Série N^{o}5 : Matrices, changement de base : Coordonnées sphériques

Exercice 1

On considère $\mathbb{P}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1 + X, \quad P_2 = (1 + X)^2, \quad \text{et} \quad P_3 = (1 + X)^3.$$

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est un système libre dans $\mathbb{P}_3[X]$
2. Soit $P = -3X + X^3$, écrire P comme combinaison linéaire dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3).
3. Que peut-on déduire ?
4. Trouver une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit E l'espace physique muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi/2]$. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon ρ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}}) = \varphi$ et M' la projection orthogonale de M sur le plan (xOy) tel que $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$

1. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
3. Trouver les expressions des vecteurs $\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$, $\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$.
4. Calculer $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ en fonction de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.
5. Que peut-on déduire ?

Exercice 3

Soit $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v = -5e_1 + 2e_2 + e_3$ et $w = -e_1 - 3e_2 + e_3$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$. Que peut-on déduire ?
2. Calculer $X = u + v$ et $Y = u + 3v - 5w$ en fonction de e_1, e_2 et e_3. Le système $\{X, Y, w\}$ est-il libre ?
3. Vérifier que le système $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer e_1, e_2 et e_3 en fonction de u, v et w.
5. Calculer $\det_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$ et $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w).\det_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$.
6. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f(e_1) = u, \ f(e_2) = v \text{ et } f(e_3) = w,$$

$$g(u) = e_1, \ g(v) = e_2 \text{ et } g(w) = e_3.$$

(a) Déterminer les matrices $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(g)$.

(b) En utilisant les questions précédentes, montrer que f et g sont des automorphismes d'espaces vectoriels.

(c) En utilisant les questions précédentes, déduire A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 4

Soient $\mathbb{P}_3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 et $\{1, t, t^2, t^3\}$ sa base canonique. On considère les polynômes suivants :

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t) \quad \text{et} \quad B_3^3(t) = t^3.$$

$$H_0^3(t) = (1-t)^2(2t+1), \quad H_1^3(t) = t(1-t)^2, \quad H_2^3(t) = t^2(t-1) \quad \text{et} \quad H_3^3(t) = (-2t+3)t^2.$$

1. Quel est la dimension de $\mathbb{P}_3$? **Justifier**
2. Montrer que $(B_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ et $(H_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ sont deux bases de $\mathbb{P}_3$.
3. Déterminer les matrices A et B dans $\mathbb{R}^{(4\times 4)}$ telles que
$$\begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$
4. Montrer que A et B sont inversibles, calculer A^{-1} puis calculer le produit matriciel BA^{-1}.
5. En déduire les expressions des polynômes H_i^3 $(i = 0, 1, 2, 3)$ dans la base $(B_i^3)_{i=0,1,2,3}$.

Exercice 5

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base (e_1, e_2, e_3). A est-elle inversible ?
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ? **Justifier**
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de f, montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel puis déterminer sa base.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
*Donner une interprétation géométrique à $\mathcal{D}$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
5. Calculer $f \circ f(e_i)$, pour $i = 1, 2, 3$. En déduire l'expression de f^2 en fonction de f.
*L'endomorphisme f est-il un projecteur ? Trouver la matrice A^2 associée à f^2 relativement à la base (e_1, e_2, e_3).
6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f^n = 3^{n-1} f$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver l'expression de $(I_3 + A)^n$ en fonction de n.
*Vérifier votre expression pour $n = 3$ en effectuant le produit matriciel.
8. Reprendre la question 7) pour $(I_3 - A)^n$, puis pour $(3I_3 - 2A)^n$.
9. Déterminer le polynôme caractéristique de A, puis trouver ses valeurs propres.

Exercice 6

Soit a un nombre réel, on considère le système d'équations linéaires suivant

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ ax + y + az = -1 \\ a^2 x + ay + z = 1 \end{cases}$$

*Montrer que le système $(\mathcal{P})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \notin \{-1, 1\}$. Dans ce cas, résoudre le système $(\mathcal{P})$ par la méthode de Gauss.
*Discuter l'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ dans le cas $a = -1$ et dans le cas $a = 1$ (Toujour par la méthode de Gauss). L'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.