3M260 – Topologie et calcul différentiel
Mathématiques

Université Pierre et Marie CURIE
Année 2016/2017

Feuille d'exercices n° 1 – Espaces métriques

Dans tout ce qui suit, si (X, d) est un espace métrique et qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de X et d, nous noterons :

- *Pour $a \in X$ et $r > 0$, $\mathrm{B}(a, r)$ (resp. $\mathrm{B}'(a, r)$, $\mathrm{S}(a, r)$) la boule ouverte (resp. la boule fermée, la sphère) de centre a et de rayon r.*
- *Pour $A \subset X$, $\mathrm{Int}(A)$, A° ou $\mathring{A}$ (resp. $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$) désignera l'intérieur (resp. l'adhérence, la frontière) de A.*
- *Pour $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

1 — Soit (X, d) un espace métrique. Pour tous $x, y, z \in X$, montrer que $|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z)$.

2 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, d_2, d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définies, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, par :

$$d_1(x, y) \; = \; \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad ; \quad d_2(x, y) \; = \; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad ; \quad d_\infty(x, y) \; = \; \max\{|x_i - y_i| \mid i \in [\![1, n]\!]\}.$$

1) Vérifier que d_1, d_2 et d_∞ sont effectivement des distances sur $\mathbb{R}^n$.
2) On suppose $n = 2$. Dessiner, pour chacune de ces distances, la boule ouverte de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

3 — Soient X un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$, $d_1, \ldots, d_n$ des distances sur X et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x, y \in X$, on pose :

$$d(x, y) \; = \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, y).$$

Montrer que cette relation définit une distance d sur X.

4 — Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On fixe $p \in \mathbb{R}^2$, puis pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$D(x, y) \; = \; \begin{cases} d(x, y) & \text{si } x, y, p \text{ sont alignés,} \\ d(x, p) + d(p, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Prouver que la relation précédente définit une distance D sur $\mathbb{R}^2$.
2) Pour $x \in \mathbb{R}^2$, $\rho > 0$ et δ une distance parmi d et D, nous noterons $\mathrm{B}_\delta(x, \rho)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ρ de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \delta)$. Soit $r > 0$.
   a. Dessiner $\mathrm{B}_D(p, r)$.
   b. Soit $a \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{p\}$. Dessiner $\mathrm{B}_D(a, r)$, en distinguant les cas où $r \leqslant d(a, p)$ et $r > d(a, p)$.

5 — Soit (X, d) un espace métrique.
1) Soient $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{B}(a, r)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset \mathrm{B}(a, r)$.
2) *a.* Soit $U \subset X$. Déduire de 1) l'équivalence entre les conditions suivantes :
      (i) Pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, r) \subset U$.
      (ii) U est réunion de boules ouvertes.
   b. Comment appelle-t-on une partie U vérifiant les conditions équivalentes de 2.*a* ?

6 — Soit X un ensemble non vide. Pour $x, y \in X$, posons :

$$d(x, y) \; = \; \begin{cases} 0 & \text{si } \; x = y, \\ 1 & \text{si } \; x \neq y. \end{cases}$$

1) Prouver que la relation précédente définit une distance sur X, que l'on qualifie de *discrète*.
2) Déterminer les ouverts et les fermés de X, ainsi que l'ensemble des voisinages dans X d'un point $x \in X$.

7 — On se place dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle.
1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \leqslant b$.
   a. Montrer que les intervalles *ouverts* $]a, b[$, $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont effectivement des ouverts de $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que les intervalles *fermés* $[a, b]$, $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont effectivement des fermés de $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que l'intervalle $[a, b[$ n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}$.
2) Les parties $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ sont elles ouvertes ? fermées ?

8 — On se place dans (X, d) un espace métrique. Dans chacun des cas suivants, dire si l'assertion proposée est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.

1) $\varnothing$ et X sont à la fois ouvertes et fermées dans X.
2) Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans X sont $\varnothing$ et X.
3) Toute partie de X est ouverte ou fermée.
4) Si $a, a' \in X$ et $r, r' > 0$ vérifient $\mathrm{B}(a, r) = \mathrm{B}(a', r')$, alors $a = a'$ et $r = r'$.
5) Toute intersection de boules ouvertes de X est une boule ouverte de X.
6) Toute intersection d'ouverts de X est ouverte dans X.
7) Une boule *fermée* de X est effectivement fermée dans X.
8) Tout singleton de X est fermé dans X.
9) Toute partie finie de X est fermée dans X.

9 — On se place dans $\mathbb{Z}$ que l'on munit des deux distances :

$$d_0 \ : \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+, \ (p, q) \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \ \ p = q \\ 1 & \text{si} \ \ p \neq q \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad d_1 \ : \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+, \ (p, q) \mapsto |p - q|.$$

1) Vérifier que les distances d_0 et d_1 définissent les mêmes ouverts sur $\mathbb{Z}$.
2) *a.* Existe-t-il une constante $C > 0$ telle que $d_1(p, q) \leqslant C d_0(p, q)$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$?
   b. Qu'en déduisez-vous ?

10 — Soient (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X.

1) On suppose $A \subset B$. Montrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2) Montrer que $\mathrm{Int}(X \smallsetminus A) = X \smallsetminus \overline{A}$ et $\overline{X \smallsetminus A} = X \smallsetminus \mathring{A}$.

11 — Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que $\overline{\mathrm{B}(a, r)} \subset \mathrm{B}'(a, r)$ et $\mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{Int}[\mathrm{B}'(a, r)]$, mais que les inclusions réciproques sont généralement fausses.

12 — Soient (X, d) un espace métrique, $n \in \mathbb{N}^*$, et $A_1, \dots, A_n$ des parties de X.

1) *a.* Montrer que $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.
   b. Montrer que $\overline{A_1 \cap \cdots \cap A_n} \subset \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$. A-t-on toujours égalité ?
2) *a.* Comparer $\mathrm{Int}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ avec $\mathring{A}_1 \cup \cdots \cup \mathring{A}_n$.
   b. Comparer $\mathrm{Int}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ avec $\mathring{A}_1 \cap \cdots \cap \mathring{A}_n$.

13 — Soient (X, d) un espace métrique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. On suppose que la réunion des $\overline{A_i}$, pour i parcourant I, est fermée dans X. Montrer qu'alors :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ fermée ?

14 — Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X. Établir : $\overline{A} = \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} \Big(\bigcup_{a \in A} \mathrm{B}(a, r) \Big)$.

15 — Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X. Un point $a \in A$ est dit *isolé* dans A s'il existe V un voisinage de a dans X tel que $V \cap A = \{a\}$.
On suppose que A ne possède pas de point isolé. Montrer qu'il en va de même pour $\overline{A}$.

16 — Soient (X, d) un espace métrique et A, B deux parties de X. On suppose que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, et que $A \cup B$ est fermée dans X. Montrer qu'alors, A et B sont fermées dans X.

17 — Soient (X, d) un espace métrique et U une partie de X. Prouver l'équivalence entre les assertions :

(i) U est un ouvert de X.

(ii) Pour toute partie $A \subset X$, on a $\overline{A \cap U} = \overline{\overline{A} \cap U}$.

18 — Soient (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X que l'on regardera comme un sous-espace métrique de (X, d), et B une partie de A.

1) Montrer que l'intérieur de B dans A contient l'intérieur de B dans X, mais que l'inverse est généralement faux.
2) On suppose à présent A ouverte dans X. Montrer qu'alors, les intérieurs de B dans A et X coïncident.

19 — (*D'après l'examen de 2010*)
Soit (X,d) un espace *ultramétrique*, à savoir un espace métrique où la distance d vérifie, pour tous $x,y,z\in X$, l'axiome supplémentaire $d(x,z)\leqslant \max\{d(x,y),\ d(y,z)\}$.

1) Montrer que tout triangle de X est isocèle, autrement dit que pour tous $x,y,z\in X$ vérifiant $d(x,z)\neq d(y,z)$, on a $d(x,y)=\max\{d(x,z),\ d(y,z)\}$.
2) *a.* Montrer que tout point d'une boule ouverte ou fermée de X est centre de cette boule.
   b. Prouver que toute boule ouverte ou fermée de X est à la fois ouverte et fermée dans X.
3) Montrer que si deux boules ouvertes de X s'intersectent, l'une est incluse dans l'autre.

20 — Soient (X,d) un espace métrique et A une partie de X. On rappelle que la *frontière* $\mathrm{Fr}(B)$ d'un sous-ensemble B de X est définie par $\mathrm{Fr}(B)=\overline{B}\cap\overline{X\smallsetminus B}$.

1) Justifier que $\mathrm{Fr}(A)$ est fermée dans X.
2) Vérifier que :
   a. $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)$.
   b. $\mathrm{Fr}(X\smallsetminus A)=\mathrm{Fr}(A)$.
   c. $\mathrm{Fr}(A)$ contient $\mathrm{Fr}\big(\mathring{A}\big)$ et $\mathrm{Fr}\big(\overline{A}\big)$.
3) Établir les équivalences suivantes :
   a. $\mathrm{Fr}(A)=\varnothing$ si et seulement si A est à la fois ouverte et fermée dans X.
   b. A est ouverte dans X si et seulement si $A\cap\mathrm{Fr}(A)=\varnothing$.
   c. A est fermée dans X si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)\subset A$.
4) On suppose A fermée dans X. Montrer que $\mathrm{Fr}(A)$ est d'intérieur vide, puis que $\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(A)]=\mathrm{Fr}(A)$.
5) Démontrer que $\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(A)]]=\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(A)]$.

21 — Soient (X,d) un espace métrique et A une partie de X. Prouver l'équivalence entre les assertions suivantes :
(i) $\overline{A}=X$.
(ii) $\mathrm{Int}(X\smallsetminus A)=\varnothing$.
(iii) Pour tout ouvert non vide U de X, on a $U\cap A\neq\varnothing$.
Si ces conditions sont vérifiées, comment qualifie-t-on la partie A de X ?

22 — Soient (X,d) un espace métrique, U un ouvert de X et A une partie dense de X. Montrer que $\overline{U}=\overline{A\cap U}$.

23 — Soient (X,d) un espace métrique et $A\subset X$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
(i) $\mathring{A}\neq\varnothing$.
(ii) Pour toute partie $D\subset X$ dense dans X, on a $D\cap A\neq\varnothing$.

24 — Soient (X,d) un espace métrique, A une partie non vide de X que l'on regardera comme un sous-espace métrique de (X,d), et B une partie non vide de A. On suppose que A est dense dans X et que B est dense dans A. Montrer qu'alors, B est dense dans X.

25 — On se place dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle. On considère :
$$A=\,]0,1[\,\cup\,]1,2[\,\cup\,(\mathbb{Q}\cap\,]2,3[)\cup\{4\}.$$
Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$.

26 — Soient (X,d) un espace métrique et A une partie de X.

1) On suppose A non vide. Prouver l'équivalence entre les conditions suivantes :
   (i) Il existe $x\in X$ tel que le sous-ensemble $\{d(a,x)\mid a\in A\}$ de $\mathbb{R}$ soit borné.
   (ii) Pour tout $x\in X$, le sous-ensemble $\{d(a,x)\mid a\in A\}$ est borné.
2) Si $A=\varnothing$ ou si A vérifie les conditions équivalentes de 1), que dit-t-on de la partie A de X ?

