Solutions de Série N^{o}1 : S-e. supplémentaires et Coordonnées sphériques

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que : $f \circ f = f$.
   Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
   (a) Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

Solution :

1. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$.
   (a) Montrons que pour tout $x \in E$, on a : $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$: soit $x \in E$ alors $x - f(x) \in E$ et

   $$f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = (1-1)f(x) = 0.f(x) = 0_E$$

   car f est linéaire et $f \circ f(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.
   donc $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Montrons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$: comme $f \circ f = f$ alors f est un projecteur, donc on peut parler d'une somme directe de type $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Maintenant, pouvons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
      i) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x \in \mathrm{Im}(f)$, donc

      $$\begin{cases} f(x) = 0_E \\ x = f(y) \quad \text{où} \quad y \in E, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0_E \\ f(x) = f \circ f(y) = f(y) = 0_E \quad \text{où} \quad y \in E, \end{cases}$$

      car $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $f \circ f = f$. Et, comme $x = f(x)$; il en résulte que $x = 0_E$, par conséquent
      $$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_E\}$$
      or $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, d'où $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
      ii) Soit $x \in E$, alors on peut écrire $x = (x - f(x)) + f(x)$.
      Or d'après la question 1. on a $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, alors $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

   D'après i) et ii), on obtient $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
   (a) Montrons que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E : en effet, on pose $g = f - \mathrm{Id}_E$ et $h = f + \mathrm{Id}_E$. D'après le cours on sait que $(\mathscr{L}(E), +, \times)$ est un espace vectoriel et comme f et Id_E sont 2 éléments dans $\mathscr{L}(E)$ alors $g \in \mathscr{L}(E)$ et $h \in \mathscr{L}(E)$. Or le noyau d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. D'où E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E puisque g et h sont linéaires.
   (b) Montrons que $E = E_1 \oplus E_2$: en effet,

i. Montrons que tout $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$: soit $x \in E$, alors on a

$$x = \frac{1}{2}(f(x)+x) - \frac{1}{2}(f(x)-x) = x_1 + x_2$$

où $x_1 = \frac{1}{2}(f(x)+x)$ et $x_2 = -\frac{1}{2}(f(x)-x)$.
Or

$$\begin{aligned}(f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}(f(x)+x)\right) &= \frac{1}{2}\left((f-\mathrm{Id}_E)(f(x)+x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f^2(x)+f(x)-f(x)-x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x+f(x)-f(x)-x\right) \quad \text{car} \quad f\circ f(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x\end{aligned}$$

$$(f - \mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{2}(f(x)+x)\right) = \frac{1}{2}(1-1)\left(x+f(x)\right) = 0\left(x+f(x)\right) = 0_E$$

alors $\frac{1}{2}(f(x)+x) \in E_1$ et de même on a

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id}_E)\left(-\frac{1}{2}(f(x)-x)\right) &= -\frac{1}{2}\left((f+\mathrm{Id}_E)(f(x)-x)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(f^2(x)-f(x)+f(x)-x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x-f(x)+f(x)-x\right) \quad \text{car} \quad f\circ f(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x \\ &= -\frac{1}{2}(1-1)\left(f(x)-x\right) = 0\left(x+f(x)\right) = 0_E\end{aligned}$$

alors $-\frac{1}{2}(f(x)-x) \in E_2$. Donc $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = \frac{1}{2}(f(x)+x) \in E_1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}(f(x)-x) \in E_2$.

ii. Montrons que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$: en effet, d'abord $\{0_E\} \in E_1 \cap E_2$ puisque E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Soit $x \in E_1 \cap E_2$ alors $x \in E_1$ et $x \in E_2$; donc on a

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\quad\Leftrightarrow\quad f(x) - x = 0_E \\ x \in E_2 &\quad\Leftrightarrow\quad f(x) + x = 0_E \end{aligned}$$

donc $f(x) - x - (f(x)+x) = 0_E - 0_E = (1-1)0_E = 0 \times 0_E = 0_E$, soit $(1-1)f(x) - (1+1)x = 0_E$; soit encore $0 \times f(x) - 2x = -2x = 0_E$; d'où $x = 0_E$;
ce qui montre que $x \in \{0_E\}$; d'où $E_1 \cap E_2 \subset \{0_E\}$
finalement, il vient $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

d'après i. et ii. on a $E = E_1 \oplus E_2$.

