \vec{y}$ le produit vectoriel de deux vecteurs.
Démontrer l'identité : $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x} \mid \vec{z}).\vec{y} - (\vec{x} \mid \vec{y}).\vec{z}$.
Démontrer l'identité : $(\vec{a} \wedge \vec{b} \mid \vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \mid \vec{c}).(\vec{b} \mid \vec{d}) - (\vec{a} \mid \vec{d}).(\vec{b} \mid \vec{c})$.

Solution : Il existe de nombreuses façons de vérifier ces identités. En voici une :
Fixons le vecteur $\vec{x}$. Chacune des applications :

$$(\vec{y}, \vec{z}) \to \vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) \quad \text{et} \quad (\vec{y}, \vec{z}) \to (\vec{x} \mid \vec{z}).\vec{y} - (\vec{x} \mid \vec{y}).\vec{z} .$$

est une forme bilinéaire alternée sur E$\times$E.
Pour démontrer qu'elles coincident, il suffit de se donner une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de vérifier que les deux membres coincident pour $(\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{k}, \vec{i})$.
Fixons les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Chacune des applications :

$$(\vec{c}, \vec{d}) \to (\vec{a} \wedge \vec{b} \mid \vec{c} \wedge \vec{d}) \quad \text{et} \quad (\vec{c}, \vec{d}) \to (\vec{a} \mid \vec{c}).(\vec{b} \mid \vec{d}) - (\vec{a} \mid \vec{d}).(\vec{b} \mid \vec{c})$$

est une forme bilinéaire alternée sur E$\times$E.
Pour démontrer qu'elles coincident, il suffit de se donner une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E, et de vérifier que les deux membres coincident pour $(\vec{c}, \vec{d}) = (\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{k}, \vec{i})$.
Dans les deux cas, trois vérifications simples remplacent une vérification longue et compliquée.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer que les formes bilinéaires alternées sur E$\times$E forment un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. En indiquer une base.

Solution : Notons Alt_2(E) l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées.
Rapportons E à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.
Soit f une forme bilinéaire alternée ; elle est donc antisymétrique.
Si x = $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et y = $\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, f(x, y) = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, f(e_i, e_j) y_j = \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i).f(e_i, e_j)$
car $f(e_i, e_i) = 0$ et $f(e_i, e_j) = -f(e_j, e_i)$. Ainsi $f = \sum_{i<j} f(e_i, e_j).\varphi_{i,j}$, où $\varphi_{i,j}$: (x, y) $\to x_i.y_j - x_j.y_i$.

Les $\varphi_{i,j}$ sont des formes bilinéaires alternées, vérifiant :

$$\varphi_{i,j}(e_p, e_q) = 1 \text{ si } (i, j) = (p, q) , \ -1 \text{ si } (i, j) = (q, p) , \ 0 \text{ sinon.}$$

Nous venons de voir qu'elles engendrent $\mathrm{Alt}_2(E)$; de plus, elles sont indépendantes, car :
$\sum_{i<j} \alpha_{i,j}.\varphi_{i,j} = 0$ implique, pour tous p < q $\sum_{i<j} \alpha_{i,j}.\varphi_{i,j}(e_p, e_q) = 0$, c'est-à-dire $\alpha_{p,q} = 0$. cqfd.

Remarque 1 : plus généralement, on montre que les formes *p*-linéaires alternées sur un espace de dimension *n* forment un espace vectoriel de dimension C_n^p (0 si $p > n$).

Remarque 2 : une autre approche consiste à noter que $f(x, y) = {}^tX.A.Y$, où X est le vecteur-colonne des coordonnées de x, Y celui de y et $A = (f(e_i, e_j))$ est une matrice antisymétrique, c'est-à-dire une matrice telle que $a_{ii} = 0$ et $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $i \neq j$. La correspondance $f \leftrightarrow A$ est linéaire bijective, etc.

Exercice 3 : Soient $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $E = \mathbf{K}^2$. Montrer que

$$\Phi : (x, y, z) \in E\times E\times E \to x_1\, y_2\, z_2 + x_2\, y_1\, z_2 + x_2\, y_2\, z_1 \in \mathbf{K}$$

est une forme trilinéaire à la fois symétrique et antisymétrique, mais non alternée.

Solution. Cet exercice illustre le statut particulier de la caractéristique 2 : les formes symétriques et antisymétriques coincident, et toute forme alternée est antisymétrique. Mais la réciproque est fausse.
Φ est trilinéaire à la fois symétrique et antisymétrique.
Mais si x = (1, 1) , $\Phi(x, x, x) = 1$, ce qui montre que Φ n'est pas alternée.
Un exemple plus simple est celui du produit scalaire usuel $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_2$ dans $E = \mathbf{K}^2$.
Il est bilinéaire symétrique, et antisymétrique, mais pas alterné, car $\Phi(x, x) = 1$ si x = (1, 0).

Exercice 4 : Soient **K** un corps de caractéristique 0, E un **K**-espace vectoriel non réduit à {0}, *p* un entier ≥ 2, $\mathcal{A}_p$ le groupe alterné d'ordre *p*, $S_p(E)$, resp. $A_p(E)$, l'espace des formes *p*-linéaires symétriques, resp. antisymétriques. Montrer que $A_p(E)$ et $S_p(E)$ sont en somme directe, et que :

$$f \in A_p(E) \oplus S_p(E) \iff (\forall\sigma \in \mathcal{A}_p)\ \ f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p) .$$

Solution : Il est clair que $A_p(E) \cap S_p(E) = \{0\}$.
Si $f \in S_p(E)$ ou $A_p(E)$, alors $(\forall\sigma \in \mathcal{A}_p)\ \ f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p)$.
Cette propriété reste vraie pour toute $f \in A_p(E) \oplus S_p(E)$.
Réciproquement, soit *f* une forme *p*-linéaire sur E vérifiant :

$$(\forall\sigma \in \mathcal{A}_p)\ \ f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p) .$$

Alors si σ est impaire, $f(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p)$,
car la composée de σ avec la transposition [1, 2] est paire.

Posons $\quad g(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{2}\,[\, f(x_1, x_2, \dots, x_p) + f(x_2, x_1, \dots, x_p)\,]$

et $\quad h(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{2}\,[\, f(x_1, x_2, \dots, x_p) - f(x_2, x_1, \dots, x_p)\,]$.

Ce sont des formes *p*-linéaires de somme *f*.
La forme g est symétrique, car, pour toute permutation σ,

$$g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \frac{1}{2}\,[\, f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) + f(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})\,]$$

Si σ est paire, chaque terme est conservé, si σ est impaire, ils sont échangés.
De même, h est antisymétrique.

Exercice 5 : lemme des tresses. [3]

[3] Dédié à Ivan Marin, grand spécialiste des tresses, colorées ou infinitésimales… Ah ! caresser les tresses après le foot-ball !…

Soient E et F deux **K**-ev, **K** de caractéristique $\neq 2$, $f : E \times E \times E \to F$ une application symétrique en les deux premières variables, antisymétrique en les deux dernières. Montrer que $f = 0$.

Solution : On a $\forall (x, y, z) \quad f(x, y, z) = f(y, x, z)$ et $f(x, y, z) = -f(x, z, y)$.
Alors $f(x, y, z) = f(y, x, z) = -f(y, z, x)$: la permutation circulaire change f en $-f$.
On en déduit que : $f(y, z, x) = -f(z, x, y)$. Donc $f(x, y, z) = f(z, x, y)$.
Mais $f(x, y, z) = -f(x, z, y) = -f(z, x, y)$. Donc $f(x, y, z) = 0$!

Exercice 6 : **trace d'un endomorphisme**.

Soit **E** un **K**-espace vectoriel de dimension n, $\mathrm{Alt}_n(E)$ l'espace de formes n-linéaires alternées sur E. Soit u un endomorphisme de E. À toute forme n-linéaire alternée f sur E associons l'application :

$$u^T f : (x_1, \dots, x_n) \in E^n \to \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{K} .$$

1) Montrer que $u^T f$ est une forme n-linéaire alternée sur E.
2) Montrer que l'application $u^T : f \to u^T f$ de $\mathrm{Alt}_n(E)$ dans $\mathrm{Alt}_n(E)$ est elle-même linéaire.
3) En déduire qu'il existe un scalaire, appelé **trace** de u, et noté tr u, vérifiant :

$$\forall f \in \mathrm{Alt}_n(E) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) = \mathrm{tr}(u).f(x_1, \dots, x_n).$$

4) Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$, et que si u a pour matrice $A = (a_{ij})$ dans une certaine base de E, alors tr u $= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

5) Soient u, v $\in \mathscr{L}(E)$. À toute forme n-linéaire alternée f sur E associons l'application :

$$\Omega f : (x_1, \dots, x_n) \in E^n \to \sum_{i \neq j} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, v(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{K} .$$

Exprimer Ωf à l'aide de f et de la trace. En déduire : $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.
6) Soient u, v, w $\in \mathscr{L}(E)$. Montrer que : $\mathrm{tr}(u \circ v \circ w) = \mathrm{tr}(v \circ w \circ u) = \mathrm{tr}(w \circ u \circ v)$.
Généraliser (invariance de la trace par permutation circulaire). [Oral Centrale]

Solution : Il s'agit de définir la trace d'un endomorphisme de manière intrinsèque, sans passer d'abord par ces objets immondes que sont les matrices. Mais cela demande beaucoup d'abstraction.

1) Il est clair que $u^T f$ est une forme n-linéaire.

Montrons que $u^T f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ lorsque $x_1 = x_2$.

$$u^T f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(u(x_1), x_1, \dots, x_n) + f(x_1, u(x_1), \dots, x_n) + \sum_{i=3}^{n} f(x_1, x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) .$$

Les deux premiers termes se simplifient par antisymétrie, les $n - 2$ derniers sont tous nuls.
Même raisonnement lorsque $x_i = x_j$ ($i < j$).

2) L'application $u^T : f \to u^T f$ est évidemment linéaire.

3) L'espace $\mathrm{Alt}_n(E)$ étant une droite, u^T est une homothétie…

4) Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, A la matrice de u relativement à cette base, et f le déterminant relatif à cette base.

Alors $\sum_{i=1}^{n} f(e_1, \dots, e_{i-1}, u(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n) = \mathrm{tr}(u).f(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{tr}\, u$.

Par ailleurs $f(e_1, \dots, e_{i-1}, u(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n) = a_{ii}$. D'où tr u $= \sum a_{ii}$.

5) Soit f une forme n-linéaire alternée. On a :

$$v^T \circ u^T f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, v(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, (v \circ u)(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$= \Omega f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \operatorname{tr}(v \circ u). f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

De même $u^T \circ v^T f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Omega f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \operatorname{tr}(u \circ v). f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Or u^T et v^T sont deux homothéties, donc elles commutent. Par suite $\operatorname{tr}(u \circ v). f = \operatorname{tr}(v \circ u). f$.

Si l'on choisit f non nulle, il vient $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

De plus, on a $\Omega f = [(\operatorname{tr} u).(\operatorname{tr} v) - \operatorname{tr}(u \circ v)]. f$.

6) Facile.

Exercice 7 : **thème et variations sur la comatrice**.

Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. On note com A la comatrice de A, et A^+ sa transposée (adjointe de A)

1) Montrer que com A est de rang n, 1 ou 0, selon que A est de rang n, $n-1$ ou $\leq n-2$.

2) Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, pour quelles matrices B l'équation $A^+ = B$, d'inconnue A, a-t-elle une solution ?

3) Montrer que $\det(\text{com } A) = (\det A)^{n-1}$ (Cauchy).

4) Exprimer com(com A) à l'aide de det A et de A .

5) Montrer que si $A, B \in M_n(\mathbf{K})$, com(AB) = com(A).com(B) .

6) Si A, B, P et Q sont 4 matrices d'ordre n telles que det P = det Q = 1, $A = B^+$, montrer que $P.A.Q = (Q^{-1}.B.P^{-1})^+$. Retrouver la question 1).

Solution : Ce pot-pourri d'exercices repose sur la seule formule du cours relative à la comatrice :

$$A.{}^t\text{com } A = {}^t\text{com } A.A = (\det A).I \qquad (*)$$

Notons $A^+ = {}^t\text{com } A$ (parfois dite adjointe de A).

1) Rang de la comatrice.

• Si rg A = n, A est inversible. Par (*), ${}^t\text{com } A$ est aussi inversible.

• Si rg A $\leq n - 2$, tous les déterminants d'ordre $n - 1$ extraits de A, c'est-à-dire les cofacteurs, sont nuls. Donc rg com A = 0.

• Si rg A = $n - 1$, on a $A^+.A = 0$, donc $\text{Im } A \subset \text{Ker } A^+$.

Or Im A est un hyperplan, donc dim Ker $A^+ = n - 1$ ou n.

Mais comme rg A = $n - 1$, l'un des cofacteurs est non nul, donc dim Ker $A^+ = n - 1$.

2) Laissé en exercice.

3) Déterminant de la comatrice.

Passons au déterminant en (*). Il vient $(\det A).(\det \text{com } A) = (\det A)^n$.

Si A est inversible, il vient $\det(\text{com } A) = (\det A)^{n-1}$.

Sinon, on peut raisonner par densité, topologique ou algébrique, ou noter que det(com A) = 0 car rg com A < n (question 1).

4) Biadjointe. Je dis que $A^{++} = (\det A)^{n-2}.A$.

En vertu de (*), $A.A^+ = (\det A).I$ et $A^{++}.A^+ = (\det A^+).I = (\det A)^{n-1}.I$.

Si A est inversible, alors $A^{++} = (\det A)^{n-1}.(A^+)^{-1} = (\det A)^{n-1}.(\det A)^{-1}.A = (\det A)^{n-2}.A$.

Cela reste vrai si A n'est pas inversible, par densité topologique ou algébrique, ou en appliquant deux fois 1).

5) Montrons que si $A, B \in M_n(\mathbf{K})$, com(AB) = com(A).com(B) .

Si A et B $\in Gl_n(\mathbf{K})$, $\text{com}(AB) = \det(AB).{}^t(AB)^{-1} = \det(A).\det(B).{}^tA^{-1}.{}^tB^{-1} = (\text{com } A).(\text{com } B)$.

Dans le cas général, procéder par densité topologique ou algébrique.

6) Laissé au lecteur.

<u>Exercice 8</u> : Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{B}$ = (i, j, k) une base orthonormée directe de E

1) Montrer que, pour tout u ∈ $\mathcal{L}$(E), il existe un unique $\bar{u}$ ∈ $\mathcal{L}$(E) tel que :

$$\forall (x, y) \in E\times E \quad \bar{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y).$$

2) Montrer que $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $\overline{uov} = \bar{u} \text{ o } \bar{v}$.

3) Soient A et $\bar{A}$ les matrices de u et $\bar{u}$ dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer $\bar{A}$ en fonction de A.

4) Résoudre $\bar{u}$ = u. [Oral Centrale PSI 2009]

<u>Solution</u> : Cet exercice fait suite au précédent et propose une interprétation linéaire de la comatrice, à vrai dire tirée de l'algèbre bilinéaire.

1) <u>Procédons par analyse et synthèse</u> :

<u>Analyse</u>. Si $\bar{u}$ existe,

$\bar{u}(i) = \bar{u}(j \wedge k) = u(j) \wedge u(k)$, $\bar{u}(j) = \bar{u}(k \wedge i) = u(k) \wedge u(i)$, $\bar{u}(k) = \bar{u}(i \wedge j) = u(i) \wedge u(j)$.

Cela montre l'unicité de $\bar{u}$.

<u>Synthèse</u>. Définissons $\bar{u}$ ∈ $\mathcal{L}$(E) par les relations :

$$\bar{u}(i) = u(j) \wedge u(k) \quad , \quad \bar{u}(j) = u(k) \wedge u(i) \quad , \quad \bar{u}(k) = u(i) \wedge u(j).$$

On a aussitôt $\forall (x, y) \in E\times E \quad \bar{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$ par bilinéarité.
C'est vrai pour les couples (i, i), (j, j), (k, k), (i, j), (j, k), (k, i) et aussi (j, i), (k, j) et (i, k).

2) La relation $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \quad \overline{uov} = \bar{u} \text{ o } \bar{v}$ découle de l'unicité. En effet :

$\forall (x, y) \in E\times E \quad \overline{uov}(x \wedge y) = (u \text{ o } v)(x) \wedge (u \text{ o } v)(y) = \bar{u}(v(x) \wedge v(y)) = (\bar{u} \text{ o } \bar{v})(x) \wedge (\bar{u} \text{ o } \bar{v})(y).$

3) Il découle des relations 1) que $\bar{A}$ = com A.
Du coup, com(A.B) = com(A).com(B) se déduit de 2).

4) <u>Résoudre</u> $\bar{u}$ = u , <u>c'est résoudre</u> com A = A.

On veut que $u(i) = u(j) \wedge u(k)$, $u(j) = u(k) \wedge u(i)$, $u(k) = u(i) \wedge u(j)$. (*)
Si l'un des vecteurs est nul, les deux autres aussi, et u = 0.
Sinon, aucun vecteur n'est nul, et (u(i), u(j), u(k)) est une base orthonormée directe de E.
En effet, les relations (*) impliquent alors que (u(i), u(j), u(k)) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc une base. De plus, notant a, b, c les normes de trois vecteurs, il vient :
$a = bc$, $b = ca$, $c = ab$. On en déduit aisément $a = b = c = 1$.
En résumé, u = 0 ou u est une rotation.

<u>Remarque</u> : La théorie du produit vectoriel s'étend aux espaces euclidiens orientés de dimension n.

Si $(x_1, \dots , x_{n-1})$ sont $n - 1$ vecteurs de E, il existe un unique vecteur y tel que :

$$\forall z \in E \quad \det_{\mathcal{B}}((x_1, \dots , x_{n-1}, z) = (y \mid z) \quad , \text{ où } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée directe de E.}$$

Ce vecteur y est indépendant de la base choisie. On le note $y = x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$.
Il s'agit d'une notation globale, non d'une loi de composition interne, sauf si $n = 3$.
Les coordonnées de y dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ sont les cofacteurs de la dernière colonne de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((x_1, \dots , x_{n-1}, z)$.

L'application $(x_1, \dots , x_{n-1}) \to x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ est multiplinéaire alternée.
L'exercice s'étend sans peine, hormis le 4) qui oblige à discuter selon la parité de n.

<u>Exercice 9</u> : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté.
Montrer la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \mid \vec{v}).\vec{w} - (\vec{u} \mid \vec{w}).\vec{v}.$$

Solution :

On peut bien sûr vérifier la formule bêtement, en introduisant les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Autre approche. Fixons le vecteur $\vec{u}$ (x, y, z). Les applications

$$(\vec{v}, \vec{w}) \to \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad \text{et} \quad (\vec{v}, \vec{w}) \to (\vec{u} | \vec{v}).\vec{w} - (\vec{u} | \vec{w}).\vec{v}$$

sont toutes deux bilinéaires alternées, car nulles si $\vec{v} = \vec{w}$.

Il suffit donc de vérifier qu'elles coïncident sur les couples $(\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{k}, \vec{i})$, autrement dit :

$$\vec{u} \wedge \vec{k} = (\vec{u} \mid \vec{j}).\vec{i} - (\vec{u} \mid \vec{i}).\vec{j}.$$

$$\vec{u} \wedge \vec{i} = (\vec{u} \mid \vec{k}).\vec{j} - (\vec{u} \mid \vec{j}).\vec{k}.$$

$$\vec{u} \wedge \vec{j} = (\vec{u} \mid \vec{i}).\vec{j} - (\vec{u} \mid \vec{j}).\vec{i}.$$

Formules faciles à vérifier !