27 — On adjoint à $\mathbb{R}$ un élément noté $+\infty$, et l'on prolonge la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ en convenant que $t\leqslant+\infty$ pour tout $t\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Soit (X, d) un espace métrique. On pose $\delta(\varnothing) = 0$ puis, pour toute partie non vide $A \subset X$:

$$\delta(A) \;=\; \begin{cases} \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\} & \text{si } A \text{ est bornée,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ n'est pas bornée.} \end{cases}$$

Pour $A \subset X$, $\delta(A)$ s'appelle le *diamètre* de A. Soient A, B deux parties de X ; établir les propriétés suivantes :

1) $\delta(A) = 0$ si et seulement si A contient au plus un point.
2) $\delta(A) \leqslant \delta(B)$ dès que $A \subset B$.
3) $\delta\left(\overline{A}\right) = \delta(A)$.
4) $\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$ dès que $A \cap B \neq \varnothing$.

28 — Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désignera un corps parmi $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle $\mathbb{K}$-*espace vectoriel normé* tout couple $(E, \|\cdot\|)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une application de E dans $\mathbb{R}_+$, appelée *norme* sur E, vérifiant :

(N_1) Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ implique $x = 0_E$.

(N_2) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

(N_3) Pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

1) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Vérifier que l'application $d_E : E \times E \to \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto \|x - y\|_E$ est une distance sur E ; on dit alors que d_E est la distance *associée* à la norme $\|\cdot\|$ sur E.

Dans la suite de cet exercice, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé sera en particulier considéré comme un espace métrique pour la distance associée à sa norme. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

2) *a.* On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définies, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, par :

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad \|x\|_2 \;=\; \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \qquad \|x\|_\infty \;=\; \max\{|x_j| \mid j \in [\![1, n]\!]\},$$

sont les normes sur $\mathbb{R}^n$ respectivement associées aux distances d_1, d_2, d_∞ de l'exercice 2.

b. Montrer que les applications $N_1, N_2, N_\infty : E \times F \to \mathbb{R}_+$ définies, pour $(x, y) \in E \times F$, par :

$$N_1(x,y) \;=\; \|x\|_E + \|y\|_F, \qquad N_2(x,y) \;=\; \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}, \qquad N_\infty(x,y) \;=\; \max\{\|x\|_E,\, \|y\|_F\}$$

sont des normes sur $E \times F$, puis expliciter les distances associées à ces trois normes.

c. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ muni de la norme $|\cdot|$. En 2.b, lorsque $E = F = \mathbb{R}$, quelles normes retrouve-t-on sur $E \times F = \mathbb{R}^2$? Comment généralise-t-on ce résultat au cas où $E \times F = \mathbb{R}^n$, pour $n \geqslant 3$?

On suppose à présent $E \neq \{0_E\}$.

3) Soient $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que :

a. $\mathrm{S}(a, r)$ est non vide.

b. $\mathrm{B}(a, r)$ est l'intérieur de $\mathrm{B}'(a, r)$.

c. $\mathrm{B}'(a, r)$ est l'adhérence de $\mathrm{B}(a, r)$.

d. $\mathrm{S}(a, r)$ est la frontière de $\mathrm{B}(a, r)$ et $\mathrm{B}'(a, r)$.

4) Soient $a, a' \in E$ et $r, r' > 0$. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $a = a'$ et $r = r'$.

(*ii*) $\mathrm{B}(a, r) = \mathrm{B}(a', r')$.

(*iii*) $\mathrm{B}'(a, r) = \mathrm{B}'(a', r')$.

(*iv*) $\mathrm{S}(a, r) = \mathrm{S}(a', r')$.

Correction des exercices

Rappelons qu'on appelle distance sur un ensemble (non vide) X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :
(D_1) *Pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.*
(D_2) *Pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.*
(D_3) *Pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.*

1 — Soient $x, y, z \in X$. Comme d est une distance sur X, on a d'une part $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, donc $d(x, y) - d(x, z) \leqslant d(z, y) = d(y, z)$, et d'autre part $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, donc $-d(y, z) \leqslant d(x, y) - d(x, z)$. D'où le résultat.

2 — Pour $u \in \mathbb{R}^n$ et $i \in [\![1, n]\!]$, nous désignerons par u_i la i-ième composante du vecteur u.

1) • Vérifions que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

(D_1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $x = y$, il est clair que $d(x, y) = 0$. Supposons maintenant $x \neq y$. Il existe alors $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j \neq y_j$. Or ayant $|x_i - y_i| \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il vient $d_1(x, y) \geqslant |x_j - y_j| > 0$.

(D_2) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, ayant $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a bien $d_1(x, y) = d_1(y, x)$.

(D_3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Ayant, par propriété de la valeur absolue, $|x_i - z_i| \leqslant |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il est clair que $d_1(x, z) \leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z)$.

• Le fait que d_2 soit une distance sur $\mathbb{R}^n$ résulte des propriétés du produit scalaire euclidien $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$ qui, rappelons-le, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$, est défini par :

$$(u \mid v) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j. \tag{1}$$

Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on pose alors $\|u\|_2 = \sqrt{(u \mid u)}$. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$, on a alors :

$$|(u \mid v)| \;\leqslant\; \|u\|_2 \cdot \|v\|_2 \qquad (\textit{Inégalité de Cauchy-Schwarz}), \tag{2}$$

$$\|u + v\|_2 \;\leqslant\; \|u\|_2 + \|v\|_2 \qquad (\textit{Inégalité triangulaire}). \tag{3}$$

Étant donné que $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, (D_1) et (D_2) résultent respectivement des caractères défini positif et symétrique de $(\cdot \mid \cdot)$. Pour obtenir (D_3), *i.e.* $d_2(x, z) \leqslant d_2(x, y) + d_2(y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, il suffit d'appliquer (3) à $u = x - y$ et $v = y - z$.
Le lecteur vérifiera sans peine que la relation (1) définit effectivement un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, *i.e.* une forme bilinéaire symétrique définie positive. Vérifions à présent la validité de (2). Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$; l'inégalité étant claire si $v = 0$, nous supposerons $v \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$0 \leqslant (u + \lambda v \mid u + \lambda v) = (u \mid u) + 2\lambda(u \mid v) + \lambda^2(v \mid v),$$

ce qui implique que le discriminant du trinôme $(u \mid u) + 2X(u \mid v) + X^2(v \mid v) \in \mathbb{R}[X]$ est négatif, *i.e.* $4(u \mid v)^2 - 4(u \mid u)(v \mid v) \leqslant 0$. D'où facilement (2). Dès lors, l'inégalité (3) en résulte, puisque si $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u+v\|_2^2 \;=\; (u+v \mid u+v) \;=\; (u \mid u)+2(u \mid v)+(v \mid v) \;\leqslant\; \|u\|_2^2+2\|u\|_2\cdot\|v\|_2+\|v\|_2^2 \;=\; \left(\|u\|_2 + \|u\|_2\right)^2.$$

• Vérifions que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

(D_1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $x = y$, il est clair que $d_\infty(x, y) = 0$. Supposons maintenant $x \neq y$. Il existe alors $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j \neq y_j$, d'où $d_\infty(x, y) \geqslant |x_j - y_j| > 0$.

(D_2) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, ayant $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a bien $d_\infty(x, y) = d_\infty(y, x)$.

(D_3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, et fixons $j \in [\![1, N]\!]$ tel que $|x_j - z_j| = \max\{|x_i - z_i| \mid i \in [\![1, n]\!]\}$. Par définition de d_∞ et propriété de la valeur absolue, on a alors :

$$d_\infty(x, z) \;=\; |x_j - z_j| \;\leqslant\; |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \;\leqslant\; d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z).$$

2) Désignons par B_1, B_2, B_∞ les boules de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(0, 0)$ et de rayon 1 pour d_1, d_2, d_∞.

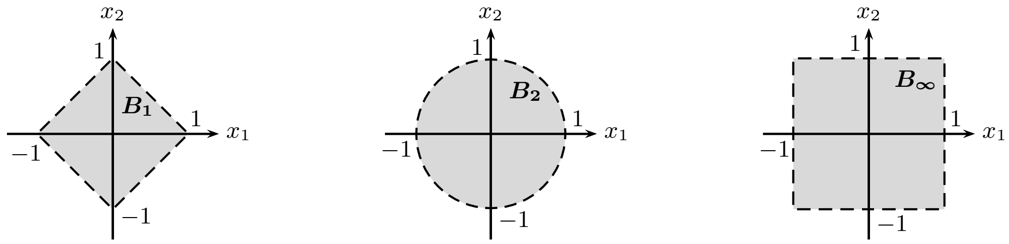
• Soit $(x_1, x_2) \in B_1$. Par définition de d_1, on a $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$. Or :
– si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2 \leqslant 1 - x_1$,
– si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2 \geqslant x_1 - 1$,
– si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2 \leqslant x_1 + 1$,
– si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2 \geqslant -1 - x_1$.

B_1 correspond donc à l'intersection des demi-plans d'équations $x_2 \leqslant 1 - x_1$, $x_2 \geqslant x_1 - 1$, $x_2 \leqslant x_1 + 1$ et $x_2 \geqslant -1 - x_1$.

• Soit $(x_1, x_2) \in B_2$. On a alors $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1$, *i.e.* $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$. Il est donc clair que B_2 correspond au disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

- Soit $(x_1, x_2) \in B_\infty$. Par définition de d_∞, ceci signifie que $\max\{|x_i| \mid i = 1, 2\} \leqslant 1$, autrement dit que $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, B_∞ correspond à l'intersection des demi-plans d'équations $x_1 \leqslant 1$, $x_1 \geqslant -1$, $x_2 \leqslant 1$ et $x_2 \geqslant -1$.

On déduit des trois points précédents les représentations de B_1, B_2, B_∞ suivantes :



3 — Soient $x, y \in X$. Comme $d_1, \dots d_n$ sont des distances sur X, on a $d_i(x, y) \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Et comme $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, on a bien $d(x, y) = \lambda_1 d_1(x, y) + \cdots + \lambda_n d_n(x, y) \geqslant 0$. La relation proposée définit donc une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Montrons à présent que cette application d vérifie les axiomes (D_1) à (D_3).

(D_1) Soient $x, y \in X$. Si $x = y$ (resp. $x \neq y$), pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $d_i(x, y) = 0$ (resp. $d_i(x, y) > 0$) car d_i est une distance sur X et vérifie donc (D_1). Ayant de plus $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, il vient :

$$d_i(x, y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, y) \;=\; 0 \qquad (\text{resp. } d_i(x, y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, y) \;>\; 0).$$

(D_2) Soient $x, y \in X$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la distance d_i vérifie (D_2), d'où $d_i(x, y) = d_i(y, x)$. Ainsi :

$$d(x, y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(y, x) \;=\; d(y, x).$$

(D_3) Soient $x, y, z \in X$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d_i vérifie (D_3), donc $d_i(x, z) \leqslant d_i(x, y) + d_i(y, z)$. Et comme $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, ceci implique :

$$d(x, z) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, z) \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [d_i(x, y) + d_i(y, z)] \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(y, z) \;=\; d(x, y) + d(y, z).$$

4 — 1) Comme d, en tant que distance, est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il est clair que D l'est également. Montrons à présent que D vérifie les axiomes (D_1) à (D_3) définissant une distance. Soient $x, y, z \in X$.

