suite (La Séance de T.D de 06-07/04/2020)

Exercice 7
On considére la série de terme général:

$$U_n = \frac{2n}{n^4+3n^2+4}$$

1. *vérifier que cette série converge.*
2. **I** *Factoriser n^4+3n^2+4 dans $\mathbb{N}$*
   II *En déduire que $U_n = f(n-\frac{1}{2}) - f(n+\frac{1}{2})$ où f est une fonction à déterminer.*
3. *Calculer la somme de cette série.*

Solution
1) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \geq 0$
on pose $\forall n > 0, \quad V_n = \frac{2}{n^3}$

Alors pour n assez grand, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$$

et comme $\sum V_n$ converge D'où la convergence de $\sum U_n$

2)I) On a:

$$n^4+3n^2+4 = (n^2+2)^2 - n^2 = (n^2-n+2)(n^2+n+2)$$

II) On a:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{2n}{n^4+3n^2+4} \\ &= \frac{2n}{(n^2-n+2)(n^2+n+2)} \\ &= \frac{1}{n^2-n+2} - \frac{1}{n^2+n+2} \\ &= \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} \\ &= f(n-\frac{1}{2}) - f(n+\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

où $f(x) = \frac{1}{x^2+\frac{7}{4}}$

3) soit

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} U_n \\ &= f(\frac{1}{2}) - f(\frac{3}{2}) + f(\frac{3}{2}) - f(\frac{5}{2}) + f(\frac{5}{2}) + \cdots + f(n-\frac{1}{2}) - f(n+\frac{1}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}) - f(n+\frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \frac{1}{2}$

Exercice 8
Soit $\sum U_n$ une série à termes positifs et $\sum V_n$ une série à termes réels.
Montrer que:

1. $\sum U_n$ *converge* $\Rightarrow$, $\sum U_n^2$ *converge.*
2. $\sum U_n^2$ *converge,*$\Rightarrow$, $\sum \frac{U_n}{n}$ *converge.*
3. $\sum V_n^2$ *converge,* $\Rightarrow$, $\sum V_n^3$ *est absolument convergente.*

Solution

1) Comme $\sum U_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq U_n < 1$$

D'où

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq U_n^2 < U_n$$

donc la convergence de $\sum U_n$ entraine celle de $\sum U_n^2$

2) L'égalité $(U_n - \frac{1}{n})^2$ implique $\frac{U_n}{n} \leq \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$
Comme $\sum U_n^2$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont convergentes, alors leur somme est une série convergente.
Par suite $\sum \frac{U_n}{n}$ est convergente.

3) $\sum V_n^2$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n^2 = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$
la suite (V_n) est bornée: $\exists M > 0 \qquad |V_n^3| \leq MV_n^2$
Comme $\sum V_n^2$ est convergente , alors $\sum |V_n^3|$ est convergente
Donc $\sum V_n^3$ est absolument convergente.

Exercice 9
Déterminer la nature des séries de terme général:

1. $U_n = \frac{n}{\log(n!)}$
2. $V_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{1+t^4}}dt$
3. $W_n = \int_0^{\frac{1}{n\pi}} \frac{\sin(t)}{1+t}dt$

Solution

1) On a

$$\log(n!) = \log(2) + \log(3) + ... + \log(n) < (n-1)\log(n)$$

Alors $U_n \geq 0 \qquad$ pour $n \geq 2$
Et $U_n > \frac{n}{n-1}\frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{n} \qquad$ (car $\log(n) < n \qquad$ pour $n \geq 2$)
et comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente Alors la série $\sum U_n$ est aussi divergente

2) Pour tout $t \in [0, \frac{1}{n}]$, On a

$$\sqrt{1+t^4} \geq 1 \qquad \text{d'où} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$$

Ce qui donne

$$V_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{3}}dt$$

Alors

$$V_n \leq \frac{3}{4}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

Chaque V_n étant positif et majoré par le terme général d'une série convergente, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ est convergente.

3) La fonction $x \to \frac{\sin(t)}{1+t}$ est continue sur $[0, \frac{1}{n\pi}]$
D'après la formule de la moyenne, il existe $c \in [0, \frac{1}{n\pi}]$ tel que:

$$W_n = \frac{1}{n\pi}\frac{\sin(c)}{1+c} \leq \frac{\sin(c)}{n\pi} \leq \frac{c}{n\pi} \leq \frac{1}{n^2\pi^2} \qquad (car \sin(c) \leq c \qquad \text{et} c \leq \frac{1}{n\pi})$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente et $\forall n \geq 1, \quad W_n \geq 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} W_n$ est convergente .