Autre approche : considérer les deux membres comme des applications trilinéaires.

Autre approche : matricielle, déjà indiquée.

Exercice 10 : On note $Gl_n(\mathbf{Z})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles dans l'anneau $M_n(\mathbf{Z})$.

1) Soit $A \in M_n(\mathbf{Z})$; montrer que $A \in Gl_n(\mathbf{Z}) \Leftrightarrow \det A = \pm 1$.

2) Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$; donner une cns pour que (a, b) soit la 1ère colonne d'une matrice de $Gl_2(\mathbf{Z})$.

Solution : Attention ! cet exercice est très rarement traité correctement !

1) Par définition $Gl_n(\mathbf{Z}) = \{ A \in M_n(\mathbf{Z}) \,;\, \exists B \in M_n(\mathbf{Z}) \;\; A.B = I_n \}$.

• Soit $A \in Gl_n(\mathbf{Z})$; alors soit $B \in M_n(\mathbf{Z})$ telle que $A.B = I_n$.
(det A)(det B) = 1; or det A et det B sont éléments de **Z**, et les seuls inversibles de **Z** sont ± 1.

• Soit $A \in M_n(\mathbf{Z})$ telle que $\det A = \pm 1$.

Comme $\det A \neq 0$, A est inversible… dans $M_n(\mathbf{Q})$. *Ce n'est pas fini* !

De plus $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t(\text{com } A) = \pm\, {}^t(\text{com } A) \in M_n(\mathbf{Z})$, donc A est inversible dans $M_n(\mathbf{Z})$. CQFD

2) La cns est que *a* et *b* soient premiers entre eux. Cela découle assez facilement de Bachet-Bezout.

Exercice 11 : Soient A et B $\in M_n(\mathbf{Z})$ des matrices telles que det A et det B soient premiers entre eux. Montrer l'existence de U et V $\in M_n(\mathbf{Z})$ telles que $U.A + V.B = I_n$.

Solution : En vertu de Bachet-Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ tel que u.det A + v.det B = 1.

Donc $\quad u.\det A.\, I_n + v.\det B.\, I_n = I_n$,

ce qui s'écrit aussi : $\quad u.{}^t\text{com } A.A + v.{}^t\text{com } B.B = I_n$.

Il reste à poser $U = u.{}^t\text{com } A$ et $V = v.{}^t\text{com } B$.

Exercice 12 : Soient *a*, *b*, *c* trois réels. Résoudre et discuter le système :

(S) $x^2 - yz = a$, $y^2 - zx = b$, $z^2 - xy = c$. Indication : considérer $M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}$.

Solution : Cet exercice fait suite à l'exercice 2.

1) (S) est un système non linéaire de 3 équations à 3 inconnues. Géométriquement, il s'agit de trouver l'intersection de 3 quadriques, en fait des cônes ou des hyperboloïdes à 1 ou 2 nappes.

2) Soit M = $\begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}$; (S) équivaut à com M = A, où A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$.

Or com M = A implique $M.{}^tA = {}^tA.M = (\det M).I$.

On a vu dans l'exercice 2 que rg A = 3, 1 ou 0, et que $\det(\text{com } A) = (\det A)^2$.

♣ Si rg A = 3, M est colinéaire à ${}^tA^{-1}$, donc à com A : M = α.com A.

Ainsi $x = \alpha(a^2 - bc)$, $y = \alpha(b^2 - ca)$, $z = \alpha(c^2 - ab)$.

De plus, $\det(\text{com } A) = (\det A)^2$ implique $\alpha^2 = \dfrac{1}{\det A}$.

Si det A > 0, (S) a deux solutions $(x, y, z) = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\det A}}(a^2 - bc , b^2 - ca , c^2 - ab)$.

Si det A < 0, (S) n'a pas de solution.

♦ Si rg A = 2, (S) est sans solution.

♥ Si rg A = 1, $a = b = c \neq 0$. On a $M.{}^t(1\ 1\ 1) = 0$, donc x + y + z = 0.

Tout triplet (x, y, z) tel que $x^2 - yz = a$ et $x + y + z = 0$ répond à la question.

Cela s'écrit $x^2 + y^2 + xy = a$.

Si a > 0, pas de solution. Si a > 0, infinité de solutions : (x, y, −x − y), où (x, y) décrit une ellipse.

♠ Si rg A = 0, (S) s'écrit $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 0$.

L'intersection de ces trois cônes est la droite (x, x, x) (discuter selon que x est nul ou pas).

<u>Remarque</u> : il doit être possible de résoudre (S) directement, en observant qu'il est équivalent à :

(S') $\qquad (x + j\,y + j^2 z)(x + j^2 y + j\,z) = a + b + c$

$(x - y)(x + y + z) = a - b$, $(y - z)(x + y + z) = b - c$, $(z - x)(x + y + z) = c - a$.

<u>Exercice 13</u> : **<u>matrices antisymétriques</u>**. Soient **K** un corps de caractéristique ≠ 2.

1) Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair est de déterminant nul.

2) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$, et montrer que c'est le carré d'un polynôme en a, b, c, d, e, f.

3) Plus généralement, soit A = (a_{ij}) une matrice antisymétrique d'ordre pair n, A_{ij} le cofacteur de a_{ij}, et N la matrice-bloc : N = $\begin{bmatrix} I_{n-2} & & O \\ A_{n-1,1} & \dots & A_{n-1,n} \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}$.

Calculer $\det(N.{}^tA)$ et en déduire par récurrence que det A est le carré d'un élément de **K**.

4) Soit A une matrice antisymétrique d'ordre n. Montrer que rg A est pair.

<u>Solution</u> : 1) Si A est d'ordre n, ${}^tA = -A$ donne, en passant au déterminant, $\det A = (-1)^n.\det A$.

Si n est impair, on voit que det A = 0.

2) Faisons confiance à Maple :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[0,a,b,c,-a,0,d,e,-b,-d,0,f,-c,-e,-
f,0]);det(A);factor(det(A));
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

$$a^2 f^2 + 2\,a\,d\,c\,f - 2\,a\,e\,b\,f + b^2 e^2 - 2\,b\,e\,c\,d + c^2 d^2$$

$$(a\,f+c\,d-b\,e)^2$$

```
> M:=array(1..4,1..4,antisymmetric);factor(det(M));
```

$$M := \mathrm{array}(\mathit{antisymmetric}, 1..4, 1..4, [\ ])$$

$$(M_{1,2}\,M_{3,4}+M_{1,4}\,M_{2,3}-M_{1,3}\,M_{2,4})^2$$

3) On a : $N.{}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n-2,1} & a_{n-1,1} & a_{n,1} \\ \\ a_{1,n-2} & & a_{n-2,n-2} & a_{n-1,n-2} & a_{n,n-2} \\ 0 & \dots & 0 & D & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$, où D = det A.

car les deux lignes du bas sont celles de com A.^{t}A = (det A).I. Passant au déterminant, il vient

$$(\det A).\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{vmatrix} = (\det A)^2.\det B,$$

où B est la sous-matrice d'ordre $n-2$ de A obtenue en barrant les deux dernières lignes et colonnes.
De plus, comme A est antisymétrique d'ordre pair, $A_{n-1,n-1} = A_{n,n} = 0$ et $A_{n,n-1} = -A_{n-1,n}$.
De sorte que $(\det A).(A_{n-1,n})^2 = (\det A)^2.\det B$.
Raisonnons par récurrence sur n : det B est le carré d'un élément de **K**.
Si det A est non nul, $\det A = (A_{n-1,n})^2 / (\det B)$ est aussi un carré.
Si det A est nul, c'est aussi vrai. Cqfd.

4) Soient r = rg A, P et Q inversibles telles que A = P.J.Q , où $J = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

${}^tA = {}^tQ.\ J.\ {}^tP = -A = -P.J.Q \ \Rightarrow\ {}^tX.J = -J.X$, où $X = Q.{}^tP^{-1}$.

Si l'on pose $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, ${}^tX.J = -J.X$ implique $X = \begin{bmatrix} X_1 & O \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, où X_1 est antisymétrique et inversible d'ordre r. Par suite $\det X_1 = (-1)^r.\det X_1$, donc r est pair.

<u>Remarques</u> : 1) On peut montrer un résultat plus précis : le déterminant de la matrice antisymétrique générique est le carré d'un polynôme en ses $n(n-1)/2$ éléments, le pfaffien. Mais la démonstration rigoureuse de ce résultat demande du soin.

2) Si **K** = **R**, ces résultats découlent aussi du théorème spectral :

$\forall A \in A_n(\mathbf{R})\quad \exists P \in O_n(\mathbf{R})\quad P^{-1}.A.P = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, H_1, \dots, H_k)$, où $H_i = \begin{bmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{bmatrix}$ ($a_i \neq 0$).

<u>Exercice 14</u> : Soit **K** un sous-corps de **C**. Quels sont la trace et le déterminant de l'endomorphisme $M \to {}^tM$ de $M_n(\mathbf{K})$?

<u>Solution</u> :

1) <u>La transposition T est une involution de $M_n(\mathbf{K})$, c'est-à-dire une symétrie vectorielle</u>.
Plus généralement, quel est sont la trace et le déterminant d'une symétrie vectorielle s dans un **K**-espace vectoriel E ? En prenant une base de E adaptée à la somme directe E = Ker(s – I) ⊕ Ker(s + I) il est clair (au chocolat) que tr s = dim Ker(s – I) – dim Ker(s + I) et $\det s = (-1)^{\dim\mathrm{Ker}(s+I)}$.

Ici, $\mathrm{Ker}(T-I) = S_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{Ker}(T+I) = A_n(\mathbf{K})$. Donc tr T = n et $\det T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Tout cela reste valable si **K** est de caractéristique ≠ 2.

2) Une <u>autre solution</u>, toute simple, consiste à écrire la matrice de T relativement à la base ($E_{11}, \dots, E_{nn}, E_{12}, E_{21}, E_{13}, E_{31}, \dots$) de $M_n(\mathbf{K})$.

Cette matrice est $A = \text{diag}(I_n, H, H, \dots, H)$, où $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ($\frac{n(n-1)}{2}$ blocs).

Du coup, tr T = n et det T = $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, même en caractéristique 2, où ce déterminant vaut 1.

<u>Exercice 15</u> : Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Quel est le déterminant de l'endomorphisme $M \to A.M$ de $M_n(\mathbf{K})$? En déduire le déterminant des endomorphismes $M \to M.B$ et $M \to A.M.B$.

<u>Solution</u> :

Rapportons $M_n(\mathbf{K})$ à sa base $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n}, E_{2n}, \dots, E_{nn})$.

Notons $X_1, \dots, X_n$ les colonnes de M. Le vecteur-colonne des coordonnées de M relativement à $\mathcal{B}$ s'écrit ${}^t(X_1, \dots, X_n)$, celui des coordonnées de A.M s'écrit ${}^t(A.X_1, \dots, A.X_n)$.

$$\begin{bmatrix} AX_1 \\ AX_2 \\ \dots \\ AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O & \dots & O \\ O & A & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & O \\ O & \dots & O & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

Du coup, diag(A, A, …, A) est la matrice de $\Phi : M \to AM$, et $\det \Phi = (\det A)^n$.

L'endomorphisme $\Psi : M \to MA$ a même déterminant car il est conjugué du précédent via la transposition. Enfin, $F : M \to A.M.B$ a pour déterminant det F == $(\det A)^n.(\det B)^n$ comme composé.

<u>Remarques</u> : 1) Φ et Ψ ont pour trace n tr A. Quelle est la trace de F ?

2) Un exercice ultérieur étudie la réduction de Φ.

<u>Exercice 16</u> : Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbf{K})$ telles que $\forall M \in M_n(\mathbf{K})$ $\det(A + M) = \det A + \det M$.

<u>Solution</u> : On suppose bien sûr $n \geq 2$. Nous allons montrer que A est nulle.

Supposons A non nulle, de rang $r \geq 1$. Alors $\exists\, P, Q \in Gl_n(\mathbf{K})$ $Q^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = R$.

Du coup $\forall X \in M_n(\mathbf{K})$ $\det(R + X) = \det(R) + \det(X)$.

• Si $r < n$, prenons $X = \begin{bmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}$. Il vient 1 = 0 + 0 !

• Si $r = n$, $R = I_n$. Prenons X = diag(1, 0, …, 0). Il vient 2 = 1 !

<u>Exercice 17</u> : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a & a+r & a+2r \\ b & b+r & b+2r \\ c & c+r & c+2r \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

<u>Solution</u> :

$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$ par Sarrus par exemple. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$, car $L_2 + L_3 = (a + b + c).L_1$.

$$\begin{vmatrix} a & a+r & a+2r \\ b & b+r & b+2r \\ c & c+r & c+2r \end{vmatrix} = 0, \text{ car } 2c_2 = c_1 + c_3.$$

Exercice 18 : Montrer l'identité : $\begin{vmatrix} x'x'' & y''x & z'x \\ x''y' & y''y & zy' \\ x'z'' & yz'' & zz' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ y'z' & z'x' & x'y'' \\ y''z'' & z''x'' & x''y'' \end{vmatrix}$.

Solution : On ne peut passer d'un déterminant à l'autre par des opérations élémentaires. Il n'y a donc qu'une méthode : développer chacun d'eux, par la règle de Sarrus par exemple, et constater qu'on obtient la même expression polynomiales.

Remarque : cette idendité n'est pas anodine. Elle permet de démontrer le théorème de Pascal (cf. Jean-Denis Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage & Mounet, et mon chapitre de Calcul barycentrique).

Exercice 19 : Montrer que $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ u+v & v+w & w+u \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

Solution : $c_1 \to c_1 + c_2 + c_3$, puis $c_2 \to c_2 - c_1$, $c_3 \to c_3 - c_1$, $c_1 \to c_1 + c_2 + c_3$, etc.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ u+v & v+w & w+u \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ p+q+r & q+r & r+p \\ u+v+w & v+w & w+u \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+b+c & -a & -b \\ p+q+r & -p & -q \\ u+v+w & -u & -v \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & -a & -b \\ r & -p & -q \\ w & -u & -v \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

Mieux ! $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ u+v & v+w & w+u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 20 : Soient $(a, b, c, d) \in \mathbf{C}^4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} d & a & b & c \\ a & d & c & b \\ b & c & d & a \\ c & b & a & d \end{bmatrix}$.

Calculer M.A et en déduire det M.

Solution : [Oral X PSI 2011, RMS n° 249]

On constate que : $M.A = A.\text{diag}(a + b + c + d, a + d - b - c, b - c - d + a, c - b + a - d)$.

Comme $\det A = 16 \neq 0$, il vient :

$$\det M = (a + b + c + d)(a + d - b - c)(b - c - d + a)(c - b + a - d).$$

Exercice 21 : Soient $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}$.

Calculer A.P et en déduire det A.

Solution :

On constate que : $A.P = P.\text{diag}(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj)$.

Comme $\det P \neq 0$ en tant que Vandermonde, il vient :

$$\det A = (a + b + c).(a + bj + cj^2).(a + bj^2 + cj).$$

Remarque : cette méthode se généralise sans peine aux déterminants cycliques. Elle revient à diagonaliser implicitement la matrice cyclique.

<u>Exercice 22</u> : **<u>Déterminants tridiagonaux</u>**. Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & \dots \\ 0 & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \dots \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} .$$

<u>Solution</u> : Tous ces déterminants tridiagonaux se calculent de la même façon.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b).D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+b).D_{n-1} - ab.D_{n-2} .$$

par développement selon la dernière colonne, puis du dernier déterminant selon la dernière ligne.

Or $D_1 = a + b$, $D_2 = (a + b)^2 - ab$. Mais la formule de récurrence $D_n = (a + b).D_{n-1} - ab.D_{n-2}$ est valable pour $n = 2$ si l'on convient que $D_0 = 1$.

(D_n) est une suite récurrente linéaire, d'équation caractéristique $r^2 - (a + b).r + ab = 0$.

Si $a \neq b$, on trouve $D_n = \lambda.a^2 + \mu.b^2 = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$. Si $a = b$, on trouve $D_n = n.a^{n-1}$.

<u>Exercice 23</u> : Calculer les déterminants d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 2 & 3 & 2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & & 3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 6 & 11 & 6 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 11 & 6 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 6 & 11 & 6 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 6 & 11 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 6 & 11 \\ 0 & & & & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} .$$

<u>Solution</u> :

<u>Exercice 24</u> : Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 9 & 7 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 16 & 9 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 25 & 11 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 9 & 7 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 16 & 9 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 25 & 11 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}$.

<u>Solution</u> :

Les deux suites obéissent à la même formule de récurrence ; seules changent les valeurs initiales.

$D_n = (2n + 1).D_{n-1} - n^2.D_{n-2}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 6$.

$\Delta_n = (2n + 1).\Delta_{n-1} - n^2.\Delta_{n-2}$, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 11$.

Ce sont des suites récurrentes linéaires à coefficients variables.

Le calcul des premières valeurs de D_n suggère que $D_n = (n + 1)!$. Une récurrence confirme.

En s'inspirant de la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre 2, cherchons Δ_n sous la forme $\Delta_n = z_n.D_n$. On trouve après calculs que $w_n = z_n - z_{n-1}$ vérifie $(n + 1).w_n - n.w_{n-1} = 0$, donc $(n + 1).w_n = 2.w_1$. On remonte à z_n par télescopage, et on trouve au final :

$$\Delta_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right).(n + 1)!.$$

<u>Exercice 25</u> : **<u>Continuants</u>**.

Soit $P_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$, $Q_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$. Montrer que $\dfrac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}$.

<u>Solution</u> : Pour éviter les problèmes de domaines de définition, mieux vaut considérer les a_k comme des indéterminées susceptibles de substitution.

<u>Exercice 26</u> : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -a_n & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_{n+1} \end{vmatrix}.$$

<u>Solution</u> :

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix} = (x + a_1 + \dots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & x & a_n \\ 1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix} = (x + a_1 + \dots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & * & x-a_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & * & \dots & * & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x + a_1 + \dots + a_n)(x - a_1) \dots (x - a_n) .$$

On a ajouté à la première colonne la somme des autres, mis $x + a_1 + \dots + a_n$ en facteur, et utilisé la 1ère colonne comme pîvot.
On aurait pu aussi considérer ce déterminant comme polynôme de x. Il est unitaire de degré n+1, et a pour racines $a_1 , \dots , a_n$ et $-(a_1 + \dots + a_n)$. Si ces racines sont distinctes, c'est fini, sinon, on peut les rendre distinctes en les considérant comme des indéterminées, puis en resubstituant des scalaires.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1-a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & \dots & b_{n-1}-a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} = (a_1 - b_1) \dots (a_n - b_n).$$

En enlevant à la ième ligne a_{i-1} fois la précédente, en commençant par la dernière, puis en développant selon la dernière colonne.
On peut aussi enlever à chaque colonne la précédente en commençant par la dernière.

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_1.b_n (a_2.b_1 - a_1.b_2) \dots (a_n.b_{n-1} - a_{n-1}.b_n).$$

(Enlever à la ième colonne a_i fois la première…)

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -a_n & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -a_n & a_n \\ S & b_2 & \dots & b_n & b_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1+1}.S.a_1\dots a_n \text{, où } S = \sum b_i \;.$$

On a ajouté à la première colonne la somme des autres, puis développé par rapport à la première colonne.

