

1)- Répondre par Oui ou Non en justifiant la réponse:

1)- L'entropie s'exprime en $J.K^{-1}$, donc elle est extensive.

OUI – Comme rapport d'une grandeur extensive (énergie) sur une grandeur intensive (Température)

2)- La variation d'entropie entre deux états est identique que la transformation soit réversible ou non.

OUI – L'entropie est une fonction d'état donc indépendante de la transformation.

3)- La variation d'entropie au cours d'un cycle dépend de la nature de la transformation.

NON – Elle est nulle pour toute transformation cyclique.

4)- L'entropie de l'univers ne peut qu'augmenter.

OUI – L'univers est un système fermé thermiquement isolé.

5)- L'entropie d'un système quelconque ne peut qu'augmenter.

NON – Si le système n'est pas thermiquement isolé son entropie peut diminuer.

6)- L'entropie est une fonction d'état donc elle est conservative.

NON – Les deux notions n'ont pas de rapport.

7)- L'expression $\delta Q/T$ est une différentielle totale.

NON – Cette expression représente l'entropie échangée elle dépend de la transformation.

8)- Un ballon rempli d'air éclate dans une pièce. L'entropie de l'air total augmente.

OUI – On peut considérer l'air total comme un système fermé et thermiquement isolé pendant l'explosion (rapide) – Ce système subit une transformation irréversible son entropie augmente.

9)- De l'eau dans un récipient s'évapore lentement. L'entropie de l'eau augmente.

OUI – L'évaporation est une transformation irréversible.

10)- L'eau qui gèle dans un caniveau est en désaccord avec le second principe.

NON – Ce n'est pas un système thermiquement isolé son entropie peut décroître.

11)- Un cycle a la même surface en diagramme de Watt (p,V) ou en diagramme entropique (T,S).

OUI – L'aire en diagramme de Watt représente la valeur absolue du travail échangé et l'aire en entropique la valeur absolue de la chaleur échangée or $\Delta U = W + Q = 0$ (cycle).

12)- L'entropie d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

NON – Voir les expressions établies en cours.

13)- Une transformation adiabatique est isentropique.

NON – Il faut aussi qu'elle soit réversible pour être isentropique.

14)- Il existe des transformations monothermes au cours desquelles le système reçoit de la chaleur et fournit du travail.

OUI – Si elles ne sont pas cycliques.

15)- Même question pour une transformation cyclique.

NON - $\Delta U = W + Q = 0$ et $\Delta S = S_e + S_c = 0$ or $S_e = Q/T_e < 0$ donc $W > 0$.

16)- Un cycle de Carnot correspond à un rectangle en diagramme entropique.

OUI – d'évidence.

17)- La variation d'entropie dans une transformation réversible isobare d'un corps quelconque est $m.c_p \cdot \ln(T_f/T_i)$

OUI – voir les expressions établies en cours.

2)- Entropie d'un gaz

1)- Exprimer l'entropie d'un gaz parfait en coordonnées (p,V) à une constante additive près.

En coordonnées (p,V) l'identité thermodynamique adaptée est $dH = T.dS + V.dp = C_p.dT$ donc :

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - n.R \frac{dp}{p} \text{ dont une primitive est } S = C_p \ln(T) - n.R \ln(p) + S_0$$

2)- En déduire la variation d'entropie d'une mole d'un gaz parfait pour une transformation:

*- Adiabatique réversible. $\Delta S = 0$ (transformation isentropique)

*- Isotherme de $p_0 = 1$ Bar, $V_0 = 22,4$ L à $p_1 = 5$ Bar. $\Delta S = - R \ln(5)$

3)- Transformation monotherme:

Un solide de capacité thermique m.c., initialement à T_0 , est mis en contact avec une source de chaleur à $T_e = Cte$. On attend l'équilibre thermique. Exprimer pour la transformation:

*- La variation d'entropie du solide..

Un solide (donc phase condensée incompressible et indilatable) l'identité thermodynamique s'écrit $dS = dH/T = m.c.dT/T$ donc $\Delta S = m.c.\ln(T_e/T_0)$

*- La variation d'entropie de la source et l'entropie d'échange.

L'entropie d'échange à la température constante T_e est donnée par $dS_e = \frac{dQ}{T_e} = m.c. \frac{dT}{T_e}$ et

donc $S_e = m.c. \frac{(T_e - T_0)}{T_e}$ qui représente l'opposé de la variation d'entropie de la source.

