

# VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

§ 1. — Lois quelconques . . . . .	1
§ 2. — Lois binomiales . . . . .	2
§ 3. — Lois et séries géométriques . . . . .	4
§ 4. — Lois de Poisson . . . . .	6

## § 1. — Lois quelconques

### Rappels de cours : Espérance et variance

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k) \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \left( \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 \mathbb{P}(X = k) \right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

**Exercice 1.1.** On considère le lancé d'un dé pipé dont la loi est donnée par le tableau suivant (avec  $a \in \mathbb{R}$ ) :

$k$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$a$	$2a$	$3a$	$3a$	$2a$	$a$

- (a) À quelle(s) condition(s) sur  $a$  ce tableau définit bien une loi de probabilité ?  
 (b) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

### Corrigé de l'exercice 1.1.

- (a) Pour démontrer qu'on est en présence d'une loi de probabilité, il faut vérifier les deux conditions suivantes :

$$\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}(X = k) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

La première condition donne  $a \geq 0$  ; regardons ce que donne la deuxième :

$$a + 2a + 3a + 3a + 2a + a = 1 \iff 12a = 1 \iff a = \frac{1}{12}.$$

On est donc en présence d'une loi de probabilité si et seulement si  $a = \frac{1}{12}$ . Le tableau devient

$k$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

(On ne simplifie par les fractions car on va devoir les additionner pour calculer l'espérance et la variance.)

(b) Calculons l'espérance de  $X$  :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} + \frac{12}{12} + \frac{10}{12} + \frac{6}{12} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Calculons la variance :

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

avec

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k^2 \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{12} + \frac{8}{12} + \frac{27}{12} + \frac{48}{12} + \frac{50}{12} + \frac{36}{12} = \frac{170}{12} = 14,1667.$$

et donc :

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{170}{12} - \frac{7^2}{2^2} = \frac{170}{12} - \frac{49}{4} = \frac{170}{12} - \frac{147}{12} = \frac{23}{12} = 1,9167.$$

## § 2. — Loïs binomiales

### Rappels de cours : Loi binomiale

Si  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $p$  et  $n$ , on a, pour  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = np(1 - p).$$

**Exercice 2.1.** La proportion de la population française qui a un groupe sanguin AB est de 3 %. Dans un hôpital, un patient de groupe sanguin AB nécessite une transfusion d'urgence et il n'y a plus de sang AB disponible. Quelle est la probabilité que, parmi les 40 personnes en salle d'attente, les médecins trouvent un individu de groupe sanguin AB pour pouvoir effectuer la transfusion ? Et si on était au Japon, où il y a 10 % des personnes de groupe AB ? Et à Hawaï où seulement 1 % des personnes sont du groupe AB ? *On supposera que les groupes sanguins des personnes dans la salle d'attente sont indépendants les uns des autres.*

**Corrigé de l'exercice 2.1.** Soit  $X$  le nombre de personnes de la salle d'attente qui ont un groupe sanguin AB. Notons  $A$  l'événement « la personne a pour groupe sanguin AB » ; d'après l'énoncé,

on a  $\mathbb{P}(A) = 0,03$ . La variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $p = \mathbb{P}(A) = 0,03$  et  $n = 40$ . On a

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \binom{40}{0} \times (0,03)^0 \times (0,97)^{40} = \boxed{1 - (0,97)^{40}} \simeq 70,43 \, \%.$$

Au Japon, la probabilité devient

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \boxed{1 - (0,90)^{40}} \simeq 98,52 \, \%,$$

et à Hawaï

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \boxed{1 - (0,99)^{40}} \simeq 33,10 \, \%.$$

**Exercice 2.2.** Dans le cadre du test d'un vaccin pour une infection, on fait plusieurs expériences pour mesurer l'efficacité du vaccin :

- on teste le vaccin sur 10 animaux et aucun n'est malade ;
- on teste le vaccin sur 17 animaux et un seul est malade ;
- on teste le vaccin sur 23 animaux et deux seulement sont malades.

On sait que l'infection touche 25 % du bétail lorsque les bêtes ne sont pas vaccinées.

- (a) Soit  $X$  la variable aléatoire discrète comptant le nombre de bêtes malades parmi  $n$  si elles ne sont pas vaccinées. Quelle est la loi suivie par  $X$  ? Calculer les probabilités  $\mathbb{P}(X = 0)$  pour l'expérience n° 1,  $\mathbb{P}(X \leq 1)$  pour la n° 2 et  $\mathbb{P}(X \leq 2)$  pour la n° 3.
- (b) Parmi les trois expériences précédentes, quelle est la plus concluante pour prouver l'efficacité du vaccin ?