Exercice 27 : Soient J la matrice de $M_n(\mathbf{C})$ dont tous les éléments sont égaux à 1, A une matrice inversible de $M_n(\mathbf{C})$, et B = A – J. On écrit $A^{-1} = (a'_{ij})$. Montrer que det B = (det A).($1 - \sum_{i,j} a'_{ij}$).

Solution : [Oral Mines MP 2013, RMS n° 457]

Ecrivons B = A (I – C) où $C = A^{-1}.J = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_n \end{bmatrix}$, où $c_i = \sum_j a'_{ij}$. Soit $S = \sum_{i,j} a'_{ij}$.

Or $\det(I - C) = \det \begin{bmatrix} 1-c_1 & \dots & -c_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -c_n & \dots & 1-c_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-S & \dots & 1-S \\ \dots & \dots & \dots \\ -c_n & \dots & 1-c_n \end{bmatrix} = (1 - S) \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -c_n & \dots & 1-c_n \end{bmatrix}$

$$= (1 - S) \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1 - S. \text{ cqfd}$$

Exercice 28 : Calculer $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & a_2 & \dots & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & w \end{vmatrix}$.

Solution : Deux méthodes, dont le détail est laissé au lecteur :

– soit on cherche une formule de récurrence sur n.

Pour $n = 1$, il vient $D_1 = a_1 w - x_1 y_1$; pour $n = 2$, il vient $D_2 = a_1 a_2 w - x_1 y_1 a_2 - x_2 y_2 a_1$.

On subodore que $D_n = a_1 \dots a_n w - \sum_{j=1}^{n} a_1 \dots a_{j-1} x_j y_j a_{j+1} \dots a_n$.

Cela se montre par récurrence sur n, et développement selon la première ligne.

– soit on développe selon la dernière ligne (ou colonne), mais cela demande du courage !

Exercice 29 : Soient A et B ∈ $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \geq 0$.

Solution : Cela va découler de l'identité : $\det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + iB).\det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2$.

En effet : $\begin{bmatrix} I & -iI \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & iI \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-iB & O \\ B & A+iB \end{bmatrix}$. Et passer au déterminant !

Variante : $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & iI \\ iI & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & iI \\ iI & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-iB & O \\ O & A+iB \end{bmatrix}$ et montrer que $\begin{bmatrix} I & iI \\ iI & I \end{bmatrix}$ est inversible.

Remarque : Montrer que : $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ = det(A + B).det(A – B) .

Exercice 30 : Soient A et B $\in$ $M_n(\mathbf{R})$. On suppose que $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$ et que AB – BA est inversible. Montrer que n est multiple de 6.

[Oral X 2008 et 2009]

Solution : On observe que $(A + iB)(A - iB) = (\sqrt{3} - i)(AB - BA)$.

Passant au déterminant, il vient $(\sqrt{3} - i)^n \in \mathbf{R}$.

Or $\sqrt{3} - i = 2.\exp(-\frac{i\pi}{6})$, et $\exp\frac{ni\pi}{6}$ est réel ssi n est multiple de 6.

Remarque : La RMS note que le résultat reste vrai si A et B $\in$ $M_n(\mathbf{C})$. Il faut alors noter que :

$(A + iB)(A - iB) = (\sqrt{3} - i)(AB - BA)$ et $(A - iB)(A + iB) = (\sqrt{3} + i)(AB - BA)$.

Passant au déterminant, il vient $(\sqrt{3} - i)^n = (\sqrt{3} + i)^n$; cela implique que n est multiple de 6.

Exercice 31 : Soient A et H $\in$ $M_n(\mathbf{R})$, avec rg H = 1. Montrer que $\det(A + H).\det(A - H) \le (\det A)^2$.

[Oral X 2007, Mines 2008]

Solution :

1ère méthode : indirecte.

Commençons par supposer $H = E_{11}$.

Alors $\det(A + x.E_{11}) = \det A + x.\det A'$, où A' est le cofacteur de a_{11} dans A.

Il suffit pour le montrer, de considérer la 1ère colonne de $A + x.E_{11}$ comme somme de deux colonnes.

D'où $\det(A + H).\det(A - H) = (\det A)^2 - (\det A')^2 \le (\det A)^2$.

Dans le cas général, considérer P et Q $\in$ $Gl_n(\mathbf{R})$ telles que $Q^{-1}.H.P = E_{11}$ …

2ème méthode : directe.

Une matrice de rang 1 s'écrit $H = x.{}^ty$, où x et y sont des vecteurs colonnes non nuls.

Notant $a_1, a_2, \dots, a_n$ les colonnes de A, il vient : $\det(A + H) = \det(a_1 + y_1x , a_2 + y_2x , \dots, a_n + y_nx)$.

Développons par multilinéarité ! On ne peut prendre x plus d'une fois, donc

$$\det(A + H) = \det(a_1 , a_2 , \dots , a_n) + \sum_{i=1}^{n} y_i.\det(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)$$

$$= \det(a_1 , a_2 , \dots , a_n) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i.\det(a_1,\dots,a_{i-1},e_j,a_{i+1},\dots,a_n).x_j$$

$$= \det A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i.(-1)^{i+j}A_{ij}.x_j = \det A + {}^ty.(\text{com } A).x.$$

Changeant x en – x, il vient : $\det(A + H).\det(A - H) = (\det A)^2 - ({}^ty.(\text{com } A).x)^2 \le (\det A)^2$. CQFD

Exercice 32 : Soient $n \ge 2$, $P_n = X^n - X + 1$.

a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, z_2, \dots, z_n$ dans $\mathbf{C}$.

b) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 1+z_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}$.

Solution : [Oral X 2007, Mines 2008, Centrale PSI 2010, RMS n° 821]

a) Il suffit de vérifier que P_n et $P_n' = n\,X^{n-1} - 1$ n'ont pas de racine commune.

Or $P_n(z) = P_n'(z) = 0$ implique $z = \dfrac{n}{n-1}$ … qui ne saurait annuler P_n' , sans quoi $n^n = (n-1)^{n-1}$.

b) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$, et $b = {}^t(1, 1, \dots, 1)$.

Avec ces notations, $D = \det(z_1 e_1 + b , z_2 e_2 + b, \dots , z_n e_n + b)$.
Développons ce déterminant par multilinéarité.
Sur les 2^n termes, seuls comptent ceux dans lesquels b figure au plus une fois :

$D = \det(z_1 e_1 , z_2 e_2 , \dots , z_n e_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(z_1 e_1, \dots, z_{i-1}e_{i-1}, b, z_{i+1}e_{i+1}, \dots, z_n e_n)$.

Or $\det(z_1 e_1 , \dots , b , \dots , z_n e_n) = (\prod_{j\neq i} z_j)\det(e_1 , \dots , b, \dots , e_n)$

$= (\prod_{j\neq i} z_j)\det(e_1 , \dots , b - \sum_{j\neq i} e_j , \dots , e_n) = \prod_{j\neq i} z_j$.

Donc $D = z_1.z_2. \dots . z_n + \sum_{i=1}^{n} z_1 \dots z_{i-1} z_{i+1} \dots z_n = S_n + S_{n-1}$, en notant S_k les fonctions symétriques élémentaires des racines. Variante : $D = (-1)^n P_n(0) + (-1)^{n-1} P_n'(0)$.

$$\boxed{\text{Finalement :} \quad D = 2.(-1)^n .}$$

Remarque : Cet exercice est un cas particulier des deux suivants.

Exercice 33 : Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & b_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

Solution :

1ère méthode : Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, et $b = {}^t(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Avec ces notations, $D = \det(a_1e_1 + b , a_2e_2 + b, \dots , a_ne_n + b)$.
Développons ce déterminant par multilinéarité. Sur les 2^n termes, seuls comptent ceux dans lesquels b figure au plus une fois :

$D = \det(a_1e_1 , a_2e_2 , \dots , a_ne_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(a_1 e_1, \dots, a_{i-1}e_{i-1}, b, a_{i+1}e_{i+1}, \dots, a_n e_n)$.

Or $\det(a_1e_1 , \dots , b , \dots , a_ne_n) = (\prod_{j\neq i} a_j)\det(e_1 , \dots , b, \dots , e_n)$

$= (\prod_{j\neq i} a_j)\det(e_1 , \dots , b - \sum_{j\neq i} b_j e_j , \dots , e_n) = b_i \prod_{j\neq i} a_j$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } D = a_1.a_2. \dots . a_n + \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1} b_i\, a_{i+1} \dots a_n .}$$

2ème méthode, suggérée par le résultat précédent : considérons ce déterminant comme un polynôme de $(b_1, \dots , b_n)$. Ce polynôme est une fonction affine. Calculons ses dérivées partielles en b_i.

Par exemple, $\dfrac{\partial P}{\partial b_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & b_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_2. \dots . a_n$. Etc.

Pour conclure, il reste à noter que $P(0, \dots, 0) = a_1.a_2. \dots . a_n$.

<u>Remarque</u> : d'autres méthodes sont possibles : un travail sur les lignes conduit à une récurrence. Une autre solution consiste à border ce déterminant en ajoutant un ligne et une colonne, puis de se ramener à un exercice antérieur.

$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 & 0 \\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & \dots & a_n+b_n & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & -b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & -b_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

<u>Exercice 34</u> : **<u>déterminant d'Hurwitz</u>.**

1) Soient $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$, $\Delta(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à chaque élément de A. Montrer que $\Delta(x) = \det A + x \sum_{i,j} A_{i,j}$, où les A_{ij} est le cofacteur de a_{ij}.

2) Soit $P(x) = (r_1 - x) \dots (r_n - x)$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \dots & a \\ b & r_2 & a & \dots & a \\ b & b & r_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & & r_n \end{vmatrix} = \frac{aP(b)-bP(a)}{a-b} \quad \text{si } a \neq b \ , \quad P(a) - a\,P'(a) \ \text{ si } a = b \ .$$

Indication : Considérer le déterminant $\Delta(x)$ comme en 1).

3) Soit $M \in M_n(\mathbf{K})$; on note C_j la jème colonne de M. Soit M' la matrice obtenue en remplaçant, pour tout j, C_j par $2 \sum_{i<j} C_i + 3 \sum_{i>j} C_i$. Exprimer det M' à l'aide de det M.

<u>Solution</u> :

1) Notant $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de A, et e le vecteur-colonne ${}^t(1, \dots, 1)$, il vient :
$\Delta(x) = \det(c_1 + xe, c_2 + xe, \dots, c_n + xe)$. Si l'on développe ce déterminant par multilinéarité, il vient :

$$\Delta(x) = \det(c_1 , c_2 , \dots, c_n) + x \sum_j \det(c_1,\dots c_{j-1},e,c_{j+1},\dots,c_n) \ .$$

Reste à développer chacun de ces déterminants par rapport à la colonne e.

2) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} r_1+x & a+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & r_2+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & b+x & r_3+x & \dots & a+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b+x & b+x & b+x & & r_n+x \end{vmatrix}$ est une fonction affine de x : $\Delta(x) = p.x + q$.

Elle vérifie $\Delta(-a) = P(a)$ et $\Delta(-b) = P(b)$.
Si $a \neq b$, on peut en tirer p et surtout $q = \Delta(0)$, qui est ce que l'on cherche.
Si $a = b$, on peut raisonner par densité :
• <u>densité topologique</u> : faire tendre b vers a par valeurs $\neq a$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
• <u>densité algébrique</u> dans le cas général : considérer a et b comme des indéterminées, et noter que, dans $\mathbf{K}(X, Y)$: $\left.\dfrac{XP(Y)-YP(X)}{X-Y}\right|_{Y=X} = P(X) - X \left.\dfrac{P(Y)-P(X)}{Y-X}\right|_{Y=X} = P(X) - X\,P'(X)$.

<u>Remarque</u> : des méthodes par récurrence sont possibles.

3) Il suffit d'observer que M' = M.$\begin{bmatrix} 0 & 3 & \dots & 3 \\ 2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 3 \\ 2 & \dots & 2 & 0 \end{bmatrix}$ et d'utiliser ce qui précède.

Alors $P(x) = (-x)^n$, et det M' $= (-1)^n.[3.2^n - 2.3^n]$.det M .

Référence : Polya-Szegö, t. 2, part VII, n° 7 p. 93, Oral X 1988.

Exercice 35 : Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts, et, pour tout i, $P_i(X) = \prod_{j\neq i}(X-a_j)$.

Calculer det $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ P_1(X) & P_2(X) & \dots & P_n(X) \end{bmatrix}$.

Solution : [Oral Mines MP 2012, RMS n° 421]

Notons P(X) ce déterminant. C'est un polynôme de degré ≤ $n-1$ comme combinaison linéaire des P_k.

$P(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & \dots & a_i^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ 0 & \dots & P_i(a_i) & \dots & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{n+i}.P_i(a_i).V(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$,

après avoir noté que : $P_i(a_i) = \prod_{j\neq i}(a_i-a_j) = (-1)^{n-i}\prod_{j<i}(a_i-a_j)\prod_{j>i}(a_i-a_j)$.

Comme ceci est vrai pour n valeurs distinctes, P est constant et égal à $V(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$.

Exercice 36 : Factoriser les déterminants A = $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ et B = $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$.

Solution :

Interprétons A et B comme des Vandermonde lacunaires, et rajoutons-leur la colonne manquante :

$V(a, b, c, d, Z) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & Z & Z^2 & Z^3 & Z^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(Z-a)(Z-b)(Z-c)(Z-d)$

Développons ce déterminant par rapport à la dernière ligne :

$$V(a, b, c, d, Z) = V(a, b, c, d).Z^4 - A.Z^3 + B.Z^2 + \text{etc.}$$

En identifiant, il vient :

$$A = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

$$B = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Plus généralement, les Vandermonde lacunaires sont les produits du Vandermonde par les fonctions symétriques.

Exercice 37 : Exprimer sous forme de produits de sinus les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \cos(2\theta_0) & \dots & \cos(n\theta_0) \\ 1 & \cos\theta_1 & \cos(2\theta_1) & \dots & \cos(n\theta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos(2\theta_n) & \dots & \cos(n\theta_n) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \sin\theta_0 & \sin(2\theta_0) & \sin(3\theta_0) & \dots & \sin((n+1)\theta_0) \\ \sin\theta_1 & \sin(2\theta_1) & \sin(3\theta_1) & \dots & \sin((n+1)\theta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\theta_n & \sin(2\theta_n) & \sin(3\theta_n) & \dots & \sin((n+1)\theta_n) \end{vmatrix}.$$

Solution : Notons C et S ces déterminants respectifs.

$\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$, où T_k est le k-ème polynome de Tchebychev.

T_k est un polynôme de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} si $k \geq 1$.

$$C = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & T_2(\cos\theta_0) & \dots & T_n(\cos\theta_0) \\ 1 & \cos\theta_1 & T_2(\cos\theta_1) & \dots & T_n(\cos\theta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\theta_n & T_2(\cos\theta_n) & \dots & T_n(\cos\theta_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \cos^2\theta_0 & \dots & \cos^n\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \dots & \cos^n\theta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \dots & \cos^n\theta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & * \\ \dots & \dots & 2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2^{n-1} \end{vmatrix}$$

où le premier déterminant est un Vandermonde, et le second est celui de la matrice de passage de $(1, X, \dots, X^n)$ à $(T_0, T_1, \dots, T_n)$. Du coup,

$$C = V(\cos\theta_0, \cos\theta_1, \dots, \cos\theta_n).2^{\frac{(n-1)n}{2}} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod_{i<j}(\cos\theta_j - \cos\theta_i) = 2^{n^2} \prod_{i<j} \sin\frac{\theta_i+\theta_j}{2}.\sin\frac{\theta_i-\theta_j}{2}.$$

Pour le second déterminant, utiliser les Tchebychev de 2ème espèce.

$\sin(k\theta) = (\sin\theta).U_{k-1}(\cos\theta)$, où $U_{k-1}(X) = \dfrac{T_k'(X)}{k} = 2^{k-1} X^{k-1} + \dots$

$$S = \prod_k(\sin\theta_k) \begin{vmatrix} 1 & U_1(\cos\theta_0) & U_2(\cos\theta_0) & \dots & U_n(\cos\theta_0) \\ 1 & U_1(\cos\theta_1) & U_2(\cos\theta_1) & \dots & U_n(\cos\theta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & U_1(\cos\theta_n) & U_2(\cos\theta_n) & \dots & U_n(\cos\theta_n) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_k(\sin\theta_k) \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \cos^2\theta_0 & \dots & \cos^n\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \dots & \cos^n\theta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \dots & \cos^n\theta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 2 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & 2^2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2^n \end{vmatrix} = 2^{n(n+1)} \prod_k(\sin\theta_k) \prod_{i<j} \sin\frac{\theta_i+\theta_j}{2}.\sin\frac{\theta_i-\theta_j}{2}.$$

Exercice 38 : On note $N_0(X) = 1$ et $N_k(X) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \geq 1$.

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & N_1(a_1) & \dots & N_{n-1}(a_1) \\ 1 & N_1(a_2) & \dots & N_{n-1}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N_1(a_n) & \dots & N_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}$.

Application : Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$. Montrer que $1!.2! \dots (n-1)!$ divise $\prod_{j>i}(\alpha_j - \alpha_i)$.

Solution : Exercice fréquemment posé, infaisable s'il se limite à la dernière affirmation.

$$\begin{vmatrix} 1 & N_1(a_1) & \dots & N_{n-1}(a_1) \\ 1 & N_1(a_2) & \dots & N_{n-1}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N_1(a_n) & \dots & N_{n-1}(a_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \end{vmatrix}.$$

Passant au déterminant, il vient $\begin{vmatrix} 1 & N_1(a_1) & \dots & N_{n-1}(a_1) \\ 1 & N_1(a_2) & \dots & N_{n-1}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N_1(a_n) & \dots & N_{n-1}(a_n) \end{vmatrix} = \dfrac{V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})}{1!2!\dots(n-1)!}$, où V est le Vandermonde.

L'idée est que les polynômes de Newton vérifient $\forall x \in \mathbf{Z}$ $N_k(x) \in \mathbf{Z}$.
En effet les $N_k(x)$ sont des binomiaux si $x \in \mathbf{N}$, des binomiaux ou leurs opposés sinon.

Si donc les a_k appartiennent à $\mathbf{Z}$, $\begin{vmatrix} 1 & N_1(a_1) & \dots & N_{n-1}(a_1) \\ 1 & N_1(a_2) & \dots & N_{n-1}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N_1(a_n) & \dots & N_{n-1}(a_n) \end{vmatrix} \in \mathbf{Z}$ et la seconde assertion en découle.

<u>Exercice 39</u> : <u>déterminants de Cauchy et de Hilbert</u>.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ $2n$ scalaires tels que $\forall (i, j)$ $\alpha_i + \beta_j \neq 0$.
On appelle **déterminant de Cauchy** le déterminant d'ordre n :

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) = \det\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

1) Montrer que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) = \dfrac{\prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i).(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{p,q}(\alpha_p + \beta_q)}$.

2) Calculer l'inverse de la matrice de Cauchy $\left(\dfrac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$.

3) Résoudre le système linéaire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\alpha_i + \beta_j} = 1$ $(1 \le i \le n)$.

4) On appelle **matrice de Hilbert** d'ordre n la matrice $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \le i,j \le n}$. Calculer $\det H_n$.

5) Montrer que H_n est symétrique définie positive. ¶ 6) Montrer que $H_n^{-1} \in M_n(\mathbf{Z})$.