*- L'entropie créée. Quel est son signe en général puis étudier le cas $T_0 = T_e(1+\epsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$.

On en déduit l'entropie créée $S_c = m.c. \left(\ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) - \frac{T_e - T_0}{T_e} \right)$ On pose $x = T_0/T_e$ et donc S_c devient

$S_c = m.c. ((x-1) - \ln(x))$ graphiquement il est facile de montrer que la droite $y = x-1$ est toujours au dessus de la courbe $y = \ln(x)$ donc $S_c > 0$.

Pour $T_e \approx T_0$ on peut faire un DL de l'expression de S_c à l'ordre deux on trouve $S_c = \epsilon^2/2 - C_e$ résultat montre que si la température d'un système ne diffère de la température de la source que par des termes du premier ordre l'entropie créée est nulle au premier ordre et la transformation peut-être considérée comme réversible.

4)- Transformation monotherme réversible:

Un gaz parfait passe de l'état (A) (V_0, T_0) à l'état (B) ($V_1 = 2.V_0, T_0$) par une transformation monotherme réversible à la température $T_e \neq T_0$.

1)- Que peut-on dire de la variation d'entropie du système (gaz,source) ?

En coordonnées (T,V) l'identité thermodynamique adaptée est $dU = T.dS - p.dV$ donc

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + n.R \frac{dV}{V} \text{ soit encore } \Delta S = n.R \ln(2) \text{ (température initiale = température finale)}$$

2)- En déduire la quantité de chaleur échangée par le gaz avec la source.

$\Delta S = S_e + S_c$ comme la transformation est réversible $S_c = 0$ donc $\Delta S = S_e = Q/T_e$ si bien que

$$Q = n.R.T_e \ln(2)$$

3)- Représenter la transformation en diagramme de Clapeyron et retrouver le résultat précédent.

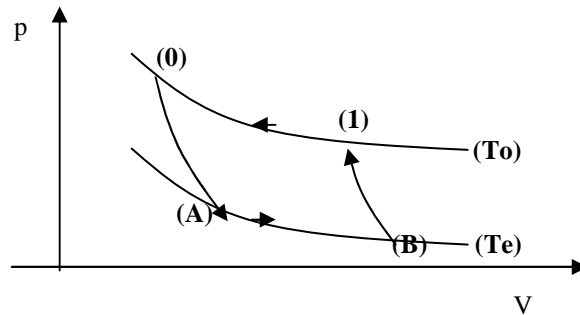
Pour que la transformation soit réversible il faut qu'elle soit mécaniquement réversible (donc quasi statique) et thermiquement réversible cette dernière condition ne peut être réalisée que si la température du système est égale à celle de la source – Il faut donc amener le système de la température T_0 à la température T_e sans échange de chaleur et de manière réversible (isentropique) puis faire la compression à la température T_e et enfin ramener le système à la température T_0 de manière adiabatique et réversible – On remplace la transformation (0)→(1) par (0)→(A)→(B)→(1) suivant le diagramme de Watt ci-dessous.

Sur (0)→(A) un gaz parfait subit une transformation isentropique (on suppose $\gamma = Cte$) on peut donc appliquer les lois de Laplace

$$T_o.V_o^{\gamma-1} = T_e.V_A^{\gamma-1} \text{ d'où } V_A = V_o \left(\frac{T_o}{T_e} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \text{ de même } V_B = 2V_o \left(\frac{T_o}{T_e} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Sur (A)→(B) on a une compression isotherme d'un gaz parfait donc $\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB} = 0$ on peut alors calculer le travail échangé sur la transformation AB.

$dW = -p.dV = -n.R.T_e \frac{dV}{V}$ qui s'intègre en $W_{AB} = -n.R.T_e \ln(2) = -Q_{AB} = -Q$ On retrouve bien le résultat précédent.



5)- Détente isotherme réversible:

Un cylindre diathermane fermé par un piston constitue un système perméable à la chaleur. Il contient une mole de gaz parfait dans l'état $T_1 = 273 \text{ K}$ et $P_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Ce système est plongé dans un bain eau-glace constituant un thermostat à 273 K . On agit sur le piston mobile pour détendre le gaz jusqu'à $P_2 = 10^5 \text{ Pa}$. ($R = 8,315 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$)

1)- Déterminer la masse de glace apparaissant dans le thermostat. On donne $\ell_F = 334 \text{ J.g}^{-1}$.

