Solution de la Série N^{o}1 : Analyse numérique matricielle

Exercice 1

1. Soit A une matrice carrée hermitienne. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.
2. Soit A une matrice carrée. Montrer que $\mathrm{Sp}(A^*A) \subset [0, +\infty[$.
3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée.
   (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ où $D_i = \{z \,/\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\}$
   (b) En déduire que si pour tout i : $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$, alors A est inversible.
4. Soit A une matrice diagonalisable, dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Montrer que :
$$\lim_{p\to+\infty} A^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_i| < 1,\ \forall 1 \leq i \leq n.$$

Solution 1

1. Soit A une matrice carrée hermitienne. Montrons que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$: soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors il existe $v \neq 0$ un vecteur non nul tel que $Av = \lambda v$, donc
$$(Av, v) = (\lambda v, v) \quad \Leftrightarrow \quad (v, A^*v) = \lambda(v, v)$$
or $A^*v = \overline{\lambda}v$ où $\overline{\lambda}$ est le conjugué de λ, alors
$$(v, \overline{\lambda}v) = \lambda(v, v) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lambda}\|v\|^2 = \lambda\|v\|^2$$
comme v est non nul, $\|v\|^2 \neq 0$, donc $\lambda = \overline{\lambda}$; ce qui montre que λ est un réel ; soit $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.
2. Soit A une matrice carrée. Montrons que $\mathrm{Sp}(A^*A) \subset [0, +\infty[$: soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^*A)$, alors il existe $v \neq 0$ un vecteur non nul tel que $A^*Av = \lambda v$, donc
$$(A^*Av, v) = (\lambda v, v) \quad \Leftrightarrow \quad (Av, Av) = \|Av\|^2 = \lambda(v, v) = \lambda\|v\|^2$$
comme v est non nul, $\|v\|^2 > 0$ et $\|Av\|^2 \geq 0$, donc λ et $\|v\|^2$ ont le même signe ; ce qui montre que λ est un réel positif ; soit $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée.
   (a) Montrons que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ où $D_i = \{z \,/\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\}$: soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors il existe $v \neq 0$ un vecteur non nul tel que $Av = \lambda v$; donc
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \lambda v_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j - a_{ii}v_i = \lambda v_i - a_{ii}v_i = (\lambda - a_{ii})v_i$$

donc

$$\sum_{j\neq i} a_{ij}v_j = (\lambda - a_{ii})v_i$$

soit i_o tel que $|v_{i_o}| = \max_{1\leq j\leq n}|v_j|$, on a bien $|v_{i_o}| \neq 0$; alors $\displaystyle\sum_{j\neq i_o} a_{i_oj}v_j = (\lambda - a_{i_oi_o})v_{i_o}$; donc

$$\sum_{j\neq i_o} |a_{i_oj}||v_j| \geq |\lambda - a_{i_oi_o}|\,|v_{i_o}|$$

d'où

$$|\lambda - a_{i_oi_o}| \leq \sum_{j\neq i_o} |a_{i_oj}|\frac{|v_j|}{|v_{i_o}|} \leq \sum_{j\neq i_o} |a_{i_oj}| \quad \text{car} \quad \frac{|v_j|}{|v_{i_o}|} \leq 1$$

finalement il existe i_o tel que $\lambda \in D_{i_o} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$; d'où $\mathrm{Sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

(b) supposons que pour tout i on a $|a_{ii}| > \displaystyle\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$: si A n'est pas inversible alors 0 est une valeur propre de A ; donc $0 \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$; ce qui montre qu'il existe i_o tel que $0 \in D_{i_o}$; d'où

$$|a_{i_oi_o}| \leq \sum_{j\neq i_o} |a_{i_oj}|$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse ; finalement A est inversible.

