TD 19

Les espaces vectoriels

Chez $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

Exercice 1 : Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
A= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x+3y-2z=0\}$;
B= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1\}$;
C= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \leq z\}$;
D= $\{(x+2y, y, x-3y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;
E= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2=0\}$.

Exercice 2 : Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$ on note $F=\mathrm{Vect}\Big(u_1,\ u_2\Big)$ avec

$$u_1=(1,\ -3,\ 5,\ 2) \quad u_2=(1,\ -1,\ -4,\ 3).$$

Le vecteur $v=(2,\ -10,\ 26,\ 2)$ appartient-il au sous-espace vectoriel F ?

Exercice 3 : [corrigé] On définit les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ 0), & u_2 &= (1,\ 1,\ 0,\ 0), \\ v_1 &= (1,\ 1,\ 1,\ 0), & v_2 &= (1,\ 1,\ 1,\ 1). \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$F=\mathrm{Vect}\Big(u_1,\ u_2\Big) \quad G=\mathrm{Vect}\Big(v_1,\ v_2\Big).$$

Démontrer que $E=F\oplus G$.

Exercice 4 : [corrigé] Est-ce que $((1;1;1),(1;0;1),(0;1;0))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5 : Déterminer si ces familles suivantes sont libres ou liées :

(a) $\Big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\Big)$; (b) $\Big((0,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(5,4,1,3)\Big)$.

Exercice 6 : [corrigé] Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

(a) $F=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ 3x-y=0\Big\}$; (b) $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \left\{\begin{array}{c} x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{array}\right.\right\}$;

Exercice 7 : [corrigé] Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$F=\{\,(x,y,z,t)\in E \mid\ 3x-y-z=2y+t=0\}$$

$$G=\mathrm{Vect}\Big(u_1,\ u_2,\ u_3\Big) \text{ où } \begin{aligned} u_1 &= (1;-1;2;2), \\ u_2 &= (2;1;4;-2), \\ u_3 &= (1;2;2;-4). \end{aligned}$$

Donner une base des sous-espaces vectoriels F, G, $F\cap G$, et $F+G$.

Exercice 8 : Dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $G = \text{Vect}((6,9,5))$.

(Q 1) Soit F le plan passant par l'origine $O(0,0,0)$ et dont deux vecteurs directeurs ont leurs composantes (dans une base orthonormale) égales à $\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$. Donner une équation cartésienne de F.

(Q 2) Donner une représentation cartésienne de G.

(Q 3) Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels en revenant à la définition

(Q 4) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

(Q 5) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Donner alors $f \in F$ et $g \in G$ tels que $f + g = (x,y,z)$.

Exercice 9 : Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\right\}, G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\right\}$.

(Q 1) Montrer que F, G sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice.

(Q 2) Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.

(Q 3) Soit $H = \text{Vect}\left((1,0,0)\right)$. Montrer que $F \oplus H = G \oplus H = \mathbb{R}^3$.

Chez les matrices.

Exercice 10 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$?

(Q 1) $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = 0\}$;

(Q 2) $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M$ est de rang inférieur ou égal à 1 $\}$;

(Q 3) $C = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad / \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} -x-y & y & x \\ x & -x-y & y \\ y & x & -x-y \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 11 : [corrigé]

(Q 1) Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}\right)$.

(Q 2) Pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le vecteur : $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 0\end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs : $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$?

Exercice 12 : [corrigé] Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ avec $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de E.**Indication : procéder par Analyse-Synthèse.**

Exercice 13 : [corrigé] Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

(a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$;

(b) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+b & c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R});\ \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Chez les fonctions.

Exercice 14 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

(Q 1) l'ensemble des fonctions croissantes ;

(Q 2) l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 ;

(Q 3) l'ensemble des fonctions qui s'annulent ;

(Q 4) l'ensemble des fonctions bornées.

Exercice 15 : [corrigé] Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

(Q 1) Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

(Q 2) Montrer que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$.

(Q 3) Soit $f \in E$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(Q 4) En déduire que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont supplémentaires.

Exercice 16 : [corrigé]

Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

(Q 1) F est l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ et G est l'ensemble des fonctions constantes. Procéder par Analyse-Synthèse.

