Corrigé du TD13 : Variables aléatoires discrètes

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1.

Puisque $Y(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$, la loi de Y est déterminée par les valeurs $\mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{3, 4, 5, 6\}$.
Tout d'abord, $\mathbb{P}(Y > 5) = \mathbb{P}(Y = 6)$ donc $\mathbb{P}(Y = 6) = \frac{1}{2}$.
Ensuite, $\mathbb{P}(Y < 5) = \mathbb{P}(Y \in \{3, 4\}) = \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4) = 2\mathbb{P}(Y = 3)$ (car $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4)$), donc

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y < 5) = \frac{1}{6}.$$

Finalement, $\mathbb{P}(Y = 5) = 1 - \mathbb{P}(Y < 5) - \mathbb{P}(Y > 5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
La loi de Y est :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y = 3) &= 1/6 \\ \mathbb{P}(Y = 4) &= 1/6 \\ \mathbb{P}(Y = 5) &= 1/6 \\ \mathbb{P}(Y = 6) &= 1/2 \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 2.

Pour tout entier $p \geq 1$, R_p désignera l'événement "obtenir une boule rouge au p^e tirage".

1. *Si $n = 5$, il y a 2 boules blanches et 3 boules rouges dans l'urne, donc on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$, et*

$$(X = 1) = B_1, \qquad (X = 2) = R_1 \cap B_2,$$
$$(X = 3) = R_1 \cap R_2 \cap B_3, \qquad (X = 4) = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap B_4.$$

Les probabilités de ces événements se calculent en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{5},$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$
$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(B_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5},$$
$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3)\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(B_4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{10}.$$

2. *On a $X(\Omega) = \{1, \cdots, n - 1\}$ (car il n'y a que $n - 2$ boules rouges, donc après le $n - 1^e$ tirage, on est sûr qu'une blanche sera déjà sortie). Pour $k \in \{1, \cdots, n - 1\}$, on a*

$$(X = k) = \begin{cases} R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k} & \text{si } k \geq 2 \\ \\ \overline{R_1} & \text{si } k = 1 \end{cases}.$$

D'où $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{n}$ et d'après la formule des probabilités composées :

$$\forall k \in \{2, \cdots, n-1\}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(\overline{R_k}).$$

Au moment de piocher la boule blanche au k^e tirage, il reste $n - (k - 1)$ boules dans l'urne, dont 2 blanches. Donc :

$$\forall k \in \{2, \cdots, n - 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{n - 2}{n} \times \cdots \times \frac{n - k}{n - k + 2} \times \frac{2}{n - k + 1} = \frac{2(n - k)}{n(n - 1)}$$

(on remarque que cette formule est aussi valable pour $k = 1$).
On a finalement

$$\forall k \in \{1, \cdots, n - 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n - k)}{n(n - 1)}.$$

L'espérance de X est

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

3. *La variable $X-1$ donne le nombre de boules rouges ayant été déjà tirées lorsque la première blanche sort. Il reste donc $(n-2)-(X-1) = n-1-X$ boules rouges. Ceci montre que $Y = n-1-X$. On en déduit par linéarité de l'espérance que $E(Y) = n-1-E(X) = \frac{2n-4}{3}$.*

Corrigé de l'exercice 3. 1. *On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1,\cdots,N\}$, où Ω l'ensemble des listes $(a_1,\cdots,a_n)$ avec chaque $a_i \in \{1,\cdots,N\}$, donc $\#\Omega = N^n$ (puisque les tirages sont avec remise). On munit Ω de l'équiprobabilité.*

(a) *L'événement $(Y \leq y)$ correspond aux listes $(a_1,\cdots,a_n)$ avec $1 \leq a_i \leq y$ pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$. Chaque a_i peut donc prendre y valeurs possibles, donc il y a y^n listes de ce type. D'où*

$$\forall y \in \{1,\cdots,N\}, \qquad \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{y^n}{N^n} = \left(\frac{y}{N}\right)^n$$

(et on remarque que cette formule reste vraie pour $y=0$). On en déduit la loi de Y :

$$\forall y \in \{1,\cdots,N\}, \qquad \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(Y\leq y) - \mathbb{P}(Y \leq y-1) = \left(\frac{y}{N}\right)^n - \left(\frac{y-1}{N}\right)^n.$$

(b) *L'événement $(X \geq x)$ correspond aux listes $(a_1,\cdots,a_n)$ avec $x \leq a_i \leq N$ pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$. Chaque a_i peut donc prendre $N-x+1$ valeurs possibles, donc il y a $(N-x+1)^n$ listes de ce type. D'où*

$$\forall x \in \{1,\cdots,N\}, \qquad \mathbb{P}(X \geq x) = \frac{(N-x+1)^n}{N^n} = \left(\frac{N+1-x}{N}\right)^n$$

