Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima, Maroc

Mathématiques pour les Classes Préparatoires 1

–Cours d'Algèbre et exercices–
Algèbre linéaire, Résolution de systèmes linéaires

Mohamed ADDAM
Professeur de Mathématiques

École Nationale des Sciences Appliquées d'Al Hoceima
–ENSAH–
addam.mohamed@gmail.com
m.addam@uae.ac.ma

16 Mars 2020

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels et Applications linéaire

Dans ce chapitre on note par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Structure d'un espace vectoriel réel

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble. On dit que E est un espace vectoriel si*

i) $(E, +)$ *est un groupe abélien.*

ii) La loi externe est distributive par rapport à l'addition des réels :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall \mu \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in E) : \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

iii) La loi externe est distributive par rapport à l'addition de E :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in E) \quad (\forall y \in E) : \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$

iv) La loi externe est associative par rapport à la multiplication des réels :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall \mu \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in E) : \quad \lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$$

iv) Pour tout $x \in E$, on a $1.x = x$.

Exemple 1.1.1 *1. L'ensemble des vecteurs d'un plan affine géomértique, muni de l'addition et de la loi de multiplication par un réel, est un espace vectoriel.*

2. Munissons l'ensemble $\mathbb{K}$ de l'addition ordinaire et de la loi "externe" de domaine $\mathbb{K}$ définie par

$$(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in \mathbb{K}) : \quad \lambda.x = \lambda x$$

(produit ordinaire des réels λ et x).
On obtient un espace vectoriel appelé **espace vectoriel** $\mathbb{K}$.

3. Si X désigne un ensemble non vide, munissons l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ de fonctions numériques définies sur X de l'addition et de la multiplication par un scalaire, définies de la façon suivante :
– si $f \in \mathcal{F}(X)$ et $g \in \mathcal{F}(X)$, $f + g$ est l'application

$$x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

– *si $f \in \mathcal{F}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda.f)$ est l'application*

$$x \longmapsto (\lambda.f)(x) = \lambda f(x);$$

On obtient ainsi un espace vectoriel.
L'application $x \longmapsto 0$ est appelée l'application nulle et notée 0_X.
Les cas particuliers importants sont celui où X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et celui où X est l'ensemble J_n des n premiers entiers (avec $n \geq 2$) ; dans ce dernier cas, on obtient les espace vectoriels

4. *Munis de l'addition et de la loi externe induites par celles de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en particulier*
   – *l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.*
   – *l'ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$.*

1.1.2 Propriétés et règles de calcul dans un espace vectoriel

– Soit E un espace vectoriel
  1. Pour tout $x \in E$, $(-x)$ est l'opposé de x dans E.
  2. $(\forall x \in E) \quad 0.x = 0_E$;
  3. $(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad \lambda.0_E = 0_E$;
  4. $(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in E) : \quad (\lambda.x = 0_E) \Leftrightarrow (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E)$;
  5. $(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in E) : \quad -(\lambda.x) = (-\lambda).x$.

– **Différence de deux vecteurs** : étant donné deux vecteurs x et y de E, il existe $z \in E$ unique tel que $x = y + z$. C'est le vecteur $x+(-y)$. (En effet, on vérifie immédiatement que $y+(x+(-y)) = x$ et que l'égalité $x = y+z$ entraîne $x + (-y) = y + z + (-y) = z$.)
  On pose : $x + (-y) = x - y$ (différence de x et y).
  En particulier, $0_E - x = -x$. Des structures additives du groupe $(E, +)$ résultent les règles suivantes

$$\begin{array}{l} (\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall \mu \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in E) : \quad (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x \\ (\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in E) \quad (\forall y \in E) : \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y \end{array} \tag{0.1}$$

– Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour toute suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires et pour tout $x \in E$, on a

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n).x = \lambda_1.x + \lambda_2.x + \ldots + \lambda_n.x.$$

  Pour toute suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de E et pour tout scalaire λ on a

$$\lambda.(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \lambda.x_1 + \lambda.x_2 + \ldots + \lambda.x_n.$$

1.2 Sous-espace d'un espace vectoriel

Définition 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E toute partie H de E vérifiant les propriétés suivantes :*

i) *H est stable pour la structure d'espace vectoriel de E (c'est-à-dire stable pour l'addition de E et la loi externe de E).*

ii) *munie des lois induites par l'espace vectoriel E, H est un espace vectoriel.*

Théorème 1.2.1 *Pour qu'une partie H d'un espace vectoriel E soit un sous-espace de E, il faut et il suffit que H soit non vide et stable pour la structure d'espace vectoriel de E.*

Exemple 1.2.1 1. *Si E est un espace vectoriel, E est un sous-espace de lui-même et $\{0_E\}$ est un sous-espace de E appelé (sous-espace nul).*

2. *Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des éléments (x, y, z) tels que*
$$x + y + 2z = 0$$
est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
3. *Si F est un sous-espace de E, son complémentaire n'est pas un sous-espace de E, puisqu'il ne contient pas 0_E.*
4. *Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, considérons le sous-espace $\mathcal{H}$ formé des fonctions f deux fois dérivables telles que :*
$$f'' + \sqrt{2}f = 0.$$
$\mathcal{H}$ n'est pas vide, car il contient au moins la fonction nulle. Il est immédiat que $\mathcal{H}$ est stable pour la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Propriétés des sous-espaces

Théorème 1.2.2 *Tout sous-espace F d'un espace vectoriel E est lui même un espace vectoriel.*

Théorème 1.2.3 *Soit F un sous-espace de l'espace vectoriel E et soit G une partie de F. Alors, pour que G soit un sous-espace de E, il faut et il suffit que G soit un sous-espace de F.*

Théorème 1.2.4 *Soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ un système de n sous-espaces d'un espace vectoriel E (avec $n \geq 2$). Alors, l'intersection $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ des sous-espaces est un sous-espace de E.*

1.3 Applications linéaires

Définition 1.3.1 *Étant donné deux espaces vectoriels E et F , on appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $(\forall x \in E)\ (\forall y \in E)\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;

ii) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})\ (\forall x \in E)\ f(\lambda x) = \lambda.f(x)$.

Autrement dit,
$$(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2) \quad (\forall(x, y) \in E^2) \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha.f(x) + \beta.f(y).$$

Nous aavons ensuite la prpriété suivate

Théorème 1.3.1 *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F, alors on a :*
$$f(0_E) = 0_F.$$

Démonstration.évident d'après la définition. □

Exemple 1.3.1 1. *Si E est un espace vectoriel quelconque, l'application identique*
$$id_E : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto x,$$
est linéaire.

2. *Étant donné V un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E , l'application $i : V \longrightarrow E$, $x \longmapsto x$, est linéaire.*
   Cette application est appelée **injection canonique** *du sous-espace V dans E.*
3. *Soit E et F deux espaces vectoriels quelconques. L'application nulle de E dans F $0_{E,F} : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto 0_F$, est linéaire.*

Théorème 1.3.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F. Pour tout entier $n \geq 1$, quelles que soient les suites $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on a*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $n \geq 1$. □

1.3.1 Ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F

Soit E et F deux espaces vectoriels quelconques. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Cet ensemble est non vide car il contient l'application nulle $0_{E,F}$. Nous allons munir $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure "naturelle" d'espace vectoriel.

1. **Addition de deux applications linéaires** :
   Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrons que $f + g$ est encore linéaire ? Soit x et y deux vecteurs de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   – Il en résulte de la linéarité de f et g :
   $$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
   et
   $$g(x + y) = g(x) + g(y),$$
   d'où
   $$\begin{aligned} f(x + y) + g(x + y) &= f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= (f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned}$$
   – La linéarité de f et g entraîne $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et $g(\lambda x) = \lambda g(x)$,
   par suite
   $$\begin{aligned} f(\lambda x) + g(\lambda x) &= \lambda f(x) + \lambda g(x) \\ &= \lambda\,(f(x) + g(x)) \\ (f + g)(\lambda x) &= \lambda\,(f + g)\,(x). \end{aligned}$$
   Par suite, on définit une loi interne $(f, g) \longmapsto f + g$ sur $\mathcal{L}(E, F)$, que nous appelons **addition** de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. **Multiplication d'une application linéaire par un scalaire** :
   Soit f une application linéaire de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Nous allons montrer que l'application
   $$\lambda.f : E \longmapsto F, \quad x \longmapsto \lambda.f(x)$$
   est linéaire.

– Étant donné deux vecteurs x et y de E, la relation

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

entraîne

$$\begin{aligned}(\lambda.f)(x+y) &= \lambda.(f(x)+f(y)) \\ &= \lambda.f(x) + \lambda.f(y) \\ &= (\lambda.f)(x) + (\lambda.f)(y).\end{aligned}$$

– Soit μ un élément de $\mathbb{K}$. De la relation :

$$f(\mu.x) = \mu.f(x)$$

il en résulte

$$\begin{aligned}(\lambda.f)(\mu.x) &= \lambda.(f(\mu.x)) \\ &= \lambda.(\mu.f(x)) \\ &= (\lambda.\mu).f(x) = \mu.(\lambda.f(x)) \\ &= \mu.((\lambda.f)(x)),\end{aligned}$$

donc $\lambda.f$ est bien un élément de $\mathcal{L}(E,F)$. Par suite, on a défini sur $\mathcal{L}(E,F)$ une loi externe $(\lambda, f) \longmapsto \lambda.f$ ou ($\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$), de domaine $\mathbb{K}$, appelée **multiplication par un scalaire de** $\mathbb{K}$.

1.3.2 Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème 1.3.3 *E et F étant deux espaces vectoriels, l'addition des applications linéaires et la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K}$ munissent $\mathcal{L}(E,F)$ d'une structure d'espace vectoriel.*

Démonstration. On a vu ci-dessus que dans $\mathcal{L}(E,F)$, l'addition est une loi de composition interne et la multiplication par un scalaire est une loi externe de domaine $\mathbb{K}$.
On vérifie aisément que l'addition est associative, commutative.
L'élément neutre est l'application nulle $x \longmapsto 0_F$, toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ admet pour opposée l'application $(-1).f$, notée $(-f)$. Par suite, l'addition munit $\mathcal{L}(E,F)$ d'une structure de groupe abélien. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$, on a

$$\lambda.(f+g) = \lambda.f + \lambda.g.$$

Pour cela, soit $x \in E$, des définitions il résulte

$$\begin{aligned}(\lambda.(f+g))(x) &= \lambda.((f+g)(x)) = \lambda.(f(x)+g(x)) \\ &= \lambda.(f(x)) + \lambda.(g(x)) = (\lambda.f)(x) + (\lambda.g)(x) \\ &= (\lambda.f + \lambda.g)(x)\end{aligned}$$

D'où

$$(\lambda.(f+g))(x) = (\lambda.f + \lambda.g)(x).$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x \in E$, on en déduit :

$$\lambda.(f+g) = \lambda.f + \lambda.g,$$

d'où le résultat.
L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$, muni de la structure définie précédement est appelé **espace des applications linéaires de** E **dans** F. □

1.3.3 Composée de deux applications linéaires, endomorphisme, isomorphismes

Théorème 1.3.4 *Soit E, F et G trois espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires ; alors l'application composée*

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$

est une application linéaire.

Démonstration. □

Définition 1.3.2 *Soit E et F deux espaces vectoriels.*

1. *On appelle* **endomorphisme** *de E toute application linéaire de E sur lui-même.*
2. *On appelle* **isomorphisme** *de E sur F toute application linéaire bijective de E sur F.*
3. *On dit que E est isomorphe à F s'il existe un isomorphisme de E sur F.*
4. *Un endomorphisme bijectif est appelé un* **automorphisme***.*

Exemple 1.3.2 *On peut trouver plusieurs exemples, nous donnons ici quelques un,*

1. *Si E est un espace vectoriel quelconque, Id_E est un isomorphisme de E sur lui-même.*
2. *Soit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel. On vérifie aisément que l'application*

$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

   est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Nous avons les deux théorèmes fondamentaux suivants,

Théorème 1.3.5 *Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel F, alors l'application réciproque de f est un isomorphisme de F sur E.*

Démonstration. □

Théorème 1.3.6 *Soit E, F et G trois espaces vectoriels. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont des isomorphismes ; alors l'application composée*

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$

est un isomorphisme.

Démonstration. □

1.4 Anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel

Étant donné un espace vectoriel E. Nous allons voir que l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, E)$ des endomorphisme de E, noté simplement $\mathcal{L}(E)$, peut être muni d'une structure très riche et que $(f, g) \longmapsto f \circ g$ est loi interne sur $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 1.4.1 *Soit E un espace vectoriel.*
Muni de l'addition des applications linéaires et de la composition définie par $(f, g) \longmapsto f \circ g$, l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ est un anneau. C'est-à-dire que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Démonstration. Nous savons que l'addition des endomorphismes munit $\mathcal{L}(E)$ d'une structure de groupe abélien. Par ailleurs, la loi interne $(f, g) \longmapsto f \circ g$ est associative, admet l'endomorphisme Id_E pour élément neutre. De plus cette loi est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\forall (f, g, h) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \quad f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

et

$$\forall (f, g, h) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \quad (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f.$$

Démontrons, par exemple, la première propriété :
Soit f, g et h trois endomorphismes de E. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} (f \circ (g + h))(x) &= f[(g + h)(x)] = f[g(x) + h(x)] \\ &= f[g(x)] + f[h(x)] = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x), \end{aligned}$$

d'où : $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
En conclusion, l'addition et la loi de composition interne $(f, g) \longmapsto f \circ g$ munissent $\mathcal{L}(E)$ d'une structure d'anneau.
$\square$

Notation 1.4.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit la suite (f^n) ($n \in \mathbb{N}$) par*

$$f^0 = Id_E, \;\; f^1 = f, \;\; f^2 = f \circ f, \ldots, f^n = f \circ f^{n-1}, \ldots \ldots$$

Remarque 1.4.1 **(i)** *Si $E = \{0_E\}$, alors $\mathcal{L}(E)$ n'admet qu'un élément qui est l'application $0_E \mapsto 0_E$. Si E n'est pas réduit à $\{0_E\}$, alors Id_E est distinct de l'application nulle $x \mapsto 0_E$.*

(ii) *En général, la loi $(f, g) \longmapsto f \circ g$ n'est pas commutative. Considérons par exemple les applications :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x, 0)$$

et

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (y, 0).$$

On vérifie aisément que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f((x, y)) = (x, 0) \text{ et } g(f((x, y))) = g(x, 0) = (0, 0),$$

$$g((x, y)) = (y, 0) \text{ et } f(g((x, y))) = f(y, 0) = (y, 0).$$

Donc pour tout réel y non nul et tout réel x, on a :

$$f(g((x, y))) \neq g(f((x, y))),$$

ce qui prouve que $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5 Groupe linéaire d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. On note $\mathbf{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes bijectifs de l'espace vectoriel E. Soit f et g deux éléments de $\mathbf{GL}(E)$. La composée de deux bijections (resp. deux applications linéaires) est une bijection (resp. une application linéaire). On définit donc une loi de composition interne dans $\mathbf{GL}(E)$ par : $(f, g) \longmapsto f \circ g$.

