Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice aux allergies déclenchées par un médicament dans une grande population. Une étude a montré que 23% des individus sont allergiques. On choisit au hasard un échantillon de 18 personnes. Soit X le nombre aléatoire de personnes allergiques.

1. Quelle loi la variable X suit-elle ? Donner son espérance, sa variance et son écart type.
2. Calculer la probabilité : $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 7)$.

Corrigé

Exercice 2.
On sait par expérience qu'une certaine opération chirurgicale a 85% de chances de réussir. On s'apprête à réaliser l'opération sur 20 patients. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réussites de l'opération sur les 20 tentatives.

1. Quel modèle proposez-vous pour X ? (préciser la loi de probabilité de X.)
2. Donner l'espérance, la variance et l'écart type de X.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins 15 réussites.
4. Trouver toutes les valeurs de k qui vérifient : $\mathbb{P}(X \geq k) \leq 25\%$.

Corrigé

Exercice 3. On examine successivement les souris dans une population à la recherche d'un caractère génétique particulier C. Pour chaque souris, on suppose que la probabilité d'avoir ce caractère est de 15%. On note X le nombre de souris à examiner pour observer la première fois le caractère C.

1. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X \leq 6)$, $\mathbb{P}(X \geq 15)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq n)$ pour $n \geq 1$. Calculer n minimum pour que $\mathbb{P}(X \leq n) \geq 95\%$.

Corrigé

Exercice 4. Un liquide contient $9{,}3.10^5$ bactéries par litre. On prélève un échantillon de $1\ mm^3$ de ce liquide. Chaque bactérie a donc une probabilité $p = 10^{-6}$ de se trouver dans l'échantillon (on rappelle : $1l = 10^6 mm^3$).

1. Déterminer le nombre moyen m de bactéries par mm^3.
2. On note X le nombre aléatoire de bactéries dans l'échantillon. X suit une loi de Poisson de moyenne m. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X \leq 2)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$.

Corrigé

Exercice 5.
La prévalence du daltonisme chez les femmes est de 0,4%. Sur un échantillon de 800 femmes, on note X le nombre aléatoire de femmes daltoniennes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson. Pourquoi ? Laquelle ?
3. Calculer la probabilité d'avoir au maximum 5 femmes atteintes de daltonisme.

Corrigé

Exercice 6.
La mucoviscidose est une maladie héréditaire récessive qui se caractérise par la présence d'un allèle m au lieu d'un allèle M. Les personnes atteintes sont de génotype mm. Les personnes hétérozygotes sont de génotype Mm. Des études ont montré que 1 personne sur 1600 est atteinte de la mucoviscidose et 1 personne sur 20 est hétérozygote.

1. On choisit au hasard (avec remise) un échantillon de 4000 individus. On note X le nombre aléatoire de personnes atteintes de mucoviscidose.
    a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
    b. On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson. Pourquoi ? Laquelle ?
    c. Calculer la probabilité d'avoir au minimum 6 personnes atteintes de mucoviscidose.
2. On choisit les unes après les autres des personnes jusqu'à découvrir la première fois un hétérozygote. On note Y le nombre aléatoire de tirages nécessaires.
    a. Quelle est la loi de Y ? Préciser son espérance, sa variance, son écart type.

b. Calculer $\mathbb{P}(Y \geq 40)$.
c. Quel est le nombre minimal n de tirages à prévoir pour avoir $\mathbb{P}(Y \leq n) > 99\%$?

Corrigé

Exercice 7. En France, environ 80% des enfants de moins de deux ans sont vaccinés contre la rougeole (vaccin ROR). Pour un échantillon de 20 enfants de moins de deux ans, on note X le nombre aléatoire d'enfants qui sont vaccinés.

1. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance, sa variance et son écart type.
2. Calculer $\mathbb{P}(14 \leq X \leq 17)$.
3. Déterminer toutes les valeurs de k telles que $\mathbb{P}(X \geq k) < 25\%$.
4. Déterminer toutes les valeurs de k telles que $\mathbb{P}(X \leq k) < 5\%$.