La transformation (1)→(2) du gaz parfait est isotherme et réversible d'où $\Delta U_{12} = W_{12} + Q_{12} = 0$ On peut calculer le travail reçu algébriquement par la mole de gaz parfait :

$W_{12} = R.T_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ et donc la chaleur échangée est $Q_{12} = R.T_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = R.T_1 \ln(3) > 0$ Le

gaz parfait reçoit de la chaleur du thermostat.

Cette chaleur est fournie par le système eau-glace en transformant une masse m d'eau en glace

on a alors : $-Q_{12} = -m.\ell_F$ donc $m = \frac{R.T_1}{\ell_F} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ où encore $m = 7,50 \text{ g}$

2)- Calculer la variation d'entropie du gaz et celle du thermostat.

La variation d'entropie d'une mole d'un gaz parfait en transformation isotherme est donnée par :

$$\Delta S_{12} = -R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 9,13 \text{ J.K}^{-1}$$

Le système total {gaz-thermostat} est thermiquement isolé et en transformation réversible son entropie est constante $\Delta S_{\text{Total}} = \Delta S_{\text{gaz}} + \Delta S_{\text{source}} = 0$ donc $\Delta S_{\text{source}} = -\Delta S_{\text{gaz}} = -9,13 \text{ J.K}^{-1}$.

6)- Entrée d'air:

Un récipient de volume V_o , de température T_o , contient de l'air assimilable à un gaz parfait à la pression $P_o.(1-x)$ avec $x < 1$. De l'air atmosphérique extérieur pénètre dans le récipient par un petit robinet. L'atmosphère est à la pression constante P_o et à la température constante T_o .

1)- Déterminer le travail et la chaleur fourni par l'atmosphère.

Dans l'état initial le récipient contient n_o mole d'air tel que $p_o.V_o(1-x) = n_o.R.T_o$ et dans l'état final n_f moles d'air tel que $p_o.V_o = n_f.R.T_o$ – Si bien que n moles d'air sont entré dans le

récipient tel que $n = n_f - n_o = \frac{p_o.V_o}{R.T_o} x$

Le système constitué par les n moles d'air admises (système fermé) subit une transformation isotherme à la pression extérieure constante donc $\Delta U = W + Q = 0$ et pour la transformation monobare $W = p_o.V$ où V représente le volume occupé par les n moles d'air admises dans le récipient donc $V = V_o.x$ d'où $W = p_o.V_o.x = -Q$

2)- Faire un bilan entropique.

*- Pour les n moles admises la transformation est à pression et température constante il n'y a donc pas de variation d'entropie.

*- Pour les n_0 moles d'air de départ elles ont subies une transformation monotherme de $p_0(1-x)$ à p_0 soit donc une variation d'entropie $\Delta S = -n_0 \cdot R \cdot \ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right) = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} \cdot (1-x) \cdot \ln(1-x)$ qui représente aussi la variation d'entropie totale de l'air du récipient.

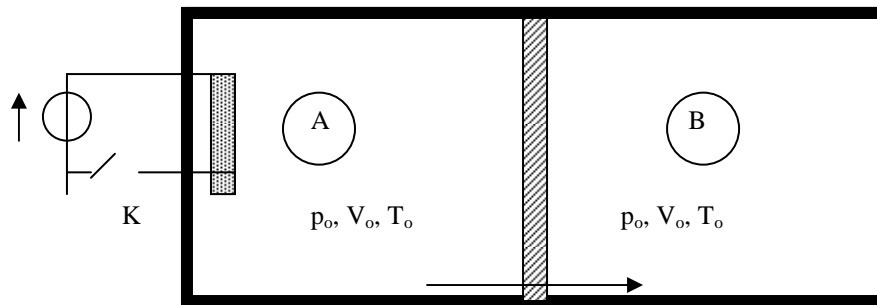
*- L'entropie échangé par l'air avec la source est $Se = \frac{Q}{T_0} = -\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} x$

*- L'entropie créée est donc donnée par $Sc = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} (x + (1-x) \cdot \ln(1-x))$ comme $x \ll 1$ on peut faire un DL à l'ordre 2 il vient $Sc = \frac{1}{2} \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} x^2 > 0$

Exo 8 :

Un cylindre horizontal adiabatique et indéformable est séparé en deux compartiments par un piston, adiabatique, mobile sans frottement, de volume et de masse négligeables.

