

Série n° 4

– Différentiabilité et Calcul différentiel –

Exercice 1

1°) Montrer d'après la définition que la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

est différentiable dans \mathbb{R}^2 et calculer la différentielle.

2°) L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par: .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0, 0)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^3 y - x y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

2°) Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$ existent et les calculer le cas échéant.

3°) La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

4°) La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en \mathbb{R}^2 ?

2°) Calculer $\nabla f(x, y)$

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = x^3 - y^3$$

Dire si le graphe de f :

$$\mathcal{G}_f = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z = f(x, y)\}$$

admet un plan tangent au point $(0, 1, -1)$ et, le cas échéant, donner l'équation du plan.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en \mathbb{R}^2 ?

2°) Calculer $\nabla f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, calculer ensuite $\nabla f(0, 0)$

3°) La fonction f est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 6 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$$

1°) Déterminer D .

2°) Déterminer la différentielle en tout point $(x, y) \in D$

3°) Calculer $d_{(0,2)}f$ en les vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ et $\vec{v} = (1, 1)$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^3 \cos(\frac{1}{x^2 + y^2}), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en \mathbb{R}^2 ?

2°) Calculer $\nabla f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, calculer ensuite $\nabla f(0, 0)$

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

4°) Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x, y) = (\sin(x + 2y), \cos(2x + y))$$

1°) Montrer que f est différentiable en tout point de \mathbb{R}^2

2°) Calculer sa différentielle.

3°) Calculer la matrice Jacobienne de f en tout point de \mathbb{R}^2