(Q 2) E est l'ensemble des fonctions continues de $[0;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ et F est l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$, $G = \mathrm{Vect}\Big(\cos,\ \sin\Big)$.
Procéder par Analyse-Synthèse.

Exercice 17 : [corrigé] Montrer que l'ensemble des fonctions affines $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Puis, donner une base de cet ensemble.

Exercice 18 : [corrigé]

(Q 1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - xy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$. En déterminer une famille génératrice puis une base.

(Q 2) Faire de même pour l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$.

Exercice 19 : Les familles suivantes sont-elles libres ?

(Q 1) $(\cos, \sin, x \to x\cos(x), x \to x\sin(x))$

(Q 2) $\left(1, x \mapsto e^{x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x}\right)$;

(Q 3) $(x \mapsto x, x \mapsto x+1, x \mapsto x+2)$

Exercice 20 : [corrigé]

Soit $F = \{f \in C^{\infty} / f'' + f' + f = 0\}$.

(Q 1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner une base de cet ensemble.

(Q 2) Soit $G = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / g(1) = 0\}$. Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(Q 3) Trouver $F \cap G$.

Chez les suites.

Exercice 21 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriel de l'ensemble des suites réelles ?

(Q 1) l'ensemble des suites convergentes ;

(Q 2) l'ensemble des suites convergeant vers un réel a ;

(Q 3) l'ensemble des suites divergentes ;

(Q 4) l'ensemble des suites arithmétiques puis géométriques ;

(Q 5) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.

Exercice 22 : [corrigé] Soit $\mathcal{A} = \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0\Big\}$.

(Q 1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(Q 2) Trouver une famille génératrice.

(Q 3) Trouver finalement une base de $\mathcal{A}$.

Exercice 23 : [corrigé] Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. Soient A l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0 et B l'ensemble des suites réelles constantes.

(Q 1) Montrer que A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E.

(Q 2) Montrer qu'ils sont en somme directe.

(Q 3) Montrer qu'ils sont finalement supplémentaires.

(Q 4) Soit $(u_n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$. On pose : $H = \mathrm{Vect}\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big)$. Alors montrer que H est un supplémentaire de A.

Indications

Solution de l'exercice 17 :

Pour montrer que cet ensemble est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, changeons et montrons directement que c'est un espace vectoriel engendré par des fonctions connues.

Une fonction f est affine si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. On pose $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto 1$, deux fonctions affines. Alors, $f = af_1 + bf_2$. Ainsi,

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\Big(f_1, f_2\Big).$$

Cela démontre que $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et que la famille $\Big(f_1, f_2\Big)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}$. Testons si cette famille est libre. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $af_1 + bf_2 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Alors en prenant $x = 0$ et $x = 1$, on obtient : $\begin{cases} b &= 0 \\ a+b &= 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$. Par définition, la famille (f_1, f_2) est donc libre.
Finalement, cette famille est libre et génératrice. Par définition, c'est une base de $\mathcal{A}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. INTERSECTION.
   - □ Les espaces F et G sont des espaces vectoriels par propriété, donc $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^4} \in F \cap G$.
   - □ Soit $\overrightarrow{u} \in F \cap G$. Alors $\overrightarrow{u} = \lambda u_1 + \mu u_2 = \theta v_1 + \gamma v_2$ avec $\lambda, \mu, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$. En résolvant le système linéaire, on obtient $\lambda = \mu = \gamma = \theta = 0$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, $F \cap G \subset \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.

   Par double inclusion, $F \cap G = \{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.
2. SOMME. Montrons que $F + G = \mathbb{R}^4$.
   - □ Par propriété, $F + G = \mathrm{Vect}\Big(u_1,\ u_2,,v_1,\ v_2\Big) \subset \mathbb{R}^4$.
   - □ Pour montrer l'inclusion réciproque,
   Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On cherche si il existe $\lambda, \mu, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$ tels que
   $$(x,y,z,t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma v_1 + \theta v_2$$
   ce qui équivaut à résoudre le système linéaire de matrice augmentée associée :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & x-t \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & y-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & z-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & x-z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & y-z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & z-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & x-y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & y-z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & z-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix}.$$
   Finalement :
   $(x,y,z,t) = (x-y)u_1 + (y-z)u_2 + (z-t)v_1 + tv_2 \in F + G$.

