Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima, Maroc

Mathématiques pour les Classes Préparatoires 1 et 2

–Cours d'Algèbre 3 et exercices–
Algèbre linéaire, Algèbre Quadratique et Espaces Hermitiens

Mohamed ADDAM
Professeur de Mathématiques

École Nationale des Sciences Appliquées d'Al Hoceima
–ENSAH–
addam.mohamed@gmail.com
m.addam@uae.ac.ma

03 Novembre 2020

Table des matières

Chapitre 1

Réduction des endomorphismes et Éléments propres

Dans ce chapitre, on suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.

1.1 Multiplication matricielle : Algorithmes

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice de type $m \times n$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de type $n \times p$.
Le produit $A \cdot B$ est la matrice C de type $m \times p$ dont les coefficients

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{1,2} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Le coefficient $c_{i,j}$ est obtenu en faisant le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Remarque 1.1.1 *Lorsque $p = 1$ alors la matrice B serait un vecteur de type $m \times 1$. Dans ce cas, le produit $A \cdot B$ serait un vecteur c de type $m \times 1$ dont les coefficients c_i sont donnés par*

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_j = a_{i,1}b_1 + a_{i,2}b_2 + \ldots + a_{i,n}b_n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Remarque 1.1.2
1. *Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.*
2. *Le produit $A \cdot B$ peut être défini sans $B \cdot A$ le soit.*

```
Pour chaque ligne i=1...m, faire
        pour chaque colonne j=1...p, faire
        Pour k=1...n, faire
            a[i,j]:=a[i,j]+a[i,k]*a[k,j]
        Fin pour k
        Fin pour j
Fin pour i
```

Algorithme :

```
For i=1..m,
        For j=1..p,
                For k=1..n,
                    a[i,j]:=a[i,j]+a[i,k]*a[k,j]
                End k
        End j
End j
```

1.2 Réduction des endomorphismes et des martices carrées

Dans cette partie, on désigne par E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, par e l'endomorphisme identique de E, par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et par I la matrice unité. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et A la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On dit que la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est identifiée à l'endomorphisme f.

1.2.1 Valeurs propres, polynôme caractéristique et polynôme minimal

Définition 1.2.1 *un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* **valeur propre** *d'un endomorphisme u de E (resp. d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) s'il existe un vecteur x non nul (resp. une matrice colone X non nulle) tel que*

$$u(x) = \lambda.x, \quad (\textit{resp}.AX = \lambda X)$$

ou encore si l'endomorphisme $u - \lambda e$ (resp. la matrice $A - \lambda\mathrm{I}$) n'est pas inversible.

Exemple 1.2.1 1. *Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$\begin{cases} u(x) & = 2y, \\ u(y) & = x \end{cases}$$

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les valeurs propres de u puisque det$(u \pm \sqrt{2}e) = 0$

2. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont 2 et -3 car det$(A - 2\mathrm{I}) = 0$ et det$(A + 3\mathrm{I}) = 0$ puisque

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad A + 3I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.2 *Soit u un endomorphisme de E.*

1. *On appelle le* **polynôme caractéristique** *de u (resp. d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme suivant :*

$$P(\lambda) = det(u - \lambda e), \quad (resp. P_A(\lambda) = det(A - \lambda \mathrm{I}))$$

2. *Les valeurs propres d'un endomorphisme u de E sont les racines du* **polynôme caractéristique** *de u (resp. de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Exemple 1.2.2 1. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$P(\lambda) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4,$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Pour trouver les valeurs propres de la matrice A il suffit de résoudre l'équation

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

2. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice M est

$$P_M(\lambda) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$P_M(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3-\lambda & 0 \end{vmatrix},$$

$$P_M(\lambda) = (2-\lambda)[(-3-\lambda)(3-\lambda) - 2] + 4[-(3-\lambda)],$$

pour trouver les valeurs propres de la matrice M il suffit de résoudre l'équation

$$P_M(\lambda) = 0.$$

Remarque 1.2.1 *Soit u un endomorphisme de E et U la matrice de u dans une base arbitraire de E alors on a*

$$P(\lambda) = det(u - \lambda e) = det(\mathrm{U} - \lambda \mathrm{I}).$$

Théorème 1.2.1 *(***Cayley-Hamilton***)*
Soit u un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Si le polynôme caractéristique P de u se décompose dans $\mathbb{K}$ en facteurs du premier degré, alors $P(u) = 0$.*
2. *Si le polynôme caractéristique Q de A se décompose dans $\mathbb{K}$ en facteurs du premier degré, alors $Q(A) = 0$.*

Démonstration. En exercice. □

Exemple 1.2.3 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2-2 & 4-4+0 \\ -1+1+0 & 5-3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.3 *Soit u un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On appelle **polynôme minimal** *de u (resp. de A) un polynôme Q vérifiant :*

i) Q est de plus petit degré divisant le polynôme caractéristique P de u (resp. de A).

ii) $Q(u) = 0$ (resp. $Q(A) = 0$).