(D_1) Si $x = y$, on a $x = y$ et p alignés, donc $D(x, y) = d(x, y) = 0$ car d vérifie (D_1). Supposons maintenant $x \neq y$, et montrons que $D(x, y) > 0$. On distingue deux cas de figure :

- *Cas où x, y, p sont alignés.* On a alors $D(x, y) = d(x, y)$, avec $d(x, y) > 0$ car $x \neq y$, d'où $D(x, y) > 0$.
- *Cas où x, y, p ne sont pas alignés.* Dans ce cas, x, y, p sont nécessairement deux à deux distincts, et $D(x, y) = d(x, p) + d(p, y)$. Or d vérifiant (D_1), on a $d(x, p) > 0$ et $d(p, y) > 0$, donc $D(x, y) > 0$.

(D_2) Par définition de D et symétrie de d, si x, y, p sont alignés, il vient $D(x, y) = d(x, y) = d(y, x) = D(y, x)$. Dans le cas contraire, par définition de D et symétrie de d, on a :

$$D(x, y) \;=\; d(x, p) + d(p, y) \;=\; d(p, x) + d(y, p) \;=\; d(y, p) + d(p, x) \;=\; D(y, x).$$

(D_3) Il s'agit de montrer que $D(x, y) \leqslant D(x, y) + D(y, z)$. Pour cela, on distingue deux cas de figure :

- *Cas où x, z, p sont alignés.* Dans ce cas, $D(x, z) = d(x, z)$. Distinguons encore deux sous-cas :
  - *Cas où x, y, p sont alignés.* S'il en est ainsi, y, z, p sont également alignés, et donc $D(x, y) = d(x, y)$, $D(y, z) = d(y, z)$. L'inégalité triangulaire appliquée à d fournit donc :

    $$D(x, z) \;=\; d(x, z) \;\leqslant\; d(x, y) + d(y, z) \;=\; D(x, y) + D(y, z).$$

  - *Cas où x, y, p ne sont pas alignés.* Dans ce cas, y, z, p ne le sont pas non plus, et on a donc $D(x, y) = d(x, p) + d(p, y)$, $D(y, z) = d(y, p) + d(p, z)$. Par suite, d vérifiant (D_3), on obtient :

    $$D(x, z) \;=\; d(x, z) \;\leqslant\; d(x, y) + d(y, z) \;\leqslant\; [d(x, p) + d(p, y)] + [d(y, p) + d(p, z)] \;=\; D(x, y) + D(y, z).$$

- *Cas où x, z, p ne sont pas alignés.* Sous cette hypothèse, on a $D(x, z) = d(x, p) + d(p, z)$. Pour obtenir le résultat souhaité, on distingue ici quatre sous-cas :

– *Cas où x, y, p sont alignés et où y, z, p sont alignés.* Compte tenu des différentes hypothèses faites, ceci implique $y = p$. On a ainsi $D(x, y) = d(x, y) = d(x, p)$ et $D(y, z) = d(y, z) = d(p, z)$, d'où :

$$D(x,z) \;=\; d(x,p) + d(p,z) \;=\; d(x,y) + d(y,z) \;=\; D(x,y) + D(y,z) \;\leqslant\; D(x,y) + D(y,z).$$

– *Cas où x, y, p sont alignés et où y, z, p ne sont pas alignés.* Sous ces conditions, $D(x, y) = d(x, y)$ et $D(y, z) = d(y, p) + d(p, z)$. Et comme d vérifie (D_3), on obtient :

$$D(x,z) \;=\; d(x,p) + d(p,z) \;\leqslant\; d(x,y) + d(y,p) + d(p,z) \;=\; D(x,y) + D(y,z).$$

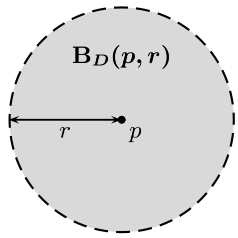
– *Cas où x, y, p ne sont pas alignés mais où y, z, p le sont.* Par symétrie de D, on se ramène au sous-cas précédent en échangeant les rôles de x et z.

– *Cas où x, y, p ne sont pas alignés et où y, z, p ne le sont pas non plus.* S'il en est ainsi, on a $D(x, y) = d(x, p) + d(p, y)$ et $D(y, z) = d(y, p) + d(p, z)$. Et comme $d(y, p) = d(p, y) \geqslant 0$, il vient :

$$D(x,z) \;=\; d(x,p) + d(p,z) \;\leqslant\; [d(x,p) + d(p,y)] + [d(y,p) + d(p,z)] \;=\; D(x,y) + D(y,z).$$

Dans tous les cas de figure envisageables, on a bien obtenu l'inégalité souhaitée.

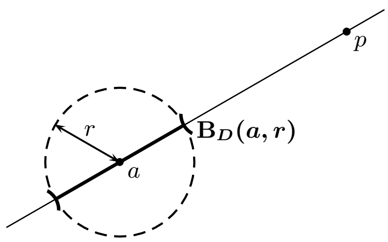
2) *a.* Par définition même de D, on a $\mathrm{B}_D(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid D(p, x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) < r\} = \mathrm{B}_d(p, r)$. On en déduit que $\mathrm{B}_D(p, r)$ correspond au disque de centre p et de rayon r :



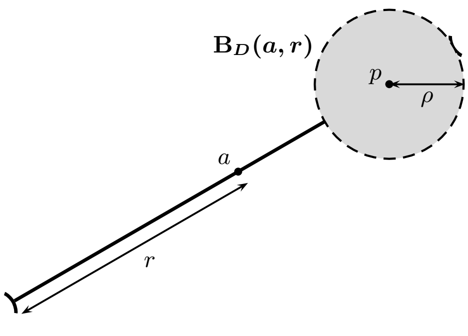
b. Notons (ap) la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par a et p ; il s'agit de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels x, p et a sont alignés. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_D(a,r) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^2 \mid D(a,x) < r\} \;&=\; \{x \in (ap) \mid D(a,x) < r\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (ap) \mid D(a,x) < r\}\\ &=\; \{x \in (ap) \mid d(a,x) < r\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (ap) \mid d(a,p) + d(p,x) < r\}\\ &=\; [(ap) \cap \mathrm{B}_d(a,r)] \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (ap) \mid d(a,p) + d(p,x) < r\}.\end{aligned}$$

- Si $d(a, p) \geqslant r$, on a alors $\{x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (ap) \mid d(a, p) + d(p, x) < r\} = \varnothing$, et $\mathrm{B}_D(a, r)$ correspond à l'intersection de la droite (ap) avec le disque centré en a de rayon r :



- Si $d(a, p) > r$, on a par contre $\{x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (ap) \mid d(a, p) + d(p, x) < r\} = \mathrm{B}_d(p, \rho)$ où $\rho = d(a, p) - r > 0$. Par suite, $\mathrm{B}_D(a, r)$ correspond à la réunion de $(ap) \cap \mathrm{B}_d(a, r)$ et de $\mathrm{B}_d(p, \rho)$:



5 — 1) Soit $x \in \mathrm{B}(a,r)$; on a $d(a,x) < r$. Posons ainsi $\varepsilon = r - d(a,x) > 0$. Si $y \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$, alors $d(x,y) < \varepsilon$, et l'inégalité triangulaire fournit $d(a,y) \leqslant d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \varepsilon = d(a,x) + r - d(a,x) = r$. Par suite, $y \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$, et on a bien $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{B}(a,r)$.

2) *a.* L'équivalence étant claire si $U = \varnothing$, nous supposerons désormais $U \neq \varnothing$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons (i) vérifiée. Pour tout $a \in U$, fixons $r_a > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r_a) \subset U$. Il est alors clair que U contient la réunion des $\mathrm{B}(a,r_a)$, pour a parcourant U. Inversement, si $x \in U$, de $x \in \mathrm{B}(x,r_x)$, on déduit que x est contenu dans l'union des $\mathrm{B}(a,r_a)$, lorsque a parcourt U. Par suite :

$$U \;=\; \bigcup_{a\in U} \mathrm{B}(a,r_a)\,.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons (ii), et fixons ainsi deux familles $(a_i)_{i\in I} \in X^I$ et $(r_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ telles que :

$$U \;=\; \bigcup_{i\in I} \mathrm{B}(a_i,r_i)\,.$$

Soit $x \in U$; il existe donc $j \in I$ tel que $x \in \mathrm{B}(a_j,r_j)$. Mais alors, d'après 1), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{B}(a_j,r_j)$. Dès lors :

$$\mathrm{B}(x,\varepsilon) \;\subset\; \mathrm{B}(a_j,r_j) \;\subset\; \bigcup_{i\in I} \mathrm{B}(a_i,r_i) \;=\; U.$$

b. Toute partie U vérifiant les conditions équivalentes de 2.*a* est appelé un *ouvert* de (X,d).

6 — 1) Il est clair que l'application d est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle vérifie les axiomes (D_1) et (D_2) qui définissent une distance. Soient $x,y,z \in X$. Si $x = z$, on a $d(x,z) = 0 \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ puisque $d(x,y), d(y,z) \geqslant 0$. En revanche, si $x \neq z$, on a $x \neq y$ ou $y \neq z$, donc $d(x,y) = 1$ ou $d(y,z) = 1$, d'où $d(x,z) = 1 \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ car $d(x,y), d(y,z) \geqslant 0$. Par suite, d vérifie (D_3), et d est une distance sur X.

2) • Par définition même de d, pour tout $x \in X$, on a $\{x\} = \mathrm{B}(x,1)$. Par suite, pour toute partie $A \subset X$:

$$A \;=\; \bigcup_{a\in A} \mathrm{B}(a,1)\,,$$

ce qui prouve que toutes les parties de X sont ouvertes. En particulier, si $A \subset X$, $X \smallsetminus A$ est ouverte dans X, et donc A est fermée dans X. Ainsi, toutes les parties de X sont également fermées.

• Soit $x \in X$. On rappelle qu'un voisinage de x dans X est une partie $V \subset X$ pour laquelle il existe un ouvert U de X vérifiant $\{x\} \subset U \subset V$. Toutes les parties de X étant ouvertes, il est désormais clair que les voisinages de x dans X correspondent aux parties de X qui contiennent x.

7 — 1) *a.* Si $a = b$, alors $]a,b[\,=\varnothing$ est bien ouvert. Supposons maintenant $a < b$; alors $b - a > 0$, et on a clairement $]a,b[\,= \mathrm{B}\big(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\big)$, ce qui prouve que $]a,b[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Et comme :

$$]-\infty,a[\;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a-n,a[\qquad \text{et} \qquad]a,+\infty[\;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a,a+n[,$$

on en déduit que les intervalles $]-\infty,a[$ et $]a,+\infty[$ sont aussi des ouverts de $\mathbb{R}$.

b. On a $\mathbb{R} \smallsetminus [a,+\infty[\;=\;]-\infty,a[$ et $\mathbb{R} \smallsetminus \,]-\infty,a] \;=\;]a,+\infty[$ où, d'après 1.*a*, les intervalles $]-\infty,a[$ et $]a,+\infty[$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$. Par définition même d'un fermé, cela signifie que les intervalles $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ sont effectivement fermés dans $\mathbb{R}$. Une intersection de fermés étant fermée, on en déduit que $[a,b] = \,]-\infty,b] \cap [a,+\infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

c. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \;\in\;]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\;=\; \mathrm{B}(a,\varepsilon) \qquad \text{mais} \qquad a - \frac{\varepsilon}{2} \;\notin\; [a,b[.$$

Il n'existe donc pas de boule ouverte centrée en a contenue dans $[a,b[$. Par suite, l'intervalle $[a,b[$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. On montre de façon analogue que l'ensemble $\mathbb{R} \smallsetminus [a,b[\,= \,]-\infty,a[\,\cup\, [b,+\infty[$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $[a,b[$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

2) On rappelle que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ sont des parties *denses* de $\mathbb{R}$, *i.e.* pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$, l'intervalle $]a,b[$ contient (au moins) un élément de $\mathbb{Q}$ et un élément de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

• $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts dans $\mathbb{R}$, puisque toute boule ouverte de $\mathbb{R}$ centrée en 0 contient un irrationnel. En revanche, une union quelconque d'ouverts étant ouverte, ayant :

$$\mathbb{N} \;=\; \mathbb{R} \smallsetminus \left[\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n,n+1[\right) \cup \,]-\infty,0[\right] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Z} \;=\; \mathbb{R} \smallsetminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k,k+1[\right),$$

on déduit de 1.*a* que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$, puisque pour tous $q \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[= \mathrm{B}(q,\varepsilon)$ contient un irrationnel. De même, $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert puisque pour tous $x \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \mathrm{B}(x,\varepsilon)$ contient un rationnel. Par passage au complémentaire, on en déduit que $\mathbb{Q} = \mathbb{R}\smallsetminus(\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q})$ et $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ ne sont pas fermés dans $\mathbb{R}$.