   Par double inclusion, $F + G = \mathbb{R}^4$.
3. Conclusion. Les espaces sont donc supplémentaires.

Correction de l'exercice 4 :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(x,y,z) = \alpha(1;1;1) + \beta(1;0;1) + \gamma(0;1;0)$$

La matrice associée à ce système linéaire implicite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x \\ 1 & 0 & 1 & | & y \\ 1 & 1 & 0 & | & z \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x \\ 0 & -1 & 1 & | & y-x \\ 0 & 0 & 0 & | & z-x \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système est incompatible dés que $z - x \neq 0$. Par exemple, le vecteur $(1,0,2)$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille de trois vecteurs donnés. Cette famille n'est pas génératrice.

Correction de l'exercice 6 :

On cherche une famille génératrice de F. En appliquant la conclusion de Gauss-Jordan, on a :
$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow (x,y,z) = (y/3, y, z) = y(1/3, 1, 0)_{\in F} + z(0,0,1)_{\in F}$
Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\Big((1/3,1,0);(0,0,1)\Big).$$

Cette égalité démontre deux choses. F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Et la famille $\Big((1/3,1,0);(0,0,1)\Big)$ est une famille génératrice de F. De plus, ces deux vecteurs forment une famille libre puisqu'ils ne sont pas colinéaires. Nous avons donc montré que cette famille forme une base de F.

De même, on trouve $G = \mathrm{Vect}\Big((-5,3,1)\Big)$. Le vecteur $(-5,3,1)$ n'est pas nul donc la famille constituée de ce seul vecteur est libre. Finalement, une base de G est

$\Big((-5,3,1)\Big)$.

Correction de l'exercice 7 :

- F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Résolvons le et nous aurons une famille génératrice de F. La matrice associée à ce système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y-z &=& 0\\ 2y+t &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z/3-t/6\\ y &=& -t/2\end{array}\right.$$

Finalement, $(x,y,z,t) = (z/3-t/6,-t/2,z,t) = z(1/3,0,1,0) + t(-1/6,-1/2,0,1)$. On a démontré que

$$F = \mathrm{Vect}\Big((1/3,0,1,0);(-1/6,-1/2,0,1)\Big).$$

Cette famille $\Big((1/3,0,1,0);(-1/6,-1/2,0,1)\Big)$ est donc génératrice de F. Elle est immédiatement libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Une base de F est donc : $\Big((1/3,0,1,0);(-1/6,-1/2,0,1)\Big)$ ou encore : $\Big((1,0,3,0);(-1,-3,0,6)\Big)$

- On a une famille génératrice de G. On teste si elle est libre. Soit $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda u_1+\mu u_2+\gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$. La matrice associée au système homogène est :

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&2\\2&4&2\\2&-2&-4\end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&3\\0&0&0\\0&-6&-6\end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Les inconnues principales sont λ et μ, et le paramètre est γ. Ainsi, $\lambda=\gamma$ et $\mu=-\gamma$. La famille (u_1,u_2,u_3) est liée (prenez par exemple $\gamma=1$, alors $\lambda=1$ et $\mu=-1$.) Finalement, nous obtenons $\gamma\Big(u_1-u_2+u_3\Big) = 0_{\mathbb{R}^4}$ et ainsi, $u_3=u_2-u_1$. Par propriété, $G=\mathrm{Vect}\Big(u_1;u_1\Big)$.

Cette sous famille (u_1,u_2) est alors libre. Ne refaisons pas les calculs ! Prenons $\lambda u_1+\mu u_2+0u_3=0_{\mathbb{R}^4}$. Alors, $\lambda=\mu=0$ d'après les calculs précédents. Finalement, (u_1,u_2) est libre et génératrice de G, par définition est une base de G.