Théorème 1.5.1 *Muni de la loi de composition interne $(f, g) \longmapsto f \circ g$, l'ensemble $\mathbf{GL}(E)$ est un groupe (appelé groupe linéaire de E).*

Démonstration. La loi de composition interne $(f, g) \longmapsto f \circ g$ est associative ; Id_E appartient à $\mathbf{GL}(E)$ et est élément neutre pour cette loi.
de plus, nous savons que si f est un automorphisme de E, alors f^{-1} est également un automorphisme.
Or f^{-1} vérifie les relations :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E.$$

Donc f^{-1} est l'élément inverse de f dans $\mathbf{GL}(E)$. □

Remarque 1.5.1 *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Si $\dim(E) \geq 2$, alors l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ n'est ni commutatif ni intègre.*
2. *Si la dimension de E est supérieure ou égale à 2, alors le groupe $(\mathbf{GL}(E), \circ)$ n'est pas abélien. Nous donnons ici un exemple avec $E = \mathbb{R}^2$, on a bien $\dim(E) = 2$. On considère les applications de E dans E définies par :*

$$f : (x, y) \longmapsto (x + y, y)$$

et

$$g : (x, y) \longmapsto (x, 2y).$$

On vérifie aisément que f et g sont des automorphismes de E.
de plus nous avons :

$$(f \circ g)((0, 1)) = f((0, 2)) = (2, 2)$$

et

$$(g \circ f)((0, 1)) = g((1, 1)) = (1, 2).$$

D'où $f \circ g \neq g \circ f$.

Nous allons maintenant étudier des éléments remarquables de $\mathbf{GL}(E)$: **les homothéties vectorielles**.

1.5.1 Homothéties vectorielles

Définition 1.5.1 *Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle* **homothétie vectorielle** *de rapport λ, l'application $h_\lambda : E \longrightarrow E$ telle que*

$$\forall u \in E, \quad h_\lambda(u) = \lambda.u$$

On notera $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E. Rappelons que toute homothétie vectorielle h_λ de rapport λ non nul est un automorphisme de E, et son inverse est l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{\lambda}$. La composée $h_{\lambda_1} \circ h_{\lambda_2}$ de deux homothéties vectorielles h_{λ_1} et h_{λ_2} de rapports respectifs λ_1 et λ_2 est l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda_1 \lambda_2$.

Théorème 1.5.2 *Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$.*
L'application $\varphi : \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbf{GL}(E)$ qui, à tout scalaire $\lambda \neq 0$, associe l'homothétie vectorielle de rapport λ, est un homomorphisme injectif de groupes.

Démonstration. On sait que si λ_1 et λ_2 sont des scalaires non nuls, on a

$$\varphi(\lambda_1\lambda_2) = \varphi(\lambda_1) \circ \varphi(\lambda_2).$$

Il reste à montrer que φ est injective. Soit λ_1 et λ_2 deux scalaires tels que les homothéties vectorielles

$$\varphi(\lambda_1) : u \longmapsto \lambda_1.u \text{ et } \varphi(\lambda_2) : u \longmapsto \lambda_2.u$$

soient égales.
Sioit v un vecteur non nul de E. On a donc

$$\varphi(\lambda_1)(v) = \varphi(\lambda_2)(v),$$

c'est-à-dire $\lambda_1 v = \lambda_2 v$. D'où

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_E,$$

par suite $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Le rapport d'une homothétie vectorielle est donc unique.

Théorème 1.5.3 *Une homothétie vectorielle commute avec tout endomorphisme de E.*

Démonstration. Soit h une homothétie vectorielle de l'espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$, de rapport λ et soit f un endomorphisme quelconque de E. Pour tout $x \in E$, on a :

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\lambda x) = \lambda.f(x) = h(f(x)) = (h \circ f)(x).$$

D'où $f \circ h = h \circ f$, ce qu'il fallait établir. □

1.6 Noyau et Image d'une application linéaire

1.6.1 Noyau

Définition 1.6.1 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-e.v. E dans le $\mathbb{K}$-e.v. F. On appelle noyau de f l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) = 0_F$.*
En général, le noyau de f est noté par $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}.$$

Théorème 1.6.1 *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-e.v. E dans le $\mathbb{K}$-e.v. F, alors le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. □

Théorème 1.6.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-e.v. E dans le $\mathbb{K}$-e.v. F. Pour que f soit injective, il faut et il suffit que le noyau de f se réduit à $\{0_E\}$.*

Démonstration. □

Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser le théorème suivant :

Théorème 1.6.3 *L'ensemble des vecteurs invariants d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est le sous-espace $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$.*

Démonstration. Rappelons qu'un vecteur $x \in E$ est dit invariant par f s'il vérifie $f(x) = x$. Or pour tout $x \in E$, on a les équivalences :

$$(f(x) = x) \ \Leftrightarrow \ (f(x) - x = 0_E) \ \Leftrightarrow \ ((f - Id_E)(x) = 0_E),$$

d'où le théorème. □

1.6.2 Image

Définition 1.6.2 *Soit X et Y deux ensembles non vides, et soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une application ; si A est une partie de X, on appelle* **image de** A **par** φ *l'ensemble des images par φ des éléments de A. On note cet ensemble $\varphi(A)$. On appelle* **image de** φ *l'image de X par φ.*
En général, on note $\mathrm{Im}(\varphi)$ l'image de φ.

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(x) \ / \ x \in E\}.$$

Théorème 1.6.4 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-e.v. E dans le $\mathbb{K}$-e.v. F. Alors, pour tout sous-espace H de E, l'image de H par f est un sous-espace de F. En particulier, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. □

1.7 Dépendance et indépendance linéaires, bases

1.7.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.7.1 *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système de n éléments $(n \geq 1)$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ un système de n scalaires dans $\mathbb{K}$. On appelle combinaison linéaire des x_k de coefficients (λ_k) le vecteur x de E défini par :*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Théorème 1.7.1 *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système de n éléments $(n \geq 1)$ d'un espace vectoriel E, alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires du système (x_k) est un sous-espace vectoriel de E.*
Ce sous-espace est appelé **sous-espace engendré** *par le système $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et noté par*

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \overline{< x_1, x_2, \ldots, x_n >}.$$

Démonstration. Laissée au Lecteur. □

Théorème 1.7.2 *Soit U un sous-espace d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Si $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est un système de n vecteurs $(n \geq 1)$ de U et si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est un système de n scalaires dans $\mathbb{K}$, alors le vecteur*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

appartient à U.

Démonstration. □

Corollaire 1.7.1 *Soit U un sous-espace d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un système de n vecteurs $(n \geq 1)$ de U. Alors U contient le sous-espace*

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \overline{< x_1, x_2, \ldots, x_n >} = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Corollaire 1.7.2 *Si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ et $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ sont deux systèmes de vecteurs de E et si les vecteurs $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, tout vecteur qui est combinaison linéaire des vecteurs $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est aussi combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.*

1.7.2 Dépendance et indépendance linéaires, système générateur

Définition 1.7.2 *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système de n éléments $(n \geq 1)$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.*

1. *On dit que ce système est* **linéairement indépendant***, ou* **libre***, si le seul système de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{K}$ tel que :*
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E$$
est le système nul, c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$.
C'est-à-dire le système $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est si et seulement si ($\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$.)
2. *Le système $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dit* **linéairement dépendant** *ou* **lié** *s'il n'est pas linéairement indépendant.*

Exemple 1.7.1 1. *Si $E = \mathbb{C}$, alors $(1, \mathrm{i})$ est un système libre.*

2. *Si $E = \mathbb{R}[X]$, alors $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est un système libre où $\mathbb{K}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré n.*
3. *Si $E = \mathbb{R}^3$, alors $(e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ est un système linéairement indépendant.*

1.7.3 Transformés des vecteurs d'un système libre (resp. système générateur) par une application linéaire

Théorème 1.7.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., f une application linéaire de E dans un $\mathbb{K}$-e.v. F, et enfin soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système de n vecteurs de E.*

a) *Si le système $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et si f est injectif,*
alors le système $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ est libre.

b) *Si le système $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est engendre E, alors le système $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ engendre $f(E)$.*

1.7.4 Base d'un espace vectoriel

Définition 1.7.3 *On appelle base d'un $\mathbb{K}$-e.v. E tout système de vecteurs de E qui est libre et qui engendre E.*

Nous donnons ici une caractérisation fondamentale des bases :

Théorème 1.7.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un système de n vecteurs de E. Pour que ce système soit une base de E, il faut et il suffit que tout élément de E soit une combinaaison linéaire des (x_i) avec un et un seul système de coefficients.*

Nous avons de plus la caractérisation de l'isomorphisme associé à une base :

Théorème 1.7.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. admettant $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ pour base (où $n \geq 1$). L'application*
$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$
est un isomorphisme d'espace vectoriels.

L'isomorphisme $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$ ainsi défini est appelé **isomorphisme associé à la base** $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Exemple 1.7.2 *Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ admet pour base le système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où*
$$\begin{array}{ccc} e_1 & = & (1,0,\ldots,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,\ldots,0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \ \ldots \ \ldots \\ e_n & = & (0,\ldots,0,1). \end{array}$$
Cette base est appelée **base naturelle** *où* **base canonique** *de $\mathbb{R}^n$.*

1.7.5 Détermination d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base

Théorème 1.7.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ (où $n \geq 1$). On considère un système $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. F. Alors il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et une seule telle que :*

$$f(e_i) = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{0.2}$$

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v

a) **Unicité de** f : Supposons que f existe. soit $x \in E$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, unique, tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
Comme f est linéaire, on en déduit :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i),$$

d'où

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i, \tag{0.3}$$

ce qui prouve l'unicité de f, car $f(x)$ est pour tout x nécessairement de la forme (0.3).

b) **Existence de** f : Réciproquement, définissons l'application $g : E \longrightarrow F$ de la façon suivante : à tout vecteur x de E, on associe le n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, et on pose :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i.$$

Nous venons de voir que, si f existe, on a forcément : $f = g$.
si on montre que g vérifie les relations (0.4) et est linéaire, l'existence de f sera assurée : il suffira de prendre $f = g$.

– Les coordonnées de e_1 sont $(1, 0 \dots, 0)$, d'où

$$g(e_1) = y_1.$$

on montre de même que : $g(e_i) = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

– On montre facilement que g est linéaire, ce qui achève la démonstration.

□

Le théorème suivant permet de déterminer si l'application f (définie dans le théorème 1.7.6) est injective, surjective ou bijective.

Théorème 1.7.7 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ (où $n \geq 1$). Étant donné un $\mathbb{K}$-e.v F et un système $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de n vecteurs de F, soit f l'application de E dans F telle que :*

$$f(e_i) = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{0.4}$$

Alors :

1. *L'application $f : E \longrightarrow F$ est injective si, et seulement si, le système $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est libre.*
2. *L'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si, et seulement si, le système $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ engendre F.*
3. *L'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, le système $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est une base de F.*

Démonstration.

1. On sait que , si f est injective, alors le système

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$$

   est libre (puisque $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est un système libre).
   réciproquement, supposons que le système $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est libre et montrons que f est ijective ? Pour cela, il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$, on a donc :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F.$$

   Comme $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est un système libre, on en déduit que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \lambda_i = 0,$$

   d'où $x = 0_E$, ce qui entraîne $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et par suite f est injective.
2. On sait que dans tous les cas, le système $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ engendre $f(E)$ ceci puisque $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ engendre E. Le résultat est immédiat.
3. En combinant les résultats démontrés en $1)$ et $2)$, on obtient l'assertion $3)$.

D'où le théorème. □

1.8 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 1.8.1 *Soit $n \geq 1$ un entier et E un $\mathbb{K}$-e.v. dans lequel il existe un système de n vecteurs qui est une base de E. Alors :*

1. *Tout système de $(n+1)$ vecteurs ou plus est lié ou* **linéairement dépendant**.
2. *Pour qu'un système de vecteurs de E soit une base, il faut et il suffit que ce ssoit un système libre de n vecteurs, ou un système générateur de n vecteurs.*
3. *Aucun système de $(n-1)$ vecteurs ou moins n'engendre E.*

Corollaire 1.8.1 *Si un espace vectoriel E admet une base de n éléments (où $n \geq 1$), alors toute autre base de E admet n éléments.*

ce qui signifie la définition ci-dessous :

Définition 1.8.1 *On appelle espace vectoriel de dimension zéro tout espace vectoriel nul ($E = \{0_E\}$).*
Soit $n \geq 1$ un entier. Un espace vectoriel est dit de dimension n s'il existe un système de n vecteurs de cet espace qui en est une base.
Si E est de dimension finie n alors on écrit : $\dim(E) = n$.

Une propriété fondamentale de la notion de dimension est son invariance dans un isomorphisme :

Théorème 1.8.2 *Pour que deux $\mathbb{K}$-e.v E et F de dimensions respectives n et p soient isomorphes, il faut et il suffit que $n = p$.*

Démonstration.

1. Supposons que E et F isomorphes et soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de E de F
   - Si $E = \{0_E\}$, nécessairement $F = f(E) = \{0_F\}$. D'où : $n = p = 0$.
   - Supposons donc $n \geq 1$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, alors nous savons que $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est . Par conséquent, F est de dimension n. D'où : $n = p$.
2. Réciproquement, supposons que E et F soient de même dimension n
   - Si $n = 0$, l'application $0_E \longmapsto 0_F$ est un isomorphisme de $E = \{0_E\}$ sur $F = \{0_F\}$.
   - Supposons $n \geq 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E et $(y_1, \dots, y_n)$ une base de F ; l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$, telle que :
   $$f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n,$$
   est un isomorphisme de E sur F.

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 1.8.1 *Si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension $n \geq 1$, il existe une infinité d'isomorphismes de E sur F.*

Rappelons maintenant le théorème de la base incomplète,

Théorème 1.8.3 *Soit $n \geq 1$ un entier et E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ un système de p vecteurs de E (avec $1 \leq p \leq n$). On peut trouver $(n-p)$ vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$ tels que le système $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ soit une base de E.*
Autrement dit, tout système lié de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E se complète en une base de E.

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille génératrice finie et $\mathcal{L} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille libre contenue dans $\mathcal{G}$ (avec $p \leq n$).
L'ensemble
$$\mathcal{S} = \{\mathrm{card}(I) \ / \ \{1, \dots, p\} \subset I \subset \{1, \dots, n\} \text{ et } (x_i)_{i \in I} \text{ libre}\}$$
est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ($p \in \mathcal{S}$ puisque $\mathcal{L} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ est libre) et majorée par n. Par suite, elle possède un plus grand élément r, et on peut trouver I de cardinal r tel que :
$$\{1, \dots, p\} \subset I \subset \{1, \dots, n\} \ \ \mathcal{B} = (x_i)_{i \in I} \text{ libre.}$$
Par hypothèse, $\mathcal{B}$ est libre ; montrons que tout élément de la famille génératrice $\mathcal{G}$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, ce qui prouvera, En ajoutant les éléments de $\mathcal{L}$ à ceux de $\mathcal{G}$, on obtient une famille finie $\mathcal{G}'$ contenant $\mathcal{L}$ et génératrice de E. □

1.8.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.8.4 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension n (où $n \geq 1$). Alors F est un espace vectoriel de dimension p inférieure ou égale à n.*
De plus, on a l'équivalence :
$$(p = n) \quad \Leftrightarrow \quad (F = E).$$

Démonstration. □

1.8.2 Rang d'une application linéaire

Définition 1.8.2 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. et soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. On appelle* **rang** *de f, noté $rg(f)$, la dimension de $Im(f)$. On écrit*

$$rg(f) = dim(Im(f))$$

Propriété 1.8.1 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finie.*

1. $rg(f) \leq \inf(dim(E), dim(F))$.
2. $rg(f) = dim(E) \Leftrightarrow f$ *est injective.*
3. $rg(f) = dim(F) \Leftrightarrow f$ *est surjective* $\Leftrightarrow Im(f) = F$.

