Mécanique du Solide

Chapitre 5 :

CINETIQUE DES SOLIDES

Cycle préparatoire
Semestre: S3

2016/2017

Pr. Chaabelasri

Département Génie Civil, ENSA d'Al-Hociema

I - PRELIMINAIRES

Définition

La cinétique du solide est la relation ou l'interaction entre la cinématique et l'inertie du solide.

I - PRELIMINAIRES

Rappels : Matrice d'inértie

Soit (S) un solide de *masse m et de* centre d'inertie G.

Soit $\Re_1 = (G,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère orthonormé direct lié à ce solide.

Soit M un point de (S) dont l'élément qui l'entoure est de masse dm. $\vec{GM} = x_1\,\vec{i}_1 + y_1\,\vec{j}_1 + z_1\,\vec{k}_1$

Soit alors la matrice d'inertie du solide, au point G, dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:

$$M^{S}_{(G,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

Avec :

A, B et C : les moments d'inertie du solide par rapport aux axes $(G,\vec{i}_1);(G,\vec{j}_1);et\,(G,\vec{k}_1)$ respectivement : $A = I^S_{G,\vec{i}_1} = \int_S (y_1^{\,2} + z_1^{\,2})\,dm$; $B = I^S_{G,\vec{j}_1} = \int_S (z_1^{\,2} + x_1^{\,2})\,dm$; $C = I^S_{G,\vec{k}_1} = \int_S (x_1^{\,2} + y_1^{\,2})\,dm$

D, E et F : les produits d'inertie : $E = -\int_S x_1\,y_1\,dm$; $F = -\int_S x_1\,z\;\;dm$; $E = -\int_S y_1\,z_1\,dm$;

I - PRELIMINAIRES

Rappels : Matrice d'inértie

Suivant la forme géométrique et l'homogénéité du solide

$$d\,m = \rho\, dV = \frac{m}{V} d\,V$$

$$d\,m = \sigma\, dS = \frac{m}{S} d\,S$$

$$d\,m = \lambda\, dL = \frac{m}{L} d\,L$$

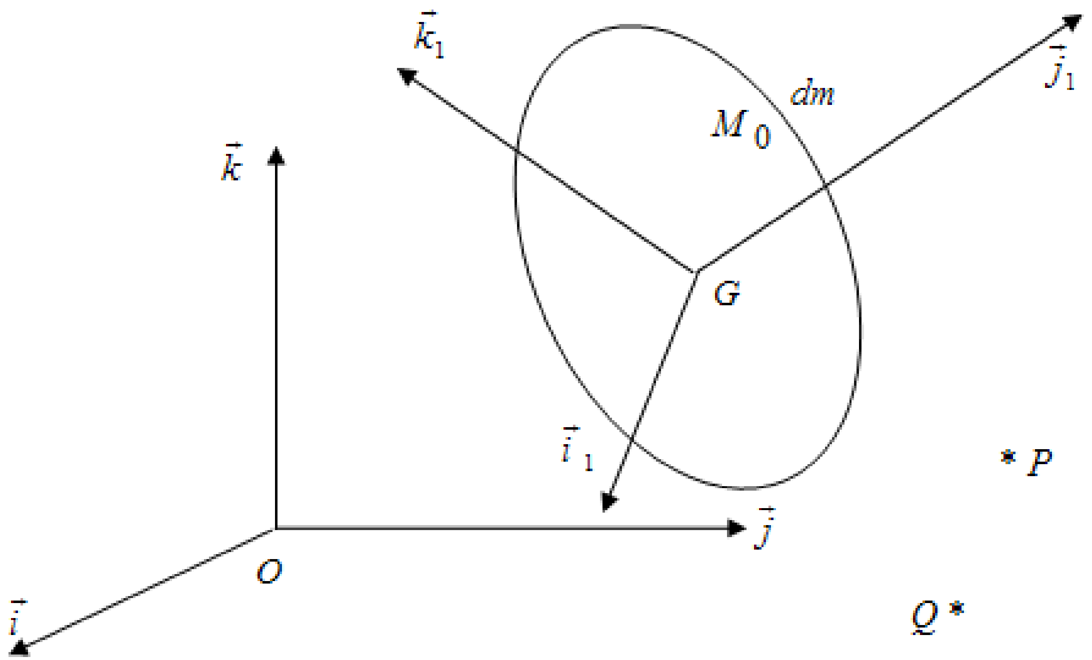
Remarque : Dans la pratique ?

