Ch. I

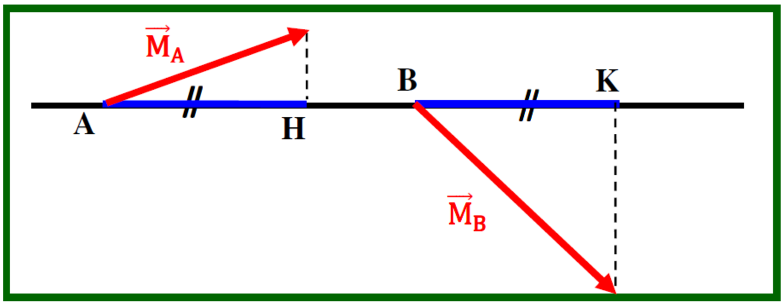
TORSEURS

I. Champ de vecteurs antisymétrique

- On appelle ***champ de vecteurs,*** $\vec{\mathbf{M}}$ toute application qui associe à chaque point A de l'espace un vecteur $\vec{\mathbf{M}}(\mathbf{A}) = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}$.
- On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{\mathbf{M}}$ est équiprojectif si et seulement si :

$$\forall \ \mathbf{A \text{ et } B} \qquad \overrightarrow{\mathbf{AB}} \, . \, \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \, . \, \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}$$

L'équiprojectivité traduit le fait que les champs en deux points quelconques A et B ont même projection sur la droite (AB) : $\overline{\mathbf{AH}} = \overline{\mathbf{BK}}$



- On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{\mathbf{M}}$ est ***antisymétrique*** si :

$$\forall \ \mathbf{A \text{ et } B} \qquad \exists! \ \vec{R} \qquad \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Ou encore s'il existe une matrice [F] antisymétrique ($[\mathbf{F}] = -[\mathbf{F}]^{\mathbf{T}}$) tel que :

$$\forall \ \mathbf{A \text{ et } B} \qquad \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} + [\mathbf{F}]. \, \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

$[\mathbf{F}]^{\mathbf{T}}$ est la matrice transposée de [F].

Théorème de Delassus : Tout champ de vecteurs antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.

$$\text{Antisymétrie} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equiprojectivité}$$

II. Torseurs

On appelle torseur un ensemble constitué d'un champ de vecteurs antisymétrique $\vec{\mathbf{M}}$ et de son vecteur associé $\vec{\mathbf{R}}$ appelé **résultante** du torseur, vérifiant la relation de transport:

$$\boxed{\forall \ \mathbf{A, B} \qquad \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}}$$

On note le torseur en un point A sous la forme :

$$[T(A)] = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{A}} \end{Bmatrix} \text{ ou encore } [\vec{R},\ \vec{M}_A]$$

$\vec{\mathbf{M}}_A$ est appelé **moment résultant** en A du torseur. Les vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{\mathbf{M}}_A$ s'appellent les éléments de réduction du torseur au point A. En termes des composantes des deux vecteurs dans une même base, on écrit:

$$[T(A)] = \begin{Bmatrix} R_1 & M_{1A} \\ R_2 & M_{2A} \\ R_3 & M_{3A} \end{Bmatrix}$$

III. Invariant scalaire d'un torseur

L'invariant scalaire d'un torseur [T], noté, $I_{[T]}$ est le produit scalaire de sa résultante $\vec{\mathbf{R}}$ et de son moment $\vec{\mathbf{M}}_A$ en un point A quelconque. Cette quantité est indépendante de ce point.

$$\forall \textbf{ A et B} \qquad I_{[T]} = \vec{\mathbf{R}} \,.\, \vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{R}} \,.\, \vec{\mathbf{M}}_B$$

IV. Algèbre élémentaire des torseurs

Soient deux torseurs : $[\boldsymbol{T_1}(\mathrm{A})] = [\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}},\ \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{1A}}]$ et $[\boldsymbol{T_2}(\mathrm{A})] = [\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}},\ \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{2A}}]$