(et on remarque que cette formule reste vraie pour $x = N+1$). On en déduit la loi de X :

$$\forall x \in \{1,\cdots,N\}, \qquad \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X \geq x) - \mathbb{P}(X \geq x+1) = \left(\frac{N+1-x}{N}\right)^n - \left(\frac{N-x}{N}\right)^n.$$

2. *Cette fois-ci Ω est l'ensemble des parties à n éléments d'un ensemble à N éléments, donc $\#\Omega = \binom{N}{n}$ (puisque les tirages sont sans remise). On munit Ω de l'équiprobabilité.*

(a) *On a $Y(\Omega) = \{n, n+1,\cdots,N\}$, et*

$$\forall y \in \{n,n+1,\cdots,N\}, \qquad \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{\binom{y}{n}}{\binom{N}{n}}, \qquad \mathbb{P}(Y=y) = \frac{\binom{y}{n} - \binom{y-1}{n}}{\binom{N}{n}}$$

(avec la convention $\binom{n-1}{n} = 0$).

(b) *On a $X(\Omega) = \{1,2,\cdots,N-n+1\}$, et*

$$\forall x \in \{1,2,\cdots,N-n+1\}, \qquad \mathbb{P}(X \geq x) = \frac{\binom{N-x+1}{n}}{\binom{N}{n}}, \qquad \mathbb{P}(X=x) = \frac{\binom{N-x+1}{n} - \binom{N-x}{n}}{\binom{N}{n}}$$

(avec la convention $\binom{n-1}{n} = 0$).

Corrigé de l'exercice 4. 1. *On a $X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ (après 4 tirages, il ne reste plus que 2 boules dans l'urne). Pour calculer la loi de X, notons R_k (resp. N_k, resp. J_k) l'événement "obtenir une boule rouge (resp. noire, resp. jaune) au k^e tirage". On a*

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{6};$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(N_1\cap R_2)+\mathbb{P}(N_1\cap N_2)+\mathbb{P}(J_1\cap R_2)=\frac{7}{30};$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}(N_1\cap J_2\cap R_3)+\mathbb{P}(N_1\cap J_2\cap N_3)+\mathbb{P}(J_1\cap N_2\cap N_3)\\ &\quad+\mathbb{P}(J_1\cap N_2\cap R_3)+\mathbb{P}(J_1\cap J_2\cap R_3)+\mathbb{P}(J_1\cap J_2\cap J_3)=\frac{3}{10},\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X=4)=1-(\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3))=\frac{3}{10}.$$

2. *On a*

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4}k\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{6}+2*\frac{7}{30}+3*\frac{3}{10}+4*\frac{3}{10}=\frac{41}{15},$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{4}k^2\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{6}+4*\frac{7}{30}+9*\frac{3}{10}+16*\frac{3}{10}=\frac{43}{5},$$

donc $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\dfrac{43}{5}-\left(\dfrac{41}{15}\right)^2=\dfrac{254}{225}.$

Corrigé de l'exercice 5. 1. *Par hypothèse* $X(\Omega)=\{1,\cdots,6\}$ *et il existe* $\alpha\in\mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall k\in\{1,\cdots,6\},\qquad \mathbb{P}(X=k)=\alpha k.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(X=k)=1$, *on a donc* $\alpha=\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{6}k}=\dfrac{1}{21}.$
La loi de X *est donc donnée par :*

$$\forall k\in\{1,\cdots,6\},\qquad \mathbb{P}(X=k)=\frac{k}{21}.$$

2. *On a* $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k^2}{21}=\frac{91}{21}.$
3. *On a* $Y(\Omega)=\{\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\}$, *et*

$$\forall k\in\{1,\cdots,6\},\qquad \mathbb{P}\left(Y=\frac{1}{k}\right)=\mathbb{P}(X=k)=\frac{k}{21}.$$

D'après la formule de transfert :

$$E(Y)=E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{21}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 6.
Notons, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, *l'événement* $B_k=$"*obtenir une boule blanche au* k^e *tirage*", *et* $R_k=$"*obtenir une rouge au* k^e *tirage*".

1. $X_1(\Omega)=\{0;1\}$, *et* X_1 *suit évidemment une loi uniforme sur* $\{0;1\}$ *:*

$$\mathbb{P}(X_1=0)=\mathbb{P}(X_1=1)=\frac{1}{2},$$

car $(X_1=0)=R_1$ *et* $(X_1=1)=B_1$.
2. $X_2(\Omega)=\{0;1;2\}$, *et*
   - $(X_2=0)=R_1\cap R_2$, *donc*

$$\mathbb{P}(X_2=0)=\mathbb{P}(R_1)\times\mathbb{P}_{R_1}(R_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

   - $(X_2=1)=(B_1\cap R_2)\cup(R_1\cap B_2)$ *et cette réunion est disjointe, donc*

$$\mathbb{P}(X_2=1)=\mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(R_2)+\mathbb{P}(R_1)\times\mathbb{P}_{R_1}(B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

- $(X_2 = 2) = B_1 \cap B_2$, *donc*

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

La variable X_2 suit donc une loi uniforme sur $\{0; 1; 2\}$.