Théorème 1.8.5 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. et soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que $dim(E) = dim(F) = n \geq 1$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. f *est bijective,*
2. $rg(f) = n$,
3. f *est injective,*
4. f *est surjective.*

1.9 Sous-espaces supplémentaires, projecteurs

Définition 1.9.1 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v. E ; on dit que F et G sont* **supplémentaires** *si et seulement si on a à la fois :*

(i) $F \cap g = \{0_E\}$,

(ii) $F + G = E$,

c'est-à-dire : tout $x \in E$ s'écrit d'au moins une manière sous la forme $x = u + v$, avec $x \in F$ et $v \in G$.

Si F et G sont supplémentaires, il en est de même de g et F. par exemple $\{0_E\}$ et E sont supplémentaires.
Lorsque F et G sont supplémentaires, on écrit : $E = F \oplus G$.

Exemple 1.9.1 *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et prenons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; soit f le sous-$\mathbb{R}$-e.v formé des fonctions paires et g le sous-$\mathbb{R}$-e.v formé par les fonctions impaires. Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$: en effet, si $f \in F \cap G$, on a ($\forall x \in \mathbb{R}$),*

$$f(-x) = f(x) = -f(x),$$

d'où $f(x) = 0$ et $f = 0_E$. Et si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$f = g + h, \quad \textit{avec} \quad g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \textit{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),$$

et on voit bien que $g \in F$ et $h \in G$.

Théorème 1.9.1 *Soit F et G deux sous-$\mathbb{K}$-e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.*

1. *Pour que F et G soient* **supplémentaires**, *il faut et il suffit que l'application*

$$f : F \times G \longrightarrow E, \quad (y, z) \longmapsto y + z$$

soit **bijective**.

2. *Si F et G sont supplémentaires, les applications $p : E \longrightarrow E$ et $q : E \longrightarrow E$ définies par*
$$(\forall x \in E) \quad x = p(x) + q(x), \quad (p(x), q(x)) \in F \times G$$
sont linéaires et vérifient $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$, $p + q = Id_E$, $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(q)$, $\mathrm{Im}(q) = G = \mathrm{Ker}(p)$.

On dit que p est la **projection** *sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.*

Démonstration.

1. $\Rightarrow\rfloor$ Supposons que F et G sont supplémentaires, c'est-à-dire que $E = F \oplus G$, un vecteur $x \in E$ s'écrit alors de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. En effet, $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ entraîne
$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in F \cap G = \{0_E\},$$
d'où l'unicité.
$\Leftarrow\rfloor$ Si l'application $f : F \times G \longrightarrow E, \quad (y, z) \longmapsto y + z$ est bijective, on a $F \cap G = \{0_E\}$ car $x \in F \cap G$ entraîne $f(x, -x) = 0_E = f(0_E, 0_E)$ d'où $(x, -x) = (0_E, 0_E)$, donc $E = F \oplus G$.
2. Dans ces conditions, on peut définir les applications $p : E \longrightarrow E$ et $q : E \longrightarrow E$ par la condition
$$\forall x \in E, \quad x = p(x) + q(x), \quad (p(x), q(x)) \in F \times G. \tag{0.5}$$
Il est facile de voir que p et q sont des applications linéaires et ceci est une conséquence directe de (0.5).
De même, si pour $i \in \{1, 2\}$, $x_i \in E$, de $x_i = p(x_i) + q(x_i)$, on déduit :
$$x_1 + x_2 = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2)$$
et $(p(x_1) + p(x_2), q(x_1) + q(x_2)) \in F \times G$ puisque F et G sont des sous-espaces, d'où $p(x_1) + p(x_1) = p(x_1 + x_2)$ et $q(x_1) + q(x_2) = q(x_1 + x_2)$. On remarque en outre que $\mathrm{Im}(p) = F$, $\mathrm{Im}(q) = G$, $\mathrm{Ker}(p) = G$, $\mathrm{Ker}(q) = F$, $p + q = id_E$, $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$.

□

1.9.1 Projecteurs

Définition 1.9.2 *Soit e un $\mathbb{K}$-e.v. ; on appelle* **projecteur** *de E tout endomorphisme de E tel que $p^2 = p$.*
L'application nulle et l'application identique de E sont deux projecteurs particuliers.

Nous venons de voir que les projections associées à deux sous-espaces supplémentaires de E sont des projecteurs. Dans le théorème suivant, on montre qu'il n'y a pas d'autres projecteurs que ceux-là.

Théorème 1.9.2 *Soit p un projecteur dans le $\mathbb{K}$-e.v. E. Posons $q = Id_E - p$, $F = \mathrm{Im}(p)$, $G = \mathrm{Im}(q)$. Alors :*

1. *$E = F \oplus G$.*
2. *p et q sont les projections respectivement sur F parallèlement à G, et sur G parallèlement à F.*

Démonstration.

1. Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$? Soit $x \in F \cap G$: $\exists y \in E$ tel que $x = p(y)$; $\exists z \in E$ tel que $x = q(z)$. Alors
$$p(x) = p^2(x) = p(y) = x = p(z) - p^2(z) = p(z) - p(z) = 0_E.$$
2. Montrons ensuite que $F + G = E$? Si $x \in E$ on peut l'écrire
$$x = p(x) + (x - p(x)) = p(x) + q(x)$$
avec $p(x) \in F$ et $q(x) \in G$. Finalement $E = F \oplus G$. mais l'écriture précédente montre bien que p et q sont les projections sur F et G associées aux sous-espace supplémentaires F et G.

□

1.9.2 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Étant donné un sous-$\mathbb{K}$-e.v. F d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On appelle **supplémentaire de** F tout sous-$\mathbb{K}$-e.v. G de E tel que $E = F \oplus G$. On admet que tout sous-espace vectoriel F admet toujours au moins un supplémentaire, ce résultat est prouvé dans le cas particulier où E est de dimension finie ou encore lorsque F est de codimension finie la démonstration est basée en faisant appel à l'axiome du choix.

– Le seul supplémentaire de E est $\{0_E\}$ et on écrit $E = E \oplus \{0\}$.
– Le seul supplémentaire de $\{0_E\}$ est E et on écrit $E = \{0\} \oplus E$.

En dehors de ces deux cas triviaux, il n'y a jamais d'unicité d'un supplémentaire. Cependant les différents supplémentaires de F donné présentent la particularité d'être tous isomorphes entre eux :

Théorème 1.9.3 *Soit F_1 et F_2 deux supplémentaires, dans un $\mathbb{K}$-e.v. E, d'un sous-$\mathbb{K}$-e.v. ddonné F. Alors les sous-$\mathbb{K}$-e.v. F_1 et F_2 sont isomorphes.*

Démonstration. Soit p_1 la projection sur F_1 parallèlement à F. Puisque $\mathrm{Im}(p_1) = F_1$, alors on peut définir l'application linéaire $f : F_2 \longrightarrow F_1$, $x \longmapsto f(x) = p_1(x)$.
On a : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p_1) \cap F_2 = F \cap F_2 = \{0_E\}$, donc f est injective.
De plus, soit $y \in F_1$. y se décompose en $y = x + y_2$, avec $x \in F$ et $y_2 \in F_2$, d'où $p_1(y) = y = p_1(x) + p_1(y_2) = p_1(y_2)$. Donc $y = f(y_2)$ et donc f est surjective. Ainsi f est un isomorphisme de F_2 sur F_1. $\square$

1.9.3 Supplémentaires du noyau d'une application linéaire

On peut généraliser le théorème 1.9.3 de la manière suivante :

Théorème 1.9.4 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire, de noyau $N = \mathrm{Ker}(u)$ et d'image $I = \mathrm{Im}(u)$. Pour tout supplémentaire S de N dans E, l'application linéaire $f : S \longrightarrow I$, $x \longmapsto f(x) = u(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.*

Démonstration. On a : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(u) \cap S = N \cap S = \{0_E\}$, donc f est injective.
Soit $y \in I$, écrivons $y = u(x)$, où $x \in E$ et décomposons x sous la forme $x = z + t$, $z \in N$, $t \in S$. Alors $u(x) = y = u(z) + u(t) = u(t) = f(t)$, donc f est surjective. Ainsi f est un isomorphisme de S sur I. $\square$

On retrouve le fait que tous les supplémentaires de N sont isomorphes entre eux, puisqu'ils sont isomorphes à I.

Remarque 1.9.1 *Dans le cas où $E = F$, si u est un endomorphisme de E, sous prétexte que l'image $\mathrm{Im}(u)$ est isomorphe à un supplémentaire du noyau $\mathrm{Ker}(u)$, il ne faudrait pas en conclure que l'image est elle-même supplémentaire d $\mathrm{Ker}(u)$, le cas où u est un projecteur étant très spécial. Pour un endomorphisme quelconque, en général, on a*

$$\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) \neq \{0_E\}.$$

1.10 Exercices

Exercice 1.10.1 *Soit F un sous $\mathbb{K}$-e.v. d'un espace vectoriel E.*
existe-t-il un sous-espace vectriel G de E tel que

$$F \cap G = \emptyset.$$

Exercice 1.10.2 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v.*
Montrer que l'addition des applications linéaires et la multiplication par un scalaire munissent $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel.

Exercice 1.10.3 *Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui-même ? La loi*

$$(f,g) \longmapsto f \circ g$$

définie dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est-elle commutative ?

Exercice 1.10.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et h une homothétie vectorielle de E. Montrer que*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad h \circ f = f \circ h.$$

Cette propriété est-elle vraie si h est un élément quelconque de $\mathcal{L}(E)$? Donner des exemples lorsque $E = \mathbb{R}^2$ d'éléments non nuls f et g de $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0_{E,E}$.

Exercice 1.10.5 *Soit α, β et λ des nombres réels. Montrer que le système :*

$$((1,\alpha,\beta),\ (0,1,\lambda),\ (0,0,1))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 1.10.6 *Est-ce que le système :*

$$((1,2,3),\ (2,3,4),\ (3,4,5))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 1.10.7 *Soit u, v et w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E.*

1. *Montrer que le système $(v+w, w+u, u+v)$ est libre. Le système $(v+w, w+u, u+v)$ est-t-il une base ?*
2. *On suppose que E est de dimension 3.*
   Si (α,β,λ) est le système des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base (u,v,w), quel est le système de coordonnées de x dans la base $(v+w, w+u, u+v)$?

Exercice 1.10.8 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.*

1. *On considère trois éléments de E :*

$$\begin{array}{rcl} f_1 : x & \longmapsto & \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ f_2 : x & \longmapsto & \cos(x), \\ f_3 : x & \longmapsto & \sin(2x)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{array}$$

   Montrer que f_1, f_2, f_3 sont linéairement indépendants.
2. *Peut-on trouver $p \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une base de E formée de p éléments ?*
   (On remarque que E contient les fonctions polynômiales.)

Exercice 1.10.9 *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On définit une aapplication φ de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ dans lui-même par :*

$$(\varphi : f \longmapsto g) \ \Leftrightarrow\ (\exists h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})) \text{ tel que } (\forall x \in \mathbb{R}) \text{ on a } g(x) = h(x)f(x).$$

1. *Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ dans les cas suivants :*
   (a) $h : x \longmapsto x^2 - 1$;
   (b) $h : x \longmapsto x^2 + 1$.

2. *Comment choisir h pour que φ soit bijective ?*
3. *Comment choisir h pour que φ soit linéaire ?*

Exercice 1.10.10 *Soit $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.*
2. *Soit $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'application qui à une fonction $f \in \mathcal{D}$ associe la fonction dérivée f'. Montrer que φ est linéaire.*
3. *L'application φ est-elle injective ? surjective ?*

Exercice 1.10.11 *Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et F un espace vectoriel de dimension n.*

1. *Existe-t-il une application linéaire injective de E de F ?*
2. *Existe-t-il une application linéaire surjective de F de E ?*
3. *Existe-t-il un isomorphisme de F sur E (resp. de E sur F) ?*

Exercice 1.10.12

1. *Soit E un espace vectoriel non nul. On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E sur lui-même. Montrer que $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.*
2. *Soit $h \in \mathcal{H}(E)$. Montrer que :*
$$(\forall f \in \mathrm{GL}(E)), \quad f^{-1} \circ h \circ f \in \mathcal{H}(E)$$
3. *Montrer que si $E = \mathbb{R}$ est la droite vectorielle, alors $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(\mathbb{R})$.*

Exercice 1.10.13 *Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i, j) une base de E. Soit f et g deux endomorphisme de E définis respectivement par :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(i) & = i + 2j, \\ f(j) & = 4i + 5j, \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} g(i) & = 5i + 6j \\ g(j) & = 7i + 8j. \end{array} \right.$$

Soit $v = x.i + y.j$ (où $(i, j) \in \mathbb{R}^2$) un vecteur de E.
Quelles sont les composantes sur la base (i, j) des vecteurs suivants :

$$f(v); \quad g(v); \quad (5.f(v) - 4.g(v)); \quad (2.f - id_E)(v); \quad (-f + \pi.g)(v).$$

Exercice 1.10.14 *Soit S et T les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ engendrés respactivement par les vecteurs :*

$$S = \overline{< (1, -1, 2); (1, 1, 2); (3, 6, -6) >},$$

$$T = \overline{< (0, -2, -3); (1, 0, 1) >}$$

Quelles sont les dimensions de S, T et $S \cap T$?

Exercice 1.10.15 *Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions respectives p, q et r. On suppose*

$$1 \leq p \leq 3, \quad 1 \leq q \leq 3, \quad 1 \leq r \leq 3.$$

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
Comparer $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$ à $\dim(\mathrm{Im}(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}(g))$.

Exercice 1.10.16 *Soit* $f : E \longrightarrow E$ *et* $g : E \longrightarrow E$ *deux endomorphismes d'un espace vectoriel* E. *tels que*

$$g \circ f = f \circ g.$$

Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$ *sont stables par* g *et stables par* f.

