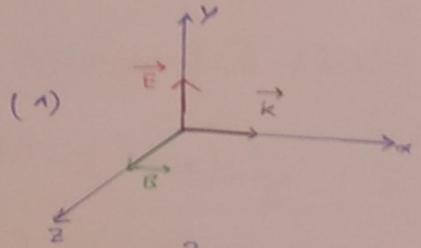
Exercice I:

Exercice I :

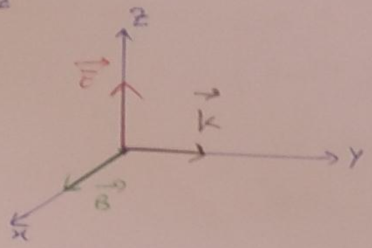
1 – a – Expression du champ électrique :

(1)



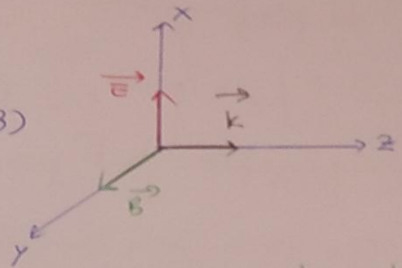
$$\vec{E}(x,t) = E_0 \, e^{j(\omega t - kx)} \, \vec{u}_y$$

(2)



$$\vec{E}(y,t) = E_0 \, e^{j(\omega t - ky)} \, \vec{u}_z$$

(3)



$$\vec{E}(z,t) = E_0 \, e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_x$$

1 – b – Expression du champ magnétique :

on va utiliser la formule suivante : $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

sachant que $\boxed{\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{1}{c}}$

1er cas : $\vec{B}(x,t) = \dfrac{1}{\omega}\left[k \cdot E_0 e^{j(\omega t - kx)}\right] \cdot \underbrace{\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y}_{\vec{u}_z}$

$$\boxed{\vec{B}(x,t) = \left(\frac{E_0}{c}\right) \cdot \cancel{E_0} \cdot e^{j(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_z}$$

2ème cas : $\boxed{\vec{B}(y,t) = \left(\dfrac{E_0}{c}\right) \cdot e^{j(\omega t - ky)} \cdot \vec{u}_x}$

3ème cas : $\boxed{\vec{B}(z,t) = \left(\dfrac{E_0}{c}\right) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_y}$

2) On va chercher l'équation de propagation du champ électrique générale :

• l'équation de départ : $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

on applique le rotationnel $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E})$ sachant que :

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{w}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{w}) - \Delta\vec{w}$

Donc : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

on a un espace dépourvu de charges et de courants càd : $\rho = 0$; $\vec{j} = \vec{0}$

alors • $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (M.A)

• $div\,\vec{E} = 0$ (M.G)

on aura alors : $-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\Delta\vec{E}$

ce qui donne à la fin l'équation de propagation suivante : $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$

• En déduire l'équation de propagation du $\vec{E}$ pour chaque cas :

Cas n° 1 : $\vec{E}$ se propage suivant Ox et a une composante suivant l'axe (Oy)

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \begin{cases} \Delta E_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\cdot\cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} = 0 \\ \Delta E_y - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_z - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\Delta^2 E_z}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\cdot\cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}} = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne après élimination de certains termes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0}$$

Cas n°2 : le $\vec{E}$ se propage suivant l'axe Oy et a une composante suivant l'axe (Oz) :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \begin{cases} \Delta E_x - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} = 0 \\ \Delta E_y - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} = 0 \\ \Delta E_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne après élimination de certains termes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0}$$

Cas n°3 : Le $\vec{E}$ se propage suivant l'axe Oz et a une composante suivant l'axe (Ox)

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \begin{cases} \Delta E_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} = 0 \\ \Delta E_z - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\cdot\cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}} = 0 \end{cases}$$

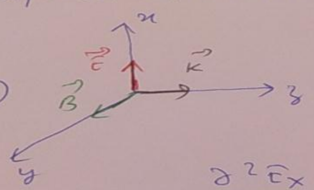
Ce qui donne après élimination de certains termes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0}$$

3 - l'Équation de dispersion pour le cas n°3

l'expression du champ $\vec{E}$ est : $\vec{E}(z,t) = E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{u}_x$

(3)



l'Équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_0\, e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0\, e^{j(\omega t - kz)}$$

Donc l'Équation de propagation devient :

$$-k^2 E_0\, e^{j(\omega t - kz)} + \frac{\omega^2}{c^2} E_0\, e^{j(\omega t - kz)} = 0$$

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_0\, e^{(j\omega t - jkz)} = 0$$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

l'Équation de dispersion est la même pour chaque cas puisque l'onde se propage dans le vide, qui est un espace homogène, linéaire et isotrope

Exercice II:

1 - Ecrivons l'expression de $\vec{k}$ et de $\vec{E}$

$\vec{Oy}$: Direct° de polarisation.