Exemple 1.2.4 *On considère une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique*

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Si $(A - 2I)(A - 3I) = 0$, alors le polynôme minimale de A est $Q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

1.2.2 Vecteurs propres et Sous-espace propres

Définition 1.2.4 *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme u, l'ensemble des solutions de l'équation*

$$u(x) = \lambda x$$

   est un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_\lambda$ de E dit **sous-espace propre** *associé à λ. Les éléments non nuls de $\mathcal{H}_\lambda$ sont les* **vecteurs propres** *associés à λ.*
   Le sous-espace propre $\mathcal{H}_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda e)$, le noyau de l'endomorphisme $(u - \lambda e)$ de E.

2. *Si λ est une valeur propre de la matrice A, l'ensemble des solutions de l'équation*

$$Mx = \lambda x$$

   est un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_\lambda$ de $\mathbb{K}^n$ dit **sous-espace propre** *associé à λ. Les éléments non nuls de $\mathcal{H}_\lambda$ sont les* **vecteurs propres** *associés à λ.*
   Si f était l'endomorphisme associé à la matrice A alors $\mathcal{H}_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda e)$.

Exemple 1.2.5 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.

$$\mathcal{H}_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(f + 2e)$$

$$\mathcal{H}_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(f - e)$$

ou f est l'endomorphisme associé à A défini par

$$\begin{cases} f(x) & = 2x - 4y, \\ f(y) & = x - 3y, \end{cases}$$

et e est l'endomorphisme unité.

Proposition 1.2.1 *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée à u.*

1. *Les valeurs propres de u sont les mêmes que celles de A.*
2. *Les vecteurs propres $v_1, v_2, \dots, v_k$ associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont linéairement indépendants.*
3. *Si $\mathcal{H}_1 = \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 e), \mathcal{H}_2 = \operatorname{Ker}(u - \lambda_2 e), \dots, \mathcal{H}_k = \operatorname{Ker}(u - \lambda_k e)$ sont respectivement les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, alors la sommes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \dots + \mathcal{H}_k$ est une somme directe.*
4. *La réunion d'une base de $\mathcal{H}_1$, d'une base de $\mathcal{H}_2$,..., d'une base de $\mathcal{H}_k$ est une base de $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Laisser en exercice. □

1.2.3 Matrices semblables

Définition 1.2.5 *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles constituent deux matrices représentatives du même endomorphisme dans deux bases (éventuellement) différentes. Autrement dit, on dit que deux matrices A et B sont semblables si et seeulement si il existe une matrice inversible P telle que*

$$A = P^{-1}BP.$$

Exemple 1.2.6 *Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ sont semblables.*
En effet, il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2.2 *On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :*

$$A \,\mathcal{R}\, B \Leftrightarrow \exists P \text{ une matrice inversible telle que } A = P^{-1}BP.$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.2.2 *Deux matrices semblables A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}BP.$$

On a

$$A - \lambda I = P^{-1}BP - \lambda I = P^{-1}BP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(B - \lambda I)P,$$

alors

$$\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}(B - \lambda I)P) = \det(P^{-1})\det(B - \lambda I)\det(P)$$

d'où

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)\frac{\det(P)}{\det(P)} = \det(B - \lambda I).$$

□

Corollaire 1.2.1 *Deux matrices semblables A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont les mêmes valeurs propres.*

1.2.4 Matrices diagonalisables : diagonalisation de matrices

Définition 1.2.6 *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $A \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$) est* **diagonalisable** *s'il existe une base de E (resp. de $\mathbb{K}^n$) dans laquelle la matrice de u (resp. la matrice $P^{-1}AP$ transformée de A) est diagonale.*

Définition 1.2.7 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A comptées avec leurs ordres de multiplicité.
Dans ce cas, chaque vecteur colonne w de la matrice P est un vecteur propre pour la matrice A, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ sur la diagonale de D tel que $A.w = \lambda.w$.

