ENSA d'Al-Hoceima
CP-II, 2ème année,
Algèbre Quadratique,

Année 2020/2021
Semestre 3
TD4

Série N^{o}4 : Formes linéaires et Formes quadratiques

Exercice 1

1. On désigne par S une matrice carrée symétrique à termes réels d'ordre n et par L une matrice colonne à n termes réels ; on suppose que la matrice S est inversible.
   On définit une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en posant pour toute matrice colonne X ayant n termes réels :
   $$f(X) = X^T SX + 2L^T X + \delta.$$
   (a) Montrer qu'il existe une matrice colonne unique U telle que le changement de variable : $X = U + Y$ transforme $f(X)$ en la somme d'une forme quadratique en Y et d'une constante.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice orthogonale P telle que si :
   $$X = U + PZ$$
   et si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les termes de Z :
   $$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$
   (c) En considérant la forme quadratique F définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :
   $$F(X, \theta) = X^T SX + 2L^T X\theta + \delta\theta^2$$
   (X est la matrice des n premières coordonnées et θ la $(n+1)$-ième coordonnée d'un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$), montrer que :
   $$\varepsilon = \frac{det \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix}}{det(S)}$$
2. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$\varphi(X) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz = zx) - 4x - 4y + 4z,$$
   où x, y, z désignent les termes de la matrices colonne X.
   On sait qu'il existe une matrice colonne U et une matrice orthogonale P telles que si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les termes de la matrice colonne $Z = P^{-1}(X - U)$
   $$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$
   Déterminer les nombres ρ_i, ρ_2, ρ_3 et ε ; puis retruver la valeur de ε en déterminant la matrice U.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ des matrices colonnes X à termes complexes et on pose
$$\|X\|^2 = \bar{X}^T X.$$
On désigne par A une matrice carrée d'ordre n à termes complexes hermitienne, c'est-à-dire telle que $A^T = \bar{A}$ (on note $\bar{X}$ et $\bar{A}$ les matrices obtenues en remplaçant chaque terme de X ou de A par le nombre conjugué).

1. Montrer que si I est la matrice unité et α et β des nombres réels, alors :
$$\|(A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X\|^2 = \|(A-\alpha I)X\|^2 + \beta^2\|X\|^2$$
2. Retrouver ainsi que les valeurs propres de A sont réelles.

Exercice 3

1. On considère un espace euclidien E et un sous-espace vectoriel F de E, ces espaces étant de dimension finie ou non.
   (a) On donne un vecteur x de E. En étudiant la distance de x au vecteur $x_0+\lambda y$, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit de tous les vecteurs de F un de ceux dont la distance à x est minimum est que $x-x_0$ soit orthogonal à tous les vecteurs de F.
   (b) Montrer qu'il ne peut exister deux vecteurs de F dont la distance à x soit minimum.
   (c) Montrer que si F est de dimension finie, alors il existe effectivement un vecteur x_0 de F dont la distance à x est minimum.
2. (a) Montrer que dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir un produit scalaire en posant : $(f,g)=\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Quelle est la norme associée à ce produit scalaire ? nous désignerons par E l'espace euclidien (de dimension infinie) ainsi obtenu.
   (b) Montrer que dans E, les fonctions 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$ (k et h étant des entiers naturels arbitraires) sont deux à deux orthogonales.
   (c) On prend pour F l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques d'ordre n (c'est-à-dire combinaisons linéaires de 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$, avec $k\geq n$ et $h\geq n$). Déterminer le polynôme Q dont la distance à une fonction f donnée est minimum.

Exercice 4

1. Soit E l'espace vectoriel réel dont les éléments sont les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables.
   (a) Montrer que les applications $f\mapsto f(0)$, $f\mapsto f''(1)$ et $f\mapsto \int_0^1 f(t)dt$ de E dans $\mathbb{R}$ sont des formes linéaires sur E.
   (b) Montrer que les applications $f\mapsto f(0)+1$ et $f\mapsto (f'(2))^2$ ne sont pas des formes linéaires.
2. Montrer que les applications $f:(x,y,z)\mapsto x+2y+3z$ et $g:(x,y,z)\mapsto x-2y+3z$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, et qu'elles sont linéairement indépendantes.
3. Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $((x,y,z),(x',y',z'))\mapsto xx'+yz'$ est une forme bilinéaire dégénérée. Trouver les noyaux des deux homomorphismes associés canoniquement à f. Déterminer le rang de l'application bilinéaire f.

Exercice 5

Soit $E=\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiale en x. Pour tout polynôme P, soit f_P l'application sur E qui associe, à tout polynôme Q, le nombre
$$f_P(Q)=\int_0^1 P(x)Q'(x)dx+\int_0^1 P'(x)Q(x)dx.$$

1. Montrer que f_P est une forme linéaire sur E.
2. Trouver les polynômes P de degré 3 tels que f_P soit orthogonale aux polynômes 1, $x+1$ et x^2+2.