Université Mohammed Premier, Oujda
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
(ENSAH)

Module AP32 : Fonctions de Plusieurs Variables

Polycopié du Cours & TD

Fouzia MORADI

Année Préparatoire, 2ème année

Fonctions de plusieurs variables Limite & Continuité-Differentiabilité – Fonction implicite - Formule de Taylor et Extremums.

Table des matières

Chapitre 1: Espaces métriques et espaces vectoriels normés.

1-Espaces métriques :

1.1-Distance :

1.1.1-Définition :

Soit E un ensemble non vide.

*Une **distance** sur E est une fonction* $d: E \times E \to \mathbb{R}$ *définie sur le produit cartésien* $E \times E$ *à valeurs dans l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

$$(1.1): (\forall u \epsilon E)(\forall v \epsilon E)\ d(u,v) \geq 0$$

$$(1.2): (\forall u \epsilon E)\ d(u,u) = 0$$

$$(1.3): d(u,v) = 0 \Rightarrow u = v$$

$$(1.4): (\forall u \epsilon E)(\forall v \epsilon E)\ d(u,v) = d(v,u)$$

$$(1.5): (\forall (u,v,w) \epsilon E^3)\ d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$$

(1.5) s'appelle inégalité triangulaire.

1.1.2-Propriétés :

Si d est une distance sur E alors :

$$(1.6): (\forall (u,v,w) \epsilon E^3): d(u,v) \geq |d(u,w) - d(w,v)|$$

$$(1.7): (\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \epsilon E^n)\ d(u_1, u_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(u_i, u_{i+1})$$

(1.7) est une généralisation de l'inégalité triangulaire.

1.1.3-Exemples :

Exemple 1 :

Soit E le plan affine. d(A,B) est la distance entre les deux points A et B au sens usuel.

Il est clair que d vérifie les cinq propriétés précédentes.

Exemple 2 :

Pour $E = \mathbb{R}^n$ *, la distance entre* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *et* $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *définie par :* $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ *s'appelle distance euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$ *.*

1.2-Espace métrique complet :

1.2.1-Définitions :

Définition1 :

Un espace métrique est un couple constitué par un ensemble non vide E et par une distance d.

Un espace métrique sera en général noté (E ,d).

Définition2 :

Soient d et δ *deux distances sur un même ensemble E.*

d et δ *sont dites* ***équivalentes*** *s'il existe deux constantes A et B strictement positives telles que :*

$$(\forall u \epsilon E)(\forall v \epsilon E) \qquad A.d(u,v) \leq \delta(u,v) \leq B.d(u,v)$$

Définition3 :

Soit (E ,d) un espace métrique et soit $(u_n)_{n \epsilon S}$ *une suite d'éléments de E avec* $S \subset \mathbb{N}$*, S infini.*

On dit que (u_n) *est convergente dans (E ,d) s'il existe* $u \epsilon E$ *tel que :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \epsilon S)(\forall n \epsilon S):\ n \geq N \Rightarrow d(u_n, u) \leq \varepsilon$$

Définition4 :

On dit que (u_n) *est une suite de Cauchy dans (E ,d) si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \epsilon S)(\forall p \epsilon S)(\forall q \epsilon S): \qquad p \geq N \ et\ q \geq N \Rightarrow d\left(u_P, u_q\right) \leq \varepsilon$$

***Définition5* :**

Un espace métrique (E ,d) est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans (E ,d).

1.2.2-Exemples :

***Exemple1* :**

L'ensemble $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle :* $d(s,t) = |s - t|$ *est un espace métrique complet.*

***Exemple2* :**

$\mathbb{R}^n$ *muni de la distance euclidienne :*

$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ *avec* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *est un espace métrique complet.*

1.2.3-Propositions :

Soit (E ,d) un espace métrique et soit $(u_n)_{n\epsilon S}$ *une suite d'éléments de E avec* $S \subset \mathbb{N}$*, S infini.*

***Proposition 1* :**

Si $(u_n)_{n\epsilon S}$ *est une suite de Cauchy dans (E ,d), il en est de même pour toute suite extraite.*

***Proposition 2* :**

$(u_n)_{n\epsilon S}$ *est une suite convergente* $\Rightarrow (u_n)_{n\epsilon S}$ *est une suite de Cauchy.*

***Proposition 3* :**

$(u_n)_{n\epsilon S}$ *est une suite de Cauchy* $\Rightarrow (u_n)_{n\epsilon S}$ *est une suite bornée*

***Proposition 4* :**

Si (E ,d) est un espace complet et δ *une distance équivalente à d alors (E ,*δ*) est aussi complet .*

***Proposition 5* :**

F une partie complète de (E ,d) $\Rightarrow$ *F une partie fermée de (E ,d).*

Proposition 6 ***:***

Si (E ,d) est un espace complet alors toute partie fermée de E est complète.

2-Espace vectoriel normé :

2.1-Norme :

2.1.1-Definitions :

Définition 1 ***:***

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

Une norme sur E est une fonction : N :E$\rightarrow\mathbb{R}$ *vérifiant les cinq propriétés suivantes* :

$$(1.1)\colon (\forall u \epsilon E);\ N(u) \geq 0$$

$$(1.2)\colon\ N(0) = 0$$

$$(1.3)\colon N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$(1.4)\colon (\forall u \epsilon E)(\forall \lambda \epsilon \mathbb{K}) : N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$$

$$(1.5)\colon (\forall (u, v) \epsilon E^2)\ N(u + v) \leq N(u) + N(v).$$

$N(u)$ *est appelé norme de u.*

Le plus souvent, on note une norme par $\| \quad \|$.

Définition 2 ***:***

Soit E un $\mathbb{K}$ *espace vectoriel et soit* $\| \quad \|$ *une norme sur E.*

On associe à cette norme la distance d suivante :

$$\forall u \epsilon E, \forall v \epsilon E, d(u, v) = \|u - v\|$$

dite associée à la norme $\| \quad \|$.

Définition 3 ***:***

Deux normes $\| \quad \|_1 et \| \quad \|_2$ *sont dites équivalentes ssi :*

$$(\exists \alpha > 0)(\exists \beta > 0)(\forall u \epsilon E)\colon \qquad \alpha \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_1$$

Définition 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soit $\| \quad \|$ une norme sur E.

Le couple $(E, \| \quad \|)$ est dit espace vectoriel normé.

2-1-2-Exemples :

Exemple 1 :

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolu est un espace vectoriel normé.

Exemple 2 :

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni du module est un espace vectoriel normé.