<u>Solution</u> : Les matrices de Cauchy interviennent dans la démonstration du théorème de Müntz : ce sont des matrices de Gram particulières. Les matrices de Hilbert en sont un cas particulier ; on peut démontrer qu'elles sont mal conditionnées.

1) Le plus simple est de procéder par récurrence.
Soustrayant la dernière colonne des précédentes, il vient :

$$C_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ \frac{1}{\alpha_n+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_n+\beta_{n-1}} & \frac{1}{\alpha_n+\beta_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\beta_n-\beta_1}{(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_1+\beta_n)} & \dots & \frac{\beta_n-\beta_{n-1}}{(\alpha_1+\beta_{n-1})(\alpha_1+\beta_n)} & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\beta_n-\beta_1}{(\alpha_{n-1}+\beta_1)(\alpha_{n-1}+\beta_n)} & \dots & \frac{\beta_n-\beta_{n-1}}{(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})(\alpha_{n-1}+\beta_n)} & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ \frac{\beta_n-\beta_1}{(\alpha_n+\beta_1)(\alpha_n+\beta_n)} & \dots & \frac{\beta_n-\beta_{n-1}}{(\alpha_n+\beta_{n-1})(\alpha_n+\beta_n)} & \frac{1}{\alpha_n+\beta_n} \end{vmatrix}$$

Mettons en facteur tout ce que l'on peut sur chaque ligne et chaque colonne. Il vient :

$$C_n = \frac{(\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)\dots(\beta_n-\beta_{n-1})}{(\alpha_1+\beta_n)(\alpha_2-\beta_n)\dots(\alpha_n+\beta_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{\alpha_n+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_n+\beta_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Retranchons maintenant à chaque ligne la dernière ; il vient :

$$C_n = \frac{(\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)...(\beta_n-\beta_{n-1})}{(\alpha_1+\beta_n)(\alpha_2-\beta_n)...(\alpha_n+\beta_n)} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_n-\alpha_1}{(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_n+\beta_1)} & \cdots & \frac{\alpha_n-\alpha_1}{(\alpha_1+\beta_{n-1})(\alpha_n+\beta_{n-1})} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{(\alpha_{n-1}+\beta_1)(\alpha_n+\beta_1)} & \cdots & \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})(\alpha_n+\beta_{n-1})} & 0 \\ \frac{1}{\alpha_n+\beta_1} & \cdots & \frac{\beta_n-\beta_{n-1}}{\alpha_n+\beta_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

Développons par rapport à la dernière colonne et mettons en facteur tout ce qu'on peut. Il vient :

$C_n = \frac{(\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)...(\beta_n-\beta_{n-1})}{(\alpha_1+\beta_n)(\alpha_2-\beta_n)...(\alpha_n+\beta_n)} \frac{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)...(\alpha_n-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n+\beta_1)(\alpha_n-\beta_2)...(\alpha_n+\beta_{n-1})}.C_{n-1}$. Une récurrence conclut.

<u>Une autre approche consiste à activer α_n en une indéterminée X</u>, tout en raisonnant par récurrence. Supposons α_1 , … , α_{n-1} 2 à 2 distincts, ainsi que β_1, … , β_n, sans quoi il n'y a rien à montrer.

$$F_n(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} & \frac{1}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ \frac{1}{X+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{X+\beta_{n-1}} & \frac{1}{X+\beta_n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{X+\beta_j} = \frac{P(X)}{Q(X)}$$ est une fraction de degré < 0.

On a : $Q(X) = \prod (X+\beta_j)$ et $P(\alpha_1) = \ldots = P(\alpha_{n-1}) = 0$ (car lignes égales).

D'où : $F_n(X) = K\frac{(X-\alpha_1)...(X-\alpha_{n-1})}{(X+\beta_1)...(X+\beta_n)}$, où K est une constante.

Or $A_n = C_{n-1} = K\frac{(X-\alpha_1)...(X-\alpha_{n-1})}{(X+\beta_1)...(X+\beta_{n-1})}\Big|_{X=-\beta_n} = K\frac{(-\beta_n-\alpha_1)...(-\beta_n-\alpha_{n-1})}{(-\beta_n+\beta_1)...(-\beta_n+\beta_{n-1})} = K\frac{(\beta_n+\alpha_1)...(\beta_n+\alpha_{n-1})}{(\beta_n-\beta_1)...(\beta_n-\beta_{n-1})}$.

(A_n s'obtient classiquement en multipliant $(X + \beta_n)$ et en faisant $X = -\beta_n$.)

La donnée de C_{n-1} par récurrence permet de calculer K, puis de reporter, et enfin de faire $X = \alpha_n$.

Une <u>troisième approche</u> consiste à transformer tous les scalaires en des indéterminées, c'est-à-dire à considérer : $C(X_1 , ... , X_n , Y_1 , ... , Y_n) = \det\left(\frac{1}{X_i+Y_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{P(X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n)}{\prod(X_p+Y_q)}$.

Le polynôme P est divisible par les $X_j - X_i$ et les $Y_j - Y_i$ ($j > i$), donc par le produit des deux Vandermonde. De plus, il est homogène de degré $n^2 - n$, comme on le voit en considérant $C(TX_1, ..., TX_n, TY_1, ..., TY_n)$. Par suite

$$P(X_1 , ... , X_n , Y_1 , ... , Y_n) = K \prod_{j>i}(X_j-X_i)(Y_j-Y_i)$$, où K est une constante [4].

Il reste à montrer que K = 1, et c'est là que le bât blesse : je ne vois pas de méthode simple ; je procède par la même méthode que ci-dessus, multipliant par $X_n + Y_n$ et faisant $X_n = - Y_n$.

2) Les cofacteurs du déterminant de Cauchy sont eux-mêmes des déterminants de Cauchy. On peut donc inverser la matrice de Cauchy. Compte tenu des simplifications le résultat est assez simple.

3) Pour résoudre ce système, on peut utiliser les formules de Cramer, ou la question précédente.

Considérons plutôt la fraction rationnelle $F(T) = \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{T+\beta_j} - 1 = \frac{P(T)}{(T+\beta_1)...(T+\beta_n)}$.

On a deg P = n et $P(T) = - T^n + \ldots$. Le système linéaire s'écrit $F(\alpha_1) = \ldots = F(\alpha_n) = 0$.

Du coup, $F(T) = -\frac{(T-\alpha_1)...(T-\alpha_n)}{(T+\beta_1)...(T+\beta_n)}$. Si l'on décompose cette fraction en éléments simples, il vient :

[4] Qu'est-ce qu'une constante ? c'est une variable qui se repose…

$$x_j = \frac{(\beta_j+\alpha_1)(\beta_j+\alpha_2)\dots(\beta_j+\alpha_n)}{(\beta_j-\beta_1)\dots(\beta_j-\beta_{j-1})(\beta_j-\beta_{j+1})\dots(\beta_j-\beta_n)}$$

4) Le déterminant de Hilbert est un Cauchy particulier, avec par exemple $\alpha_i = \beta_i = i - ½$ $(1 \le i \le n)$. Si l'on introduit la fonction factorielle double $n!! = 1!\times 2!\times \dots \times n!$, il vient :

$$\det H_n = \frac{\prod_{i<j}(j-i)(j-i)}{\prod_{i,j}(i+j-1)} = \frac{(n-1)!!^4}{(2n-1)!!}$$, après des calculs que le lecteur est prié de faire.

<u>Remarque</u> : on peut aussi calculer det H_n par récurrence par la même méthode qu'en 1 : retrancher à toutes les colonnes la dernière, mettre en facteur, puis retrancher à chaque ligne la dernière. Il vient

$$\det H_n = \frac{(n-1)!^4}{(2n-1)!(2n-2)!}.\det H_{n-1} .$$

5) <u>H_n est symétrique définie positive</u>, car c'est la matrice de Gram de la base $(t^k)_{0\le k\le n-1}$ de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ relativement au produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t).Q(t).dt$.

En d'autres termes, si $X = {}^t(x_1, x_2,\dots, x_n)$ $\qquad {}^tX.H_n.X = \int_0^1 (x_1+t.x_2+\dots+t^{n-1}.x_n)^2.dt$.

On peut retrouver cela grâce au critère de Jacobi, si l'on note que les mineurs principaux, qui sont tous des déterminants de Hilbert, sont tous > 0.

6) Tous calculs faits, il vient :

$$\beta_{j,i} = (-1)^{i+j}\, C_{n+i-1}^{n-j}\, C_{i+j-2}^{i-1}\, C_{n+j-1}^{n}\, n\, C_{n-1}^{i-1} = (-1)^{i+j}\, C_{n+i-1}^{n-j}\, C_{i+j-2}^{i-1}\, C_{n+j-1}^{n}\, i\, C_n^i .$$

Ceci montre que $\beta_{j,i}$ appartient à $\mathbf{Z}$, et est même multiple de *n*, de *i* et de *j* (par raison de symétrie).

Remarque : j'ai une autre preuve de ce résultat, via les polynômes de Legendre modifiés.

<u>Références</u> :

Bourbaki, Algèbre III 192 n° 5, Polya-Szegö, t. 2, part VIII n° 3 p. 92, Knuth, t. 1, p. 36-37

<u>Exercice 39 bis</u> : **<u>déterminants de Cauchy</u>.**

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ $2n$ scalaires tels que $\forall (i, j)$ $\alpha_i + \beta_j \ne 0$.

On appelle **déterminant de Cauchy** d'ordre *n* le déterminant : $D_n = \det\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\le i,j\le n}$.

On définit la fraction rationnelle $R(X) = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+\beta_k)}$.

1) Montrer que si R(X) est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{X+\beta_k}$, alors $A_n D_n = R(\alpha_n) D_{n-1}$.

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par : $\begin{bmatrix} R(\alpha_1) \\ R(\alpha_2) \\ \dots \\ R(\alpha_n) \end{bmatrix}$. 2) En déduire que $D_n = \dfrac{\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i).(\beta_j-\beta_i)}{\prod_{p,q}(\alpha_p+\beta_q)}$. [Mines 2009, écrit, extrait]

<u>Solution</u> : Cauchy, simple et efficace…

1) Le déterminant proposé est $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & R(a_{n-1}) \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \dots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix}$.

Si l'on fait $c_n \to c_n - A_1.c_1 - \dots - A_{n-1}.c_{n-1}$, il vient : $\Delta = A_n.D_n$.

Mais $R(a_1) = \dots = R(a_{n-1}) = 0$, donc, développant par rapport à la dernière colonne : $\Delta = R(a_n).D_{n-1}$.

2) <u>Montrons la formule proposée par récurrence sur *n*</u>.

Pour $n = 1$, elle est immédiate si l'on convient que le produit vide du numérateur vaut 1.

Montrons-la encore pour $n = 2$:

• Si $b_1 = b_2$, les deux membres sont nuls.

• Sinon, $R(X) = \frac{X-a_1}{(X+b_1)(X+b_2)} = \sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{X+b_k}$. Et $A_2 = \frac{b_2+a_1}{b_2-b_1}$ (multiplier par $X + b_2$, faire $X = -b_2$).

$$D_2 = \frac{R(a_2).D_1}{A_2} = \frac{a_2-a_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)}\,\frac{b_2-b_1}{b_2+a_1}\,\frac{1}{a_1+b_1} = \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)}$$

Supposons la formule vraie au rang $n - 1$.

• Si $b_1, \dots , b_n$ ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant de Cauchy a deux colonnes égales, donc il est nul, et la formule de Cauchy est satisfaite.

• Sinon, R(X) n'a que des pôles simples, et elle a une décomposition en éléments simples de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{X+b_k}$. De plus, $A_n = \frac{\prod_{1\le k\le n-1}(b_n+a_k)}{\prod_{1\le k\le n-1}(b_n-b_k)}$ (multiplier par $X + b_n$ et faire $X = -b_n$).

La question 1) s'applique et :

$$D_n = \frac{R(a_n).D_{n-1}}{A_n} = \frac{\prod_{1\le k\le n-1}(a_n-a_k)}{\prod_{1\le k\le n}(a_n+b_k)}\cdot\frac{\prod_{1\le k\le n-1}(b_n-b_k)}{\prod_{1\le k\le n-1}(b_n+a_k)}\cdot\frac{\prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i).(b_j-b_i)}{\prod_{1\le p,q\le n-1}(a_p+b_q)} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).(b_j-b_i)}{\prod_{1\le p,q\le n}(a_p+b_q)}\text{ . cqfd}$$

<u>Exercice 40</u> : <u>Vandermonde généralisés</u>.

Soient $x_1 , x_2 , \dots , x_n , a_1 , a_2 , \dots , a_n$ des réels tels que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Montrer que $\begin{vmatrix} x_1^{a_1} & x_1^{a_2} & \dots & x_1^{a_n} \\ x_2^{a_1} & x_2^{a_2} & \dots & x_2^{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{a_1} & x_n^{a_2} & \dots & x_n^{a_n} \end{vmatrix} > 0$.

<u>Solution</u> : Nous allons procéder en deux temps.

1) <u>Montrons d'abord que ce déterminant est non nul</u>.

Il s'agit de montrer que les colonnes sont indépendantes, autrement dit que :

$$(\forall i)\quad \sum_{j=1}^{n} c_j.(x_i)^{a_j} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 .$$

<u>Lemme</u> : Si les c_i sont non tous nuls, la fonction $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j.x^{a_j}$ définie sur $\mathbf{R}^*_+$, a au plus $n-1$ zéros.

Preuve par récurrence sur *n*. C'est immédiat pour $n = 1$. Supposons le résultat acquis au rang $n-1$.

Soit alors $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j.x^{a_j}$, où les c_i sont non tous nuls. Si f avait au moins n zéros > 0, la fonction

$g(x) = \dfrac{d}{dx}[\, x^{-a_n} f(x)] = \sum_{j=1}^{n-1} c_j.(a_j - a_n).x^{a_j - a_n}$ aurait au moins $n-1$ zéros > 0, en vertu du théorème de Rolle (natif d'Ambert). Par hypothèse de récurrence, $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$; puis $c_n = 0$. Cqfd.

2) Montrons que le déterminant est > 0 par un argument de valeurs intérmédiaires.
Fixons un n-uplet $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ tel que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$.
$E = \{ (a_1 , a_2 , \dots , a_n) ; a_1 < a_2 < \dots < a_n \}$ est connexe par arcs.
Par continuité, le déterminant est de signe constant sur E. Or si $(a_1 , a_2 , \dots , a_n) = (0, 1, \dots , n-1)$, le déterminant est un Vandermonde classique, qui vaut $\prod_{i<j}(x_j - x_i) > 0$. cqfd.

Remarque : on en déduit que tous les mineurs du déterminant sont > 0.

Références : F. R. Gantmacher, *The theory of matrix*, vol. II, chap. XIII, § 8, p. 98 (Chelsea).

Exercice 41 : Calculer le déterminant de $\begin{bmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-x \end{bmatrix}$.

Solutions :
Développer selon la 1ère ligne, la 1ère colonne ou la dernière ligne conduit à une récurrence.
Développer selon la dernière colonne évite une récurrence, mais conduit à un calcul assez délicat des cofacteurs.
Le plus simple est de faire $L_1 \to L_1 + x.L_2 + \dots + x^{n-1}.L_n$ et de développer par rapport à la 1ère ligne. Et l'on trouve : $(-1)^n\, [\, x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \dots + a_1.x + a_0\,]$.

Remarque : ce calcul est important, car la matrice est une matrice-compagnon.

Exercice 42 : Calculer pour tout n, $D_n = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solution : Un calcul récurrent ne marche pas, car il ne ramène pas D_n à D_{n-2}. Et cependant comment procéder autrement ? Faisons fonctionner le principe « more may be less » cher à Polya-Szegö et proposons-nous de calculer :

$$D_n(a, b) = \det \begin{bmatrix} 0 & a+1 & 0 & \dots & 0 \\ b+n & 0 & a+2 & \dots & \dots \\ 0 & b+n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a+n \\ 0 & \dots & 0 & b+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il vient par développement selon la dernière colonne puis la dernière ligne :

$$D_n(a, b) = -\,(a+n)(b+1) \det \begin{bmatrix} 0 & a+1 & 0 & \dots & 0 \\ b+n & 0 & a+2 & \dots & \dots \\ 0 & b+n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a+n-2 \\ 0 & \dots & 0 & b+3 & 0 \end{bmatrix} = -\,(a+n)(b+1).D_{n-2}(a, b+2).$$

Nous voilà ramenés à une récurrence de 2 en 2.

Comme $D_2(x, y) = 0$ (2 colonnes liées), tous les $D_{2k}(a, b)$ sont nuls.

Comme $D_1(x, y) = -(x + 1)(y + 1)$, on peut calculer les $D_{2k+1}(a, b)$ de proche en proche :

$$\begin{aligned}
D_{2k+1}(a, b) &= -(a + 2k + 1)(b + 1).D_{2k-1}(a, b + 2) \\
&= -(a + 2k + 1)(b + 1).-(a + 2k - 1)(b + 3).D_{2k-3}(a, b + 4) \\
&= \dots = -(a + 2k + 1)(b + 1).-(a + 2k - 1)(b + 3)\dots -(a + 3)(b + 2k - 1).D_1(a, b + 2k) \\
&= -(a + 2k + 1)(b + 1).-(a + 2k - 1)(b + 3)\dots -(a + 3)(b + 2k - 1).-(a + 1)(b + 2k + 1) \\
&= (-1)^{k+1}\prod_{h=0}^{k}(a+2h+1)(b+2h+1)\,.
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : $D_{2k} = 0$ et $D_{2k+1} = (-1)^{k+1}\prod_{h=0}^{k}(2h+1)^2$.

<u>Remarques</u> : 1) L'exercice suivant généralise cela.

2) Une tout autre approche consisterait à considérer l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ ayant la matrice proposée, et à le diagonaliser ; voir mes exercices sur la réduction…

```
> with(linalg):
> h:=proc(n,i,j)
> if j=i+1 then i
> elif i=j+1 then n+1-j
> else 0;fi;end;
> A:=n->matrix(n+1,n+1,(i,j)->h(n,i,j));Delta:=n->det(A(n));
> for n from 1 to 13 do Delta(n);od;
```

-1
0
9
0
-225
0
11025
0
-893025
0
108056025
0
-18261468225

```
> p:=k->(-1)^(k+1)*product((2*h+1)^2,h=0..k);
> for k from 0 to 6 do p(k);od;
```

-1
9
-225
11025
-893025
108056025
-18261468225

<u>Exercice 43</u> : Calculer le déterminant : $D_n = \det\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 0 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 \end{bmatrix}$.

Solution : On trouve $D_n = -a_n.b_n.D_{n-2}$, $D_1 = -a_1.b_1$, $D_2 = 0$.

On en déduit aisément $D_{2k} = 0$, $D_{2k+1} = (-1)^{k+1}\prod_{h=0}^{k}(a_{2h+1}.b_{2h+1})$.

Si l'on fait $a_i = i$ et $b_i = n + 1 - i$ dans le résultat obtenu, on retrouve l'exercice précédent.

Remarque : d'autres pistes sont possibles.
Boutte développe ce déterminant à l'aide des permutations. Seules comptent certaines permutations.
On pourrait aussi changer de base et se place dans la base (e_1, e_3, e_5, …, e_2, e_4, e_6, …).

Exercice 44 : Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} -(x+1) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & -(x+2) & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & -(x+3) & 3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & x & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & x & -(x+n-1) & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & x & -(x+n) \end{vmatrix}$.