3. *On a clairement $X_n(\Omega) = \{0; 1; \cdots; n\}$ pour tout $n \geq 1$. Montrons par récurrence que X_n suit une loi uniforme sur $\{0, \cdots, n\}$, c'est-à-dire que*

$$\forall k \in \{0; \cdots; n\}, \qquad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

- *C'est vrai pour $n = 1$.*
- *Fixons $n \geq 1$ et supposons que $X_n \sim \mathcal{U}(\{0; \cdots; n\})$.*
Montrons alors que $X_{n+1} \sim \mathcal{U}(\{0; \cdots; n+1\})$. Soit $0 \leq k \leq n+1$, calculons $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$. D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $(X_n = l)_{0 \leq l \leq n}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}_{(X_n = l)}(X_{n+1} = k) \times \mathbb{P}(X_n = l).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\mathbb{P}(X_n = l) = \frac{1}{n+1}$ pour tout l, donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}_{(X_n = l)}(X_{n+1} = k).$$

Si $(X_n = l)$ est réalisé, l'urne comportera $l+1$ boules blanches et $n-l+1$ boules rouges après n tirages, donc on aura :

$$\mathbb{P}_{(X_n = l)}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \notin \{k-1; k+1\} \\ \frac{k}{n+2} & \text{si } l = k-1 \\ \frac{n-k+1}{n+2} & \text{si } l = k \end{cases}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{n+1}\left(\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) + \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k)\right) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \frac{1}{n+1}\mathbb{P}_{(X_n=n)}(X_{n+1} = n+1) & \text{si } k = n+1 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n+2} + \frac{n-k+1}{n+2}\right) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} & \text{si } k = n+1 \end{cases}.$$

On trouve donc $\forall k \in \{0, \cdots, n+1\}, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$, ce qui montre bien que X_{n+1} suit une loi uniforme sur $\{0, \cdots, n+1\}$.

Corrigé de l'exercice 7. 1. *On a $\dfrac{a}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a/2}{k} - \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{a/2}{k+2}$ pour tout $k \geq 1$. Donc par télescopage*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{4} - \frac{a}{2(n+1)} + \frac{a}{2(n+2)},$$

ce qui montre (en faisant tendre $n \to +\infty$) que la série $\sum\limits_{k \geq 2} \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$ converge et sa somme vaut $\frac{a}{4}$.

En posant $a = 4$ et $p_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$, on a donc $p_k \geq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$, ce qui montre que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. *Sous réserve de convergence (absolue) de cette série positive, on a* $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)}$*. Or :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{k+1} - \frac{4}{k+2} \right) = 2 - \frac{4}{n+2},$$

donc (en faisant tendre $n \to +\infty$*), on obtient la convergence de la série, donc l'existence de* $E(X)$*, qui vaut* 2.

3. *Puisque* $E(X)$ *existe, la variance* $V(X)$ *existe si, et seulement si,* $E(X^2)$ *existe, c'est-à-dire si, et seulement si, la série* $\sum_{k \geq 1} k^2\mathbb{P}(X = k)$ *converge. Mais ce n'est pas le cas, car* $k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{4k}{(k+1)(k+2)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{4}{k}$*, et la série* $\sum_{k \geq 1} \frac{4}{k}$ *diverge. Finalement, la variable aléatoire* X *ne possède pas de variance.*

Corrigé de l'exercice 8. 1. *On doit avoir les* $\mathbb{P}(X = k)$ *positifs et* $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$*, donc* $a \geq 0$ *et* $a \times \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k k!}}_{=e^{1/2}} = 1$*, c'est-à-dire* $a = e^{-1/2}$.

2. *On étudie la série* $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ *(qui est à termes positifs). Sous réserve de convergence, on a*

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{2^k(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1}k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^k k!}.$$

D'après la question précédente, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^k k!}$ *converge, et sa somme vaut* 1*. Donc* X *possède une espérance finie, et* $E(X) = \frac{1}{2}$.

3. *On montre de même que* X *possède un moment d'ordre* 2 *: sous réserve de convergence,*

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ak}{2^k(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a(k+1)}{2^{k+1}k!},$$

c'est-à-dire

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{ak}{2^{k+1}k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1}k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1}(k-1)!} + E(X) = \frac{1}{2}E(X) + E(X) = \frac{3}{4}.$$

Ceci montre que X *possède une variance, égale à* $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Remarque.
On aurait pu reconnaître une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$ *! On a d'après le cours* $E(X) = V(X) = \lambda$.