Exemple 1.2.7 *Les valeurs propres de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$ et $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$.
Les veteurs propres associés à λ_1, λ_2 et λ_3 sont respectivement

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $P = (V_1|V_2|V_3)$ donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -(1+\mathrm{i}) & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

paar un calcul simple, on trouve

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -(1+\mathrm{i}) & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.3 *Diagonaliser une matrice carrée A, c'est trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.*

Proposition 1.2.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(\mathcal{H}_\lambda) = n.$$

Théorème 1.2.2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$ une matrice.*

1. *u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de l'espace E formée de vecteurs propres de u ou encore si et seulement si les sous-espaces propres de u engendre l'espace E.*
2. *A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de l'espace $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A ou encore si et seulement si les sous-espaces propres de A engendre l'espace $\mathbb{K}^n$.*
3. *Si le polynôme caractéristique $P(x)$ (resp. $P_A(x)$ de u (resp. de A) admet n zéros distincts dans $\mathbb{K}$, alors l'endomorphisme u (resp. A) est diagonalisable.*

1.2.5 Trigonalisation des matrices, matrices triangularisables

Définition 1.2.8 *On appelle matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) une matrice dont tous les éléments situés strictement au-dessous (resp. stricte- ment au-dessus) de la diagonale principale sont nuls.*

Remarque 1.2.4 *Une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.*

Définition 1.2.9 *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $A \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$) est* **triangularisable** *s'il existe une base de E (resp. de $\mathbb{K}^n$) dans laquelle la matrice de u (resp. la matrice $P^{-1}AP$ transformée de A) est triangulaire.*

Définition 1.2.10 *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est* **trigonalisable** *si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.*

Théorème 1.2.3 *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

1.2.6 Réduction de Jordan

Définition 1.2.11 *On appelle bloc de Jordan une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ est un réel quelconque. La diagonale principale contient des λ, on trouve des 1 au-dessus de cette diagonale, les autres éléments de la matrice sont nuls.
**Le bloc de Jordan de taille $n \geq 1$ et dont l'élément sur la diagonale principale est λ est noté $J_n(\lambda)$.*

Exemple 1.2.8 *1.* $J_1(8) = 8$ *est un bloc de Jordan de type* 1×1.

2. $J_4(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *est un bloc de Jordan de type* 4×4.

3. $J_2(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *est un bloc de Jordan de type* 2×2.

Définition 1.2.12 *On appelle matrice diagonale par blocs une matrice formée d'une diagonale de matrices carrées, non nécessairement de même taille. Les éléments non situés dans ces matrices sont nuls.*
**On note diag*$(A_1; A_2; \ldots; A_p)$ *la matrice dont les blocs diagonaux sont* $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Exemple 1.2.9 *1.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \mathit{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \right),$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \mathit{diag}\left((1), \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \right),$

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathit{diag}\left((3), \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right).$

Définition 1.2.13 *On appelle matrice de Jordan une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des blocs de Jordan.*

Définition 1.2.14 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On appelle réduite de Jordan de* A *toute matrice de Jordan* J *telle qu'il existe* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible telle que* $A = PJP^{-1}$.

Théorème 1.2.4 *(***Réduction de Jordan***)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_3$ *les valeurs propres de la matrice* A*. On note* ν_i *l'ordre de multiplicité de* λ_i *dans le polynôme caractéristique* P_A *de* A.
**La matrice* A *admet une réduite de Jordan* J *et une seule (à l'ordre des blocs près).*
**Tout bloc de la réduite de Jordan de* A *est de la forme* $J_k(\lambda_i)$ *où* $\lambda_i \in Sp(A)$ *et* $1 \leq k \leq \nu_i$.
**Sur la diagonale principale de la réduite de Jordan, on trouve les valeurs propres de* A *comptées avec leur multiplicité :* λ_i *apparaît* ν_i *fois.*

Théorème 1.2.5 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A \in \mathbb{K}^{(n \times n)}$ *une matrice.*

1. u *est triangularisable si et seulement si le polynôme caractéristique* $P(x)$ *de* u *se décompose dans* $\mathbb{K}$ *en facteurs du premier degré.*
2. A *est triangularisable si et seulement si le polynôme caractéristique* $P_A(x)$ *de* A *se décompose dans* $\mathbb{K}$ *en facteurs du premier degré.*

3. *Dans ce cas, il existe une base de E (resp. de $\mathbb{K}^n$) telle que la matrice de u dans cette base (resp. la matrice $P^{-1}AP$ transformée de A) a la forme de Jordan :*

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_q \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad J_p = \begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

(Les λ_p sont les valeurs propres de u ou de A ; plusieurs matrices J_p peuvent avoir la même valeurs λ_p dans la diagonale.)

