2019-2020

AP1

ENSAH

ANALYSE2

Prof Ahmed Moussaid

analyse2

cours avec exercices

TABLE DES MATIÈRES

1 Equations Différentielles **7**
1.1 Introduction - Définitions générales 8
1.2 Equations différentielles du 1^{er} ordre 9
1.3 Equations différentielles du 1^{er} ordre : Cas à coefficient constant 17
1.4 Equations homogènes du premier ordre 20
1.5 Equations de Bernoulli 20
1.6 Equations de Ricatti 21
1.7 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants 22
1.8 Méthodes générales 28

2 Séries Numériques **31**
2.1 Introduction - Définitions générales 32
2.2 Quelque exemple des séries numériques 33
2.3 Proprietés des séries Numériques 36
2.4 séries à termes positifs 37
2.5 Critères de comparaison 39
2.6 Régles de Convergence 43
2.7 SÉRIES A TERMES QUELCONQUES 46
2.8 Séries D'Abel. 50
2.9 Séries alternées. 51

CHAPITRE

1

Equations Différentielles

1 Introduction - Définitions générales

Une équation différentielle (E.D) est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différetielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Définition 1

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{n}) = 0 \qquad (E)$$

ou F est une fonction de $(n+2)$ variables. Nous ne considérons que le cas ou x et y sont à valeurs dans$\mathbb{R}$.

Une **solution** à une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ (une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois continûment dérivable) telle que pour tout $x \in I$, on ait

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{n}) = 0$$

.

Notation

y au lieu de $y(x)$, $y^{'}$ au lieu $y^{'}(x)$,...

Exemple $\ll y^{'} = \sin(x) \gg$ Signifie $\ll y^{'}(x) = \sin(x) \gg$.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modéles mathématiques de phénoménes physiques et biologiques, par

Exemple.

Un parachutiste est soumis à deux forces :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dans ce chapitre, on donnera des méthodes pour trouver l'ensemble de toutes les solutions à une certaine classe d'équations différentielles.

2 Equations différentielles du 1^{er} ordre

Définition 2

-Une équation différentielle est du 1^{er} ordre si elle ne fait intervenir que la premiére dérivée

$$y^{'} = f(x, y)$$

. -On appelle **courbes intégrables** de l'équation différetielle,les représentation graphiques de ses solutions.

2 1 Classification des équations différentielles du premier ordre

:

Une éqution différentielle du premier ordre est de la forme

$$y^{'} = f(x, y)$$

. On en étudiera principalement trois classes d'équations différentielles du premier ordre :

1. Equations à variables séparables (Equations dont ou peut Séparer les variables),
2. Equations homogénes (où $y^{'}$ ne dépend que du rapport y/x),
3. Equations linéaires (où y et $y^{'}$ sont au premier degré).

Ces derniéres peuvent être à coefficients constants ou non, sans second membre ou avec second membre.
En dehors de ces types généraux d'équations différentielles du premier ordre, il y a un certain nombre d'équations de types spéciaux :Équations de Bernoulli, Èquations de Riccati, de Lagrange, etc...

2 2 Equations à variables séparables

Définition 3

Une équation différentielle de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)y^{'} = g(x) \tag{1.1}$$

Où $f(y)$ n'est fonction que de y seul Où et $g(x)$ n'est fonction que de x seul.
où g est une fonction continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et f est une fonction continue et non nulle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit $y^{'} = \frac{dy}{dx}$.

Théorème 0

Si F (resp. G) est une primitive de f (resp. g) sur l'intervalle I (resp.J) toute solution de (1.1) $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ est définie implicitement par

$$F(y) = G(x) + K \tag{1.2}$$

où K est un réel quelconque.