Exercice 1.10.17 *Soit* (e_1, e_2, e_3) *la base naturelle de* $\mathbb{R}^3$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *tel que :*

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & e_1 - e_2; \\ f(e_2) & = & -e_2 + e_3 \\ f(e_3) & = & e_2 + e_3. \end{array}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 1.10.18 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* 3 *et* (i, j, k) *une base de* E. *Soit* f *l'endomorphisme de* E *tel que :*

$$\begin{array}{rcl} f(i) & = & \frac{1}{3}\left[(2)i + (-2)j + k\right]; \\ f(j) & = & \frac{1}{3}\left[(2)i + j + (-2)k\right]; \\ f(k) & = & \frac{1}{3}\left[i + (2)j + (-2)k\right]. \end{array}$$

1. *Montrer que* $f^2 = id_E$. *Déterminer* $\operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$.
2. *Déterminer une autre base* (e_1, e_2, e_3) *de* E *telle que l'on ait :*

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = -e_3.$$

Exercice 1.10.19 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* 3 *et* (i, j, k) *une base de* E. *Soit* f *l'endomorphisme de* E *tel que :*

$$\begin{array}{rcl} f(i) & = & \frac{1}{4}i + \frac{1}{8}j + \frac{\sqrt{11}}{8}k; \\ f(j) & = & \frac{1}{8}i + \frac{1}{16}j + \frac{\sqrt{11}}{16}k; \\ f(k) & = & \frac{\sqrt{11}}{8}i + \frac{\sqrt{11}}{16}j + \frac{11}{16}k. \end{array}$$

1. *Calculer* $f \circ f$.
2. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(f)$ *est le plan vectoriel d'équation :*

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{11}}{4}z = 0.$$

3. *Montrer que* $\operatorname{Im}(f)$ *est la droite vectorielle* D *de vecteur directeur :*

$$\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}j + \frac{\sqrt{11}}{4}k.$$

Exercice 1.10.20 *Soit* f *et* g *deux endomorphisme d'un espace vectoriel* E.

1. *Développer :* $(f + g) \circ (f + g)$ *et* $(f - g) \circ (f + g)$.

2. *A quelle condition a-t-on :*
$$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2.f\circ g$$
et
$$(f-g)\circ(f+g) = f^2 - g^2 ?$$
3. *Soit* a, b, a' *et* b' *des nombres réels. Développer :*
$$(a.f + b.g)\circ(a'.f + b'.g).$$

Exercice 1.10.21 *Soit* E *un espace vectoriel,* 0 *l'endomorphisme nul* E *et soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que*
$$f^3 = 0 \quad \textit{et} \quad f^2 \neq 0.$$
Montrer que le système (id_E, f, f^2) *est libre.*

Exercice 1.10.22 *Soit* E *un espace vectoriel.*

1. *Soit* f *et* g *deux endomorphismes de* E *tels que*
$$f\circ g = g\circ f.$$
Démontrer les relations :
$$f^3 - g^3 = (f-g)\circ(f^2 + f\circ g + g^2),$$
$$f^3 + g^3 = (f+g)\circ(f^2 - f\circ g + g^2).$$
2. *On suppose que* f^3 *est l'endomorphisme nul.*
Démontrer que les endomorphismes $f - id_E$ *et* $f + id_E$ *sont bijectifs et déterminer* $(f-id_E)^{-1}$ *et* $(f+id_E)^{-1}$*, en fonction de* f.

Exercice 1.10.23 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* 3 *et* (i,j,k) *une base de* E*. On désigne par* f *l'endomorphisme de* E *tel que :*
$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j;\\ f(j) &= -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j;\\ f(k) &= \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k. \end{aligned}$$

1. *Montrer que* $f\circ f = f$.
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}(f)$.
3. *Déterminer l'ensemble des points fixes de* f.

Exercice 1.10.24 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* 2 *et* (e_1,e_2) *une base de* E*. On considère les trois endomorphismes* f*,* g *et* h *de* E *définis par :*
$$h(e_1) = e_1 \quad \textit{et} \quad h(e_2) = -e_2;$$
$$f(e_1) = 0_E \quad \textit{et} \quad f(e_2) = e_1;$$
$$g(e_1) = e_2 \quad \textit{et} \quad g(e_2) = 0_E.$$

1. *Vérifier que, f, g et h satisfont aux relations suivantes :*

$$\begin{aligned} f\circ g - g\circ f &= h;\\ h\circ f - f\circ h &= 2.f;\\ h\circ g - g\circ h &= -2.g. \end{aligned}$$

2. *Déterminer les droites vectorielles D stables par h, f et g respactivement, c'est-à-dire telles que :*

$$h(D)\subset D,\quad f(D)\subset D \quad \textit{et} \quad g(D)\subset D$$

   respectivement.

Exercice 1.10.25 *Les questions 1., 2. et 3. de cet exercice sont indépendantes.*

1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une partie de E ne contenant pas 0_E. Le complémentaire de F dans E, noté C_E^F, est-il un sous-espace vectoriel de E ?* **Justifier**
2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $0_{E,E}$ l'endomorphisme nul de E et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que :*

$$f^3 = 0_{E,E} \quad \textit{et} \quad f^2 \neq 0_{E,E}. \ \textit{Prouver que le système } \{\mathrm{Id}_E, f, f^2\} \textit{ est libre dans } \mathcal{L}(E).$$

   Le système $\{\mathrm{Id}_E, f, f^2\}$ est-il une base de $\mathcal{L}(E)$?* **Justifier
3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f\circ f = \mathrm{Id}_E$. On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$.*
   (a) *Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.*
   (b) *Montrer que $E = E_1\oplus E_2$.*

Exercice 1.10.26 *Soient (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$f(e_1) = e_1+e_2+e_3,\quad f(e_2) = e_1+e_2+e_3 \quad \textit{et} \quad f(e_3) = e_1+e_2+e_3.$$

1. *Déterminer Ker(f) et Im(f). Quel est le rang de f ?* **Justifier**
2. *Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de f, puis montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel puis déterminer sa base.*
3. *Déterminer une base de Ker(f) et une base de Im(f), puis montrer que*

$$\mathbb{R}^3 = \mathit{Ker}(f)\oplus \mathit{Im}(f).$$

   **Donner une interprétation géométrique à $\mathcal{D}$, Ker(f) et Im(f).*
4. *Calculer $f\circ f(e_i)$, pour $i=1,2,3$. En déduire l'expression de f^2 en fonction de f.*
   **L'endomorphisme f est-il un projecteur ?*

Exercice 1.10.27 *Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes $\mathrm{z} = x+\mathrm{i}y$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.*

1. *Montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\mathrm{z}\mapsto f(\mathrm{z}) = \mathrm{im}(\mathrm{z}) =$ partie imaginaire de z.*
   (a) *Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ et que $f^2=0$.*
   (b) *Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$; puis montrer que $\mathbb{C} = \mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.*
   (c) *Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, une base de $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire une base de $\mathbb{C}$.*

3. *En justifiant votre réponse, déterminer les dimensions suivantes* $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Ker}(f)$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Im}(f)$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}(f)$, $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}(f)$ *et* $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$.

Exercice 1.10.28 *Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.*

1. *Vérifier que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Que peut-on déduire ?*
2. *Soit Φ une application de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, qui a une fonction f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ associe la fonction $g = f'' + 2f' + f$.*
   (a) *Exprimer l'écriture symbolique de l'application Φ, puis montrer que Φ est un homomorphisme d'espaces vectoriels.*
   (b) *Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de Φ. L'application Φ est-elle injective ?*
   (c) *Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est-il de dimension finie ?* **Justifier**
   (d) *L'application Φ est-elle surjective ? est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?*

Exercice 1.10.29
1. *Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant l'équation :* $\quad g'' + g = 0 \quad (**)$.
   **Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, puis montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.*
2. *Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire injective.*
   (a) *Vérifier que $u(0_E) = 0_F$.*
   (b) *Démontrer que si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est un système libre de E,*
   alors $\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}$ est un système libre de F.
   (c) *Montrer $Ker(u) = \{0_E\}$.*
3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$.*
   (a) *Montrer que pour tout $x \in E$, on a : $x - f(x) \in$ Ker(f).*
   (b) *Montrer que $q = id_E - f$ est un projecteur, puis montrer que $E =$ Ker$(f) \oplus$ Im(f).*

Chapitre 2

Matrices, déterminant et Matrices inverses

Dans ce chapitre, on suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.

2.1 Matrice d'un endomorphisme dans une base

2.1.1 Définitions et propriétés

Soit E un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. Il existe alors un unique système de scalaires $(a_{1,1}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{2,2})$ dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2, \\ f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2. \end{cases} \tag{0.1}$$

A cet endomorphisme, on associe la matrice

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Le scalaires écrits dans la première colonne (resp. deuxième colonne) sont les composantes de $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$) suivant e_1 et e_2.

Propriété 2.1.1 *Dans toute base de E :*

1. *La matrice de l'application identique est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. *La matrice de l'application nulle est* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. *La matrice de l'homothétie vectorielle de rapport λ est* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2.1.2 Propriétés algébriques

Soit f et g deux endomorphismes d'un plan vectoriel E. Soit $\mathcal{B} = (u, v)$ une base de E et

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} c & c' \\ d & d' \end{pmatrix}$$

les matrices de f et g dans cette base. Alors

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} ac + a'd & ac' + a'd' \\ bc + b'd & bc' + b'd' \end{pmatrix}$$

Démonstration. Pour cela, il suffit de calculer $f \circ g$ dans cette base.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(u) &= f(g(u)) = f(c.u + d.v) \\ &= c.f(u) + d.f(v) = c(a.u + b.v) + d.(a'.u + b'.v) \\ &= (ac + a'd).u + (bc + b'd).v \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f \circ g)(v) &= f(g(v)) = f(c'.u + d'.v) \\ &= c'.f(u) + d'.f(v) = c'(a.u + b.v) + d'.(a'.u + b'.v) \\ &= (ac' + a'd').u + (bc' + b'd').v \end{aligned}$$

□

2.2 Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices d'ordre n

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

2.2.1 Ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ des matrices d'ordre 2

Notons $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit E un plan vectoriel et $\mathcal{B} = (u, v)$ une base de E. L'application $\Phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ f \longmapsto \Phi(f) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est une bijection.*
Cette bijection dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie dans E.

Démonstration.

- Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On associe à f (resp. g) la matrice

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\text{resp. } \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$$

  Si $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$
  d'où $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ et $d = d'$, ce qui entraîne $f = g$, et Φ est injective.
- Soit $\mathrm{M}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ associé à

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}?$$

$$\begin{cases} u' = a.u + b.v, \\ v' = c.u + d.v. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c.u' - a.v' = (bc - ad).v, \\ d.u' - b.v' = (ad - bc).u \end{cases}$$

  Donc il existe un endomorphisme f associé à la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$.

□

2.2.2 Structure de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Soit M et M' deux matrices

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + c' \end{pmatrix}.$$

Si λ est un scalaire de $\mathbb{K}$, définissons la matrice $\lambda.\mathrm{M}$ par

$$\lambda.\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que ces deux lois de composition munissent $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ d'une structure d'espace vectoriel.

- **L'élément neutre** pour l'addition est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, appelée **matrice nulle**.
- **L'opposée** de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

2.2.3 Multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

On appelle produit de la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et de la matrice $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ la matrice $\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ que l'on note MM' ou $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$.
L'opération qui à M et M' associe MM' définit sur l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une loi de composition interne qu'on appelle **multiplication des matrices**.

Remarque 2.2.1 *La multiplication des matrices n'est pas* **commutative**. *Par exemple, on a :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. L'élément neutre pour la multiplication est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appelée **matrice unité**.

2. l'associativité du produit de matrices résulte de l'important théorème suivant :

Théorème 2.2.2 *Soit E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, f et g deux applications linéaires de E dans E. Alors la matrice de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}$ est égale au produit des matrices, dans la base $\mathcal{B}$, de f et de g ; en d'autres termes :*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g).$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate des propriétés algébriques vues précédement. $\square$

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer :

Théorème 2.2.3 *La multiplication des matrices est associative.*

Démonstration. Soit A, B et C trois matrices. On considère un plan vectoriel E et une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de ce plan vectoriel.
Si f, g et h sont les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement A, B et C, nous avons , d'une part,

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}((f \circ g) \circ h) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f \circ g) \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(h) = (AB)C,$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f \circ (g \circ h)) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g \circ h) = A(BC).$$

La composition des applications étant associative :

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \quad \text{d'où} \quad (AB)C = A(BC),$$

ce qui prouve le théorème. □

Remarque 2.2.2 *Les propriétés que nous avons sur l'espace des matrices d'ordre 2 : $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, resteront valables dans l'espace vectoriel des matrices d'ordre $n \geq 3$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2.3 Déterminant

2.3.1 Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Définition 2.3.1 *On appelle* **déterminant** *d'une matrice* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *le nombre réel*

$$ad - bc.$$

Le déterminant de la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *se note det*(M) *ou encore* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Théorème 2.3.1 *Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants des deux matrices.*

Démonstration. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices. On a

$$\mathrm{MM}' \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{MM}') &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') \\ &= A + B + C + d - A' - B' - C' - D', \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} A = aa'cb',\ B = aa'dd',\ C = bc'cb',\ D = bc'dd' \\ A' = ab'ca',\ B' = ab'dc',\ C' = bd'ca',\ D' = bd'dc'. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} A - A' & = & 0 \\ B - B' & = & ad(aa'd' - b'c'), \\ C - C' & = & bc(c'b' - a'd'), \\ D - D' & = & 0. \end{array}$$

D'où

$$\det(\mathrm{MM}') = B - b' + C - C' = (ad - bc)(a'd' - b'c'),$$

et, par suite,

$$\det(\mathrm{MM}') = \det(\mathrm{M}) \times \det(\mathrm{M}')$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.3.1 *On a aussi*

$$det(\mathrm{M}'\mathrm{M}) = det(\mathrm{M}') \times det(\mathrm{M}).$$

d'autre part

$$det(\mathrm{M}) \times det(\mathrm{M}') = det(\mathrm{M}') \times det(\mathrm{M}),$$

on en déduit

$$det(\mathrm{M}'\mathrm{M}) = det(\mathrm{MM}').$$

2.3.2 Déterminant d'un système de deux vecteurs relativement à une base

Définition 2.3.2 *Soit E un plan vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit (λ_1, μ_1) et (λ_2, μ_2) les coordonnées respactives de deux éléments y_1 et y_2 de E dans la base $\mathcal{B}$. On appelle déterminant du système (y_1, y_2) relativement à la base $\mathcal{B}$, et l'on note det$_{\mathcal{B}}(y_1, y_2)$, le nombre suivant*

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1.$$

Grâce à cette notion, nous allons donner une nouvelle caractérisation des **systèmes libres** de deux vecteurs de E (base) et des **systèmes liés** de deux vecteurs de E.

2.3.3 Caractérisation d'une base

Théorème 2.3.2 *Soit (y_1, y_2) un système de deux vecteurs d'un plan vectoriel E.*

1. *Pour que le système (y_1, y_2) soit une base de E, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) \neq 0.$$

2. *S'il existe une base $\mathcal{B}_0$ de E telle que*

$$det_{\mathcal{B}_0}(y_1, y_2) \neq 0$$

alors, pour toute base $\mathcal{B}$, on a

$$det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) \neq 0.$$

Démonstration.

