

Série n° 3

– Fonctions de Plusieurs Variables:
Limites et Continuité –

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

1. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt{y}}$.

2. $f(x, y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x - y}}$.

3. $f(x, y) = \ln(x + y)$

Exercice 2

d'après la définition de la limite des fonctions de plusieurs variables montrer que.

1°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2} = 0$

2°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

3°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$

4°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$

Exercice 4

Etudier ces limites existent-elles dans \mathbb{R} ?

1°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x-y}$

- 2°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x)-y}{x-\sin(y)}$

3°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

- 4°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2 + y^2}$

5°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2}$

- 6°) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2}$ Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ de trois façons :

1. d'après la définition,
2. d'après le théorème de pincement,
3. en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 6

Etudiez la continuité sur \mathbb{R}^3 de la fonction suivante :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^3z^3}{x^4+y^6+z^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 7

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

est-elle prolongeable par continuité au point $(0, 0)$.