$\vec{Ox}$: Direct° de propagat°.

• $\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e_x}}$

• $\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e_y}$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \cdot x$$

Donc :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)\vec{e_y}}$$

2 - Vérifions que le champ $\vec{E}$ obéit à l'équation d'Alembert:

on a $\vec{E} = E \cdot \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta E - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}}_{=0} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Car E ne dépend ni de y ni de z :

• $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E_0 \cdot \frac{\omega}{c} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)\right] = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \cancel{\sin} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} E}$

$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\omega . E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)\right] = -\omega^2 . E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 . E}$

l'equation d'Alembert :

$$-\frac{\omega^2}{c^2}E\cancel{?} + \frac{\omega^2}{c^2}E\cancel{?} = 0$$

$\Rightarrow$ l'Equat° d'Alembert est vérifiée.

3) Deduisons-en l'expression du champ $\overrightarrow{B}$:

On a $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$

$\overrightarrow{u}$: vecteur unitaire de la direction de propagation

Dans notre cas : $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right).\left(\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{E_0}{c}.\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right).\overrightarrow{e_z}}$$

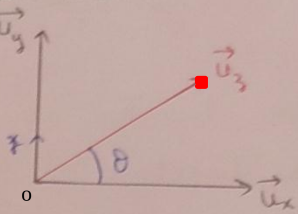
Exercice III : Direction de propagation d'une OPPM

Exercice : Direction de propagation d'une OPPM :

1 - le vecteur $\vec{k}$ en fonct° de son module k et θ

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})\,\vec{u}_z$$

tq $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_z$



on a $\vec{u}_z = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y$

Donc $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_z = k \cdot \cos\theta\,\vec{u}_x + k \cdot \sin\theta\,\vec{u}_y$

$$\boxed{\vec{k} = k \cdot \cos\theta\,\vec{u}_x + k\sin\theta\,\vec{u}_y}$$

avec : $\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$

2 - les composantes de $\vec{E}$:

on a $\vec{k}\cdot\vec{r} = k \cdot x \cdot \cos\theta + k y \sin\theta$

Donc $\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega t - k x \cos\theta - k y \sin\theta) \cdot \vec{U}_z \Leftrightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$

on a l'onde plane $\Leftrightarrow$ $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$

En déduit $\vec{B}$:

. D'après l'Equation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{rot}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_z}{\partial y}\vec{u}_x - \frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{u}_y$$

$$= k \cdot \sin\theta\, E_0 \sin(\omega t - k x\cos\theta - k y \sin\theta)\,\vec{U}_x - k \cdot \cos\theta\, E_0 \sin\underbrace{(\omega t - k x \cos\theta - k y \sin\theta)}_{(*)}\,\vec{u}_y$$

Donc $-\frac{\partial B_x}{\partial t} = k \cdot \sin\theta\, E_0 \sin(*)$

$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = -k\cos\theta\, E_0 \sin(*)$

$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow B_z = 0$ (Absence de champ)

Alors

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{k}{\omega} E_0 \sin\theta \cdot \cos(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta) \\ B_y = -\dfrac{k}{\omega} E_0 \cos\theta \cdot \cos(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

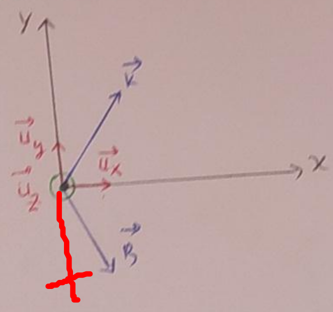
3 - Représenter dans un schéma les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$

$\vec{E} \perp \vec{k} \perp \vec{B}$

. onde plane

. $\vec{k} \in (xoy)$

. $\vec{B} \in (xoy)$; $x > 0$; $y < 0$



4 - Le vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[-E_z \cdot B_y \vec{u}_x + E_z \cdot B_x \vec{u}_y \right]$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{k}{\omega} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta) \cos\theta \, \vec{u}_x + \frac{k}{\omega} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta) \sin\theta \, \vec{u}_y \right]$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 \omega} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta) \Big[\underbrace{k \cdot \cos\theta \, \vec{u}_x + k \cdot \sin\theta \, \vec{u}_y}_{\vec{k}} \Big]$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 \omega} E_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta) \cdot \vec{k}}$$

En déduit $\langle \vec{P} \rangle$:

$$\langle \vec{P} \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0 \cdot \omega} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta) \cdot \vec{k} \right\rangle$$

$$\boxed{\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \omega} E_0^2 \cdot \vec{k}}$$

C'est le flux d'énergie transportée par l'OEM, il est dirigé suivant l'axe de propagation de l'onde $\vec{k}$.