Dans la pratique, on choisit le repère $\Re_1 = (G, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ de telle façon que les axes $(G, \vec{i}_1); (G, \vec{j}_1); et\,(G, \vec{k}_1)$ soient des axes de symétrie matérielle, ce qui donne D=E=F=0.

I - PRELIMINAIRES

Rappels : Torseur cinématique

Supposons maintenant que ce solide est en **mouvement quelconque** par rapport à un repère orthonormé direct $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:



Question : Comment faire pour passer du repère R au repère R_1 ?

I - PRELIMINAIRES

Rappels : Torseur cinématique

Le passage du repère $\Re$ vers le repère $\Re_1$, (dans le cas du mouvement le plus général), se fait par une translation $\vec{OG}$ suivie d'une rotation autour de G

$$\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{Translation\ (\overrightarrow{OG})} \Re_{O_1} = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{\psi, \theta, \varphi} \Re_1 = (G, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$$

$$\vec{OG} = \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right._{\Re}$$

Soit alors $\vec{\Omega}(S/\Re)$, le vecteur rotation instantanées de (S) par rapport à $\Re$.

Ainsi, le torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$ (défini en tout point du solide, a pour éléments de réduction, au point $G \in (S)$:

$$[V(S/\Re)] = \left[\begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/\Re) \\ \vec{V}(G/\Re) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{array} \right]_{G \in (S)}$$

I - PRELIMINAIRES

Rappels : Torseur cinématique en un point M quelconque

Ce torseur cinématique du solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, a pour éléments de réduction, en un point M quelconque appartenant au solide :

$$\left[V(S/\Re)\right] = {}_{M\in(S)}\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re) \\ \vec{V}(M/\Re) = \vec{V}G/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge O\vec{M} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons aussi déterminer le vecteur accélération du point M par la relation :

$$\vec{\gamma}(M) = \left[\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt}\right]_{\Re}$$

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Vecteur quantité de mouvement

On appelle « ***vecteur quantité de mouvement*** » (ou quantités des vitesses) de (*S*) dans son mouvement par rapport à $\Re$, le vecteur :

$$\vec{P}(S/\Re) = \int_{(S)} \vec{V}(M/\Re)\,dm$$

Question : Quel est l'expression du vecteur quantité de mouvement de la vitesse du centre d'inertie ?

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Vecteur quantité de mouvement

$$\vec{P}(S/\Re) = \frac{d}{dt}[\int_{(S)} \vec{OM}\, dm]_{\Re}$$

$$= m\frac{d}{dt}[\frac{1}{m}\int_{(S)} \vec{OM}\, dm]_{\Re}$$

$$= m\left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_{\Re}$$

$$= m\vec{V}(G/\Re)$$

Donc :

$$\boxed{\vec{P}(S/\Re) = m\vec{V}(G/\Re)}$$

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Moment cinétique d'un solide en un point :

Soit P un point quelconque de l'espace

On appelle « **moment cinétique** » de (*S*), au point P, dans son mouvement par rapport à $\Re$, le vecteur

$$\vec{\sigma}(P, S/\Re) = \int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\, dm$$

Remarque : Le moment cinétique est la somme des moments des vecteurs $\vec{V}(M/\Re)$ par rapport au point P.

Question : Est-ce qu'on peut montrer que le champ des moments cinétiques est un champ antisymétrique ? Peut-on définir un autre torseur ?

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Moment cinétique est un champ antisymétrique !