Exercice 1.2.1 *Soit A la matrice donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*
2. *Donner la réduite de Jordan de A.*

1.3 Spectre et rayon spectral d'une matrice, Matrice positive

1.3.1 Spectre et rayon spectral d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice carrée.

1. La **trace** de A est $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.
2. Les valeurs propres de A sont les n racines réelles ou complexes $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ du polynôme caractéristique P de A. Le **spectre** de A, noté $\operatorname{Sp}(A)$ est l'ensemble de tous les valeurs propres de A :
$$\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_i : \ 1 \le i \le n\}$$
3. La matrice A est **diagonale** si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, on la note
$$A = \operatorname{diag}(a_{ii}) = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

On rappelle les propriétés suivantes :

1. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, dét$(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
2. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
3. dét$(AB) =$ dét$(BA) =$ dét(A)dét(B).

Définition 1.3.1 *On appelle le rayon spectral de la matrice A, noté $\varrho(A)$, le nombre réel positif*

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_i| : \ 1 \le i \le n\}$$

Définition 1.3.2 *Une matrice A est*

1. **Symétrique** *si A est réelle et $A = A^T$;*
2. **hermitienne** *si $A = A^*$;*
3. **Orthogonale** *si A est réelle et $AA^T = A^TA = I$;*
4. **Unitaire** *si $AA^* = A^*A = I$;*
5. **Normale** *si $AA^* = A^*A$.*

une matrice A est dite **singulière** *si elle n'est pas inversible.*

Propriété 1.3.1 *Si A et B sont deux matrices inversibles, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

1.3.2 Matrice positive et matrice définie positive

Définition 1.3.3 *Soit A une matrice*

1. *La matrice A est* **définie positive** *si*

$$(Ax, x) > 0, \qquad \forall x \in E - \{0\}$$

2. *La matrice A est* **positive** *où* **semi-définie positive** *si*

$$(Ax, x) \geq 0, \qquad \forall x \in E - \{0\}$$

Théorème 1.3.1 *Une matrice hermitienne A est définie positive (resp. positive), si et seulement si toutes ses valeurs propres sont > 0 (resp. ≥ 0).*

Démonstration. soit A une matrice hermitienne et $x \neq 0$ un vecteur dans E.

$$(Ax, x) = \lambda(x, x) = \lambda \|x\|_E$$

$\square$

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice A a une seule valeur propre double λ.*

1. *Montrer qu'on peut trouver une matrice B semblable à A égale à l'une des deux matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. *Calculer B^n.*

Exercice 1.4.2 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
3. *Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.*
4. *Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 1.4.3 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$*

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
3. *Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.*
4. *En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 1.4.4 *On considère la maatrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M.*
2. *La matrice M est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
3. *Déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $J = P^{-1}MP$ soit de la forme de Jordan.*
4. *Calculer J^n et en déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Chapitre 2

Application de la réduction d'endomorphismes

2.1 Endomorphisme nilpotent et Matrice nilpotente

2.1.1 Nilpotence et indice de nilpotence

Définition 2.1.1 1. *On dit qu'une matrice carrée A est nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que A^p soit la matrice nulle. L'indice de nilpotence est alors le plus petit p tel que $A^p = 0$.*

2. *Les notions de matrice nilpotente et d'endomorphisme nilpotent sont très liées : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme et A sa matrice dans une certaine base."La matrice A est nilpotente si et seulement si l'endomorphisme est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $u^p = 0$, ou u^p désigne $u \circ ... \circ u$ et 0 l'endomorphisme nul".*

Exemple 2.1.1 1. *On prend la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

D'où A est nilpotente d'indice de nilpotence $p = 2$.