Dans l'état initial les deux compartiments contiennent chacun une mole d'un gaz parfait, de coefficient $\gamma = 1,40$ constant, dans le même état (p_0, V_0, T_0). Une petite résistance r , de capacité thermique négligeable, permet de chauffer le gaz du compartiment A. On donne $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.



A l'instant initial on ferme l'interrupteur K. La chaleur dégagée par effet Joule dans la résistance chauffe le gaz du compartiment A jusqu'à ce que la pression atteigne la valeur $p_A = 5p_0$. Les paramètres d'état des gaz dans les deux compartiments sont alors (p_A, V_A, T_A) et (p_B, V_B, T_B) dans l'état d'équilibre final.

1)- Par quelle relation entre des paramètres d'état peut-on traduire l'équilibre du piston dans l'état final ?

Le piston, en tant que solide, est en équilibre si et seulement si la somme des forces appliquées est nulle – Suivant l'axe horizontal cette condition se traduit par l'égalité des pressions de part et d'autre du piston :

$$p_A = p_B = 5p_0$$

2)- Par quelle relation entre des paramètres d'état peut-on traduire l'indéformabilité du cylindre au cours de la transformation ?

Le volume total du cylindre se conserve donc $2 \cdot V_0 = V_A + V_B$

3)- Pourquoi **doit-on** considérer la transformation subie par le gaz du compartiment A comme **irréversible** ? Justifier soigneusement la réponse.

Le gaz du compartiment A n'est pas thermiquement isolé - Dès qu'on ferme l'interrupteur la température de la résistance augmente très rapidement alors que celle du gaz du compartiment A (de part son étendue) augmente plus lentement – L'échange thermique entre la résistance et le gaz n'est donc pas réversible ($T_A \neq T_R$)

4)- Pourquoi **peut-on** considérer la transformation subie par le gaz du compartiment B comme **réversible** ? Justifier soigneusement la réponse.

Le gaz du compartiment B est thermiquement isolé – Pour que la transformation subie par ce gaz soit réversible il suffit qu'elle soit mécaniquement réversible or l'augmentation de pression dans le compartiment A est liée aux échanges thermiques entre la résistance et le gaz de A qui sont très lents donc le déplacement du piston est lui même très lent (énergie cinétique négligeable) on peut donc dire que la transformation dans le compartiment B peut-être considérée comme quasi-statique donc mécaniquement réversible (pas de frottement).

5)- En vous aidant des réponses aux questions précédentes, établir les expressions des paramètres d'état dans les deux compartiments la fin de la transformation en fonction de p_0, V_0, T_0 et γ .

Compartiment B : $p_B = 5p_0$

La transformation subie par le gaz parfait du compartiment B est considérée comme réversible et elle est adiabatique on peut donc appliquer les lois de Laplace :

$$p_B \cdot V_B^\gamma = p_O \cdot V_O^\gamma \quad \text{et donc} \quad V_B = V_O \left(\frac{p_O}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{V_O}{5^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\frac{p_B^{\gamma-1}}{T_B^\gamma} = \frac{p_O^{\gamma-1}}{T_O^\gamma} \quad \text{et donc} \quad T_B = T_O \left(\frac{p_B}{p_O} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_O \cdot 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Compartiment A : $p_A = 5 \cdot p_O$ On ne peut pas appliquer les lois de Laplace.

$$V_A = 2V_O - V_B \quad \text{et donc} \quad V_A = V_O \left(2 - \frac{1}{5^{\frac{1}{\gamma}}} \right)$$

$$\frac{p_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{p_O \cdot V_O}{T_O} \quad \text{et donc} \quad T_A = 5 \cdot T_O \left(2 - \frac{1}{5^{\frac{1}{\gamma}}} \right)$$

6)- Calculer les variations d'énergie interne dans chaque compartiment en fonction de T_O , γ et R . En déduire l'expression de l'énergie dégagée sous forme d'effet Joule dans la résistance.

