CORRECTION DE D.L (suite)

Exercice 3

1. Pour tout $n \geq n_0$:

$$s_{n+1} - s_n = u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad t_{n+1} - t_n = v_n \geqslant 0$$

Donc les suites (s_n) et (t_n) sont croissantes à partir de n_0. De plus,

$$s_n - s_{n0} = u_{n0+1} + \cdots + u_n \leqslant v_{n0+1} + \cdots + v_n = t_n - t_{n0} \, .$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n \leqslant t_n + \max\{s_k - t_k \, , \; k = 0, \ldots, n_0\} \, .$$

2. Une suite croissante converge vers une limite finie si et seulement si elle est majorée. La série $\sum v_n$ converge si et seulement si la suite (t_n) converge. Supposons que ce soit le cas, et notons t la limite. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est majorée par $t + a$, donc (s_n) converge, donc $\sum u_n$ converge. Si $\sum u_n$ diverge, alors la suite (s_n) tend vers $+\infty$. Comme $t_n \geqslant s_n + a$, il en est de même de la suite (t_n), donc $\sum v_n$ diverge.

3. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon v_n$. Fixons $\varepsilon = 1/2$: pour tout $n \geqslant n_0$

$$\frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n \, .$$

Par linéarité, la convergence de la suite (t_n) équivaut aux convergences des suites $(\frac{1}{2} t_n)$ et $(\frac{3}{2} t_n)$. En appliquant ce qui précède :

$$\sum v_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum \frac{3}{2} v_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge} \, ,$$

et

$$\sum v_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum \frac{1}{2} v_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge} \, .$$

4-

La suite (s_n) est croissante à partir de n_0. Si $\sum u_n$ diverge, alors la suite (s_n) tend vers $+\infty$. Elle est donc non nulle à partir d'un certain rang n_1. Posons $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. À partir du rang n_2, la suite $(1/s_n)$ est définie, décroissante, et elle tend vers 0. Donc la série de terme général $(-1)^n/s_n$ converge, par application du critère de convergence des séries alternées (théorème d'Abel).

Exercice 5

1.

a)

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

b) $x^2 + 1 \geq 1$ donc

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1} = x^{2n}$$

Puis en intégrant entre 0 et 1

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^{2n}dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

2.

a)

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}dx$$
$$= \frac{1}{2n+1}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(u_{k+1}+u_k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Dans la première somme on pose $k' = k+1$, $k = 0 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k'=1}^{n+1} (-1)^{k'-1} u_{k'} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

On remplace k' par k dans la première somme

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} u_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$
$$= (-1)^{n-1+1}u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k + (-1)^0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$$
$$= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$$
$$= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k = (-1)^n u_{n+1} + \frac{\pi}{4}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que u_n tend vers 0 pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4 :

1°) * $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq 0$, Alors $U_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$, la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ entraine celle de $\sum U_n$.

* Décomposons U_n en éléments simples.

$$U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} = X_{n-1} - X_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = \frac{1}{2(2n+1)}$

* Calculons la n-ième somme partielle de $\sum U_n$.

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$$= X_0 - X_1 + X_1 - X_2 + \cdots + X_{n-1} - X_n$$

$$= X_0 - X_n$$

D'où $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2}$

2) On a $V_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{16n^4}$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ est convergente.

Décomposons V_n en éléments simples.

$$V_n = \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = -\frac{1}{4(2n-1)} + \frac{1}{4(2n-1)^2} + \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{4(2n+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{4(2n-1)^2} + \frac{1}{4(2n+1)^2}$$

$V_n = -\frac{1}{2} U_n + \frac{1}{4} W_n + \frac{1}{4} W_{n+1}$ avec $W_n = \frac{1}{\dots}$

Donc $V_n = -1/2\ U_n + 1/4\ W_n + 1/4\ W_{n+1}$ avec $W_n = 1/(2n-1)^2$

3°) D'où $\sum_{n=1}^{p} v_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} u_n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{p} w_n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{p} w_{n+1}$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} u_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} w_n - \frac{w_1}{4} + \frac{1}{4} w_{p+1}$$

par suite :

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} w_n - \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} v_n = -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}}$$