Soit Q un point quelconque de l'espace

$$\vec{\sigma}(Q,S/\Re) = \int_{(S)} \vec{QM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm$$

$$= [\int_{(S)} \vec{QP} \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm] + [\int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm] = [1]+[2]$$

$$[1] = \int_{(S)} \vec{QP} \wedge \vec{V}(M/\Re)dm = \vec{QP} \wedge \int_{(S)} \vec{V}(M/\Re)\,dm = \vec{QP} \wedge m\vec{V}(G/\Re) = m\vec{V}(G/\Re) \wedge \vec{PQ}$$

$$[2] = \int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{V}(M)\,dm = \vec{\sigma}(P,\vec{S}/\Re)$$

Par conséquent : $\forall\ (P,Q) \in L'espace :$

$$\vec{\sigma}(Q,S/\Re) = \vec{\sigma}(P,S/\Re) + m\vec{V}(G/\Re) \wedge \vec{PQ}$$

Ce qui veut dire que le champ des moments cinétiques d'un solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, défini en tout point de l'espace, est un champ antisymétrique de vecteur $m\vec{V}(G/\Re)$ (qui est le vecteur quantité de mouvement).

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Torseur cinétique du solide (S)

Ainsi on définit un torseur noté $[C(S/\Re)]$, et appelé « **Torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à** $\Re$ ». Il est défini en tout point de l'espace. Ses éléments de réduction au point P sont :

$$\left[C(S/\Re)\right] = {}_P\begin{bmatrix} m\vec{V}(G/\Re) \\ \vec{\sigma}(P,S/\Re) = \int_S \vec{PM} \wedge \vec{V}(M/\Re) \end{bmatrix}$$

$m\vec{V}(G/\Re)$ *est **la résultante cinétique** de (S) dans son mouvement par rapport à* $\Re$

$\vec{\sigma}(P,S/\Re)$ *est **le moment cinétique** en P de (S) dans son mouvement par rapport à* $\Re$

Question : Exprimer le torseur cinétique en un autre point Q.

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Torseur cinétique du solide (S) en un autre point :

En un autre point Q, les éléments de réduction du torseur cinétique sont :

$$[C(S/\Re)] = {}_Q\begin{bmatrix} m\vec{V}(G/\Re) \\ \vec{\sigma}(Q,S/\Re) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{V}(M/\Re) = \vec{\sigma}(P,S/\Re) + m\vec{V}(G/\Re) \wedge \vec{PQ} \end{bmatrix}$$

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment cinétique (Théorème de Koenig)

<u>Méthode 1 :</u> Cherchons, tout d'abord ce moment cinétique au point G centre d'inertie du solide :

$$\vec{\sigma}(G,S/\Re)=\int_{(S)}\vec{GM}\wedge\vec{V}(M/\Re)\,dm$$

Or : $\vec{V}(M/\Re)=\vec{V}(G/\Re)+\vec{\Omega}(S/\Re)\wedge\vec{GM}$

$$\Rightarrow\vec{\sigma}(G,S/\Re)=\int_{(S)}\vec{GM}\wedge\vec{V}(G/\Re)\,dm+\int_{(S)}\vec{GM}\wedge\left[\vec{\Omega}(M/\Re)\wedge\vec{GM}\right]dm$$

$$\Rightarrow\vec{\sigma}(G,S/\Re)=\left[\int_{(S)}\vec{GM}\,dm\right]\wedge\vec{V}(G/\Re)-\int_{(S)}\vec{GM}\wedge\left[\vec{GM}\wedge\vec{\Omega}(M/\Re)\right]dm$$

$$\Rightarrow\vec{\sigma}(G,S/\Re)=\vec{0}+\vec{J}_G^S(\vec{\Omega}(S/\Re))$$

Finalement nous avons la relation suivante :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G,S/\Re)=M^S_{G,\vec{i}_1\vec{j}_1,\vec{k}_1)}.\vec{\Omega}(S/\Re)}$$

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment cinétique (Théorème de Koenig)

A partir de cette relation, on peut déterminer le moment cinétique **en n'importe quel point P**, en se basant sur le fait que ce champ est antisymétrique :

$$\vec{\sigma}(P, S/\Re) = \vec{\sigma}(G, S/\Re) + m\vec{V}(G/\Re) \wedge \vec{GP}$$

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment cinétique (Théorème de Koenig)

Méthode 2 : On peut aussi trouver une expression simple pour le moment cinétique en un point appartenant au solide et qui est fixe dans $\Re$.