8 — 1) Vrai : $\varnothing$ et X sont ouverts de X, puisque :

$$\varnothing \;=\; \bigcup_{a\in\varnothing} \mathrm{B}(a,1) \qquad \text{et} \qquad X \;=\; \bigcup_{a\in X} \mathrm{B}(a,1)\,.$$

Par passage au complémentaire, $\varnothing = X\smallsetminus X$ et $X = X\smallsetminus\varnothing$ sont donc des fermés de X.

2) Faux : Si d est la distance discrète sur X, toute partie de X est, d'après l'exercice 6, question 2), à la fois ouverte et fermée. Si X contient au moins deux éléments, toute partie de X distincte de $\varnothing$ et X nous procure un contre-exemple.

3) Faux : Si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0,1[$ n'est, d'après la question 1.c de l'exercice 7, ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

4) Faux : Si $X = \{0,2,3,6\}$ et $d : X\times X \to \mathbb{R}_+^*,\ (x,y)\mapsto |x-y|$, alors $\mathrm{B}(2,2) = \mathrm{B}(3,3)$. Pourtant, $2 \neq 3$.

5) Faux : Pour $X = \mathbb{R}$ et d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\{0\} \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-2^{-n}, 2^{-n}\right[\;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}(0,2^{-n})\,.$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, le réel non nul $\varepsilon/2$ est contenue dans $]-\varepsilon,\varepsilon[= \mathrm{B}(0,\varepsilon)$, ce qui prouve que $\mathrm{B}(0,\varepsilon) \not\subset \{0\}$.

6) Faux : Le même contre-exemple qu'en 6) convient.

7) Vrai : Soient $a \in X$, $r > 0$, et posons $B = \mathrm{B}'(a,r)$. Si $B = X$, le résultat est conséquence de 1). Supposons donc $B \neq X$, et soit $x \in X\smallsetminus B$. On a alors $d(a,x) > r$; posons $\rho = d(a,x) - r > 0$. D'après l'exercice 1, pour tout $y \in \mathrm{B}(x,\rho)$:

$$d(a,y) \;\geqslant\; d(x,a) - d(x,y) \;>\; d(x,a) - \rho \;=\; d(a,x) - d(a,x) + r \;=\; r.$$

Ainsi, $\mathrm{B}(x,\rho) \subset X\smallsetminus B$, et l'arbitraire sur x prouve que $X\smallsetminus B$ est ouvert. Moralité, B est fermée dans X.

8) Vrai : Si $x \in X$, on a $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}'(x,2^{-n})$. Une intersection quelconque de fermés étant fermée, le résultat est conséquence de 7).

9) Vrai : Une union *finie* de fermés étant fermée, pour toute partie finie $A \subset X$, $A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$ est fermée dans X en vertu de 8).

9 — Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$, nous noterons respectivement $\mathrm{B}_0(k,r)$ et $\mathrm{B}_1(k,r)$ les boules de centre k et de rayon r des espaces métriques $(\mathbb{Z},d_0)$ et $(\mathbb{Z},d_1)$.

1) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\{k\} = \mathrm{B}_0(k,1) = \mathrm{B}_1(k,1)$. Il en résulte que tous les singletons de $\mathbb{Z}$ sont ouverts pour d_0 et d_1, et donc que toute partie de $\mathbb{Z}$ est ouverte pour d_0 et d_1.

2) *a.* Supposons qu'une telle constante C existe. En désignant par $\mathrm{E}(C)$ la partie entière de C, pour $p = 0 \in \mathbb{Z}$ et $q = \mathrm{E}(C)+1 \in \mathbb{Z}$, on trouve $d_0(p,q) = 1$, $d_1(p,q) = q$, et donc $d_1(p,q) > Cd_0(p,q)$: contradiction ! Par suite, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $d_1(p,q) < Cd_0(p,q)$ pour tous $p,q \in \mathbb{Z}$.

   b. Nous savons que si deux distances sur un même ensemble X sont équivalentes, alors elles définissent les mêmes ouverts de X. Compte tenu de 1) et 2.a, on constate que la réciproque est généralement fausse.

On rappelle que si (X,d) est un espace métrique et A une partie de X :

- *Par définition, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de X, au sens de l'inclusion, contenu dans A. Autrement dit, désignant par $\mathcal{U}_A$ l'ensemble des ouverts de X contenus dans A :*

$$\mathring{A} \;=\; \bigcup_{U\in\mathcal{U}_A} U.$$

Ainsi, A est ouverte dans X si et seulement si $\mathring{A} = A$. Par ailleurs, on vérifie que $\mathring{A}$ correspond à l'ensemble des points $a \in A$ pour lesquels il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset A$, ce qui correspond encore à l'ensemble des points $a \in A$ pour lesquels il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,\varepsilon) \subset A$.

- *Par définition, $\overline{A}$ est le plus petit fermé de X, au sens de l'inclusion, contenant A. Autrement dit, désignant par $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des fermés de X contenant A :*

$$\overline{A} \;=\; \bigcap_{F\in\mathcal{F}_A} F.$$

Ainsi, A est fermée dans X si et seulement si $\overline{A} = A$, et on a en outre $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$, ce qui revient à dire que $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$.

10 — 1) • Par définition de $\mathring{A}$, on a $\mathring{A} \subset A$. Or $A \subset B$, d'où $\mathring{A} \subset B$. $\mathring{A}$ est donc un ouvert de X contenu dans B, ce qui entraine $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ par définition même de $\mathring{B}$.

• Par définition de $\overline{B}$, on a $B \subset \overline{B}$. Or $A \subset B$, d'où $A \subset \overline{B}$. $\overline{B}$ est donc un fermé de X qui contient A, ce qui implique $\overline{A} \subset \overline{B}$ par définition même de $\overline{A}$.

2) • L'égalité $\mathrm{Int}(X \smallsetminus A) = X \smallsetminus \overline{A}$ résulte des équivalences :

$$x \in X \smallsetminus \overline{A} \iff \exists\, V \in \mathcal{V}(x) \ / \ V \cap A = \varnothing \iff \exists\, V \in \mathcal{V}(x) \ / \ V \subset X \smallsetminus A \iff x \in \mathrm{Int}(X \smallsetminus A)\,.$$

• D'après le point précédent, $\mathrm{Int}(X \smallsetminus B) = X \smallsetminus \overline{B}$ pour toute partie B de X. En appliquant ce résultat à $B = X \smallsetminus A$, on trouve $\mathring{A} = \mathrm{Int}(X \smallsetminus (X \smallsetminus A)) = X \smallsetminus \overline{X \smallsetminus A}$. Par passage au complémentaire, il vient :

$$X \smallsetminus \mathring{A} \ = \ X \smallsetminus \big[X \smallsetminus \overline{X \smallsetminus A}\big] \ = \ \overline{X \smallsetminus A}.$$

11 — On a $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}'(a,r)$. Or $\mathrm{B}'(a,r)$ étant fermée, il vient $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B}'(a,r)$ par définition même de l'adhérence. De même, comme $\mathrm{B}(a,r)$ est ouverte, on a $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{Int}[\mathrm{B}'(a,r)]$ par définition de l'intérieur.
En reprenant les notations de l'exercice 9, supposons à présent $X = \mathbb{Z}$, $d = d_0$, $a = 0$, $r = 1$. On a alors $\mathrm{B}(0,1) = \{0\}$ et $\mathrm{B}'(0,1) = \mathbb{Z}$, donc $\overline{\mathrm{B}(0,1)} = \{0\}$ puisque $\{0\}$ est fermé dans X et $\mathrm{Int}[\mathrm{B}'(0,1)] = \mathbb{Z}$ puisque $\mathbb{Z}$ est ouvert dans $\mathbb{Z}$. Sur cet exemple, on a donc $\mathrm{B}'(a,r) \not\subset \overline{\mathrm{B}(a,r)}$ et $\mathrm{Int}[\mathrm{B}'(a,r)] \not\subset \mathrm{B}(a,r)$.

Remarque. Nous montrerons cependant, dans l'exercice 28, que ces inclusions réciproques sont vraies dans les espaces vectoriels normés.

12 — 1) *a.* Il s'agit de montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que la propriété P_n : « pour toutes parties $A_1, \dots, A_n \subset X$, $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$ » est vraie. Pour ce faire, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 1$ étant clair. Remarquons qu'il suffit d'établir le cas $n = 2$, puisque si P_2 est vérifiée et que P_n l'est aussi à un rang $n \geqslant 2$, on a alors, pour toutes parties $A_1, \dots, A_{n+1} \subset X$:

$$\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}} \ = \ \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \cup \overline{A_{n+1}} \ = \ \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n} \cup \overline{A_{n+1}},$$

ce qui prouve que P_{n+1} est vérifiée. Montrons donc que P_2 est vraie ; soient $A_1, A_2 \subset X$.

• On a $A_1 \subset \overline{A_1}$ et $A_2 \subset \overline{A_2}$, d'où $A_1 \cup A_2 \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ étant deux fermés de X, $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ est donc un fermé de X contenant $A_1 \cup A_2$. Par définition de l'adhérence, ceci implique $\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

• Inversement, pour tout $j \in \{1,2\}$, on a $A_j \subset A_1 \cup A_2$, d'où $\overline{A_j} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$, et donc $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$.

b. • Montrons que $\overline{A_1 \cap \dots \cap A_n} \subset \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 1$ étant clair. Là encore, il suffit de se limiter au cas $n = 2$. On a $A_1 \subset \overline{A_1}$ et $A_2 \subset \overline{A_2}$, donc $A_1 \cap A_2 \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ étant fermés dans X, ceci entraine $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ par définition même de l'adhérence.

• L'inclusion réciproque est vraie si $n = 1$, mais généralement fausse dès que $n \geqslant 2$. En effet, si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, pour $A_1 = \,]0,1[$ et $A_2 = \,]1,2[$, on trouve $\overline{A_1} = [0,1]$ et $\overline{A_2} = [1,2]$, d'où $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \{1\}$, tandis que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{\varnothing} = \varnothing$.