$\square$

Exercice 2

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base de F.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2,1,1)$.

Solution : Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0\}$$

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: en effet,
   (a) $F \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ puisque $0 + 0 - 2 \times 0 = (1+1-2)0 = 0 \times 0 = 0$.
   (b) F est stable par l'addition (loi interne de $\mathbb{R}^3$) : en effet, soient $X = (x,y,z)$ et $Y = (x',y',z')$ deux éléments dans F, alors

   $$x + y - 2z = 0 \quad \text{et} \quad x' + y' - 2z' = 0$$

   par l'addition des deux équations, il vient

   $$x+y-2z+x'+y'-2z' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+x')+(y+y')-2(z+z') = 0 \quad \text{car } (\mathbb{R},+) \text{ est abélien}$$

   donc $X + Y = (x + x', y + y', z + z')$ satisfait l'équation de F ; d'où $X + Y \in F$.
   (c) F est stable par la multiplication (loi externe de $\mathbb{R}^3$) : en effet, soient $X = (x,y,z)$ un élément dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

   $$x + y - 2z = 0$$

   par la multiplication de l'équation fois λ, il vient

   $$\lambda(x + y - 2z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda x) + (\lambda y) - 2(\lambda z) = 0$$

   donc $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ satisfait l'équation de F ; d'où $\lambda X \in F$.

   D'après (a), (b) et (c) on obtient F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminons une base de F : en effet, soit $X = (x,y,z)$ alors les composantes (x,y,z) de X sont caractérisées par l'équation

   $$x + y - 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 2z$$

   donc $X = (x,y,z) = (x,-x+2z,z) = (x,-x,0) + (0,2z,z) = x(1,-1,0) + y(0,2,1) = xv_1 + yv_2$ où $v_1 = (1,-1,0)$ et $v_2 = (0,2,1)$; d'où le système $\{v_1; v_2\}$ engendre F.
   le système $\{v_1; v_2\}$ est libre, en effet, soient α et β tels que $\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors

   $$\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 = \alpha(1,-1,0) + \beta(0,2,1) = (\alpha, -\alpha + 2\beta, \beta) = (0,0,0)$$

   donc $\alpha = \beta = 0$; d'où le système $\{v_1; v_2\}$ engendre F et il est libre ; ce qui montre que le système $\{v_1; v_2\}$ où $v_1 = (1,-1,0)$ et $v_2 = (0,2,1)$ est une base de F.
3. Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2,1,1)$: en effet, si le sous-espace vectoriel de G engendré par le vecteur $u = (2,1,1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$, alors le système $\{v_1; v_2\} \cup \{u\}$ serait une base de $\mathbb{R}^3$; donc il suffit de montrer que le système $\{v_1; v_2; u\}$ est une base dans $\mathbb{R}^3$;
   comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, alors il suffit de montrer que le système $\{v_1; v_2; u\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Pour cela, soient α, β et γ des réels tels que $\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 + \gamma\, u = (0,0,0)$; montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a

   $$\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 + \gamma\, u = \alpha(1,-1,0) + \beta(0,2,1) + \gamma(2,1,1) = (\alpha + 2\gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma, \beta + \gamma) = (0,0,0)$$

   ce qui implique

   $$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \\ 2\gamma - 2\gamma + \gamma = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma = 0 \end{array} \right.$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$; ce qui montre que le système $\{v_1; v_2; u\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$; d'où le système $\{v_1; v_2; u\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$; ce qui prouve que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2, 1, 1)$.
Remarque : F est un plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par le système $\{v_1; v_2\}$ où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$ et G est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (2, 1, 1)$.