Soit A un tel point : $\begin{cases} A \in (S) \\ A \text{ fixe dans } \Re \quad (\vec{V}(A/\Re) = \vec{0} \end{cases}$

$$\vec{\sigma}(A, S/\Re) = \int_{(S)} \vec{AM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\, dm$$

Or : $\vec{V}(M/\Re) = \vec{V}(A/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM} = \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM}$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(G, S/\Re) = \int_{(S)} \vec{AM} \wedge \left[\vec{\Omega}(M/\Re) \wedge \vec{AM} \right] dm$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(G, S/\Re) = -\int_{(S)} \vec{AM} \wedge \left[\vec{AM} \wedge \vec{\Omega}(M/\Re) \right] dm$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(G, S/\Re) = \vec{J}_A^S(\vec{\Omega}(S/\Re))$$

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment cinétique (Théorème de Koenig)

Finalement nous avons la relation suivante :

$$\overrightarrow{\sigma}(A,S/\Re) = M^{S}_{A,\vec{i}_1\vec{j}_1,\vec{k}_1)}.\vec{\Omega}(S/\Re)$$

Avec : $\begin{cases} A \in (S) \\ A \ \text{fixe dans} \ \Re \quad (\vec{V}(M/\Re) = \vec{0} \end{cases}$

A partir de cette relation, on peut déterminer le moment cinétique **en n'importe quel point P**, en se basant sur le fait que ce champ est antisymétrique :

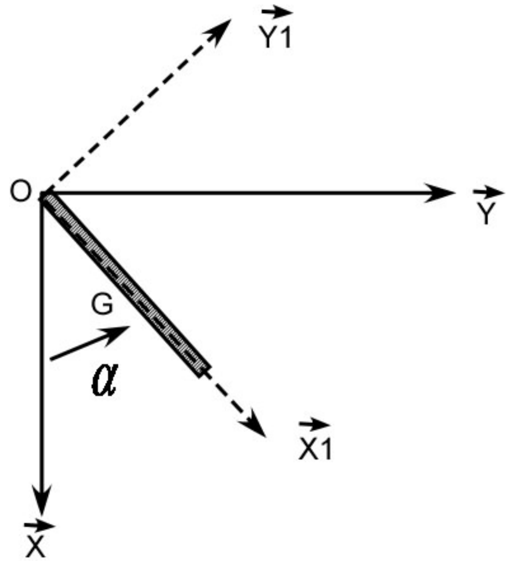
$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(P,S/\Re) = \overrightarrow{\sigma}(A,S/\Re) + m\overrightarrow{V}(G/\Re) \wedge \overrightarrow{AP}}$$

II - TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE.

Exemple

Soit une bare OP=L, de masse m,en rotation autour de OZ.

Calculer le torseur cinétique au point O et au point G



II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Vecteur quantité des accélérations

On appelle « ***vecteur quantité des accélérations*** ») de (S) dans son mouvement par rapport à $\Re$, le vecteur :

$$\vec{\Gamma}(S/\Re) = \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/\Re)dm$$

$$\vec{\Gamma}(S/\Re) = \frac{d^2}{dt^2}[\int_{(S)} \vec{OM}\,dm]_{\Re} = m\frac{d^2}{dt^2}[\frac{1}{m}\int_{(S)} \vec{OM}\,dm]_{\Re} = m\left[\frac{d^2\,\vec{OG}}{dt^2}\right]_{\Re} = m\vec{\gamma}(G/\Re)$$

Donc :

$$\vec{\Gamma}(S/\Re) = m\,\vec{\gamma}(G/\Re)$$

II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Moment dynamique

Soit P un point quelconque de l'espace

On appelle « ***moment dynamique*** » de (*S*), au point P, dans son mouvement par rapport à $\Re$, le vecteur

$$\vec{\delta}(P, S/\Re) = \int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\, dm$$

C'est, en fait, la somme des moments des vecteurs $\vec{\gamma}(M/\Re)$ par rapport au point P.

