**Correction de Série n°1**
– Espace mètrique –

---

**Exercice 1**
Soient les fonctions du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par:

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2| \quad N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

si $x$ a pour coordonnées $(x_1; x_2)$.

1°) Vérifier que $d_i(x, y) = N_i(x - y)$ est une distance de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.

2°) Dessiner la boule centrée en l'origine et de rayon 1 pour chacune de ces distances.

3°) Montrer que ces distances sont équivalentes (on pourra montrer que.

$$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 2N_\infty(x), \quad \text{et} \quad N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{2}N_\infty(x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$)

**correction 1**
Soient les fonctions du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par:

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2| \quad N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

1°) On Vérifie que $d_i(x, y) = N_i(x - y)$ est une distance de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.
- On a $\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad N_i(x) \geq 0$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$ alors $d_i(x, y) \geq 0$, pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.
- por $i = 1, 2$ ou $\infty$.ona
$N_i(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$
Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.

$$\begin{aligned} d_i(x, y) = 0 &\iff N_i(x - y) = 0 \\ &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

Donc $d_i(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.

- D'autre part on a $N_i(-x) = N_i(x)$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.
Alors en déduit que:

$$\begin{aligned} d_i(x, y) &= N_i(x - y) \\ &= N_i(y - x) \\ &= d_i(y, x) \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad d_i(x, y) = d_i(y, x)$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.

- il reste de vérifier l'inégalité triangulaire.
Don il suffit de montrer que :
$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad N_i(x + y) \leq N_i(x) + N_i(y)$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.

- pour $i = 1$
On a
$N_1(x+y) = \mid x_1+y_1 \mid + \mid x_2+y_2 \mid \leq \mid x_1 \mid + \mid y_1 \mid + \mid x_2 \mid + \mid y_2 \mid = N_1(x) + N_2(y)$
Donc
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y)$$

- pour $i = \infty$
On a
$N_\infty(x+y) = \max(\mid x_1+y_1 \mid, \mid x_2+y_2 \mid)$
Alors
$\mid x_1+y_1 \mid \leq \mid x_1 \mid + \mid y_1 \mid \leq \max(\mid x_1 \mid, \mid x_2 \mid) + \max(\mid y_1 \mid, \mid y_2 \mid) = N_\infty(x) + N_\infty(y)$
De même
$\mid x_2+y_2 \mid \leq \mid x_2 \mid + \mid y_2 \mid \leq \max(\mid x_1 \mid, \mid x_2 \mid) + \max(\mid y_1 \mid, \mid y_2 \mid) = N_\infty(x) + N_\infty(y)$
En fin
$$N_\infty(x+y) = \max(\mid x_1+y_1 \mid, \mid x_2+y_2 \mid) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$$
Donc
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad N_\infty(x+y) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$$

- pour $i = 2$
On a
$N_2(x+y) = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2}$

D'ou
$$\begin{array}{rcl} N_2(x+y)^2 & = & (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 \\ & = & x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ & = & N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \end{array}$$

d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^2$
$$\sum_{i=1}^{2} x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^{2} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \times (\sum_{i=1}^{2} y_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Donc
$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \times (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}$$
Alors
$$2(x_1y_1 + x_2y_2) \leq 2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \times (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} = 2N_2(x)N_2(y)$$
D'ou
$$N_2(x+y)^2 \leq N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2N_2(x)N_2(y) = (N_2(x) + N_2(y))^2$$
finallement
$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y)$$
Alors pour $i = 1, 2$, ou $\infty$
$$N_i(x+y) \leq N_i(x) + N_i(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$
- Soient $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$
on a $x - y = (x - z) + (z - y)$
D'ou
$$\begin{array}{rcl} d_i(x,y) & = & N_i(x-y) \\ & = & N_i[(x-z) + (z-y)] \\ & \leq & N_i(x-z) + N_i(z-y) \\ & = & d_i(x,z) + d_i(z,y). \end{array}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$
$$d_i(x,y) \leq d_i(x,z) + d_i(z,y), \quad \text{pour} i = 1, 2, \text{ou} \infty$$

finallement $d_i(x,y) = N_i(x-y)$ est une distance de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$, ou $\infty$.$\square$

2°) On dessinent la boule centrée en l'origine (ie $(0,0)$) et de rayon 1 pour chacune de ces distances.