### Corrigé de l'exercice 2.2.

- (a) La loi de  $X$  est une loi binomiale de paramètre  $p = 0,25$  et  $n$  ; la valeur de  $n$  est 10, 17 ou 23 selon l'expérience considérée.

Pour la première expérience, on a  $n = 10$  et donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{10}{0} (0,25)^0 (0,75)^{10-0} = (0,75)^{10} \simeq 5,63 \, \%.$$

Pour la deuxième expérience, on a  $n = 17$  et donc

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = (0,75)^{17} + \binom{17}{1} (0,25) (0,75)^{16} \simeq 5,01 \, \%.$$

Pour la troisième expérience, on a  $n = 23$  et donc

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = (0,75)^{23} + \binom{23}{1} (0,25) (0,75)^{22} + \binom{23}{2} (0,25)^2 (0,75)^{21} \simeq 4,92 \, \%.$$

- (b) L'expérience la plus concluante est celle qui a la probabilité la plus faible de se produire lorsqu'on suppose que le vaccin n'a aucun effet. La troisième étant celle qui a la plus petite probabilité, c'est celle qui est la plus concluante.

### § 3. — Lois et séries géométriques

#### Rappels de cours : Loi géométrique

Si  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ , on a, pour  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p(1-p)^{k-1}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Exercice 3.1 (Temps d'attente de métros).** On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un métro suit une loi géométrique. Durant les heures de pointes du matin, le temps d'attente moyen d'un métro pour la ligne 8 est de 3 minutes tandis qu'il est de 2 min pour la ligne 9.

- (a) Quels sont les paramètres des lois géométriques pour les lignes n° 8 et n° 9 ?
- (b) Quelle est la probabilité d'attendre entre 2 et 4 minutes un métro de la ligne 8 ? de la ligne 9 ?
- (c) Même question pour un temps d'attente de plus de 5 minutes.

**Corrigé de l'exercice 3.1.** Notons  $X$  le temps d'attente de la ligne 8 et  $Y$  celui de la ligne 9.

- (a) Le temps moyen d'attente est l'espérance donc on doit avoir  $\mathbb{E}(X) = 3$  et  $\mathbb{E}(Y) = 2$ . L'espérance d'une loi géométrique de paramètre  $p$  est  $\frac{1}{p}$  donc le paramètre de  $X$  est  $\frac{1}{3}$  tandis que celui de  $Y$  est  $\frac{1}{2}$ . On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

- (b) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2-1} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{18+12+8}{81} \\ &= \boxed{\frac{38}{81}} \simeq 46,91 \%. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq Y \leq 4) &= \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{4+2+1}{16} \\ &= \boxed{\frac{7}{16}} \simeq 43,75 \%. \end{aligned}$$

- (c) On a (rappelons qu'une loi géométrique prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  donc ne prend jamais la valeur 0)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 3) - \mathbb{P}(X = 4) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{38}{81} = \frac{81-27-38}{81} \\ &= \boxed{\frac{16}{81}} \simeq 19,75 \%. \end{aligned}$$

**AUTRE MÉTHODE.** On peut aussi utiliser la formule  $\mathbb{P}(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$  et calculer la somme en faisant le changement de variable  $k' = k - 5$ .

Faisons le même calcul pour  $Y$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(2 \leq Y \leq 4) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{7}{16} = \frac{16-8-7}{16} \\ &= \boxed{\frac{1}{16}} \simeq 6,25 \, \%. \end{aligned}$$

**Exercice 3.2 (Une variante de la loi géométrique).** Soit un paquet de 52 cartes.

- (a) On tire une carte dans la paquet. Soit  $A$  l'événement « on tire un trèfle numéroté de 2 à 7 »,  $B$  l'événement « on tire un roi, une reine ou un valet de trèfle » et  $C = \overline{A} \cap \overline{B}$ . Calculer  $\mathbb{P}(C)$ .
- (b) On tire maintenant indéfiniment des cartes du paquets en les remettant à chaque fois. Notons  $S$  l'événement «  $A$  se produit avant  $B$  » et  $S_k$  l'événement « les  $k - 1$  premiers tirages correspondent à l'événement  $C$  et le  $k$ -ième à l'événement  $A$  ». Calculer  $\mathbb{P}(S_k)$  puis montrer qu'on a l'union disjointe  $S = \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k$ .
- (c) En déduire que  $\mathbb{P}(S) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k)$  et calculer  $\mathbb{P}(S)$ .

