Corrigé du TD16 : Couples de variables aléatoires, indépendance

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Étant donné que l'on choisit l'urne au hasard, X suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.*

On a $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $\forall i \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{1}{n}$.

2. Soit $i \in X(\Omega)$ fixé. On a $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Soit $j \in Y(\Omega)$.
- *Si $j > i$ alors $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = 0$ car il est impossible de tirer une boule numérotée j dans l'urne i lorsque $j > i$.*
- *Si $j \leqslant i$ alors $\mathbb{P}_{[X=i]}(Y = j) = \dfrac{1}{i}$, car le choix des boules est équiprobable.*

3. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = i])_{i\in[1;n]}$ on a :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}_{[X=i]}(Y = j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}$$

Y est une variable aléatoire réelle discrète finie donc elle admet une espérance et on a :

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{in} = \sum_{(i,j)\in[1;n]^2, i\leqslant j} \frac{j}{ni} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{in} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{in} \times \frac{i(i+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{1}{2n} \times \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right) = \frac{n+3}{4}.$$

4. On remarque que $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = 0$, mais $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \neq 0$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. On a : $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{ni}$.

Corrigé de l'exercice 2.

Corrigé de l'exercice 3. *1. On a $(X = Y) = \bigcup_{k=1}^{n} ((X = k) \cap (Y = k))$ (réunion disjointe), donc*

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)).$$

Puisque X et Y sont indépendantes et suivent la même loi, on a

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

De la même façon, on a $(X \geq Y) = \bigcup_{k=1}^{n} ((Y = k) \cap (X \geq k))$ (réunion également disjointe), donc par indépendance

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k) \times \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

2. *La variable aléatoire $D = X - Y$ prend ses valeurs dans $\{1-n, \cdots, 0, \cdots, n-1\}$. On a également une symétrie :*
$$\forall k \in \{0, \cdots, n-1\}, \qquad \mathbb{P}(D = k) = \mathbb{P}(D = -k),$$
car $-D = Y - X$ suit la même loi que $D = X - Y$ (puisque X et Y suivent la même loi). Il suffit donc de calculer $\mathbb{P}(D = k)$ pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. Pour un tel k :
$$(D = k) = (X = Y + k) = \bigcup_{j=1}^{n} ((Y = j) \cap (X = j + k)),$$
donc (toujours par indépendance de X et Y) :
$$\mathbb{P}(D = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = j + k) = \frac{1}{n} \sum_{l=k+1}^{k+n} \mathbb{P}(X = l).$$
Mais $\mathbb{P}(X = l) = 0$ dès que $l \notin \{1, \cdots, n\}$, donc, comme $1 \leq k + 1 \leq n \leq k + n$, on a
$$\mathbb{P}(D = k) = \frac{1}{n} \sum_{l=k+1}^{n} \mathbb{P}(X = l) = \frac{n - k}{n^2}.$$
Par symétrie, on en déduit la loi de D :
$$\forall k \in \{1 - n, \cdots, 0, \cdots, n - 1\}, \qquad \mathbb{P}(D = k) = \frac{n - |k|}{n^2}.$$

Corrigé de l'exercice 4.
Puisque $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, m]\!]$, on a $(X + Y)(\Omega) = [\![0, n + m]\!]$.
Pour $k \in [\![0, n + m]\!]$ fixé, on a
$$(X + Y = k) = \bigcup_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!],\ i+j=k} (X = i) \cap (Y = j),$$
donc par disjonction de cas et indépendance de X et Y :
$$\mathbb{P}(X+Y = k) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!],\ i+j=k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \left(\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!],\ i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} \right) p^k(1-p)^{n+m-k}.$$
Ensuite, on peut calculer la somme de plusieurs manières :

