E.N.S.A.

AL Hoceima

AP.1 : ANAlyse:2.

2019/2020

Correction de D.L

Exercice 1 :

1.) $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$ (E)

soit (E_0) l'equation diffèrentielles homogène (sans second membre) associé $(E_0) : y' - 2y = 0$

Alors la solution générale de l'équation (E_0) est :

$$y_0(x) = k e^{2x}, \ k \in \mathbb{R}$$

Ensuite, on cherche une solution particulière y_p de (E) : on a deux méthode :

1ère méthode : on cherche une sol^{n} particulière y_{1p} de l'équation $y' - 2y = \cos x$ et une sol^{n} particulière de y_{2p} l'équation $y' - 2y = 2\sin x$

Donc $\boxed{y_p = y_{1p} + y_{2p}}$

2ème méthode : on cherche une sol^{n} particulière y_p de l'équation $y' - 2y = \cos x + 2\sin x$.

on applique $2^{\text{ème}}$ méthode

on cherche une sol$^{\text{n}}$ particulière y_p de (E).

Alors $y_p = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

On a y_p est une sol$^{\text{n}}$ de E $\Leftrightarrow y'_p - 2y_p = \cos x + 2\sin x$ (*)

D'ou $y'_p(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x$

$$(*) \Leftrightarrow -\alpha \sin x + \beta \cos x - 2(\alpha \cos x + \beta \sin x) = \cos x + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow (-\alpha - 2\beta)\sin x + (\beta - 2\alpha)\cos x = \cos x + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta = 2 \\ \beta - 2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\beta + 2\alpha = -4 \\ \beta - 2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\beta = -3 \\ \alpha = -2\beta - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{3}{5} \\ \alpha = \frac{6}{5} - 2 = \frac{6-10}{5} = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{4}{5} \\ \beta = \frac{-3}{5} \end{array}}$$

Alors : $\boxed{y_p = -\frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x}$

Donc la solu$^{\text{n}}$ générale de l'équation (E)

est $\boxed{y = y_0 + y_p = k e^{2x} - \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}}$

et voir le T.D et le cours

$2-(E): y' - 2xy = -(2x-1)e^{x}$

on commence par résoudre l'équation homogène associée

$(E_0): \; y' - 2xy = 0,$

on a $y' - 2xy = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2x \Leftrightarrow y = ke^{x^2}, \; k \in \mathbb{R}$

Donc la solution de (E_0) est : $\underline{y_0 = ke^{x^2}, \; k \in \mathbb{R}}$

ensuite on cherche une sol^{n} particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.

on pose donc $y_p(x) = k(x)e^{x^2}$ est une sol^{n} de (E).

on trouve. $k'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^{x}$

$$\Leftrightarrow k'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}$$

Alors $k(x) = e^{-x^2+x}$

Donc la solution particulière de (E) est $y_p(x) = e^{-x^2+x} \cdot e^{x^2}$
$= e^{x}$

Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de type : $\underline{y = ke^{x^2} + e^{x}}, \; k \in \mathbb{R}$

3 - (E) : $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$

on va résoudre l'équation différentielle (E) sur les ~~int~~ intervalles $I_1 =]0,+\infty[$ et sur $I_2 =]-\infty,0[$, car $x \neq 0$

on fixe donc j dans $\{1,2\}$.

on résoud l'équation (E) sur I_j $(j \in \{1,2\})$

* l'équation homogène associée de (E) est $(E_0) : xy' + 2y = 0$

les solutions qui ne s'annulent pas vérifient $\frac{y'}{y} = \frac{-2}{x}$

Alors $y_0 = \frac{k}{x^2}$, sur I_j $(j \in \{1,2\})$

* on cherche une sol: particulière de (E) par M.V.k

On pose donc $y_p = \frac{k(x)}{x^2}$; y_p est solution de (E) $\Leftrightarrow$

$$k'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

En intégrant, une solution particulière est donnée par

$$k(x) = x - \arctan(x)$$

D'où $\boxed{y_p(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}}$

Alors les solutions de (E) sur I_j $(j \in \{1,2\})$ sont

Donc les fonctions $\boxed{y = \frac{x - \arctan(x) + k_j}{x^2}}$ $(j \in \{1,2\})$

soit maintenant y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors il existe des constantes k_1 et k_2 telle que y vérifie sur I_j $(j \in \{1,2\})$

$$y(x) = \frac{x - \arctan(x) + k_j}{x^2}$$

il faut que y soit continue en 0. Pour que la fonction y admette une limite finie en 0, il est nécessaire que $k_j = 0$.

