Pierre-Louis CAYREL
Licence 1 Algèbre Linéaire
Université de Paris 8

2008-2009

Feuille n° 2

Applications linéaires

1 Définition

Exercice 1 Déterminer si les applications f_i suivantes (de E_i dans F_i) sont linéaires :

$$f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2, f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, x, y) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_4 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X], f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$f_6 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, f_7 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X].$$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

2 Image et noyau

Exercice 3 E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E, on définit l'application $f \colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Appliquer le théorème du rang.

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\mathrm{Ker}\ (\varphi) \cap \mathrm{Im}\ (\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N} : \varphi^n(x) \neq 0$.

Exercice 5 Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{im}(f)$.
2. $f^2 = 0$ et $n = 2\ \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 6 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.

Exercice 8 Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\mathrm{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

3 Injectivité, surjectivité, isomorphie

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et λ un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = & e_1 + \lambda e_3 \end{array}\right.$ définit une application linéaire φ de E dans E. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Exercice 10

1. Dire si les applications $f_i, 1 \leqslant i \leqslant 6$, sont linéaires

$$\begin{aligned} f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, ax - y) \in \mathbb{R}^2, \\ f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, ax, y) \in \mathbb{R}^3, \\ f_3 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto aP' + P \in \mathbb{R}[X], \\ f_4 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X], \\ f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, \\ f_6 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

2. Pour les applications linéaires trouvées ci-dessus, déterminer $\ker(f_i)$ et $\mathrm{Im}\ (f_i)$, en déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 11 Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$ et A et B deux polynômes à coefficients complexes de degré $(n+1)$. On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \iff A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

Exercice 12 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et φ une application linéaire de E dans F. Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si l'image par φ de toute base de E est une base de F.

4 Morphismes particuliers

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Monter que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Exercice 14 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P^{'}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.