Exemple 3 :

Sur l'espace vectoriel produit $E = \mathbb{R}^n$, on définit les normes :

$$\|u\|_p = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad pour \quad p \geq 1$$

$$Et \quad \|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i| \quad avec \quad u = (u_1, \dots, u_n).$$

Ces normes sont toutes équivalentes.

2.1.3-Proposition :

Soit $(E, \| \quad \|)$ un $\mathbb{K}$- espace vectoriel normé. On a les propriétés suivantes :

$$(1.6): (\forall (u, v) \epsilon E^2) \|u - v\| \geq |\|u\| - \|v\||$$

$$(1.7): (\forall (u_1, \dots, u_n) \epsilon E^n)(\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \epsilon \mathbb{K}^n): \quad \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i u_i \right\| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \|u_i\|$$

2.2- Espace vectoriel normé complet :

2.2.1-Définitions :

Définition 1 :

Soit $(E, \| \quad \|)$ un $\mathbb{K}$- espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

On dit que $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E s'il existe $u \epsilon E$ tel que :

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N\epsilon\mathbb{N}): \quad n \geq N \quad \Rightarrow \quad \|u_n - u\| \leq \varepsilon.$$

<u>Définition 2</u> :

On dit que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ *est une suite de cauchy dans* $(E, \| \quad \|)$ *si :*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N\epsilon\mathbb{N}): \quad p \geq N \; et \; q \geq N \quad \Rightarrow \left\|u_p - u_q\right\| \leq \varepsilon.$$

<u>Définition 3</u> :

Un espace vectoriel normé $(E, \| \quad \|)$ *est dit Complet si toute suite de Cauchy dans* $(E, \| \quad \|)$ *est convergente dans* $(E, \| \quad \|)$ *.*

2-2-2-Propositions :

Les six propositions précédentes de la distance restent valables en remplaçant la distance par la norme.

Chapitre 2: Fonctions de plusieurs variables Limite & Continuité.

1-Fonctions de plusieurs variables :

1.1-Définitions :

Soit (E, $\| \ \|_E$) et (F, $\| \ \|_F$)

deux espaces vectoriels normés de dimensions n et m respectivement.

Une fonction $f: E \to F$ *qui à chaque vecteur* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de son domaine de définition D de E, associe un unique vecteur* $y = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ *de F s'appelle une fonction de plusieurs variables.*

Cas particulier:

Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}^2$*, une application de E dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *s'appelle fonction de deux variables.*

1.2-Exemples :

1.2.1-Exemple 1 :

Considérons un rectangle ABCD.

On appelle x la longueur AB et y, la longueur BC. On suppose x > 0 et

y > 0.

On appelle P(x,y) le périmètre et A(x,y) l'aire de ce rectangle.

On a alors :

$P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $: (x, y) \mapsto P(x, y) = 2(x + y)$

Et $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $: (x, y) \mapsto A(x, y) = xy$

P et A sont des fonctions de deux variables.

1.2.2-Exemple 2 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :* $f(r,\theta) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$.

Cette fonction est une fonction vectorielle de deux variables.

1.2.3-Exemple 3 :

Soit la fonction : $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :* $g(x,y,z) = \left(\frac{1}{z} + x, x^2 + y^2 - z\right)$.

g est une fonction de trois variables, son domaine de définition est :

$D_g = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$.

2-Limites :

2.1-Définition :

Soit (E, $\| \ \|_E$ *) et (F,* $\| \ \|_F$ *) deux espaces vectoriels normés de dimensions n et m respectivement,* $f: E \longrightarrow F$ *une application,* $a \in E$ *et* $l \in F$.

On dit que f(x) tend vers l quand x tend vers a ssi:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\eta > 0): \|x - a\|_E \le \eta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \le \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

2.2-Remarque :

Pour $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction d'une seule variable réelle à valeurs réelles on retrouve la définition :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\eta > 0): |x - a| \le \eta \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon$$

2.3-Exemples :

2.3.1-Exemple 1 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}^*$ *. on a :* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

En effet, on sait que : $\forall x \epsilon \mathbb{R}^*$: $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$

Par suite, $\forall x \epsilon \mathbb{R}^*$: $\left|x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2$.

Soit $\varepsilon \geq 0, \exists\, ?\eta \geq 0 \ \ tel\ que: \ |x| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$

On prend $\eta = \sqrt{\varepsilon}$ *et on aboutit au résultat.*

2.3.2-Exemple 2 :

On considère : $g : (\mathbb{R}^2, \| \quad \|_2) \to (\mathbb{R}^2, \| \quad \|_\infty)$ *définie par :*

$$g(x, y) = \left(\frac{\sin x}{x}, \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Son domaine est $D_g = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Nous avons: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = (1{,}0)$.

Montrons que : $(\forall\varepsilon \geq 0)(\exists\eta \geq 0)\colon \|(x, y)\|_2 \leq \eta \Rightarrow \|g(x, y) - (1{,}0)\|_\infty \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \geq 0$*, on sait que :* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

et par suite : $\exists\eta_1 \geq 0\colon |x| \leq \eta_1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leq \varepsilon.$

si on prend $\eta = min(\varepsilon, \eta_1)$ *on aura :*

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \eta \Rightarrow |x| \leq \eta \leq \eta_1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leq \varepsilon$$

Et d'autre part, $\|(x, y)\|_2 \leq \eta \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varepsilon$

D'où :

$$\|(x, y)\|_2 \leq \eta \Rightarrow max\left(\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right|, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow \|g(x, y) - (1{,}0)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

3-Composantes d'une fonction vectorielle :

3.1-Définition :

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions n et m respectivement, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ *une base de F et* $f : E \to F$ *une fonction.*

Pour tout $x \epsilon E$ *il existe un unique vecteur* $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \epsilon \mathbb{R}^m$ *tel que :* $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) e_i$.

Les applications $f_i: E \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq m)$, *s'appellent les composantes de f dans la base B.*

Réciproquement, soient $g_1,\ g_2, \dots, g_m$ *des fonctions numériques définies sur E. il est clair qu'il existe une unique fonction* $g: E \to F$ *dont les composantes dans B sont* $g_1,\ g_2, \dots, g_m$.

Cette fonction g est évidement : $g: x \mapsto \sum_{i=1}^{m} g_i(x) e_i$.