Question : Montrer que le champ des moments dynamiques est un champ antisymétrique.

II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Antisymétrie d'un champ de moment dynamique

Soit Q un point quelconque de l'espace

$$\vec{\delta}(Q,S/\Re) = \int_{(S)} \vec{QM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\,dm$$

$$= [\int_{(S)} \vec{QP} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\,dm] + [\int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\,dm] = [1]+[2]$$

$$[1] = \int_{(S)} \vec{QP} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\,dm = \vec{QP} \wedge \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/\Re)\,dm = \vec{QP} \wedge m\,\vec{\gamma}(G/\Re) = m\,\vec{\gamma}(G/\Re) \wedge \vec{PQ}$$

$$[2] = \int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{\gamma}(M)\,dm = \vec{\delta}(P, \vec{S}/\Re)$$

Par conséquent : $\forall\,(P,Q) \in L'espace:$

$$\vec{\delta}(Q,S/\Re) = \vec{\delta}(P,S/\Re) + m\,\vec{\gamma}(G/\Re) \wedge \vec{PQ}$$

Ce qui veut dire que le champ des moments dynamiques d'un solide dans son mouvement par rapport à $\Re$, défini en tout point de l'espace, est un champ antisymétrique de vecteur $m\,\vec{\gamma}(G/\Re)$.

II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Torseur dynamique du solide (S)

Ainsi on définit un torseur noté $[D(S/\Re)]$, et appelé « **Torseur dynamique du solide (S) dans son mouvement par rapport à** $\Re$ ». Il est défini en tout point de l'espace. Ses éléments de réduction au point P sont :

$$[D(S/\Re)] = {}_P\begin{bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\Re) \\ \vec{\delta}(P,S/\Re) = \int_S \vec{PM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re) \end{bmatrix}$$

$m\vec{\gamma}(G/\Re)$ *est* ***la résultante dynamique*** *de (S) dans son mouvement par rapport à* $\Re$

$\vec{\delta}(P,S/\Re)$ *est* ***le moment dynamique*** *en P de (S) dans son mouvement par rapport à* $\Re$

En un autre point Q, les éléments de réduction du torseur cinétique sont :

$$[D(S/\Re)] = {}_Q\begin{bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\Re) \\ \vec{\delta}(Q,S/\Re) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\delta}(P,S/\Re) + m\vec{\gamma}(G/\Re) \wedge \vec{PQ} \end{bmatrix}$$

II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment dynamique : $\vec{\delta}(P, S/\Re)$

Relation entre le moment dynamique et la dérivée du moment cinétique :

?

II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment dynamique : $\vec{\delta}(P,S/\Re)$

Relation entre le moment dynamique et la dérivée du moment cinétique :

Soit P un point quelconque :

$$\vec{\sigma}(P,S/\Re) = \int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm = \int_{(S)} \left[\vec{OM} - \vec{OP}\right] \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(P,S/\Re)\right]_{\Re} = \int_{(S)} \left[\frac{d\,\vec{OM}}{dt} - \frac{d\,\vec{OP}}{dt}\right]_{\Re} \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm$$

$$+ \int_{(S)} \left[\vec{OM} - \vec{OP}\right] \wedge \frac{d}{dt}\left[\vec{V}(M/\Re)\right]_{\Re} dm$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(P,S/\Re)\right]_{\Re} = \int_{(S)} \left[\vec{V}(M/\Re) - \vec{V}(P/\Re)\right]_{\Re} \wedge \vec{V}(M/\Re)\,dm$$

$$+ \int_{(S)} \left[\vec{OM} - \vec{OP}\right] \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\,dm$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(P,S/\Re)\right]_{\Re} = -\vec{V}(P/\Re) \wedge \int_{(S)} \vec{V}(M/\Re)\,dm + \int_{(S)} \vec{PM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\,dm$$

$$= -\vec{V}(P/\Re) \wedge m\vec{V}(G/\Re) + \vec{\delta}(P,S/\Re)$$

II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment dynamique : $\vec{\delta}(P,S/\Re)$