Corrigé de l'exercice 9.
L'expérience aléatoire est la suivante : 15 *fois de suite, et de manière indépendante, on teste la durée de vie d'une lampe, et la probabilité de "succès" (durée supérieure à* 3000 *heures) est* $p = 0,8$ *à chaque fois. La variable aléatoire* X *qui donne le nombre de "succès" obtenus prend ses valeurs dans* $X(\Omega) = \{0, 1, \cdots, 15\}$ *et suit la loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$ *avec* $n = 15$ *et* $p = 0,8$.

1. *On a* $E(X) = np = 15 * 0,8 = 12$*. Le nombre de lampes ayant une durée de vie inférieure à* 3000 *heures étant* $15 - X$*, on a :*

$$E(15 - X) = 15 - E(X) = 15 - 12 = 3,$$

donc il y a en moyenne 3 *lampes de l'échantillon ayant une durée de vie inférieure à* 3000 *heures.*

2. *On cherche* $\mathbb{P}(X = 15)$. *Puis* $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, *on a*

$$\mathbb{P}(X = 15) = \binom{15}{15} p^{15}(1-p)^0 = 0,8^{15} \simeq 3,5\%.$$

3. *Cette fois, on cherche :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 13) &= \mathbb{P}(X = 13) + \mathbb{P}(X = 14) + \mathbb{P}(X = 15) \\ &= \binom{15}{13} p^{13}(1-p)^2 + \binom{15}{14} p^{14}(1-p)^1 + \binom{15}{15} p^{15}(1-p)^0 \\ &= 105 * 0,8^{13} * 0,2^2 + 15 * 0,8^{14} * 0,2 + 0,8^{15} \simeq 40\%\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10. 1. *X_1 suit évidemment une loi uniforme sur $\{1; 2\}$ (attention, ce n'est pas une loi de Bernoulli car l'image n'est pas $\{0; 1\}$ ici, donc $E(X_1) = \frac{3}{2}$ et $V(X_1) = \frac{1}{4}$.*

2. *On répète n fois la même expérience binaire (sauter d'une ou deux cases) de manière identique et indépendante, et à chaque fois, le paramètre de "succès" ("sauter d'une case" ici) est $p = \frac{1}{2}$. La variable Y_n, qui compte le nombre de succès au cours des n expériences, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \frac{1}{2}$:*

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\}, \qquad \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

En outre, on sait que

$$E(Y_n) = np = \frac{n}{2}, \qquad V(Y_n) = np(1-p) = \frac{n}{4}.$$

3. *On a $X_n = 2n - Y_n$ (la puce se retrouve à la case $2n$ moins le nombre de fois où elle a sauté d'une case).*
On en déduit la loi de probabilité de X_n : on a $X_n(\Omega) = \{n, n+1, \cdots, 2n\}$, et

$$\forall k \in \{n, \cdots, 2n\}, \qquad \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = 2n - k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{2n-k}.$$

En outre, en posant $a = -1$ et $b = 2n$, on a $X_n = aY_n + b$, donc

$$E(X_n) = aE(Y_n) + b = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2},$$

$$V(X_n) = a^2 V(Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}.$$

Corrigé de l'exercice 11. 1. *L'événement $G_{1,2n+1}$ est réalisé si, et seulement si, J_1 a échoué aux lancers $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$, J_2 a échoué aux lancers $2, 4, 6, \cdots, 2n$, et J_1 a réussi au lancer $2n+1$. Puisque tous les lancers sont indépendants, on a donc*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(G_{1,2n+1}) = \underbrace{q_1 q_2 \ q_1 q_2 \ \cdots \ q_1 q_2}_{n \ fois} \times p_1 = (q_1 q_2)^n p_1.$$

2. *Puisque J_1 ne joue pas aux rangs pairs, on a $\mathbb{P}(G_{1,2n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

3. *On a $G_1 = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_{1,k}$ et la réunion est disjointe, donc $\mathbb{P}(G_1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_{1,k})$.*
Puisque les termes de rangs pairs sont nuls, on a

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(G_{1,2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^n p_1 = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2}.$$

(on a bien $0 \leqslant q_1 q_2 < 1$, car $p_1 \neq 0$ et $p_2 \neq 0$).

4. *De même, puisque J_2 ne peut gagner qu'aux rangs pairs, on a*

$$\mathbb{P}(G_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_{2,2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_1^n q_2^{n-1} p_2 = \frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}.$$

(puisque $G_{2,2n}$ est réalisé si, et seulement si, J_1 échoue aux lancers $1, 3, \cdots, 2n-1$, J_2 échoue aux lancers $2, 4, \cdots, 2n-2$ et réussit au lancer $2n$).

5. *On a* $\mathbb{P}(G_1 \cup G_2) = \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = \dfrac{p_1 + p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} = \dfrac{1 - q_1 + (1 - q_2) q_1}{1 - q_1 q_2} = 1,$
donc l'événement $G_1 \cup G_2$ est presque sûr, ce qui montre que le jeu se termine presque sûrement.