3.2-Opérations sur les fonctions vectorielles :

3.2.1-Addition :

Soient $f: E \to F$ *et* $g: E \to F$ *deux fonctions définies sur une même partie D de E et* $B = (e_1,\ e_2, \dots, e_m)$ *une base de F.*

Si $(f_1,\ f_2, \dots, f_m)$ *et* $(g_1,\ g_2, \dots, g_m)$ *sont les composantes de f et g respectivement dans B alors la fonction* $h: D \to F$ *dont les composantes dans B sont :* $(f_1 + g_1,\ f_2 + g_2, \dots, f_m + g_m)$ *s'appelle somme de f et g et se note f+g.*

L'opération $(f, g) \mapsto f + g$ *est appelée addition.*

3.2.2-Produit par une fonction numérique :

Soit $\lambda: D \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique.*

La fonction $K: D \to F$ *dont les composantes dans B sont*

$\left(\lambda(x) f_1(x),\ \lambda(x) f_2(x), \dots, \lambda(x) f_m(x)\right)$ *s'appelle produit de f par* λ *et se note* $\lambda . f$.

3.2.3-Produit scalaire :

Soit f et g deux fonctions définies sur une partie D de E. La fonction numérique :

$L: D \to \mathbb{R}$ *définie par :* $L(x) = \left(f(x), g(x)\right) = f(x).g(x)$ *s'appelle produit scalaire de f et g et se note f.g.*

Exemple

Considérons les fonctions : $f(x,y) = (x + y, y^2, 1 + 2y)$,

$g(x,y) = \left(xy, sinx + \frac{1}{y}, 0\right)$ et $\lambda(x,y) = ln(x+y)$.

- $(f+g)(x,y) = \left(x + y + xy, y^2 + sinx + \frac{1}{y}, 1 + 2y\right)$
- $(f.g)(x,y) = xy(x+y) + y^2\left(sinx + \frac{1}{y}\right)$
- $(\lambda f)(x,y) = \left((x+y)ln(x+y), y^2 ln(x+y), (1+2y)ln(x+y)\right)$

4-Continuité :

4.1-Définitions :

4.1.1-Définition 1 :

Soit (E, $\| \ \|_E$) et (F, $\| \ \|_F$) deux espaces vectoriels normés , $f: E \longrightarrow F$ et $x_0 \epsilon D_f$

On dit que f est continue en x_0 ssi : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Autremen dit :

f est continue en x_0

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)$: $\|x - x_0\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon$.

4.1.1-Définition 2 :

On dit que f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

4.2-Exemples :

4.2.1-Exemple 1 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x,y) = xy$

On a : $D_f = \mathbb{R}^2$. *Montrons que f est continue sur* D_f.

Soit $(x_0, y_0) \epsilon \mathbb{R}^2$, *soit* $\varepsilon > 0$, $\exists ? \eta > 0$ *tel que :*

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_\infty \leq \eta \Rightarrow |f(\mathrm{x},\mathrm{y}) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$$

Ceci est équivalent à dire :

$$max(|x - x_0|, |y - y_0|) \leq \eta \Rightarrow |xy - x_0y_0| \leq \varepsilon$$

On a :

$$|xy - x_0y_0| = |xy - x_0y + x_0y - x_0y_0|$$
$$\leq |y||x - x_0| + |x_0||y - y_0|$$
$$\leq |y_0||x - x_0| + |y - y_0||x - x_0| + |x_0||y - y_0|$$
$$\leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_\infty{}^2 + (|x_0| + |y_0|)\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_\infty$$

Il suffit de prendre: $\eta = min\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+|y_0|+1)}\right)$

et on obtient le résultat.

4.2.1-Exemple 2 :

Soit $(E, \| \quad \|_E)$ *un espace vectoriel normé.*

La fonction: $N: E \to \mathbb{R}^+$ *définie par:* $N(x) = \|x\|_E$ *est continue sur* $(E, \| \quad \|_E)$.

4.3-Propositions :

4.3.1-Proposition1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension n et m respectivement, $f: E \to F$ *une fonction à composantes* $f_1, \dots, f_m$ *dans la base* $B = (e_1, \dots, e_m)$ *de F et* $x_0 \epsilon E$.

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow$ *pour tout* $i \leq i \leq m$, f_i *est continue en* x_0.

4.3.2-Proposition2 :

f est continue sur E $\Leftrightarrow$ *pour tout* $i \leq i \leq m$, f_i *est continue sur E.*

4.4-Exemples :

4.4.1-Exemple1 :

La fonction $f(x) = (x^2 + 1, cosx)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

4.4.2-Exemple2 :

La fonction $g(x, y) = \left(\frac{sinx}{x}, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ *est continue sur* $D_g = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

4.4.3-Exemple3 :

La fonction $h(x) = \left(x^2, sinx, E(x)\right)$ *n'est pas continue en 0.*

4.5-Prolongement par continuité :

4.5.1-Définition :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, D une partie de E, , $f: D \to F$ *une fonction continue sur D et* $x_0 \notin D$.

Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, *avec* $l \in F$, *alors la fonction définie par :*

$\check{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in D \\ l & si \quad x = x_0 \end{cases}$ *est une fonction continue appelée le prolongement par continuité de f en* x_0.

4.5.2-Exemples :

Exemple1

Considérons la fonction : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *qui est définie et continue sur* $\mathbb{R}^*$.

Cette fonction n'admet aucun prolongement par continuité en 0 car :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

Exemple2

Soit : $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x+y}$. *On a :* $D_g = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$.

La fonction g est continue sur D_g *et* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

En effet,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - xy + y^2) = 0.$$

D'où, g admet un prolongement par continuité en $(0,0)$ *définie par :*

$$\breve{g}(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & si \quad (x,y) \in D_g \\ 0 \quad si & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exemple3

La fonction suivante : $h(x,y) = \left(\frac{sinx}{x}, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ *admet-elle un prolongement par continuité en* (0,2) ?

4.6-Continuité par rapport à une variable :

Nous nous bornerons à étudier les fonctions de deux variables.

4.6.1-Définition :

Soit f une fonction définie sur une parie D de $\mathbb{R}^2$ *et* $(x_0, y_0) \in D$.

La restriction de f à la droite $y = y_0$ *est une fonction d'une seule variable.*

On dit que f est continue par rapport à x en (x_0, y_0) *si sa restriction à* $y = y_0$ *est continue en* x_0.

De même pour la variable y.

4.6.2-Proposition :

f est continue en (x_0, y_0) $\Rightarrow$ *f est continue par rapport à x et par rapport à y en* (x_0, y_0).

La réciproque est fausse.

Exemple

Considérons la fonction $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ *et* $f(0,0) = 0$.

f n'est pas continue en (0,0) *car :* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$.

En effet,

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$*:* $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$ *et par suite* $\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Par contre, les restrictions de f aux droites $y = 0$ *et* $x = 0$, *(* $f(x,0) = 0$ *et* $f(0,y) = 0$ *resp) , sont continues en* (0,0) .

