TD16 : Couples de variables aléatoires, indépendance

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1.
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $i \in X(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.
3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$. (*On laissera le résultat de* $\mathbb{P}(Y = j)$ *exprimé à l'aide d'une somme.*)
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 2.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. Soit $Z = \sqrt{|X^2 - Y^2|}$.
Calculer $E(Z)$.

Exercice 3.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
2. Déterminer la loi de $D = X - Y$.

Exercice 4 (*).
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, qui suivent toutes deux une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \qquad Y \sim \mathcal{B}(m, p),$$

avec $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 5.
On dispose de trois boules numérotées $1, 2, 3$, réparties dans deux urnes U et V. On considère l'expérience aléatoire suivante :

- on choisit au hasard un numéro entre 1 et 3.
- si le nombre choisi est k, alors la boule numérotée k est changée d'urne avec la probabilité $1/3$, et maintenue dans son urne avec la probabilité $2/3$.

On répète cette expérience E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre aléatoire de boules contenues dans l'urne U après n réalisations de l'expérience E.
On suppose qu'au départ, toutes les boules sont dans l'urne U.

1. Donner les lois de X_0 et de X_1.
2. Pour $r \in \{1, 2, 3\}$ et $s \in \{2, 3\}$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_1=s)}(X_2 = r)$.
3. Donner la loi du couple (X_1, X_2), puis déterminer la loi de X_2.
   Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 (*).
Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 7.

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 8.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles de Bernoulli de paramètre p, indépendantes. Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_i ?
2. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i < j$. Calculer $\text{cov}(Y_i, Y_j)$.

Exercice 9.

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
On suppose que :

$$\begin{cases} E(X) = E(Y) = m \neq 0 \\ V(X) = \sigma_1^2,\ V(Y) = \sigma_2^2 \\ Cov(X, Y) = \mu \\ V(X - Y) \neq 0 \end{cases}$$

On considère la variable aléatoire $Z = aX + bY$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Déterminer a et b pour que $E(Z) = m$ et que $V(Z)$ soit minimale.

Exercice 10.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables deux à deux indépendantes. On suppose que chaque X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_i)$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Exercice 11.

On lance 1000 dés équilibrés. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer la probabilité d'avoir une moyenne supérieure ou égale à 4.

Exercice 12 (Loi faible des grands nombres).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, qui suivent toutes la même loi. On suppose que X_1 possède une variance, et on note $S_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.
Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n - E(X_1)| \geq \varepsilon) = 0$.

Exercice 13.

Soit un entier $n \geq 2$. On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première contient des boules blanches et des boules noires, la proportion de boules blanches est $p_1 \in]0; 1[$.
Les urnes suivantes contiennent chacune α boules blanches et α boules noires ($\alpha \in \mathbb{N}^*$).
On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la première urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.
Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée de la k^e urne est blanche et égale à 0 si la boule tirée de la k^e urne est noire.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2, puis leurs espérances.

2. Montrer qu'il existe une valeur de p_1 pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi.
3. Pour cette valeur de p_1, étudier l'indépendance des variables X_1 et X_2.

Pour tout $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$.

4. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dépendant uniquement de α telle que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}.$$

5. (a) Déterminer M^n.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X_n.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 14.
Un dé A parfaitement équilibré porte le nombre 1 sur quatre faces et le nombre -2 sur les deux autres faces. Soit X la variable aléatoire qui à un lancer du dé A associe le nombre obtenu.
Un dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ sur ses faces. Ce dé n'est pas équilibré. Les probabilités d'apparition de chaque face forment, dans l'ordre indiqué ci-dessus, une suite géométrique de raison $1/2$. On note Y la variable aléatoire qui à un lancer du dé B associe le nombre obtenu.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Y ?

On lance une fois simultanément les deux dés A et B, et on note S la variable aléatoire donnant la valeur absolue de la somme des deux résultats.

3. Déterminer la loi du couple (X, S).
4. Quelle est la loi marginale de S ?
5. Les variables X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 15.
Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-3, \cdots, 3\}$.
Quelle est la probabilité que l'équation $X^2 - AX + B = 0$ admette une racine double réelle ?

Exercice 16.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :

1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotées n.

1. On tire une boule de cette urne, on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$. On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note T_1 le numéro de la première boule obtenue et T_2 le numéro de la deuxième boule.
   (a) Quelle est la loi de T_1 ?
   (b) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).
   (c) En déduire la loi de T_2.
   (d) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
   (e) Déterminer $E(T_1 + T_2)$.

Exercice 17.
On choisit X au hasard dans $[\![1, 2n]\!]$, et Y au hasard dans $[\![1, X]\!]$.
Soit $p_n = \mathbb{P}\left((Y \leq n) \cap (X \geq n) \cap (X - Y \leq n)\right)$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 18.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Soit $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité pour que A soit diagonalisable ?

Exercice 19.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit Y une variable aléatoire dont la loi conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (p est un réel de $]0;1[$ fixé). Quelle est la loi de Y ?

Exercice 20 (Concours ECRICOME - filière ECE).
Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par : $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}_{[Z_p = k]}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que : $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   (On montrera par récurrence la propriété $\mathcal{P}(p)$: « les variables X_1, X_2, ..., X_p suivent la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ », et on pensera à calculer $E(Z_p)$).