ENSA-ALHOCEIMA CP II
ANALYSE 3 SEMESTRE 1

Exercice 1 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en (0,0).

Exercice 2 :

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est continue en (0,0).

Exercice 3 :

Montrer que les limites suivantes n'existent pas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\mathrm{x-y}}{|\mathrm{x+y}|}\right)$$

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E telles que :

$N_1 \leq CN_2$ avec C une constante strictement positive.

1- Montrer que la fonction $f: (E, N_1) \to \mathbb{R}^+$ définie par :
$$f(x) = N_1(x)$$
est continue sur E.

2- La fonction $g: (E, N_2) \to \mathbb{R}^+$ définie par :
$$g(x) = N_1(x)$$
est-elle continue sur E ?

3- Dans quel cas peut-on assurer la continuité de la fonction :
$h: (E, N_1) \to \mathbb{R}^+, \quad h(x) = N_2(x)$ sur E ?

Exercice 5 :

Considérons la fonction f suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & si \quad y \leq |x| \\ x^4 & si \quad y > |x| \end{cases}$$

1- Déterminer le domaine de définition de f.
2- Soit $(x_0, y_0) \epsilon \mathbb{R}^2$ fixé.

a- Montrer que f est continue si $y_0 > |x_0|$ et $y_0 < |x_0|$.

b- Supposons que $y_0 = |x_0|$,
montrer que f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si $x_0{}^4 = y_0{}^2$

c- en déduire les valeurs de x_0 pour lesquelles f est continue en (x_0, y_0).

Exercice 6 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et étudier sa continuité sur D_f dans les cas suivants :

1- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x|y|$
2- $f:]0,1[^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to \begin{cases} x(1-y) & si \quad y \leq x \\ (1-x)y & si \quad y > x \end{cases}$

3- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y) \to (xsiny, y + x, y^5)$
4- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \to \left(yz, x\sqrt{z}, \frac{y}{x}\right)$

5- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 7 :

1- Montrer que la fonction : $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = \frac{2xy}{1 + e^{(x^2+y^2)}}$$

est bornée sur $\mathbb{R}^2$.