6. *On a $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$(T = n) = \begin{cases} G_{1,2k+1} & \text{si } n = 2k+1 \\ G_{2,2k} & \text{si } n = 2k \end{cases},$$

donc la loi de T est donnée par

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & \mathbb{P}(T = 2k+1) &=& (q_1 q_2)^k p_1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, & \mathbb{P}(T = 2k) &=& q_1^k q_2^{k-1} p_2. \end{cases}$$

7. *Sous réserve de convergence des séries positives* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(T = 2k+1)$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\mathbb{P}(T = 2k)$*, on a*

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(T = 2k+1) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\mathbb{P}(T = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)(q_1 q_2)^k p_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2k q_1^k q_2^{k-1} p_2 \\ &= 2p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} k(q_1 q_2)^k + p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k + 2q_1 p_2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} \\ &= 2p_1 q_1 q_2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} + p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k + 2q_1 p_2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} \\ &= 2q_1(p_1 q_2 + p_2) \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} + p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k. \end{aligned}$$

Puisque $0 \leqslant q_1 q_2 < 1$, on reconnaît alors une série géométrique convergente :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k = \frac{1}{1 - q_1 q_2},$$

et sa série dérivée :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) \Bigg|_{x = q_1 q_2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{1 - x} \right) \Bigg|_{x = q_1 q_2} = \frac{1}{(1 - q_1 q_2)^2}.$$

Ceci montre que T admet une espérance finie et que :

$$E(T) = 2q_1(p_1 q_2 + p_2) \times \frac{1}{(1 - q_1 q_2)^2} + p_1 \times \frac{1}{1 - q_1 q_2}.$$

Mais $2q_1(p_1 q_2 + p_2) = 2q_1((1 - q_1) q_2 + 1 - q_2) = 2q_1(1 - q_1 q_2)$, donc

$$E(T) = \frac{2q_1(1 - q_1 q_2)}{(1 - q_1 q_2)^2} + \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{2q_1 + p_1}{1 - q_1 q_2},$$

c'est-à-dire $E(T) = \dfrac{2 - p_1}{1 - q_1 q_2}.$

8. On a $\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{p_1}{1-q_1q_2}$ (d'après la question 3.), donc

$$\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2} \iff 1 - q_1q_2 = 2p_1 \iff p_1 + p_2 - p_1p_2 = 2p_1 \iff p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}.$$

Or, d'après la question 5., $\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2} \iff \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2}$ (puisque $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 1$), donc le jeu est équitable si, et seulement si, $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.

9. Lorsque le jeu est équitable, on a $1 - q_1q_2 = 2p_1$ d'après la question précédente, donc $E(T) = \dfrac{2-p_1}{2p_1} = \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 12.
On a facilement $Y(\Omega) = \{0, \cdots, n\}$. On applique la formule des probabilités totales : pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}_{(X=0)}(Y = k) + \mathbb{P}(X \neq 0) \times \mathbb{P}_{(X\neq 0)}(Y = k).$$

Par hypothèse, on a $\mathbb{P}_{(X=0)}(Y = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$.
Calculons la deuxième probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{(X\neq 0)}(Y = k) = \frac{\mathbb{P}((X \neq 0) \cap (Y = k))}{\mathbb{P}(X \neq 0)} = \frac{\mathbb{P}((X \neq 0) \cap (X = k))}{\mathbb{P}(X \neq 0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X\neq 0)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases}.$$

On en déduit la loi de Y :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) \times \frac{1}{n+1} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{P}(X = 0) \times \frac{1}{n+1} + \mathbb{P}(X = k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(Y = k) = \begin{cases} \frac{(1-p)^n}{n+1} & \text{si } k = 0 \\ \frac{(1-p)^n}{n+1} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases}.$$

Calcul de l'espérance de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{(1-p)^n}{n+1} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) \\ &= \frac{(1-p)^n}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(1-p)^n}{2} + E(X) = \frac{n(1-p)^n}{2} + np \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 13.
Soit $x > 0$. L'événement $(\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma)$ est égal à $|X - \mu| < x\sigma$, donc

$$\mathbb{P}(\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma) = \mathbb{P}(|X - \mu| < x\sigma) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mu| \geq x\sigma).$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq x\sigma) = \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq x\sigma) \leq \frac{V(X)}{(x\sigma)^2} = \frac{1}{x^2},$$

donc

$$\mathbb{P}(\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma) \geq 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Corrigé de l'exercice 14. *1. On a $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}(|X_n - np| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}.$$

2. *Fixons $k \in \mathbb{N}$. On va majorer $\mathbb{P}(X_n \leq k)$ par une quantité qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. La première question donne une majoration de $\mathbb{P}(X_n \in]-\infty, np-\varepsilon] \cup [np+\varepsilon;+\infty[)$ pour tout réel $\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon = \frac{np}{2}$ (qui est bien > 0), cela donne*

$$\mathbb{P}\left(X_n \in]-\infty, \frac{np}{2}] \cup [\frac{3np}{2};+\infty[\right) \leq \frac{np(1-p)}{\frac{n^2p^2}{4}} = \frac{4(1-p)}{np}.$$