- Caractérisons les éléments de cette intersection. Soit $u(x,y,z,t)\in F\cap G \Leftrightarrow 3x-y-z=2y+t=0$ et il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(x,y,z,t)=\lambda u_1+\mu u_2 = \lambda(1,-1,2,2)+\mu(2,1,4,-2)$. Alors

$$3(\lambda+2\mu)-(-\lambda+\mu)-(2\lambda+4\mu)=0 \Leftrightarrow 2\lambda+\mu=0$$

et

$$2(-\lambda+\mu)+(2\lambda-2\mu)=0\Leftrightarrow 0=0.$$

Nous obtenons donc $\mu=-2\lambda$. Finalement,

$$u(x,y,z,t)\in F\cap G \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}, u=\lambda u_1-2\lambda u_2=\lambda(u_1-2u_2).$$

Nous avons donc montré que $F\cap G=\mathrm{Vect}\Big(u_1-2u_2\Big)$. La famille (u_1-2u_2) constituée de ce seul vecteur est donc génératrice, libre (car le vecteur n'est pas nul). Par conséquent, c'est une base de $F\cap G$.

- Par propriété, $F+G=\mathrm{Vect}\Big((1,0,3,0);(-1,-3,0,6);u_1;u_2\Big)$. Une famille génératrice de $F+G$ est donc : $\Big((1,0,3,0);(-1,-3,0,6);u_1;u_2\Big)$.

Est-elle libre ? Soit $(\lambda,\mu,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda(1,0,3,0)+\mu(-1,-3,0,6)+\gamma u_1+\delta u_2=0_{\mathbb{R}^4}$ $(\star)$. La matrice associée au système homogène est :

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&-3&-1&1\\3&0&2&4\\0&6&2&-2\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&-3&-1&1\\0&3&-1&-2\\0&6&2&-2\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&-3&-1&1\\0&0&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&1/3&-1/3\\0&0&1&1/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&-1&0&3/2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&1/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\sim_{\mathcal{L}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&1/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Les inconnues (λ,μ,γ) sont principales et seul δ est un paramètre. On a

$$(\lambda,\mu,\gamma,\delta)=\delta(-1,1/2,-1/2,1)$$

Finalement, la famille est liée, et en prenant $\delta=1$, on obtient :

$$((-1)(1,0,3,0)+(1/2)(-1,-3,0,6)+(-1/2)u_1+u_2)=0_{\mathbb{R}^4}.$$

La vecteur u_2 est donc combinaison linéaire des trois premiers vecteurs. Par théorème : $F+G=\mathrm{Vect}\Big((1,0,3,0);(-1,-3,0,6);u_1\Big)$. La famille $\Big((1,0,3,0);(-1,-3,0,6);u_1\Big)$ est alors génératrice de $F+G$, est libre (prenez $\delta=0$ dans la relation $(\star)$, on obtient $\lambda(1,0,3,0)+\mu(-1,-3,0,6)+\gamma u_1+0.u_2=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow\lambda=\mu=\gamma=0$.) C'est donc une base de $F+G$.

Correction de l'exercice 11 :

1. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix}\in\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}\right)$ si et seule-

ment si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$, tels que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$. On est donc amené à étudier un système linéaire avec trois inconnues, quatre équations mais un paramètre. On obtient pour condition $m = 3$ et comme relation

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\m\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$$

2. A est combinaison linaire de ces trois vecteurs si et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $A = x\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x &= 2\\ x+y &= 3\\ y+z &= 4\\ z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2\\ y &= 1\\ y+z &= 4\\ z &= 0\end{cases}$$

Ce système est donc incompatible et A ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Correction de l'exercice 12 :

Trois points doivent être vérifiés :

(1). Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ils sont inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice nulle est symétrique et anti-symétrique et ils sont stables par combinaison linéaire ($\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda A + B)^t = \lambda A^t + B^t$, par propriété de la transposée, ce qui est égal à $\lambda A + B$; on fait de même pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.)

(2). INTERSECTION.