$\square$

Exercice 3

On considère $\mathbb{P}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1 + X, \quad P_2 = (1 + X)^2, \quad \text{et} \quad P_3 = (1 + X)^3.$$

1. Montrer que le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{P}_3[X]$
2. Soit $P = -3X + X^3$, écrire P comme combinaison linéaire dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3).
3. Trouver une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

Solution : Considèrons l'espace vectoriel $\mathbb{P}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3. Soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1 + X, \quad P_2 = (1 + X)^2, \quad \text{et} \quad P_3 = (1 + X)^3.$$

1. Montrons que le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{P}_3[X]$: en effet, comme le système $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_3[X]$, alors $\dim(\mathbb{P}_3[X]) = 4$, alors il suffit de montrer que le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre. D'abord, on a

$$\begin{array}{rcl} P_0 & = & 1 \\ P_1 & = & 1 + X \\ P_2 & = & 1 + 2X + X^2 \\ P_3 & = & 1 + 3X + 3X^2 + X^3. \end{array}$$

Soient α, β, γ et λ des réels tels que $\alpha\, P_0 + \beta\, P_1 + \gamma\, P_2 + \lambda\, P_3 = 0$, alors montrons que $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$? Par calcul, on a

$$\alpha\, P_0 + \beta\, P_1 + \gamma\, P_2 + \lambda\, P_3 = (\alpha + \beta + \gamma + \lambda)1 + (\beta + 2\gamma + 3\lambda) + (\gamma + 3\lambda)X^2 + \lambda\, X^3 = 0$$

comme $\{1, X, X^2, X^3\}$ est libre, alors

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma + \lambda = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\lambda = 0 \\ \gamma + 3\lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} \lambda = 0 \\ \gamma = -3\lambda = 3 - \times 0 = 0 \\ \beta = -2\gamma - 3\lambda = -2 \times 0 - 3 \times 0 = 0 \\ \alpha = -\beta - \gamma - \lambda = 0 + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$; d'où le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre ; finalement le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_3[X]$.

2. Soit $P = -3X + X^3$, écrivons P comme combinaison linéaire dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3) : en effet, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_0 & = & 1 \\ P_1 & = & 1 + X \\ P_2 & = & 1 + 2X + X^2 \\ P_3 & = & 1 + 3X + 3X^2 + X^3. \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & P_0 \\ X & = & P_1 - 1 = P_1 - P_0 \\ X^2 & = & P_2 - 1 - 2X = P_2 - P_0 - 2(P_1 - P_0) = P_2 - 2P_1 + P_0 \\ X^3 & = & P_3 - 1 - 3X - 3X^2 = P_3 - P_0 - 3(P_1 - P_0) - 3(P_2 - 2P_1 + P_0) \\ & = & P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0 \end{array} \right.$$

alors la combinaison linéaire du polynôme $P = -3X + X^3$ dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est

$$P = -3X + X^3 = -3(P_1 - P_0) + P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0 = -3P_1 + 3P_0 + P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0$$

d'où $P = 2P_0 + 0P_1 - 3P_2 + 1P_3$.

3. Trouvons une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

d'après les calculs de la question 2. on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P_0 & = & 1 + 0\,X + 0\,X^2 + 0\,X^3 \\ P_1 & = & 1 + 1\,X + 0\,X^2 + 0\,X^3 \\ P_2 & = & 1 + 2X + 1\,X^2 + 0\,X^3 \\ P_3 & = & 1 + 3X + 3X^2 + X^3. \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & 1P_0 + 0P_1 + 0P_2 + 0P_3 \\ X & = & -1P_0 + 1P_1 + 0P_2 + 0P_3 \\ X^2 & = & 1P_0 - 2P_1 + 1P_2 + 0P_3 \\ X^3 & = & -1P_0 + 3P_1 - 3P_2 + 1P_3 \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice B est la matrice inverse de A, notée A^{-1}, soit $AA^{-1} = A^{-1}A = I_4$ où I_4 est la matrice identité de taille 4×4, soit

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 4

Soit E l'espace physique muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi/2]$. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon ρ tel que $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k})} = \varphi$ et M' la projection orthogonale de M sur le plan (xOy) tel que $\widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM'})} = \theta$

1. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
3. Trouver les expressions des vecteurs $\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$, $\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$.

4. Calculer $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ en fonction de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.
5. Que peut-on déduire ?