Pour n suffisamment grand, on a $\frac{np}{2} \geq k$ (à partir de $n_0 = E(\frac{2k}{p}) + 1$), donc

$$n \geq n_0 \Longrightarrow]-\infty; k] \subset]-\infty, \frac{np}{2}] \cup [\frac{3np}{2};+\infty[\Longrightarrow 0 \leq \mathbb{P}(X_n \leq k) \leq \frac{4(1-p)}{np},$$

d'où la limite nulle voulue.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 15. *1. On peut modéliser cette expérience aléatoire par un univers fini Ω de cardinal $\binom{15}{3} = \frac{15*14*13}{3*2*1} = 455$ (l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble à 15 éléments). On muni cet univers de l'équiprobabilité.*

(a) *L'événement A^c correspond aux parties formées de trois ampoules non défectueuses, donc $\#A^c = \binom{10}{3} = 120$, et $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{120}{455} = \frac{335}{455}$.*

(b) *On a $\#B = \binom{5}{3} = 10$, donc $\mathbb{P}(B) = \frac{10}{455}$.*

(c) *L'événement C correspond aux parties formées d'une ampoule défectueuse et de deux ampoules non défectueuses, on a donc $\#C = \binom{5}{1} \times \binom{10}{2} = 225$, puis $\mathbb{P}(C) = \frac{225}{455}$.*

2. (a) *On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, et*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(A^c) = \frac{120}{455} = \frac{24}{91} \\ \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(C) = \frac{225}{455} = \frac{45}{91} \\ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\times\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{100}{455} = \frac{20}{91} \\ \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(B) = \frac{2}{91} \end{cases}$$

(on vérifie bien que $\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

(b) *La fonction de répartition de X, notée $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \mathbb{P}(X = 0) & si\ 0 \leq x < 1 \\ \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) & si\ 1 \leq x < 2 \\ \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) & si\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & si\ 3 \leq x \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{24}{91} \simeq 0,26 & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{69}{91} \simeq 0,76 & si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{89}{91} \simeq 0,98 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & si\ 3 \leq x \end{cases}.$$

(c) *$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1) + 2 * \mathbb{P}(X = 2) + 3 * \mathbb{P}(X = 3) = 1$, puis $E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1) + 4 * \mathbb{P}(X = 2) + 9 * \mathbb{P}(X = 3) = \frac{11}{7}$, donc*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{11}{7} - 1^2 = \frac{4}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 16. 1. *Les valeurs possibles du produit X sont :*

$$1*1\ ,\ 1*2\ ,\ 1*3\ ,\ 1*4\ ,\ 1*5\ ,\ 2*1\ ,\ 2*2\ ,\ 2*3\ ,\ 2*4\ ,\ 3*1\ ,\ 3*2\ ,\ 3*3,$$

donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ (X prend 8 valeurs possibles).
Pour déterminer la loi de X, considérons les variables aléatoires U (donnant le numéro de l'urne) et B (donnant le numéro de la boule piochée). On a

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}((U=1)\cap(B=1)) = \mathbb{P}(U=1)\times\mathbb{P}_{(U=1)}(B=1) = \frac{1}{3}*\frac{1}{5} = \frac{1}{15};$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}((U=1)\cap(B=2)) + \mathbb{P}((U=2)\cap(B=1)) = \frac{1}{3}*\frac{1}{5}+\frac{1}{3}*\frac{1}{4} = \frac{3}{20};$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}((U=1)\cap(B=3)) + \mathbb{P}((U=3)\cap(B=1)) = \frac{1}{3}*\frac{1}{5}+\frac{1}{3}*\frac{1}{3} = \frac{8}{45};$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}((U=1)\cap(B=4)) + \mathbb{P}((U=2)\cap(B=2)) = \frac{1}{3}*\frac{1}{5}+\frac{1}{3}*\frac{1}{4} = \frac{3}{20};$$

$$\mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}((U=1)\cap(B=5)) = \frac{1}{3}*\frac{1}{5} = \frac{1}{15};$$

$$\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}((U=2)\cap(B=3)) + \mathbb{P}((U=3)\cap(B=2)) = \frac{1}{3}*\frac{1}{4}+\frac{1}{3}*\frac{1}{3} = \frac{7}{36};$$

$$\mathbb{P}(X=8) = \mathbb{P}((U=2)\cap(B=4)) = \frac{1}{3}*\frac{1}{4} = \frac{1}{12};$$

$$\mathbb{P}(X=9) = \mathbb{P}((U=3)\cap(B=3)) = \frac{1}{3}*\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(on vérifie que la somme fait bien 1).