Methode de résolution

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple 1

$y^{'} = x^2 y + x^2$ avec $y(0) = 1$
est Une équation différentielle de 1^{er} ordre à variables séparables.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple 2

$x^2y^{'} = e^{-y}$

est Une équation différentielle de 1^{er} ordre à variables séparables.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 4

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (E.D.L) toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$(E) \qquad a(x)y^{'}(x) + b(x)y(x) + c(x) = 0 \tag{1.3}$$

où a , b et c sont des fonctions continues sur un même intervalleun I de $\mathbb{R}$ et on demandera $\forall x \in I$, $a(x) \neq 0$.
Une équation différentielle linéaire est normalisée si $a(x) = 1$.
A cette équation différentielle on peut associer la même équation avec $c = 0$:

$$(E_o) \qquad a(x)y^{'}(x) + b(x)y(x) = 0 \tag{1.4}$$

C'est **l'équation homogéne** associée à (E.D.L), ou équation sans second membre. (On la note aussi (E_H) ou (E.H.)ou (ssm).)
l'équation (E) est dite complete.

Exemple.

$$y^{'}(x) + y(x) = \sin(x)$$

est une équation linéaire du premier ordre où le second membre est la fonction : $x \mapsto \sin(x)$ et $y^{'}(x) + y(x) = 0$ est l'équation homogéne associée.

Résolution : La solution générale de l'équation complete (E) est donnée par le Théoréme suivant (appelé, Principe de superposition).

Théorème 0

Principe de Superposition
La solution générale $y(x, c)$ de l'équation complete (E) a la forme :

$$y(x, c) = y_o(x, c) + y_{part}(x, c)$$

Où $y_o(x, c)$ est solution générale de (E_o) et Où $y_{part}(x, c)$ designe **une solution Particuliére** quelconque de (E). On note

$$SG_E = SG_{E_o} + 1SP_E$$

Important 1.1

Les résultats concernant de (E) et $(E.H)$ supposent qu'on replace sur un sous-intervalle I de J sur lequel la fonction : $a : x \mapsto a(x)$ ne s'anule pas.

Pour résoudre (E) ou $(E.H)$ sur J tout entier, il faudra procéder intervalle par intervalle (entre deux zéros successifs de a) et vérifier en suite s'il est possible de "recoller" des solutions sur des intervalles consécutifs.

Exemple-illustration :
Raccordement de classe C^1. Supposons $I = \mathbb{R}$ et a s'annule en un seul point noté x_0.

Une application $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

— La restriction y_1 à y sur $]-\infty; x_0[$ est solution de (E) sur $]-\infty; x_0[$:

— La restriction y_2 à y sur $]x_0,+\infty[$ est solution de (E) sur $]x_0,+\infty[$:

— y_1 admet une limite finie l_1 en x_0^- et y_2 admet une limite finie l_2 en x_0^- avec $l_1 = l_2$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{y_1(x)-l_1}{x-x_0} = l_1^{'}$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{y_2(x)-l_2}{x-x_0} = l_2^{'}$ avec $l_1^{'} = l_2^{'}$

et l'équation (E) est vérifiée en x_0 c'est à dire

$$a(x_0)\times l_1^{'} + b(x_0)\times l_1 + c(x_0) = 0$$

1. Résolution de l'équation homogène associée

(Sans Second Membre)

$$(E_o) \qquad a(x)y^{'} + b(x)y = 0$$

On resoud cette équation sur intervalle I où les fonctions a , b et c sont continues et où $a(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$.
D'abord $y=0$ est une solution de (E_0),
On cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas sur I.
Alors :
(E_0) s'écrit $y^{'} = \frac{-b(x)}{a(x)}\times y$. (avec $y^{'} = \frac{dy}{dx}$).
On trouve une équation à variables séparables donc,

$$\frac{dy}{y} = \frac{-b(x)}{a(x)}dx$$

Alors

$$\ln|y| = \int \frac{-b(x)}{a(x)}dx + cte$$

Donc

$$\ln|y| = G(x) + cte$$

Où $G(x)$ est une primitive de $\frac{-b(x)}{a(x)}$.
Alors $|y| = e^{cte}e^{G(x)} \Rightarrow y = e^{cte}e^{G(x)}$ Ou $y = -e^{cte}e^{G(x)}$.
y garde un singe constant sur I car y qui ne s'annulent pas sur I.
Donc

$$y = K\times e^{G(x)}, \qquad K\in\mathbb{R}$$

($K=0$ correspond à la solution, $y=0$).

