
Série N°6 : Matrices, déterminants et systèmes

Exercice 1

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver l'endomorphisme φ associé à A relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Calculer le déterminant de A .
3. Déterminer la matrice inverse A^{-1} . φ est-il bijectif?
4. Déterminer φ^{-1} relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2

Soit (\mathcal{S}) le système différentiel linéaire sans second membre

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) - \frac{1}{2} y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Écrire (\mathcal{S}) sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible?
2. Calculer B^2 et B^3 . Que peut-on déduire?
3. Calculer la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t .
4. En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ lorsque $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

Exercice 3

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à A relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Déterminer l'expression de φ
2. Calculer A^2 et A^3 , puis déterminer φ^2 et φ^3 .
3. Calculer le déterminant de A , puis déterminer la matrice A^{-1} .

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α la matrice carrée donnée par $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ -4 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{I} des valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est inversible.
2. Calculer la matrice A_α^{-1} pour α appartenant à \mathcal{I} .
3. En déduire, lorsque $\alpha \in \mathcal{I}$, la solution du système $(\mathcal{P}) : \begin{cases} \alpha x + 0y - z = -1 \\ 2x + \alpha y + z = 1 \\ -4x - y + \alpha z = 1 \end{cases}$

Exercice 5

Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On appelle la **trace** de A le nombre noté “ $\text{tr}(A)$ ” défini par $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.

Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A s’écrit sous la forme

$$P_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$$

Exercice 6

On donne une matrice A carrée d’ordre n , A , dont les coefficients appartiennent à un corps commutatif \mathbb{K} ; on note P le polynôme caractéristique de A .

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$
2. Montrer que le polynôme caractéristique R de A^{-1} s’écrit sous la forme suivante :

$$R(x) = \frac{(-1)^n x^n}{P(0)} P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 7

Soit M la matrice donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit φ l’endomorphisme de \mathbb{R}^4 associé à A relativement à la base canonique de \mathbb{R}^4 .

1. Déterminer l’expression de φ
2. Calculer A^2 et A^3 , puis déterminer φ^2 et φ^3 .
3. Calculer le déterminant de A , puis déterminer la matrice A^{-1} .

Exercice 8

Soit (S) le système différentiel linéaire sans second membre

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t) \\ y'(t) &= 2y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &= 3z(t) \end{cases}$$

où x , y et z sont des fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Écrire (S) sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible? Qu’appelle-t-on ce type de matrice?
2. Montrer que la matrice B s’écrit sous la forme $D + N$ où D est une matrice diagonale à déterminer et N est une matrice nilpotente à déterminer.
*Déterminer l’indice de nilpotence de N .
3. En utilisant l’écriture $B = D + N$, montrer que $\exp(tB) = \exp(tD) \left(I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 \right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où I_3 est la matrice identité de taille (3×3) .
4. Calculer les matrices $P = \exp(tD)$ et $Q = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2$.
5. En déduire l’expression de la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t .
6. En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $x(0) = k_1$, $y(0) = k_2$ et $z(0) = k_3$.
*Déterminer les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $k_3 = 2$.