4. Soit A une matrice diagonalisable, dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Montrons que :

$$\lim_{p\to+\infty} A^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_i| < 1,\ \forall 1 \leq i \leq n$$

A est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

donc

$$(P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^pP = D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p)$$

or

$$\lim_{p\to+\infty} P^{-1}A^pP = P^{-1}(\lim_{p\to+\infty} A^p)P = P^{-1}(O)P = (O) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{p\to+\infty} \lambda_i^p = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

alors

$$\lim_{p\to+\infty} A^p = (O) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{p\to+\infty} \lambda_i^p = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_i| < 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

5. Soit A et B deux matrices carrées de même ordre. Montrons que AB et BA ont les mêmes valeurs propres : en effet, soit A une matrice inversible et B une matrice de même ordre que A, alors on a

$$\begin{aligned} \det(A)\det(BA - \lambda I) &= \det(A(BA - \lambda I)) = \det(ABA - \lambda A) = \det((AB - \lambda I)A) \\ &= \det(AB - \lambda I)\det(A) \end{aligned}$$

comme $\det(A) \neq 0$, alors $\det(BA - \lambda I) = \det(AB - \lambda I)$; d'où $P_{BA}(\lambda) = P_{AB}(\lambda)$ où P_{BA} est le polynôme caractéristique de BA et P_{AB} est le polynôme caractéristique de AB. Finalement, les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

Exercice 2
Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle et B une matrice telle que $\|B\| < 1$.

1. Montrer que $(I - B)$ et $(I + B)$ sont inversibles, et que
$$\frac{1}{1 + \|B\|} \leq \|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$
2. Montrer que la série de terme général $(I + B + \ldots + B^n)$ converge vers $(I - B)^{-1}$.

Solution 2
Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle et B une matrice telle que $\|B\| < 1$.

1. – Montrons que $(I - B)$ et $(I + B)$ sont inversibles : en effet,
   soit u un vecteur quelconque tel que $(I \pm B)u = 0$, alors montrons que $u = 0$ et $I \pm B \neq 0$?
   si $u \neq 0$, alors on a $u \pm Bu = 0$; donc $Bu = \mp u$; d'où en passant à la norme il vient
   $$\|u\| = \|Bu\| \leq \|B\|\,\|u\|$$
   or $u \neq 0$, alors $\|u\| \neq 0$; d'où $1 \leq \|B\|$; ce qui est absurde ;
   finalement $u = 0$ et $I \pm B \neq 0$; ce qui prouve que $I \pm B$ est inversible
   – Montrons que $\frac{1}{1+\|B\|} \leq \|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$: la matrice $I + B$ est inversible, alors
   $$(I + B)^{-1} = I - B(I + B)^{-1}$$
   En passant à la norme, il vient
   $$\|(I + B)^{-1}\| \leq \|I\| + \|B\|\,\|(I + B)^{-1}\| \quad \Rightarrow \quad \|(I + B)^{-1}\|(1 - \|B\|) \leq \|I\|$$
   on prend la norme matricielle induite, alors $\|I\| = 1$; d'où $\|(I+B)^{-1}\|(1-\|B\|) \leq 1$; ce qui prouve
   $$\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \quad (\clubsuit)$$
   ceci d'une part et d'autre part, on a $(I + B)^{-1} = I - B(I + B)^{-1}$; alors
   $$\|I\| - \|B\|\,\|(I + B)^{-1}\| \leq \|(I + B)^{-1}\| \quad \Rightarrow \quad \|I\| \leq \|B\|\,\|(I + B)^{-1}\| + \|(I + B)^{-1}\|$$
   donc
   $$\frac{1}{1 + \|B\|} \leq \|(I + B)^{-1}\| \quad (\spadesuit)$$
   d'après $(\clubsuit)$ et $(\spadesuit)$, il vient
   $$\frac{1}{1 + \|B\|} \leq \|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = (1-x^{n+1})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: par récurrence sur n, on a
   - pour $n = 1$, on a $\sum_{k=0}^{1} x^k = 1 + x$, alors $(1-x)(1+x) = 1 - x^2$;
     donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
   - On suppose que la propriété est juste pour l'ordre $(n-1)$, soit $(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 - x^n$, alors montrons que la propriété est encore juste pour l'ordre n. On a

     $$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k + (1-x)x^n = (1-x^n) + (1-x)x^n = 1 - x^{n+1}$$