1. Montrons d'abord que la condition est nécessaire : Si (y_1, y_2) est une base $\mathcal{B}'$ du plan E, on a

$$\det_{\mathcal{B}'}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

   Il suffit donc de prendre $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.
   Montrons que la condition est suffisante : Soit le système (y_1, y_2). Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ du plan E telle que $\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) \neq 0$. Nous avons alors le système (y_1, y_2) est une base du plan E.

2. Comme on a $\det_{\mathcal{B}_0}(y_1, y_2) \neq 0$, le système (y_1, y_2) est une base du plan E (d'après 1)) . Soit $\mathcal{B}$ une autre base du plan E. Si on avait $\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = 0$, alors le système (y_1, y_2) serait linéairement dépendant ou lié, ce qui est absurde. Donc, on a $\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

□

Corollaire 2.3.1 *Soit (y_1, y_2) un système du plan E. S'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = 0$, alors, pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, on a*

$$\det_{\mathcal{B}'}(y_1, y_2) = 0.$$

Exemple 2.3.1 *On prend $E = \mathbb{R}^2$, soit $y_1 = (1, -1)$ et $y_2 = (1, 1)$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.*
Les coordonnées de y_1 (resp. y_2) dans la base naturelle $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0); e_2(0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ sont $(1, -1)$ (resp. $(1, 1)$).
On a donc

$$\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

et par suite $\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2)$ est non nul.
Donc, le determinant du système (y_1, y_2) relativement à toute base est non nul. De plus, (y_1, y_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, que nous noterons $\mathcal{B}'$.
On a

$$\det_{\mathcal{B}'}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

d'où

$$\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) \neq \det_{\mathcal{B}'}(y_1, y_2).$$

Par conséquent, dans le cas où le système (y_1, y_2) est libre, la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2)$ dépend en général de la base $\mathcal{B}$ qui a été choisie.

2.3.4 Propriétés du déterminant

Propriété 2.3.1 *Soit (y_1, y_2) un système de deux vecteurs d'un plan vectoriel E et $\mathcal{B}$ une base de E. On démontre les propriétés suivantes :*

1. *$\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = -\det_{\mathcal{B}}(y_2, y_1)$.*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det_{\mathcal{B}}(\lambda.y_1, y_2) = \det_{\mathcal{B}}(y_1, \lambda.y_2)$.*
3. *Si $y_1 = y_1' + y_1''$, alors on*

$$\det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = \det_{\mathcal{B}}(y_1', y_2) + \det_{\mathcal{B}}(y_1'', y_2).$$

2.3.5 Determinant d'une matrice d'ordre 3

Définition 2.3.3 *On appelle* **determinant** *d'une matrice* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ *le nombre réel*

$$a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}.$$

ou $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

Toutes les propriétés vues dans le cas d'une matrice d'ordre 2 resteront valides pour les matrices d'ordre supérieur où égal 3.

Définition 2.3.4 *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(\lambda_1, \mu_1, \beta_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \beta_2)$ et $(\lambda_3, \mu_3, \beta_3)$ les coordonnées respactives de trois éléments y_1, y_2 et y_3 de E dans la base $\mathcal{B}$. On appelle determinant du système (y_1, y_2, y_3) relativement à la base $\mathcal{B}$, et l'on note $det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2, y_3)$, le nombre suivant*

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \beta_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \beta_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \mu_2 & \beta_2 \\ \mu_3 & \beta_3 \end{vmatrix} - \mu_2 \begin{vmatrix} \beta_2 & \lambda_2 \\ \beta_3 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \beta_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix}.$$

Théorème 2.3.3 *Soit (y_1, y_2, y_3) un système de trois vecteurs d'un espace vectoriel E.*

1. *Pour que le système (y_1, y_2, y_3) soit une base de E, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2, y_3) \neq 0.$$

2. *S'il existe une base $\mathcal{B}_0$ de E telle que*

$$det_{\mathcal{B}_0}(y_1, y_2, y_3) \neq 0$$

alors, pour toute base $\mathcal{B}$, on a

$$det_{\mathcal{B}}(y_1, y_2, y_3) \neq 0.$$

2.3.6 Formule du déterminant pour une matrice quelconque

On peut calculer le déterminant d'une matrice carrée A de taille $n \times n$ à l'aide de n déterminant de matrices de dimension $n - 1$ obtenues en enlevant à la matrice de départ une ligne et une colonne. Si A est la matrice, pour tout i et j, on note A_{ij} la matrice obtenue en enlevant à A sa i^{ime} ligne et sa j^{ime} colonne.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On peut alors développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne.
Le développement suivant une ligne i :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(A_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j} det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une ligne.

Le développement suivant une colonne j :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(A_{i,j}).$$

Le terme $(-1)^{i+j} det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$ et le terme $det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une colonne.

2.3.7 Condition pour qu'un endomorphisme soit bijectif

Les determinants vont nous permettre de caractériser simplement les endomorphismes bijectifs d'un plan vectoriel E où d'un espace vectoriel E. Afin de donner cette caractérisation, nous établirons d'abord un lemme concernant les endomorphismes et les determinants.

Lemme 2.3.1 *Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Alors le determinant de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est égal au determinant du système $(f(e_1), f(e_2))$ relativement à la base $\mathcal{B}$. On a donc*

$$\mathit{det}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2)) = \mathit{det}(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)).$$

Démonstration. Posons $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a donc, par définition,

$$f(e_1) = a.e_1 + b.e_2,$$

et

$$f(e_2) = c.e_1 + d.e_2,$$

ce qui prouve les égalités

$$\det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2)).$$

$\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.3.4 *Soit E un plan vectoriel et f un endomorphisme de E. f est bijectif si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathit{det}(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0.$$

Démonstration. Soit E un plan vectoriel et f un endomorphisme de E.

– **Montrons que la condition est nécessaire**. Supposons que f soit un isomorphisme. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base quelconque de E. On sait que le système $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de E. D'où

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2)) \neq 0$$

. D'après le lemme (2.3.1), on a :

$$\det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2)).$$

Par suite,

$$\det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$$

ce que nous voulons démontrer.

– **Montrons que la condition est suffisante**. Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (i, j)$ de e telle que

$$\det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0.$$

On a donc [puisque $\det_{\mathcal{B}}(f(i), f(j)) = \det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$]

$$\det_{\mathcal{B}}(f(i), f(j)) \neq 0,$$

ce qui pouve que $(f(i), f(j))$ est une base E.
Pour montrer que f est bijective, il nous suffit de montrer qu'elle est injective, donc que son noyau est réduit à $\{0_E\}$.
Soit $x = \lambda.i + \mu.j$ un élément de E tel que $f(x) = 0_E$. On a

$$f(x) = \lambda.f(i) + \mu.f(j) = 0_E.$$

D'où $\lambda = \mu = 0$ car $(f(i), f(j))$ est un système libre et par suite $x = 0_E$. Cela montre que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc que f est bijective.

□

Corollaire 2.3.2 *Si f est un endomorphisme de E tel qu'il existe une base $\mathcal{B}_0$ de E vérifiant det$(\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f)) \neq 0$, alors on a det$(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E.*

Théorème 2.3.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et f un endomorphisme de E. f est bijectif si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$det(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0.$$

De plus, si f est un endomorphisme de E tel qu'il existe une base $\mathcal{B}_0$ de E vérifiant det$(\mathrm{M}_{\mathcal{B}_0}(f)) \neq 0$, alors on a det$(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

Démonstration. La démonstration est immédiate d'après le théorème (2.3.4). □

2.3.8 Rotation vectorielle et homothétie

1. **Rotation vectorielle dans un plan** : Soit $(O; u, v)$ et $(O_1; u_1, v_1)$ deux repère orthonormé de même sens du plan vectoriel $\mathcal{P}$ et M un point de $\mathcal{P}$. A chaque repère est associée une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C}$.
   Comparons les affixes z et z_1 d'un point M de $\mathcal{P}$ dans ces bijections.
   Posons $z = x + \mathrm{i}y$ et $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$. Par définition de ces bijections, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x.u + y.v \\ \overrightarrow{O_1M} &= x_1.u_1 + y_1.v_1; \end{aligned}$$

on en déduit, si l'on désigne par $\alpha = a + \mathrm{i}b$, l'affixe de O_1 dans le repère $(O; u, v)$,

$$x.u + y.v = (a.u + b.v) + (x_1.u_1 + y_1.v_1),$$

d'où

$$(x - a).u + (y - b).v = x_1.u_1 + y_1.v_1.$$

La rotation vectoriel, $\mathcal{R}$ d'angle θ qui transforme u_1 en u et v_1 en v, est définie par la matrice

$$\mathrm{M}(\mathcal{R}_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} u &= \cos(\theta).u_1 - \sin(\theta).v_1 \\ v &= \sin(\theta).u_1 + \cos(\theta).v_1. \end{aligned}$$

On montre que l'on a

$$[(x - a) + \mathrm{i}(y - b)]e^{\mathrm{i}\theta} = x_1 + \mathrm{i}y_1,$$

ou encore

$$z_1 = (z - \alpha)e^{\mathrm{i}\theta}.$$

2. **Homothétie** : La matrice correspondante à une homothétie h de centre O et de rapport λ est donnée par

$$\mathrm{M}_\lambda(\mathrm{h}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. **La matrice de la composée** $\mathrm{h} \circ \mathcal{R}_\theta$: La matrice associe à la composée, $\mathrm{h} \circ \mathcal{R}_\theta$ de l'homothétie h et la rotation $\mathrm{M}(\mathcal{R}_\theta)$, est une similitude correspondante à la matrice suivante :

$$\mathrm{M}(\mathrm{h} \circ \mathcal{R}_\theta) = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

4. **Rotation vectorielle dans l'espace** $\mathbb{R}^3$

2.3.9 Matices carrées inversibles et inverse d'une matrice

Définition 2.3.5 *Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *On dit que la matrice A est inversible si et seulement si det$(A) \neq 0$.*
2. *Si la matrice A est inversible. On appelle inverse de la matrice A, la matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AM = MA = \mathrm{I}$.*
   Dans ce cas, la matrice $M = A^{-1}$.

Exemple 2.3.2 *A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible car det$(A) = -6 \neq 0$. Trouvons maintenant la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a - 3c & b - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2a=1, \\ 2b=0, \\ a-3c=0, \\ b-3d=1, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a & =\frac{1}{2}, \\ b & =0, \\ c & =\frac{1}{6}, \\ d & =-\frac{1}{3}, \end{array}\right.$$

d'où

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci reste valable pour toutes les matrices carrées inversibles d'ordre $n \geq 2$.

2.4 Transposé d'un vecteur et transposée d'une matrice

Définition 2.4.1 1. *On appelle vecteur ligne tout vecteur s'écrivant sous la forme $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.*

2. *On appelle vecteur colonne tout vecteur s'écrivant sous la forme $W=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.*

3. *Le vecteur transposé d'un vecteur ligne $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est un vecteur colonne noté par : $v^T=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$*

4. *Soit $W=\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $W_i=(w_{i,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{i,n})$, $1 \leq i \leq n$ est un vecteur ligne, alors la transposée de la matrice $W=\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$ est la matrice $W^T=\left(W_1^T, W_2^T, \ldots, W_n^T\right)$ ou $W_i^T=\begin{pmatrix} w_{i,1} \\ w_{i,2} \\ \vdots \\ w_{i,n} \end{pmatrix}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

5. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si et seulement si $A^T=A$.*

Exemple 2.4.1 1. *$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A=\begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

La transposée A^T de la matrice A est

$$A^T=\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2. *$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 3 \\ 1+\mathrm{i} & \sqrt{3} & 5 \\ 2 & 3+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

La transposée A^T de la matrice A est

$$A^T = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 2 \\ 2+\mathrm{i} & \sqrt{3} & 3+\mathrm{i} \\ 3 & 5 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

2.4.1 Méthode pratique pour le calcul de l'inverse d'une matrice

Propriété 2.4.1 *Soit A et B deux matrices et I la matrice identité d'ordre $n \times n$, alors on a*

1. $det(I) = 1$.
2. $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
3. $det(AB) = det(A)det(B) = det(BA)$.
4. $det(A^T) = det(A)$.

Définition 2.4.2 *On appelle comatrice de A qu'note com(A) la matrice formée par les cofacteurs de A.*

Proposition 2.4.1

1. *Une matrice A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et dans ce cas $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.*
2. *La matrice inverse A^{-1} d'une matrice inversible A s'obtient en multipliant $1/det(A)$ par la comatrice de A. i.e.,*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} com(A).$$

2.4.2 Matrice d'ordre 2

Soit A une matrice inversible d'ordre 2 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer l'inverse A^{-1} de la matrice A on suit les étapes suivantes :

Étape 1 : On calcule le determinant det$(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Étape 2 : On calcule la transposée A^T de la matrice A

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Étape 3 : On calcule la matrice auxiliaire "**comatrice**" de A notée "com(A)" de la matrice A par

$$\Gamma_{11} = (+1) \times a_{22} = a_{22}$$

$$\Gamma_{12} = (-1) \times a_{12} = -a_{12}$$

$$\Gamma_{21} = (-1) \times a_{21} = -a_{21}$$

$$\Gamma_{22} = (+1) \times a_{11} = a_{11}$$

La matrice com(A) est donc com$(A) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}$. Et Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{21} et Γ_{22} sont les **cofacteurs** de A.

Étape 4 : En fin

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{com}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Vérification : Par un calcul simple de produit matricielle, on peut vérifier que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{12}a_{21} - a_{21}a_{12} \\ a_{12}a_{21} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = I_2.$$

2.4.3 Matrice d'ordre 3

Soit A une matrice inversible d'ordre 3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer l'inverse A^{-1} de la matrice A on suit les étapes suivantes :

Étape1 : On calcule le determinant

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0.$$

Étape2 : On calcule la transposée A^T de la matrice A

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Étape3 : On calcule la matrice auxiliaire "**comatrice**" de A notée "com(A)" de la matrice A par

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \\
\Gamma_{12} &= -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = -\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) \\
\Gamma_{13} &= +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\
\Gamma_{21} &= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) \\
\Gamma_{22} &= +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \\
\Gamma_{23} &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = -\left(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}\right) \\
\Gamma_{31} &= +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = -\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\
\Gamma_{32} &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} = -\left(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}\right) \\
\Gamma_{33} &= +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

La matrice com(A) est donc : $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix}.$

Étape4 : En fin la matrice inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{com}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix}.$$

2.5 Matrices semblables

Définition 2.5.1 *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles constituent deux matrices représentatives du même endomorphisme dans deux bases (éventuellement) différentes. Autrement dit, on dit que deux matrices A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que*

$$A = P^{-1}BP.$$

Exemple 2.5.1 *Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ sont semblables.*
En effet, il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.5.1 *On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :*

$$A \;\mathcal{R}\; B \;\Leftrightarrow\; \exists P \text{ une matrice inversible telle que } A = P^{-1}BP.$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.6 Changement de bases : Coordonnées plaires, coordonnées cylindrique et coordonnées sphériques

2.6.1 Coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

Soit $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Soit le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère M un point de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{x}{\rho} & = & \cos(\theta), \\ \frac{y}{\rho} & = & \sin(\theta), \end{array} \right. \tag{0.2}$$

ces deux expressions sont bien définies lorsque $\rho > 0$.