Pb : Existet-il des solution y de (E_0) qui s'annullent en certains points de I ?

Réponce :Non,
En effet soit y une telle solution, i.e ($\exists x_0\in I, y(x_0)=0$, par exemple).
Notons $z = ye^{-G(x)}$
donc $z^{'} = y^{'}e^{-G(x)} - yG^{'}(x)e^{-G(x)} = e^{-G(x)}(y^{'} - yG^{'}(x))$, Or $G^{'}(x) = \frac{-b(x)}{a(x)}$.

$$z^{'} = e^{-G(x)}(y^{'} + \frac{b(x)}{a(x)}y) = 0$$

Donc z est une constante sur I, i.e $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ alors $z = ye^{-G(x)} = \lambda$ ($\forall x\in I$).
Or si $x = x_0$ alors $z(x_0) = y(x_0)e^{-G(x_0)} = 0$ donc $\lambda = 0$
D'ou $ye^{-G(x)} = 0 \qquad \forall x\in I \Rightarrow y(x) = 0 \qquad \forall x\in I$ ie $y=0$ sur I.

Propriétés 1

S_0 l'ensemble des solutions de E_0 sons Second Membre sur I est un sous- $\mathbb{K}$-espace vectoriel du $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

Démonstration.

* $S_0 \neq \varnothing$ car l'application nulle notée Θ est solution de (E_0).

* Soient y_1 ; $y_2 \in S_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda y_1 + y_2 \in S_0$

$\lambda y_1 + y_2$ est dérivable sur I.
$(\lambda y_1 + y_2)^{'} + a((\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1^{'} + ay_1) + (y_2^{'} + ay_2) = 0$
Donc $\lambda y_1 + y_2 \in S_0$

□

Théorème 1

Principe de superposition)
Soient a, b_1, $b_2 \in C(I, K)$. Si y_1 est une solution particulière sur I de $y^{'} + a(x)y = b_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière sur I de $y^{'} + a(x)y = b_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution particulière sur I de $y^{'} + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

2. Determination d'une solution Particulière de l'équation Compléte

(Avec Second Membre)

$$(E) \qquad a(x)y^{'} + b(x)y = c(x)$$

On va applique Méthode de Lagrange, appelée **Méthode de la variantion de la constante**
On va chercher une solution particuliére de (E), sous la forme

$$y_{part}(x) = K(x) \times e^{G(x)}$$

(Rappelons que la S.G. de (E_0) est $y_0(x) = K \times e^{G(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$
(On fait varier la Cte dans y_0)
$y_{part}(x)$ est solution de (E)
Alors $a(x) \times y_{part}^{'}(x) + b(x) \times y_{part}(x) = c(x)$
Donc $a(x)[K^{'}(x) \times e^{G(x)} + K(x) \times G^{'}(x) \times e^{G(x)}] + b(x) \times K(x) \times e^{G(x)} = c(x)$
Or $G^{'}(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}$
Alors $a(x) \times K^{'}(x) \times e^{G(x)} - b(x) \times K(x) \times e^{G(x)} + b(x) \times K(x) \times e^{G(x)} = c(x)$
$\Rightarrow a(x) \times K^{'}(x) \times e^{G(x)} = c(x)$
$\Rightarrow K^{'}(x) = \frac{c(x)}{a(x)} \times e^{-G(x)}$
$\Rightarrow K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)} \times e^{-G(x)} dx$
$\Rightarrow y_{part}(x) = e^{G(x)} \times \int \frac{c(x)}{a(x)} \times e^{-G(x)} dx$
Conclusions **La S.G. de (E)** est $y = e^{G(x)}[K + \int \frac{c(x)}{a(x)} \times e^{-G(x)} dx]$

Propriété 2

Probléme de cauchy
On considére l'équation (E) : $\qquad a(x)y^{'} + b(x)y = c(x)$, sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas.
Soit x_0 un point dans I et soit y_0 un élément quelconque de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Il existe un unique solution de (E) sur I qui vérifier $y(x_0) = y_0$.
c'est le probléme de cauchy relatif à ces conditions initials. Graphiquement, cela revient à chercher les courbes intégrales passant par le point (x_0, y_0).