- ☐ En tant que sous-espaces vectoriels, la matrice nulle appartient à ces sous-espaces, $\{0_{nn}\} \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- ☐ Montrons l'inclusion réciproque, soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^t = A$ et $A^t = -A$. Donc $A = 0_{nn}$. Cela montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \subset \{0_{nn}\}$.

Ainsi, $\boxed{\{0_{nn}\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$.

(3). SOMME. Montrons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

- ☐ Puisque les ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ☐ Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ANALYSE. On cherche $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = S + A$. Passons à la transposée pour obtenir $M^t = S - A$. C'est équivalent à $S = \frac{M+M^t}{2}$ et $A = \frac{M-M^t}{2}$.
  - SYNTHÈSE. On pose $S = \frac{M+M^t}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A = \frac{M-M^t}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Et on a $S + A = M$.

  On a donc montré que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

En conclusion, ($\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{nn}\}$), par propriété , les sous-espaces sont supplémentaires.

Correction de l'exercice 13 :

$$\begin{pmatrix} a & 2a+b\\ -b & -a\end{pmatrix} \in F$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 2a+b\\ -b & -a\end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\in F} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{\in F}$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

De même,

$$G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Correction de l'exercice 15 :

1. Montrons que $\mathcal{I}$ est un sous espace vectoriel.
   - $\mathcal{I} \subset E$.
   - La fonction nulle est impaire.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{I}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -\underline{\left(\lambda f + g\right)}(x)$. Ainsi, $\lambda f + g \in \mathcal{I}$.

   Par définition, $\mathcal{I}$ est un sous espace vectoriel de E. On effectue la même démarche pour$\mathcal{P}$.
2. ☐ En tant que sous espaces vectoriels de E, $0_E \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$.

   ☐ Soit $f \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$, soit $f(x) = 0$. On a montré que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} \subset \{0_E\}$.

   Par double inclusion, on a le résultat.
3. C'est un simple calcul.
4. Cette dernière question montre que $\mathcal{I} + \mathcal{P} = E$. Auparavant, on a démontré que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$. Par propriété, les espaces sont supplémentaires.

Correction de l'exercice 16 :

F est l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ et G est l'ensemble des fonctions constantes.

ANALYSE. Soit f une fonction réelle quelconque. On cherche $u \in F$ et $v \in G$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = u(x) + v(x)$. La fonction u s'annule en 0 et la fonction v est constante, égale à C. En prenant en compte ces deux informations, on obtient $f(0) = 0 + C$. La constante C est alors égale à $f(0)$ et la fonction u est égale à $x \mapsto f(x) - f(0)$.

SYNTHÈSE. On pose : $u : x \mapsto f(x) - f(0)$ et $v : x \mapsto f(0)$. Alors il est immédiat que $u \in F, v \in G, f = u + v$.

On a donc montré : $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists!(u, v) \in F \times G, f = u + v$. Par définition, les espaces sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Correction de l'exercice 18 :

(Q 1) On vérifie les trois points :

- Cet ensemble est un sous ensemble de l'ensemble des fonctions réelles.
- Puisque l'équation différentielle est homogène, la fonction nulle est solution.
- Soient y_1 et y_2 deux solutions, soient $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(\lambda y_1+\mu y_2)' - x(\lambda y_1+\mu y_2) = \lambda(y_1' - xy_1) + \mu(y_2' - xy_2) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$ puisque y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle. Cela démontre que $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à l'ensemble des solutions.

Nous avons donc démontré que l'ensemble des solutions est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

Cherchons une famille génératrice. Une primitive de $x \mapsto -x$ est $x \mapsto -x^2/2$. Par propriété, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire à coefficients non constants est : $\left\{x \mapsto \lambda e^{x^2/2} / \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\Big(y_0\Big)$ avec $y_0 : x \mapsto e^{x^2/2}$. La famille constituée du seul vecteur y_0 est donc génératrice de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle. De plus, ce vecteur est non nul. Cette famille (y_0) est donc libre. Finalement, cette famille libre, génératrice de l'ensemble des solutions est donc une base de cet ensemble.

