Exercice d'application :

Soient deux torseurs $[T_1]_A$ et $[T_2]_A$ définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$[T_1]_A = \begin{cases} \vec{R_1} = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{1A}} = 4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R_2} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} - 2\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{2A}} = 4\,\vec{i} + \vec{j} + 7\,\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer l'axe central et le pas du torseur $[T_1]_A$;

2) Déterminer l'automoment du torseur $[T_1]_A$, montrer qu'il est indépendant du point A ;

3) Construire le torseur $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A$ avec a et $b \in IR$;

4) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur $[T]_A$ soit un torseur couple ;

5) Montrer que le torseur couple est indépendant du point ou on le mesure ;

6) Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

Solution :

1) Axe central et Pas du torseur $[T_1]_A$

Axe central : Il est défini par l'ensemble des points P tel que : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R_1} \wedge \overrightarrow{M_{1A}}}{R_1^2} + \lambda\,\vec{R_1}$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{12}{17} - 3\lambda \\ -\dfrac{13}{17} + 2\lambda \\ -\dfrac{5}{17} + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Pas du torseur $[T_1]_A$: $P_1 = \dfrac{\vec{R_1} \bullet \overrightarrow{M_{1A}}}{R_1^2} = \dfrac{1}{17}\left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -\dfrac{28}{17}$

2) Automoment du torseur $[T_1]_A$: $\vec{R_1} \bullet \overrightarrow{M_{1A}} = \left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -28$

L'automoment est indépendant du point A. En effet, d'après la formule de transport nous pouvons écrire : $\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_B + \vec{R}_1 \bullet \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1 \right)$

$\vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_B$, on voit bien qu'il est indépendant du point A.

3) $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A \quad \Leftrightarrow \quad [T]_A = \begin{cases} R = a\vec{R}_1 + b\vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_A = a\overrightarrow{M}_{1A} + b\overrightarrow{M}_{2A} \end{cases}$

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = -3(a-b)\,\vec{i} + 2(a-b)\,\vec{j} + 2(a-b)\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} - (a-b)\,\vec{j} - 7(a-b)\,\vec{k} \end{cases}$$

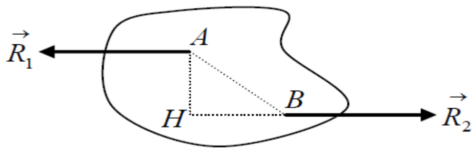
4) Condition pour que $[T]_A$ soit un torseur couple :

il faut que la résultante soit nulle : $\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad a = b$

Le moment dans ce cas sera égal à : $\overrightarrow{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} = 8a\,\vec{i}$

5) Le moment d'un torseur couple où les résultantes $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ ont le même module mais de sens opposées et appliquées aux points quelconque A et B s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_A &= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}_2 = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge (-\vec{R}_1) \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1 = \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA} \right) \wedge \vec{R}_1 \\ &= \overrightarrow{HA} \wedge \vec{R}_1 = -\overrightarrow{AH} \wedge \vec{R}_1 = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{R}_2 \end{aligned}$$



Le moment d'un couple est indépendant de la distance entre les points A et B , il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des résultantes. Cette distance est appelée bras de levier.

6) Système simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

Le torseur somme $[T]_A$ est donné par : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_A = 8\,\vec{i} \end{cases}$

La résultante peut être décomposées en deux vecteurs quelconque de même module et de sens opposé dont l'un des vecteurs est placé au point A, on obtient alors :

$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{AB} \wedge -\vec{V} = \overrightarrow{AB} \wedge -\vec{V} = 5\,\vec{i}$

système de deux vecteurs glissants : $\left(A,\ \vec{\mathrm{V}} \right)$

et $\left(B,\ -\vec{\mathrm{V}} \right)$, tel que : $\vec{V} \bullet \overrightarrow{M}_A = 0$