2) *a.* • Montrons que $\mathring{A}_1 \cup \dots \cup \mathring{A}_n \subset \mathrm{Int}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 1$ étant clair. Une fois de plus, il suffit de traiter le cas $n = 2$. On a $\mathring{A}_1 \subset A_1$ et $\mathring{A}_2 \subset A_2$, donc $\mathring{A}_1 \cup \mathring{A}_2 \subset A_1 \cup A_2$. Or $\mathring{A}_1$ et $\mathring{A}_2$ étant deux ouverts de X, $\mathring{A}_1 \cup \mathring{A}_2$ est donc un ouvert de X contenu dans $A_1 \cup A_2$, ce qui implique $\mathring{A}_1 \cup \mathring{A}_2 \subset \mathrm{Int}(A_1 \cup A_2)$ par définition même de l'intérieur.

• L'inclusion réciproque est vraie si $n = 1$, mais généralement fausse si $n \geqslant 2$. Supposons en effet $X = \mathbb{R}$, que d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, et $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [1,2]$. On a alors $\mathring{A}_1 = \,]0,1[$, $\mathring{A}_2 = \,]1,2[$, donc $\mathring{A}_1 \cup \mathring{A}_2 = \,]0,2[\smallsetminus \{1\}$, tandis que $\mathrm{Int}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{Int}([0,2]) = \,]0,2[$.

b. Montrons que $\mathrm{Int}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathring{A}_1 \cap \dots \cap \mathring{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 1$ étant clair, et sachant qu'il suffit de traiter le cas $n = 2$.

• On a $\mathring{A}_1 \subset A_1$ et $\mathring{A}_2 \subset A_2$, donc $\mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2 \subset A_1 \cap A_2$. $\mathring{A}_1$ et $\mathring{A}_2$ étant deux ouverts de X, $\mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2$ est donc un ouvert de X contenu dans $A_1 \cap A_2$, ce qui implique $\mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2 \subset \mathrm{Int}(A_1 \cap A_2)$ par définition même de l'intérieur.

• Pour tout $j \in \{1,2\}$, on a $A_1 \cap A_2 \subset A_j$, d'où $\mathrm{Int}(A_1 \cap A_2) \subset \mathring{A}_j$, et donc $\mathrm{Int}(A_1 \cap A_2) \subset \mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2$.

13 — Pour tout $j \in I$, on a $A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, donc $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Ainsi, $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Par ailleurs, pour tout $i \in I$, on a $A_i \subset \overline{A_i}$, donc $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. Comme $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ est supposée fermée, il vient $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ par définition même de l'adhérence. D'où l'égalité annoncée.
Si I est fini, on a $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ fermée puisque $\overline{A_i}$ est, pour tout $i \in I$, fermée dans X ; l'égalité a donc toujours lieu lorsque I est supposé fini. En revanche, si I est infini et que l'on ne suppose plus $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ fermée, seule l'inclusion $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ reste vraie, l'inclusion réciproque étant généralement fausse.

Soient en effet $X = \mathbb{R}$, d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, et $I = \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = [2^{-n}, 1 - 2^{-n}]$. On a alors $\overline{A_n} = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} =]0,1[$ non fermée dans $\mathbb{R}$. Par contre :

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \;=\; \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \;=\; \overline{]0,1[} \;=\; [0,1] \;\not\subset\;]0,1[\;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

14 — Posons $\mathcal{A} = \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+^*} \Big(\bigcup_{a\in A} \mathrm{B}(a,r)\Big)$.

- Soient $x \in \overline{A}$ et $r > 0$. On a alors $\mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing$; fixons donc $a_r \in \mathrm{B}(x,r) \cap A$. On a en particulier $x \in \mathrm{B}(a_r, r)$, d'où, puisque $a_r \in A$:
$$x \;\in\; \bigcup_{a\in A} \mathrm{B}(a,r)\,.$$
L'arbitraire sur r montre bien que $x \in \mathcal{A}$.
- Soit $x \in \mathcal{A}$. Pour tout $r > 0$, on a existence de $a_r \in A$ tel que $x \in \mathrm{B}(a_r, r)$, ce qui implique $a_r \in \mathrm{B}(x,r)$, et donc $\mathrm{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Par suite, $x \in \overline{A}$.

15 — De façon équivalente, montrons que si $\overline{A}$ possède un point isolé, il en va de même pour A. Soit donc $x \in \overline{A}$ un point isolé de $\overline{A}$; il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap \overline{A} = \{x\}$. Or $x \in \overline{A}$, donc pour tout $W \in \mathcal{V}(x)$, on a $W \cap A \neq \varnothing$. En particulier, pour $W = V$, on a donc existence de $a \in V \cap A$. Et comme $A \subset \overline{A}$, il vient $a \in V \cap A \subset V \cap \overline{A} = \{x\}$. Par suite, $x = a \in A$, et x est un point isolé de A.

16 — A et B jouant des rôles symétriques, il suffit de démontrer que A est fermée dans X. Le résultat étant clair si $A = \varnothing$, nous supposerons $A \neq \varnothing$. On a $A \subset \overline{A}$ par définition de $\overline{A}$. Soit inversement $a \in \overline{A}$; on a *a fortiori* $a \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Or $A \cup B$ étant fermée dans X, d'après l'exercice 12, question 1.*a*, il vient $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} = A \cup B$. Par suite, on a $a \in A$ ou $a \in B$. Mais ayant $a \in \overline{A}$ et $\overline{A} \cap B = \varnothing$, on voit que $a \in A$. Moralité, $\overline{A} \subset A$, donc $\overline{A} = A$, et A est bien fermée dans X.

17 — $(i) \Rightarrow (ii)$: Comme $A \subset \overline{A}$, on a $A \cap U \subset \overline{A} \cap U$, et donc l'inclusion $\overline{A \cap U} \subset \overline{\overline{A} \cap U}$ est toujours vraie. Supposons à présent U ouverte dans X, et montrons inversement que $\overline{\overline{A} \cap U} \subset \overline{A \cap U}$. $\overline{A \cap U}$ étant fermé dans X, il suffit de prouver que $\overline{A} \cap U \subset \overline{A \cap U}$. Le résultat étant clair si $\overline{A} \cap U = \varnothing$, envisageons le cas où $\overline{A} \cap U \neq \varnothing$. Soit $x \in \overline{A} \cap U$; il s'agit de montrer que $x \in \overline{A \cap U}$, c'est-à-dire que pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $V \cap (A \cap U) \neq \varnothing$. Soit donc $V \in \mathcal{V}(x)$. Comme $x \in \overline{A} \cap U$, on a d'une part $x \in \overline{A}$, et donc, pour tout $W \in \mathcal{V}(x)$:

$$W \cap A \;\neq\; \varnothing. \tag{4}$$

D'autre part, on a $x \in U$ avec U ouvert, ce qui implique que $V \cap U \in \mathcal{V}(x)$. En prenant $W = V \cap U$ dans (4), on obtient le résultat souhaité.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons (ii) vérifiée. Pour $A = X \smallsetminus U$, cette condition s'écrit :

$$\overline{\overline{X \smallsetminus U} \cap U} \;=\; \overline{(X \smallsetminus U) \cap U} \;=\; \overline{\varnothing} \;=\; \varnothing.$$

Mais comme $\overline{X \smallsetminus U} \cap U \subset \overline{\overline{X \smallsetminus U} \cap U}$, il vient $\overline{X \smallsetminus U} \cap U = \varnothing$, *i.e.* $\overline{X \smallsetminus U} \subset X \smallsetminus U$. Par suite, $\overline{X \smallsetminus U} = X \smallsetminus U$, donc $X \smallsetminus U$ est un fermé de X, ce qui signifie que U est un ouvert de X.

18 — Désignons par $\mathrm{Int}_X(B)$ et $\mathrm{Int}_A(B)$ les intérieurs respectifs de B dans X et A. On rappelle en outre que, par définition, les ouverts de A sont les sous-ensembles de A de la forme $U_X \cap A$, pour $U_X \subset X$ ouvert dans X.

1) Si $\mathrm{Int}_X(B) = \varnothing$, le résultat est clair. Supposons donc ce cas exclu, et soit $x \in \mathrm{Int}_X(B)$. Il existe alors U_X ouvert de X contenant x tel que $U_X \subset B$. Or $B \subset A$, donc $U_X \cap A = U_X$, et par suite, U_X est un ouvert de A contenant x, ce qui montre bien que $x \in \mathrm{Int}_A(B)$. Ainsi, $\mathrm{Int}_X(B) \subset \mathrm{Int}_A(X)$.
Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, et $A = B = [0,1]$, on a $\mathrm{Int}_X(B) =]0,1[$, tandis que $\mathrm{Int}_A(B) = \mathrm{Int}_A(A) = A = [0,1]$. Ceci montre bien qu'en règle générale, on a $\mathrm{Int}_A(B) \not\subset \mathrm{Int}_X(B)$.
2) D'après 1), il s'agit de montrer que $\mathrm{Int}_A(B) \subset \mathrm{Int}_X(B)$. Le résultat étant clair si $\mathrm{Int}_A(B) = \varnothing$, nous supposerons $\mathrm{Int}_A(B) \neq \varnothing$; soit ainsi $x \in \mathrm{Int}_A(B)$. Par définition des ouverts de A, cela signifie qu'il existe U_X un ouvert de X contenant x tel que $U_X \cap A \subset B$. A étant supposée ouverte dans X, $U_X \cap A$ est également ouverte dans X, et donc $x \in \mathrm{Int}_X(B)$. Par conséquent, $\mathrm{Int}_A(B) \subset \mathrm{Int}_X(B)$.

19 — 1) Soient $x, y, z \in X$ tels que $d(x,z) \neq d(y,z)$. Quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer :

$$d(y,z) \;<\; d(x,z). \tag{5}$$

Comme d est ultramétrique, on a ainsi :

$$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(y,z)\} = d(x,z). \tag{6}$$

Mais on a aussi :

$$d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}. \tag{7}$$

Supposons $d(x,y) < d(y,z)$; (7) se réécrirait alors $d(x,z) \leqslant d(y,z)$, ce qui contredirait (5). On a par suite $d(y,z) \leqslant d(x,y)$, et (7) implique ainsi $d(x,z) \leqslant d(x,y)$. Compte tenu de (6), on aboutit à $d(x,y) = d(x,z)$, ce qui, d'après (5), fournit le résultat souhaité.

2) *a.* Montrons le résultat pour des boules ouvertes, la preuve pour des boules fermées étant *mutatis mutandis* même. Soient $a \in X$, $r > 0$, et $x \in \mathrm{B}(a,r)$. On veut montrer que $\mathrm{B}(a,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$, c'est-à-dire que $\mathrm{B}(a,r) = \mathrm{B}(x,r)$. Soit donc $y \in \mathrm{B}(a,r)$. On a alors $d(a,y) < r$, mais aussi $d(x,a) < r$ puisque $x \in \mathrm{B}(a,r)$. d étant ultramétrique, on en déduit :

$$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,a), d(a,y)\} < r.$$

Ainsi, $y \in \mathrm{B}(x,r)$, et $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}(x,r)$. Par un raisonnement similaire, on montre que $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{B}(a,r)$.

b. Soient $a \in X$ et $r > 0$.