- pour $N_1$

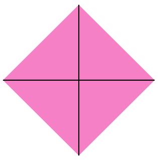
On a $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2|$$

Alors

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 / N_1(x) \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 / |x_1| + |x_2| \leq 1\} \end{aligned}$$

est un losange



La boule $B((0,o),1)$ pour la distance $d_1$.

- pour $N_\infty$

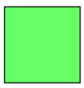
On a $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$N_\infty(x) = \max(|x_1| + |x_2|)$$

Alors

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 / N_\infty(x) \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 / \max(|x_1| + |x_2|) \leq 1\} \end{aligned}$$

est un Carré



La boule $B(0,0),1)$ pour la distance $d_\infty$.

- pour $N_2$

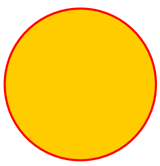
On a $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Alors

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 / N_2(x) \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

est un un disque de centre l'origine et de rayon 1



La boule $B((0,0),1)$ pour la distance $d_2$.

3°) On montrons que les distances $d_i$ sont équivalentes pour $i = 1, 2$ ou $\infty$.
du poura montrer que

$$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 2N_\infty(x), \quad \text{et} \quad N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{2}N_\infty(x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$

-Montrons d'abord que $N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 2N_\infty(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
comme $|x_1| \leq |x_1| + |x_2|$ et $|x_2| \leq |x_1| + |x_2|$
Alors $\max(|x_1|, |x_2|) \leq |x_1| + |x_2| = N_1(x)$
Donc

$$\boxed{N_\infty(x) \leq N_1(x) \qquad 1}$$

d'autre part: $|x_1| \leq \max(|x_1|, |x_2|)$ et $|x_2| \leq \max(|x_1|, |x_2|)$
alors $|x_1| + |x_2| \leq 2\max(|x_1|, |x_2|)$
Donc

$$\boxed{N_1(x) \leq 2N_\infty(x) \qquad 2}$$

d'aprés 1 et 2 Ona

$$\boxed{N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 2N_\infty(x)}$$

On en conclut que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{d_\infty(x) \leq d_1(x) \leq 2d_\infty(x)}$$

-Montrons que $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{2}N_\infty(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
comme $x_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2$ Donc $|x_1| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
et $x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2$ Donc $|x_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
Alors $\max(|x_1|, |x_2|) \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = N_2(x)$
Donc

$$\boxed{N_\infty(x) \leq N_2(x) \qquad 1}$$

- d'autre part: $|x_1| \leq \max(|x_1|, |x_2|)$ Donc et $x_1^2 \leq (\max(|x_1|, |x_2|))^2$
$|x_2| \leq \max(|x_1|, |x_2|)$ Donc et $x_2^2 \leq (\max(|x_1|, |x_2|))^2$
alors $x_1^2 + x_2^2 \leq 2(\max(|x_1|, |x_2|))^2$
$N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{2}(\max(|x_1|, |x_2|))$

Donc

$$\boxed{N_2(x) \leq \sqrt{2}N_\infty(x) \qquad 2}$$

d'aprés 1 et 2 Ona

$$\boxed{N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{2}N_\infty(x)}$$

On en conclut que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{d_\infty(x) \leq d_2(x) \leq \sqrt{2} d_\infty(x)}$$

finallement les distances $d_i(x)$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$

**Exercice 2**
Si $E$ est un espace métrique, alors quels que soient $x$, $y$ et $a$ dans $E$, Montrer que

$$|d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y)$$

**correction 2**
Soit $(E, d)$ est un espace métrique, soient $x$, $y$ et $a$ dans E alors D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x)$$

ce qui donne

$$\boxed{d(a, x) - d(a, y) \leq d(y, x) \qquad 1}$$

de même on a

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$$

ce qui donne

$$\boxed{d(a, y) - d(a, x) \leq d(x, y) \qquad 2}$$

D'aprés 1 et 2 impliquent l'inégalité cherchée

$$|d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y) \quad \text{pour tout} \quad x, \quad y \quad \text{et} \quad a \quad \text{dans} \quad E$$