- (x, y) s'appellent les coordonnées cartésiennes du point M relativement au repère $\mathcal{R}$,
- (ρ, θ) s'appellent les coordonnées polaires.

On peut déterminer les coordonnées polaires (ρ, θ) du point M en fonction des coordonnées cartésiennes x et y :

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho\sin(\theta)}{\rho\cos(\theta)} = \tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{\mathcal{O}M} = \rho\cos(\theta)\vec{i} + \rho\sin(\theta)\vec{j} = \rho\left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right)$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\rho, \theta) \mapsto f(\rho, \theta) = \overrightarrow{\mathcal{O}M}$ une application. On peut écrire

$$e_\rho = (f(\rho,\theta))'_\rho = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

la dérivée de f par rapport à la variable ρ.

$$e_\theta = (f(\rho,\theta))'_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \rho\left(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\,\right)$$

la dérivée de f par rapport à la variable θ. D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_\rho & = & \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}, \\ e_\theta & = & \rho\left(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\,\right), \end{array}\right. \tag{0.3}$$

Le système (e_ρ, e_θ) est libre et engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, alors $\{e_\rho, e_\theta\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée la base plaire de $\mathbb{R}^2$.

$\{e_\rho, e_\theta\}$ est une base orthonormale

Le système $\{e_\rho, e_\theta\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ dans le sens des conditions suivantes

- $e_\rho \cdot e_\theta = -\rho\sin(\theta)\cos(\theta) + \rho\sin(\theta)\cos(\theta) = 0$
- $\|e_\rho\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$
- $\|e_\theta\| = \sqrt{\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta)} = \rho$

Onn peut normaliser les vecteur e_ρ et e_θ dans le sens suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{e}_\rho & = & e_\rho, \\ \dot{e}_\theta & = & \frac{1}{\rho}\, e_\theta. \end{array}\right. \tag{0.4}$$

pour touver une base orthonormé $\{\dot{e}_\rho, \dot{e}_\theta\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.6.1

1. *Déterminer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de e_ρ et e_θ.*
2. *Trouver le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{O}M}$ en fonction e_ρ et e_θ*
3. *Montrer que le système $(\dot{e}_\rho, \dot{e}_\theta)$ est une base orthonormé.*

2.6.2 Coordonnées cylindriques et coordonnées cartésiennes

Passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes

Soit $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $-\infty \leq z \leq +\infty$. Soit le plan $\mathbb{R}^3$ muni du repère $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère M un point de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{x_M}{\rho} & = & \cos(\theta), \\ \frac{y_M}{\rho} & = & \sin(\theta), \\ z_M & = & z. \end{array}\right. \tag{0.5}$$

ces trois expressions sont bien définies lorsque $\rho > 0$.

- (x_M, y_M, z_M) s'appellent les coordonnées cartésiennes du point M relativement au repère $\mathcal{R}$,
- (ρ, θ, z) s'appellent les coordonnées cylindriques.

On peut déterminer les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) du point M en fonction des coordonnées cartésiennes x , y et z :

$$x_M^2 + y_M^2 = \rho^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$$
$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{\rho\sin(\theta)}{\rho\cos(\theta)} = \tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\tan\left(\frac{y_M}{x_M}\right)$$
$$z = z_M$$

Vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\vec{i} + \rho\sin(\theta)\vec{j} + z\,\vec{k} = \rho\left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right) + z\,\vec{k}$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(\rho, \theta, z) \mapsto f(\rho, \theta, z) = \overrightarrow{OM}$ une application. On peut écrire la dérivée de f par rapport à la variable ρ.

$$e_\rho = f'_\rho(\rho, \theta, z)) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

la dérivée de f par rapport à la variable θ,

$$e_\theta = f'_\theta(\rho, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \rho\left(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\,\right)$$

et la dérivée de f par rapport à la variable z.

$$e_z = f'_z(\rho, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\rho, \theta, z) = 1\vec{k}$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_\rho & = & \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}, \\ e_\theta & = & \rho\left(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\,\right), \\ e_z & = & \vec{k} \end{array}\right. \tag{0.6}$$

Le système (e_ρ, e_θ, e_z) est libre et engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, alors $\{e_\rho, e_\theta, e_z\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, appelée la base cylindrique de $\mathbb{R}^3$.

$\{e_\rho, e_\theta, e_z\}$ est une base orthonormale

Le système $\{e_\rho, e_\theta, e_z\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans le sens des conditions suivantes

- $e_\rho \cdot e_\theta = 0$, $e_\rho \cdot e_z = 0$ et $e_z \cdot e_\theta = 0$
- $\|e_\rho\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$
- $\|e_\theta\| = \sqrt{\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta)} = \rho$
- $\|e_z\| = 1$

Onn peut normaliser les vecteur e_ρ, e_θ et e_z dans le sens suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{e}_\rho & = & e_\rho, \\ \dot{e}_\theta & = & \frac{1}{\rho}\,e_\theta. \\ \dot{e}_z & = & e_z. \end{array}\right. \tag{0.7}$$

pour touver une base orthonormé $\{\dot{e}_\rho, \dot{e}_\theta, \dot{e}_z\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.6.2

1. *Déterminer $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en fonction de e_ρ, e_θ et e_z.*
2. *Trouver le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction e_ρ, e_θ et e_z*
3. *Montrer que le système $(\dot{e}_\rho, \dot{e}_\theta, \dot{e}_z)$ est une base orthonormé.*

2.6.3 Coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes

Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes

Soit $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Soit le plan $\mathbb{R}^3$ muni du repère $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère M un point de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_M & = & \rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \\ y_M & = & \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \\ z_M & = & \rho \cos(\varphi). \end{array} \right. \tag{0.8}$$

ces deux expressions sont bien définies lorsque $\rho > 0$.

- (x_M, y_M, z_M) s'appellent les coordonnées cartésiennes du point M relativement au repère $\mathcal{R}$,
- (ρ, θ, φ) s'appellent les coordonnées sphériques.

On peut déterminer les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) du point M en fonction des coordonnées cartésiennes x , y et z :

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$$

$$\frac{y_M}{x_M} = \tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\tan\left(\frac{y_M}{x_M}\right)$$

$$\frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{z_M} = \tan(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi = arc\tan\left(\frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{z_M}\right)$$

Vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathcal{O}M} = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + \rho \cos(\varphi)\ \vec{k} = \rho \left(\sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + \cos(\varphi)\ \vec{k} \right)$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(\rho, \theta, \varphi) \mapsto f(\rho, \theta, \varphi) = \overrightarrow{\mathcal{O}M}$ une application. On peut écrire la dérivée de f par rapport à la variable ρ.

$$e_\rho = f'_\rho(\rho, \theta, \varphi)) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) = \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + \cos(\varphi)\ \vec{k}$$

la dérivée de f par rapport à la variable θ,

$$e_\theta = f'_\theta(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) = \rho \left(- \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{i} + \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{j} \right)$$

et la dérivée de f par rapport à la variable φ.

$$e_\varphi = f'_\varphi(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) = \rho \left(\cos(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \cos(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} - \sin(\varphi)\ \vec{k} \right)$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e_\rho & = & \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + \cos(\varphi)\ \vec{k}, \\ e_\theta & = & \rho \left(- \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{i} + \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{j} \right), \\ e_z & = & \rho \left(\cos(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + \cos(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} - \sin(\varphi)\ \vec{k} \right) \end{array} \right. \tag{0.9}$$

Le système $(e_\rho, e_\theta, e_\varphi)$ est libre et engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, alors $\{e_\rho, e_\theta, e_\varphi\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, appelée la base sphérique de $\mathbb{R}^3$.

$\{e_\rho, e_\theta, e_\varphi\}$ **est une base orthonormale**

Le système $\{e_\rho, e_\theta, e_\varphi\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans le sens des conditions suivantes

- $e_\rho \cdot e_\theta = 0$, $e_\rho \cdot e_\varphi = 0$ et $e_\varphi \cdot e_\theta = 0$
- $\|e_\rho\| = 1$
- $\|e_\theta\| = \rho \sin(\varphi)$
- $\|e_\varphi\| = \rho$

On peut normaliser les vecteur e_ρ, e_θ et e_φ dans le sens suivant : pour $\rho \neq 0$ et $\varphi \neq 0$ on pose

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{e}_\rho & = & e_\rho, \\ \dot{e}_\theta & = & \dfrac{1}{\rho \sin(\varphi)}\, e_\theta. \\ \dot{e}_\varphi & = & \dfrac{1}{\rho}\, e_\varphi. \end{array} \right. \tag{0.10}$$

pour touver une base orthonormé $\{\dot{e}_\rho, \dot{e}_\theta, \dot{e}_\varphi\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.6.3 *1. Déterminer $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en fonction de e_ρ, e_θ et e_φ.*

2. Trouver le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{O}M}$ en fonction e_ρ, e_θ et e_φ

3. Montrer que le système $(\dot{e}_\rho, \dot{e}_\theta, \dot{e}_\varphi)$ est une base orthonormé.

2.7 Exercices

Exercice 2.7.1 *Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ défini par*

$$f(1) = 1 \quad \textit{et} \quad f(\mathrm{i}) = \mathrm{j},$$

où $\mathrm{j} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. *Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.*
2. *Determiner le complexe z tel que $f(z) = \mathrm{i}$.*
3. *Soit f^{-1} l'application réciproque de f. Ecrire la matrice de f^{-1} relativement à la base $(1, \mathrm{i})$.*

Exercice 2.7.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i, j) une base de E. Soit f et g deux endomorphismes de E dont les matrices dans la base (i, j) sont respectivement :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que f et g sont inversibles,puis trouver les matrices de f^{-1} et g^{-1} dans la base (i, j).*
2. *Determiner dans la base (i, j) les matrices des endomorphismes suivants :*

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g).$$

3. *Trouver des relations entre x et y pour que les endomorphismes*

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g)$$

soient inversibles.

Exercice 2.7.3 *Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que f^2 soit l'endomorphisme nul.*

1. *Calculer $(id_E - f) \circ (id_E + f)$.*
2. *En déduire que $(id_E - f)$ et $(id_E + f)$ sont bijectifs. Quels sont les endomorphismes $(id_E - f)^{-1}$ et $(id_E + f)^{-1}$.*
3. *Vérifier les résultats précédents lorsque l'espace vectoriel E est de dimension 2 et lorsque f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base (i, j) fixée de E est :*
   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.7.4 *On note par O la matrice nulle et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordres 2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que*

$$\begin{cases} \alpha + \delta & = -1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma & = -2, \end{cases}$$

On désigne $E = \overline{< I, A >}$ l'espace engendré par les matrices I et A.

1. *Quelle est la dimension de E ?.*
2. *Vérifier que :*
$$A^2 = -A + 2.I.$$
   En déduire que A est inversible et que $A^{-1} \in E$.
3. *Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
4. *On prend $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.*
   (a) *Vérifier que la relation : $A^2 = -A + 2.I$, est satisfaite.*
   (b) *Préciser le noyau et l'image des endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base naturelle sont respectivement :*
$$A \quad \text{et} \quad A + 2.I.$$

Exercice 2.7.5 *Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. *Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base (e_1, e_2, e_3). A est-elle inversible ?*
2. *Déterminer Ker(f) et Im(f). Quel est le rang de f ?* **Justifier**
3. *Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de f, montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel puis déterminer sa base.*
4. *Déterminer une base de Ker(f) et une base de Im(f), puis montrer que $\mathbb{R}^3 = $ Ker$(f) \oplus$ Im(f).*
   **Donner une interprétation géométrique à $\mathcal{D}$, Ker(f) et Im(f).*
5. *Calculer $f \circ f(e_i)$, pour $i = 1, 2, 3$. En déduire l'expression de f^2 en fonction de f.*
   **L'endomorphisme f est-il un projecteur ? Trouver la matrice A^2 associée à f^2 relativement à la base (e_1, e_2, e_3).*
6. *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f^n = 3^{n-1} f$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.*
7. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver l'expression de $(I_3 + A)^n$ en fonction de n.*
   **Vérifier votre expression pour $n = 3$ en effectuant le produit matriciel.*

8. *Reprendre la question 7) pour* $(I_3 - A)^n$*, puis pour* $(3I_3 - 2A)^n$.
9. *Déterminer le polynôme caractéristique de* A*, puis trouver ses valeurs propres.*

Exercice 2.7.6 1. *Montrer que tout nombre complexe* z *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$z = x + y(1 + \mathrm{i}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

2. *Soit* $\mathcal{K}$ *l'ensemble des matrices de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x + 2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ *qui à tout* $z = x+y(1+\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ *associe* $\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x + 2y \end{pmatrix}$ *est une bijection.*

3. (a) *Montrer que, pour tout* $(z', z'') \in \mathbb{C}^2$*, on a :*

$$\begin{aligned} \Phi(z' + z'') &= \Phi(z') + \Phi(z''), \\ \Phi(z'z'') &= \Phi(z')\Phi(z''). \end{aligned}$$

   (b) *En déduire que* $(\mathcal{K}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

   (c) *Calcucler explicitement* M^{-1} *pour*

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x + 2y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Exercice 2.7.7 *Soit* $\mathbb{R}^3$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni de la base canonique* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *avec* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 1)$*. Soit* $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v = -5e_1 + 2e_2 + e_3$ *et* $w = -e_1 - 3e_2 + e_3$ *trois éléments de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer* $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$*. Que peut-on déduire ?*
2. *Calculer* $X = u + v$ *et* $Y = u + 3v - 5w$ *en fonction de* e_1, e_2 *et* e_3*. Le système* $\{X, Y, w\}$ *est-il libre ?*
3. *Vérifier que le système* $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$ *est une autre base de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Calculer* e_1, e_2 *et* e_3 *en fonction de* u, v *et* w.
5. *Calculer* $\det_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$ *et* $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w).\det_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$.
6. *Soient* f *et* g *deux endomorphismes de* $\mathbb{R}^3$ *tels que*

$$f(e_1) = u, \ f(e_2) = v \text{ et } f(e_3) = w,$$

$$g(u) = e_1, \ g(v) = e_2 \text{ et } g(w) = e_3.$$

   (a) *Déterminer les matrices* $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ *et* $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(g)$.

   (b) *En utilisant les questions précédentes, montrer que* f *et* g *sont des automorphismes d'espaces vectoriels.*

   (c) *En utilisant les questions précédentes, déduire* A^{-1} *et* B^{-1}.