- $\mathrm{B}(a,r)$ est ouverte dans X ; montrons qu'elle est également fermée dans X. Pour cela, on va montrer que $\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \mathrm{B}(a,r)$, l'inclusion $\mathrm{B}(a,r) \subset \overline{\mathrm{B}(a,r)}$ étant claire. Soit donc $x \in \overline{\mathrm{B}(a,r)}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{B}(a,r) \neq \varnothing$. Ceci étant en particulier vrai pour $\varepsilon = r$, fixons $y \in \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{B}(a,r)$. Compte tenu de 2.*a*, il vient $\mathrm{B}(x,r) = \mathrm{B}(y,r) = \mathrm{B}(a,r)$. Par suite, $x \in \mathrm{B}(a,r)$, et $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B}(a,r)$.
- $\mathrm{B}'(a,r)$ est fermée dans X ; montrons qu'elle est également ouverte dans X. Pour cela, on va montrer que $\mathrm{Int}\,[\mathrm{B}'(a,r)] = \mathrm{B}'(a,r)$, l'inclusion $\mathrm{Int}\,[\mathrm{B}'(a,r)] \subset \mathrm{B}'(a,r)$ étant claire. Soit donc $x \in \mathrm{B}'(a,r)$. D'après 2.*a*, on a $\mathrm{B}'(x,r) = \mathrm{B}'(a,r)$. Et comme $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{B}'(x,r)$, il vient $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{B}'(a,r)$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Int}\,[\mathrm{B}'(a,r)]$. Ainsi, $\mathrm{B}'(a,r) \subset \mathrm{Int}\,[\mathrm{B}'(a,r)]$.

3) Soient $a_1, a_2 \in X$ et $r_1, r_2 > 0$ tels que $\mathrm{B}(a_1,r_1) \cap \mathrm{B}(a_2,r_2) \neq \varnothing$. Quitte à échanger les rôles de a_1, r_1 et a_2, r_2, on peut supposer $r_1 \leqslant r_2$. Soit alors $x \in \mathrm{B}(a_1,r_1) \cap \mathrm{B}(a_2,r_2)$. D'après 2.*a*, on a $\mathrm{B}(x,r_1) = \mathrm{B}(a_1,r_1)$ et $\mathrm{B}(x,r_2) = \mathrm{B}(a_2,r_2)$. Et comme $r_1 \leqslant r_2$, il suit $\mathrm{B}(a_1,r_1) = \mathrm{B}(x,r_1) \subset \mathrm{B}(x,r_2) = \mathrm{B}(a_2,r_2)$.

20 — 1) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A}$ est fermée dans X car $\overline{A}$ et $\overline{X \smallsetminus A}$ sont fermées dans X.

2) *a.* Comme $\overline{X \smallsetminus A} = X \smallsetminus \mathring{A}$, on a bien $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big)$.

b. On a $\mathrm{Fr}(X \smallsetminus A) = \overline{X \smallsetminus A} \cap \overline{X \smallsetminus (X \smallsetminus A)} = \overline{X \smallsetminus A} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A} = \mathrm{Fr}(A)$.

c. Comme $\mathring{A}$ est ouverte dans X, on a $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$. Par ailleurs, on a $\mathring{A} \subset A$, donc $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$. D'où, d'après 2.*a* :

$$\mathrm{Fr}\big(\mathring{A}\big) = \overline{\mathring{A}} \cap \Big(X \smallsetminus \mathring{\mathring{A}}\Big) \subset \overline{A} \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = \mathrm{Fr}(A).$$

Comme $\overline{A}$ est fermée dans X, on a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Par ailleurs, $A \subset \overline{A}$, d'où $X \smallsetminus \overline{A} \subset X \smallsetminus A$ puis $\overline{X \smallsetminus \overline{A}} \subset \overline{X \smallsetminus A}$. Ainsi :

$$\mathrm{Fr}\big(\overline{A}\big) = \overline{\overline{A}} \cap \overline{X \smallsetminus \overline{A}} \subset \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A} = \mathrm{Fr}(A).$$

3) *a.* Supposons $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$. D'après 2.*a*, on a alors $\overline{A} \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = \varnothing$, d'où $\overline{A} \subset X \smallsetminus \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = \mathring{A}$. Mais comme $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$, il vient $\mathring{A} = A = \overline{A}$, ce qui montre bien que A est à la fois ouverte et fermée dans X. Réciproquement, supposons A ouverte et fermée dans X. On a alors $\mathring{A} = A = \overline{A}$ et donc, d'après 2.*a*, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = A \cap (X \smallsetminus A) = \varnothing$.

b. Supposons A ouverte dans X, *i.e.* $\mathring{A} = A$. On a alors $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap (X \smallsetminus A)$ en vertu de 2.*a*. Par ailleurs, ayant $A \subset \overline{A}$, il vient $A \cap \mathrm{Fr}(A) = A \cap \overline{A} \cap (X \smallsetminus A) = A \cap (X \smallsetminus A) = \varnothing$.
À l'inverse, supposons $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$. D'après 2.*a*, on a ainsi $\varnothing = A \cap \overline{A} \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = A \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big)$, ce qui entraine $A \subset X \smallsetminus \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = \mathring{A}$. En somme, $A = \mathring{A}$, et A est bien ouverte dans X.

c. Si A est fermée dans X, alors $\overline{A} = A$, et donc $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A} = A \cap \overline{X \smallsetminus A} \subset A$. Inversement, si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, on a $\varnothing = \mathrm{Fr}(A) \cap (X \smallsetminus A) = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A} \cap (X \smallsetminus A) = \overline{A} \cap (X \smallsetminus A)$ puisque $X \smallsetminus A \subset \overline{X \smallsetminus A}$. Ainsi, $\overline{A} \subset X \smallsetminus (X \smallsetminus A) = A$, donc $\overline{A} = A$ et A est bien fermée dans X.

4) Supposons A fermée dans X, *i.e.* $\overline{A} = A$. On a alors :

$$\mathrm{Int}[\mathrm{Fr}(A)] = \mathrm{Int}\Big[\overline{A} \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big)\Big] = \mathring{\overline{A}} \cap \mathrm{Int}\big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = \mathring{A} \cap \mathrm{Int}\big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) \subset \mathring{A} \cap \big(X \smallsetminus \mathring{A}\big) = \varnothing,$$

ce qui montre bien que $\mathrm{Int}[\mathrm{Fr}(A)] = \varnothing$. Par suite, ayant $\overline{\mathrm{Fr}(A)} = \mathrm{Fr}(A)$ d'après 1), on déduit de 2.*a* :

$$\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(A)] = \overline{\mathrm{Fr}(A)} \cap [X \smallsetminus \mathrm{Int}[\mathrm{Fr}(A)]] = \mathrm{Fr}(A) \cap (X \smallsetminus \varnothing) = \mathrm{Fr}(A).$$

5) Comme $\mathrm{Fr}(A)$ est fermée dans X, le résultat est conséquence directe de 4).

21 — $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons $\overline{A} = X$, alors $\mathrm{Int}(X \smallsetminus A) = X \smallsetminus \overline{A} = X \smallsetminus X = \varnothing$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Supposons (iii) non vérifiée, *i.e.* qu'il existe U ouvert non vide de X tel que $U \cap A = \varnothing$. On a alors $U \subset X \smallsetminus A$, d'où $U \subset \mathrm{Int}(X \smallsetminus A)$ par définition de l'intérieur. Par suite, (ii) n'est pas vérifiée.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Supposons (iii) vérifiée, et soient $x \in X$, $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe alors U ouvert de X tel que $\{x\} \subset U \subset V$. Or, d'après (iii), on a $U \cap A \neq \varnothing$, ce qui implique $V \cap A \neq \varnothing$ puisque $U \subset V$. L'arbitraire sur V montre que $x \in \overline{A}$, et l'arbitraire sur x entraine $X \subset \overline{A}$. D'où (i).
Si A vérifie les conditions équivalentes (i) à (iii), A est qualifiée de *dense* dans X.

22 — On a $A \cap U \subset U$, donc $\overline{A \cap U} \subset \overline{U}$. Inversement, le résultat étant clair lorsque $U = \varnothing$, nous supposerons $U \neq \varnothing$. Soit donc $x \in \overline{U}$; pour tout $W \in \mathcal{V}(x)$, on a :

$$W \cap U \;\neq\; \varnothing. \tag{8}$$

Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe alors U_x un ouvert de X tel que $\{x\} \subset U_x \subset V$. En appliquant (8) à $W = U_x \in \mathcal{V}(x)$, on trouve donc $U_x \cap U \neq \varnothing$. U_x et U étant ouverts dans X, $U_x \cap U$ est donc un ouvert non vide de X. Par densité de A dans X, ceci implique $(U_x \cap U) \cap A \neq \varnothing$. Et comme $U_x \subset V$, on a *a fortiori* $V \cap (U \cap A) \neq \varnothing$. Par suite, $x \in \overline{U \cap A}$, et $\overline{U} \subset \overline{U \cap A}$. Au final, on a bien obtenu l'égalité souhaitée.

23 — $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons (i), *i.e.* $\mathring{A} \neq \varnothing$. Il existe alors U un ouvert non vide de X tel que $U \subset A$. Si D est une partie dense de X, il vient ainsi $U \cap D \neq \varnothing$, d'où $A \cap D \neq \varnothing$ puisque $U \subset A$. Par suite, (ii) est vérifiée.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons (i) non vérifiée, *i.e.* $\mathring{A} = \varnothing$. Dans ce cas, $D = X \smallsetminus A$ est dense dans X et $D \cap A = \varnothing$, ce qui montre que (ii) n'est pas vérifiée.

24 — Soit U_X un ouvert non vide de X. Comme A est dense dans X, on a $U_X \cap A \neq \varnothing$. Or, par définition des ouverts de A, $U_A = U_X \cap A$ est donc un ouvert non vide de A, d'où, par densité de B dans A, $U_A \cap B \neq \varnothing$. Et comme $U_A \subset U_X$, il vient en particulier $U_X \cap B \neq \varnothing$. L'arbitraire sur U_X montre que B est bien dense dans X.

25 — • D'après l'exercice 12, question 2), et par densité de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathring{A} \;\supset\; \mathrm{Int}(]0,1[) \cup \mathrm{Int}(]1,2[) \cup \mathrm{Int}(\mathbb{Q} \cap\,]2,3[) \cup \mathrm{Int}(\{4\}) \;=\;]0,1[\, \cup\,]1,2[\, \cup \big[\mathring{\mathbb{Q}} \cap \mathrm{Int}(]2,3[)\big] \;=\;]0,1[\, \cup\,]1,2[.$$

Rappelons que $\mathring{A} = \{a \in A \mid \exists\, \varepsilon > 0,\ \mathrm{B}(a,\varepsilon) \subset A\}$. Pour déterminer entièrement $\mathring{A}$, il nous reste maintenant à exhiber l'ensemble des points $x \in A \smallsetminus (]0,1[\cup]1,2[) = (\mathbb{Q} \cap\,]2,3[) \cup \{4\}$ pour lesquels il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subset A$. Soient donc $x \in \mathbb{Q} \cap\,]2,3[$, $\varepsilon > 0$ et $\rho = \min(x-2, 3-x) > 0$.

– Si $\varepsilon \leqslant \rho$, alors $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subset\,]2,3[$ et, par densité de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ tel que $y \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$. Par suite, $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \not\subset A$.
– Si $\varepsilon > \rho$, alors $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \supset \mathrm{B}(x,\rho)$ et donc, d'après le point précédent, $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \not\subset A$.

