Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

Ahmed Moussaid

Deuxième Année Cycle Préparatoire
Semestre : S3
Module : Analyse 3

TD: Fonctions de Plusieurs Variables: Limites et Continuités

December 9, 2020

Plan

Exercice 1

déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

1· $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$.

Solution Ex 1

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad y > 0 \quad \text{et} \quad x^2 \geq y\}$$

Exercice 1

déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

2· $f(x, y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$.

Solution Ex 1

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad y > 0 \quad \text{et} \quad x > y\}$$

Exercice 1

déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

3· $f(x, y) = \ln(x + y)$

Solution Ex 1

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x > -y\}$$

Exercice 2

d'après la définition de la limite des fonctions de plusieurs variables montrer que.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

Solution Ex 2

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

$$y^2 \leq (x-1)^2 + y^2 \Rightarrow \frac{y^2}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$$

Alors

$$|\frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}| \leq |y| \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

Donc

$$|f(x,y) - 0| \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \|(x,y)-(1,0)\|_2$$

on donne $\eta = \varepsilon$ donc

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists \eta = \varepsilon > 0 \quad \|(x;y)-(1,0)\|_2 \leq \eta \Rightarrow |f(x,y) - 0| \leq \varepsilon$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0$$

Solution Ex 2

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$
on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$2|xy| \leq x^2+y^2 \quad \text{et} \quad x^2 \leq x^2+y^2$$

et

$$|3x^2+xy| \leq 3|x^2| + |xy|$$

Alors

$$|3x^2+xy| \leq 3(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq 4(x^2+y^2)$$

Donc

$$|f(x,y)-0| \leq 4\frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4\sqrt{x^2+y^2} = 4\|(x,y)-(0,0)\|_2$$

on donne $\eta = \frac{\varepsilon}{4}$ donc

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists \eta = \frac{\varepsilon}{4} > 0 \quad \|(x;y)-(0,0)\|_2 \leq \eta \Rightarrow |f(x,y)-0| \leq \varepsilon$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Solution Ex 2

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Donc

$$(xy)^2 \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$$

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$$

Donc on donne $\eta = 2\sqrt{\varepsilon}$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists \eta = 2\sqrt{\varepsilon} > 0 \quad \|(x;y)-(0,0)\|_2 \leq \eta \Rightarrow |f(x,y)-0| \leq \varepsilon$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Solution Ex 2

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$
on a $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$|x^4+y^4| = |(x^2+y^2)^2-2x^2y^2| \leq (x^2+y^2)^2+2(\frac{1}{2}(x^2+y^2))^2 = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2$

Donc $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y)| = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{3}{2}(x^2+y^2)$$

Donc on donne $\eta = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$
Donc

$$\forall\varepsilon > 0; \quad \exists\eta = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon} > 0 \quad \|(x;y)-(0,0)\|_2 \leq \eta \Rightarrow |f(x,y)-0| \leq \varepsilon$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Solution Ex 3

Etudier ces limites existent-elles dans $\mathbb{R}^2$?

1°) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$ - 2°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)}$

3°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ - 4°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2}$

5°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$ - 6°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Solution Ex 3

1°) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$

Soit $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$

on a

$$\lim_{y\to 1^+} \frac{1}{1-y} = -\infty$$

et

$$\lim_{y\to 1^-} \frac{1}{1-y} = +\infty$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ n'existe pas.

Solution Ex 3

\- 2°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)}$

Soit $f(x,y) = \frac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)}$

on a

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x-\sin(x)} = -1$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Solution Ex 3

3°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Soit $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

on a

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Solution Ex 3

4°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2}$

Soit $f(x,y) = \frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2}$

on a

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

et

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Solution Ex 3

5°) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$

Soit $f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$x^2 \leq (x^2+y^2)$$

Donc

$$|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}| \leq |\frac{6x^2y}{x^2}| = 6|y|$$

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y)| = \frac{6x^2y}{x^2+y^2} \leq 6|y|$$

comme la fonction $6|y|$ qui admet limite 0 pour toute $(x,y) \to (0,0)$ Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Solution Ex 3

6°) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

on a $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

donc

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|xy|$$

comme la fonction $|xy|$ qui admet limite 0 pour toute $(x,y) \to (0,0)$ Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Solution Ex 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$
Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de trois façons :

1. d'après la définition,
2. d'après le théorème de pincement,
3. en utilisant les coordonnées polaires.

Solution Ex 4

on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$f(x, y) = \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2}$$