Chapitre 3 : Différentiabilité et Calcul différentiel

1-Définitions et Exemples :

Pour alléger les notations, on se restreint aux fonctions de deux variables.

1.1-Dérivées partielles :

1.1.1-Définition :

Soient la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et la fonction g d'une seule variable x définie par : $g(x) = f(x, y_0)$.

Si g admet une dérivée $g'(x_0)$ au point x_0 , on dit que cette dérivée est la dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0) et on la note $f_x'(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Ainsi :

$$f_x'(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

De même, on définit la dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0) par :

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Si f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de D_f , les fonctions définies sur D_f par :

$(x, y) \mapsto f_x'(x, y)$ *et* $(x, y) \mapsto f_y'(x, y)$

Sont appelées respectivement les dérivées partielles de f par rapport à x et à y et notées :

f_x' *et* f_y' *ou encore* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

1.1.2-Exemples :

1) Les dérivées partielles de la fonction :

$f(x,y) = x\sin y + y^2$ *sont :*

$$f_x{}'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y$$

$$f_y'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y + 2y$$

2) Les dérivées partielles de la fonction :

$g(x,y) = e^x(1 + xy^3)$ *sont :*

$$g_x{}'(x,y) = e^x(1 + xy^3) + e^x y^3$$

$$g_y'(x,y) = 3xy^2e^x$$

3) Calculer les dérivées partielles de la fonction :

$h(x,y,z) = (z + e^{xy})^{2015}$

1.2-Différentielle d'une fonction :

1.2.1-Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ *et* $(x_0, y_0)\epsilon D$.

On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) *s'il existe un couple* (l, m) *et une fonction numérique* φ *définie sur D tels que :*

$$\forall(x_0 + h, y_0 + k)\epsilon D:$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + lh + mk + \sqrt{h^2 + k^2}\varphi(x_0 + h, y_0 + k)$$

Et $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varphi(x_0 + h, y_0 + k) = 0$.

1.2.2-Proposition 1 :

Si f admet des dérivées partielles sur un voisinage de (x_0, y_0) *et si les applications* $f_x{}'$ *et* $f_y{}'$ *sont continues en ce point, alors f est différentiable au point* (x_0, y_0) .

1.2.3-Remarque :

L'existence des dérivées partielles au point (x_0, y_0) *n'entraîne pas la différentiabilité de f.*

1.2.4-Exemple :

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad si \quad (x,y) \neq (0{,}0) \\ \qquad\qquad f(0{,}0) = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0{,}0)}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)$$

Si f est différentiable en $(0{,}0)$ *on aura :*

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Par contre, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,h)}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{\sqrt{2h^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \neq 0$$

1.2.5-Proposition 2 :

Si f est différentiable en un point (x_0, y_0), *alors f admet des dérivées partielles en ce point par rapport à x et à y et :*

$$l = f'_x(x_0, y_0) \quad et \quad m = f'_y(x_0, y_0).$$

De plus, f est continue en (x_0, y_0).

1.2.6-Définition 2 :

Soit f une fonction différentiable au point (x_0, y_0).

La forme linéaire : $(h,k) \mapsto hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)$

s'appelle différentielle de f au point (x_0, y_0) *et se note df.*

Notons dx la différentielle de : $(h,k) \mapsto h$

et dy la différentielle de : $(h,k) \mapsto k$, *alors df s'écrit :*

$$df = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy.$$

1.2.7-Exemple :

Calculons la différentielle de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = e^x \cos(x^2 + y^2).$$

On a :

$$df = (\cos(x^2 + y^2) - 2x\sin(x^2 + y^2))e^x dx - 2y\sin(x^2 + y^2)\, e^x dy.$$

1.3-Différentiabilité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$:

1.3.1-Définition 1:

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $f:\Omega \to \mathbb{R}^m$ *et* $a \in \Omega$.

On dit que f est différentiable au point a ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

1) *f est continue au point a*
2) *il existe une application linéaire* $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *telle que :*

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-g(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.$$

L'application g est notée $f'(a)$. $g \epsilon \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

1.3.2-Proposition :

Si f est différentiable au point a, alors l'application linéaire g est unique et elle est continue.

1.3.1-Définition 2:

On dit que f est différentiable sur Ω *si f est différentiable en tout point de* Ω.

2-Gradient d'une application et Matrice Jacobienne :

2.1-Définitions :

Soit $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application définie par :*

$$f(X) = \big(f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)\big) \qquad avec \qquad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

et différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

Pour m=1 : On appelle Gradient de f au point X_0, noté

$\nabla f(X_0) = \overrightarrow{grad} f(X_0)$, le vecteur définie par :

$$\nabla f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

Pour m>1 : On appelle Gradient de f au point X_0, noté

$\nabla f(X_0) = J_f(X_0)$, la matrice jacobienne de taille $(n \times m)$ définie par :

$$J_f(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

Pour m=n>1 : La matrice jacobienne de f est une matrice carré de taille $(n \times n)$.

2.2-Exemples :

2.2.1-Exemple 1:

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = \left(x^2 + y, \quad \frac{x}{y^2 + 1}\right)$$

f est différentiable en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, sa matrice jacobienne est :

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial Y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial Y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 1 \\ \frac{1}{{y_0}^2+1} & -\frac{2x_0y_0}{({y_à}^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout $(u, v)\epsilon\mathbb{R}^2$:

$$J_f(x_0, y_0)(u, v) = \begin{pmatrix} 2x_0 & 1 \\ \frac{1}{{y_0}^2+1} & -\frac{2x_0y_0}{({y_à}^2+1)^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \left(2x_0u + v, \quad \frac{u}{{y_0}^2 + 1} - \frac{2x_0y_0}{({y_à}^2 + 1)^2}v\right)$$

Et par suite : $f'(x_0, y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et définie par :

$$(u, v) \mapsto \left(2x_0u + v, \quad \frac{u}{{y_0}^2 + 1} - \frac{2x_0y_0}{({y_à}^2 + 1)^2}v\right)$$

2.2.2-Exemple 2:

Soit $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$g(x, y) = (\sin(xy), y^3, x - 2y)$$

La fonction g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, sa matrice jacobienne en (x_0, y_0) est définie par :

$$J_g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 0 & 3y^2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Par suite, la différentielle de g en (x_0, y_0) est :

$g'(x_0, y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$(u, v) \mapsto (y\cos(xy)\,u + x\cos(xy)\,v, \quad 3y^2v, \quad u - 2v)$$

2.3-Proposition :

Soit f et g deux fonctions différentiables en X_0 et soit $\alpha\epsilon\mathbb{R}$.