Finalement, nous avons en tout point P de l'espace :

$$\vec{\delta}(P,S/\Re) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(P,S/\Re)\right]_{\Re} + \vec{V}(P/\Re) \wedge m\vec{V}(G/\Re)$$

II - TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE.

Détermination pratique du moment dynamique : $\vec{\delta}(P,S/\Re)$

Nous constatons qu'il y a 2 cas particuliers :

1) Si P est confondu avec G :

$$\vec{\delta}(G,S/\Re) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G,S/\Re)\right]_{\Re}$$

Avec : $\vec{\sigma}(G,S/\Re) = M^{S}_{G,\vec{i}_1\vec{j}_1,\vec{k}_1)} . \vec{\Omega}(S/\Re)$

A partir de cette relation, on peut déterminer le moment dynamique **en n'importe quel point Q**, en se basant sur le fait que ce champ est antisymétrique :

$$\vec{\delta}(Q,S/\Re) = \vec{\delta}(G,S/\Re) + m\,\vec{\gamma}(G/\Re) \wedge \vec{GQ}$$

2) Si P est un point fixe dans $\Re$:

$$\vec{\delta}(P_{fixe},S/\Re) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(P_{fixe},S/\Re)\right]_{\Re}$$

III – ENERGIE CINETIQUE D UN SOLIDE.

III-1) Définition :

L'énergie cinétique d'un point matériel doté de la masse élémentaire dm , et animé de la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ est donnée par :

$$\delta \mathrm{E_c}(M/\Re) = \frac{1}{2}[\vec{V}(M/\Re)]^2\, dm$$

On appelle « *énergie cinétique* » d'un solide dans son mouvement par rapport au repère $\Re$, la quantité scalaire définie par :

$$\mathrm{E_c}(S/\Re) = \frac{1}{2}\int_{(S)}[\vec{V}M/\Re)]^2\, dm$$

III - ENERGIE CINETIQUE D UN SOLIDE.

III-2) Détermination pratique de l'énergie cinétique Ec du solide :

$$\vec{V}(M/\Re) = \vec{V}(G/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{V}(M/\Re)\right]^2 = \left[\vec{V}(G/\Re)\right]^2 + 2\vec{V}(G/\Re)\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right] + \left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right]\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right]$$

$$\mathrm{E_c}(S/\Re) = \frac{1}{2}\int_{(S)} [\vec{V}\, M/\Re)]^2\, dm \quad = \frac{1}{2}\int_S \left[\vec{V}(G/\Re)\right]^2 dm + \int_S \vec{V}(G/\Re)\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right] dm + \frac{1}{2}\int_S \left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right]\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right] dm$$

Or :

$$\frac{1}{2}\int_S \left[\vec{V}(G/\Re)\right]^2 dm = \frac{1}{2} m \left[\vec{V}(G/\Re)\right]^2$$

$$\int_S \vec{V}(G/\Re)\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right] dm = \vec{V}(G/\Re)\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \int_S \vec{GM}\, dm\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_S \left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right]\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right] dm = -\frac{1}{2}\int_S \left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}\right]\left[\vec{GM} \wedge \vec{\Omega}(S/\Re)\right] dm$$

$$= -\frac{1}{2}\int_S \vec{\Omega}(S/\Re).\left[(\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{GM}) \wedge \vec{GM}\right] dm = -\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\Re).\int_S \vec{GM} \wedge (\vec{GM} \wedge \vec{\Omega}(S/\Re)\, dm$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\Re).\vec{\mathrm{J}}^{S}_{G}(\vec{\Omega}(S/\Re)) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\Re).\vec{\sigma}(G, S/\Re)$$

$$= \frac{1}{2}\, {}^{t}\vec{\Omega}(S/\Re).\mathbf{M}^{S}_{G,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1}.\vec{\Omega}(S/\Re)$$

III - ENERGIE CINETIQUE D UN SOLIDE.