Exercices d'application1

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E): \qquad (x^2+1)y^{'} + 2xy = 3x^2 + 1$$

et trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$

Solution

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercices d'application2

.

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E): \qquad (1-x)y^{'} - y = x$$

Solution

3 Equations différentielles du 1^{er} ordre : Cas à coefficient constant

Soit l'équation différentielle (E)

$$(E): \qquad y' = a \times y + b(x)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

Théorème 1

La solution générale de l'équation homogéne $y' = ay$ est :

$$y(x) = \lambda e^{ax}, \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(Elle est définie sur $\mathbb{R}$.)

Théorème 1

Si b est une fonction continue sur I, et si g est une solution particuliére de l'équation

$$(E): \qquad y' = a \times y + b(x)$$

alors la solution générale de (E) est :

$$y(x) = \lambda e^{ax} + g(x), \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Propriété 3

Si b est une fonction continue sur I, une solution particuliére de l'équation

$$(E): \qquad y' = a \times y + b(x)$$

est : $g(x) = G(x) \times e^{ax}$ ou G est primitive sur I de $x \mapsto b(x) \times e^{-ax}$

Méthode de variation de la constante : utiliser le changement de fonction inconnue $y(x) = \lambda(x)e^{ax}$

Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{K}$ et P un pol ynôme de degré n. Alors l'équation différentielle

$$y' + ay = P(x)$$

admet comme solution particuliére un polynôme $Q(x)$ telque :

$$\begin{cases} d^\circ Q = n+1 & \text{si} \quad a = 0 \\ d^\circ Q = n & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

Exercices d'application1

.

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E): \qquad y^{'} + y = x^2 + 1$$

Solution

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Corollaire 2

Soit $a \in \mathbb{K}$ et P un pol ynôme de degré n. Alors l'équation différentielle

$$y^{'} + ay = P(x)e^{kx}$$

admet comme solution particuliére de la forme $Q(x)e^{kx}$, Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, telque :

$$\begin{cases} d^{\circ}Q = n+1 & \text{si} \quad k+a=0 \\ d^{\circ}Q = n & \text{si} \quad k+a \neq 0 \end{cases}$$

Exercices d'application

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E): \qquad y^{'} - 2y = xe^{2x}$$

Solution

4 Equations homogènes du premier ordre

Définition 5

Une équation différentielle est dite homogéne lorsqu'on peut la mettre sous laforme

$$(E): \qquad y' = f(\frac{y}{x})$$

Une telle équation ne change pas lorsqu'on remplace x par kx et y par ky ou k est un nombre réel non nul.

Pour résoudre ce genre d'équations, le changement de variable $y(x) = tx$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$

(E) devient : $t + x\frac{dt}{dx} = f(t)$ qui est une équation à variables separables
En effet :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$$

Si g désigne une primitive de $\frac{1}{f(t)-t}$ on a :

$$Ln|x| = g(t) + k$$

$$x = Ce^{g(t)}$$

La solution de (E) est donnée sous la forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = Ce^{g(t)} \\ y = Cte^{g(t)} \end{cases}$$

Exercices d'application

.

Les équations différentielles suivantes sont homogénes :

$$x(2y - x)y' - y^2 = 0$$

Solution T.D

5 Equations de Bernoulli

Définition 6

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$(E): \qquad y' + a(x)y + b(x)y^n = 0, \qquad avecn \geq 2$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

La méthode de résolution consiste à diviser par y^n ce qui conduit, modulo un changement de variable, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, on

$$\frac{y^{'}(x)}{y^n(x)} + \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)} + b(x) = 0$$

si on pose

$$Z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$$

on a

$$\frac{1}{1-n} Z^{'}(x) + a(x)Z(x) + b(x) = 0$$

Exercices d'application

.