1) $\nabla(f + g)(X_0) = \nabla f(X_0) + \nabla g(X_0)$

2) $\nabla(f \times g)(X_0) = g(X_0).\nabla f(X_0) + f(X_0).\nabla g(X_0)$
3) $\nabla(\alpha f)(X_0) = \alpha\nabla f(X_0)$

2.3.1-Exemple :

Soit f et g $:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *définies par :*

$f(x,y) = (x^2, xy, 1)$ *et* $g(x,y) = (1{,}3x, x + y)$

1) *Calculer* $(f \times g)(x,y)$ *puis* $\nabla(f.g)(x,y)$.
2) *Calculer* $\nabla f(x,y)$ *et* $\nabla g(x,y)$.
3) *Calculer* $g(x,y).\nabla f(x,y) + f(x,y).\nabla g(x,y)$

3-Différentiabilité des fonctions composées :

3.1-Proposition :

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *deux fonctions et* $a \epsilon \mathbb{R}^n$.

Si f est différentiable au point a et si g est différentiable au point $b = f(a)$, *alors* $h = gof$ *est différentiable au point a et :*

$$h'(a) = g'(b)\text{o}f'(a)$$

et

$$J_h(a) = J_g\big(f(a)\big) \times J_f(a)$$

3.2-Exemples :

3.2.1-Exemple 1 :

Considérons les fonctions : $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *et* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *définies par :*

$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{y+2}$ *et* $g(t) = (\cos t, \sin t)$

On a : $D_f = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{-2\})$ *et* $D_g = \mathbb{R}$.

Posons $h = f\text{o}g$. *On a donc* $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$h(t) = f(\cos t, \sin t) = \frac{\sqrt{(\cos t)^2 + 1}}{\sin t + 2}$$

et $D_h = \mathbb{R}$.

La fonction g est différentiable sur $\mathbb{R}$ *,* $g(\mathbb{R}) \subset [-1{,}1]^2 \subset D_f$ *et f est différentiable sur* D_f*.*

Donc h est différentiable sur $\mathbb{R}$ *et :*

$$J_h(t) = J_f\big(g(t)\big) \times J_g(t)$$

$$= \left(\frac{\cos t}{(\sin t + 2)\sqrt{(\cos t)^2 + 1}}, \quad -\frac{\sqrt{(\cos t)^2 + 1}}{(\sin t + 2)^2} \right) \times \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\cos t \ \sin t}{(\sin t + 2)\sqrt{(\cos t)^2 + 1}} - \frac{\cos t \ \sqrt{(\cos t)^2 + 1}}{(\sin t + 2)^2}$$

3.2.2-Exemple 2 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie et différentiable sur un ouvert U de* $\mathbb{R}^2$*, et* $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie et différentiable sur un ouvert V tel que* $\varphi(V) \subset U$*, à composantes* φ_1 *et* φ_2 *:* $\varphi(\alpha,\beta) = \big(\varphi_1(\alpha,\beta), \varphi_2(\alpha,\beta)\big)$*.*

Considérons $F = f o \varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(\alpha,\beta) = f\big(\varphi_1(\alpha,\beta), \varphi_2(\alpha,\beta)\big).$$

F est donc différentiable sur V et $J_F(\alpha,\beta) = J_f\big(\varphi(\alpha,\beta)\big) \times J_\varphi(\alpha,\beta)$*.*

On en déduit que :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(\alpha,\beta)\big).\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(\alpha,\beta)\big).\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) \qquad (*)$$

Et

$$\frac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(\alpha,\beta)\big).\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta}(\alpha,\beta) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(\alpha,\beta)\big).\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}(\alpha,\beta)$$

En fait, surtout en physique, on note souvent x et y les composantes φ_1 *et* φ_2 *et la formule* $(*)$ *devient :*

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

3.3-Proposition :

Si f est une fonction numérique différentiable au point a, il en est de même pour les fonctions composées f^n, $(n\epsilon\mathbb{N}^*)$, *et* e^f.

Si on suppose de plus, $f(a) \neq 0$, *alors les fonctions* $\frac{1}{f}$, $\frac{g}{f}$ *et* $log|f|$ *sont différentiables en a et leurs différentielles :*

i) $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*: \quad d(f^n) = nf^{n-1}df$

ii) $d\left(e^f\right) = e^f df$

iii) $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{df}{f^2}$ et $d\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{fdg-gdf}{f^2}$

iv) $d(log|f|) = \frac{df}{f}$

4-Divergence et Laplacien d'une application :

4.1-Dérivées successives :

4.1.1-Définition :

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant des dérivées partielles dans un voisinage U de a.*

Si l'application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ *est dérivable par rapport à* x_j *en a, alors sa dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)$ *s'appelle une dérivée partielle seconde de f en a et notée :* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

4.1.2-Théorème de Schwarz :

Si f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ *dans un voisinage de a, et si ces dérivées partielles sont continues en a alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

4.2-Divergence et Laplacien d'une application :

4.2.1-Définition :

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *deux fois différentiable sur* $\mathbb{R}^n$.

On appelle divergence de f l'application : $divf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}^n: \qquad divf(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

On appelle Laplacien de f l'application : $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}^n: \qquad \Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(x)$$

4.2.2-Proposition :

Soit f et g $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *différentiables sur* $\mathbb{R}^n$.

i) $div(f + g) = divf + divg$

ii) $div(f \times g) = gdivf + fdivg$

iii) $\forall \lambda \epsilon \mathbb{R}: \qquad div(\lambda f) = \lambda\, divf$

5-Fonctions de C^k et Inégalité des accroissements finis :

5.1-Fonctions de classe C^k :

5.1.1-Définition :

Soit $(E, \| \ \|_E)$ *et* $(F, \| \ \|_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* Ω *un ouvert de E et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une application.*

Si f est différentiable en tout point de Ω *et si l'application :*

$df : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ *est continue alors f est dite continûment différentiable ou de classe* C^1*, avec l'espace* $\mathcal{L}(E, F)$ *est muni de la norme associée à* $\| \ \|_E$ *et* $\| \ \|_F$.

5.1.2-Remarque :

On définit sur $\mathcal{L}(E, F)$ *la norme :*

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F): \ \|u\| = sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

dite norme associée aux normes $\| \ \|_E$ *et* $\| \ \|_F$.

5.1.3-Théorème :

Soit f une application de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ *dans l'espace vectoriel normé F, possédant n dérivées partielles sur U.*

La fonction f est de classe C^1 sur U si et seulement si ses dérivées partielles sont continues sur U.