Pour tous $x \in \mathbb{Q} \cap\,]2,3[$ et $\varepsilon > 0$, on a donc $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \not\subset A$, ce qui prouve qu'aucun point de $\mathbb{Q} \cap\,]2,3[$ n'est contenu dans $\mathring{A}$. De façon semblable, on montre que $4 \notin \mathring{A}$. Par conséquent :

$$\mathring{A} \;=\;]0,1[\, \cup\,]1,2[.$$

Dès lors, on obtient sans peine :

$$\overline{\mathring{A}} \;=\; [0,2] \qquad \text{et} \qquad \mathring{\overline{\mathring{A}}} \;=\;]0,2[.$$

• D'après la question 1.a de l'exercice 12, on a :

$$\overline{A} \;=\; \overline{]0,1[} \cup \overline{]1,2[} \cup \overline{\mathbb{Q} \cap\,]2,3[} \cup \overline{\{4\}} \;=\; [0,1] \cup [1,2] \cup \overline{\mathbb{Q} \cap\,]2,3[} \cup \{4\} \;=\; [0,2] \cup \overline{\mathbb{Q} \cap\,]2,3[} \cup \{4\}.$$

Or, d'après la question 1.b de ce même exercice, nous avons $\overline{\mathbb{Q} \cap\,]2,3[} \subset \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{]2,3[}$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, et ainsi $\overline{\mathbb{Q} \cap\,]2,3[} \subset [2,3]$. À l'inverse, soient $x \in [2,3]$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il est clair que $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap (\mathbb{Q} \cap\,]2,3[) \neq \varnothing$. Ainsi, $[2,3] \subset \overline{\mathbb{Q} \cap\,]2,3[}$, et donc $\overline{\mathbb{Q} \cap\,]2,3[} = [2,3]$. Au final, on a obtenu :

$$\overline{A} \;=\; [0,3] \cup \{4\}.$$

On en déduit sans difficulté :

$$\mathring{\overline{A}} \;=\;]0,3[\qquad \text{et} \qquad \overline{\mathring{\overline{A}}} \;=\; [0,3].$$

26 — 1) L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est évidente ; montrons $(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons (i) vérifiée, et soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de $\{d(a,x) \mid a \in A\}$. Si $y \in X$, on a $d(a,y) \leqslant d(a,x) + d(x,y) \leqslant M + d(x,y)$ pour tout $a \in A$, et $\{d(a,y) \mid a \in A\}$ est donc majoré par $M + d(x,y)$. D'où (ii).

2) Si $A = \varnothing$ ou A vérifie les conditions équivalentes de 1), A est dite *bornée* dans X.

27 — 1) Il est clair que $\delta(A) = 0$ si A contient au plus un point. Si A contient au moins deux points distincts $a, b \in X$, on a alors $d(a,b) > 0$, et donc $\delta(A) \geqslant d(a,b) > 0$. D'où l'équivalence.

2) Le résultat étant clair si $A = \varnothing$ ou $\delta(B) = +\infty$, nous supposerons ces cas de figure exclus. Soient donc $x, y \in A$. Comme $A \subset B$, on a $x, y \in B$, d'où $d(x,y) \leqslant \delta(B)$. Pour tous $x, y \in A$, $\delta(B)$ est donc un majorant de $d(x,y)$. Par définition de la borne supérieure, ceci implique $\delta(A) \leqslant \delta(B)$.

3) Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\delta(A) \leqslant \delta(\overline{A})$ d'après 2) ; le résultat est donc clair si $A = \varnothing$ ou $\delta(A) = +\infty$. Supposons ces cas de figure exclus, et soient $x, y \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$. On a alors $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}(y,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$; fixons donc $a \in \mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap A$ et $b \in \mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap A$. Il vient ainsi $d(a,x) < \varepsilon$, $d(b,x) < \varepsilon$ et $d(a,b) \leqslant \delta(A)$, d'où :

$$d(x,y) \;\leqslant\; d(x,a) + d(a,b) + d(b,x) \;\leqslant\; 2\varepsilon + \delta(A).$$

L'arbitraire sur x et y entraine $\delta\left(\overline{A}\right) \leqslant 2\varepsilon + \delta(A)$, et l'arbitraire sur ε implique $\delta\left(\overline{A}\right) \leqslant \delta(A)$. D'où l'égalité.

4) L'assertion est claire si $\delta(A \cup B) = +\infty$; supposons ainsi $\delta(A \cup B)$ fini. Comme $A \cap B \neq \varnothing$, on a $A \cup B \neq \varnothing$. Soient donc $x, y \in A \cup B$.

– Si $x \in A$ et $y \in A$, on a $d(x,y) \leqslant \delta(A) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

– De même, si $x \in B$ et $y \in B$, on a $d(x,y) \leqslant \delta(B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

– Supposons à présent $x \in A$, $y \in B$. Comme $A \cap B \neq \varnothing$, donnons-nous $z \in A \cap B$. On a alors $z \in A$, donc $d(x,z) \leqslant \delta(A)$, mais aussi $z \in B$, donc $d(z,y) \leqslant \delta(B)$. Par suite, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

– Si $x \in B$ et $y \in A$, par symétrie de d, on se ramène au cas où $x \in A$ et $y \in B$.

Dans tous les cas de figure envisageables, on a $d(x,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$. Et x, y étant quelconques dans X, on en déduit bien $\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

28 — 1) Soient $x, y, z \in E$. Si $x = y$, on a clairement $d_E(x,y) = 0$. À l'inverse, si $0 = d_E(x,y) = \|x - y\|$, d'après (N_1), on a $x - y = 0_E$, *i.e.* $x = y$. Par ailleurs, on a $\|y - x\| = \|-1(x-y)\| = |-1|\,\|x - y\| = \|x - y\|$ puisque (N_2) est vérifié, soit $d_E(y,x) = d_E(x,y)$. Enfin, compte tenu de (N_3) :

$$d_E(x,z) \;=\; \|x - z\| \;=\; \|(x-y) + (y-z)\| \;\leqslant\; \|x-y\| + \|y-z\| \;=\; d_E(x,y) + d_E(y,z).$$

Ainsi, d_E vérifie les axiomes (D_1) à (D_3) définissant une distance ; il s'agit donc d'une distance sur E.

2) *a.* Soit $j \in \{1, 2, \infty\}$. Il est clair que $d_j(x,y) = \|x - y\|_j$ pour tous $x, y \in E$.

(N_1) Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_j = 0$, on a alors $0 = \|x - 0_E\|_j = d(x, 0_E)$, d'où $x = 0_E$ puisque d_j vérifie (D_1).

(N_2) Le fait que $\|\cdot\|_j$ vérifie (N_2) résulte de sa définition. En effet, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_1 \;&=\; |\lambda x_1| + \cdots + |\lambda x_n| \;=\; |\lambda|(|x_1| + \cdots + |x_n|) \;=\; |\lambda|\;\|x\|_1\,, \\
\|\lambda x\|_2 \;&=\; \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2} \;=\; \sqrt{\lambda^2\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)} \;=\; |\lambda|\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \;=\; |\lambda|\;\|x\|_2\,, \\
\|\lambda x\|_\infty \;&=\; \max\{|\lambda x_i| \mid i \in [\![1,n]\!]\} \;=\; \max\{|\lambda|\,|x_i| \mid i \in [\![1,n]\!]\} \\
&\;=\; |\lambda| \max\{|x_i| \mid i \in [\![1,n]\!]\} \;=\; |\lambda|\;\|x\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

(N_3) Comme d_j vérifie (D_3), pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|x + y\|_j \;=\; \|x - (-y)\| \;=\; d_j(x, -y) \;\leqslant\; d(x, 0_E) + d(0_E, -y) \;=\; \|x\|_j + \|y\|_j\,.$$

Par suite, $\|\cdot\|_j$ est bien une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, dont la distance associée est d_j.

b. • Montrons que N_1 est une norme sur $E \times F$. Soient $(x,y),\ (x',y') \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N_1) Si $(x,y) = (0_E, 0_F)$, on a $N_1(x,y) = \|0_E\|_E + \|0_F\|_F = 0$. Inversement, si $(x,y) \neq (0_E, 0_F)$, on a $x \neq 0_E$ ou $y \neq 0_F$, donc $\|x\|_E > 0$ ou $\|y\|_F > 0$, et $N_1(x,y) = \|x\|_E + \|y\|_F > 0$.

(N_2) Comme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ vérifient (N_2) sur E et F respectivement, on a :

$$N_1(\lambda x, \lambda y) \;=\; \|\lambda x\|_E + \|\lambda y\|_F \;=\; |\lambda|\;\|x\|_E + |\lambda|\;\|y\|_F \;=\; |\lambda|\left(\|x\|_E + \|y\|_F\right) \;=\; |\lambda| N_1(x,y).$$

(N_3) $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ vérifiant (N_3) sur E et F respectivement, on a :

$$\begin{aligned}
N_1(x + x', y + y') \;&=\; \|x + x'\|_E + \|y + y'\|_F \\
&\leqslant\; \|x\|_E + \|x'\|_E + \|y\|_F + \|y'\|_F \\
&=\; (\|x\|_E + \|y\|_F) + (\|x'\|_E + \|y'\|_F) \;=\; N_1(x,y) + N_1(x',y').
\end{aligned}$$

• Montrons que N_2 est une norme sur $E \times F$. Soient $(x,y),\ (x',y') \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N_1) Si $(x,y) = (0_E, 0_F)$, on a $N_2(x,y) = \sqrt{\|0_E\|_E^2 + \|0_F\|_F^2} = 0$. Inversement, si $(x,y) \neq (0_E, 0_F)$, on a $x \neq 0_E$ ou $y \neq 0_F$, donc $\|x\|_E > 0$ ou $\|y\|_F > 0$, d'où $N_2(x,y) = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2} > 0$.

(N$_2$) Comme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ vérifient (N$_2$) sur E et F respectivement, on a :

$$N_2(\lambda x, \lambda y) \;=\; \sqrt{\|\lambda x\|_E^2 + \|\lambda y\|_F^2} \;=\; \sqrt{|\lambda|^2 \left(\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2\right)} \;=\; |\lambda|\sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2} \;=\; |\lambda| N_2(x,y).$$

(N$_3$) Il s'agit de montrer que $N_2(x+x', y+y') \leqslant N_2(x,y) + N_2(x',y')$, ou, de façon équivalente, que $N_2^2(x+x', y+y') \leqslant N_2^2(x,y) + N_2^2(x',y') + 2N_2(x,y)N_2(x',y')$. Comme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ vérifient (N$_3$) sur E et F respectivement, on a :

$$\begin{aligned} N_2^2(x+x', y+y') &= \|x+x'\|_E^2 + \|y+y'\|_F^2 \\ &\leqslant \left(\|x\|_E + \|x'\|_E\right)^2 + \left(\|y\|_F + \|y'\|_F\right)^2 \\ &= \|x\|_E^2 + \|x'\|_E^2 + \|y\|_F^2 + \|y'\|_F^2 + 2\left(\|x\|_E \|x'\|_E + \|y\|_F \|y'\|_F\right) \\ &= N_2^2(x,y) + N_2^2(x',y') + 2\left(\|x\|_E \|x'\|_E + \|y\|_F \|y'\|_F\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir (2) dans le corrigé de l'exercice 2), on a :

$$\|x\|_E \|x'\|_E + \|y\|_F \|y'\|_F \;\leqslant\; \sqrt{\|x\|_E^2 + \|x'\|_E^2} \cdot \sqrt{\|y\|_F^2 + \|y'\|_F^2} \;=\; N_2(x,y)N_2(x',y'). \tag{10}$$

Compte tenu de (9) et (10), on a bien obtenu l'inégalité souhaitée.

