TD 1 : Hydrostatique CORRIGE

par B.BRANGEON
2010-2011
Cours A.BASTIDE 2010-2011.

Exercice 1 : On considère deux récipients A et B reliés par un tube $ACDB$. Les récipients A et B ainsi que les portions AC et DB du tube contiennent de l'eau. La portion CD contient du mercure. On connait : $P_A = 28\ bars$, $P_B = 14\ bars$, $l = 2\ m$.

Déterminer la dénivellation $h = z_C - z_D$ du mercure.

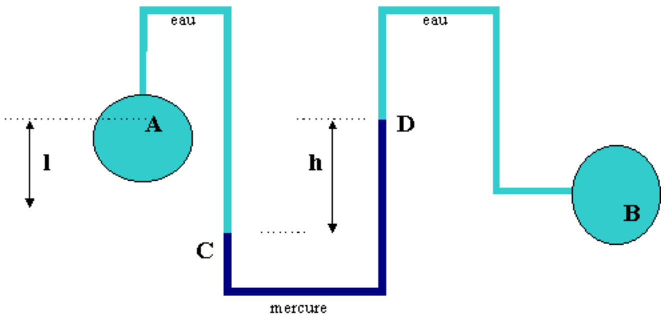

Figure 1 – Système

Corrigé :

Appliquons la loi de l'hydrostatique entre A et C, C et D puis D et B :

$$\begin{aligned} P_A + \rho_{eau} g z_A &= P_C + \rho_{eau} g z_C \\ P_C + \rho_{Hg} g z_C &= P_D + \rho_{Hg} g z_D \\ P_D + \rho_{eau} g z_D &= P_B + \rho_{eau} g z_B \end{aligned}$$

Effectuons ensuite la somme de ces trois équations membre à membre. Les pressions en C et D s'annulent et en remplaçant $z_A - z_B$ par l et $z_D - z_C$ par h, on en déduit le résultat suivant :

$$h = \frac{P_B - P_A - \rho_{eau} g l}{g(\rho_{eau} - \rho_{Hg})}$$

Application numérique : $h = 11,51\ m$

Exercice 2 : Dans le circuit ci-dessous, **calculer la pression en A**.

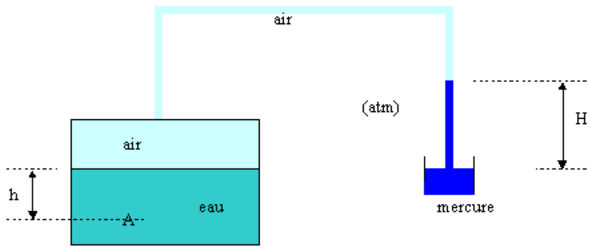

FIGURE 2 – Circuit

Données : $H = 34,3\ cm$, $h = 53\ cm$, $\rho_{eau} = 1,05\ 10^3\ kg.m^{-3}$ et $\rho_{mercure} = 13,57\ 10^3\ kg.m^{-3}$.

Corrigé :

Pour appliquer la loi de l'hydrostatique, la règle d'or est de choisir correctement les points entre lesquels la loi sera appliquée. Il suffit de prendre ces points dés qu'il y a une interface (liquide-liquide, liquide-gaz ou liquide-solide).

Dans l'exemple qui nous intéresse, appelons :
- B un point situé à l'interface eau-air dans la cuve de gauche,
- C un point situé à l'interface air-mercure dans la conduite reliant la cuve au réservoir de mercure,
- D un point situé à l'interface mercure-air sur la surface libre du réservoir de mercure.

D'aprés l'énoncé, on connait :

$$\begin{aligned} P_D &= P_{atm} \\ z_B - z_A &= h \\ z_C - z_D &= H \end{aligned}$$

Appliquons la loi de l'hydrostatique entre A et B, B et C, C et D :

$$\begin{aligned} P_A + \rho_{eau} g z_A &= P_B + \rho_{eau} g z_B \\ P_B + \rho_{air} g z_B &= P_C + \rho_{air} g z_C \\ P_C + \rho_{Hg} g z_C &= P_D + \rho_{Hg} g z_D \end{aligned}$$

En effectuant la somme de ces trois équations et en considérant que $\rho_{air} = 0$, on en déduit le résultat :

$$P_A = P_{atm} + g(h\rho_{eau} - H\rho_{Hg})$$

Application numérique : $P_A = 6.10^4$ Pa.