Solution : Notant $D_n(x)$ ce déterminant, on trouve par développement selon la dernière colonne :
$D_0(x) = 1$, $D_1(x) = -(x + 1)$ et $D_n(x) = -(x + n).D_{n-1}(x) - x(n - 1).D_{n-2}(x)$ pour $n \geq 2$.
Posant $P_n(x) = D_n(x) + n.D_{n-1}(x)$, il vient $P_n(x) = -x.P_{n-1}(x)$, d'où $P_n(x) = (-1)^n x^n$
Ainsi, pour tout n, $D_n(x) + n.D_{n-1}(x) = (-1)^n x^n$.

Pour faire apparaître une loi de simplification, multiplions par $\frac{(-1)^n}{n!}$ et additionnons. On trouve

$$\boxed{D_n(x) = (-1)^n\ n!\ \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}$$

Remarque : j'imagine que depuis trois siècles on a trouvé des expressions déterminantielles de tous les polynômes de Taylor de toutes les fonctions usuelles.

Exercice 45 : Calculer, pour x réel, $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & x^3/3! & x^2/2! & x & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ x^{n-1}/(n-1)! & \dots & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ x^n/n! & x^{n-1}/(n-1)! & \dots & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$

Solution : [Oral Mines 2009]

1ère solution : dérivation.

Rappelons que si les colonnes $C_1(x)$, …, $C_n(x)$ d'un déterminant sont fonctions dérivables de x, alors $D(x) = \det(C_1(x), \dots, C_n(x))$ a pour dérivée :

$$D'(x) = \sum_i \det(C_1(x),\dots,C_{i-1}(x),C_i'(x),C_{i+1}(x),\dots,C_n(x)) .$$

Ici, comme chaque colonne a pour dérivée la suivante, il vient :
$D_n'(x) = \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), C_n'(x)) = D_{n-1}(x)$ après développement selon la dernière colonne.

De plus $D_n(0) = 0$. Une récurrence facile montre que : $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

2ème solution : séries formelles. Calculons plus généralement $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots \\ \dots & a_2 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$.

Posons $D_0 = 1$. Si l'on développe D_n par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n D_0 + (-1)^n a_{n-1}.D_1 + (-1)^{n-1} a_{n-2}.D_2 + \dots + a_1.D_{n-1}$$

On reconnait une équation de convolution, c'est-à-dire un produit de Cauchy.

Introduisons les séries formelles $A = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n X^n$ et $D = \sum_{n=0}^{+\infty} D_n X^n$. Il vient A.D = 1.

Or ici $A = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} X^n$ = exp(−xX), donc D = exp(xX) = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} X^n$. Cf. exercice 34.

Exercice 46 : Montrer l'identité : $(\forall z \in \mathbf{C})$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & z \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & z^2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 0 & z^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & z^n \end{vmatrix} = (z-1)^n$.

Solution :

1ère méthode, polynomiale. considérons ce déterminant comme un polynôme en z, P(z).

P(z) est de degré *n*, de coefficient dominant 1 (cofacteur de z^n).

Tout revient à montrer que $P(1) = P'(1) = \dots = P^{(n-1)}(1) = 0$.

Or pour calculer $P^{(k)}(z)$, il suffit de dériver *k* fois la dernière colonne.

$\frac{1}{k!} P^{(k)}(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 0 & C_k^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{k+1}^k z \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & \dots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & C_n^k z^{n-k} \end{vmatrix}$. D'où $\frac{1}{k!} P^{(k)}(1) = 0$: deux colonnes égales.

2ème méthode, via les lignes et par récurrence.

De chaque ligne retranchons la précédente en commençant par la dernière.

Il vient $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & z^2-z \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & z^3-z^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & z^{n-1}-z^{n-2} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & z^n-z^{n-1} \end{vmatrix} = (z-1).D_{n-1}$.

3ème méthode, via les colonnes.

Faire $c_{n+1} \to c_{n+1} - c_1 - (z-1).c_2 - (z-1)^2.c_3 - \dots - (z-1)^{n-1}.c_n$.

4ème méthode : considérons le système linéaire triangulaire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \dots \\ z^n \end{bmatrix}$$. Il est cramérien, et a pour solutions $x_k = (z-1)^{k-1}$.

Or les formules de Cramer donnent : $x_{n+1} = \dfrac{D_n}{\det A} = D_n$. Cqfd.

<u>Références</u> : Faddeev-Sominski, n° 245 p. 35, Chambadal-Ovaert, t. 2, n° 4 p. 304.

<u>Exercice 47</u> : Soit (F_n) la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Calculer le déterminant D_n de la matrice $(F_{|i-j|})_{1\le i,j\le n}$.

<u>Solution</u> : [Oral Centrale 2010, RMS n° 739]
Si l'on fait $L_n \to L_n - L_{n-1} - L_{n-2}$, la n-ème ligne devient (0, 0, …, 0, 0, −2).
Si l'on développe selon la dernière ligne, on voit que $D_n = -2.D_{n-1}$ pour $n \ge 2$.
Comme $D_2 = -1$, il vient $D_n = (-1)^{n-1} 2^{n-2}$ pour $n \ge 1$.

<u>Exercice 48</u> : Calculer les déterminants

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & \dots & n! \\ 1! & 2! & 3! & \dots & (n+1)! \\ 2! & 3! & 4! & \dots & (n+2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n! & (n+1)! & (n+2)! & \dots & (2n)! \end{vmatrix} .$$

<u>Solution</u> : Traitons un exemple « suffisamment général » : $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$.

Retranchons à chaque colonne la précédente en commençant par la dernière : $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix}$.

On peut alors : • soit recommencer : retrancher à chaque colonne la précédente en commençant par la dernière, sans toucher aux deux premières $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 10 & 15 \end{vmatrix}$, et recommencer ad libitum :

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

• soit retrancher à chaque ligne la précédente en commençant par la dernière :

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = D_4 \text{ … ce qui renvoie à une récurrence.}$$

Généraliser ne pose aucun problème. Enfin, il y a un lien entre Δ_n et D_{n+1} .

$$1 = D_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{0!}{0!0!} & \frac{1!}{0!1!} & \frac{2!}{0!2!} & \dots & \frac{n!}{0!n!} \\ \frac{1!}{1!0!} & \frac{2!}{1!1!} & \frac{3!}{1!2!} & \dots & \frac{(n+1)!}{1!n!} \\ \frac{2!}{2!0!} & \frac{3!}{2!1!} & \frac{4!}{2!2!} & \dots & \frac{(n+2)!}{2!n!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n!}{n!0!} & \frac{(n+1)!}{n!1!} & \frac{(n+2)!}{n!2!} & \dots & \frac{(2n)!}{n!n!} \end{vmatrix} = \frac{1}{(0!1!\dots n!)^2} \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & \dots & n! \\ 1! & 2! & 3! & \dots & (n+1)! \\ 2! & 3! & 4! & \dots & (n+2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n! & (n+1)! & (n+2)! & \dots & (2n)! \end{vmatrix}$$

par des mises en facteur sur les lignes et les colonnes. Ainsi $\Delta_n = (0!\times 1!\times\dots\times n!)^2 = (n!!)^2$.

Remarque : Δ_n est un déterminant de Gram $\Delta_n = \mathrm{Gram}(1, x, \dots, x^n)$, pour le produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$

$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}.dx$.

Références : Faddeev, n° 240 p. 35, Chambadal-Ovaert p. 304, Arnaudiès n° 15 p. 554, Tuloup.

Exercice 49 : déterminant de Smith et Catalan.

Soit f une fonction $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$, où la somme est étendue à tous les diviseurs > 0 de n, y compris 1 et n. Montrer que $\det (F(\mathrm{pgcd}(i, j))_{1\le i,j\le n} = f(1).f(2) \dots f(n)$.

Cas où $f(n) = 1$, où $f(n) = \varphi(n)$, indicateur d'Euler.

Indication : On fera apparaître la matrice $(F(\mathrm{pgcd}(i, j)))_{1\le i,j\le n}$ comme un produit de deux matrices.

Solution : [Polya-Szegö, tome 2, Oral ENS 1996, RMS n° 335]

On a $F(\mathrm{pgcd}(i, j)) = \sum_{d \mid \mathrm{pgcd}(i,j)} f(d) = \sum_{1\le d\le n} a_{i,d}.b_{d,j}$,

où $a_{i,d} = f(d)$ si $d \mid i$, 0 sinon , et $b_{d,j} = 1$ si $d \mid j$, 0 sinon.

La matrice symétrique $C = (F(\mathrm{pgcd}(i, j)))_{1\le i,j\le n}$ est donc le produit des deux matrices triangulaires A et B (A est triangulaire inférieure, B triangulaire supérieure).

Passant au déterminant, il vient $\det C = \det A.\det B = f(1).f(2) \dots f(n)$.

Exemples :

• Si $f = 1$, $F(n)$ est le nombre de diviseurs de n, et F(pcgd(i, j)) le nombre de diviseurs communs de i et j. Alors det(F(pgcd(i, j)) = 1.

• Si $f = \varphi$, $F(n) = n$ en vertu de la formule de Gauss, et F(pgcd(i, j)) = pgcd(i, j). Alors :

$$\det(\mathrm{pgcd}(i, j)) = \varphi(1).\varphi(2) \dots \varphi(n).$$

Exercice 50 : Etudier la parité du déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Solution :

1ère méthode : calcul de D_n dans $\mathbf{Z}$. Par des manipulations sur les colonnes (somme et soustractions) :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ n-1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Conclusion : D_n est de parité opposée à celle de n.

<u>2ème méthode : on peut passer dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$</u>.

<u>Si n est impair</u>, $\overline{D_n} = \bar{0}$ car la somme des colonnes est nulle.

<u>Si n est pair</u>, $\overline{D_n} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} = \bar{1}$, D_n est impair.

<u>Remarque</u> : D_n a une interprétation combinatoire simple : c'est la différence entre le nombre de permutations paires et sans point fixe de $\{1, 2, \dots, n\}$ et le nombre de permutations impaires et sans points fixes. On déduit la parité du nombre de permutations sans points fixe de $\{1, 2, \dots, n\}$, parité que l'on peut aussi déduire d'un exercice antérieur, où l'on a calculé ce nombre.

<u>Exercice 51</u> : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{Z})$ telle que $n \equiv 0 \pmod 2$, $(\forall i)\ a_{ii} \equiv 0 \pmod 2$ et $\forall i \neq j\ a_{ij} \equiv 1 \pmod 2$. Montrer que A est inversible dans $M_n(\mathbf{Q})$.

<u>Solution</u> : Considérons la matrice $\overline{A} = (\overline{a_{ij}}) \in M_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

On a $\det \overline{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ si n est pair, en vertu de l'exercice précédent.

Par suite, det A est un entier impair, donc non nul, et $A \in Gl_n(\mathbf{Q})$.

<u>Exercice 52</u> : **<u>déterminants de matrices-blocs</u>**.

Les matrices considérées dans cet exercice sont à éléments réels ou complexes.

1) Soient $A = D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. A-t-on $\det M = \det(AD - BC)$?

2) Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ une matrice carrée décomposée en blocs carrés de même format.

Si D est inversible, montrer que $\det M = \det(A - B.D^{-1}.C).\det(D)$.

En déduire que si de plus A, B, C et D commutent, $\det(M) = \det(AD - BC)$.

3) On ne suppose plus D inversible. Montrer que, si A, B, C et D commutent, on a encore

$$\det M = \det(AD - BC).$$

4) <u>Applications</u> : Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

5) <u>Généralisation</u>. Soit (A_{ij}) une famille de matrices de $M_m(\mathbf{K})$ commutant deux à deux,

$M = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ d'ordre mn. Montrer que : $\det M = \det\left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma).A_{\sigma(1),1} \dots A_{\sigma(n),n}\right)$.

6) <u>Application</u> : Soient $A = (\alpha_{ij}) \in M_m(\mathbf{K})$ et $B \in M_n(\mathbf{K})$, $C = A \otimes B \in M_{mn}(\mathbf{K})$, définie par :

C = $\begin{bmatrix} \alpha_{11}B & \dots & \alpha_{1m}B \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1}B & \dots & \alpha_{mm}B \end{bmatrix}$. Calculer det C en fonction de det A et det B .

<u>Solution</u> : 1) Pour cette question, faisons appel à Maple :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[0,1,1,0]);B:=matrix(2,2,[0,-1,1,0]);
M:=blockmatrix(2,2,[A,B,B,A]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(M);det(evalm(A^2-B^2));
```

$$0 \qquad 4$$

2) Soit M $= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ une matrice-bloc, A, B, C, D de même format, D inversible.

Prenons D comme « pivot matriciel » : $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BD^{-1}CB \\ O & D \end{bmatrix}$.

Passant au déterminant, il vient det M = det(A – B.D^{-1}.C).det(D).

Si de plus C et D commutent, alors det M = det(AD – B.D^{-1}.C .D) = det (AD – BC).

3) On ne suppose plus D inversible. Montrons que, si A, B, C et D commutent, on a encore

det M = det(AD – BC).

En effet, si D est non inversible, 0 est valeur propre de D, mais D – ε.I est inversible pour 0 < |ε| < α convenable, en vertu du fait que les valeurs propres de D sont isolées.

De plus, A, B, C et D – ε.I commutent. Donc det $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D-\varepsilon I \end{bmatrix}$ = det(A(D – εI) – BC).

Pour conclure, il suffit de faire tendre ε vers 0 par valeurs ≠ 0.

<u>Remarque</u> : cela reste vrai dans un corps quelconque **K** : on plongera **K** dans le corps **K**(X) et on remplacera D par D – X.I, qui est toujours inversible dans M_n(**K**(X)).

4) <u>Applications</u> :

```
> with(linalg):A:=matrix(2,2,[a,b,b,a]);B:=matrix(2,2,[c,d,d,c]);
M:=blockmatrix(2,2,[A,B,B,A]);factor(det(M));
```

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \qquad M := \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

$$(b+a+d+c)\,(b+a-d-c)\,(-b+a+d-c)\,(-b+a-d+c)$$