Corrigé

Corrigé exercice 1. On note $p = 23\%$ et $q = 1 - p = 77\%$. La variable X est le nombre aléatoire de personnes allergiques pour $n = 18$ personnes prélevées au hasard dans la population concernée.

1. X suit une loi binomiale : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p) = \mathcal{B}(18; 0{,}23)$.

$$\mathbb{E}(X) = np = 4{,}14 \qquad \mathbb{V}(X) = npq = 3{,}1878 \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq} \simeq 1{,}785$$

2. Pour $0 \le k \le 18$, on a : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{18}{k} p^k q^{18-k}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	0,905%	4,868%	12,359%	19,689%	22,055%	18,446%	11,938%	6,113%	2,511%	0,833%	0,224%	0,049%	0,008%
$\mathbb{P}(X \le k)$	0,905%	5,773%	18,133%	37,822%	59,877%	78,323%	90,261%	96,374%	98,884%	99,718%	99,942%	99,990%	99,999%

$$\mathbb{P}(3 \le X \le 7) = \mathbb{P}(X \le 7) - \mathbb{P}(X \le 2) \simeq (96{,}374 - 18{,}133)\% \simeq 78{,}24\%$$

Énoncé

Corrigé exercice 2.

1. Tirage avec remise : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(20; 0{,}85)$.
2. $\mathbb{E}(X) = 20 \times 0{,}85 = 17$
   $\mathbb{V}(X) = 20 \times 0{,}85 \times 0{,}15 = 2{,}55$
   $\sigma(X) = \sqrt{2{,}55} \simeq 1{,}597.$
3. $\mathbb{P}(X \ge 15) = 93{,}27\%$
4. $k \ge 19.$

k	15	16	17	18	19	20
$\mathbb{P}(X = k)$	10,28%	18,21%	24,28%	22,93%	13,68%	3,88%
$\mathbb{P}(X \ge k)$	93,27%	82,98%	64,77%	40,49%	17,56%	3,88%

Énoncé

Corrigé exercice 3.

1. C'est un temps d'attente de premier succès (loi géométrique de paramètre $p = 0{,}15$) :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{G}(15\%) \qquad \left(\text{pour} \quad k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1} \quad \text{où} \quad q = 1 - p = 0{,}85\right)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 6,667 \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2} = 37,778 \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p} = 6,146.$$

2. $\mathbb{P}(X = 1) = p = 15\%$

   $\mathbb{P}(X \le 6) = p(1 + q + q^2 + \cdots + q^5) = p\frac{1-q^6}{1-q} = 1 - q^6 = 1 - (0{,}85)^6 = 62,29\%$

   $\mathbb{P}(X \ge 15) = 1 - \mathbb{P}(X \le 14) = 1 - p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{13}) = 1 - p\frac{1-q^{14}}{1-q} = q^{14} = 10,28\%$

3. $\mathbb{P}(X \le n) = p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = p\frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n = 1 - (0{,}85)^n$

$$1 - (0{,}85)^n \ge 95\% \Leftrightarrow (0{,}85)^n \le 0{,}05 \Leftrightarrow n\ln(0{,}85) \le \ln(0{,}05) < 0 \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}85)} = 18{,}4$$

   Il faut donc prendre $n \ge 19$.

Énoncé

Corrigé exercice 4.

1. $m = np = 9,3.10^5 \times 10^{-6} = 0,93.$
2. $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(0,93)$: pour $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X = k) = e^{-m}\frac{m^k}{k!} = e^{-0{,}93}\frac{0{,}93^k}{k!}$.

   Remarque : on peut interpréter X comme suivant une loi binomiale de taille $n = 9{,}3.10^5$ et de paramètre $p = 10^{-6}$ que l'on approxime par une loi de Poisson : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(9{,}3.10^5; 10^{-6}) \simeq \mathcal{P}(0{,}93)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = k)$	39,46%	36,69%	17,06%	5,29%	1,23%	0,23%	0,04%	0,00%	0,00%
$\mathbb{P}(X \le k)$	39,46%	76,15%	93,21%	98,50%	99,73%	99,96%	99,99%	100,00%	100,00%

$\mathbb{P}(X = 1) = 36{,}69\%$, $\mathbb{P}(X \le 2) = 93{,}21\%$ et $\mathbb{P}(X \ge 4) = 1 - \mathbb{P}(X \le 3) = 100\% - 98{,}5\% = 1{,}5\%.$

Énoncé

Corrigé exercice 5.