**Corrigé de l'exercice 3.2.**

- (a) On a  $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{52}$  et  $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{52}$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles donc  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ . Par suite,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - [\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)] \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \boxed{\frac{43}{52}}. \end{aligned}$$

- (b) Puisque les tirages sont indépendants (il y a remise à chaque fois et on tire les cartes au hasard), on a

$$\mathbb{P}(S_k) = \mathbb{P}(C)^{k-1} \times \mathbb{P}(A) = \left(\frac{43}{52}\right)^{k-1} \times \frac{6}{52}.$$

Supposons que l'événement  $S$  se produise. Il existe alors un tirage  $k$  tel que  $A$  se soit produit la première fois au  $k$ -ième tirage et qu'au cours d'aucun des tirages précédentes ni l'événement  $A$  ni l'événement  $B$  ne se soient produit (autrement dit, à chaque fois, c'est l'événement  $C$  qui s'est produit); cette événement est exactement  $S_k$ , donc  $S$  est l'union, pour tous les entiers  $k \geq 1$ , des  $S_k$ . Cette union est disjointe car tous les  $S_k$  sont incompatibles.

- (c) Puisque les  $S_k$  sont incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k) = \frac{6}{52} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{43}{52}\right)^{k-1}.$$

Faisons le changement de variable  $k' = k - 1$  :

$$\mathbb{P}(S) = \frac{6}{52} \sum_{k'=0}^{+\infty} \left(\frac{43}{52}\right)^{k'} = \frac{6}{52} \times \frac{1}{1-\frac{43}{52}} = \frac{6}{52} \times \frac{1}{\frac{9}{52}} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Il y a donc 66,67 % de chances que l'événement  $A$  se produise avant l'événement  $B$ .

## § 4. — Lois de Poisson

### Rappels de cours : Loi de Poisson

Si  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Rappelons que  $\lambda^0 = 1$  et  $0! = 1$ .

**Exercice 4.1 (Nombre de désintégrations d'une substance radioactive).** Le nombre  $X$  de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poisson de paramètre 3,87.

- (a) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.
- (b) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.
- (c) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?

### Corrigé de l'exercice 4.1.

- (a) Le nombre moyen de désintégrations est l'espérance de  $X$ . Puisque  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 3,87$ , on a  $\mathbb{E}(X) = \lambda$  et donc il y a en moyenne 3,87 désintégrations durant chaque période de 7,5 secondes.

La variance d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  est égale à  $\lambda = 3,87$  donc l'écart-type  $\sigma$  est  $\sqrt{3,87} = 1,97$ .

- (b) On a

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \simeq 0,0209.$$

Il y a 2,09 % de chances qu'il y ait zéro désintégrations durant une période de 7,5 secondes.

- (c) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(3 \leq X \leq 5) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) \\ &= \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^4}{24} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^5}{120} e^{-\lambda} = \left( \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{24} + \frac{\lambda^5}{120} \right) e^{-\lambda} \\ &\simeq 0,5473. \end{aligned}$$

Il y a 54,73 % de chances qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant une période de 7,5 secondes.

**Exercice 4.2 (Bombardement de Londres).** Durant la seconde guerre mondiale, le sud de Londres a été bombardé continuellement pour un total de 537 impacts de bombes. On divise cette partie de Londres en 576 zones de 25 hectares chacune et on note  $N$  la variable aléatoire telle que  $N = k$  est l'événement « une zone a été touchée par  $k$  impacts ». On suppose que  $N$  suit une loi de Poisson.

- (a) Quel est le paramètre de la loi de Poisson ?

- (b) Calculer le nombre de zones ayant reçu 1, 2, 3, 4 et plus de 5 impacts. Les bombardements étaient-ils ciblés sur des zones spécifiques ou étaient-ils fait à l'aveugle ?
- (c) Les données réelles sont reproduites dans le tableau suivant. Y a-t-il concordance avec les résultats précédents ?