Solution : Soit E l'espace physique muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi/2]$. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon ρ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}}) = \varphi$ et M' la projection orthogonale de M sur le plan (xOy) tel que $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$

1. Déterminons les coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$: D'après la Figure (1) on peut écrire
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM'} + Z_M \overrightarrow{k}$$

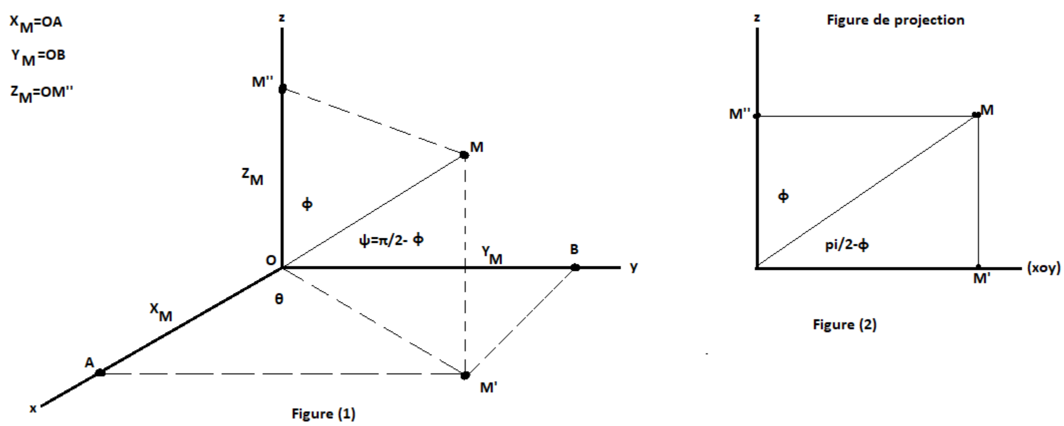

Figure 1 – La figure décrit les hypothèses de l'exercice

d'après Figure (2), le triangle $(OM''M)$ est rectangle en M'' dont l'hypothénuse est $OM = \rho$, alors
$$\cos(\varphi) = \frac{OM''}{OM} = \frac{Z_M}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad Z_M = \rho\cos(\varphi) \quad (\heartsuit)$$
$$\sin(\varphi) = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM'}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad OM' = \rho\sin(\varphi) \quad (\spadesuit)$$
ceci d'une part et d'autre par le triangle (OAM') est rectangle en A dont l'hypothénuse est OM', alors
$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{AM'}{OM'} = \frac{Y_M}{OM'} \quad \Leftrightarrow \quad Y_M = OM'\sin(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{OA}{OM'} = \frac{X_M}{OM'} \quad \Leftrightarrow \quad X_M = OM'\cos(\theta) \end{aligned}$$
d'après $(\spadesuit)$ on a $OM' = \rho\sin(\varphi)$, on obtient
$$\begin{aligned} X_M &= OM'\cos(\theta) = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ Y_M &= OM'\sin(\theta) = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ Z_M &= \rho\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Remarque : si on travaillait avec $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, alors les coordonnées seraient

$$\begin{aligned} X_M &= OM' \cos(\theta) = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ Y_M &= OM' \sin(\theta) = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ Z_M &= \rho \sin(\varphi) \end{aligned}$$

car tout simplement lorsqu'on remplace φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, alors

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) &= \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(\varphi) + \sin(\frac{\pi}{2}) \sin(\varphi) = 0 \cos(\varphi) + 1 \sin(\varphi) = \sin(\varphi) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) &= \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(\varphi) - \cos(\frac{\pi}{2}) \sin(\varphi) = 1 \cos(\varphi) + 0 \sin(\varphi) = \cos(\varphi) \end{aligned}$$

2. Déterminons le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$: d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} X_M &= \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ Y_M &= \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ Z_M &= \rho \cos(\varphi) \end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{i} + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{j} + \rho \cos(\varphi) \overrightarrow{k}.$$

3. Les expressions des vecteurs $\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$, $\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$: on considère $\overrightarrow{OM}$ comme étant une application dépendant de trois variables (ρ, θ, φ), alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_\rho} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{i} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{j} + \cos(\varphi) \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_\theta} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{i} + \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{j} + 0 \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_\varphi} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \overrightarrow{i} + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \overrightarrow{j} - \rho \sin(\varphi) \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

On remarque que $\overrightarrow{e_\rho}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ dans le sens où

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{e_\rho}.$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_\rho} \\ \overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{e_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & 0 \\ \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{pmatrix}$$

la matrice

$$A(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & 0 \\ \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice de passage du système $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ au système $\{\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\}$.