Réciproquement, si $y(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}$ pour $x \neq 0$, alors on effectue un D.L et on trouve.

$$y(x) = \frac{x}{3} + o(x)$$

Il suit que y, prolongée par $y(0) = 0$, est dérivable en 0 avec $y'(0) = \frac{1}{3}$.

Alors l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{cases} y(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4- (E) : $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{x} + x e^{x} \cos(x)$.

on résoud l'équation homogène : (E_0) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.
on introduit l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 3 = 0$.

Ses racines sont 1 et 3. on en déduit que la solution générale de l'équation (E_0) est $y_0 = \lambda e^{x} + \mu e^{3x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

on cherche une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions.

* on cherche donc d'abord une solution de (E_1) : $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{x}$.
Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme : $y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx) e^{x}$.

En dérivant et en identifiant, on obtient le système :

$$\begin{cases} -6a = 1 \\ 6a - 4b = 0 \\ c + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc une solution particulière de (E_1) est donc obtenue par :

$$\boxed{y_1(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right) e^{x}}$$

on cherche ensuite une solution particulière de (E_2) : $y'' - 4y' + 3y = x e^{x} \cos x$
on va en fait chercher une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = x e^{(1+i)x}$

et on en prendra la partie réelle.

$2+i$ n'étant pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_2(x) = (ax+b)\,e^{(2+i)x}$.

Après dérivation et identification, on trouve le système.

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2ia - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{i}{2} \end{cases}$$

on trouve $y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}\right) e^{(2+i)x}$.

on prenant la partie réelle, une solution particulière de (E_2)

est obtenue par: $y_2(x) = \left(-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) e^{2x}$

La solution générale de l'équation différentielle initiale (E)

est donc donnée par:

$$\boxed{y(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right)e^x + \left(-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

5)- Comme les autres (4 et T.D)

Exercice 2 [équation intégrale] (Rq : on a : $\frac{1}{2}\int_0^a f^2(t)dt$ 5.)

posons $y(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ qui est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Alors, dérivant l'équation, on a

$$\frac{1}{2}f^2(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 + \frac{2}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\cdot f(x)$$

soit

$$\frac{1}{2}y'^2 = -\left(\frac{1}{x}\right)^2 y^2 + \frac{2}{x}yy'$$

Remarquons que si $y(x_0)=0$, alors $\int_0^{x_0} f^2(t)\,dt = 0$, et donc $f=0$ sur $[0,x_0]$ puisque l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle sur $[0,x_0]$.

posons $a = \sup\{x>0,\ y(x)=0\}$ avec $a=0$ si l'ensemble est vide. Alors y est non-nulle sur $]a,+\infty[=I$, et sur cet intervalle l'équation peut encore s'écrire

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{4}{x}\left(\frac{y'}{y}\right) + \frac{2}{x^2} = 0$$

on résoud cette équation du second degré, et on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{x}$$

soit

$$y(x) = \lambda\, x^{2\pm\sqrt{2}}$$

Revenant à $f = y'$, on trouve sur I que

$$f(x) = \alpha' x^{1 \pm \sqrt{2}} \quad , \ \alpha' \in \mathbb{R}$$

maintenant, f doit être continu en a, et on sait que $f(a) = 0$.

Ceci n'est possible que si $a = 0$ et si $f(x) = \alpha' x^{1+\sqrt{2}}$.

ces fonctions sont donc les solutions de l'équation intégrale.

R.Q : voir Bien T.D