2. *Considérons un espace vectoriel réel de dimension 3 avec pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons alors un endomorphisme u défini par sa représentation matricielle suivante dans la base $\mathcal{B}$:*

$$u : \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Si nous calculons la représentation matricielle de u^2 et de u^3, on trouve :

$$u^2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad u^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque u^3 est l'endomorphisme nul u est bien nilpotent d'indice 3. Son indice est plus petit que la dimension de l'espace. Dans le cas général, l'indice d'un endomorphisme nilpotent est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

2.1.2 Nilpotence et base réduite

Considérons alors le vecteur e_1. Il est d'indice 2 et la famille $(e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ est libre. Elle est libre et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel. Cette famille est donc une base. Dans cette base, la représentation matricielle de u prend alors la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Là encore, ces propriétés sont génériques pour un endomorphisme nilpotent. Dans le cas général de dimension n, si x est un vecteur d'indice p alors p est inférieur ou égal à n et la famille $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est une famille libre. De plus, il existe toujours une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, tel que $u(e_i)$ soit égal, soit à 0 soit à e_{i+1}, avec $u(e_n) = 0$. C'est la base réduite pour l'endomorphisme nilpotent.

2.2 Exponentiel d'une matrice

La fonction exponentielle est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, alors au voisinage de 0, alors d'après le développement de Taylor on peut écrire

$$e^t = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{t^n}{n!}.$$

Définition 2.2.1 *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *On appelle* **exponentielle** *de la matrice A, notée par $\exp(A)$, la formule suivante :*

$$\exp(A) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Nous avons les propriétés suivantes :

2. *Si $AB = BA$ alors* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.
3. *Si A est une matrice carrée quelconque, alors* $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$.
4. *Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors* $\exp(A^{-1}) = e(\exp(A))^{-1} = \exp(I_n - A)$.

Exemple 2.2.1 1. *On prend la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a $A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors*

$$\exp(A) = \mathrm{I} + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Pour la matrice B suivante*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \textit{on a} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a

$$\exp(B) = \mathrm{I} + B + \frac{1}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -9 \\ 3 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 \\ 5 & 10 & -9 \\ 3 & 12 & -11 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

1. *Si A est nilpotente d'indice de nilpotence p, alors*

$$\exp(A) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{A^n}{n!}.$$

2. *Si la seule valeur propre de A est 0, alors les puissance de A sont nulles à partir d'un certain rang n_0 :*

$$A^n = 0, \quad \textit{dès que} \quad n \geq n_0.$$

   Dans ce cas, on a

$$\exp(A) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{A^n}{n!}.$$

3. *Si A a une seule valeur propre λ, alors nous pouvons écrire $A = \lambda I + B$ où B est une matrice dont la seule valeur propre est 0. On a bien*

$$\exp(A) = \exp(\lambda). \exp(B)$$

4. *Si A est une matrice diagonale, c'est-à-dire que A s'écrit sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \textit{alors} \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

5. *Soit A une matrice diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P de vecteurs propres telle que*

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \;\; \textit{et} \;\; \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Démonstration. Exercice. □

2.3 Système d'équations différentielles

Soit X une matrice colonne des fonctions, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et D un vecteur colonne. On suppose que les coefficients de A et D sont donnés.
On appelle un système différentiel linéaire à coefficients constants et d'inconnu X, l'équation linéaire que satisfait X au sens usuel des équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + D(t), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

où n est le nombre de fonctions à déterminer en résolvant le système différentiel (0.1).

2.3.1 Système homogènes

Le système différentiel homogène associé à l'équation (0.1) est

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \tag{0.2}$$

La solution générale de l'équation (0.2) est définie par

$$X(t) = \exp(tA)X(0),$$

où, par définition :

$$\exp(tA) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Par calcul, la matrice $\exp(tA)$ se simplifie en utilisant les propriétés de l'exponentielle d'une matrice.
L'ensemble des solutions du système différentiel homogène (0.2) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n. C'est un sous-espace de l'espace des fonctions à valeurs complexes.

Proposition 2.3.1 *Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A et $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les vecteurs associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, alors la solution générale de l'équation homogène (0.2) s'écrit sous la forme :*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i t) V_i,$$

où $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq n)$ sont des scalaires.

Exemple 2.3.1 *On considère le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$

on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$$

alors

$$X(t) = \exp(tA)X(0),$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est donné.
La matrice A a deux valeurs propres distinctes -1 et 3, alors

$$X(t) = \alpha_1 \exp(-t)V_1 + \alpha_2 \exp(3t)V_2,$$

où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à -1 et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à 3.