(Q 2) On montre de même que l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est $r^2 + 1 = 0$. On a deux racines complexes, $\pm i$. Par théorème, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) / (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\Big(\cos,\sin\Big).$$

Notre famille génératrice de cet ensemble de solutions est $(\cos,\sin)$. Testons si elle est libre. Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}^2$, tels que $\lambda\cos + \mu\sin = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Prenons $x = 0$ puis $x = \pi/2$, et nous obtenons $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. On a montré que : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda\cos + \mu\sin = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$. Par définition, cette famille est libre. Finalement, cette famille libre, génératrice de l'ensemble des solutions est donc une base de cet ensemble.

Correction de l'exercice 20 :

(Q 1) On vérifie les trois points :

- Cet ensemble est un sous ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Puisque l'équation différentielle est homogène, la fonction nulle est solution.
- Soient y_1 et y_2 deux solutions, soient $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(\lambda y_1+\mu y_2)'' + (\lambda y_1+\mu y_2)' + (\lambda y_1+\mu y_2) = \lambda(y_1''+y_1'+y_1) + \mu(y_2''+y_2'+y_2) = \lambda\times 0 + \mu\times 0 = 0$ puisque y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle. Cela démontre que $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à l'ensemble des solutions.

Nous avons donc démontré que l'ensemble des solutions est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

Cherchons une famille génératrice. L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$. Les solutions sont $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants est : $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + \mu e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2) / (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\Big(y_1, y_2\Big)$ avec $y_1 : x \mapsto e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ et $y_2 : x \mapsto e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$. Testons la liberté de cette famille (y_1, y_2). Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda y_1 + \mu y_2 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Alors, en prenant $x = 0$, on obtient $\lambda = 0$ et ainsi $\mu = 0$. On a montré que :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda y_1 + \mu y_2 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

Par définition, la famille est libre.
Finalement, cette famille libre, génératrice de l'ensemble des solutions est donc une base de cet ensemble.

(Q 2) On vérifie les trois points :

- Cet ensemble est un sous ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Puisque la fonction nulle s'annule en 1, elle est un élément de G.
- Soient g_1 et g_2 deux éléments de G, soient $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(\lambda g_1 + \mu g_2)(0) = \lambda g_1(0) + \mu g_2(0) = 0$. Cela démontre que $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$.

Nous avons donc démontré que G est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

(Q 3) Soit $f \in F \cap G$. Alors $f(0) = 0$ et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, tel que $f = \lambda y_1 + \mu y_2$. Ainsi, $0 = \lambda y_1(0) + \mu y_2(0) = \lambda$. La fonction f est égale à μy_2. On a montré cette inclusion : $F \cap G \subset \mathrm{Vect}\Big(y_2\Big)$. La fonction y_2 s'annule en 0 et est un élément de G. Donc, on sait que : $\mathrm{Vect}\Big(y_2\Big) \subset F \cap G$. Finalement, nous avons montré que $\mathrm{Vect}\Big(y_2\Big) = F \cap G$.

Correction de l'exercice 22 :

(Q 1) On montre les trois points usuels :

- $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La suite nulle est immédiatement un élément de $\mathcal{A}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors,$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) + 4(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 4(\lambda u_n + \mu v_n) &= \lambda(u_{n+2} + 4u_{n+} \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \end{aligned}$$
Ainsi, la suite de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est un élément de $\mathcal{A}$.

Par définition, l'ensemble $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(Q 2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$. C'est donc une suite linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$. Le nombre -2 est alors racine double. Par théorème, il existe $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda(-2)^n + \mu n(-2)^n$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-2)^n, w_n = n(-2)^n$. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ainsi

$$\mathcal{A} = \text{Vect}\Big((v_n)_{n\in\mathbb{N}}; (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$$

Nos deux suites $\Big((v_n)_{n\in\mathbb{N}}; (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ forment donc une famille génératrice de $\mathcal{A}$.

(Q 3) Testons si cette famille est une base. On étudie donc sa liberté. Soit $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} = \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. On a montré :

$$\forall(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2; 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} = \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

Par définition, cette famille est donc libre. Finalement, la famille $\Big((v_n)_{n\in\mathbb{N}}; (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ est libre, génératrice de $\mathcal{A}$. Par définition, c'est une base de $\mathcal{A}$.