- Montrons que N_∞ est une norme sur $E \times F$. Soient $(x,y),\ (x',y') \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N$_1$) Si $(x,y) = (0_E, 0_F)$, on a $N_\infty(x,y) = \max\{\|0_E\|_E, \|0_F\|_F\} = 0$. À l'inverse, si $(x,y) \neq (0_E, 0_F)$, on a $x \neq 0_E$ ou $y \neq 0_F$, donc $\|x\|_E > 0$ ou $\|y\|_F > 0$, d'où $N_\infty(x,y) = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\} > 0$.

(N$_2$) Comme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ vérifient (N$_2$) sur E et F respectivement, on a :

$$\begin{aligned} N_\infty(\lambda x, \lambda y) &= \max\{\|\lambda x\|_E,\ \|\lambda y\|_F\} \;=\; \max\{|\lambda|\ \|x\|_E,\ |\lambda|\ \|y\|_F\} \\ &\phantom{= \max\{\|\lambda x\|_E,\ \|\lambda y\|_F\}}\;=\; |\lambda| \max\{\|x\|_E,\ \|y\|_F\} \;=\; |\lambda| N_\infty(x,y). \end{aligned}$$

(N$_3$) Supposons $N_\infty(x+x', y+y') = \max\{\|x+x'\|_E, \|y+y'\|_F\} = \|x+x'\|_E$; $\|\cdot\|_E$ vérifiant (N$_3$) sur E, on a :

$$\begin{aligned} N_\infty(x+x', y+y') &= \|x+x'\| \\ &\leqslant \|x\|_E + \|x'\|_E \\ &\leqslant \max\{\|x\|_E,\ \|y\|_F\} + \max\{\|x'\|_E,\ \|y'\|_F\} \;=\; N_\infty(x,y) + N_\infty(x',y'). \end{aligned}$$

Le cas où $N_\infty(x+x', y+y') = \|y+y'\|_F$ se traite de façon similaire.

N_1, N_2 et N_∞ sont donc des normes sur $E \times F$. Désignons par d_E et d_F les distances respectivement associée aux normes $\|\cdot\|_E$ sur E et $\|\cdot\|_F$ sur F, puis par D_1, D_2, D_∞ les distances respectivement associées aux normes N_1, N_2, N_∞ sur $E \times F$. Pour tous $(x,y), (x',y') \in E \times F$, il est clair que :

$$\begin{aligned} D_1[(x,y),\ (x',y')] &= d_E(x,x') + d_F(y,y'), \\ D_2[(x,y),\ (x',y')] &= \sqrt{d_E^2(x,x') + d_F^2(y,y')}, \\ D_\infty[(x,y),\ (x',y')] &= \max\{d_E(x,x'),\ d_F(y,y')\}. \end{aligned}$$

En somme, les distances D_1, D_2, D_∞ sur $E \times F$ définissent la structure de l'espace métrique produit de (E, d_E) et (F, d_F).

c. Soit $j \in \{1, 2, \infty\}$. Si $E = F = \mathbb{R}$, N_j correspond à la norme $\|\cdot\|_j$ de 2.*a* sur $\mathbb{R}^2$. De proche en proche, pour $n \geqslant 2$, si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_j$ sur $\mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, alors la norme N_j sur $\mathbb{R}^{n+1}$ correspond précisément à la norme $\|\cdot\|_j$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

3) Nous noterons désormais $\|\cdot\|$ la norme $\|\cdot\|_E$ sur E.

a. Comme $E \neq \{0_E\}$, pour tout $y \in E \smallsetminus \{0_E\}$, on a $\|y\| > 0$, et $x = y/\|y\|$ vérifie alors $\|x\| = 1$, ce qui implique $\|\rho x\| = \rho$ pour tout $\rho > 0$. Par suite, si $a = 0_E$, pour $y \in E \smallsetminus \{0_E\}$ quelconque et $\rho = r$, on trouve $\rho x \in \mathrm{S}(a,r)$; en revanche, si $a \neq 0_E$, pour $y = a$ et $\rho = \|a\| + r$, on a $\|\rho x - a\| = r$, *i.e.* $\rho x \in \mathrm{S}(a,r)$.

b. On a vu que $\mathrm{B}(a,r) \subset [\mathrm{B}'(a,r)]^\circ$ dans l'exercice 11. Soient maintenant $x \in \mathrm{S}(a,r) = \mathrm{B}'(a,r) \smallsetminus \mathrm{B}(a,r)$, $\varepsilon > 0$, et considérons le point :

$$y \;=\; a + \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a).$$

On a $\|x-a\| = r$, ce qui implique d'une part :

$$\|y-x\| \;=\; \Big\|\Big[a + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a)\Big] - x\Big\| \;=\; \Big\|\frac{\varepsilon}{2r}(x-a)\Big\| \;=\; \frac{\varepsilon}{2r}\,\|x-a\| \;=\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon,$$

i.e. $y \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$. D'autre part, on a :

$$\|y-a\| \;=\; \Big\|\Big[a + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a)\Big] - a\Big\| \;=\; \Big\|\Big(1+\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a)\Big\| \;=\; \Big(1+\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,\|x-a\| \;=\; r + \frac{\varepsilon}{2} \;>\; r,$$

ce qui prouve que $y \notin \mathrm{B}(a,r)$. Pour tous $x \in \mathrm{S}(a,r)$ et $\varepsilon > 0$, on a donc $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \not\subset \mathrm{B}(a,r)$, ce qui montre que $x \notin [\mathrm{B}'(a,r)]^\circ$. Par conséquent, on a bien $[\mathrm{B}'(a,r)]^\circ = \mathrm{B}(a,r)$.

c. Toujours d'après l'exercice 11, on a $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B}'(a,r)$. Soit inversement $x \in \mathrm{B}'(a,r)$. Si $\|x-a\| < r$, on a $x \in \mathrm{B}(a,r) \subset \overline{\mathrm{B}(a,r)}$; envisageons donc le cas où $\|x-a\| = r$. Soient $\varepsilon > 0$, et :

$$y \;=\; a + \Big(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a).$$

On a alors $y \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$, puisque :

$$\|y-x\| \;=\; \Big\|\Big[a + \Big(1-\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a)\Big] - x\Big\| \;=\; \Big\|\frac{-\varepsilon}{2r}(x-a)\Big\| \;=\; \frac{\varepsilon}{2r}\,\|x-a\| \;=\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon.$$

Par ailleurs, si $\varepsilon \leqslant 2r$, on a $y \in \mathrm{B}(a,r)$, puisque :

$$\|y-a\| \;=\; \Big\|\Big[a + \Big(1-\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a)\Big] - a\Big\| \;=\; \Big\|\Big(1-\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,(x-a)\Big\| \;=\; \Big(1-\frac{\varepsilon}{2r}\Big)\,\|x-a\| \;=\; r - \frac{\varepsilon}{2} \;<\; r.$$

Pour tout $\varepsilon \in \,]0,2r]$, on a donc $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{B}(a,r) \neq \varnothing$. Enfin, lorsque $\varepsilon > 2r$, ayant $\mathrm{B}(x,2r) \subset \mathrm{B}(x,\varepsilon)$, on a $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{B}(a,r) \neq \varnothing$ d'après ce qui précède. Moralité, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{B}(a,r) \neq \varnothing$, donc $x \in \overline{\mathrm{B}(a,r)}$. Au final, l'arbitraire sur $x \in \mathrm{B}'(a,r)$ montre que $\mathrm{B}'(a,r) \subset \overline{\mathrm{B}(a,r)}$.

d. Comme $\mathrm{B}(a,r)$ est ouverte dans E, d'après 3.*b* et la question 2.*a* de l'exercice 20, on a :

$$\mathrm{Fr}[\mathrm{B}(a,r)] \;=\; \overline{\mathrm{B}(a,r)} \cap [E \smallsetminus [\mathrm{B}(a,r)]^\circ] \;=\; \mathrm{B}'(a,r) \cap [E \smallsetminus \mathrm{B}(a,r)] \;=\; \mathrm{S}(a,r)\,.$$

Par ailleurs, $\mathrm{B}'(a,r)$ étant fermée dans E, d'après 3.*c* et la question 2.*a* de l'exercice 20, on a :

$$\mathrm{Fr}[\mathrm{B}'(a,r)] \;=\; \overline{\mathrm{B}'(a,r)} \cap [E \smallsetminus [\mathrm{B}'(a,r)]^\circ] \;=\; \mathrm{B}'(a,r) \cap [E \smallsetminus \mathrm{B}(a,r)] \;=\; \mathrm{S}(a,r)\,.$$

4) L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente. Si (ii) est vérifiée, on a $\mathrm{B}'(a,r) = \overline{\mathrm{B}(a,r)} = \overline{\mathrm{B}(a',r')} = \mathrm{B}'(a',r')$ d'après 3.*c*, d'où $(ii) \Rightarrow (iii)$. Si (iii) est vérifiée, on a $\mathrm{S}(a,r) = \mathrm{Fr}[\mathrm{B}'(a,r)] = \mathrm{Fr}[\mathrm{B}'(a',r')] = \mathrm{S}(a',r')$ d'après 3.*d*, d'où $(iii) \Rightarrow (iv)$. Il reste donc à prouver que $(iv) \Rightarrow (i)$.
Supposons donc (iv) vérifiée. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{S}(a,r)$, on a :

$$\|x_1 - x_2\| \;\leqslant\; \|x_1 - a\| + \|a - x_2\| \;\leqslant\; 2r.$$

Par ailleurs, fixant $x_1 \in \mathrm{S}(a,r)$ et posant $x_2 = 2a - x_1$, on constate que $\|x_1 - x_2\| = \|2(x-a)\| = 2r$. Ainsi :

$$2r \;=\; \max\{\|x_1 - x_2\| \mid x_1, x_2 \in \mathrm{S}(a,r)\}.$$

On montre de la même façon que $2r' = \max\{\|x_1 - x_2\| \mid x_1, x_2 \in \mathrm{S}(a',r')\}$. Et comme $\mathrm{S}(a',r') = \mathrm{S}(a,r)$, on en déduit que $r' = r$. Il reste à montrer que $a' = a$.
Par l'absurde, supposons avoir $a' \neq a$; on a alors $\|a' - a\| > 0$. Considérons donc :

$$x \;=\; a + \left(\frac{r}{\|a'-a\|}\right)(a'-a).$$

On a $x \in \mathrm{S}(a,r)$, puisque :

$$\|x-a\| \;=\; \left\|\frac{r}{\|a'-a\|}(a'-a)\right\| \;=\; \frac{r}{\|a'-a\|} \cdot \|a'-a\| \;=\; r.$$

Mais en même temps, on a $x \notin \mathrm{S}(a',r) = \mathrm{S}(a,r)$, puisque :

$$\|x-a'\| \;=\; \left\|\left(1 + \frac{r}{\|a'-a\|}\right)(a'-a)\right\| \;=\; \left(1 + \frac{r}{\|a'-a\|}\right)\|a'-a\| \;=\; \|a'-a\| + r \;>\; r,$$

d'où une contradiction. Par suite, $a' = a$, et on a obtenu (i).