5.2-Inégalité des accroissements finis :

5.2.1-Théorème :

Soit f une application de classe C^1 de l'ouvert Ω de E dans F, a et b deux points de Ω tels que le segment soit inclus dans Ω. On a :

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq sup_{t\in[0,1]}\|df\big((1-t)a + tb\big)\| \ . \ \|b - a\|_E$$

Chapitre 4 : Linéarité Locale et Fonctions implicites

1-Linéarité locale :

1.1-Jacobien d'une application :

1.1.1-Définition :

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable et $J_f(x)$ sa matrice jacobienne.

On appelle le jacobien de f, noté $j_f(x)$, le déterminant de la matrice jacobienne $J_f(x)$.

$$j_f(x) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = det\left(J_f(x)\right)$$

1.1.2-Remarque :

On ne peut parler du jacobien que si la matrice jacobienne est une matrice carré. On l'appelle aussi déterminant fonctionnel.

1.1.3-Exemples :

Exemple1 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(r, \theta) = (rcos\theta, rsin\theta)$.

f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et sa matrice jacobienne est :

$$\forall (r, \theta) \epsilon \mathbb{R}^2: \qquad J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{pmatrix}$$

Par suite, le jacobien de f est :

$$\forall (r, \theta) \epsilon \mathbb{R}^2: \qquad j_f(r, \theta) = r$$

Exemple2 :

Soit $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $g(x, y) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$

La fonction g est différentiable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et sa matrice jacobienne est :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*: \quad J_g(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

et le jacobien est : $\quad j_g(x, y) = -\frac{2x}{y}.$

1.2-Difféomorphisme :

1.2.1-Définitions :

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi: U \to V$ une application.

Définition1 :

L'application Φ est dite difféomorphisme si et seulement si :

- *i- Φ est bijective différentiable de $U \to V$.*
- *ii- Sa réciproque Φ^{-1} est bijective différentiable de $V \to U$.*

Définition2 :

On dit que Φ est un C^1-difféomorphisme si et seulement si Φ est une bijection de classe C^1 ainsi que Φ^{-1}, et dans ce cas, l'application

$a \mapsto j_\Phi(a)$ est continue sur U.

1.2.2-Remarque :

Si Φ est un difféomorphisme alors :

1. *$\forall a \in U$: $J_\Phi(a)$ est inversible et $[J_\Phi(a)]^{-1} = J_{\Phi^{-1}}(\Phi(a))$.*
2. *Le jacobien ne s'annule pas.*

Autrement dit, $\forall a \in U: \quad j_\Phi(a) \neq 0$

Et : $\quad \forall a \in U: \; j_{\Phi^{-1}}(\Phi(a)) = \frac{1}{j_\Phi(a)}.$

1.2.3-Théorème d'inversion locale :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f: U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U telle que la matrice jacobienne $J_f(a)$ est inversible.

Alors, il existe un voisinage V de a et un voisinage W de $f(a)$ tels que :

$f: V \to W$ soit un C^1- difféomorphisme.

2-Fonctions implicites:

2.1-Théorème des fonctions implicites et Applications :

2.1.1-Définition :

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

On appelle fonction implicite définie par l'équation : $f(x, y) = 0$ toute fonction $\varphi: I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I telle que :

$$\forall x \in I: \qquad f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$$

2.1.2-Théorème des fonctions implicites sur $\mathbb{R}^2$:

Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ tels que : $f(x_0, y_0) = 0$.

Si la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y continues sur U et si :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Alors, il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 et un intervalle ouvert J de centre y_0 tels que l'équation : $f(x, y) = 0$ définit une fonction implicite : $\varphi: I \to J$

C'est à dire : $y = \varphi(x)$.

De plus la fonction implicite φ ainsi définie est de classe C^1 sur I et

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \varphi(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)}$$

Remarques :

1- $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x \in I, \quad y \in J \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \varphi(x) \\ x \in I, \quad y \in J \end{cases}$

2- *Si f est de classe C^k sur U alors φ est de classe C^k sur I.*

3- *Si* $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ *, l'ensemble des zéros de f au voisinage de* (x_0, y_0) *est un arc paramétré cartésien donc régulier.*

2.1.3-Exemples :

Exemple1 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Remarquons que : $f(0,1) = 0$.

La fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ *qui sont continues sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$.

Donc d'après le théorème précèdent, ils existent un intervalle I de centre 0, un intervalle J de centre 1 et une application $\varphi: I \to J$ *de classe* C^1 *tels que :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x \in I, \quad y \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi(x) \\ x \in I, \quad y \in J \end{cases}$$

De plus,

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}.$$

Exemple2 :

Considérons la fonction : $f(x, y) = x^y - y^x$.

On a : $f(1,1) = 0$.

f est dérivable par rapport à y sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ *et :*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y lnx - xy^{x-1}$$

Donc : $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$

et par suite l'équation : $f(x, y) = 0$ *définit implicitement y en fonction de x lorsque x est au voisinage de 1 et que y est au voisinage de 1.*

De plus,

$$\varphi'(x) = -\frac{yx^{y-1} - y^x lny}{x^y lnx - xy^{x-1}} = -\frac{\frac{y}{x} - lny}{lnx - \frac{x}{y}} = \frac{y}{x}\frac{y - xlny}{x - ylnx}$$

2.1.3-Théorème des fonctions implicites sur $\mathbb{R}^3$:

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *sur un ouvert U de* $\mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in U$ *tels que :*

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Alors il existe un ouvert V contenant (x_0, y_0), *un ouvert W contenant* (x_0, y_0, z_0) *et une fonction* $\varphi: V \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *tels que :*

$$\forall (x, y, z) \epsilon W: \quad f(x, y, z) = 0 \qquad \Leftrightarrow (x, y) \epsilon V \ et \quad z = \varphi(x, y)$$

De plus,

$$\forall (x, y, z) \epsilon W: \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$$

Et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

Remarques :

1- *Sous les conditions du théorème précédent, on a :*

$$\forall (x, y) \epsilon V: \quad f\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0$$

2- *Si on a :* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ *au lieu* $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, *on peut définir localement x comme une fonction de classe* C^1 *de* (y, z).