III-2) Détermination pratique de l'énergie cinétique Ec du solide :

Finalement :

$$E_c(S/\Re) = \frac{1}{2}\left[\vec{V}(G/\Re)\right]^2 + \frac{1}{2}{}^t\vec{\Omega}(S/\Re).\mathbf{M}^S_{G,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1}.\vec{\Omega}(S/\Re)$$

La quantité $\frac{1}{2}m\left[\vec{V}(G/\Re)\right]^2$ correspond à l'énergie cinétique de translation.

La quantité $\frac{1}{2}{}^t\vec{\Omega}(S/\Re).\mathbf{M}^S_{G,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1}.\vec{\Omega}(S/\Re)$ correspond à l'énergie cinétique de rotation.

<u>Remarque 1</u>:

On peut remarquer que l'énergie cinétique du solide est la moitié du « Comoment » des torseurs cinématique et cinétique de ce solide

$$[V(S/\Re)] = {}_G\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\Re == \vec{\Omega}_{S/\Re_G} \\ \vec{V}(G/\Re) \end{bmatrix} \qquad [C(S/\Re)] = {}_G\begin{bmatrix} m\vec{V}(G/\Re) \\ \vec{\sigma}(G,S/\Re) \end{bmatrix}$$

III - ENERGIE CINETIQUE D UN SOLIDE.

III-2) Détermination pratique de l'énergie cinétique Ec du solide :

On rappelle que le « Comoment » de deux torseurs est indépendant du point où on le calcule.

Théoréme :

« L'énergie cinétique d'un solide (S), est égale au demi-produit de son torseur cinématique par son torseur cinétique ».

$$E_c(S/\Re) = \frac{1}{2}\left[V(S/\Re\right] \otimes .\left[C(S/\Re\right]$$

Remarque 2 :

Si le solide (S) admet un point A qui reste fixe dans $\Re$, alors l'énergie cinétique du solide s'écrit sous la forme :

$$E_c(S/\Re) = \frac{1}{2}{}^t\vec{\Omega}(S/\Re).\mathbf{M}^S_{A,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1}.\vec{\Omega}(S/\Re)$$

III - ENERGIE CINETIQUE D UN SOLIDE.

III-2) Détermination pratique de l'énergie cinétique Ec du solide :

Démonstration :

Il suffit de faire la même démarche que ci-dessus, en raisonnant par rapport au point A :

$\vec{V}(M/\Re) = \vec{V}(A/\Re) + \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM} = \vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM}$ et on remplace dans l'expression

$$\mathrm{E_c}(S/\Re) = \frac{1}{2}\int_{(S)} [\vec{V}\, M/\Re)]^2\, dm \;=$$

$$\frac{1}{2}\int_S \left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM}\right]\left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM}\right] dm = -\frac{1}{2}\int_S \left[\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM}\right]\left[\vec{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/\Re)\right] dm$$

$$= -\frac{1}{2}\int_S \vec{\Omega}(S/\Re).\left[(\vec{\Omega}(S/\Re) \wedge \vec{AM}) \wedge \vec{AM}\right] dm = -\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\Re).\int_S \vec{AM} \wedge (\vec{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/\Re)\, dm$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\Re).\vec{\mathrm{J}}^{S}_{A}(\vec{\Omega}(S/\Re)) \quad = \frac{1}{2}{}^{t}\vec{\Omega}(S/\Re).\mathbf{M}^{S}_{A,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1}.\vec{\Omega}(S/\Re)$$