   - D'après la propriété de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

     $$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}.$$

3. Montrons que la série de terme général $(I + B + \ldots + B^n)$ converge vers $(I-B)^{-1}$: en effet, on pose $S_n = I + B + \ldots + B^n$, alors on a

   $$\|S_n\| \le \|I\| + \|B\| + \ldots + \|B\|^n = \sum_{k=0}^{n} \|B\|^k = \frac{1 - \|B\|^{n+1}}{1 - \|B\|}$$

   par passage à la limite, il vient

   $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \|B\|^k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \|B\|^{n+1}}{1 - \|B\|} = \frac{1}{1 - \|B\|}$$

   ceci car $\lim_{n \to +\infty} \|B\|^{n+1} = 0$ puisque $\|B\| < 1$; d'où la série $\sum_{n \ge 0} B^n$ converge normalement ; finalement la série $\sum_{n \ge 0} B^n$ converge. Montrons que $(I-B)\sum_{n \ge 0} B^n = I$?
   on a $(I-B)\sum_{k=0}^{n} B^k = I - B^{n+1}$; alors par passage à la limite il vient

   $$(I-B)\sum_{n \ge 0} B^n = I$$

   d'où le résultat $(I-B)^{-1} = \sum_{n \ge 0} B^n$ car $I - B$ est inversible.

Exercice 3

Existe t-il des valeurs du nombre α pour lesquelles l'application

$$\phi : \mathbb{R}^{(n \times n)} \to [0, +\infty[, \quad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \longmapsto \phi(A) = \alpha \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$$

est une norme matricielle ?

Solution 3

Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^{(n\times n)} \to [0,+\infty[, \quad A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \longmapsto \phi(A) = \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$; déterminons α pour lesquels ϕ soit une norme matricielle sosu-multiplicative : en effet, vérifions les conditions de la norme matricielle.

- si $\phi(A)=0$, alors $\alpha \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| = 0$ pour tout $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$; donc $\max\limits_{1\leq i,j\leq n} (\alpha|a_{ij}|) = 0$ pour tout $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$; d'où $\alpha|a_{ij}|=0$ pour tout $1\leq i,j\leq n$;
  ce qui montre que $|a_{ij} = 0$ pour tout $1\leq i,j\leq n$ dès que $\alpha\neq 0$,
  et comme $\phi(A)\geq 0$ pour tout $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, alors la première condition est $\alpha>0$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$\phi(\lambda A) = \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} |\lambda\, a_{ij}| = \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} (|\lambda|\,|a_{ij}|) = |\lambda|\,(\alpha \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|) = |\lambda|\,\phi(A)$$

  d'où ϕ satisfait la condition d'homogéniète.
- Soient $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux éléments dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, alors

$$|a_{ij}+b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|, \quad \forall 1\leq i,j\leq n$$

  or $|a_{ij}| \leq \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ et $|b_{ij}| \leq \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij}|$, alors

$$|a_{ij}+b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| + \max_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij}| = M, \quad \forall 1\leq i,j\leq n$$

  où M est une constante ne dépendant pas de i et j. D'où

$$\alpha \max_{1\leq i,j\leq n} (|a_{ij}+b_{ij}|) \leq \alpha\, M = \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| + \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij}|$$

  finalement, on obtient

$$\phi(A+b) \leq \phi(A) + \phi(B), \quad \forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

  D'où l'application ϕ est une norme sur $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- Pour que cette norme soit sous-multiplicative, il suffit que $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour tout $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
  Soit $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, alors on a $A\,B = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}, \quad \forall 1\leq i,j\leq n$$

  donc

$$\phi(A\,B) = \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} |c_{ij}| = \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right| \leq \quad \alpha \max_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\ |b_{kj}|\right)$$

  or $|a_{ik}| \leq \dfrac{\phi(A)}{\alpha}$ et $|b_{kj}| \leq \dfrac{\phi(B)}{\alpha}$, alors $\phi(A\,B) \leq \dfrac{n}{\alpha}\ \phi(A)\phi(B)$; donc pour que $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour tout $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, il suffit que $\dfrac{n}{\alpha}\ \phi(A)\phi(B) \leq \phi(A)\phi(B)$; soit $\dfrac{n}{\alpha} \leq 1$.
  Finalement, pour que ϕ soit une norme matricielle sous-multiplicative, il suffit que $\alpha>0$ et $\dfrac{n}{\alpha} \leq 1$; d'où $\alpha \geq n > 0$.