- *soit de manière combinatoire : le produit $\binom{n}{i}\binom{m}{j}$ est le nombre de parties de la forme (A, B) avec $A \subset [\![1, n]\!]$ et $B \subset [\![n + 1, n + m]\!]$, $\#A = i$ et $\#B = j$. Lorsque $i + j = k$, choisir un tel couple (A, B) de parties revient exactement à choisir une partie $C = A \cup B \subset [\![1, n + m]\!]$ avec $\#C = k$, et il y a exactement $\binom{n+m}{k}$ parties de ce type. Donc :*
$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!],\ i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}.$$
- *soit avec des polynômes : on calcule $(1 + X)^n(1 + X)^m$ de deux façons.*
D'une part :
$$\begin{aligned}(1 + X)^n(1 + X)^m &= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{m}{j} X^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!],\ i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} \right) X^k\end{aligned}$$
(en regroupant les couples (i, j) selon la valeur de la somme $k = i + j$).
D'autre part :
$$(1 + X)^n(1 + X)^m = (1 + X)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} X^k.$$

Donc en identifiant les coefficients de ces deux polynômes égaux, on obtient :

$$\sum_{(i,j)\in[0,n]\times[0,m],\ i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}.$$

Finalement, on a donc $\mathbb{P}(X+Y=k) = \binom{n+m}{k} p^k(1-p)^{n+m-k}$, *ce qui montre que* $X+Y$ *suit la loi binomiale* $\mathcal{B}(n+m,p)$.

Corrigé de l'exercice 5.

Corrigé de l'exercice 6. *1. On a ici* $X(\Omega) = [\![1;n-1]\!]$ *et* $Z(\Omega) = [\![2;n]\!]$. *Soit* $k \in X(\Omega)$ *et* $j \in Z(\Omega)$.

— *Si* $k \geqslant j$ *alors* $\mathbb{P}([X=k]\cap[Z=j]) = 0$.

— *Si* $k < j$ *alors on peut écrire* $[X=k]\cap[Z=j] = R_1 \cap \cdots R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_{j-1} \cap B_j$ *et donc, d'après la formule des probabilités composées :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]\cap[Z=j]) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} \\ &\quad \times \frac{n-2-(k-1)}{n-k} \times \cdots \times \frac{n-2-(j-3)}{n-(j-2)} \times \frac{1}{n-(j-1)} \\ &= \frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k)\times 2\times(n-k-1)\cdots(n-j+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $([X=k])_{k\in X(\Omega)}$, *on a pour tout* $j \in Z(\Omega)$ *:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=j) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=k]\cap[Z=j]) &= \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}([X=k]\cap[Z=j] + \sum_{k=j}^{n-1} \mathbb{P}([X=k]\cap[Z=j]) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} + \sum_{k=j}^{n-1} 0 = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7. *1.*

y_i	*0*	*1*	*4*
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	*1/6*	*1/2*	*1/3*

X \ Y	*0*	*1*	*4*
-2	*0*	*0*	*1/6*
-1	*0*	*1/4*	*0*
0	*1/6*	*0*	*0*
1	*0*	*1/4*	*0*
2	*0*	*0*	*1/6*

2. $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0]) = 0$ *et* $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0) \neq 0$ *donc les variables ne sont pas indépendantes.*

3. $E(X) = 0$, $E(Y) = \frac{11}{6}$ *et* $E(XY) = \sum xy\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = 0$ *donc* $cov(X,Y) = 0$.
Les variables ne sont pas indépendantes et pourtant elles ont une covariance nulle.

Corrigé de l'exercice 8. *1. On a* $Y_i(\Omega) = \{0;1\}$ *et* $\mathbb{P}(Y_i=1) = \mathbb{P}([X_i=1]\cap[X_{i+1}=1]) = p\times p = p^2$ *car les variables* X_i *sont indépendantes. Donc on a* $\mathbb{P}(Y_i=0) = 1-p^2$.
Y_i *suit une loi de Bernoulli de paramètre* p^2.

