ENSA d'Al-Hoceima
AP-I, Première Année,
Algèbre linéaire,

Année 2019/2020
Semestre 2
TD2

Série N^{o}2 : Application linéaire, Endomorphisme et isomorphisme

Exercice 1

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $E = \{(x, -x); \quad x \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x, x); \quad x \in \mathbb{R}\}$ deux ensembles.
   (a) Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.

1. Montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On considère $E = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le système $\{I, J\}$ est une base de E où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) On pose $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R} \right\}$ et $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}; \quad b \in \mathbb{R} \right\}$.
   Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 3

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. (a) Montrer que E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Trouver une base de E.
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \to a + b$
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer Ker$f$, noyau de f.
   (c) Déterminer G le supplémentaire de Ker$f$ dans E.

Exercice 4

Soit $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R} : \ f(-x) = f(x)\}$ et $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R} : \ f(-x) = -f(x)\}$

1. Soit E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. On pose
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$
   Vérifier que $g \in E$ et $h \in F$.
3. en déduire $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Exercice 5

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2) où $e_1(1,0)$ et $e_2(0,1)$:

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x+y)$.
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Écrire la matrice de f relativement à la base (e_1, e_2).
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base (e_1, e_2) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Déterminer l'ensemble $\mathrm{Im}g$, image de g.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On désigne par $\mathrm{id_E}$ l'endomorphisme identique de E.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id_E} - \mathrm{p}$ est un projecteur.
2. Soi p un projecteur de E.
   (a) Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Im(p)} \oplus \ker(\mathrm{p})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im(id_E - p)} = \ker(\mathrm{p})$ et $\ker(\mathrm{id_E - p}) = \mathrm{Im(p)}$
3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f(\ker(\mathrm{p})) \subseteq \ker(\mathrm{p})$ et $f(\mathrm{Im(p)}) \subseteq \mathrm{Im(p)}$.
   Montrer que $f \circ \mathrm{p} = \mathrm{p} \circ f$.

Exercice 7

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Que peut-on déduire ?
2. Soit Φ une application de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, qui a une fonction f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ associe la fonction $g = f'' + 2f' + f$.
   (a) Exprimer l'écriture symbolique de l'application Φ, puis montrer que Φ est un homomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de Φ. L'application Φ est-elle injective ?
   (c) Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est-il de dimension finie ? **Justifier**
   (d) L'application Φ est-elle surjective ? est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

Exercice 8

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^2,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$.
   Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, puis en déduire la dimension de E.
3. On considère l'équation :
   $$(\mathcal{Q}) \ :\quad x^2 - ax - b = 0$$
   Montrer que si l'équation $(\mathcal{Q})$ admet deux solutions complexes z_1 et z_2, alors les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de E avec
   $$\alpha_n = \frac{1}{2}(z_1^n + z_2^n) \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1^n - z_2^n)$$
4. **Application** : Déterminer u_n en fonction de n dans le cas suivant :
   $$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 2.$$