Exercice 4
Soients

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \triangle b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0001 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.
2. Résoudre les systèmes : $Ax = b$ et $A(x + \triangle x) = b + \triangle b$.
3. Comparer les erreurs relatives $\dfrac{\|\triangle x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ et $\dfrac{\|\triangle b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

Solution 4
Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \triangle b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0001 \end{pmatrix}.$

1. Calculons le conditionnement $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$: en effet, la matrice A est inversible car $\det(A) = 10^{-4} \neq 0$ et

$$A^{-1} = 10^4 \begin{pmatrix} 1.0001 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

or la norme matricielle $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$, alors pour $n = 2$ et la matrice A on obtient

$$\|A\|_\infty = 2.0001 \quad \text{et} \quad \|A^{-1}\|_\infty = 2.0001\, 10^4$$

donc $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2.0001)^2\, 10^4$ qui est très grand par rapport à 1 ; d'où on conclut que la matrice A est mal-conditionnée. Finalement, lors des calculs numériques, on peut avoir des résultats bien déterminés où bien de mauvais résultats.

2. Résolvons les systèmes : $Ax = b$ et $A(x + \triangle x) = b + \triangle b$: en effet,

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1} b$$

donc

$$x = 10^4 \begin{pmatrix} 1.0001 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de même, on a $A(x + \triangle x) = b + \triangle b \quad \Leftrightarrow \quad x + \triangle x = A^{-1}(b + \triangle b)$; donc

$$x + \triangle x = 10^4 \begin{pmatrix} 1.0001 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. La comparaison des erreurs relatives $\dfrac{\|\triangle x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ et $\dfrac{\|\triangle b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$: on a $x + \triangle x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; donc $\triangle x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\triangle x\|_\infty = \|x - x^*\|_\infty = 1$ et $\|x\|_\infty = 2$; d'où $\dfrac{\|\triangle x\|_\infty}{\|x\|_\infty} =$

$\dfrac{1}{2} = 0.5.$

De même, on a $\|\triangle b\|_\infty = 10^{-4}$ et $\|b\|_\infty = 2$; donc $\dfrac{\|\triangle b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 5\,10^{-5}$; d'où

$$\frac{\|\triangle b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 5\,10^{-5} \ll 0.5 = \frac{\|\triangle x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 5\,10^{-5}$$

par contre $\kappa_\infty(A)\dfrac{\|\triangle b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = (2.0001)^2 \times 0.5 = 2.0002$ qui reste suffisament grand par rapport à $\dfrac{\|\triangle x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.5.$

Exercice 5

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad \triangle A = \begin{pmatrix} -10^{-8} & 0 \\ 0 & -10^{-14} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ et $\dfrac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}$.
2. Résoudre les systèmes : $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(A + \triangle A)(x + \triangle x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer $\dfrac{\|\triangle x\|_2}{\|x + \triangle x\|_2}$ et comparer le à $\kappa_2(A)\dfrac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}$. Conclure

Solution 5

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad \triangle A = \begin{pmatrix} -10^{-8} & 0 \\ 0 & -10^{-14} \end{pmatrix}.$

1. Calculons $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ et $\dfrac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}$: en effet, la matrice A est inversible car $\det(A) = 10^{-6} \neq 0$ et
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{pmatrix}$$
On a $\mathrm{Sp}(A) = \{10^{-6}; 1\}$ et $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{1; 10^6\}$; alors $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \rho(A) = 1$ et $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^{-1^T} A^{-1})} = \rho(A^{-1}) = 10^6$; d'où $\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = 1 \times 10^6 = 10^6$ qui est très grand.
L'erreur relative sur A est $\dfrac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}$: on a $\|\triangle A\|_2 = 10^{-8}$ et $\|A\|_2 = 1$; donc
$$\frac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2} = 10^{-8} \ll 1.$$
2. Résolvons les systèmes : $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(A + \triangle A)(x + \triangle x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: en effet, on a
$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^6 \end{pmatrix}.$$

De même, on a

$$(A+\triangle A)(x+\triangle x)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad x+\triangle x=(A+\triangle A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

donc

$$x+\triangle x=\begin{pmatrix}\frac{10^8}{10^8-1} & 0\\ 0 & \frac{10^{14}}{10^8-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10^8}{10^8-1}\\ \frac{10^{14}}{10^8-1}\end{pmatrix}=\frac{10^8}{10^8-1}\begin{pmatrix}1\\10^6\end{pmatrix}=\frac{10^8}{10^8-1}\,x.$$

3. Calculons $\dfrac{\|\triangle x\|_2}{\|x+\triangle x\|_2}$: en effet, on a

$$\triangle x=\left[\frac{10^8}{10^8-1}-1\right]x=\frac{1}{10^8-1}\,x$$

donc, il vient $\|\triangle x\|_2=\dfrac{1}{10^8-1}\,\|x\|_2$ et $\|x+\triangle x\|_2=\dfrac{10^8}{10^8-1}\,\|x\|_2$; ce qui prouve que

$$\frac{\|\triangle x\|_2}{\|x+\triangle x\|_2}=\frac{1}{10^8-1}\frac{10^8-1}{10^8}=10^{-8}\ll 1.$$