Exercice 3 : **Que vaut la pression atmosphérique quand le baromètre à mercure indique** $742\ mm$?

Corrigé :

On définit le point A à l'interface entre le vide et le mercure et le point B entre le mercure et l'atmosphère. On a donc $P_A = 0$ et $P_B = P_{atm}$. Par ailleurs, $z_A - z_B = H$. La loi de l'hydrostatique appliquée entre A et B :

$$P_A + \rho_{Hg} g z_A = P_B + \rho_{Hg} g z_B$$

conduit au résultat :

$$P_{atm} = \rho_{Hg} g H$$

Application numérique : $P_{atm} = 0.99$ bar.

Exercice 4 :

Quelle est la pression dans l'océan à une profondeur $H = 1500\ m$?
On prendra $\rho = 1005\ kg.^{-3}$ (eau salée).

Corrigé :

Appliquons la loi de l'hydrostatique entre le point A situé à la surface de la mer et le point B situé à une profondeur H :

$$P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B$$

avec $P_A = P_{atm}$ et $z_A - z_B = H$.

On en déduit que : $P_B = P_{atm} + \rho g H$
Application numérique : $P_B = 148,9$ bars.

Exercice 5 : On considère un réservoir circulaire (diamètre $d = 1\ m$). Un piston repose sur la surface libre de l'huile (densité $d_H = 0,86$) qui remplit le réservoir et le tube (pas de frottement et étanchéité parfaite entre le piston et le réservoir). Le manomètre donne la pression absolue à l'extrémité du tube : 2 bars.

On connait : $h = 10\ m$.
Déterminer la masse du piston.

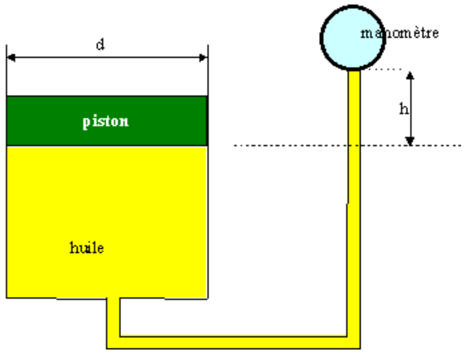

FIGURE 3 – Réservoir circulaire.

Corrigé :

Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique (dans le cas d'un fluide) ou loi de la mécanique (dans le cas d'un solide) :

Nom du point	Location du point
Point A	Interface air / piston
Point B	Interface piston / huile
Point C	Extrémité du tube (pression donnée par le manomètre)

Entre A et B : La pression en B résulte de la pression en A plus de celle due au poids du piston.

Entre B et C : On applique la loi de l'hydrostatique :

$$P_B + \rho_{huile} g z_B \quad = \quad P_C + \rho_{huile} g z_C$$

On connaît P_C, $P_A = P_{atm}$ et $z_C - z_B = h$. On en déduit la valeur de M :

$$M = \frac{\pi d^2}{4g}(P_C + \rho_{huile} g h - P_{atm})$$

avec : $\rho_{huile} = \rho_{eau} d_H$.

Application numérique : $M = 14,76$ tonnes.

Exercice 6 : Le tube en U contient du mercure (densité 13,57). Densité de l'huile : 0,75. **Quelle est la pression au manomètre ?**

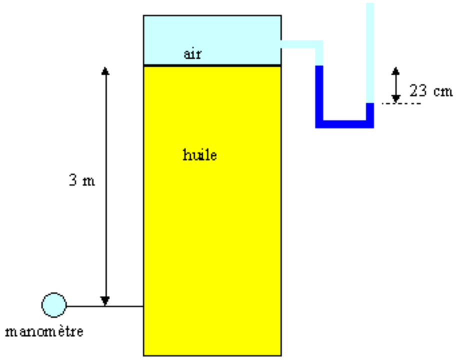

FIGURE 4 – Tube en U.