2. On a $E(Y_iY_j) = \mathbb{P}(Y_iY_j=1) = \mathbb{P}([X_i=1]\cap[X_{i+1}=1]\cap[X_j=1]\cap[X_{j+1}=1])$.
Si $j\neq i+1$ *alors* $E(Y_iY_j) = p^4$ *et si* $j=i+1$, $E(Y_iY_j) = p^3$.
Donc si $j\neq i+1$ *alors* $cov(Y_i,Y_j) = 0$ *et si* $j=i+1$, $cov(Y_i,Y_{i+1}) = p^3(1-p)$.

Corrigé de l'exercice 9.

Corrigé de l'exercice 10.

Corrigé de l'exercice 11.
Pour $1 \leq i \leq 1000$, on note X_i le résultat du i^e dé. Les variables $(X_i)_{1\leq i\leq 1000}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi uniforme $\mathcal{U}\{1, \cdots, 6\}$.
On note $S = X_1 + \cdots + X_{1000}$. On veut majorer $\mathbb{P}(S \geq 4000)$, et on a :

$$E(S) = 1000E(X_1) = 3500, \qquad V(S) = 1000V(X_1) = 1000\frac{6^2-1}{12} = 1000 * \frac{35}{12}.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev :

$$\mathbb{P}(S \geq 4000) \leq \mathbb{P}(|S - E(S)| \geq 500) \leq \frac{V(S)}{500^2} \leq \frac{6}{500} = 0,012.$$

Corrigé de l'exercice 12.

Corrigé de l'exercice 13.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 14.

Corrigé de l'exercice 15.

Corrigé de l'exercice 16. *1. On a $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et comme il y a $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ boules dans l'urne en tout, pour tout $k \in X(\Omega)$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k}{n(n+1)/2} = \dfrac{2k}{n(n+1)}$.*
X est une variable discrète finie donc elle admet une espérance et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

2. (a) T_1 suit la même loi que X.
Donc $T_1(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(T_1 = k) = \dfrac{2k}{n(n+1)}$.

(b) On a $T_1(\Omega) = T_2(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Soit k et j deux éléments de $[\![1;n]\!]$.

— *Si $k \neq j$, on a*

$$\mathbb{P}([T_1 = k] \cap [T_2 = j]) = \mathbb{P}(T_1 = k)\mathbb{P}_{[T_1=k]}(T_2 = j) = \frac{2k}{n(n+1)} \times \frac{j}{n(n+1)/2 - 1} = \frac{4kj}{n(n+1)(n^2+n-2)}.$$

— *Si $k = j$, on a*

$$\mathbb{P}([T_1 = k] \cap [T_2 = k]) = \mathbb{P}(T_1 = k)\mathbb{P}_{[T_1=k]}(T_2 = k) = \frac{2k}{n(n+1)} \times \frac{k-1}{n(n+1)/2 - 1} = \frac{4k(k-1)}{n(n+1)(n^2+n-2)}.$$

(c) *Soit $j \in T_2(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([T_1 = k])_{k\in[\![1;n]\!]}$ on a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_2 = j) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_1 = k] \cap [T_2 = j]) \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}([T_1 = k] \cap [T_2 = j]) + \mathbb{P}([T_1 = j] \cap [T_2 = j]) + \sum_{k=j+1}^{n} \mathbb{P}([T_1 = k] \cap [T_2 = j]) \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{4kj}{n(n+1)(n^2+n-2)} + \frac{4j(j-1)}{n(n+1)(n^2+n-2)} + \sum_{k=j+1}^{n} \frac{4kj}{n(n+1)(n^2+n-2)} \\
&= \frac{4j}{n(n+1)(n^2+n-2)} \left(\sum_{k=1}^{j-1} k + j - 1 + \sum_{k=j+1}^{n} k \right) \\
&= \frac{4j}{n(n+1)(n^2+n-2)} \left(\sum_{k=1}^{n} k - 1 \right) \\
&= \frac{4j}{n(n+1)(n^2+n-2)} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{2j}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer ici que T_2 a la même loi que T_1 ce qui peut paraître surprenant...