Maintenant, calculons $\kappa_2(A)\dfrac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}$: en effet, on a $\kappa_2(A)=10^6$ et $\dfrac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}=10^{-8}$, alors

$$\kappa_2(A)\frac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}=10^{-2}\quad\text{donc}\quad\frac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}=10^{-8}$$

d'où

$$\frac{\|\triangle A\|_2}{\|A\|_2}=\frac{\|\triangle x\|_2}{\|x+\triangle x\|_2}=10^{-8}$$

le résultat permet de dire que la matrice A est bien conditionnée malgrè que $\kappa_2(A)=10^6$ qui est très grand.

Exercice 6
Soit $m.b^p$ la représentation machine d'un réel en virgule flottante où m est la mantisse avec une précision t chiffres, b est la base et p est l'exposant avec $L\le p\le U$.

1. Déterminer le plus grand et le plus petit réel positif qu'on peut représenter sur cette machine.
2. Donner une interprétation aux résultats.

Solution 6
On a $x\in\mathbb{R}$ avec $x=m\times b^p$ est la représentation machine de x où m est la mantisse, b est la base et p est l'exposant vérifiant $L\le p\le U$. La mantisse m s'écrit sous la forme $m=0.d_1d_2\ldots d_t$ avec t est la précision machine, $0\le d_i\le b-1$ et $d_1\neq 0$; alors on a

$$m=\sum_{i=1}^{t}d_ib^{-i}$$

1. Le plus grand et le plus petit réel positif qu'on peut représenter sur cette machine : en effet,
$$x_{min} = 0.\underbrace{1000\ldots00}_{t\text{ fois}} \times b^L = \frac{1}{b} \times b^L = b^{L-1}$$
est le plus petit nombre réel qu'on puisse représenter sous cette machine. De même, le plus grand réel est
$$\begin{aligned} x_{max} &= 0.\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)}_{t\text{ fois}}\, b^U = \left(\frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \ldots + \frac{b-1}{b^t}\right) b^U \\ &= (b-1)\left[b^{t-1} + b^{t-2} + \ldots + b + 1\right] b^{U-t} \\ &= (b-1)\,\frac{b^t-1}{b-1}\, b^{U-t} \end{aligned}$$
d'où $x_{max} = (b^t-1)b^{U-t} = b^U(1-b^{-t})$ est le plus grand nombre réel qu'on puisse représenter avec cette machine.
2. Interprétation des résultats : soit $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, alors
   - si $x < x_{min}$, alors x est considéré comme 0 pour la machine ; donc si on divise par x, alors la machine affiche une erreur (soit la division par 0).
   - si $x > x_{max}$, alors x est considéré comme l'∞ pour la machine ; donc si on divise par x, alors la machine affiche une erreur (soit la division par ∞).

Exercice 7

Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C}$ où $m \geq 1$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n}$ converge si et seulement si $\rho(A) < |z|$.
2. Monter que dans ce cas, on a $(zI-A)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n}$.

Solution 7

Considérons $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C}$ où $m \geq 1$

1. Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n}$ converge si et seulement si $\rho(A) < |z|$: en effet, par changement d'indice pour $p = n-1$, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{z^{p+1}} = \frac{1}{z}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{z^p} = \frac{1}{z}\sum_{p=0}^{\infty}(z^{-1}\,A)^p$$
on pose $B = z^{-1}\,A$, alors d'après l'Exercice 2 on a la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} B^p$ converge si et seulement si $\|B\| < 1$; soit $\rho(B) < 1$.
Comme $\rho(z^{-1}\,A) = |z^{-1}|\rho(A)$, alors la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(z^{-1}\,A)^p$ converge si et seulement si $\rho(z^{-1}\,A) = |z^{-1}|\rho(A) < 1$; d'où la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n}$ converge si et seulement si $\frac{1}{|z|}\rho(A) < 1$; c'est à dire $\rho(A) < |z|$.

2. Supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n}$ converge, alors on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} \sum_{p=0}^{\infty} (z^{-1}\, A)^p = \frac{1}{z} \left(I - z^{-1}\, A\right)^{-1} = \frac{1}{z} \left(I - \frac{1}{z}\, A\right)^{-1} = \frac{1}{z}\, \frac{1}{z^{-1}}\, (zI - A)^{-1}$$

finalement, on obtient $(zI - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{z^n}$

Exercice 8

I) On considère la matrice A et le vecteur B donnés par

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

on veut résoudre le système $AX = B$.

(a) Vérifier que A est une matrice singulière, calculer AA^T, puis trouver ses valeurs propres

(b) Déterminer une matrice Q de vecteurs propres normés

(c) Déterminer les valeurs singulières de A puis trouver l'inverse généralisé de A

(d) Résoudre les système par l'inverse de Moore-Penrose.

II) On considère maintenant le vecteur c donnés par

$$C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

On veut résoudre le système $A\omega = C$. Trouver une condition nécessaire entre α, β et γ pour avoir une solution ω selon la méthode de l'inverse généralisé.

Solution 8

I) Considérons la matrice A et le vecteur B donnés par $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}$; on propose derésoudre le système $AX = B$.

(a) – Vérifions que A est une matrice singulière : en effet, $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible ; donc A est singulière.

– Calculons la matrice AA^T et ses valeurs propres : en effet,

$$AA^T = A^2 = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a^2 & 3a^2 & 3a^2 \\ 3a^2 & 3a^2 & 3a^2 \\ 3a^2 & 3a^2 & 3a^2 \end{pmatrix}$$

et le polynôme caracatéristique de A^TA est $P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 9a^2)$; d'où les valeurs propres $\lambda_1 = 9a^2$ et $\lambda_2 = 0$.

(b) La matrice Q de vecteurs propres normés de A^TA est $Q = (V_1|V_2|V_3)$ où V_1 est un vecteur propre normé de A^TA associé à la valeur propre $\lambda_1 9a^2$ et V_2 et V_3 sont des vecteurs propres normés de A^TA associés à la valeur propre $\lambda_2 = 0$. Un calcul facile des vecteurs propres permet de trouver

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

d'où la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Les valeurs singulières de A sont les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice A^TA, soit $\sigma_1 = 3a$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.
D'après le théorème de décomposition en valeurs singulières de A on a

$$Q^TAQ = \Sigma = \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc l'inverse généralisé de A est $A^\dagger$ donné par

$$A^\dagger = Q\Sigma^\dagger Q^T \quad \text{avec} \quad \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis le produit matriciel implique

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \\ \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \\ \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \end{pmatrix}$$

(d) Les système $Ax = B$ admet une infinité de solutions qui forment un sous-espace vectoriel d'équation caractéristique $x+y+z=0$; par contre, il admet une solution calculée par la méthode du pseudo-inverse ou l'inverse de Moore-Penrose. Cette solution est $x^\dagger = A^\dagger B$; d'où

$$x^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \\ \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \\ \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{3a} \\ \frac{b}{3a} \\ \frac{b}{3a} \end{pmatrix}$$

II) Considère maintenant le vecteur C donné par $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

– Le système $A\omega = C$ a pour solution $\omega^\dagger = A^\dagger C$; donc

$$\omega^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \\ \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \\ \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} & \frac{1}{9a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{9a} \\ \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{9a} \\ \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{9a} \end{pmatrix}$$

est la solution du système $A\omega = C$ au sens de la méthode du pseudo-inverse.

– La condition nécessaire entre α, β et γ pour avoir une solution ω selon la méthode de l'inverse généralisé est que la solution $\omega^\dagger$ doit satisfaire l'équation $A\omega = C$; c'est-à-dire

$$A\omega^\dagger = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{9a} \\ \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{9a} \\ \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{9a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = C$$

soit α, β et γ satisfont le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \alpha \\ \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \beta \\ \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \gamma \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma$; finalement, pour que $\omega^\dagger$ soit solution du système $A\omega = C$ il faut que $\alpha = \beta = \gamma$.

Remarque : Soit $\Delta = \{u = (\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}^3 \ / \ \alpha = \beta = \gamma\}$; alors Δ est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = (1; 1; 1)^T$; donc le système $A\omega = C$ admet une solution si $C \in \Delta$.

La solution du système $A\omega = C$ n'est pas unique **mais** il y a toujours une solution satisfaisante ; celle calculée par la méthode du pseudo-inverse de Moree-Pensrose.