EXAM d'Analyse numérique

Nom : Quarine

Prénom : Haitam

Classe : AP2 ; GRoupe 4

CIN : BK697085

CNE : R130009404

Questions de cours :

1 - Pour la grange :

→ Avantages : Une fois les polynomes de la base de lagrange calculés, on n'a pas besoin de calculer les coefficients y_i, lorsque ces coefficients sont donnés, et si ces coefficients ne sont pas donnés, ils sont simple à calculer, puisque : $y_i = f(x_i)$ ou $y_i = p(x_i)$

→ Inconvénients : Si on modifie un seul abscisse, on est obligé de recalculer une nouvelle base de Lagrange. Ceci n'est pas le cas de la base de Newton.

Pour Newton :

→ Avantages : Si on ajoute un abscisse, on peut utiliser les calculs précédent du tableau, les différences divisées

→ Inconvénients : On doit calculer le tableau des différents divisées

Conclusion : Il faut généralement utiliser la base de Newton. si on pense qu'on va ajouter un ou plusieurs abscisses

② L'interpolation polynomiale est une technique qui consiste à remplacer l'expression d'une fonction par un polynôme encore plus simple

Exercice:

①

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

On a le polynome de Lagrange est:

$$\mathcal{L}_j(x) = \prod_{i \neq 0}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

où

$$\mathcal{L}_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right)$$

$$= \left(\frac{x - 0}{-1 - 0} \right) \left(\frac{x - 1}{-1 - 1} \right) \left(\frac{x - 2}{-1 - 2} \right)$$

$$= -x \left(\frac{x - 1}{-2} \right) \left(\frac{x - 2}{-3} \right) = -x \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

et

$$\mathcal{L}_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right)$$

$$= \left(\frac{x + 1}{0 + 1} \right) \left(\frac{x - 1}{0 - 1} \right) \left(\frac{x - 2}{0 - 2} \right)$$

$$= \left(\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} \right)$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right)$$

$$= \left(\frac{x + 1}{1 + 1} \right) \left(\frac{x - 0}{1 - 0} \right) \left(\frac{x - 2}{1 - 2} \right) = \left(\frac{x + 1}{2} \right) x \left(\frac{x - 2}{-1} \right)$$

$$= \frac{-x(x-2)(x+1)}{2}$$

Scanné avec CamScanner

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{(x-x_0)}{x_3-x_0}\left(\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\right)$$

$$= \left(\frac{x+1}{2+1}\right)\left(\frac{x-0}{2-0}\right)\left(\frac{x-1}{2-1}\right)$$

$$= \left(\frac{x+1}{3}\right)\frac{x}{2}\left(\frac{x-1}{1}\right)$$

$$= \frac{x(x+1)(x-1)}{6}$$

$$P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j)\,\mathcal{L}_j(x)$$

$$= 1\left(\frac{-x(x-1)(x-2)}{6}\right) + 1\left(\frac{(-x)(x+1)(x-2)}{2}\right)$$

$$+ 16\,\frac{x(x+1)(x-1)}{6}$$

$$= \frac{-x(x^2-2x-x+2)}{6} + \frac{(-x)(x^2-2x+x-2)}{2}$$

$$+ 16\,\frac{x(x^2-1)}{6}$$

$$= \frac{12x^3-6x^2-12x}{6} = 2x^3-x^2-2x$$

① $x_0 = -1$; $y_0 = 1$ $\quad [y_0 ; y_1] = \dfrac{1-0}{-1-0} = -1$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad [y_1 ; y_2] = \dfrac{0-1}{0-1} = 1$

$x_2 = 1 \quad y_2 = 1 \quad [y_2 ; y_3] = \dfrac{1-16}{1-2} = 15$

$x_3 = 2 \quad y_3 = 16$

$\cdot\ [y_0, y_1, y_2] = \dfrac{-1-1}{-1-1} = 1$

$\cdot\ [y_1, y_2, y_3] = \dfrac{1-15}{0-2} = 7$

· On : $N_0(x) = 0$, $N_1(x) = (x - x_0) = (x+1)$

$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x(x+1)$

$N_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = x(x+1)(x-1)$

et on a $d_0 = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 1$ $d_3 = 2$

$P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} d_j N_j(x)$

$P_3(x) = 0 - (x+1) + x(x+1) + 2(X+1)(X-1)x$

$P_3(X) = 2X^3 + X^2 - 2X \quad 1$

③ $E(x) = x^4 - P_3(x)$

On a $P_3(x) = 1 - (x+1) + x(x+1) + 2x(x+1)(x-1)$

$$E(x) = x^4 - 1 + (x+1) - x(x+1 - 2x(x+1)(x-1)$$
$$= (x^2-1)(x^2+1) + (x+1)(1-x) - 2x(x+1)(x-1)$$
$$= (x+1)(x-1)(x^2 - x - x - 2x)$$
$$= (x+1)(x-1)(x^2 - 2x)$$

$$E(x) = x(x+1)(x-1)(x-2)$$

④ On a : $\forall x \in [0;2]$

et $f(x) = x^2 - 2$ est une fonction continue sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0,2[$ ①

et puisque $\forall x \in]0;2[$; $f'(x) = 2x > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[0,2]$ ②

de ① et ② on déduit que f est bijection de $[0;2)$ vers $[f(0);f(2)] = [-2;2]$.

⑤ f^{-1} ?

$y \in [-2;2]$; $f(x) = y \iff x^2 - 2 = y$

$$\iff x^2 = y + 2$$
$$\iff x = \pm\sqrt{y+2}$$

donc puisque $x \geq 0$ donc : $x = \sqrt{y+2}$