Corrigé :

Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique :

Nom du point	Location du point
Point A	Dans l'huile au niveau du manomètre
Point B	Interface huile / air
Point C	Interface air / mercure
Point D	Interface mercure / atmosphère

$$\begin{aligned} P_A + \rho_{eau} g z_A &= P_B + \rho_{eau} g z_B \\ P_B + \rho_{air} g z_B &= P_C + \rho_{air} g z_C \\ P_C + \rho_{Hg} g z_C &= P_D + \rho_{Hg} g z_D \end{aligned}$$

Application de la loi de l'hydrostatique :

$$\begin{aligned} P_A + \rho_{huile} g z_A &= P_B + \rho_{huile} g z_B \\ P_B + \rho_{air} g z_B &= P_C + \rho_{air} g z_C \\ P_C + \rho_{Hg} g z_C &= P_D + \rho_{Hg} g z_D \end{aligned}$$

On connaît P_A, $P_C = P_{atm}$, $z_B - z_A = H$, $z_C - z_D = h$ et $\rho_{air} = 0$. En effectuant la somme des trois équations ci-dessus, on en déduit la valeur de la pression en A :

$$P_A = P_{atm} - \rho_{Hg} g h + \rho_{huile} g H$$

avec : $\rho_{huile} = d_{huile} \rho_{eau}$ et $\rho_{Hg} = d_{Hg} \rho_{eau}$

Application numérique : ($H = 3$ m, $h = 23$ cm, $P_{atm} = 105$ Pa, $g = 9,81$ m^2 s^{-1}) $P_A = 6,9610^4$ Pa.

Exercice 7 : Dans le baromètre schématisé ci-dessous, **déterminer la relation entre la pression absolue P du vide partiel et la hauteur H**.

Quelle est la valeur maximale de H ?

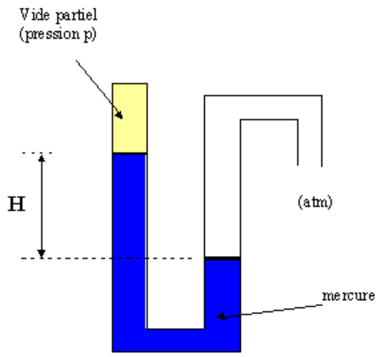

FIGURE 5 – Baromètre schématisé.

On a : $p_{atm} = 1,013\ bar$, $g = 9,81\ m.s^{-2}$, $\rho = 13600\ kg.m^{-3}$

Corrigé :

Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique :

Nom du point	Location du point
Point A	Interface vide / mercure
Point B	Interface mercure / atmosphère

Application de la loi de l'hydrostatique :

$$P_A + \rho_{Hg} g z_A \quad = \quad P_B + \rho_{Hg} g z_B$$

On connaît $P_A = P$, $z_A - z_B = H$ et $P_B = P_{atm}$. On en déduit le résultat :

$$H = \frac{P_{atm} - P}{\rho_{Hg} g}$$

La valeur maximale de H est obtenue pour $P = 0$:

Application numérique : ($\rho_{Hg} = 13600$ kg.m^{-3}, $P_{atm} = 10^5$ Pa, $g = 9,81$ m^2 s^{-1}) $H_{max} = 0,75$ m.

Exercice 8 : On considère le manomètre constitué d'un réservoir de section $S_1 = 80\ cm^2$ et d'un tube de section $S_2 = 0,8\ cm^2$. Quand on applique la pression effective p, le niveau monte dans le tube : $h = 20\ cm$.

Quelle est l'erreur commise sur la détermination de la pression effective p en négligeant l'abaissement du niveau du réservoir ?

Corrigé :

Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique :

Nom du point	Location du point
Point A	Interface air à la pression P / mercure
Point B	Interface mercure / atmosphère

Application de la loi de l'hydrostatique :

$$P_A + \rho_{Hg} g z_A \quad = \quad P_B + \rho_{Hg} g z_B$$

On connaît $P_A = P + P_{atm}$, $z_A - z_B = h + h'$ où h' est l'abaissement de la surface de mercure dans la section S_1 et $P_B = P_{atm}$. On en déduit le résultat :

$$P = \rho_{Hg} g (h + h')$$

Le volume de mercure qui manque dans la section S_1 est égal à celui apparu dans la section S_2. Cela se traduit par : $h' S_1 = h S_2$. On en déduit que :

$$P = \rho_{Hg} g h (1 + \frac{S_2}{S_1})$$

Si on néglige l'abaissement du niveau du réservoir ($h' = 0$), on trouve $P_{approx} = \rho_{Hg} g h$. L'erreur commise est :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P - P_{approx}}{P_{approx}} = \frac{S_2}{S_1}$$

Application numérique :

$$\frac{\Delta P}{P} = 1\%$$