```
> R:=matrix(2,2,[a,-b,b,a]);S:=matrix(2,2,[c,-d,d,c]);
P:=blockmatrix(2,2,[R,S,S,R]);factor(det(P));factor(det(P),I);
```

$$P := \begin{bmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

$$(b^2+a^2-2\,c\,a+c^2-2\,d\,b+d^2)\,(b^2+a^2+2\,c\,a+c^2+2\,d\,b+d^2)$$

$$(a+c+I\,b+I\,d)\,(a+c-I\,b-I\,d)\,(a-I\,d-c+I\,b)\,(a+I\,d-c-I\,b)$$

5) se montre comme précédemment, en supposant A_{11} inversible et en la prenant comme pivot.

6) Appliquant 5), on trouve : det C = $(\det A)^n.(\det B)^m$.

Exercice 53 : Soient E un ensemble fini de n éléments, $N = 2^n - 1$, $E_1, \dots, E_N$ les parties non vides de E rangées dans un ordre quelconque. On définit la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_N(\mathbf{R})$ par

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } E_i \cap E_j = \varnothing \quad , \quad a_{i,j} = 1 \text{ si } E_i \cap E_j \neq \varnothing \quad . \quad \text{Calculer det A.}$$

[Indication : on pourra fixer x_0 et distinguer les parties contenant x_0 et ne contenant pas x_0. Cette méthode n'est pas imposée.]

Solution : L'ordre choisi n'intervient pas, car il change la matrice en une matrice semblable (la matrice de passage étant une matrice de permutation).

Supposons $E = \{1, 2, \dots, n\}$ et notons $E_0 = \varnothing$. Numérotons les parties de E dans l'ordre suivant

$$\varnothing , \{1\} , \{2\} , \{1, 2\} , \{3\} , \{1, 3\} , \{1, 2, 3\} , \text{etc.}$$

autrement dit, on adjoint les éléments progressivement.

Soient $A_n = (a_{i,j}) \in M_{N+1}(\mathbf{R})$ et $B_n = (b_{i,j}) \in M_{N+1}(\mathbf{R})$ définies par :

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } E_i \cap E_j = \varnothing \quad , \quad a_{i,j} = 1 \text{ si } E_i \cap E_j \neq \varnothing \quad .$$

$$b_{i,j} = 1 \text{ si } E_i \cap E_j = \varnothing \quad , \quad b_{i,j} = 0 \text{ si } E_i \cap E_j \neq \varnothing \quad .$$

Je dis que $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et que $A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & A_n \\ A_n & J_n \end{bmatrix}$, où J_n est la matrice formée uniquement de 1.

Je dis que $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et que $B_{n+1} = \begin{bmatrix} B_n & B_n \\ B_n & O_n \end{bmatrix}$, où O_n est la matrice formée uniquement de 0.

Ainsi $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bien entendu, $A_{n+1} + B_{n+1} = J_{n+1}$.

Etude de la suite (B_n) : rg $B_n = 2^n$ et $\det B_1 = -1$, $\det B_n = 1$ pour $n \geq 2$.

En effet $\begin{bmatrix} I_n & O_n \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_n & B_n \\ B_n & O_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ O_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_n & O_n \\ O_n & -B_n \end{bmatrix}$ implique $\det B_{n+1} = (\det B_n)^2$.

Cela découle aussi de ce que $B_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes B_n$.

Etude de la suite (A_n) : rg $A_n = 2^n - 1$ et $\det A_n = 0$ pour tout n .

$A_{n+1} . \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ O_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & O_n \\ A_n & B_n \end{bmatrix}$, donc rg A_{n+1} = rg A_n + rg B_n , et rg $A_1 = 1$.

On en déduit, par récurrence sur n, que : rg $A_n = 2^n - 1$.

La 2ème assertion en découle ; du reste, les premières ligne et colonne de A_n sont nulles.

Etude de la matrice (C_n) de l'énoncé. Je dis que rg $C_n = 2^n - 1$, $\det C_1 = 1$, $\det C_n = -1$ pour $n \geq 2$.

C_n est obtenue en supprimant les premières ligne et colonne de A_n. Donc C_n a même rang que A_n .

Il reste à calculer son déterminant, c'est-à-dire à répondre à la question posée !…

Exercice 54 : Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots \\ \dots & a_2 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$

où $a_n = \dfrac{1}{n!}$, puis $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, … , $a_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$.

Solution : Posons $D_0 = 1$. Si l'on développe D_n par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n D_0 + (-1)^n a_{n-1}.D_1 + (-1)^{n-1} a_{n-2}.D_2 + ... + a_1.D_{n-1}$$

On reconnait une équation de convolution, c'est-à-dire un produit de Cauchy.

Introduisons les séries formelles $A = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n X^n$ et $D = \sum_{n=0}^{+\infty} D_n X^n$. Il vient A.D = 1.

Dans le premier cas, A = exp(–X), D = exp X et $D_n = \dfrac{1}{n!}$.

Dans le second cas, $A = \dfrac{1}{\sqrt{1+X}}$, donc $D = \sqrt{1+X}$. Finalement :

$D_0 = 1$, $D_1 = \dfrac{1}{2}$, ... , $D_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n)}$.

Certains déterminants, notamment les déterminants de matrices cycliques, circulantes et apparentées, se calculent par réduction de la matrice, donc comme produit des valeurs propres. Voici deux exercices sur ce thème.

Exercice 55 : Calculer les déterminants : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n & 1 & 2 & ... & ... \\ ... & n & ... & ... & 3 \\ 3 & ... & ... & 1 & 2 \\ 2 & 3 & ... & n & 1 \end{vmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -n & 1 & 2 & ... & ... \\ ... & -n & ... & ... & 3 \\ -3 & ... & ... & 1 & 2 \\ -2 & -3 & ... & -n & 1 \end{vmatrix}$.

Solution : Ce sont des déterminants cycliques que l'on va calculer par diagonalisation de matrices.

Les deux matrices s'écrivent $P(\Omega) = I + 2.\Omega + 3.\Omega^2 + \dots + n.\Omega^{n-1}$, où :

$$P(X) = 1 + 2.X + 3.X^2 + \dots + n.X^{n-1} = D(1 + X + \dots + X^n) = D\left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right) = \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}.$$

Et $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dans le premier cas , $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ -1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dans le second cas.

La première matrice vérifie $\Omega^n = I$ et a pour valeurs propres 1, ω, ω^2, …, ω^{n-1}, où $\omega = \exp\dfrac{2i\pi}{n}$.

Elle est diagonalisable, et l'on a : $D_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = \dfrac{n(n+1)}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{n(\omega^k-1)}{(\omega^k-1)^2} = \dfrac{n^n.(n+1)}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\omega^k-1}$.

Or $\prod_{k=1}^{n-1}(\omega^k-1) = (-1)^{n-1} Q'(1) = n$, où $Q(X) = X^n - 1$. Finalement $D_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}.(n+1)}{2}$.

La seconde matrice vérifie $\Omega^n = -I$ et a pour valeurs propre $\omega_k = \exp\dfrac{i\pi(2k+1)}{n}$ $(0 \le k \le n-1)$.

Du coup , $\Delta_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{n+2-n\omega_k}{(\omega_k-1)^2}$. Or $X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$ implique :

$\prod_{k=0}^{n-1}(n+2-n\omega_k) = n^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{n+2}{n}-\omega_k\right) = (n+2)^n + n^n$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k-1)^2 = 4$. Finalement $\Delta_n = \dfrac{(n+2)^n+n^n}{4}$.

Conclusion : $D_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}.(n+1)}{2}$ et $\Delta_n = \dfrac{(n+2)^n+n^n}{4}$.

Remarque : On peut calculer D_n par une méthode plus élémentaire. En revanche, je ne vois pas d'autre méthode de calcul de Δ_n.

Exercice 56 : Soit p premier, $M = M(a_0, ..., a_{p-1}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & ... & ... & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_2 & ... & ... & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_{p-1} & a_0 \end{bmatrix} \in M_p(\mathbf{Z})$.

Montrer que $\det M \equiv a_0 + ... + a_{p-1} \pmod p$.

Solution :

M est une matrice cyclique, ainsi que sa réduction modulo p, qui est cyclique dans $M_p(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

$M = P(\Omega)$, où $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{p-1}X^{p-1}$.

On a bien sûr $\Omega^p = I$; autrement dit Ω annule le polynôme $\Phi(X) = X^p - 1$, qui est d'ailleurs à la fois son polynôme caractéristique et son polynôme minimal. Mais, tandis que dans **C**, Φ est scindé à racines simples, dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, Φ n'a qu'une racine $\Phi = (X-1)^p$, autrement dit $\Omega - I$ est nilpotente.

Soit $Q \in Gl_p(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ telle que $Q^{-1}.\Omega.Q = \begin{bmatrix} 1 & * & ... & ... & * \\ 0 & 1 & * & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 1 & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix} = T$.

Alors $Q^{-1}.M.Q = Q^{-1}.P(\Omega).Q = P(T) = \begin{bmatrix} P(1) & * & ... & ... & * \\ 0 & P(1) & * & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & P(1) & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & P(1) \end{bmatrix}$.

Du coup, $\det M = P(1)^p = P(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (petit théorème de Fermat). CQFD.

Remarque : $\Omega - I$ étant nilpotente d'indice p, on peut choisir Q telle que $Q^{-1}.\Omega.Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 57 : Trouver les fonctions continues $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ telles que $\forall z, z' \in \mathbf{C}^*$ $f(z.z') = f(z) + f(z')$.
Trouver les applications $f : Gl_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ continues, telles que $\forall A, B \in Gl_n(\mathbf{C})$ $f(A.B) = f(A) + f(B)$.

Solution : 1) Les fonctions cherchées sont de la forme $f(z) = a.\ln|z|$, où $a \in \mathbf{C}$. En effet :
• La restriction de f à $\mathbf{R}^*_+$ est un morphisme continu de $\mathbf{R}^*_+$ dans **C**. Elle est donc de la forme $f(r) = a.\ln r$, où $a \in \mathbf{C}$.
• La restriction de f à **U** est le morphisme trivial, car $f(\mathbf{U})$ est un sous-groupe additif compact de **C**, donc $f(\mathbf{U}) = \{0\}$.
• Conclure via la représentation trigonométrique d'un complexe.

2) Les fonctions cherchées sont de la forme $f(A) = a.\ln|\det A|$, où $a \in \mathbf{C}$.
D'abord, $\lambda \in \mathbf{C}^* \to f(\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1))$ satisfait à 1), donc $(\exists a)$ $(\forall\lambda)$ $f(\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)) = a.\ln|\lambda|$.
De plus, si A et B sont semblables, $f(A) = f(B)$.
Donc $f(\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)) = f(\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1)) = a.\ln|\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$.
Finalement si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n)$, $f(A) = a\sum \ln|\lambda_i| = a\ln|\det A|$.

Conclure par densité des diagonalisables inversibles dans $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{C})$.

<u>Exercice 58</u> : Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$.
Montrer que f est strictement convexe si et seulement si :

$$\forall(x, y, z) \in I\times I\times I \quad x < y < z \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

<u>Solution</u> : Notons $M(x) = (x, f(x))$, $M(y) = (y, f(y))$, $M(z) = (z, f(z))$ et D le déterminant ci-dessus.
$D = -\det(\overrightarrow{M(x)M(y)}, \overrightarrow{M(x)M(z)})$, donc $D < 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{M(x)M(y)}, \overrightarrow{M(x)M(z)})$ est base directe…

<u>Exercice 59</u> : Le plan et l'espace affines sont rapportés à un repère, orthonormé le cas échéant.

1) Dans le plan, vérifier que la droite passant par les points distincts $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. En déduire une cns d'alignement de trois points $M_i(x_i, y_i)$ $(1 \le i \le 3)$.

2) Dans l'espace, quelle est l'équation du plan passant par trois points non alignés $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(1 \le i \le 3)$? En déduire une cns de coplanarité de quatre points $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(1 \le i \le 4)$.

3) Dans le plan euclidien, on se donne trois points $M_i(x_i, y_i)$ $(1 \le i \le 3)$ non alignés.
Vérifier que le cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \\ 2x & 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 2y & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

b) En déduire une cns de cocyclité de quatre points $M_i(x_i, y_i)$ $(1 \le i \le 4)$.

c) On note $d_{ij} = \|\overrightarrow{M_i M_j}\|$, $D = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & 1 \end{vmatrix}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix}$.

Montrer que la cns trouvée en b) peut s'écrire : $\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (Cayley) .

d) En calculant le déterminant précédent, montrer l'équivalence :

$M_1M_2M_3M_4$ sont cocycliques $\Leftrightarrow$ $d_{12}.d_{34} \pm d_{23}.d_{14} \pm d_{13}.d_{24} = 0$ (Ptolémée) .

4) Soit A l'aire du triangle $M_1M_2M_3$.

a) Montrer que $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

b) En déduire que $16.A^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}$ (Euler) .

5) Généraliser le 3) aux sphères et à la cosphéricitié.

6) On revient au plan. Ecrire sous forme de déterminant l'équation de la conique passant par les 5 points $M_i(x_i, y_i)$ $(1 \leq i \leq 5)$, de l'hyperbole équilatère passant par 4 points. On ne discutera pas le problème. Plus généralement, montrer qu'une courbe algébrique plane de degré n est en général déterminée par la donnée de $n(n + 3)/2$ points (Cramer).

Solution : Nous allons raisonner de manière un peu dogmatique… mais efficace.

1) Soit D l'ensemble des points M(x, y) vérifiant $\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Développant par rapport à la 1ère colonne, D a pour équation : $Ax + By + C = 0$.
Le couple $(A, B) = (y_1 - y_2 , x_2 - x_1)$ est $\neq (0, 0)$, donc D est une droite. Cette droite passe par les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ puisqu'alors le déterminant a 2 colonnes égales.

Conséquence : une cns d'alignement de trois points $M_i(x_i, y_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$ est $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2) Laissé au lecteur.

3) Soient trois points $M_i(x_i, y_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$ non alignés.

Soit C le lieu des points M(x, y) tels que $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \\ 2x & 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 2y & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Si l'on développe ce déterminant par rapport à la 1ère colonne, il vient $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$,
où le cofacteur $A = 2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est non nul, car $M_1M_2M_3$ sont non alignés (cf. 1).

Ce lieu est donc un cercle, réel ou imaginaire. Mais c'est un cercle réel, et c'est même le cercle passant par $M_1M_2M_3$ (car 2 colonnes égales) : c'est le cercle circonscrit au triangle.

Conséquence : une cns pour que quatre points $M_i(x_i, y_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$ soient cocycliques ou alignés est :

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 & x_4^2+y_4^2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 & 2y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

c) On note $d_{ij} = \| \overrightarrow{M_i M_j} \|$, $D = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & 1 \end{vmatrix}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix}$.

On constate que $D = -4\Delta$ et $D.\Delta = \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}$ (produit matriciel).

Le déterminant obtenu s'appelle **déterminant de Cayley-Menger** des 4 points.

Les points M_i $(1 \leq i \leq 4)$ sont cocyliques $\Leftrightarrow$ $D = 0$ $\Leftrightarrow$ $D.\Delta = 0$. cqfd.

Pour conclure, on peut, soit développer le déterminant obtenu selon les deux premières colonnes par la méthode de Laplace, soit appeler Maple à la rescousse :

```
> with(linalg):A:=array(antisymmetric,1..4,1..4);
> C:=matrix(4,4,(i,j)->A[i,j]^2);factor(det(C));
```

$$C := \begin{bmatrix} 0 & {A_{1,2}}^2 & {A_{1,3}}^2 & {A_{1,4}}^2 \\ {A_{1,2}}^2 & 0 & {A_{2,3}}^2 & {A_{2,4}}^2 \\ {A_{1,3}}^2 & {A_{2,3}}^2 & 0 & {A_{3,4}}^2 \\ {A_{1,4}}^2 & {A_{2,4}}^2 & {A_{3,4}}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_{1,3}A_{2,4}+A_{1,4}A_{2,3}-A_{1,2}A_{3,4})\,(A_{1,3}A_{2,4}+A_{1,4}A_{2,3}+A_{1,2}A_{3,4})$$
$$(A_{1,2}A_{3,4}-A_{1,3}A_{2,4}+A_{1,4}A_{2,3})\,(-A_{1,2}A_{3,4}-A_{1,3}A_{2,4}+A_{1,4}A_{2,3})$$

4) <u>Formule d'Euler</u> donnant l'aire d'un triangle en fonction des côtés.
Cette formule remonte à Héron. On la montre ici via les déterminants.

a) $A = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$ en tant qu'aire orientée.

Des manipulations simples montrent que $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$.

b) Du coup, $16.A^2 = -4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \dots = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}$ après divers avatars.

Avec des notations plus classiques $16.S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$.

Si l'on factorise ce déterminant, on obtient $16\,S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.
Et l'on retrouve la cns d'alignement de 3 points : $\pm a \pm b \pm c = 0$.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[0,1,1,1,1,0,c^2,b^2,1,c^2,0,a^2,1,b^2,a^2,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);factor(det(A));
```

$$a^4 - 2\,c^2\,a^2 - 2\,b^2\,a^2 + b^4 - 2\,b^2\,c^2 + c^4$$
$$(a+b-c)\,(b+a+c)\,(a-b+c)\,(a-c-b)$$

5) Laissé au lecteur.
6) L'hyperbole équilatère passant par 4 points aura pour équation, en général :

$$\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x_1^2-y_1^2 & x_2^2-y_2^2 & x_3^2-y_3^2 & x_4^2-y_4^2 \\ xy & x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

<u>Exercice 60</u> : <u>géométrie du triangle</u>.

Dans le plan euclidien, soit T un triangle ABC. On choisit un repère orthonormé de façon que les sommets aient pour coordonnées A(0, a), B(b, 0), C(c, 0).

1) Coordonnées du centre de gravité G, de l'orthocentre H et du centre du cercle circonscrit Ω ? Vérifier que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\ \overrightarrow{\Omega G}$.

2) Soit M un point du plan, P, Q, R ses projections orthogonales sur les droites BC, CA et AB. Montrer que P, Q, R sont alignés ⇔ M appartient au cercle circonscrit au triangle.

3) Montrer que les pieds des hauteurs, les milieux des côtés, et les milieux des segments HA, HB et HC sont cocycliques et appartiennent à un cercle dont le centre est milieu de ΩH (cercle des 9 points).

Solution : laissée au lecteur.

Exercice 61 : théorème de Pascal pour la parabole et l'hyperbole.

Soit ABCDEF un hexagone inscrit dans une parabole $\mathcal{P}$, que l'on peut supposer d'équation $y = x^2$.
Montrer que les trois points AB ∩ DE, BC ∩ EF et CD ∩ FA sont alignés.
Même question pour une hyperbole, supposée d'équation $y = 1/x$.

Solution : Maple vérifie très bien cela. Tous les calculs se font par déterminants.

```
> with(linalg):
> p:=(a,b)->det(matrix(3,3,[x,a,b,y,a^2,b^2,1,1,1]));
> q:=(a,b)->simplify(p(a,b)/(a-b));q(a,b);
```

$$a\,x - a\,b - y + b\,x$$

```
> alpha:=solve({q(a,b)=0,q(d,e)=0},{x,y});
```

$$\alpha := \{x = \frac{-e\,d + a\,b}{-e - d + a + b},\ y = \frac{e\,a\,b + d\,a\,b - e\,d\,a - e\,d\,b}{-e - d + a + b}\}$$

```
> beta:=solve({q(b,c)=0,q(e,f)=0},{x,y});
```

$$\beta := \{x = \frac{f\,e - b\,c}{f - b - c + e},\ y = \frac{b\,f\,e + c\,f\,e - b\,c\,f - b\,c\,e}{f - b - c + e}\}$$

```
> gam:=solve({q(c,d)=0,q(f,a)=0},{x,y});
```

$$gam := \{x = \frac{-c\,d + f\,a}{-c - d + f + a},\ y = \frac{c\,f\,a + d\,f\,a - c\,d\,f - c\,d\,a}{-c - d + f + a}\}$$

```
> A:=matrix(3,3,[subs(alpha,x),subs(beta,x),subs(gam,x),subs(alpha,y),
subs(beta,y),subs(gam,y),1,1,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-e\,d + a\,b}{-e - d + a + b} & \frac{f\,e - b\,c}{f - b - c + e} & \frac{-c\,d + f\,a}{-c - d + f + a} \\ \frac{e\,a\,b + d\,a\,b - e\,d\,a - e\,d\,b}{-e - d + a + b} & \frac{b\,f\,e + c\,f\,e - b\,c\,f - b\,c\,e}{f - b - c + e} & \frac{c\,f\,a + d\,f\,a - c\,d\,f - c\,d\,a}{-c - d + f + a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$0$$

```
> with(linalg):
> p:=(a,b)->det(matrix(3,3,[x,a,b,y,1/a,1/b,1,1,1]));
q:=(a,b)->numer(simplify(p(a,b)/(a-b)));q(a,b);
```

$$-y\,a\,b + a - x + b$$

```
> alpha:=solve({q(a,b)=0,q(d,e)=0},{x,y});
```

$$\alpha := \{y = \frac{b - d + a - e}{a\,b - d\,e},\ x = \frac{a\,b\,d + a\,b\,e - a\,d\,e - b\,d\,e}{a\,b - d\,e}\}$$

```
> beta:=solve({q(b,c)=0,q(e,f)=0},{x,y});
```

$$\beta := \{y = \frac{e - b + f - c}{e\,f - b\,c},\ x = -\frac{-e\,f\,b - e\,f\,c + f\,b\,c + e\,b\,c}{e\,f - b\,c}\}$$

```
> gam:=solve({q(c,d)=0,q(f,a)=0},{x,y});
```

$$gam := \{x = \frac{-c\,d\,a - c\,d\,f + c\,f\,a + d\,f\,a}{-c\,d + f\,a}, y = \frac{-d + a - c + f}{-c\,d + f\,a}\}$$