Exercice 2.7.8 *Soient* $\mathbb{P}_3$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des polynômes de degré* ≤ 3 *et* $\{1, t, t^2, t^3\}$ *sa base canonique. On considère les polynômes suivants :*

$$B_0^3(t) = (1 - t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1 - t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1 - t) \quad \text{et} \quad B_3^3(t) = t^3.$$

$$H_0^3(t) = (1 - t)^2(2t + 1), \quad H_1^3(t) = t(1 - t)^2, \quad H_2^3(t) = t^2(t - 1) \quad \text{et} \quad H_3^3(t) = (-2t + 3)t^2.$$

1. *Quel est la dimension de* $\mathbb{P}_3$ *?* **Justifier**
2. *Montrer que* $(B_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ *et* $(H_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ *sont deux bases de* $\mathbb{P}_3$.
3. *Déterminer les matrices* A *et* B *dans* $\mathbb{R}^{(4\times 4)}$ *telles que*

$$\begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

   **Quelles sont les valeurs propres de* A *? Donner l'ordre de multiplicité de ces valeurs propres.*
4. *Montrer que* A *et* B *sont inversibles, calculer* A^{-1} *puis calculer le produit matriciel* BA^{-1}.
5. *En déduire les expressions des polynômes* H_i^3 $(i = 0, 1, 2, 3)$ *dans la base* $(B_i^3)_{i=0,1,2,3}$.

Chapitre 3

Systèmes linéaires et Méthode de Gauss

3.1 Généralités

Se donner un système d'équations linéaires, c'est se donner l'ensemble des relations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_i \quad = \quad b_i, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{0.1}$$

Ces relations s'écrivent sous la forme du système linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rl} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n & = b_1, \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n}x_n & = b_2, \\ \vdots & = \vdots, \\ \alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \ldots + \alpha_{m,n}x_n & = b_m \end{array} \right.$$

Vocabulaire et notations :

- Tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérfiant (0.1) ou (S) est appelé solution du système.
- La matrice $A = (\alpha_{i,j})$ est appelée matrice du système. Le rang de cette matrice est le rang du système.
- Matriciellement ce système, s'écrit $Ax = b$ où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont appelés les inconnues du système et b est le second membre du système.
- Le système s'écrit également $x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = b$, où A_i est la ième colonne de A. C'est l'écriture vectorielle du système.
- Un système est compatible s'il admet au moins une solution.

3.2 Système de Cramer et méthode de Gauss

3.2.1 Système de Cramer

Définition 3.2.1 *Un système linéaire est de Cramer si sa matrice est carrée inversible. Dans ce cas* $x = A^{-1}b$.

Théorème 3.2.1 *Si le système est de Cramer alors*

$$x_k = \frac{det(A_1, \ldots, A_{k-1}, b, A_{k+1}, \ldots, A_n)}{det(A)}.$$

Exemple 3.2.1 *Soit le système*

$$(S):\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 &= 3,\\ 2x_1+x_2+3x_3 &= 1,\\ -x_1+4x_2+3x_3 &= 2\end{cases}$$

$$x_1=\frac{1}{det(A)}\begin{vmatrix}3&2&1\\1&1&3\\2&4&3\end{vmatrix},\quad x_2=\frac{1}{det(A)}\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&3\\-1&2&3\end{vmatrix},\quad x_3=\frac{1}{det(A)}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\-1&4&2\end{vmatrix}$$

avec A est la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\-1&4&3\end{pmatrix}$,

$det(A)=-18$*, donc A est inversible et le système (S) est de Cramer. On obtient*

$$x_1=\frac{19}{18},\quad x_2=\frac{25}{18},\quad x_3=-\frac{5}{6}$$

Remarque 3.2.1
- *La méthode précédente ne peut être utilisée que si la matrice du système est inversible.*
- *La méthode de Cramer n'est pas pratique dans le cas ou la taille n de la matrice est importante, car elle nécessite le calcul de $n+1$ determinants de taille n chacun !*
- *Dans la pratique, on utilise la méthode de Gauss décrite ci-dessous. Cette méthode peut même être appliquée à des systèmes dont la matrice n'est pas inversible.*

3.2.2 Résolution du système triangulaire

Supposons que A est une matrice triangulaire suppérieure

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n}\\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & & a_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

La résolution du système $Ax=b$ s'effectue par (back substitution où backward substitution).
Elle consiste à calculer x_i en fonction de $x_n, x_{n-1},\dots,x_{i+1}$.

A étant une matrice inversible, alors $det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}\neq 0$ donc $a_{i,i}\neq 0$ pour tout $1\leq i\leq n$.

- Calculons d'abord $x_n=\dfrac{b_n}{a_{n,n}}$
- On reporte la valeur dans l'équation précédente pour calculer
$$x_{n-1}=\frac{b_{n-1}-a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}=\frac{b_{n-1}a_{n,n}-a_{n-1,n}b_n}{a_{n,n}a_{n-1,n-1}}$$
- Ainsi de suite, plus généralement, on obtient
$$x_i=\frac{b_i-\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}a_{i,j}x_j}{a_{i,i}},\quad \text{pour}\quad i=n,n-1,\dots,1$$

le coût de la résolution est mesuré en nombre d'opérations élémentaires appelé aussi **coût de calcul**. le calcul de x_i $(1\leq i\leq n)$ nécessite $2(n-i)+1$ opérations. On déduit que le coût de calcul des x_i est

$$\sum_{i=1}^{n}(2(n-i)+1)=2n^2-2\sum_{i=1}^{n}i+2n=2n^2-n(n+1)+n=n^2$$

opérations.

3.2.3 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss est basée essentiellement sur l'utilisation de combinaisons linéaires entre lignes (et/ou de permutations de lignes ou de colonnes) du système dans le but de transformer progressivement le système de départ en un système triangulaire supérieure plus facile à résoudre. Cette méthode est très utilisée dans la pratique et elle est à la base de plusieurs algorithmes de résolution de systèmes linéaires. Dans la suite, nous abordons le principe de cette méthode à l'aide de quelques exemples.

Exemple 3.2.2 *1. Soit le système*

$$(S):\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 &= 3,\\ 2x_1+x_2+3x_3 &= 1,\\ -x_1+4x_2+3x_3 &= 2\end{cases}$$

La matrice A est $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\-1&4&3\end{pmatrix}$ et le vecteur b est $b=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. Ecrivons le système précédent à l'aide du tableau 3 lignes 4 colonnes formé par les éléments de la matrice A du système et vecteur second membre b. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
[\,A\mid b\,] &= \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\2&1&3&1\\-1&4&3&2\end{array}\right]\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\\
&= \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&-3&1&-5\\0&6&4&5\end{array}\right]\begin{array}{c}L_1\leftarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}\\
&= \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&-3&1&-5\\0&0&6&-5\end{array}\right]\begin{array}{c}L_1\leftarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2\\L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{array}
\end{aligned}$$

On obtient $x_1=\frac{19}{18}$, $\quad x_2=\frac{25}{18}$, $\quad x_3=-\frac{5}{6}$.

2. Soit les systèmes suivants

$$(S_1):\begin{cases} x_1+x_2+2x_3 &= 2,\\ 2x_1+x_2-x_3 &= 3,\\ 3x_1+2x_2+x_3 &= 7\end{cases}\qquad (S_2):\begin{cases} x_1+x_2+2x_3 &= 1,\\ 2x_1+x_2-x_3 &= 4,\\ 3x_1+2x_2+x_3 &= 5\end{cases}$$

La matrice A est $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$ et les vecteur b_1 et b_2 sont respectivement $b_1=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$ et $b_2=\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$, $det(A)=0$, donc A n'est pas inversible et les système (S_1) et (S_2) ne sont pas de Cramer.
Les deux systèmes précédents ayant la même matrice A, écrivons les deux systèmes à l'aide du tableau 3 lignes 5 colonnes formé par les éléments de la matrice A et des vecteurs second membres b_1 et b_2. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
[\,A\mid b_1\mid b_2\,] &= \left[\begin{array}{ccc|c|c}1&1&2&2&1\\2&1&-1&3&4\\3&2&1&7&5\end{array}\right]\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\\
&= \left[\begin{array}{ccc|c|c}1&1&2&2&1\\0&-1&-5&-1&2\\0&-1&-5&1&2\end{array}\right]\begin{array}{c}L_1\leftarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1\end{array}\\
&= \left[\begin{array}{ccc|c|c}1&1&2&2&1\\0&-1&-5&-1&2\\0&0&0&2&0\end{array}\right]\begin{array}{c}L_1\leftarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2\\L_3\leftarrow L_3-L_2\end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 2, \\ -x_2 - 5x_3 & = -1, \\ 0 & = 2 \end{cases} \qquad (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 1, \\ -x_2 - 5x_3 & = 2, \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

On en déduit que le système (S_1) n'a pas de solutions et n'est donc pas compatible, de plus (S_2) possède une infinité de solutions de la forme $x_3 = \alpha$, $x_2 = -2 - 5\alpha$ et $x_1 = 4 + 3\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.2.4 Algorithme et principe de la méthode de Gauss

Les résolutions directes consistent à transformer le système $Ax = b$ en le système $Rx = c$ où R est une matrice triangulaire supérieure qu'on sait résoudre facilement.
On multiplie A par des matrices bien choisies, soit M le produit des ces matrices, on transforme alors le système $Ax = b$ en un nouveau système

$$MAx = Mb = c,$$

On détermine M de telle sorte que MA soit triangulaire où diagonale.

3.2.5 Élimination de Gauss

Pour résoudre le système $Ax = b$, le principe de la méthode de Gauss consiste à :

1. **Phase délimination** : prémultiplier A et le second membre b par des matrices bien choisies pour transformer le système $Ax = b$ en un système triangulaire supérieur ($Rx = c$) donc facile à résoudre (ohase de triangularisation)
2. **Remontée par back substitution** : Résoudre par la méthode de la remontée back substitution du système $Rx = c$ obtenu.

Description de la méthode :

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad (S^{(1)}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1, & (\mathbf{1}) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & b_2, & (\mathbf{2}) \\ \vdots & = & \vdots & (\mathbf{i}) \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & b_n, & (\mathbf{n}) \end{cases}$$

avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$.

– 1^{er}**-étape** : élimination de x_1 des équations $(\mathbf{2})$ jusqu'à $(\mathbf{n})$. On suppose que $a_{1,1} \neq 0$ (sinon on permute l'équation $(\mathbf{1})$ avec une équation $(\mathbf{i})$ du système tel que $a_{i,1} \neq 0$).
Puisque a est inversible, alors il existe i tel que $a_{i,1} \neq 0$ et pour éliminer x_1 de l'équation $(\mathbf{i})$ $(2 \le i \le n)$, on effectue la combinaison linéaire suivante entre l'équation $(\mathbf{1})$ et l'équation $(\mathbf{i})$: on remplace l'équation $(\mathbf{i})$ par l'équation

$$\boxed{\text{équation}(\mathbf{i}) - \frac{\text{équation}(\mathbf{1})}{a_{11}} \,.\, a_{i,1},}$$

Donc l'équation $(\mathbf{i})$ devient sous la forme suivante

$$\left(a_{i,1} - \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}}a_{i,1}\right)x_1 \quad + \quad \left(a_{i,2} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}a_{i,1}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{i,j} - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}a_{i,1}\right)x_j$$
$$+ \quad \left(a_{i,n} - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}a_{i,1}\right)x_n = b_i - \frac{b_1}{a_{1,1}}a_{i,1}$$

Posons

$$\ell_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}, \quad a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j} - \ell_{i,1} a_{1,j} \quad \text{et} \quad b_i^{(2)} = b_i - \ell_{i,1} b_1$$

alors le système devient :

$$(S^{(2)}) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ 0 \;\; x_1 + a_{2,2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)}, \\ \vdots & = & \vdots \\ 0 \;\; x_1 + a_{n,2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{n,n}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}, \end{array} \right.$$

Formulation matricielle : Posons

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -\ell_{2,1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\ell_{n,1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \ell_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}, \quad 2 \le i \le n$$

$$A^{(1)} = A, \quad b^{(1)} = b$$

$$A^{(2)} = L_1 \, A,$$

le système $(S^{(2)})$ équivalent à

$$A^{(2)}x = L_1 \, A^{(1)}x = L_1 b^{(1)} = b^{(2)}$$

D'où on obtient le système

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{(2)}x = b^{(2)}$$

où

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \ldots & \ldots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(2)} \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

– 2^{eme}**-étape** : élimination de x_2 des équations $(\mathbf{3})$ jusqu'à $(\mathbf{n})$. On suppose que $a_{2,2}^{(2)} \neq 0$ (sinon on permute l'équation $(\mathbf{2})$ avec une équation $(\mathbf{i})$ du système tel que $a_{i,2}^{(2)} \neq 0$).
Pour éliminer x_2 de l'équation $(\mathbf{i})$ $(3 \le i \le n)$ du système $A^{(2)}x = b^{(2)}$, on effectue la combinaison linéaire suivante entre l'équation $(\mathbf{2})$ et l'équation $(\mathbf{i})$: on remplace l'équation $(\mathbf{i})$ par l'équation

$$\boxed{\text{équation}(\mathbf{i}) - \frac{\text{équation}(\mathbf{2})}{a_{2,2}^{(2)}} \,.\, a_{i,2}^{(2)}}$$

Posons

$$\ell_{i,2} = \frac{a_{i,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}}, \quad a_{i,j}^{(3)} = a_{i,j}^{(2)} - \ell_{i,2} a_{2,j}^{(2)} \quad \text{et} \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \ell_{i,2} b_2^{(2)}$$

alors le système devient :

$$(S^{(3)}) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ 0\ x_1 + a_{2,2}^{(2)}x_2 + \ldots + \ldots + a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)}, \\ 0\ x_1 + 0\ x_2 + a_{3,3}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3,n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)}, \\ \vdots & = & \vdots \\ 0\ x_1 + 0\ x_2 + a_{n,3}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{n,n}^{(3)}x_n & = & b_n^{(3)}, \end{array} \right.$$

Formulation matricielle : Posons

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -\ell_{3,2} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\ell_{4,2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -\ell_{n,2} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \ell_{i,2} = \frac{a_{i,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}}, \quad 3 \leq i \leq n$$

$$A^{(1)} = A, \quad b^{(1)} = b$$

$$A^{(2)} = L_1\, A, \quad \text{et} \quad A^{(3)} = L_2 A^{(2)} = L_2 L_1\, A,$$

le système $(S^{(3)})$ équivalent à

$$A^{(3)}x = L_2 L_1\, A^{(1)}x = L_2 L_1 b^{(1)} = b^{(3)}$$

D'où on obtient le système

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{(3)}x = b^{(3)}$$

où

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \ldots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{3,3}^{(3)} & \ldots & a_{3,n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(3)} & \ldots & a_{n,n}^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(3)} \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

– k^{eme}**-étape** : élimination de x_k des équations $(\mathbf{k+1})$ jusqu'à $(\mathbf{n})$. On suppose que $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ (sinon on permute l'équation $(\mathbf{k})$ avec une équation $(\mathbf{i})$ $(i > k)$ du système tel que $a_{i,k}^{(k)} \neq 0$).
Pour éliminer x_k de l'équation $(\mathbf{i})$ $(k \leq i \leq n)$ du système $A^{(k)}x = b^{(k)}$, on effectue la combinaison linéaire suivante entre l'équation $(\mathbf{k})$ et l'équation $(\mathbf{i})$: on remplace l'équation $(\mathbf{i})$ par l'équation

$$\boxed{\text{équation}(\mathbf{i}) - \frac{\text{équation}(\mathbf{k})}{a_{k,k}^{(k)}}\ .\ a_{i,k}^{(k)}}$$