Exercice II : Structure de l'onde plane progressive monochromatique

Exercice : Structure d'OPPM :

1 – Exprimons le potentiel scalaire associé à cette onde dans la jauge de Lorentz :

D'après l'équation de propagation $\vec{A} = A_0 e^{j(\omega t - kx)}$

la relation de dispersion est : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

on prendra par la suite $k = \frac{\omega}{c}$, ce qui correspond à une propagation à x croissant.

- l'utilisation de la condition de jauge de Lorentz conduit à :

En notation complexe :

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial \vec{A_x}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A_y}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{A_z}}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad \text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial \vec{A_x}}{\partial x} = -jk\vec{A}$$

et $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{c^2} j\omega V$$

ce qui donne : $-jkA\vec{e_x} + \frac{1}{c^2} j\omega V = 0$

soit $\boxed{V = V_0 e^{j(\omega t - kx)}}$ avec $V_0 = c\,\vec{A_0}\,\vec{e_x}$

$$\left(-jkA\vec{e_x} + \frac{1}{c^2} j\omega V = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} j\omega V = jkA\right)$$

$$\frac{1}{c^2}\cancel{j}\cancel{\omega} V = \cancel{j}\frac{\cancel{\omega}}{c} A\vec{e_x} \Leftrightarrow \boxed{V_0 = c\vec{A_0}\vec{e_x}}$$

2) Déterminons le champ électromagnétique de l'onde en notation complexe :

. on a $\vec{E} = -\vec{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

En notation complexe :

* $\vec{E} = jkV\vec{e_x} - j\omega\vec{A}$

. On a : $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} = \vec{e_x} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial \cancel{x}} = \vec{e_x} \wedge (-jk)\vec{A}$

$= -jk(\vec{e_x} \wedge \vec{A})$

or $\underline{V} = V_0 e^{j(\omega t - kx)}$

Donc $\vec{E} = jkV_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{e_x} - j\omega\vec{A_0} e^{j(\omega t - kx)}$

$= (jkV_0\vec{e_x} - j\omega\vec{A_0})e^{j(\omega t - kx)}$

or $\boxed{V_0 = C\vec{A_0}\cdot\vec{e_x}}$

$= -j\omega\left(\vec{A_0} - \frac{k \cdot c}{\omega}\vec{e_x}(\vec{e_x}\cdot\vec{A_0})\right)e^{j(\omega t - kx)}$

$= -j\omega(\vec{A_0} - \vec{e_x}(\vec{e_x}\cdot\vec{A_0})) \cdot e^{j(\omega t - kx)}$

$\left\{\vec{E} = \vec{E_0} \cdot e^{j(\omega t - kx)}\right]$

* $\vec{B} = -jk\,\vec{e_x} \wedge \vec{A} = -jk\,\vec{e_x} \wedge \vec{A_0}\, e^{j(\omega t - kx)}$

$\left\{B = \vec{B_0} \cdot e^{j(\omega t - kx)}\right]$

avec $\vec{E_0} = -j\omega(\vec{A_0} - \vec{e_x}(\vec{e_x}\cdot\vec{A_0}))$; $\vec{B_0} = -jk\vec{e_x} \wedge \vec{A_0}$

On trouve dans ces expressions la structure de l'onde plane électromagnétique dans le vide :

- le champ EM est transverse :

$$\begin{cases} \vec{E}\cdot\vec{e_x} = 0 \\ \vec{B}\cdot\vec{e_x} = 0 \end{cases}$$

* Le Trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, k\vec{e_x})$ est trirectangle et direct avec :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e_x} \wedge \vec{E}}{C}$$

3 - la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting associée à l'OPPM :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{E} \wedge (\vec{e_x} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \cdot C}$$

D'après la propriété du double produit vectoriel :

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$, on a :

$\vec{E} \wedge (\vec{e_x} \wedge \vec{E}) = \vec{e_x}\,\vec{E}\cdot\vec{E} - \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{e_x}}_{0}\vec{E} = |\vec{E}|^2 \cdot \vec{e_x}$

Donc $$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\frac{|\vec{E}|^2 \cdot \vec{e_x}}{\mu_0 \cdot C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{E_0}|^2}{\mu_0 C} \cdot \vec{e_x}$$