```
> A:=matrix(3,3,[subs(alpha,x),subs(beta,x),subs(gam,x),subs(alpha,y),
subs(beta,y),subs(gam,y),1,1,1]);det(A);
```

$$0$$

---

9. *Systèmes linéaires.*

Exercice 1 : Une petite fille affirme : « *J'ai autant de frères que de sœurs* ».
Son frère répond : « *J'ai deux fois plus de sœurs que de frères* ».
Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

Solution : [Sanary, octobre 2016]
Notons G le nombre de garçons, F le nombre de filles.
On a, d'une part G = F – 1, d'autre part, F = 2(G – 1).
Ce système se résout aisément, et donne F = 4, G = 3. Il y a donc 7 enfants en tout.

Exercice 2 : J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 72 ans. Quel est mon âge, et celui de mon interlocuteur ?

Solution : Notons x mon âge, y celui de mon ami…
Quand j'avais y années, mon jeune ami en avait 2y – x .
La première assertion se traduit par x = 2(2y – x), i.e. 3x – 4y = 0.
Quand mon ami aura x années, j'en aurai 2x – y.
La seconde assertion se traduit par 3x – y = 72.
Comme 3x = 4y, il vient 3y = 72, c'est-à-dire y = 24, puis x = 32. Réciproque facile.

Conclusion : j'ai 32 ans, et mon jeune ami 24 ans.

Exercice 3 : Mina a deux fois l'âge qu'avait Tina lorsque Anna avait l'âge de Mina. Lorsque Mina aura l'âge d'Anna, l'âge de Tina sera le triple de l'âge qu'avait Anna lorsque Anna avait l'âge de Mina. Lorsque la plus jeune aura triplé son âge, les deux autres auront ensemble 160 ans.
Quel âge a aujourd'hui chacune des trois sœurs ?

Solution : Notons M l'âge de Mina, T celui de Tina, A celui d'Anna.
La première condition s'écrit : M = 2.(T – A + M) , c'est-à-dire : M + 2T – 2A = 0.
La deuxième condition s'écrit : T + A – M = 3M , c'est-à-dire : 4M – T – A = 0.
On en déduit M = $\frac{9A}{4}$ et T = $\frac{7A}{4}$. La plus jeune est Mina.
La troisième condition s'écrit donc T + 2M + A + 2M = 160. On peut alors conclure :

Conclusion : Mina a 20 ans, Tina a 35 ans, Anna a 45 ans.

Exercice 4 : Une ânesse portait du vin côte à côte avec un mulet, et, écrasée sous le poids, elle se plaignait amèrement. Alors le mulet mit fin à ses plaintes en disant :
« Qu'as-tu à te plaindre, la mère ? Si je prenais une de tes mesures, ma charge serait double de la tienne, et si tu prenais une des miennes, j'en aurais encore autant que toi. »
Dis-moi, savant mathématicien, combien de mesures portent l'ânesse et le mulet.

Solution : Soit A le nombre de mesures portées par la paresseuse ânesse, M le nombre de mesures de vin portées par le vaillant mulet.

On a $M + 1 = 2(A - 1)$ et $A + 1 = M - 1$, donc $2A - M = 3$ et $M - A = 2$.
Additionnons ! Il vient $A = 5$, et $M = 7$. Réciproque facile.

Conclusion : l'ânesse porte 5 mesures de vin, le mulet en porte 7.

Exercice 5 : Les Neuf chapitres sur les procédures mathématiques, huitième rouleau.
Supposons que 5 moineaux et 6 hirondelles se réunissent sur le fléau d'une balance et que l'ensemble des moineaux soit plus lourd que l'ensemble des hirondelles. Si un moineau et une hirondelle échangent leur place, le fléau est juste à l'horizontale. Si l'on assemble moineaux et hirondelles, le poids est de 1 jin. On demande combien pèsent respectivement un moineau et une hirondelle.

Solution : Soit M le poids d'un moineau, H celui d'une hirondelle.
On sait que : $5.M > 6.H$, $4.M + H = 5.H + M$, $5.M + 6.H = 1$.
La seconde relation s'écrit $3.M = 4.H$, i.e. $15.M = 20.H$.
La troisième relation s'écrit $15.M + 18.H = 3$. Il vient $38.H = 3$, donc $H = \frac{3}{38}$ et $M = \frac{4}{38}$.
Réciproque facile… La première indication ne sert à rien.

Exercice 6 : L'Épanthème de Thyramydas. L'alexandrin Jamblique (IIIème siècle ap. J.-C.) a conservé l'énoncé et la solution de ce problème, qu'il attribue au pythagoricien Thyramydas de Paros (env. 400-350 av. J.-C.). Il consiste à résoudre le système linéaire :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$$

$$x_1 + x_2 = a_1 \quad , \quad x_1 + x_3 = a_2 \quad , \dots , . \quad x_1 + x_n = a_{n-1}$$

Solution : Il s'agit d'un système de n équations à n inconnues.
Additionnons les équations 2 à n ; il vient : $(n-1)\, x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$.
Retranchons cette relation de la 1ère ; il vient : $(n-2)\, x_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - s$.
Finalement, il vient $x_1 = \frac{1}{n-2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - s)$,

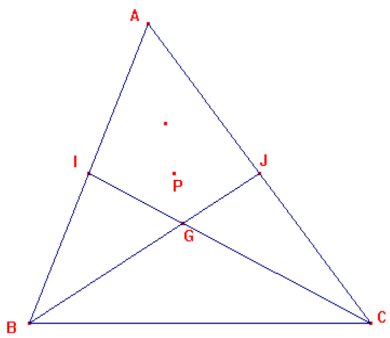
puis $x_k = a_{k-1} - \frac{1}{n-2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - s)$ pour $2 \le k \le n$.

Au passage, on a montré que le système était cramérien, puisqu'il a *au plus* une solution : la matrice du système est injective, donc bijective.

Conclusion : $x_1 = \frac{1}{n-2}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - s)$, $x_k = a_{k-1} - x_1$ pour $2 \le k \le n$.

La matrice du système, $\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, a pour inverse $\Theta^{-1} = \frac{1}{n-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n-3 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & n-3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & n-3 \end{bmatrix}$.

Je me demande comment l'idée d'un tel système a pu venir aux grecs. Peut-être s'agit-il de déterminer un polygone de n côtés $M_1M_2 \dots M_n$ dont le centre de gravité G est donné, ainsi que les milieux A_{k-1} des segments M_1M_k … Consulter le Heath …
Dans le cas du triangle, il s'agit de construire un triangle ABC connaissant son centre de gravité G et les milieux I et J des côtés AB et AC. La réponse est de considérer le milieu P et IJ : A, P et G sont alignés et tels que $\frac{\overline{AP}}{\overline{AG}} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$, donc $\overrightarrow{GA} = 4\,\overrightarrow{GP}$.



Dans le cas général, il faut introduire l'isobarycentre P de A_1 , A_2 , …, A_{n-1} et construire M_1 de façon que $\overrightarrow{GM_1} = \dfrac{2(n-1)}{n-2}\,\overrightarrow{GP}$.

<u>Exercice 7</u> : Résoudre et discuter le système :

$$x_1 + x_2 = a_1 \ , \quad x_2 + x_3 = a_2 \ , \ \dots \ , \quad x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \ , \quad x_n + x_1 = a_n \ .$$

<u>Solution</u> : On suppose le corps **K** de caractéristique $\neq 2$.
Une idée consiste à exprimer $x_2, x_3, \dots, x_n$ en fonction de x_1, et à reporter dans la dernière équation.
Il vient successivement :

$$x_2 = a_1 - x_1 \ , \ x_3 = a_2 - a_1 + x_1 \ , \dots , \ x_k = a_{k-1} - a_{k-2} + \dots + (-1)^k a_1 + (-1)^{k+1} x_1 \ , \dots .$$

L'équation $x_n + x_1 = a_n$ s'écrit alors : $a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + (-1)^n a_1 + [\,1 + (-1)^{n+1}\,]\, x_1 = a_n$.
D'où la discussion :

• <u>Si n est impair, le système est cramérien,</u>

$$x_1 = \frac{1}{2}\,[\, a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{n-1} + a_n \,]$$

et on en déduit les autres inconnues $x_k = a_{k-1} - a_{k-2} + \dots + (-1)^k a_1 + (-1)^{k+1} x_1$ pour $2 \le k \le n$.

• <u>Si n est pair</u>, on doit avoir $a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_2 + a_1 = a_n$.

– Si $a_n - a_{n-1} + \dots + a_2 - a_1 \neq 0$, le système est <u>impossible</u> ;

– Si $a_n - a_{n-1} + \dots + a_2 - a_1 = 0$, il est <u>indéterminé</u> : choisir x_1 quelconque, et poser

$$x_k = a_{k-1} - a_{k-2} + \dots + (-1)^k a_1 + (-1)^{k+1} x_1 \quad \text{pour } 2 \le k \le n.$$

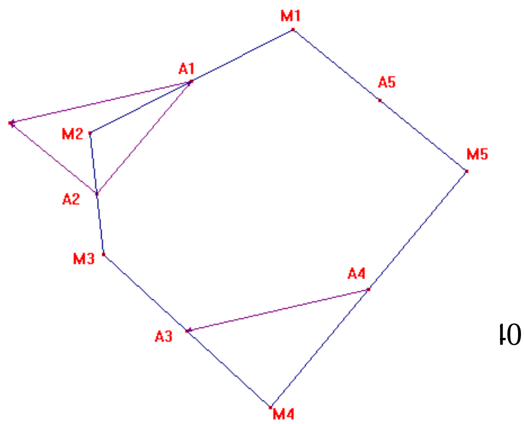
<u>Matriciellement</u>, il s'agit d'étudier l'inversibilité de la matrice A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I + Ω, où Ω est la matrice cyclique bien connue. Alors $\det A = \prod_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k) = 1 - (-1)^n$, où $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$.

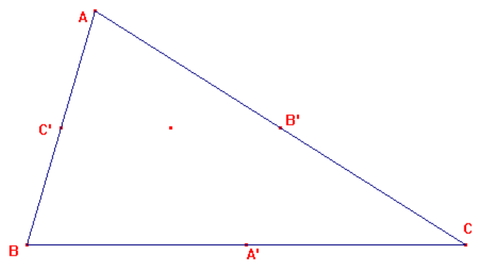
Si n est impair, A est inversible ; si n est pair, elle est de rang $n - 1$, et son image est l'hyperplan d'équation $y_n - y_{n-1} + \dots + y_2 - y_1 = 0$.

<u>Géométriquement</u>, il s'agit de déterminer un polygone $M_1M_2 \dots M_n$ connaissant les milieux A_1, A_2 … , A_n des côtés M_1M_2 , M_2M_3 , …, M_nM_1. Notant S_i la symétrie centrale par rapport à A_i, S_i = Hom(A_i, –1), on veut que $(S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1)(M_1) = M_1$.
Or $F = S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1$ est une homothétie-translation de rapport $(-1)^n$.

• Si n est impair, F est une symétrie centrale, et M_1 en est le centre.
En fait, $F = S_n \circ T$, où T est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{A_1A_2} + 2\,\overrightarrow{A_3A_4} + \dots + 2\,\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}$.
Ecrivons $T = S_n \circ S'$, $F = S'$ et M_1 est le point tel que $\overrightarrow{M_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}$.
Plus généralement, M_k est le centre de $S_{k+1} \circ \dots \circ S_n \circ S_1 \circ \dots \circ S_{k+1} \circ S_k$.

• Si n est pair, F est une translation, et cette translation doit être l'identité.
En fait, F est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{A_1A_2} + 2\,\overrightarrow{A_3A_4} + \dots + 2\,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.
Les figures ci-dessous correspondent à n = 3 et 5.





<u>Exercice 8</u> : Résoudre et discuter dans **C** le système :

$$ax_1 + b = x_2 \quad , \quad ax_2 + b = x_3 \quad , \ \dots \ , \quad ax_{n-1} + b = x_n \quad , \quad ax_n + b = x_1 \ .$$

<u>Solution</u> : Ici encore, des considérations géométriques vont éclairer l'étude.

Si f est la similitude $z \to az + b$, alors x_1 est un point fixe de l'itérée n-ème f^n.

• Si $a = 1$, f est une translation. Si $b \neq 0$, le système est sans solution. Si $b = 0$, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

• Si $a \neq 1$, f est une homothétie-translation de centre $\omega = \dfrac{b}{1-a}$; et $f(z) - \omega = a\,(z - \omega)$.

Du coup, $x_1 - \omega = a^n\,(x_1 - \omega)$.

– Si $a^n \neq 1$, alors $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \omega = \dfrac{b}{1-a}$.

– Si $a^n = 1$, alors x_1 est quelconque, et $(\forall k)\ \ x_k = a^{k-1}\,(x_1 - \omega) + \omega$.

En particulier, le système est cramérien si et seulement si $a^n \neq 1$.

<u>Exercice 9</u> : Soient a, b, c les racines de $t^3 + t + 1 = 0$. Résoudre le système :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= 1 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= 1. \end{aligned}$$

<u>Solution</u> : [Oral CCP 2013, RMS n° 1164]

Cet exercice a un parfum galoisien prononcé…

Les racines de $P(t) = t^3 + t + 1$ sont distinctes, de sorte que le système est cramérien.

<u>1ère méthode : formules de Cramer</u>.

On trouve $x = \dfrac{(1-b)(1-c)}{(a-b)(a-c)} = \dfrac{P(1)}{(1-a)P'(a)} = \dfrac{3}{(1-a)(3a^2+1)} = \dfrac{3}{3a^2+2a+4}$.

Si l'on applique Bezout aux polynômes $3t^2 + 2t + 4$ et $P(t)$, et si l'on substitue a à t, il vient :

$x = \dfrac{a^2-17a+11}{31}$. Par permutation, $y = \dfrac{b^2-17b+11}{31}$, $z = \dfrac{c^2-17c+11}{31}$.

<u>2ème méthode : polynômes de Lagrange</u>.

Par linéarité, pour tout trinôme T, $T(a).x + T(b).y + T(c).z = T(1)$.

Choisissant pour T le trinôme de Lagrange $T(a) = 1$, $T(b) = T(c) = 0$,

on retrouve aussitôt $x = \dfrac{(1-b)(1-c)}{(a-b)(a-c)}$, etc.

```
> with(linalg):A:=transpose(vandermonde([a,b,c]));
map(factor,linsolve(A,vector([1,1,1])));
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{(-1+c)(b-1)}{(a-c)(a-b)}, -\frac{(-1+c)(a-1)}{(a-b)(-c+b)}, \frac{(b-1)(a-1)}{(-c+b)(a-c)} \right]$$

```
> restart;P:=t^3+t+1;discrim(P,t);
```

$$P := t^3 + t + 1$$

$$-31$$

```
> alias(a=RootOf(P));evala(3/(3*a^2+2*a+4));
```

$$a$$

$$\frac{11}{31} - \frac{17}{31} a + \frac{1}{31} a^2$$

<u>Exercice 10</u> : <u>Le problème des convives</u>.
n convives sont réunis autour d'une table ronde. Chacun choisit un nombre et le communique à ses voisins de droite et de gauche, puis chaque convive affiche la moyenne des deux nombres communiqués. A quelle condition sur *n* peut-on retrouver les nombres choisis ? Comment, dans ce cas, les retrouver ?

<u>Solution</u> : [*Le Monde*, juillet 2010, n° 681]

Notons $x_1, \dots, x_n$ les nombres choisis, $y_1, \dots, y_n$ les nombres affichés.

On a : $y_1 = \frac{x_2 + x_n}{2}$, $y_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, … , $y_{n-1} = \frac{x_{n-2} + x_n}{2}$, $y_n = \frac{x_{n-1} + x_1}{2}$,

c'est-à-dire M.X = Y, où $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, et $M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La question est de savoir pour quelles valeurs de *n* le système est cramérien.

<u>1$^{\text{ère}}$ méthode</u> : Comme M est carrée, il suffit que M soit injective, c'est-à-dire que M.X = 0 ⇒ X = 0.

Or M.X = 0 ⇔ $X = {}^t(a, b, -a, -b, a, b, \dots)$ et $x_n = -b$, $x_{n-1} = -a$.

Si *n* est multiple de 4, $X = {}^t(a, b, -a, -b, \dots, a, b, -a, -b)$ et Ker M est un plan.

Si $n \equiv 1 \bmod 4$, $X = {}^t(a, b, -a, -b, \dots, a, b, -a, -b, a)$, avec $a = -b = -a$; bref, Ker M = {0}.

Si $n \equiv 3 \bmod 4$, $X = {}^t(a, b, -a, -b, \dots, a, b, -a, -b, a, b, -a)$, avec $-a = -b = a$; bref, Ker M = {0}.

Si $n \equiv 2 \bmod 4$, $X = {}^t(a, b, -a, -b, \dots, a, b, -a, -b, a, b)$, avec $a = -a$ et $b = -b$; bref, Ker M = {0}.

M est injective ssi *n* n'est pas multiple de 4.

<u>2$^{\text{ème}}$ méthode</u> : $M = \frac{1}{2}(\Omega + \Omega^{-1}) = \frac{1}{2}(\Omega + \Omega^{n-1})$, avec $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La théorie des matrices cycliques, qui repose sur la diagonalisation de Ω, donne

$$\det M = \frac{1}{2^n} \prod_{z \in U_n} (z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2^n} \prod_{z \in U_n} (z+i)(z-i)/z = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} [i^n - 1][(-i)^n - 1] = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} | i^n - 1 |^2 .$$

La suite $n \to \det M$ est de période 4. A noter que $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{2k\pi}{n})$.

Variante : M est inversible ssi le polynôme $\frac{1}{2}(X + X^{n-1})$ est premier avec $X^n - 1$, polynôme minimal de Ω. Cela revient à dire que $X^{n-2} + 1$ est premier à $X^n - 1$. Or si z est racine commune des deux polynômes, $z = \pm i$, et alors 4 divise n. Et réciproquement.

Conclusion : On peut retrouver les nombres choisis si et seulement si n n'est pas multiple de 4.

Cette condition étant remplie, comment calculer M^{-1} ? Elle est à la fois cyclique et symétrique.

Il suffit d'écrire $M^{-1} = a_0.I + a_1.\Omega + \dots + a_{n-1}.\Omega^{n-1}$ et d'identifier…

3ème méthode : plus concrète et plus élémentaire, elle fournit en même temps la solution.

Observons d'abord que si A est une matrice carrée et si le système linéaire AX = Y permet de calculer X, la matrice A est forcément injective, donc bijective : il n'y a pas à faire la réciproque.

• Si $n \equiv 1 \pmod 4$, par exemple $n = 9$, il vient :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2 (y_2 + y_3 + y_6 + y_7)$$

Par soustraction, on tire x_9, et on en déduit les autres par permutation circulaire.

• Si $n \equiv 3 \pmod 4$, par exemple $n = 7$, il vient :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 (y_2 + y_3)$$

Par soustraction, on tire $x_5 + x_6 + x_7$.

Comme $x_5 + x_7 = 2y_6$, on en déduit x_6 , puis les autres par permutation circulaire.

• Si $n \equiv 2 \pmod 4$, par exemple $n = 10$, il vient :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2 (y_2 + y_3 + y_6 + y_7)$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 2 (y_3 + y_4 + y_7 + y_8)$$

Par soustraction, on tire $x_1 - x_9$. Comme $x_1 + x_9 = 2y_{10}$, on en déduit x_1 et x_9. Etc.

• Si $n \equiv 0 \pmod 4$, par exemple $n = 8$, il vient :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2 (y_2 + y_3 + y_6 + y_7)$$

On en déduit $y_1 + y_4 + y_5 + y_8 = y_2 + y_3 + y_6 + y_7$.

Si cette condition n'est pas remplie, le système est impossible ; donc il n'est pas cramérien.

(Mais il peut avoir des solutions pour certaines valeurs des y_i).

Exercice 11 : Résoudre et discuter le système :

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= a_1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + \dots + x_n &= a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \lambda x_n &= a_n \end{aligned}$$

Solution : On peut éviter tout recours aux déterminants, et raisonner élémentairement.
On suppose le corps de travail de caractéristique nulle.
Additionnons les n équations ; il vient :

$$(S) \qquad (\lambda + n - 1)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Supposons $\lambda \neq 1 - n$. Alors $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \frac{1}{\lambda+n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

Retranchons cette somme de la k-ème équation. Il vient :

$$(\lambda - 1).x_k = a_k - \frac{1}{\lambda+n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{\lambda+n-2}{\lambda+n-1} a_k - \frac{1}{\lambda+n-1} \sum_{i\neq k} a_i .$$

Si $\lambda \neq 1$, il vient $(\forall k)$ $x_k = \frac{1}{\lambda-1}\left[\frac{\lambda+n-2}{\lambda+n-1}a_k - \frac{1}{\lambda+n-1}\sum_{i\neq k} a_i\right]$.

Le système est alors cramérien, car il a au plus une solution ; en particulier, si tous les a_k sont nuls, tous les x_k aussi. On peut d'ailleurs aussi remonter les calculs.

• Si $\lambda = 1$, le système s'écrit $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 = a_2 = \dots = a_n$.
Il est facile à discuter :
– Si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, alors il est indéterminé : $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1$.
– Sinon, il est impossible.

• Si $\lambda = 1 - n$, la relation (S) s'écrit $0 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
– Si cette condition n'est pas remplie, le système est impossible.
– Si elle est remplie, la n-ème équation est redondante. Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} &= a_1 - x_n \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} &= a_2 - x_n \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + \lambda x_{n-1} &= a_n - x_n \end{aligned}$$

Il est cramérien en $(x_1, \dots, x_{n-1})$, et se résout comme ci-dessus.

Exercice 12 : Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + j.y + j^2.z = b \\ x + j^2.y + j.z = c \end{cases}$.

Généraliser.

Solution : Le déterminant de ce système est le Vandermonde $V(1, j, j^2)$; il est non nul.
Le système est donc cramérien. Pour le résoudre :

• additionnons les trois équations : il vient $x = \frac{1}{3}(a + b + c)$;

• multiplions la 2ème équation par j^2, la 3ème par j et additionnons : il vient $y = \frac{1}{3}(a + b\,j^2 + c\,j)$;

• multiplions la 3ème équation par j, la 3ème par j^2 et additionnons : il vient $z = \frac{1}{3}(a + b\,j + c\,j^2)$.