On choisit le gaz parfait comme système dans chaque compartiment – pour chacun d'eux on peut écrire :

$$\Delta U = n \cdot C_{V_m} \cdot \Delta T = \frac{R}{\gamma-1} \Delta T$$

$$\text{Dans le compartiment B :} \quad \Delta U_B = \frac{R \cdot T_O}{\gamma-1} \left(1 - 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

$$\text{Dans le compartiment A :} \quad \Delta U_A = \frac{5 \cdot R \cdot T_O}{\gamma-1} \left(2 - \frac{1}{5^{\frac{1}{\gamma}}} \right)$$

Pour l'ensemble des deux gaz dans les compartiment A et B : $\Delta U_{AB} = W + Q = \Delta U_A + \Delta U_B$ car U est extensive.

L'enceinte est indéformable donc le travail échangé est nul et la quantité de chaleur est échangée par effet Joule

$$\text{si bien que} \quad Q = \frac{R \cdot T_O}{\gamma-1} \left(1 - 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) + \frac{5 \cdot R \cdot T_O}{\gamma-1} \left(2 - \frac{1}{5^{\frac{1}{\gamma}}} \right)$$

7)- Calculer littéralement puis numériquement la variation d'entropie ΔS , l'entropie échangée S_e et l'entropie créée S_c dans chaque compartiment au cours de la transformation. Commenter les résultats trouvés en relation avec les questions 3) et 4). On supposera que dans l'état final la résistance est en équilibre avec le gaz dans le compartiment A.

$$\text{L'identité thermodynamique en } U \text{ nous donne : } \Delta S = \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{T_F}{T_O} + R \ln \frac{V_F}{V_O}$$

Appliquée au compartiment B on trouve : $\Delta S_B = 0$ et $S_e = 0$ (adiabatique) donc $S_c = 0$ ces résultats sont cohérents puisque la transformation du gaz dans B est adiabatique réversible.

$$\text{Appliquée au compartiment A on trouve : } \Delta S_A = \frac{R}{\gamma-1} \ln \left[5 \left(2 - \frac{1}{5^{\frac{1}{\gamma}}} \right) \right] + R \ln \left(2 - \frac{1}{5^{\frac{1}{\gamma}}} \right)$$

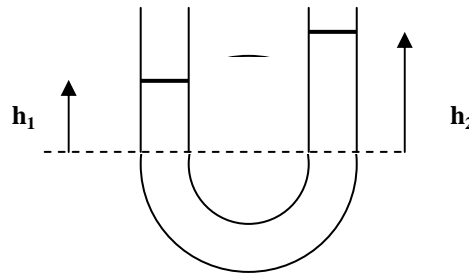
Pour calculer S_e il faut supposer que la température de la résistance donc celle du thermostat est la température finale du gaz dans A d'où $S_e = Q/T_A$ un calcul numérique montre que $S_c > 0$.

- Quelques exercices de Statique des fluides -

Exercice 1: Liquides non miscibles

Un tube en U contient deux liquides non miscibles de masse volumique respective μ_1 et μ_2 . Les volumes versés sont les mêmes soit $V = 10 \text{ cm}^3$. La section du tube est $S = 1 \text{ cm}^2$. Calculer la dénivellation h entre les surfaces d'un même liquide.

On prendra $\mu_1 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\mu_2 = 800 \text{ kg.m}^{-3}$



Introduisons les points A à la surface libre du liquide 1, B sur la ligne pointillée dans le liquide 1, C sur la ligne pointillée à l'interface entre liquide 1 et 2 et D à la surface libre du liquide 2.

Appliquons le PFSF entre A et B dans le liquide 1 : $p_B - p_A = \mu_1 \cdot g \cdot h_1$

Appliquons le PFSF entre C et D dans le liquide 2 : $p_C - p_D = \mu_2 \cdot g \cdot h_2$

Or $p_A = p_D = p_0$ et $p_B = p_C$ (B et C sont sur une même horizontale dans le même liquide)

Donc $\mu_1 \cdot h_1 = \mu_2 \cdot h_2$ et $V = h_2 \cdot S$ si bien que $h_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{V}{S} = 8 \text{ cm}$

Exercice 2: Poussée d'Archimède.