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 \exp(-t) + \alpha_2 \exp(3t), \\ y(t) = \alpha_1 \exp(-t) + \alpha_2 \exp(3t) \end{cases}$$

2.3.2 Systèmes avec seconds membres

On reprend le système différentiel avec second membre donné par (0.1)

Proposition 2.3.2 *La solution générale du système (0.1) est la somme d'une solution particulière de (0.1) et de la solution générale du système différentiel homogène (0.2).*

Proposition 2.3.3 *Si le second membre D est défini par :*

$$D(t) = \exp(\omega t) D_0,$$

où D_0 est un vecteur à coefficients constants dans $\mathbb{K}$, alors il existe une solution particulière $X(t)$ de la forme :

1. $X(t) = \exp(\omega t) X_0$*, si ω n'est pas une valeur propre de A ;*
2. $X(t) = \exp(\omega t)(X_0 + tX_1)$*, si ω est une valeur propre simple de A ;*
3. $X(t) = \exp(\omega t)(X_0 + tX_1 + t^2 X_2)$*, si ω est une valeur propre double de A ;*
4. $X(t) = \exp(\omega t) \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t^i X_i$*, si ω est une valeur propre, de multiplicité n, de A ;*

Remarque 2.3.1 *Si on ne connaît pas à priori la forme de la solution particulière, on fera le changement d'inconnues :*

$$X(t) = PY(t),$$

la matrice P étant choisie de manière que la matrice $P^{-1}AP$ du système transformé :

$$\frac{dY(t)}{dt} = P^{-1}APY(t) + P^{-1}D(t)$$

soit triangulaire ou, mieux encore, de la forme de Jordan. Cette partie sera bien aborder les années ulérieures avec plus de bagages d'algèbre et d'analyse.

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 *Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) - \frac{1}{2}\, y(t) \\ y'(t) & = & 2\, x(t) - y(t) \end{array} \right.$$

où x et y sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. *Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ?*
2. *Calculer B^2 et B^3. Que peut-on déduire ?*
3. *Calculer la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.*
4. *En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ lorsque $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.*

Exercice 2.4.2 *Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &=& x(t) + 2\,y(t) + z(t) \\ y'(t) &=& 2\,y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &=& 3z(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. *Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ? Qu'appelle-t-on ce type de matrice ?*
2. *Montrer que la matrice B s'écrit sous la forme $D + N$ où D est une matrice diagonale à déterminer et N est une matrice nilpotente à déterminer.*
   **Déterminer l'indice de nilpotence de N.*
3. *En utilisant l'écriture $B = D + N$, montrer que $\exp(tB) = \exp(tD)\left(I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où I_3 est la matrice identité de taille (3×3).*
4. *Calculer les matrices $P = \exp(tD)$ et $Q = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2$.*
5. *En déduire l'expression de la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.*
6. *En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $x(0) = k_1$, $y(0) = k_2$ et $z(0) = k_3$.*
   **Déterminer les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $k_3 = 2$.*

Exercice 2.4.3 *On veut résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :*

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. *Montrer qu'on peut écrire le système différentiel sous la forme :*
   $$X' = A.X$$
   où A est une matrice à déterminer.
2. *Montrer que le système est bien défini, puis trouver le polynôme caractéristique associé à A.*
3. *Trouver les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A.*
4. *Trouver les vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.*
5. *Trouver la solution générale $X(t)$, puis touver la solution $X(t)$ satisfaisant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.*
6. *Trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ tel que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ où $j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.*
   Pui, montrer que si M, N et P sont dans le plan complexe les images de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, le traingle MNP est équilatéral.