Au fond, la matrice $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}$ a pour inverse $V^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\overline{V}$.

Plus généralement, si $\omega = \exp\frac{2i\pi}{n}$ (ou toute autre racine primitive n-ème de l'unité), la matrice V $\in M_n(\mathbf{C})$ d'élément général $v_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}$ est la matrice de Vandermonde de $(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$.
Elle est inversible et a pour inverse $V^{-1} = \frac{1}{n}\overline{V}$.

Exercice 13 : Résoudre et discuter le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x + \lambda y - \lambda z - t = 0 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^2 z + t = 2/3 \\ x + \lambda^3 y - \lambda^3 z - t = 0 \\ x + \lambda^4 y + \lambda^4 z + t = 2/5 \end{cases}$$

Solution : [Source : J. Tuloup]
Plaçons-nous dans le corps des réels ou dans celui des complexes…

L'examen de ce système linéaire de 5 équations à 4 inconnues conduit à introduire les inconnues auxiliaires $a = x + t$, $b = x - t$, $c = y + z$, $d = y - z$.
Le système se scinde alors en deux sous-systèmes :

$$a + c = 2 \quad , \quad a + \lambda^2 c = 2/3 \quad , \quad a + \lambda^4 c = 2/5$$
$$b + \lambda d = 0 \quad , \quad b + \lambda^3 d = 0$$

• <u>Supposons</u> $\lambda \in \{ 0, 1, -1 \}$. On s'aperçoit dans les trois cas que le premier système est impossible.
• <u>Supposons</u> $\lambda \notin \{ 0, 1, -1 \}$.
Le second système étant de Cramer, $b = d = 0$.
Les deux premières équations du premier système donnent $a = \frac{2\lambda^2 - 2/3}{\lambda^2 - 1}$, $c = \frac{-4/3}{\lambda^2 - 1}$.
Reportant dans la troisième, il vient $-\frac{4}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$, c'est-à-dire $\lambda^2 = \frac{1}{5}$.
Si $\lambda^2 = \frac{1}{5}$, alors $a = \frac{1}{3}$, $c = \frac{5}{3}$. Sinon, c'est impossible.

<u>Conclusion</u> : Le système proposé n'a de solution que si $\lambda^2 = \frac{1}{5}$, et alors $x = t = \frac{1}{6}$, $y = z = \frac{5}{6}$.

Le cas des corps de caractéristique 2, 3, 5, ou dans lequels 5 n'est pas un carré, est laissé au lecteur…

<u>Exercice 14</u> : Résoudre et discuter dans **R** les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} \quad\quad - r.y + q.z = a \\ r.x \quad\quad - p.z = b \\ - q.x + p.y \quad\quad = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \quad\quad - r.y + q.z = a \\ r.x \quad\quad - p.z = b \\ - q.x + p.y \quad\quad = c \\ p.x + q.y + r.z = d \end{cases}$$

<u>Solution</u> : On peut résoudre ces systèmes, soit par voie algébrique, soit par voie géométrique, car on reconnaît dans les premiers membres un produit vectoriel.
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé direct, $\vec{\omega}$ le vecteur (p, q, r), $\vec{a}$ le vecteur (a, b, c). Le premier système s'écrit $\vec{\omega} \wedge \vec{x} = \vec{a}$ (1).
Autrement dit $f(\vec{x}) = \vec{a}$, où f est l'endomorphisme $\vec{x} \to \vec{\omega} \wedge \vec{x}$ de E.
Le noyau de f est la droite vectorielle $D = \mathbf{R}.\vec{\omega}$. L'image de f est incluse dans le plan $P = D^{\perp}$ perpendiculaire à D ; en vertu du théorème du rang, elle est égale à ce plan. D'où la discussion :
• Si $\vec{\omega}.\vec{x} = ap + bq + cr \neq 0$, l'équation (1) est sans solution.
• Si $\vec{\omega}.\vec{x} = ap + bq + cr = 0$, l'équation (1) a pour solutions les vecteurs d'une droite affine de E.
Il est loisible de chercher celle des solutions qui appartient à P, supplémentaire du noyau.
$\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{\omega}$ et à $\vec{a}$, donc colinéaire à $\vec{\omega} \wedge \vec{a}$: $\vec{x} = \alpha(\vec{\omega} \wedge \vec{a})$.
Reportant dans (1) et utilisant la formule du double produit vectoriel, il vient :
$\alpha.\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{a}) = \alpha.[(\vec{\omega}.\vec{a}).\vec{\omega} - (\vec{\omega}.\vec{\omega}).\vec{a}] = -\alpha.(\vec{\omega}.\vec{\omega}).\vec{a}$, d'où :
$\vec{x} = \frac{-1}{\|\vec{\omega}\|^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{a})$. Les solutions de (1) sont donc : $\vec{x} = \frac{-1}{\|\vec{\omega}\|^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{a}) + \lambda.\vec{\omega}$.

Autrement dit $(x, y, z) = \left(\frac{br - cq}{p^2+q^2+r^2}, \frac{cp - ar}{p^2+q^2+r^2}, \frac{aq - bp}{p^2+q^2+r^2}\right) + \lambda.(p, q, r)$, où λ décrit **R**.
Pour résoudre le second système il suffit de reporter le résultat dans la 4ème équation.
$\vec{\omega}.\vec{x} = d$ conduit à $\lambda = \frac{d}{\|\vec{\omega}\|^2}$. Ainsi, $\vec{x} = \frac{-1}{\|\vec{\omega}\|^2}(\vec{\omega} \wedge \vec{a}) + \frac{d}{\|\vec{\omega}\|^2}\vec{\omega}$ (sous réserve que $\vec{\omega}.\vec{x} = 0$).

Exercice 15 : Trouver les triplets (x, y, z) ∈ $\mathbf{Z}^3$ tels que :

$$\begin{cases} x - 2y + z \equiv 5 \pmod{13} \\ 2x + 2y \equiv 7 \pmod{13} \\ 5x - 3y + 4z \equiv 1 \pmod{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y + z \equiv a \pmod{29} \\ -2x + y + 2z \equiv b \pmod{29} \\ x - y - 3z \equiv c \pmod{29} \end{cases}$$

Solution :

Si l'on passe dans **Z**/13**Z**, resp. **Z**/29**Z**, on tombe sur deux systèmes linéaires à coefficients et inconnues dans un corps commutatif… Et alors, le tour est joué.

Exercice 16 : Trouver les triplets (x, y, z) ∈ **Z**×**Z**×**Z** tels que :

$$\begin{cases} 3.x + y - 7.z \equiv 10 \pmod{143} \\ 23.x + 2.y - z \equiv 15 \pmod{143} \\ 2.x - 5.y + 6.z \equiv 12 \pmod{143} \end{cases}$$

Solution : C'est un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues dans **Z**/143**Z**.

Hélas, 143 = 11×13 n'est pas premier, donc **Z**/143**Z** n'est pas un corps. On peut :

– soit éclater le système en 2 systèmes, modulo 11 et 13 : **Z**/11**Z** et **Z**/13**Z** sont des corps, et on est donc dans le cadre du cours. Les 2 systèmes étant cramériens, il reste à utiliser le théorème chinois.

– soit généraliser la théorie des matrices, des systèmes linéaires et des formules de Cramer aux anneaux commutatifs. On note que la matrice du système est inversible dans M_3(**Z**/143**Z**) car elle a un déterminant inversible dans **Z**/143**Z**. On peut alors utiliser les formules de Cramer.

– soit noter que le système est cramérien dans **Q**, et le résoudre dans ce corps. Mais alors comment revenir à **Z**/143**Z** ? Ce n'est pas facile, et il faut y réfléchir…

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[3,1,-7,23,2,-1,2,-5,6]);b:=array([10,15,12]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 23 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad b := [10, 15, 12]$$

```
> X:=linsolve(A,b);Y:=[X[1] mod 143,X[2] mod 143, X[3] mod 143];
```

$$X := \left[\frac{661}{714}, \frac{-1408}{357}, \frac{-67}{42}\right] \qquad Y := [54, 99, 138]$$

```
> Linsolve(A,b) mod 11;Linsolve(A,b) mod 13;
```

$$[10, 0, 6] \qquad [2, 8, 8]$$

```
> chrem([10,2],[11,13]);chrem([0,8],[11,13]);chrem([6,8],[11,13]);
```

$$54 \qquad 99 \qquad 138$$

```
> Linsolve(A,b) mod 143;
```

$$[54, 99, 138]$$

Exercice 17 : 1) Résoudre le système suivant, sachant qu'il est de rang 2 :

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0$$
$$a'x + b'\,y + c'\,z = 0$$

2) Plus généralement, résoudre le système suivant, lorsqu'il est de rang $n - 1$:

$$(S) \begin{cases} a_{11}.x_1 + \dots + a_{1n}.x_n = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n-1,1}.x_1 + \dots + a_{n-1,n}.x_n = 0 \end{cases}$$

Solution :

1) La solution de ce système forme une droite vectorielle de $\mathbf{K}^3$, intersection de deux plans.

Complétons la matrice $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$ en une matrice inversible A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$.

Ecrivons que A.^{t}com A = I ; il vient $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & bc'-cb' \\ * & * & ca'-ac' \\ * & * & ab'-ba' \end{bmatrix}$ = I .

<u>Conclusion</u> : S = { (λ(*bc' – cb'*), λ(*ca' – ac'*), λ(*ab' – ba'*)) ; $\lambda \in$ **K** } .

Géométriquement, si l'on est dans $\mathbf{R}^3$ euclidien orienté, il s'agit de trouver les vecteurs orthogonaux à deux vecteurs donnés $\vec{u}$ (*a*, *b*, *c*) et $\vec{v}$ (*a'*, *b'*, *c'*) : ce sont les vecteurs colinéaires à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2) Ici aussi, la solution est une droite vectorielle de $\mathbf{K}^n$, intersection de $n - 1$ hyperplans associés à des formes linéaires indépendantes.

Complétons la matrice $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}$ en une matrice inversible A = $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$.

Notons $A_1, \dots, A_n$ les cofacteurs de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans A.

Ecrivons que A.^{t}com A = I ; il vient $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & \dots & A_1 \\ * & \dots & \dots \\ * & \dots & A_n \end{bmatrix}$ = I .

<u>Conclusion</u> : S = { ($\lambda A_1, \dots, \lambda A_n$) ; $\lambda \in$ **K** }

Géométriquement, si l'on est dans $\mathbf{R}^n$ euclidien orienté, il s'agit de trouver les vecteurs orthogonaux à $n - 1$ vecteurs libres donnés : ce sont les vecteurs colinéaires à leur produit vectoriel.

<u>Exercice 18</u> : **<u>Systèmes linéaires tridiagonaux</u>**.

On considère les deux systèmes linéaires :

$$\begin{cases} 2.x_1 - x_2 = b_1 \\ -x_1 + 2.x_2 - x_3 = b_2 \\ \dots \\ -x_{n-2} + 2.x_{n-1} - x_n = b_{n-1} \\ -x_{n-1} + 2.x_n = b_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = c_0 \\ x_0 - 2.x_1 + x_2 = c_1 \\ x_1 - 2.x_2 + x_3 = c_2 \\ \dots \\ x_{n-2} - 2.x_{n-1} + x_n = c_{n-1} \\ x_{n-1} - 2.x_n + x_{n+1} = c_n \\ x_{n+1} = c_{n+1} \end{cases}$$

1) Montrer que ces deux systèmes sont cramériens. 2) Les résoudre par différentes méthodes.

<u>Solution</u> : **0) <u>Généralités</u>.**

Ces deux systèmes se rencontrent lors de la discrétisation d'équations différentielles linéaires du second ordre. En effet l'équation différentielle y''(x) = *f*(x) , y(0) = a , y(1) = b, se discrétise en :

$$y(0) = a \ , \ y\left(\frac{i-1}{n+1}\right) - 2\,y\left(\frac{i}{n+1}\right) + y\left(\frac{i+1}{n+1}\right) = f\left(\frac{i}{n+1}\right) \ (1 \le i \le n) \ , \ y(1) = b.$$

Il y a un lien évident entre ces systèmes, le second ne faisant qu'ajouter des équations fictives au premier. Cependant, le premier a l'avantage d'avoir une matrice symétrique réelle, le second d'autoriser l'introduction d'inconnues auxiliaires. Nous allons les résoudre indépendamment l'un de l'autre, par de nombreuses méthodes. Notons A_n la matrice du premier système, B_n celle du second.

1) <u>Résolution du premier système</u>.

a) On peut calculer $D_n = \det A_n$ par la technique usuelle des tridiagonaux.

On a $D_1 = 2$, $D_2 = 3$ et $D_n = 2.D_{n-1} - D_{n-2}$. Finalement $D_n = n + 1$.

b) A_n est symétrique définie positive.

Cela peut se déduire du calcul précédent via le critère de Jacobi-Sylvester.

Mais cela peut aussi se montrer directement. En effet si $X \in \mathbf{R}^n$

$$ {}^tX.A_n.X = (x_1)^2 + (x_n)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tX.A_n.X = 0 \Leftrightarrow X = 0 . $$

La décomposition en carrés de Gauss fournit un résultat différent :

$$ {}^tX.A_n.X = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}.(x_k - \frac{k}{k+1}x_{k+1})^2 + \frac{n+1}{n}(x_n)^2 . $$

c) Factorisation LU et décomposition de Cholesky de A_n .

$$ A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -2/3 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -n/(n+1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 4/3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & (n+1)/n \end{bmatrix} $$

$$ A_n = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -\sqrt{2/3} & \sqrt{4/3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{(n-1)/n} & \sqrt{(n+1)/n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{1/2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{2/3} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\sqrt{(n-1)/n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{(n+1)/n} \end{bmatrix} $$

On en déduit A^{-1} et la résolution du 1^er^ système.

d) On peut aussi calculer A^{-1} à l'aide de la comatrice. C'est pénible mais faisable : il faut distinguer les cofacteurs des éléments diagonaux et non diagonaux.

2) Résolution du second système.

a) Ce système est cramérien, car le système homogène associé a pour seule solution 0.

En effet si $c_i = 0$ pour tout i, la fonction $i \in \{0, \dots, n+1\} \to x_i$ est affine nulle en 0 et $n+1$, donc nulle.

b) Résolution par superposition.

Prendre tour à tour $c = (c_0 , c_1 , \dots, c_{n+1}) = (1, 0 , \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, …, $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, et enfin $(0, \dots , 0, 1)$, puis conclure par linéarité.

• Si $c = (1, 0 , \dots, 0)$, (x_i) est récurrente linéaire : $x_i - 2.x_{i+1} + x_{i+2} = 0$, donc affine : $x_i = a + bi$, et finalement $\quad x_i = 1 - \frac{i}{n+1} \quad (0 \leq i \leq n + 1)$

• Si $c = (0, 1, 0 , \dots, 0)$, $(x_i)_{i\geq 1}$ est affine : $x_i = a + bi$ et finalement

$$ x = (0 , -1 + \frac{1}{n+1} , -1 + \frac{2}{n+1} , \dots, -1 + \frac{n}{n+1} , 0). $$

• Si $c = (0, \dots, 0, 1, 0 , \dots, 0)$, 1 à la i-ème place, alors les suites $(x_j)_{j\leq i}$ et $(x_j)_{j\geq i}$ sont affines.

Les conditions aux limites permettent d'achever le calcul.

On trouve $\quad x_j = (-1 + \frac{i}{n+1}).j \quad (0 \leq j \leq i)$ et $x_j = i.(-1 + \frac{j}{n+1}) \quad (i \leq j \leq n + 1)$

• Si $c = (0, \dots, 0, 1)$, (x_i) est récurrente linéaire : $x_i - 2.x_{i+1} + x_{i+2} = 0$, donc affine : $x_i = a + bi$, et finalement : $\quad x_i = \frac{i}{n+1} \quad (0 \leq i \leq n + 1)$.

c) Résolution par inconnues auxiliaires.

Posons $y_i = x_i - x_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n$. Le système s'écrit alors

$$ x_0 = c_0 , \quad y_0 - y_1 = c_1 , \quad y_1 - y_2 = c_2 , \dots , \quad y_{n-1} - y_n = c_{n-1} , \quad x_{n+1} = c_{n+1} . $$

Conclusion : $x_0 = c_0$, $x_{n+1} = c_{n+1}$, et pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$x_i = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right).c_0 + \left(-1 + \frac{i}{n+1}\right).c_1 + \left(-1 + \frac{i}{n+1}\right).2c_2 + \dots + \left(-1 + \frac{i}{n+1}\right).ic_i$$
$$+ \left(-1 + \frac{i+1}{n+1}\right).ic_{i+1} + \dots + \left(-1 + \frac{n}{n+1}\right).ic_n + \frac{i}{n+1}c_{n+1}.$$

Exercice 19 : On se place dans $M_{n,p}(\mathbf{R})$. On suppose donnés les coefficients des quatre bords d'une matrice a_{i1} et a_{ip} pour $1 \leq i \leq n$, a_{1j} et a_{nj} pour $1 \leq j \leq p$. Montrer qu'il existe une unique matrice A $\in$ $M_{n,p}(\mathbf{R})$ telle que $\forall(i, j) \in \{ 2, \dots, n-1 \}\times\{ 2, \dots, p-1 \}$ $a_{ij} = \frac{1}{4}(a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1})$.

Solution : [Oral ENS 2006, RMS n° 28, Oral X PC 2009, RMS n° 311, notamment !]
Une matrice vérifiant les propriétés voulues sera dite « harmonique ». Ces matrices forment un sous-espace vectoriel de $M_{n,p}(\mathbf{R})$.
Les données sont les $2n + 2p - 4$ valeurs prises par A sur le « bord ».
Les inconnues sont les $(n - 2)\times(p - 2)$ valeurs a_{ij} prises par A à l' « intérieur » du rectangle.
Il y a autant d'équations que d'inconnues.
Après indexation convenable des a_{ij} (par exemple dans l'ordre lexicographique), ces équations se présentent sous la forme d'un système M.X = Y, où X est le vecteur colonne des inconnues, Y le vecteur-colonne obtenu à partir des valeurs de A sur le bord, et enfin M est une matrice carrée d'ordre $N = (n - 2)\times(p - 2)$ taille.
Il s'agit de montrer que le système M.X = Y est cramérien.
Pour cela, il suffit de montrer que $M.X = 0 \Rightarrow X = 0$.
En d'autres termes, si une matrice harmonique prend des valeurs nulles sur la bord, elle est nulle.
Cela découle de ce qu'une matrice harmonique atteint son maximum et son minimum sur le bord. En effet, si $a_{hk} = \max a_{ij}$ est atteint à l'intérieur du rectangle, alors $a_{ij} = a_{hk}$ en les 4 points voisins, et de proche en proche, $a_{ij} = a_{hk}$ en un point du bord.

<u>Remarque</u> : La matrice M n'est pas quelconque : elle est symétrique réelle, et après réduction au même dénominateur contient des 4 sur la diagonale, au plus 4 éléments égaux à -1 sur chaque ligne ; c'est donc une matrice « creuse », car elle contient beaucoup de 0. Elle n'est pas toujours diagonalement dominante, mais elle obéit aux hypothèses d'un théorème de Hadamard-Frobenius (ou de Olga Taussky) plus général que le théorème de Hadamard, donc elle est inversible.
Il existe une abondante littérature sur ce sujet classique que l'on pourrait dénommer le « problème de Dirichlet discret » ; cf. notamment le problème d'ENS 1986.

Philip Gladstone, Scholar's bath