3- *Si* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, *alors l'ensemble des zéros de f au voisinage de* (x_0, y_0, z_0) *est une nappe paramétrée cartésienne donc régulière.*

4- *Si f est de classe* C^k *sur U alors* φ *est de classe* C^k *sur V.*

Exemple :

Considérons l'équation :

$$f(x,y,z) = x^3 + 2xz - y - 2 = 0$$

On a : $f(1,-1,0) = 0$ *et :* $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,0) = 3 \neq 0$,

donc il existe un voisinage ouvert U de $(-1,0)$ *, un voisinage ouvert W de* $(1,-1,0)$ *et une fonction* φ *de classe* C^1 *sur U tels que :*

$$\forall (x,y,z) \epsilon W: \quad f(x,y,z) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(y,z)$$

De plus,

$$\forall (y,z) \epsilon U: \ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{3\big(\varphi(y,z)\big)^2 + 2z}$$

Et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(y,z) = -\frac{2\varphi(y,z)}{3\big(\varphi(y,z)\big)^2 + 2z}$$

2.2-Les courbes implicites :

2.2.1-Définitions:

Définition 1:

Soit $f: U \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^k $(k \geq 1)$ *sur un ouvert U de* $\mathbb{R}^2$*. L'ensemble* $\mathbb{\Gamma} = \{M(x,y) \epsilon U: \quad f(x,y) = 0\}$

est appelé la courbe implicite définie par : $f \equiv 0$.

(c'est l'image réciproque de 0 : $\mathbb{\Gamma} = f^{-1}(\{0\})$*)*

Plus généralement , une courbe définie par : $f(x,y) = k$ *est appelée une courbe de niveau k.*

Définition 2:

1- *Un point* $M(x,y)$ *de la courbe* $\mathbb{\Gamma}$ *est dit « ordinaire » (ou régulier) si* $\big(\nabla f(M)\big)^t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0)$.

2- *La courbe* $\mathbb{\Gamma}$ *est dite régulière si* $\big(\nabla f(M)\big)^t \neq (0,0) \quad \forall M \epsilon \mathbb{\Gamma}$.

3- Le point M est dit singulier si $(\nabla f(M))^t = (0{,}0)$

2.2.2-Tangente et Normale à la courbe implicite:

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1, $(x_0, y_0) \epsilon U$ *tels que :*
$f(x_0, y_0) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$

Donc l'équation $f(x, y) = 0$ *définit sur un voisinage W de* (x_0, y_0) *une courbe* Γ *qui est un graphe d'une fonction* φ *de classe* C^1 *.*

De plus,

$$\forall (x, y) \epsilon W : \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Par suite, Γ *admet en chaque point* $M(x', y')$ *une tangente (T) définie par :*

$$(y - y')\frac{\partial f}{\partial y}(x', y') + (x - x')\frac{\partial f}{\partial x}(x', y') = 0$$

On note : $\vec{\tau}(M) = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x', y'), \frac{\partial f}{\partial x}(x', y')\right)^t$ *le vecteur directeur de (T).*

Par contre, tout vecteur parallèle au vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x', y'), \frac{\partial f}{\partial y}(x', y')\right)^t$ *s'appelle la normale à* Γ *au point* $M(x', y')$ *noté* $\vec{N}(M)$.

C'est à dire que : $\vec{N}(M)$ *est colinéaire à* $\nabla f(M)$.

Le vecteur: $\vec{v}(M) = \frac{\nabla f(M)}{\|\nabla f(M)\|}$ *est appelé la normale principale à la courbe en M et vérifie :* $\|\vec{v}(M)\| = 1$ *.*

Remarque :

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}(M)$ *et* $\vec{\tau}(M)$ *est nul.*

$$\vec{\tau}(M).\vec{v}(M) = 0.$$

Chapitre 5 : Formule de Taylor et Extremums.

1-Formules de Taylor à l'ordre deux :

1.1-Approximations linéaire et quadratique :

1.1.1-Définition 1:

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un ouvert U de* $\mathbb{R}^2$, $a\epsilon U$ *et* $h\epsilon\mathbb{R}^2$ *tel que* $(a+h)\epsilon U$.

On dit que f admet une approximation linéaire au voisinage de a s'il existe une application linéaire unique $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \mathrm{o}(\|h\|^2)$$

Avec $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\mathrm{o}(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0.$

On dit que le terme « $f(a) + L(h)$ *» est l'approché linéaire de* $f(a+h)$.

1.1.2-Définition 2:

On dit que f admet une approximation quadratique au voisinage de a s'il existe une application linéaire unique $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *et une forme quadratique* $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telles que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + Q(h) + \mathrm{o}(\|h\|^2)$$

Avec $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\mathrm{o}(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0.$

On dit que le terme « $f(a) + L(h) + Q(h)$ *» est l'approché quadratique de* $f(a+h)$.

1.2-Formules de Taylor :

1.2.1-Puissances symboliques:

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^p (p \geq 2)$, $a\epsilon U$. *Pour* $h\epsilon\mathbb{R}^2$, *on définit le réel :*

$$\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{[2]}(a)=h_1{}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}(a)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)+h_2{}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}(a)$$

dit une puissance symbolique d'ordre deux.

Pour $k\geq 2$, on définit la puissance symbolique d'ordre k par :

$$\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{[k]}(a)=\sum_{p=0}^{k}C_k^p h_1{}^p h_2{}^{k-p}\frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^p(\partial x_2)^{k-p}}(a)$$

1.2.2-Formule de Taylor Lagrange:

Théorème :

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur U, $a\epsilon U$ et $h\epsilon\mathbb{R}^2$ tel que $(a+h)\epsilon U$.

Supposons que le segment géométrique $[a,a+h]\subset U$, alors il existe $\theta\epsilon]0,1[$ tel que :

$$f(a+h)=f(a)+\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a)+\frac{1}{2}\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{[2]}(a)$$
$$+\frac{1}{6}\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{[3]}(a+\theta h)$$

1.2.3-Formule de Taylor Young:

Théorème :

Sous les conditions du théorème précédant, on a :

$$f(a+h)=f(a)+\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a)+\frac{1}{2}\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{[2]}(a)$$
$$+\mathcal{O}(\|h\|^3)$$

Remarques :

1- *Le terme* $f(a)+\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a)$ *est l'approché linéaire de* $f(a+h)$.

2- Le terme $f(a) + \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a) + \frac{1}{2}\left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{[2]}(a)$ est l'approché quadratique de $f(a+h)$.

1.3-Matrice Hessienne :

1.3.1-Définition:

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U et $a\epsilon U$.

La matrice :

$$\mathcal{H}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice Hessienne de f en a.

1.3.2-Exemple:

Considérons la fonction :

$$f(x,y) = e^x . sin(xy)$$

Cette fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Son gradient est :

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x(sin(xy) + ycos(xy)) \\ xcos(xy)e^x \end{pmatrix}$$

Sa matrice hessienne est :

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^x((1-y^2)sin(xy) + 2ycos(xy)) & e^x((1+x)cos(xy) - xysin(xy)) \\ e^x((1+x)cos(xy) - xysin(xy)) & -x^2e^x.sin(xy) \end{pmatrix}$$

En particulier pour $(x,y) = (0,0)$ on trouve :

$$\nabla_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et\, \mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc en déduire la formule de Taylor Young au voisinage de (0,0)*:*

$f(h_1, h_2) = f(0,0) + (h_1, h_2).\nabla_f(0,0) + \frac{1}{2}(h_1, h_2).\mathcal{H}_f(0,0) \times \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|h\|^3)$.

