ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CP II. **SEMESTRE 2**

Exercice 1 :

1- Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_{-1}^{2} x|x|dx$, $J = \int_{-1}^{1} x|x|dx$, $K = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}dx$

$L = \int_{0}^{\pi} \sqrt{1-(\cos x)^2}dx$, $M = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{1-(\cos x)^2}dx$. $N = \int_{1}^{5} \left(x^2 + \frac{5}{x}\right)dx$

$O = \int_{2}^{6} \frac{2x-1}{x^2-1}dx$, $P = \int_{0}^{1} x\sqrt{x^2+4}dx$, $Q = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$

2- Calculer $J_a = \int_{0}^{1} (x^2 - ax)^2 dx$ pour $a\epsilon\mathbb{R}$.

Puis déterminer $inf_{a\epsilon\mathbb{R}}(J_a)$.

Exercice 2 :

Soient $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ et $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

1- Calculer $I + J$ et $I - J$

2- En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 3 :

En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_{1}^{e} \frac{3+lnx}{(4+lnx)^2}dx$, $J = \int_{0}^{2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$, $K = \int_{0}^{4} \sqrt{x^2\sqrt{x}+x}dx$

$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos x)^3}{(2+\sin x)^2}dx$, $M = \int_{ln2}^{0} \left(\frac{e^x+3e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)dx$.

Pour M, on peut utiliser l'égalité : $\frac{t^2+3}{t(t^2+1)} = \frac{3}{t} - \frac{2t}{t^2+1}$

Exercice 4 :

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

$I = \int_{1}^{a} x^2 lnx\, dx$ pour $a \geq 1$, $J = \int_{0}^{a} x^2 \cos x\ dx$ pour $a\epsilon\mathbb{R}$.

$K = \int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$, $L = \int_{0}^{a} e^{\alpha x}\cos(\beta x)\ dx$ et $M = \int_{0}^{a} e^{\alpha x}\sin(\beta x)\ dx$

Exercice 5 :

Soit : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$, telle que $n \in \mathbb{N}^*$

1- Calculer I_1.

2- Montrer que : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$

Exercice 6 :

Soient m et n deux entiers relatifs tels que : $m \geq n$.

Calculer $\int_n^m E(x)dx$ ou E(x) est la parie entière de x.

Exercice 7 :

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$. f étant continue et g continue par morceaux positive.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$

Exercice 8 :

Soit $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $M = sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

Montrer que:

$$\left| \int_{-1}^{1} \left(f(x) + x^2 f(-x) \right) dx \right| \leq \frac{8}{3} M$$

Exercice 8 :

1- Montrer que: $\lim_{u \to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Utiliser l'encadrement: $\forall t \in [0, +\infty[: 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.

2- Montrer que: $\lim_{u \to 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx = ln 3$.

3- soit $C = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{\pi} e^{-u \sin x} dx$

a- Montrer que : $\int_0^{\pi} e^{-u \sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u \sin x} dx$.

b- Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.

c- En déduire que : $C = 0$.

4- Déterminer la limite : $D = \lim_{u \to +\infty} e^{-u^2} \int_0^u e^{x^2} dx$