Exercice 2.4.4 *Soit ($\mathcal{S}$) le systeme differentiel lineaire avec second membre*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) &= -3x(t) - 3y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) &= 2x(t) + 2y(t) - z(t) + 2e^t \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du systeme linéaire homogène associé à ($\mathcal{S}$).*
2. *Déterminer la solution particulière du système ($\mathcal{S}$) pour les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ et $z(0) = 1$.*
3. *Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système ($\mathcal{S}$).*

Exercice 2.4.5 *Soit ($\mathcal{S}$) le systeme differentiel lineaire avec second membre*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= y(t) - z(t) \\ y'(t) &= -x(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. *Ecrire le système différentiel linéaire ($\mathcal{S}$) sous la forme $X'(t) = A.X(t)$ où A est une matrice à déterminer.*
2. *Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du systeme linéaire ($\mathcal{S}$).*
3. *Calculer la norme $\|X(t)\|$. Que peut-en déduire ?*
4. *Montrer que toutes les solutions du système ($\mathcal{S}$) sont planes. Conclure.*

Exercice 2.4.6 *Soit a un paramètre réel. On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n + (1 + a^2)w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

1. *Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle*

   $$X_{n+1} = AX_n \quad \textit{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   **Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0, \quad \forall n \geq 0$.*
2. *Déterminer le polynôme caractéristique de A puis calculer ses valeurs propres.*
3. *Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de A.*
   **Trouver les réels a pour que la matrice A soit diagonalisable, en déduire le polynôme minimal.*
   **Dans ce cas, proposer une base de vecteurs propres de A puis diagonaliser A.*
4. *Dans la suite de cet exercice, on se limite au cas "$a = 0$"*
   (a) *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*
   (b) *Déterminer P une matrice de passage telle que $J = P^{-1}AP$ soit une matrice de Jordan.*
   **Donner les cas possibles de la matrice de Jordan J.*

(c) *Calculer P^{-1}, puis calculer A^n pour tout $n \geq 1$.*

(d) *En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.*

Exercice 2.4.7 *I. On propose de résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :*

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *et* $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ *la dérivée de $X(t)$ par rapport à t.*

(a) *Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système différentiel $(\mathcal{S})$ sous la forme :*

$$X'(t) = AX(t).$$

(b) *Montrer que le système est bien défini, puis trouver le polynôme caractéristique associé à A.*

(c) *Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A, puis déterminer les vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.*

(d) *Déterminer les sous-espaces propres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.*
**Donner une interprétation géométrique des sous-espaces propres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$.*

(e) *Écrire l'expression générale d'une solution $X(t)$ du système $(\mathcal{S})$, puis trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ telle que $x(0) = 1$, $y(0) = 1/2$ et $z(0) = 3$.*

II. En utilisant la partie I)*, résoudre le système avec second membre suivant :*

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - e^{2t} \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) + e^{2t} \\ z'(t) = x(t) + z(t) + e^{2t} \end{cases}$$

*avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$. (*Indication : trouver d'abord une solution particulière).

Exercice 2.4.8 *Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3.$$

1. *Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base (e_1, e_2, e_3). A est-elle inversible ?*
2. *Déterminer Ker(f) et Im(f). Quel est le rang de f ?* **Justifier**
3. *Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de f.*
4. *Déterminer le polynôme caractéristique de f, puis calculer ses valeurs propres. Donner l'ordre de multiplicité de ces valeurs propres.*
5. *Calculer les vecteurs propres de A, puis montrer qu'un des sous espaces propres de A est l'ensemble des points fixes de f.*
6. *Montrer que A est diagonalisable, puis trouver la matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*
7. *Calculer P^{-1}, puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

8. *On considère les trois suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies sous la forme récurrente par* $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par le système suivant*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n + 2w_n \end{array} \right.$$

   (a) *Écrire le système* $(\mathcal{S})$ *sous forme matricielle.*

   (b) *Déduire les expressions des suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en fonction de* n.

Exercice 2.4.9 *On propose de résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :*

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) + u(t) \\ y'(t) = 4y(t) + z(t) - 2u(t) \\ z'(t) = y(t) + 2z(t) - u(t) \\ u'(t) = 2y(t) + z(t) \end{array} \right.$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$ *et* $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$ *la dérivée de* $X(t)$ *par rapport à* t.

1. *Déterminer la matrice* A *telle qu'on peut écrire le système différentiel* $(\mathcal{S})$ *sous la forme :*

$$X'(t) = AX(t).$$

2. *Déterminer le polynôme caractéristique associé à* A*, puis ses valeurs propres. La matrice* A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?* A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *?*
3. *Déterminer les vecteurs propres de* A *et les sous-espaces propres.*
4. *Déterminer une base de vecteurs propres de* A*, puis diagonaliser* A.
5. *Écrire l'expression générale d'une solution* $X(t)$ *du système* $(\mathcal{S})$*, puis trouver la solution* $t \longmapsto X(t)$ *telle que* $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 1$ *et* $u(0) = -1$.