Un aérostat se compose d'une nacelle avec ses accessoires, son pilote et une enveloppe. La masse totale de l'ensemble est $m = 300 \text{ kg}$ (enveloppe supposée vide). L'enveloppe inélastique contient un gaz léger (Hélium) que l'on considérera comme un gaz parfait de masse molaire moléculaire $M_{\text{He}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$. Elle est percée d'un large trou à sa partie inférieure si bien que la pression et la température du gaz sont toujours égales à la pression et à la température de l'atmosphère à l'altitude z . On adoptera le modèle isotherme avec $T_0 = 300 \text{ K}$ et $p_0 = 1.013 \text{ bar}$ et on donne $H_i = 8,77 \text{ km}$.

Dans un modèle isotherme à T_0 la pression atmosphérique varie suivant la loi $p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$ (Voir le cours) avec $H_i = \frac{R \cdot T_0}{M \cdot g} = 8768 \text{ m}$ dans une atmosphère à 300 K (Hauteur d'échelle isotherme)

1)- $p_{\text{He}} = \mu_{\text{He}} \cdot R \cdot T_{\text{He}} / M_{\text{He}}$ et $p_a = \mu_a \cdot R \cdot T_a / M_a$ à l'équilibre $p_{\text{He}} = p_a$ et $T_{\text{He}} = T_a$ d'où $\delta = \mu_{\text{He}} / \mu_a = M_{\text{He}} / M_a = 0,138$

2)- L'aérostat est retenu au sol, l'enveloppe inélastique contient un volume V_0 d'hélium et elle n'est pas tendue.

$$\begin{aligned} 2\text{-a)- } F &= m \cdot g + m_{\text{He}} \cdot g + \pi_a \text{ soit en projection sur } Oz : F = -m \cdot g - \mu_{\text{He}} \cdot g \cdot V_0 + \mu_a \cdot g \cdot V_0 \\ F &= -m \cdot g + \mu_0 \cdot g \cdot V_0 \cdot (1 - \delta) = -m \cdot g + p_0 \cdot (M_a \cdot g / R \cdot T_0) \cdot V_0 \cdot (1 - \delta) \\ F &= -m \cdot g + p_0 \cdot V_0 \cdot (1 - \delta) / H_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\text{-b)- } \text{Pour que l'aérostat décolle, il faut que } F > 0 \text{ donc } V_0 > m \cdot g \cdot H_i / (p_0 \cdot (1 - \delta)) \\ V_0 &> 300 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

3)- On prend $V_0 = 400 \text{ m}^3$ et on libère le ballon. Dans une première phase la masse du ballon est constante (l'enveloppe inélastique n'est pas tendue).

$$\begin{aligned} 3\text{-a)- } F &= -m \cdot g + \mu_a \cdot g \cdot V \cdot (1 - \delta) \text{ si la masse est constante } m_{\text{He}} = \mu_a \cdot V = \mu_0 \cdot V_0 \text{ donc} \\ F &= -m \cdot g + \mu_0 \cdot g \cdot V_0 \cdot (1 - \delta) = -m \cdot g + p_0 \cdot V_0 \cdot (1 - \delta) / H_i = \text{Cte} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\text{-b)- } \text{L'altitude maximale atteinte sera telle que } V(z_{1M}) = V_M = 500 \text{ m}^3 \text{ or} \\ V(z) &= V_0 \cdot (p_0 / p) \cdot (T / T_0) = V_0 \cdot \exp(z / H_i) \\ z_{1M} &= H_i \cdot \ln(V_M / V_0) = 1957 \text{ m} \end{aligned}$$

4)- Dans une seconde phase le volume de l'enveloppe reste constant et égal à V_M .

$$4\text{-a)- } \text{L'hélium s'échappe la masse du ballon n'est plus constante } V(z) = V_M$$

$$\begin{aligned} 4\text{-b)- } F &= -m \cdot g + \mu_a \cdot g \cdot V_M \cdot (1 - \delta) \text{ avec } \mu_a = p_0 / H_i \cdot g \cdot \exp(-z / H_i) \text{ d'où l'expression de } F: \\ F &= -m \cdot g + (p_0 \cdot V_M / H_i) \cdot (1 - \delta) \cdot \exp(-z / H_i) \end{aligned}$$

$$4\text{-c)- } F \text{ diminue avec l'altitude, l'altitude maximale atteinte correspondra à } F = 0$$

