Exercice 10
Etudier la nature de la série de Bertrand, de terme général:

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \qquad pour \qquad n \geq 2 \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Distinguer les cas , $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, $\alpha = 1$,

Solution

Remarquons d'abord que le terme général U_n est positif pour tout $n \geq 2$
1- Si $\alpha > 1$, il existe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$ alors:

$$n^\gamma U_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln(n)^\beta}, \qquad \forall n \geq 2$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln(n)^\beta} = 0, \qquad \text{car} \quad \gamma - \alpha < 0$$

D'où

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow U_n < \frac{1}{n^\gamma} \quad \gamma > 1$$

Ainsi, par comparaison avec une série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\gamma}$ convergente (puisque $\gamma > 1$), on obtient la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} U_n$ dans ce cas pour tout valeur de β.
2- Si $\alpha < 1$ alors, $\alpha - 1 < 0$, On a

$$nU_n = \frac{n^{1-\alpha}}{\ln(n)^\beta}, \qquad \forall n \geq 2$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} nU_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{\ln(n)^\beta} = +\infty, \qquad \text{car} \quad 1 - \alpha < 0$$

D'où

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow U_n > \frac{1}{n}$$

Ainsi, par comparaison on a la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ est diverge alors Donc la série $\sum_{n\geq 2} U_n$ est aussi diverge pour tout valeur de β.

3- Si $\alpha = 1$
Soit f_β la fonction définie sur $[2, +\infty]$ par

$$f_\beta(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$$

f_β est positive, décroissante et continue sur $[2, +\infty]$ (car f_β est dérivable et $f'_\beta(t) = -\frac{(\ln(t))^{\beta-1}}{t^2(\ln(t))^{2\beta}}(\ln(t) + \beta)$)
Donc , la série $\sum_{n\geq 2} U_n$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ sont de même nature.
On pose $u = \ln t$ alors $du = \frac{dt}{t}$

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u^\beta} = \frac{1}{1-\beta}[(\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}]$$

* Si $\beta < 1$, donc

$$\int_2^{+\infty} f_\beta(t)dt = +\infty$$

D'où $\sum_{n\geq 2} U_n$ diverge.
** Si $\beta > 1$ donc

$$\int_2^{+\infty} f_\beta(t)dt = \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

D'où $\sum_{n\geq 2} U_n$ converge.
*** Si $\beta = 1$ donc

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln(t))} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u} = \ln\ln x - \ln\ln 2$$

D'où $\sum_{n\geq 2} U_n$ diverge.

EXERCICE 11
Soient $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *et* $V_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\log n}$

1. *Quelle est la nature des séries* $\sum U_n$ *et* $\sum V_n$ *?*
2. *Montrer que* $U_n \sim_\infty V_n$
3. *Conclure.*

Solution

1- La série harmonique alternée $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

On a vu **EX .10**, que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$ est divergente , donc il en est de même pour $\sum V_n$.

2- On a

$$\frac{V_n}{U_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\log(n)}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{U_n} = 1$$

C'est Ã dire $U_n \sim_\infty V_n$

3- On voit que si U_n et V_n sont de signe quelconque. alors $U_n \sim_\infty V_n$ n'implique pas que $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ sont de même nature.

EXERCICE 12
Etudier la nature des séries alternées de terme général:

1. $U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$
2. $V_n = (-1)^n \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$
3. $W_n = \frac{(-1)^n+1}{\log(n)}$

Solution

1- Soit f une fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x + \sin(x)}$$

est positive et dérivable sur I et pour tout $x \in I$ On a

$$f^{'}(x) = -\frac{1 + \cos(x)}{(x + \sin(x))^2} < 0$$

donc f est décroissante
On a $\sum_n U_n$ est une série altérnée ($U_n \times U_{n+1} < 0$) dont la valeur absolue de terme général $|U_n| = \frac{1}{n+\sin(n)}$ tend vers 0 en décroissant. (car $\frac{1}{n+\sin x} < \frac{1}{n-1}$)
Donc $\sum_{n=1} U_n$ converge.
2- Soit g une fonction définie sur $I =]e^2, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}$$

est positive et décroissante car g est décroissante et $\forall x \in I, \qquad g^{'}(x) = -\frac{\log(x)-2}{2x\sqrt{x}} < 0$
De plus $|V_n| = \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 en décroissant. (à partir d'un certain rang).
Donc $\sum_{n=1} V_n$ est une série altérnée convergente.
3- On pose $X_n = \frac{(-1)^n}{\log(n)}$ est une série de terme général d'une série alternée convergente car $|X_n| = \frac{1}{\log(n)}$ tend vers 0 en décroissant.
Comme $\log(n) < n$ alors on pose $Y_n = \frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{n}$
Or la série $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ est diverge , alors d'après les théorèmes de comparaison ,la série $\sum_{n=1} Y_n$ est diverge.
Par suite $\sum_{n=1} W_n = \sum_{n=1} X_n + \sum_{n=1} Y_n$ est une série divergente.