Solution Examen Analyse II Session Juin 2019

Exercice 1

Solution

$(L) : x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$

Solution homogène de $(H) : x^3y' + (2-3x^2)y = 0$. *Pour* $x \neq 0$, *on a* $y' = -\frac{2-3x^2}{x^3}$.

Donc $y_H(x) = ke^{\int -\frac{2-3x^2}{x^3}} = ke^{\frac{1}{x^2}}e^{3\ln|x|} = k|x|^3e^{\frac{1}{x^2}}$

On cherche une solution sous la forme (Variation de la constante) $y(x) = k(x)x^3e^{\frac{1}{x^2}}$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient

$$k'(x)x^3e^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

ce qui donne $k(x) = \int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + C$

donc

$$\Psi(x) = k(x)x^3e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}x^3$$

Exercice 2

a) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Correction... On utilise le critère de Cauchy.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\sim_{+\infty} \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

Donc $\sum u_n$ converge.

$$u_n = \frac{2\sqrt{n}+\cos(n)}{\ln(n)+n^2}.$$

Sol.: *On a $u_n \geq 0$ pour tout n et*

$$u_n \sim \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann avec coefficient $3/2 > 1$), donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

$$\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n^3)}.$$

Sol.: *Attention, la série n'est pas absolument convergente et ce n'est pas non plus une série alternée car le terme général n'est pas décroissant en valeur absolue. On effectue un développement limité:*

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n+2\sin(n^3)} &= \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+2\sin(n^3)/n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\mathcal{O}\Big(\frac{2\sin(n^3)}{n}\Big)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge car c'est une série alternée. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), donc la série étudiée converge.

Exercice 3

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$
Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, on vient de montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et par conséquent simplement sur $\mathbb{R}$

2. Les fonctions f_n sont continues, elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonctions continue.

3. La convergence étant uniforme sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions f_n étant continues donc intégrables on a
$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx$$
On calcule
$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n^3}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^4}(-\cos(n\pi)+1) = \frac{1}{n^4}(1-(-1)^n)$$
Selon que n est pair ou impair $1-(-1)^n$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux
$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p}}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^4} = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^4}$$
Puis on pose $n = p+1$, $p = 0 \Rightarrow n = 1$
$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}$$
C'est bien l'égalité demandé.

4. Les fonctions f_n sont dérivables, $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement il reste à montrer que la série de fonction de terme général f_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$
La série de fonction de terme général f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des séries
$$f'(x) = \sum^{+\infty} f_n'(x) = \sum^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Exercice 4

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^n.$$

Sol.: *On utilise les développements limités* $\cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2)$ *et* $\ln x = 1 + \mathcal{O}(x)$ *lorsque* $x \to 0$.

$$a_n = e^{n\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)} = e^{n\ln\left(1+\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right)} = e^{n\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})} = e^{\mathcal{O}(\frac{1}{n})} \to e^0 = 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Par comparaison, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est le même que pour la série entière* $\sum_{n\geq 0} x^n$, *c'est-à-dire* $R = 1$.

2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}.$$

1) La fraction rationnelle se décompose en éléments simples. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2}\right).$$

Il apparaît la somme de deux séries géométriques, la première de rayon de convergence 1 et la seconde de rayon de convergence 2. Il en résulte que la somme admettra $R = 1$ comme rayon de convergence. Alors, pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

2) Le partie régulière du développement limité à l'ordre 3 de la fonction f n'est autre que la somme partielle d'ordre 3 de la série, donc

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{3}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + \circ(x^3) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \circ(x^3).$$