$$z_{2M} = H_i \ln(p_0 V_M (1-\delta) / mg H_i)$$

$$z_{2M} = 4611 \text{ m}$$

Exercice 3: Atmosphère polytropique

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et on se donne dans l'atmosphère une relation phénoménologique de la forme $p(z) / \mu(z)^k = \text{Cte}$ (Relation polytropique d'indice k) ; k est une constante ajustable à posteriori aux données expérimentales. Ce modèle est une généralisation du modèle d'atmosphère isotherme pour lequel on aurait $k = 1$. On prend $k \neq 1$ et $p(0) = p_0$, $T(0) = T_0$, $\mu(0) = \mu_0$. Etablir une relation donnant implicitement $p(z)$ et montrer que $dT/dz = \text{Cte}$. En déduire une valeur de k sachant que $dT/dz = -7.10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$.

1)- Pour le modèle isotherme $p(z) = \mu_a(z).R.T_0/M_a$ donc $p(z)/\mu_a(z) = \text{Cte}$ d'où $k = 1$.

2)- Pour $k \neq 1$ on peut écrire $\mu_a(z) = \mu_0.(p(z)/p_0)^{1/k}$ en remplaçant dans $dp/dz = -\mu_a g$, il vient:

$$dp/dz = -\mu_0.g.(p/p_0)^{1/k}$$

avec le changement de variable proposé:

$$d\alpha/dz = -\alpha^{1/k}/H_i$$

3)- En séparant les variables $\alpha^{1/k}.d\alpha = -dz/H_i$ et en intégrant entre 0 et z il vient:

$$\alpha^{(k-1)/k} = 1 - z.(k-1)/(k.H_i)$$

D'où l'expression de $H_p = H_i.k/(k-1)$ qui se mesure en mètres.

4)- En éliminant $\mu_a(z)$ entre l'équation d'état des gaz parfait et la relation polytropique on peut écrire: $\alpha = \alpha^{1/k}.T(z)/T_0$ d'où

$$T(z)/T_0 = \alpha^{(k-1)/k} = 1 - z/H_p$$

5)- $dT(z)/dz = -T_0/H_p = -7.10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$, on peut en déduire une valeur de k et calculer H_p .

$$k = 1,26 \text{ et } H_p = 42486 \text{ m} = 42,5 \text{ km}$$

L'altitude à laquelle la température atteint 223 K (début de la couche isotherme). $z_i = 10,9 \text{ km}$.

Exercice 4: Equilibre d'un fluide dans un référentiel en rotation uniforme.

Un récipient cylindrique de rayon R est rempli d'eau sur une hauteur h et plongé dans une atmosphère à la pression p_0 uniforme. Il est mis en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe vertical Oz : Déterminer l'équation de la trace de la surface libre de l'eau dans un plan vertical du référentiel tournant et contenant l'axe Oz . Le liquide est supposé en équilibre dans le référentiel tournant.

Reprendre la question précédente en supposant que le récipient est en mouvement de translation horizontal uniformément varié d'accélération $\mathbf{a} = a_0.\mathbf{u}_x$.

On écrit l'équilibre d'une particule fluide dans le référentiel tournant non galiléen en utilisant le PFSF

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \mu.\vec{g} + \vec{f}_{\text{eol}}$$

La densité volumique de force d'inertie d'entraînement est $\vec{f}_{\text{eol}} = \mu.\omega^2.\overrightarrow{HM}$ donc en projetant sur une base cylindrique du référentiel tournant il vient :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right).\vec{e}_z + \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right).\vec{e}_r = -\mu.g.\vec{e}_z + \mu.\omega^2.r.\vec{e}_r \text{ et sachant que } \overrightarrow{\text{grad}}(p).d\overrightarrow{OM} = dp \text{ on obtient}$$

l'équation différentielle : $dp = -\mu.g.dz + \mu.\omega^2.r.dr$ qui s'intègre

$$p = -\mu.g.z + \frac{1}{2}\mu.\omega^2.r^2 + \text{Cte}.$$

La surface libre du liquide en contact avec l'atmosphère est à la pression constante p_0 donc un point à la surface libre vérifie l'équation $z = \frac{\omega^2}{2.g}.r^2 + z_0$ qui est l'équation d'un paraboloïde d'axe Oz .

Pour un référentiel en translation rectiligne seule l'expression de la densité volumique de force d'inertie change le reste de la démarche est identique.