(d) *On a $\mathbb{P}([T_1 = 1] \cap [T_2 = 1]) = 0$ et $\mathbb{P}(T_1 = 1) \times \mathbb{P}(T_2 = 1) = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2} \neq 0$ donc les variables T_1 et T_2 ne sont pas indépendantes.*

(e) $E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 2E(X) = \dfrac{2(2n+1)}{3}$.

Corrigé de l'exercice 17.

Corrigé de l'exercice 18.

Corrigé de l'exercice 19.

Corrigé de l'exercice 20. *1. Z_p compte le nombre de boules blanches tirées au cours des p premiers tirages.*

2. *X_1 vaut 1 lorsque la boule tirée est blanche et 0 sinon. Donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Donc on a $E(X_1) = \dfrac{1}{2}$.*

3. — *Pour déterminer la loi d'un couple il faut calculer les différents $\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$. On peut présenter les résultats sous forme d'un tableau :*

X_1 \ X_2	0	1
0	$\frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2}$
1	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$

Pour calculer, par exemple, $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$ on a utilisé la formule des probabilités composées $\mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 0)$ et on a remarqué que, sachant que l'on a obtenu une boule noire au premier tirage ($[X_1 = 0]$), il y a avant le deuxième tirage $c + 2$ boules dans l'urne dont $c + 1$ qui sont noires donc $\mathbb{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \dfrac{c+1}{c+2}$.
On a raisonné de même pour les autres probabilités.

— *D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$ *on a*

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X-2 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X-2 = 1]) = \frac{c+1}{2(c+2)} + \frac{1}{2(c+2)} = \frac{1}{2}.$$

Et donc X_2 *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{2}$ *et ainsi* $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

4. $Z_2 = X_1 + X_2$. *Donc* $Z(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. *On a :*
   - $\mathbb{P}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$.
   - $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2}$.
   - $\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$.

k	*0*	*1*	*2*
$\mathbb{P}(Z_2 = k)$	$\frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$	$\frac{1}{c+2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2}$

5. *On ajoute p chiffres qui valent chacun 0 ou* 1 *donc* $Z_{\mathbb{P}}(\Omega) = [\![0; p]\!]$.
6. (a) *L'événement* $[Z_p = k]$ *signifie qu'au cours des p premiers tirages, on a tiré k boules blanches et donc* $p - k$ *boules noires. On a donc mis dans l'urne kc boules blanches et* $(p-k)c$ *boules noires supplémentaires. Il y a donc avant le tirage* $p+1$, $pc+2$ *boules dans l'urne dont* $kc+1$ *blanches :*
$$\mathbb{P}_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1) = \frac{kc+1}{pc+2}.$$
   (b) *À l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $[Z_p = 0], \cdots, [Z_p = p]$ *on a :*
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)\mathbb{P}_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1)\\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)\frac{kc+1}{pc+2}\\ &= \frac{1}{pc+2}\left(c\sum_{k=0}^{p} k\mathbb{P}(Z_p = k) + \sum_{k=0}^{p}\mathbb{P}(Z_p = k)\right)\\ &= \frac{cE(Z_p)+1}{pc+2}.\end{aligned}$$
   (c) *Montrons, par récurrence, que la propriété « $\mathcal{P}(p)$: $X_1, ..., X_p$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ » est vraie pour tout* $p \in \{1, \cdots, n\}$.
   - *Pour* $p = 1$ *la propriété est vraie d'après la question 2.*
   - *Supposons* $\mathcal{P}(p)$ *vraie. Alors* $E(Z_p) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2} = \frac{p}{2}$.
     On obtient donc $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{pc/2+1}{pc+2} = \frac{1}{2}$ *et donc* X_{p+1} *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{2}$. $\mathcal{P}(p+1)$ *est donc vraie.*

   Ainsi, pour tout $p \in \{1, \cdots, n\}$, X_p *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{2}$.