4. Calculons $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ en fonction de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$. D'abord on effectue un changement sur les vecteurs

$$\begin{aligned} \dot{e}_\rho &= \overrightarrow{e_\rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{i} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{j} + \cos(\varphi) \overrightarrow{k} \\ \dot{e}_\theta &= \frac{1}{\rho \sin(\varphi)} \overrightarrow{e_\theta} = -\sin(\theta) \overrightarrow{i} + \cos(\theta) \overrightarrow{j} \\ \dot{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \overrightarrow{e_\varphi} = \cos(\theta) \cos(\varphi) \overrightarrow{i} + \sin(\theta) \cos(\varphi) \overrightarrow{j} - \sin(\varphi) \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

alors on a

$$\overrightarrow{k} = \cos(\varphi)\,\dot{e}_\rho - \sin(\varphi)\,\dot{e}_\varphi = \cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho} - \frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} \sin(\varphi)\,\dot{e}_\rho + \cos(\varphi)\,\dot{e}_\varphi &= \cos(\theta)\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{j} \\ \dot{e}_\theta &= -\sin(\theta)\,\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{j} &= \sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,\dot{e}_\rho + \sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,\dot{e}_\varphi + \cos(\theta)\,\dot{e}_\theta \\ \overrightarrow{j} &= \sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho}\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi} \end{aligned}$$

de la même façon il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i} &= \cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,\dot{e}_\rho + \cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,\dot{e}_\varphi - \sin(\theta)\,\dot{e}_\theta \\ \overrightarrow{i} &= \cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho} - \frac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi} \end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i} &= \cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho} - \frac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi} \\ \overrightarrow{j} &= \sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho}\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi} \\ \overrightarrow{k} &= \cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho} - \frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi} \end{aligned}$$

5. On peut en déduire que le passage de la base cartésienne $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ à la base sphérique $\{\overrightarrow{e_\rho}; \overrightarrow{e_\theta}; \overrightarrow{e_\varphi}\}$ se fait à travers la matrice

$$A(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\sin(\varphi) & \sin(\theta)\,\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) & \rho\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) & 0 \\ \rho\,\cos(\theta)\,\cos(\varphi) & \rho\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi) & -\rho\,\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

et on déduit que le système $\{\overrightarrow{e_\rho}; \overrightarrow{e_\theta}; \overrightarrow{e_\varphi}\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$; et, à chaque point M de $\mathbb{R}^3$ relativement au repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on associe un repère sphérique $(M; \overrightarrow{e_\rho}; \overrightarrow{e_\theta}; \overrightarrow{e_\varphi})$. Voir la figure suivante

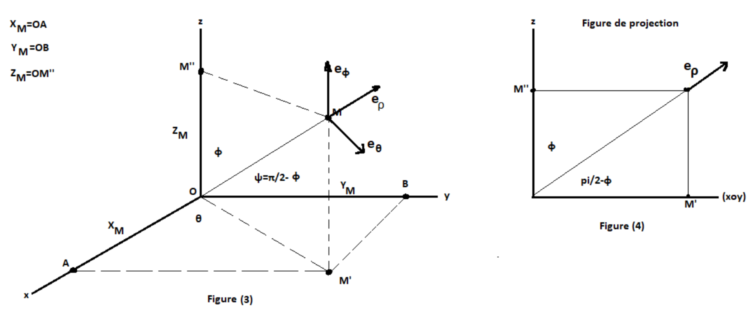

Figure 2 – La figure montre la base sphérique et la direction de ses vecteurs

□