Posons

$$\ell_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \ell_{i,k} a_{k,j}^{(k)} \quad \text{et} \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{i,k} b_k^{(k)}$$

alors le système devient :

$$(S^{(k+1)}) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ 0\ x_1 + a_{2,2}^{(2)}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots + a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)}, \\ 0\ x_1 + 0\ x_2 + a_{3,3}^{(3)}x_3 + \ldots + \ldots + a_{3,n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)}, \\ \ddots & = & \vdots \\ 0\ x_1 + 0\ x_2 + \ldots + a_{k,k}^{(k)}x_k + \ldots + a_{k,n}^{(k)}x_n & = & b_k^{(k)}, \\ \vdots & = & \vdots \\ 0\ x_1 + 0\ x_2 + \ldots + a_{n,k}^{(k)}x_k + \ldots + a_{n,n}^{(k)}x_n & = & b_n^{(k)}, \end{array} \right.$$

Formulation matricielle : Posons

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -\ell_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\ell_{n,k} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \ell_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad k+1 \leq i \leq n$$

$$A^{(1)} = A, \quad b^{(1)} = b$$

$$A^{(2)} = L_1\, A, \quad \ldots \quad , A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} = L_k \ldots L_2 L_1\, A,$$

le système $(S^{(k+1)})$ équivalent à

$$A^{(k+1)}x = L_k \ldots L_2 L_1\, A^{(1)}x = L_k \ldots L_2 L_1 b^{(1)} = b^{(k+1)}$$

D'où on obtient le système

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$$

Au bout de $(n-1)$-étape, on aboutit au système suivant

$$A^{(1)} = A, \quad b^{(1)} = b$$

$$A^{(2)} = L_1\, A, \quad \ldots \quad , A^{(n)} = L_{n-1} A^{(n-1)} = L_{n-1} \ldots L_2 L_1\, A,$$

le système $(S^{(n)})$ équivalent à

$$A^{(n)}x = L_{n-1} \ldots L_2 L_1\, A^{(1)}x = L_{n-1} \ldots L_2 L_1 b^{(1)} = b^{(n)}$$

D'où on obtient le système

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{(n)}x = b^{(n)}$$

avec $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure.
Pour résoudre le système $Ax = b$, on résout le système équivalent $Rx = c$ avec

$$R = A^{(n)} = L_{n-1} L_{n-2} \ldots L_2 L_1\, A = M\, A \quad \text{où} \quad M = L_{n-1} L_{n-2} \ldots L_2 L_1$$

et

$$c = b^{(n)} = L_{n-1}L_{n-2}\dots L_2L_1\, b = M\, b \quad \text{où} \quad M = L_{n-1}L_{n-2}\dots L_2L_1.$$

Dans la pratique : On ne calcule pas le produit $L_{n-1}L_{n-2}\dots L_2L_1$ mais plutot $R = L_{n-1}L_{n-2}\dots L_2L_1$. Le calcul de R se fait par étape (où bien selon plusieurs algorithmes).
On ne stocke que la matrice A (n^2 éléments de type réel) à la fin de la triangularisation on n'aura plus besoin de la matrice A, mais, plutot on travaillera sur la matrice R. Donc A sera stochée dans la partie mémoire resrvée pour le stockage de A.
L'algorithme (étapes de calcul) est donné dans un language naturel. Pour pouvoir le mettre en œuvre sur un ordinateur il faut le traduire en un language de programmation tel que : Matlab, C, C++, Fortron, Java, ...

1. **Algorithme 1** :
   Pour chaque étape k **:** $k = 1, \dots, n-1$

   $$\textbf{on calcule} \quad \begin{cases} L_k\, A^{(k)} & : \quad A^{(k+1)} \leftarrow L_k\, A^{(k)}, \\ L_k\, b^{(k)} & : \quad b^{(k+1)} \leftarrow L_k\, b^{(k)}, \end{cases}$$

   fin pour.
   Pour pouvoir traduire l'algorithme 1 en language de programmation, on doit l'affiner, c'est-à-dire l'écrire à l'aide des opérations élémentaires, soit l'algorithme 2 obtenu après avoir affiné l'algorithme 1.

2. **Algorithme 2** : On considère les deux phrases mathématiques suivantes :

   $$(*) \quad a_{i,j}^{(k+1)} \leftarrow a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}.a_{k,j}^{(k)}$$

   $$(**) \quad b_i^{(k+1)} \leftarrow b_i^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}.b_k^{(k)}$$

   ```
   Pour k=1...n-1, faire
          Pour chaque ligne i (k<i<= n), faire
                 pour chaque indice j de la ligne i, faire
                    écrire ici la phrase mathématique (∗)
                 Fin pour j
                    écrire ici la phrase mathématique (∗∗)
          Fin pour i
   Fin pour k
   ```

   en réalité, les instructions

   $$a_{i,j}^{(k+1)} \leftarrow a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}.a_{k,j}^{(k)} \quad \text{et} \quad b_i^{(k+1)} \leftarrow b_i^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}.b_k^{(k)}$$

   seront remplacées par les instructions (affectation)

   $$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}.a_{k,j} \quad \text{et} \quad b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}.b_k$$

   Le signe $\leftarrow$ où bien := veut dire que $x = a_{i,j}^{(k+1)}$ sera remplacé par $y = a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}.a_{k,j}^{(k)}$ Autrement dit : dans la zone mémoire qui représente x on met la valeur de y.

```
Pour k=1...n−1, faire
      Pour chaque ligne i (k<i<= n), faire
            pour chaque indice j de la ligne i, faire
               a[i,j]:=a[i,j]−a[i,k]/a[k,k]∗a[k,j]
            Fin pour j
               b[i]:=b[i]−a[i,k]/a[k,k]∗b[k]
      Fin pour i
Fin pour k
```

3. **Algorithme 3** :

```
For k=1..n−1,
      For i=k+1..n,
            For j=k+1..n,
               a[i,j]:=a[i,j]−a[i,k]/a[k,k]∗a[k,j]
            End j
               b[i]:=b[i]−a[i,k]/a[k,k]∗b[k]
      End i
End k
```

3.3 Résolution d'un système linéaire dans le cas général

Soit le système de rang r donné par :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n & = & b_1, \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \\ \alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \ldots + \alpha_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

3.3.1 Système homogène

Dans le cas où $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, le système obtenu de (S) est appelé un système homogène et est noté (S_h). Ce système est toujours compatible, car il admet au moins la solution $(0, 0, \ldots, 0)^T$. La matrice A de ce système peut être considérée comme celle d'une application linéaire f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Determiner la solution de ce système équivaut donc à rechercher le noyau de f. Comme f est de rang r, alors le sous espace vectoriel formé des solutions de (S_h) est de dimension $n - r$ (cf Théorème de la dimension).

Théorème 3.3.1 *L'ensemble des solutions du système homogène forme un sous espace vectoriel de dimension $n - r$ où r est le rang du système.*

Le système étant de rang r, on peut extraire de la matrice A du système un determinant D_r non nul de taille r. Comme on peut changer l'ordre des inconnues du système, on peut toujours supposer que D_r est formé par les r premières colonnes de A. i.e. $D_r = |a_{i,j}|$ avec $i, j \in \{1, \ldots, r\}$.
Dans ce cas, les équations dont les indices sont ceux des lignes de D_r s'appellent équations principales et les inconnues

dont les indices sont ceux des colonnes de D_r s'appellent inconnues principales. De plus on montre que (S_h) a les mêmes solutions que le système (S_{hr}) suivant :

$$(S_{hr}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,r}x_r & = & -\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_{1,i}x_i, \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,r}x_r & = & -\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_{2,i}x_i, \\ & \vdots & \\ \alpha_{r,1}x_1 + \alpha_{r,2}x_2 + \ldots + \alpha_{r,r}x_r & = & -\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_{r,i}x_i \end{array} \right.$$

Ainsi, pour résoudre (S_h), il suffit de donner des valeurs arbitraires aux inconnues non principales $x_{r+1}, \ldots, x_n$ et de résoudre (S_{hr}) par la méthode de Cramer ou de Gauss pour determiner les inconnues principales.

Exemple 3.3.1 *Soit à résoudre le système*

$$(S_{hr}) : \left\{ \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 & = 0 \end{array} \right.$$

Calculons le rang de la matrice A de ce système, on a alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

et donc

Ainsi, on voit qu'il existe un determinant (formé des colonnes 1, 2 et 4 ou des colonnes 1, 2 et 5) de taille 3 non nul.
Considérons le determinant formé des colonnes 1, 2 et 4 et donnons des valeurs arbitraires à x_3 et x_5. i.e. $x_3 = \alpha$ et $x_5 = \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$(S_{hr}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = x_3 - x_5 & = \alpha - \beta, \\ x_2 - 2x_4 & = -x_3 - 2x_5 & = -\alpha - 2\beta, \\ 2x_1 + x_2 & = 5x_3 + 4x_5 & = 5\alpha + 4\beta \end{array} \right.$$

On résout alors ce nouveau système qui est de Cramer en utilisant la méthode de Cramer ou celle de Gauss, on a alors $x_1 = 3\alpha + 3\beta$, $x_2 = -\alpha - 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 0$ et $x_5 = \beta$.
Finalement, l'ensemble des solutions (S) du système est de dimension 2 et est donné par

$$S = \{(3\alpha + 3\beta, -\alpha - 2\beta, \alpha, 0, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =< (3, -1, 1, 0, 0), (3, -2, 0, 0, 1) > .$$

3.3.2 Cas général

Reprenons le système (S), et soit r le rang du système

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n & = & b_1, \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \\ \alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \ldots + \alpha_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

On définit de la même façon que pour le système homogène (S_h) la notion de determinant principal, d'inconnues et de colonnes principales. Supposons alors que $D_r = |a_{i,j}|$, $i, j \in \{1, \ldots, r_g\}$.

Théorème 3.3.2 *Pour que le système (S) soit compatible, il faut et il suffit que les $m-r$ relations suivantes soient vérifiées*

Remarque 3.3.1 *Les $n-r$ determinants précédents s'appellent les determinants caractéristiques du système.*

Théorème 3.3.3 *Si un système linéaire est compatible, sa résolution équivaut à celle d'un système quelconque d'équations principales. Dans ce cas, on donne des valeurs arbitraires aux inconnues non principales et les inconnues principales sont alors déterminées par un système de Cramer.*

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 *On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{ll} (1+\mathrm{i})x+(1+2.\mathrm{i})y & =1+5.\mathrm{i} \\ (3-\mathrm{i})x+(4-2.\mathrm{i})y & =2-\mathrm{i}. \end{array}\right. \tag{0.2}$$

d'inconnus complexes x et y. On pose $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. *Montrer qu'on peut écrire le système (0.2) sous la forme suivante :*

$$A.X=b$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à determiner et $b=\begin{pmatrix} 1+5.\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$

2. *Montrer que la matrice A est inversible, puis trouver son inverse A^{-1}.*
3. *Ecrire $X=A^{-1}b$ et calculer x et y.*

Exercice 3.4.2

1. *Soit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.*
**Montrer que l'application $\Phi:\ (f,g)\mapsto\Phi(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$ définit une forme bilinéaire sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.*
Φ est-elle symétrique ?
2. *On considère une matrice carrée inversible A d'ordre n, dont les coefficients appartiennent à un corps commutatif $\mathbb{K}$; on note P le polynôme caractéristique de A.*
**Montrer que pour $x\neq 0$, le polynôme caractéristique R de A^{-1} s'écrit sous la forme suivante :*

$$R(x)=\frac{(-1)^n x^n}{P(0)}P\left(\frac{1}{x}\right) \quad (*).$$

**Justifier que pour $x=0$, l'expression $(*)$ est valable du point de vue d'analyse.*

3. *Vérifier que le système suivant est compatible*

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+2x_2-x_3+x_4+3x_5 & =0, \\ x_2+x_3+2x_4-2x_5 & =0, \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5 & =0 \end{array}\right.$$

puis le résoudre dans $\mathbb{R}^5$. Montrer que l'ensemble des solutions est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 3.4.3 *Soit a un nombre réel, on considère le système d'équations linéaires suivant*

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ ax + y + az = -1 \\ a^2x + ay + z = 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que le système $(\mathcal{P})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \notin \{-1, 1\}$. Dans ce cas, résoudre le système $(\mathcal{P})$ par la méthode de Gauss.*
2. *Discuter l'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ dans le cas $a = -1$ (Toujour par la méthode de Gauss). L'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
3. *Discuter l'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ dans le cas $a = 1$ (Toujour par la méthode de Gauss). L'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 3.4.4 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α la matrice carrée donnée par $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.*

1. *Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est inversible.*
2. *Calculer la matrice A_α^{-1} pour α appartenant à $\mathcal{I}$.*
3. *En déduire, lorsque $\alpha \in \mathcal{I}$, la solution du système $(\mathcal{P}) : \begin{cases} \alpha\, x + 0y - z = -1 \\ 2x + \alpha\, y + z = 1 \\ -4x - y + \alpha\, z = 1 \end{cases}$*

Exercice 3.4.5

1. *Soit $\mathcal{C}'([a,b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions dérivables sur $[a,b]$.*
   **Montrer que l'application $\Phi :\ (f,g) \mapsto \Phi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f'(t)g'(t)dt$ définit une forme bilinéaire sur $\mathcal{C}'([a,b], \mathbb{R})$. Φ est-elle symétrique ?*
2. *Soit A une matrice carrée d'ordre 3 dont les valeurs propres sont notées par λ_1, λ_2 et λ_3.*
   (a) *Donner les expressions de "$\det(A)$" et "$\mathrm{tr}(A)$" en fonction λ_1, λ_2 et λ_3.*
   (b) *Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la formr :*
   $$P(x) = -x^3 + \mathrm{tr}(A)x^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii})\right) x + \det(A)$$
   où A_{ii} est la sous matrice de A en enlevant le i^{eme} ligne et la i^{eme} colonne.
   (c) *Montrer que si $\lambda_1 = 1$ alors*
   $$\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii}) = \mathrm{tr}(A) + \det(A) - 1,$$
   puis exprimer ce résultat en fonction de λ_2 et λ_3.
   (d) *On suppose que $\lambda_1 = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. Trouver une relation entre λ_2 et λ_3, puis calculer λ_2 telle que $\sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii}) = 0$.*
3. **Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et calculer son indice de nilpotence p. Calculer "$\exp(tN)$" pour tout réel t.*
   **Montrer que le système $\{v, Nv, N^{p-1}v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout vecteur non nul v de $\mathbb{R}^3$.*
4. *Vérifier que le système suivant est compatible*
   $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= -4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 &= 9 \end{cases}$$
   puis le résoudre dans $\mathbb{R}^5$. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est-il un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$?.

Bibliographie

[1] Deschamps C. et A. Warusfel, *Algèbre*, Mathématiques 1^{re} année : Cours et exercices corrigés, MPSI, PCSI, PTSI. Dunod, Paris, 1999.