Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

Ahmed Moussaid

Deuxième Année Cycle Préparatoire
Semestre : S3
Module : Analyse 3

TD: Espaces Vectoriels Normées

December 1, 2020

Plan

Solution Ex 1

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses avec la justificatin:

1. Si (E, N) est un espace vectoriel normÃ©, $x \in E, r > 0$, et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0, \quad \lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.
   • faux. car $\lambda B(x, r) = B(\lambda x, \lambda r)$.
2. $N : (x, y) \longmapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   • faux. car $N(x, y) = 0 \not\Rightarrow x = y = 0$ (si $x = -3$ et $y = 5$ alors $N(x, y) = 0$).

Solution Ex 1

3· Soit $E = \mathbb{R}_1[x]$, Alors $N : P \longmapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E.

• Vrai. car $N(p) = 0 \Rightarrow p = 0$ car $p \in \mathbb{R}_1[x]$.

4· Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note $B_1 = \{x \in E, N_1 \leq 1\}$ et $B_1 = \{x \in E, N_2 \leq 1\}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

• Vrai car Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E et si on note $B_1 = \{x \in E, N_1 \leq 1\}$ et $B_1 = \{x \in E, N_2 \leq 1\}$.

Alors $\exists \alpha, \beta$ sont St. positif tel que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

Si $x \in B_2$ Alors $N_2(x) \leq 1 \Rightarrow N_1(x) \leq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow x \in \frac{1}{\alpha} B_1$

D'ou on pose que $b = \frac{1}{\alpha}$ alors $B_2 \subset bB_1$.

l'autre inclusion se montre de façon similaire.

Solution Ex 1

5· Soit (U_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et soit $\ell \in E$. Alors (U_n) converge vers ℓ si et seulement si $(\|U_n - \ell\|)$ tend vers 0.

• Vrai car c'est une conséquence facile de la définition de la convergence d'une suite.

Solution Ex 2

Soit $(E, \|.\|)$ une espace vectoriel normé.
1°) Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, On a.

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$$

Solution Ex 2

Solution:

1°) Soit $x, y \in E$, On écrit.
$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ et $y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(y-x)$
de sorte que , par l'inigalité triangulaire.

$$\|x\| \leq \frac{1}{2}(\|(x+y)\| + \|(x-y)\|)$$

et

$$\|y\| \leq \frac{1}{2}(\|(x+y)\| + \|(x-y)\|)$$

D'ou

$$\|x\| + \|y\| \leq \|(x+y)\| + \|(x-y)\|$$

Puisque:

$$\|(x+y)\| \leq \max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

et

$$\|(x-y)\| \leq \max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

D'ou

$$\|x+y\| + \|x-y\| \leq 2\max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

Solution Ex 2

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|)$$

comme

$$\|x\| + \|y\| \leq \|(x+y)\| + \|(x-y)\|$$

et

$$\|x+y\| + \|x-y\| \leq 2\max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

Solution Ex 2

2°) On suppose dÃ©sormais que la norme est issue d'un produit Scalaire, Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, On a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

Soit $< .,. >$ le produit Scalaire dont est issu la norme.
$(< x, y >= \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$ et $\|x\|^2 =< x, x >$
Alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2 < x, y >, \quad (car \quad < x+y, x+y >=< x, x > + < y, y > +2 < x, y >)$$

et

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2-2 < x, y > \quad (car \quad < x-y, x-y >=< x, x > + < y, y > -2 < x, y >)$$

d'où

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2 \geq \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2$$

Donc

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

Solution Ex 2

Puisque

$$\|x+y\|^2 \leq \max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

et

$$\|x-y\|^2 \leq \max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

Alors

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

D'où

$$(\|x\|+\|y\|)^2 \leq 2\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

Donc

$$\|x\|+\|y\| \leq \sqrt{2}\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

Solution Ex 3

Dans $E=\mathbb{R}^n$ Montrer que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$ des normes deus Ã deux équivalentes.

Solution:

• Pour tout $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$
Alors

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leq\sum_{i=1}^{n}\|x\|_\infty=n\|x\|_\infty$$

D'autre part, si i_0 est indice tel que $\|x\|_\infty=|x_{i_0}|$ alors

$$\|x\|_\infty=|x_{i_0}|\leq|x_1|+|x_2|+...+|x_n|=\|x\|_1$$

Donc

$$\|x\|_\infty\leq\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty$$

ce ci montre que $\|x\|_\infty$ et $\|x\|_1$ sont deux normes équivalentes.

Solution Ex 3

• Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$
Alors

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

D'autre part, si i_0 est indice tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$ alors

$$\|x\|_\infty = \sqrt{|x_{i_0}^2|} \leq \sqrt{|x_1^2| + |x_2^2| + ... + |x_n^2|} = \|x\|_2$$

Donc

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

ce ci montre que $\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2$ sont deux normes équivalentes.

Solution Ex 3

• Par transivité, on en déduit que $\|x\|_2$ et $\|x\|_1$ sont deux normes équivalentes.

Rq: on peut obtenir directement des inégalités entre $\|x\|_2$ et $\|x\|_1$ sans passer par $\|x\|_\infty$ pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité de Cauchy-Schwartz fournuit

$$\|x\|_1 = 1\times|x_1|+...+1\times|x_n| \leq \sqrt{1^2 + ... + 1^2}\sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} = \sqrt{n}\|x\|_2$$

D'autre part

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|} \leq \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} |x_i||x_j|} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^2} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

Donc

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

ce ci montre que $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont deux normes équivalentes.