Correction de l'exercice 23 :

(Q 1) On montre les trois points usuels :

- A et B sont deux sous ensembles de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ d'après leur définition.
- La suite nulle est immédiatement un élément de A et étant une suite constante, est également un élément de B.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\times 0+\mu\times 0 = 0$. Cela démontre que $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. D'autre part, si deux suites sont constantes alors leur combinaison linéaire l'est aussi.

Par définition, les deux ensembles A et B sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

(Q 2) Pour montrer que deux espaces sont en somme directe, on n'utilise pas la définition en général. On préfère la propriété caractérisant les sommes directes par leur intersection.

- ☐ Étant donné que ce sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, on sait que $\Big\{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\Big\} \subset A \cap B$.
- ☐ Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0} \in A \cap B$. Alors la suite converge vers 0 et est constante. Donc, elle est nulle. Cela démontre que $A \cap B \subset \Big\{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\Big\}$.

(Q 3) On sait déjà que l'intersection de A et B est réduit au vecteur nul. Montrons maintenant que $A+B = \mathbb{R}^\mathbb{N}$.

- ☐ Étant donné que ce sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, on sait que $A + B \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$.
- ☐ Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. On doit montrer qu'il existe $(v_n)_{n\geq 0} \in A, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ tel que $(u_n)_{n\geq 0} = (v_n)_{n\geq 0}+(w_n)_{n\geq 0}$. On procède comme d'habitude par ANALYSE SYNTHÈSE.
  - Analyse (recherche). Si ces deux suites existent alors (w_n) est constante, égale à w et (v_n) converge vers 0. De plus, (u_n) est un élément de E, donc elle converge vers un réel u. Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$. Par passage à la limite, on obtient : $u = 0 + w$. On vient de trouver $(w_n)_{n\geq 0}$. On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - u$.
  - Synthèse. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n-\lim_{n\to+\infty} u_n$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$. De plus, $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, donc est un élément de A, et $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite constante, donc est un élément de B. Ainsi, on a montré que $(u_n)_{n\geq 0} \in A + B$.

  On a donc montré que $A + B = E$.

Par le théorème de caractérisation des espaces supplémentaires, on a donc montré que $A \oplus B = E$.

(Q 4) On doit montrer les deux points usuels.

- INTERSECTION.
  - ☐ Étant donné que ce sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, on sait que $\Big\{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\Big\} \subset A \cap H$.
  - ☐ Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0} \in A \cap H$. Alors la suite converge vers 0 et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(1 + 1/(n + 1))$. Par passage à la limite, on obtient $\lambda = 0$ et ainsi $(u_n)_{n\geq 0} = O_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$. Cela démontre que $A \cap H \subset \Big\{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\Big\}$.

  On a donc démontré que $A \cap H = \Big\{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\Big\}$.
- LA SOMME.
  - ☐ Étant donné que ce sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, on sait que $A + H \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$.
  - ☐ Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. On doit montrer qu'il existe $(v_n)_{n\geq 0} \in A, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ tel que

    $$(u_n)_{n\geq 0} = (v_n)_{n\geq 0} + (w_n)_{n\geq 0}$$

    .

    On procède comme d'habitude par ANALYSE SYNTHÈSE.
    - Analyse (recherche). Si ces deux suites existent alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda(1+1/(n+1))$ et (v_n) converge vers 0. De plus, (u_n) est un élément de E, donc elle converge vers un réel u. Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$. Par passage à la limite, on obtient : $u = 0+\lambda$. On vient de trouver $(w_n)_{n\geq 0}$. On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - w_n$.
    - Synthèse. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \Big(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\Big)\times \Big(1 + 1/(n + 1)\Big)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - w_n$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$. De plus, $(w_n)_{n\geq 0}$ est un élément de H, $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, donc est un élément de A. Ainsi, on a montré que $(u_n)_{n\geq 0} \in A + H$.

    On a donc montré que $A + H = E$.

  Par le théorème de caractérisation des espaces supplémentaires, on a donc montré que $A \oplus H = E$.