Nom : Bouamoud Imad Eddine

Niveau : Première Année Cycle Préparatoire (CP1)

CNE : S145047862

Examen : “Algèbre Linéaire”

Exercice 1 :

$E = \{ f :]0, 1[\to \mathbb{R}\}$

1. Montrons que (E, +, .) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en utilisant la définition.

   Soient f ; g $\in$ E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on sait que les 2 fonctions f + g et λ.f sont définies par :

   $$\forall x \in]0, 1[: (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

   C_1) (E, +) est un groupe commutatif ? L'addition + est une loi de composition interne définie sur E qui est :

   - + admet un élément neutre dans E sur la fonction nulle que l'on note N définie par : $\forall x \in]0, 1[: N(x) = 0$
   - Chaque élément f $\in$ E admet un symétrique dans (E, +) à savoir –f tels que f + (-f) = (-f) + f = 0
   - L'addition + est commutatif dans E. (car f + g = g + f pour tous f et g de E)

   C_2) $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ; \forall f \in E ; (\alpha + \beta).f = \alpha.f + \beta.f$

   En effet ; soit $x \in]0, 1[$

   On sait que :

   $$\begin{aligned}(\alpha + \beta).f(x) &= (\alpha + \beta)\times f(x)\\ &= \alpha\times f(x) + \beta\times f(x)\\ &= (\alpha.f + \beta.f)(x)\end{aligned}$$

   D'où $(\alpha + \beta).f = \alpha.f + \beta.f$

   C_3) $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ; \forall f \in E ; \alpha.(\beta.f) = (\alpha\times\beta).f$?

   En effet ; $\alpha.(\beta.f)(x) = \alpha\times(\beta.f)(x) = \alpha\times(\beta\times f(x)) = (\alpha\times\beta)\times f(x) = (\alpha\times\beta).f(x)$

D'où $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\times\beta).f$

C_4) $(\forall\alpha \in \mathbb{R})$ $(\forall(f, g) \in E^2)$ $\alpha.(f + g) = \alpha.f + \alpha.g$?

En effet, soit $x \in]0 , 1[$ on a :
$\alpha.(f + g)(x) = \alpha\times(f + g)(x) = \alpha\times(f (x)+ g(x)) = \alpha\times f(x)+ \alpha\times g(x)$
$= \alpha.f(x) + \alpha.g(x) = (\alpha.f + \alpha.g)(x)$

D'où $\alpha.(f + g) = \alpha.f + \alpha.g$

C_5) $\forall f \in E : 1.f = f$?

En effet, soit $x \in]0 , 1[$ on a :
$1.f(x) = 1\times f(x) = f(x)$

Donc $1.f(x) = f(x)$

Alors puisque les conditions C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont vérifiées alors (E, +, .) est un
$\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $f_1(t) = e^t$ et $f_2(t) = e^{2t}$ pour tout $t \in]0, 1[$.

Montrons que la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre ?

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha.f_1 + \beta.f_2 = 0$

Donc $\forall t \in]0, 1[: \alpha.f_1(t) + \beta.f_2(t) = 0$

c.à.d. : $\forall t \in]0, 1[: \alpha\, e^t + \beta\, e^{2t} = 0$

c.à.d. : $\forall t \in]0, 1[; e^t(\alpha + \beta\, e^t) = 0$

Or $e^t \neq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$

Donc $(\forall t \in]0, 1[: \alpha + \beta\, e^t = 0)$

Pour $t = ½$ et $t = 1/3$ deux éléments de $]0, 1[$ on obtient :

$\alpha + \beta\, e^{1/2} = 0$ et $\alpha + \beta\, e^{1/3} = 0$

donc $(\alpha + \beta\, e^{1/2}) – (\alpha + \beta\, e^{1/3}) = 0$

c.à.d. : $\beta.(e^{1/2} - e^{1/3}) = 0$

Or $e^{1/2} - e^{1/3} \neq 0$

D'où $\beta =0$ par suite $\alpha =0$

D'où la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre.

- la famille $\{f_1, f_2\}$ n'est une base de E car elle n'est pas une famille génératrice. On va utiliser une preuve par l'absurde soit $g \in E$ définie par :
  $\forall t \in]0, 1[: g(t) = 1$
  (fonction constante).
  On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha.f_1 + \beta.f_2 = g$
  Puisque $g \neq 0$ alors ($\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$)

  On a $\forall t \in]0, 1[: \alpha.e^t + \beta.e^{2t} = 1$

  Par passage à la dérivation on obtient : $\alpha.e^t + 2\beta.e^{2t} = 0$

  Or $\{f_1, f_2\}$ est libre.

  Donc $\alpha = 0$ et $2\beta = 0$, c.à.d. ($\alpha = 0$ et $\beta = 0$) absurde.

  Donc $\{f_1, f_2\}$ n'est pas une famille génératrice de E, par suite elle n'est pas une base de E.