2. *La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X>2) = 1 - \big(\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)\big) = \dfrac{47}{60}$.*
3. *On a*

$$E(X) = 1*\frac{1}{15}+2*\frac{3}{20}+3*\frac{8}{45}+4*\frac{3}{20}+5*\frac{1}{15}+6*\frac{7}{36}+8*\frac{1}{12}+9*\frac{1}{9} = \frac{14}{3} \simeq 4,66,$$

puis

$$E(X^2) = 1^2*\frac{1}{15}+2^2*\frac{3}{20}+3^2*\frac{8}{45}+4^2*\frac{3}{20}+5^2*\frac{1}{15}+6^2*\frac{7}{36}+8^2*\frac{1}{12}+9^2*\frac{1}{9} = \frac{83}{3},$$

d'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{83}{3} - \left(\dfrac{14}{3}\right)^2 = \dfrac{53}{9}$.

Corrigé de l'exercice 17. 1. *L'expérience aléatoire est la suivante : on considère 20 clients indépendamment les uns des autres, et chacun a une probabilité $p = 0,75$ d'embarquer dans l'avion. La variable aléatoire X (donnant le nombre de clients qui embarquent) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 20$ et $p = 0,75$.*
On a donc $E(X) = np = 20*0,75 = 15$ et $V(X) = np(1-p) = 15*0,25 = 3,75$.

2. *On a $\mathbb{P}(X=15) = \dbinom{20}{15}p^{15}(1-p)^5 = 15504*0,75^{15}*0,25^5 \simeq 20\%$.*
3. *Le fait d'effectuer 21 réservations correspond à modifier le paramètre n de la loi binomiale suivie par X. On a désormais $n = 21$, donc la probabilité cherchée est :*

$$\mathbb{P}(X\leq 20) = 1 - \mathbb{P}(X=21) = 1 - p^{21} = 1 - 0,75^{21} \simeq 99,8\%.$$

Corrigé de l'exercice 18.
Notation : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k désigne le résultat du k^e tirage. C'est une variable aléatoire avec $T_k(\Omega) = \{1,\cdots,n\}$, qui suit une loi uniforme.

1. *On a $X(\Omega) = \{2,\cdots,n+1\}$. En effet, le nombre minimal de tirages est 2 (on a $X = 2$ ssi $T_2 \geq T_1$), et le nombre maximal est $n+1$ (cas où $T_1 > T_2 > \cdots > T_n$, qui entraîne automatiquement $T_1 = n, T_2 = n-1, \cdots, T_n = 1$ et $T_{n+1} \geq T_n$).*

2. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- *si $k \in \{0,1\}$, alors l'événement $(X > k)$ est certain, donc $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X > 1) = 1$.*
- *si $k \in \{2, \cdots, n\}$, alors l'événement $(X > k)$ est réalisé ssi $(T_1 > T_2 > \cdots > T_k)$, donc*

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k},$$

car sur les n^k suites $(t_1, \cdots, t_k) \in \{1, \cdots, n\}^k$ (toutes équiprobables), il y en a seulement $\binom{n}{k}$ qui sont strictement décroissantes (et autant qui sont strictement croissantes d'ailleurs).
- *si $k \geq n+1$, alors l'événement $(X > k)$ est impossible, donc $\mathbb{P}(X > k) = 0$.*

Finalement, $\mathbb{P}(X > k) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} & \text{si } k \in \{0,1,\cdots,n\} \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$.

3. Calculons $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \{2, \cdots, n+1\}$.
On a $(X > k) \subset (X > k-1)$, et $(X = k) = (X > k-1) \setminus (X > k)$, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ \frac{1}{n^n} & \text{si } k = n+1 \end{cases}.$$

Remarque.
On peut vérifier que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \right) + \frac{1}{n^n} = \left(\frac{\binom{n}{1}}{n^1} - \frac{\binom{n}{n}}{n^n} \right) + \frac{1}{n^n} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 19. *1. D'une part, on a en utilisant la formule du binôme :*

$$P(X) = \sum_{k=n-1}^{2n-1} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l \right) = \sum_{l=0}^{2n-1} \underbrace{\left(\sum_{k=l}^{2n-1} \binom{k}{l} \right)}_{=c_l} X^l.$$

Le coefficient d'ordre $n-1$ vaut :

$$c_{n-1} = \sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{k}{n-1} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}.$$

D'autre part,

$$P(X) = (1+X)^{n-1} \left(1 + (1+X) + \cdots + (1+X)^{n+1}\right) = \frac{(1+X)^{2n} - (1+X)^{n-1}}{X},$$

donc c_{n-1} est aussi le coefficient d'ordre n du polynôme

$$Q(X) = (1+X)^{2n} - (1+X)^{n-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k,$$

ce qui amène $c_{n-1} = \binom{2n}{n}$, ce qu'il fallait montrer.