Par suite,

$$f(h_1, h_2) = h_1 h_2 + \mathcal{O}(\|h\|^3)$$

Pour tout $h = (h_1, h_2) \epsilon \mathbb{R}^2$.

2-Extremums et points critiques :

2.1-Maximums et Minimums d'une fonction de deux variables :

2.1.1-Théorème:

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$ *et* $a \epsilon U$.

Si f présente un extremum en a, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \qquad et \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

2.1.2-Exemple de recherche d'extremums:

Considérons la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

Déterminons les extremums de f .

Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) *alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Donc

$$\begin{cases} 3{x_0}^2 - 9y_0 = 0 \\ 3{y_0}^2 - 9x_0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = y_0 = 0 \quad ou \quad x_0 = y_0 = 3$$

1- *Au point* (0,0) *on a :* $f(x,0) = x^3 + 27$.

Donc pour $x > 0$: $f(x,0) > 27 = f(0,0)$

Et pour $x < 0$: $f(x,0) < 27 = f(0,0)$

Par suite, f n'admet ni maximum ni minimum en (0,0).

2- *Au point* (3,3)*:*

Calculons les dérivées partielles secondes de f :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \quad , \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -9 \quad et \;\; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y.$$

La formule de Taylor Lagrange nous donne :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(h^2 r_0 + 2hks_0 + k^2 t_0)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{[3]} (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

Lorsque h et k sont assez petits, le terme $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ *a le même signe que :*

$$h^2 r_0 + 2hks_0 + k^2 t_0 = 18(h^2 - hk + k^2)$$

Or le polynôme $h^2 - hk + k^2$ *est strictement positif puisque* $\Delta = -3 < 0$.

D'où le point (3,3) *est un minimum local.*

2.1.3-Remarque:

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, *il ne s'ensuit pas que f admette un maximum ou minimum local en ce point.*

Prenons par exemple :

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ *et* $f(0,0) = 0$

Mais sur chaque disque $D(0,R)$ *on a :* $f\left(\frac{R}{2},0\right) = \frac{R^2}{4} > 0$ *et* $f\left(0,\frac{R}{2}\right) = -\frac{R^2}{4} < 0.$

Par suite, f n'admet ni maximum ni minimum à l'origine.

2.1.4-Cas génèral:

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$

il reste à étudier le signe de $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ *avec h et k sont assez petits.*

Grâce à la formule de Taylor Young à l'ordre 2, on trouve :

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{[2]}(x_0,y_0) + o(\|(h,k)\|^2)$$

D'où, pour h et k assez petits le signe de $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ *est celui de :*

$$P(h,k) = h^2 r_0 + 2hks_0 + k^2 t_0$$

Où $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$

et $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$

1- *Si* $\Delta_0 = {s_0}^2 - r_0 t_0 < 0,$ *alors c'est le signe de* r_0.

Par suite :

si $r_0 > 0$ *alors f admet un minimum local au point* (x_0,y_0).

Si $r_0 < 0$ *alors f admet un maximum local au point* (x_0,y_0).

2- *Si* $\Delta_0 = {s_0}^2 - r_0 t_0 > 0$

a- *Si* $r_0 \neq 0$, *alors f n'admet ni maximum ni minimum local au point* (x_0, y_0). *Dans ce cas, on dit que* (x_0, y_0) *est un point selle.*

b- *Si* $r_0 = 0$ *et* $t_0 \neq 0$, *ce cas est analogue au cas précédant.*

c- *Si* $r_0 = t_0 = 0$, *alors* $P(h,k) = 2hks_0$ *change de signe. Par suite, f n'admet ni maximum ni minimum local au point* (x_0, y_0).

3- *Si* $\Delta_0 = 0$, *on ne peut rien conclure.*

Remarque :

En utilisant la matrice Hessienne :

$$\mathcal{H}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} r_0 s_0 \\ s_0 t_0 \end{pmatrix}$$

On trouve que :

1- (x_0, y_0) *est un minimum local si* $det(\mathcal{H}(x_0, y_0)) > 0$ *et* $r_0 > 0$.

2- (x_0, y_0) *est un maximum local si* $det(\mathcal{H}(x_0, y_0)) > 0$ *et* $r_0 < 0$.

3- (x_0, y_0) *est un point selle si* $det(\mathcal{H}(x_0, y_0)) < 0$.

2.1.5-Exemple:

Considérons la fonction :

$$f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xy + 8x^3 \qquad et \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 3x^2$$

Par suite,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

Calculons $s^2 - rt$:

On a : $\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6y + 24x^2 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6x \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad s^2 - rt = 12(y - x^2)$

Donc $\quad {s_0}^2 - r_0 t_0 = 0$ *et par suite on ne peut rien conclure.*

Remarquons que f s'annule sur les deux paraboles :

$$y = x^2 \qquad et \quad y = 2x^2$$

Sur le disque $D(0,R)$*, il existe des points de la forme* $A_\propto(x, \propto x^2)$ *avec* $1 < \propto < 2$ *et* $\propto > 2$.

On a donc : $\quad f(x, \propto x^2) = x^4(\propto -1)(\propto -2)$.

On en déduit ainsi que pour $\quad 1 < \propto < 2$ *on a* $f(x, \propto x^2) < 0 = f(0{,}0)$

Et pour $\propto > 2$ *on a* $f(x, \propto x^2) > 0 = f(0{,}0)$

Par suite, f n'admet ni maximum ni minimum local à l'origine.

C'est à dire que $(0{,}0)$ *est un point selle.*

2.2-Points critiques des fonctions de plusieurs variables :

2.2.1-Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *On dit que* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *est un point critique de f si*

$$\forall i \in \{1,2,\dots,n\} : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Et dans ce cas, $f(a)$ *s'appelle la valeur critique de f en a.*

2.2.2-Remarques:

1- *Les points critiques de f sont les solutions du système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

2-

a- *un point critique a est un minimum local si la matrice Hessienne* $\mathcal{H}$(a) *est définie positive.*

b- *un point critique a est un maximum local si la matrice Hessienne* $\mathcal{H}$(a) *est définie négative.*

c- *un point critique a est un point selle si la matrice Hessienne* $\mathcal{H}$(a) *est indéfinie.*