Egalité : $[\boldsymbol{T_1}] = [\boldsymbol{T_2}] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathbf{A}) \quad (\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}} = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}} \;\; \boldsymbol{et} \;\; \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1A}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2A}})$

Addition: $[\boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{T_1}] + [\boldsymbol{T_2}]$ est un torseur tel que :

$(\forall \mathbf{A}) \qquad [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})] = [\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{A})] + [\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{A})] \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{1}} + \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{2}}$ **et** $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1A}} + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2A}}$

Multiplication par un scalaire $\boldsymbol{\lambda}$: $[\boldsymbol{T}] = \boldsymbol{\lambda}\,[\boldsymbol{T_1}]$ est un torseur tel que :

$(\forall \mathbf{A}) \qquad [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})] = \boldsymbol{\lambda}\,[\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{A})] \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\lambda}\,\vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{1}}$ et $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1A}})$

Comoment : $[\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{A})].[\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{A})] = \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{1}}.\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2A}} + \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{2}}.\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1A}}$

Le comoment est un invariant scalaire qui ne dépend pas du point A.

$$(\forall \textbf{ A et B}) \qquad [\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{A})].[\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{A})] = [\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{B})].[\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{B})]$$

Preuve :

$$[\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{A})].[\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{A})] = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}.\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{2A}} + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}.\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{1A}} = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\,.\,(\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{2B}} + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}.\,(\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{1B}} + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}})$$

$$= \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}.\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{2B}} + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}.\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{1B}} + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\,.\,(\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}.\,(\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}.\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{2B}} + \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}.\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{1B}} = [\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{B})].[\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{B})]$$

Car **:** $\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\,.\,(\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}) = -\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{2}}.\,(\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BA}})$

Automoment **:** $[T(A)] . [T(A)] = 2\,\vec{\mathbf{R}} . \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{2}\ I_{[T]}$

V. Axe central d'un torseur

1. Point central

Le point central A d'un torseur est un point où le moment résultant $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}$ est colinéaire à sa résultante $\vec{\mathbf{R}}$:

$$\vec{M}_A \wedge \vec{R} = \vec{0},$$

Ou encore que : $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{k}\,\vec{\mathbf{R}}$, où k est un scalaire.

2. Axe central

L'axe central (Δ) **d'**un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux :

$$\Delta = \{A \ / \ \vec{M}_A \wedge \vec{R} = \vec{0}\}$$

L'axe central n'existe que si $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Equation de l'axe central

Soit $[T(O)] = [\vec{R}, \vec{M}_O]$ un torseur dont les éléments de réduction en un point O sont donnés. Soit (Δ) l'axe central de [T] et soit $A \in \Delta$ alors :

$$\vec{\mathbf{M}}_A \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Ou encore :

$$(\vec{\mathbf{M}}_O + \vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{OA}}) \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Ce qui donne en développant :

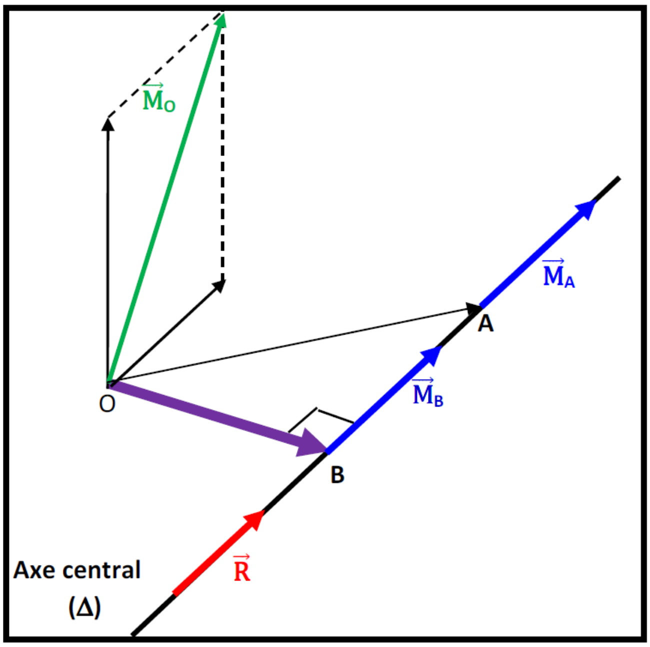
$$\vec{\mathbf{M}}_O \wedge \vec{\mathbf{R}} + R^2\,\vec{\mathbf{OA}} - (\vec{\mathbf{R}} . \vec{\mathbf{OA}})\,\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Comme $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, on obtient:

$$\vec{\mathbf{OA}} = \left(\frac{\vec{\mathbf{R}} . \vec{\mathbf{OA}}}{\mathbf{R^2}}\right)\vec{\mathbf{R}} + \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}}{\mathbf{R^2}}$$

Soit $B \in \Delta$ tel que $\vec{\mathbf{OB}} . \vec{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ alors :

$$\boxed{\vec{\mathbf{OB}} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}}{\mathbf{R^2}}}$$



Le point B est la projection orthogonale de O sur l'axe central (Δ). Donc :

$$\boxed{\vec{OA} = \alpha\,\vec{R} + \vec{OB}} \qquad \boldsymbol{\alpha} \textbf{ scalaire}$$

Par conséquent, l'axe central est la droite, $\Delta(\boldsymbol{B}, \vec{\mathbf{R}})$ qui passe par le point B et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$.

3. Moment central

Le moment central $\vec{\mathbf{M}}_A$ d'un torseur est le moment résultant en un point A de son axe central ($A \in (\Delta)$).

Le moment central a la même direction que l'axe central du torseur.

Remarque

Le moment d'un torseur est constant le long de :

- l'axe central : $\forall$ A et B $\in$ (Δ) : $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A$
- toute parallèle à l'axe central.

Preuve : Soit A et B $\in$ (Δ) alors $\vec{\mathbf{R}} \,//\, (\mathbf{AB})$ donc $\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{AB}} = \vec{\mathbf{0}}$ Par conséquent : $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{AB}} = \vec{\mathbf{M}}_A$

VI. Torseurs à invariant scalaire nul : Glisseurs et Couples

Soit $[T(A)] = [\vec{R}, \vec{\mathbf{M}}A]$ un torseur. L'invariant scalaire du torseur : $I_{[T]} = \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_A = \mathbf{0}$ est nul, dans les cas suivants :

1. Torseur nul
2. Glisseur
3. Couple

***1. Torseur nul* [0]:** $(\forall\, \mathbf{A})$ $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{0}}$

***2. Glisseur* :** $\mathbf{I_{[T]} = 0}$ **et** $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$

Le moment central d'un glisseur est nul : $\forall\, \mathbf{C} \in \Delta$ $\vec{\mathbf{M}}_C = \vec{\mathbf{0}}$

En effet : $\vec{M}_C \perp \vec{R}$ (car $I_{[T]} = \mathbf{0}$) et $\vec{M}_C \,//\, \vec{R}$ (car C $\in (\Delta)$) Donc : $\vec{M}_C = \vec{0}$

Un glisseur est un torseur pour lequel il existe au moins un point central dont le moment est nul.

*Axe **central*** : Il faut distinguer deux cas :

1er Cas : $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Donc : $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ d'où A $\in \Delta$ (l'axe central passe par le point A)

L'axe central du glisseur est la droite $\Delta(\boldsymbol{A}, \vec{\mathbf{R}})$ passant par le point central A et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$.

2eme Cas : $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

L'axe du glisseur est la droite $\Delta(\boldsymbol{B}, \vec{\mathbf{R}})$ passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$ tel que :

$$\vec{\mathbf{AB}} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}}{\mathbf{R}^2}$$

***3. Couple* :** $\mathbf{I_{[T]} = 0,}$ $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{M}}_A \neq \vec{\mathbf{0}}$

Un couple est un champ uniforme: $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}$.

Par construction, un couple ne possède pas d'axe central.