AP1: Analyse 2 Année: 2019/2020

TD: Séries numériques

séries $N°2$

Professeur A. MOUSSAID

Pour la sèance de la semaine prochaine (23-24 /03/2020)

Exercice 1
Etudier la nature de la sèrie de terme gènèral U_n

- $U_n = \frac{n+1}{n^3-7}$
- $U_n = \frac{n+1}{n^2-7}$
- $U_n = \sin(\frac{1}{n^2})$
- $U_n \frac{1}{\ln(n^2+2}$
- $U_n = \frac{n}{2^n}$
- $U_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$
- $U_n = \frac{1}{n.3^n}$
- $U_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$
- $U_n = \frac{n^{2+1}}{n^2}$

Solution
1) Soit $U_n = \frac{n+1}{n^3-7}$
On pose $V_n = \frac{1}{n^2}$
comme $\sum_{n>0} U_n$ et $\sum_{n>0} V_n$ sont deux sèries à termes positifs, et si $(U_n)_{n>0}$ et $(V_n)_{n>0}$ sont des suites èquivalentes tel que
$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$
donc les deux sèries sont de même nature.
V_n C'est le terme gènèral d'une sèrie de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\sum_{n>0} U_n$ est convergente.

2) Soit $U_n = \frac{n+1}{n^2-7}$
On pose $V_n = \frac{1}{n}$
comme $\sum_{n>0} U_n$ et $\sum_{n>0} V_n$ sont deux sèries à termes positifs, et si $(U_n)_{n>0}$ et $(V_n)_{n>0}$ sont des suites èquivalentes tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$$

donc les deux sèries sont de même nature.
V_n C'est le terme gènèral d'une sèrie de Riemann divergente avec $\alpha = 1$ donc $\sum_{n>0} U_n$ est divergente.

3)Soit $U_n = \sin(\frac{1}{n^2})$
On pose $V_n = \frac{1}{n^2}$
comme $\sum_{n>0} U_n$ et $\sum_{n>0} V_n$ sont deux sèries à termes positifs, et si $(U_n)_{n>0}$ et $(V_n)_{n>0}$ sont des suites èquivalentes tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n}=1$$

donc les deux sèries sont de même nature.
V_n C'est le terme gènèral d'une sèrie de Riemann convergente avec $\alpha=2>1$ donc $\sum_{n>0}U_n$ est convergente.

4) $U_n\frac{1}{\ln(n^2+2}$
U_n est de signe constant
Pour tout $n>0$
On a

$$\ln(n^2+2)=\ln(n^2(1+\frac{2}{n^2}))=2\ln(n)+\ln((1+\frac{2}{n^2})=2\ln(n)+\frac{2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

donc $n^{\frac{1}{2}}U_n=n^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\ln(n)+\frac{2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}\to+\infty$
D'après les règles de Riemann $n^{\frac{1}{2}}U_n\to+\infty$ avec $\alpha<1$ entraine que la sèrie de terme gènèral U_n diverge.

5)soit $U_n=\frac{n}{2^n}$
On U_n est de signe constant
Alors

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}<1$$

D'aprés la règle de D'Alembert la série de terme général U_n converge.

6) Soit $U_n=(1+\frac{1}{n})^{n^2}$
On $\forall n\geq 1\qquad U_n=(1+\frac{1}{n})^{n^2}>1$
Donc U_n ne peut pas tendre vers . Alors la série de terme général U_n diverge

7) Soit $U_n=\frac{1}{n.3^n}$
On a $\forall n\geq 1\qquad \frac{1}{n.3^n}<(\frac{1}{3})$
Alors comme la série de terme général $V_n=(\frac{1}{3})$ converge donc d'aprés CritÃ¨res de comparaison la série de terme général U_n diverge

8)Soit $U_n=\frac{2}{\sqrt{n}}$
On a

$$\forall n\geq 1\qquad U_n=\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$$

il s'agit du terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha=\frac{1}{2}<1$

9) $U_n=\frac{n^{2+1}}{n^2}$
On a

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=1\neq 0$$

donc la série de terme général U_n diverge

Exercice 2

Etudier la convergence de la série dont le terme général est défini par:

$$U_{2n}=(\frac{2}{3})^n\qquad et\qquad U_{2n+1}=2(\frac{2}{3})^n$$

par la régle de Cauchy et par la régle de l'Alembert.

Solution
Soit $U_{2n}=(\frac{2}{3})^n\qquad et\qquad U_{2n+1}=2(\frac{2}{3})^n$
*)par la régle de Cauchy
On a

$$\sqrt[2n]{U_{2n}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

et

$$\sqrt[2n+1]{U_{2n+1}} = (\frac{2}{3})^{\frac{n}{2n+1}} \times 2^{\frac{1}{2n+1}} = \exp[\frac{n}{2n+1}\ln(\frac{2}{3}) + \frac{\ln(2)}{2n+1}]$$

Les suites $\sqrt[2n]{U_{2n}}$ et $\sqrt[2n+1]{U_{2n+1}}$ des termes de rang pair et de rang impair extraites de la suite $(\sqrt[n]{U_n})$ convergent donc toutes les deux vers $\sqrt{\frac{2}{3}}$.Alors la suite$(\sqrt[n]{U_n})$ converge aussi vers $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général u_n converge.
*)Par contre la règle de d'Alembert

$$\frac{U_{2n+1}}{U_{2n}} = 2 \qquad et \qquad \frac{U_{2n}}{U_{2n-1}} = \frac{1}{3}$$

Les suites des termes de rang pair et de rang impair extraites de la suite (u_{n+1}/u_n) ont des limites différentes. Elle n'a donc pas de limite, et on ne peut utiliser la règle de d'Alembert.

Exercice 3
Soit $U_n > 0$ On pose

$$V_n = \frac{U_n}{1+U_n} \qquad et \qquad W_n = \frac{U_n}{1+U_n^2}$$

a) Montrer que les séries de terme généraux u_n et v_n sont de même nature.
b) Comparer la convergence des séries de termes généraux u_n et W_n

Solution
Soit $U_n > 0$ On pose

$$V_n = \frac{U_n}{1+U_n} \qquad et \qquad W_n = \frac{U_n}{1+U_n^2}$$

a) Les séries sont positives. On peut donc appliquer le thÃ©orème sur les équivalents.
Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers zéro, et $(1 + u_n)$ vers 1, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{U_n} = 1$$

Les séries sont de même nature, donc la série de terme général v_n converge.
Inversement si la série de terme général v_n converge, la suite (v_n) converge vers zéro. Mais on obtient:

$$U_n = \frac{V_n}{1-V_n}$$

et il en résulte que $U_n \sim V_n$. Les séries sont de même nature, donc la série de terme général u_n converge.

b) On a $0 \leq W_n \leq U_n$, donc si la série de terme général un converge, il en est de même de la série de terme général w_n. Mais la réciproque est fausse. Remarquons que si u_n tend vers l'infini, on a

$$W_n \sim \frac{1}{U_n}$$

Il suffit de prendre $u_n = n^2$, pour que la série de terme général wn converge mais pas celle de terme général u_n.

Exercice 4
On considére la suite numérique définie par la récurrence:

$$U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}) \qquad n \geq 2$$

U_0 et U_1 sont deux réels donnés
En étudiant la série de terme général $V_n = U_{n+1} + U_n$,montre que la suite $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.