ENSA d'Al-Hoceima — Année 2020/2021
AP-II, 2ème année, — Semestre 3
Algèbre Quadratique, — TD1

Série N^{o}1 : Réduction d'endomorphismes et de matrices

Exercice 1
Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver l'endomorphisme φ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Déterminer la matrice inverse A^{-1}. φ est-il bijectif ?
4. Déterminer φ^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer le polynôme caractéristique de φ, le spectre de A, les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.
6. Déterminer une matrice P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $T = P^{-1}AP$.

Exercice 2
Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
3. En utilisant les sous-espaces propres, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? si, oui diagonaliser la matrice la.

Exercice 3
Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
3. En utilisant les sous-espaces propres, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? si, oui diagonaliser la matrice la.

Exercice 4
Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. Étudier la suite A^n des puissances de A.
4. Trigonaliser la matrice A.

Exercice 5

1. Soit A la matrice donnée par
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
On appelle la **trace** de A le nombre noté "$\mathrm{tr}(A)$" défini par $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.
Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A s'écrit sous la forme
$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$$
2. Soit A une matrice carrée d'ordre 3 dont les valeurs propres sont notées par λ_1, λ_2 et λ_3.
   (a) Donner les expressions de "$\det(A)$" et "$\mathrm{tr}(A)$" en fonction λ_1, λ_2 et λ_3.
   (b) Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la formr :
   $$P(x) = -x^3 + \mathrm{tr}(A)x^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii})\right) x + \det(A)$$
   où A_{ii} est la sous matrice de A en enlevant le i^{eme} ligne et la i^{eme} colonne.
   (c) Montrer que si $\lambda_1 = 1$ alors
   $$\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii}) = \mathrm{tr}(A) + \det(A) - 1,$$
   puis exprimer ce résultat en fonction de λ_2 et λ_3.
   (d) On suppose que $\lambda_1 = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. Trouver une relation entre λ_2 et λ_3, puis calculer λ_2 telle que $\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii}) = 0$.

Exercice 6

Soit M la matrice donnée par
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer les éléments propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ou trigonalisable ? .
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ à partir de la somme directe des sous-espaces propres de A.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = id_E$ l'identité de E. Soit α une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité et n'est pas valeur propre de f. Montrer que l'on a :
$$f^{p-1} + \alpha f^{p-2} + \ldots + \alpha^{p-1} id_E = 0_{E,E}.$$