On peut aussi le voir de manière combinatoire : le nombre de façons d'occuper n cases parmi $2n$ est $\binom{2n}{n}$. Parmi ces répartitions :

- *il y a $\binom{n-1}{n-1} = 1$ répartition où la dernière case occupée est la n^e ;*
- *il y a $\binom{n}{n-1} = 1$ répartitions où la dernière case occupée est la $n+1^e$;*

- il y a $\binom{n+1}{n-1} = 1$ répartition où la dernière case occupée est la $n+2^e$; ...

- il y a $\binom{2n-1}{n-1} = 1$ répartition où la dernière case occupée est la $2n^e$;

2. *Pour décrire l'expérience aléatoire, on choisit Ω comme l'ensemble des listes $(a_1, \cdots, a_{2n})$ qui comportent exactement n zéros et n "1" (les "1" correspondant aux boules noires). C'est un univers fini de cardinal $\binom{2n}{n}$.*

   (a) *On a $X(\Omega) = \{n, \cdots, 2n\}$, et pour tout $k \in \{n, \cdots, 2n\}$, l'événement $(X = k)$ correspond aux listes $(a_1, \cdots, a_{2n})$ telles que $a_k = 1$ et $a_{k+1} = \cdots = a_{2n} = 0$. Il y en a $\binom{k-1}{n-1}$ (autant que de façons de placer exactement $n-1$ boules noires dans les $k-1$ premiers tirages). On a donc*

$$\forall k \in \{n, \cdots, 2n\}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

   (b) $E(X) = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}$.
   En utilisant la formule de la question 1., on trouve

$$E(X) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \left(\binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+1}{n} \right) = \frac{n(2n+1)}{n+1}.$$

Corrigé de l'exercice 20. *1. (a) On a $T_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, et*

$$\mathbb{P}(T_3 = 2) = \frac{3}{9}, \quad \mathbb{P}(T_3 = 3) = \frac{4}{9}, \qquad \mathbb{P}(T_3 = 4) = \frac{2}{9}.$$

   (b) *On a $E(T_3) = \displaystyle\sum_{k=2}^{4} k\mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{26}{9}$, et par le théorème de transfert :*
   $E(T_3^2) = \displaystyle\sum_{k=2}^{4} k^2\mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{80}{9}$. *Donc d'après la formule de Huygens :*

$$V(T_3) = E(T_3^2) - E(T_3)^2 = \frac{44}{81}.$$

2. (a) *On a $T_N(\Omega) = \{2, \cdots, N+1\}$, car la répétition intervient au plus vite au deuxième tirage (si on tire la même boule qu'au premier tirage), et au plus tard au $(N+1)^e$ (si on a tiré une fois chaque boule lors des N premiers tirages).*

   (b) *Notons X_i le numéro de la boule obtenue au i^e tirage, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Vu que l'on fait des tirages successifs avec remise, les tirages sont mutuellement indépendants, et chaque X_i suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \cdots, N\}$.*
   Avec ces notations, on a

$$(T_N = 2) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{1 \leq k \leq N} ((X_1 = k) \cap (X_2 = k)),$$

   et cette réunion est disjointe. On en déduit par indépendance mutuelle des tirages :

$$\mathbb{P}(T_N = 2) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = k) * \mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{N} (1/N)^2 = \frac{1}{N}.$$

   De même,

$$(T_N = 3) = \bigcup_{(i,j) \in [1;N]^2,\ i \neq j} ((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 \in \{i, j\}).$$

   et cette réunion est disjointe. On en déduit par indépendance mutuelle des tirages :

$$\mathbb{P}(T_N = 3) = \sum_{(i,j) \in [1;N]^2,\ i \neq j} \mathbb{P}(X_1 = i) * \mathbb{P}(X_2 = j) * \mathbb{P}(X_3 \in \{i, j\}) = \sum_{(i,j) \in [1;N]^2,\ i \neq j} \frac{2}{N^3}.$$

Vu que le nombre de couples $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$ *tels que* $i \neq j$ *est* $N(N-1)$*, on en déduit que*

$$\mathbb{P}(T_N = 3) = N(N-1) * \frac{2}{N^3} = \frac{2(N-1)}{N^2}.$$

Enfin, l'événement $T_N = N+1$ *est réalisé si et seulement si* $(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ *est une permutation de l'ensemble* $\{1, \cdots, N\}$*. Il y a donc* $N!$ *listes qui conviennent parmi* N^N *listes équiprobables, ce qui montre que*

$$\mathbb{P}(T_N = N+1) = \frac{N!}{N^N}.$$

(c) *Fixons* $k \in \{1, \cdots, N\}$*. L'événement* $(T_N > k)$ *est réalisé si et seulement si la liste* $(X_1, \cdots, X_k)$ *est composée d'éléments distincts de* $\{1, \cdots, N\}$*.*
Il y a donc $N(N-1)\cdots(N-k+1)$ *listes qui conviennent parmi* N^k *listes équiprobables, ce qui montre que*

$$\mathbb{P}(T_N > k) = \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k} = \frac{N!}{(N-k)!N^k}.$$