NOMBRE D'IMPACTS	0	1	2	3	4	$\geq 5$
NOMBRE DE ZONES	229	211	93	35	7	1

### Corrigé de l'exercice 4.2.

- (a) Le paramètre d'une loi de Poisson est son espérance, donc la valeur moyenne du nombre de bombardements par zones. Puisqu'il y a 537 impacts et 576 zones, on a  $\lambda = \frac{537}{576} \simeq 0,9323$ .
- (b) Le nombre de zones ayant reçu  $k$  impacts est égal à  $576 \times \mathbb{P}(N = k)$ . Calculons les probabilités :

$$\mathbb{P}(N = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \simeq e^{-0,9323} \simeq 0,393\,651$$

$$\mathbb{P}(N = 1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \simeq e^{-0,9323} \simeq 0,366\,997$$

$$\mathbb{P}(N = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \simeq e^{-0,9323} \simeq 0,171\,074$$

$$\mathbb{P}(N = 3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda} \simeq e^{-0,9323} \simeq 0,053\,164$$

$$\mathbb{P}(N = 4) = \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^4}{24} e^{-\lambda} \simeq e^{-0,9323} \simeq 0,012\,391$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(N < 5) = 1 - \mathbb{P}(N \leq 4) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N = 0) - \mathbb{P}(N = 1) - \mathbb{P}(N = 2) - \mathbb{P}(N = 3) - \mathbb{P}(N = 4) \\ &= 0,002\,723. \end{aligned}$$

Pour obtenir les nombres de zones correspondant aux nombres d'impacts par zone, on multiplie par 576 et on arrondi le résultat :

NOMBRE D'IMPACTS	0	1	2	3	4	$\geq 5$
NOMBRE DE ZONES	227	211	99	31	7	2

On remarque qu'il y a assez peu de zones ayant beaucoup d'impacts. On peut donc considérer que les bombardements étaient fait à l'aveugle.

- (c) Quand on compare les chiffres de deux tableaux, on voit une nette correspondance :

NOMBRE D'IMPACTS	0	1	2	3	4	$\geq 5$
NOMBRE RÉEL DE ZONES	229	211	93	35	7	1
NOMBRE CALCULÉ DE ZONES	227	211	99	31	7	2

Il faudrait néanmoins faire un test statistique (test du  $\chi^2$  par exemple) pour vérifier la correspondance.

**Exercice 4.3.** Un ambassadeur reçoit 500 personnes lors d'une réception le 1er janvier. Il a prévu d'offrir un cadeau coûtant 20 euros à chaque invité, sauf aux invités dont l'anniversaire tombe le 1er janvier, qui auront un cadeau coûtant 100 euros. Pour simplifier, on considérera qu'une année a 365 jours (on néglige les années bissextiles) et que toutes les dates d'anniver-

saire ont la même probabilité.

- (a) Soit  $X$  la variable aléatoire « nombre d'invité ayant leur anniversaire qui tombe le 1er janvier ». Quelle est la loi suivie par  $X$  ? En déduire le coût moyen des cadeaux.
- (b) On approxime  $X$  par une loi de Poisson  $Y$ . Trouver le paramètre  $\lambda$ . Le coût moyen des cadeaux change-t-il ? Comparer dans les deux cas de figure la probabilité qu'il n'y ait 0 des invités né le 1er janvier. Même question pour 1, 2, 3 ou 4 invités. L'approximation par la loi de Poisson est-elle bonne ?

### Corrigé de l'exercice 4.3.

- (a) Vu les hypothèses de l'énoncé, la probabilité que la date d'anniversaire d'un invité tombe le 1er janvier est  $p = \frac{1}{365}$ . Puisque les dates d'anniversaire de tous les invités sont indépendantes entre elles,  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $p$  et  $n = 500$ . Le nombre moyen de personnes ayant un anniversaire tombant le 1er janvier est donc  $\mathbb{E}(X) = np = \frac{500}{365} \simeq 1,37$ . Le coût moyen des cadeaux sera donc

$$\frac{500}{365} \times 100 + (500 - \frac{500}{365}) \times 20 = \frac{3690000}{365} \simeq 10\,109,59.$$

Le coût moyen des cadeaux de la réception sera de 10 109,59 euros.

- (b) Puisque le paramètre d'une loi de Poisson est égal à son espérance, on va prendre  $\lambda = \frac{500}{365}$ . Le coût moyen des cadeaux ne change pas, car l'espérance est la même dans les deux cas. Les probabilités qu'il n'y ait  $k$  invités né le 1er janvier sont

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k}{500} p^k (1-p)^{500-k} = \binom{k}{500} \left(\frac{364}{365}\right)^{500} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Comparons dans le tableau suivant les valeurs trouvées pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  :

$k$	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0,2537	0,3484	0,2388	0,1089	0,0372
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,2541	0,3481	0,2385	0,1089	0,0373

Les résultats obtenus sont très proches. On pouvait le prévoir, car l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson est relativement bonne lorsque  $p$  est petit,  $n$  grand et  $\lambda = np$  ni grand ni petit. Pour démontrer que l'approximation est bonne, il faudrait faire un test statistique approprié (test du  $\chi^2$ ).