Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Première année
Année universitaire 2019/2020

DL2 du Module AP21 : "Algèbre Linéaire"
à rendre avant 10 Septembre 2020 à 23h59 envoyé dans l'adresse Mail m.addam@uae.ac.ma
N.B. : Je demande tous les étudiants de rédiger leurs compte-rendus sur des feuilles blanche de type A4, ceci pour la bonne visibilité de vos rédactions respectives

Exercice 1

Soient E_n l'espace vectoriel des polynômes d'indéterminé x à coefficients complexes de fegré strictement inférieur à n et, P et Q deux polynômes de degrés p et q, respectivement où $p \geq 1$ et $q \geq 1$. Supposons que P et Q n'admettent pas de racine commune.
Soient F_q l'ensemble des polynômes de la forme $A\,P$ avec $A \in E_p$ et F_p l'ensemble des polynômes de la forme $B\,Q$ avec $B \in E_q$.

1. Montrer que $E_{p+q} = F_p \oplus F_q$ est une somme directe de F_p et F_q.
2. Déduire qu'il existe un couple unique de polynômes $U \in E_q$ et $V \in E_p$ tel que $P\,U + Q\,V = 1$.

Exercice 2

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables définies sur $\mathbb{R}$. Soient $t \mapsto f_1(t) = \cos(t)\operatorname{ch}(t)$, $t \mapsto f_2(t) = \sin(t)\operatorname{ch}(t)$, $t \mapsto f_3(t) = \cos(t)\operatorname{sh}(t)$ et $t \mapsto f_4(t) = \sin(t)\operatorname{sh}(t)$ des fonctions dans E.

1. Montrer que le système $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est libre dans E.
2. Soient F le sous-espace vectoriel de E engendré par f_1, f_2, f_3 et f_4 et Φ l'endomorphisme de F défini par $\Phi(u) = u'$. Quelle est la dimension de F ? Déterminer la matrice M de Φ relativement à la base de F.
3. Calculer M^n ; puis déterminer l'expression de Φ^n dans la base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel des polynômes d'indéterminé x à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n.

1. Montrer que les polynômes P_k définis par
$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1) \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n,$$
forment une base de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Soit Φ l'application $\Phi : P \mapsto \Phi(P)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$\Phi(P)(x) = P(x+1) - P(x).$$
   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme sur E.

(b) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et l'image $\mathrm{Im}(\Phi)$ de Φ.

(c) Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ la base de E définie précédement. Déterminer la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ de l'endomorphisme Φ relativement à la base $\mathcal{B}$ dans les cas $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et puis généraliser l'écriture de la matrice dans le cas n quelconque.

Exercice 4

Soient E l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante

$$(\mathcal{P}) \; : \left\{ \begin{array}{l} a\,u_n + b\,u_{n-1} + c\,u_{n-2} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 2 \\ a, b, c \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad a\,c \neq 0 \end{array} \right.$$

où $u_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
   (b) Vérifier qu'une suite u satisfaisant $(\mathcal{P})$ est déterminée par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1.
2. Soient p (resp. q) la suite de E correspondant à $p_0 = 1$ et $p_1 = 0$ (resp. $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$).
   (a) Montrer que p et q sont linéairement indépendant. Que peut-on déduire ?
   (b) Montrer que tout élément $u \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire unique de la forme $u = u_0\,p + u_1\,q$.

Exercice 5

Soient E un espace vectoriel, u un endomorphismes de E et $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u.

1. Montrer que si u est tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$, alors $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$
2. **Réciproquement**, montrer que si u est tel que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$ alors
$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2).$$
3. Montrer que si u est tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$, alors $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$
4. **Réciproquement**, montrer que si u est tel que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$ alors
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2).$$

Exercice 6

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphismes de E et $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$ et $\mathrm{Im}(u^k) \subset \mathrm{Im}(u^{k-1})$ pour tout $k > 0$.
2. Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que, pour tout $k \geq p$, on a
$$\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^p), \quad \mathrm{Im}(u^k) \subset \mathrm{Im}(u^p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \{0_E\}.$$

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que l'application $f : E_1 \times E_2 \to E$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$ est linéaire ; et déterminer son noyau.
2. Établir un isomorphisme entre $E_1 \cap E_2$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $E_1 \times E_2$.
4. Montrer que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f est une application linéaire de E dans F, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.
5. Établir que $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Exercice 8

Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{C}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
2. On donne $n+1$ polynômes $A_0, \dots, A_n$ tels que $\mathrm{d}^o A_p = p$ pour $p = 0, 1, \dots, n$. Montrer que ces polynômes constituent une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Soit B un polynôme non nul de degré $k \leq n$ et soit F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ de la forme $B.Q$ où $Q \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que Fest un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$ de dimension $n - k + 1$.
4. Montrer que si G est le sous-espace vectoriel $G = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \,/\, d^o P \leq k\}$ $(k \geq 1)$, alors $\mathbb{C}_n[X] = F \oplus G$.

Exercice 9

Soient l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer l'expression de u dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
   (b) Soit $X = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
   Calculer $f(X)$ en fonction de x, y et z, puis déterminer $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et le rang $r = \mathrm{rg}(u)$ de u. Que peut-on déduire ?
   (c) Montrer que les vecteurs $f_1 = 2\,e_1 + 3\,e_2 + e_3$, $f_2 = 3\,e_1 + 4\,e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + 2\,e_2 + 2\,e_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Calculer la matrice B de u par rapport à la nouvelle base $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$.
2. (a) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}_E)$ sont des droites vectorielles engendrées par $f_1 = 2\,e_1 + 3\,e_2 + e_3$, $f_2 = 3\,e_1 + 4\,e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + 2\,e_2 + 2\,e_3$, respectivement.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}_E)$.
   (c) Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Déterminer $P = Q^T$, calculer P^{-1}, puis montrer que $P^{-1}\,A\,P = B$. Conclure

Exercice 10

1. Résoudre sur le corps des réels le système suivant

$$(\mathcal{P}_1)\ :\ \left\{\begin{array}{l} 2\,x+y-z=3 \\ x-y+3\,z=8 \\ x+2\,y-z=-3 \end{array}\right.$$

2. Le système suivant admet-il des solutions

$$(\mathcal{P}_2)\ :\ \left\{\begin{array}{l} 2\,x+y-z=3 \\ x-y+3\,z=8 \\ x+2\,y-z=-3 \\ x+y+2\,z=-1 \end{array}\right.$$

3. On considère le système $(\mathcal{P}_2)$, les coefficients étant cette fois supposés être dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Résoudre le système dans ce corps.