1. On a un tirage sans remise mais dans une grande population.
   On peut utiliser une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(800; 0{,}4\%)$.
2. $n = 800 > 30 \quad p = 0{,}4\% < 10\% \quad np = 3{,}2 < 5$ donc $\mathcal{B}(800; 0{,}4\%) \simeq \mathcal{P}(3{,}2)$.
3. $\mathbb{P}(X \leq 5) = 89{,}46\%$.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	4,08%	13,04%	20,87%	22,26%	17,81%	11,40%
$\mathbb{P}(X \leq k)$	4,08%	17,12%	37,99%	60,25%	78,06%	89,46%

Énoncé

Corrigé exercice 6.

1. C'est une situation de tirages de $n = 4000$ personnes avec remise (ou dans une grande population), avec une probabilité $p_1 = \frac{1}{1600}$ pour chaque personne d'être atteinte de mucoviscidose.
   a. Ainsi $X \sim \mathcal{B}\left(4000; \frac{1}{1600}\right)$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{4000}{1600} = 2{,}5 \qquad \mathbb{V}(X) = 2{,}4984$
   b. Comme $np_1 = \mathbb{E}(X) = 2{,}5 < 5$ et $p_1 = \frac{1}{1600} < 0{,}1$, il est légitime d'approximer :
   $$X \sim \mathcal{B}\left(5000; \frac{1}{1600}\right) \simeq \mathcal{P}(2{,}5)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = k)$	8,21%	20,52%	25,65%	21,38%	13,36%	6,68%	2,78%	0,99%	0,31%
$\mathbb{P}(X \leq k)$	8,21%	28,73%	54,38%	75,76%	89,12%	95,80%	98,58%	99,58%	99,89%

   c. $\mathbb{P}(X \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 4{,}2\%$
2. On est dans le cas du temps d'attente (discret) du premier hétérozygote. On a une probabilité $p_2 = \frac{1}{20}$ qu'une personne soit hétérozygote et $q_2 = 1 - p_2 = \frac{19}{20}$ qu'elle ne le soit pas.
   a. Ainsi $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{20}\right) \quad \left(\mathbb{P}(Y = k) = p_2 q_2^{k-1} \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N}^*\right)$ et
   $$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p_2} = 20 \qquad \mathbb{V}(Y) = q_2 \frac{1}{p_2^2} = \frac{19}{20} \times 20^2 = 380 \qquad \sigma(Y) = 19{,}49$$
   b. $\mathbb{P}(Y \geq 40) = q_2^{39} = \left(\frac{19}{20}\right)^{39} \simeq 13{,}521\%$
   c. $\mathbb{P}(Y \leq n) = 1 - q_2^n \geq 99\% \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{19}{20}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{20}{19}\right)} \simeq 89{,}8$
   donc la valeur minimale de n est 90.

Énoncé

Corrigé exercice 7.

1. C'est une situation de tirages de $n = 20$ enfants sans remise mais dans une grande population, avec une probabilité $p = 80\%$ pour chaque enfant d'être vacciné.
   Ainsi $X \sim \mathcal{B}(20; 0{,}8)$ et $\mathbb{E}(X) = 20 \times 0{,}8 = 16 \qquad \mathbb{V}(X) = 3{,}2 \qquad \sigma(X) = 1{,}789$.

k	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mathbb{P}(X = k)$	0,01%	0,05%	0,20%	0,74%	2,22%	5,45%	10,91%	17,46%	21,82%	20,54%	13,69%	5,76%	1,15%
$\mathbb{P}(X \leq k)$	0,01%	0,06%	0,26%	1,00%	3,21%	8,67%	19,58%	37,04%	58,86%	79,39%	93,08%	98,85%	100,00%

2. $\mathbb{P}(14 \leq X \leq 17) = 10{,}91\% + 17{,}46\% + 21{,}82\% + 20{,}54\% = 70{,}72\%$
3. $k \geq 18$.
4. $k \leq 12$.

Énoncé