L' équations différentielle suivante est de Bernoulli :

$$y^{'} - y = xy^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{y^{'}}{y^2} - \frac{1}{y} = x$$

on pose $Z = \frac{1}{y}$ donc $Z^{'} = \frac{-y^{'}}{y^2}$ on obtient

$$Z^{'} + Z = -x$$

6 Equations de Ricatti

Définition 7

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$(E): \qquad y^{'}(x) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b et c sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

Quand on connait une solution particulière y_0 de cette équation, on fait le changement de variable

$$Z = y - y_0$$

L'intérêt est que nous obtenons une équation qui est de Bernoulli en z,

$$Z^{'}(x) = a(x)Z^2(x) + (2a(x)y_0(x) + b(x))Z(x)$$

7 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 8

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$(E) : \qquad y^{''}(x) = f(x, y, y^{'})$$

7 1 Equation différentielle linéaire du second ordre

Définition 9

Une équation différentielle linéaire du second ordre est de la forme :

$$(E) : \qquad a(x)y^{''}(x) + b(x)y^{'} + c(x)y(x) = f(x)$$

où a, b, c et f sont des fonctions continues données. Pour la résolution, on se place sur un intervalle I tel que la fonction a ne s'annule pas sur I .

Théorème 1

- Toute solution de (E) est de la forme $x_p + x_S$ où x_P est une solution particulière de (E) et x_S la solution générale de l'équation homogène associée :

$$(E_0) : \qquad a(x)y^{''}(x) + b(x)y^{'} + c(x)y(x) = 0)$$

- Les solutions de (E_0) sur I forment un espace vectoriel de dimension 2.
- Si x_1 est une solution particulière de

$$a(x)y^{''}(x) + b(x)y^{'} + c(x)y(x) = f_1(x)$$

- et x_2 une solution particulière de

$$a(x)y^{''}(x) + b(x)y^{'} + c(x)y(x) = f_2(x)$$

alors $x_1 + x_2$ est une solution particulière de

$$a(x)y^{''}(x) + b(x)y^{'} + c(x)y(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

7 2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 10

Ce sont les équations différentielles linéaires de la forme :

$$(E) : \qquad y^{''}(x) + ay^{'} + by(x) = c(x)$$

où a et b sont deux constantes réelles et c une fonction supposée continue sur un intervalle ouvert de IR.
c est le second membre de l'équation différentielle (E).

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on a le résultat suivant :

Théorème 1

Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre.

Remarque 1.1

En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffitt d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre.

Résolution de l'équation sans second membre

Notations : I un intervalle den $\mathbb{R}$, $a\,;\,b \in \mathbb{K}$:

$$(E_0) : \qquad y^{''}(x) + ay^{'}(x) + by(x) = 0)$$

$y : I \mapsto \mathbb{K}$ fonction inconnue supposée deux fois dérivable. S_0 l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

Résolution de (E_0).

On va chercher d'eventuelles solutions de (E_0) de la forme :

$$R(x) = e^{rx}, \quad avec \quad x \in Ietr \in \mathbb{K}$$

Alors,

$$\forall x \in I \quad (R^{''} + aR^{'} + bR)(x) = (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$$

Donc L'équation

$$r^2 + ar + b = 0$$

est appelée équation caractéristique associée à (E_0), soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Théorème 1

* Si $\Delta > 0$, alors (E_0) admet deux solutions réelles distincts λ_1 et λ_2 . Et on a :

$$S_{\mathbb{R}}(0) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}; \quad K_1, K_2 \text{ dans } \mathbb{R}$$

* Si $\Delta = 0$, alors (E_0) admet une solution réelle double $\lambda_0 = -\frac{a}{2}$ et on a :

$$S_{\mathbb{R}}(0) = (K_1 x + K_2)e^{\lambda_0 x}; \quad K_1, K_2 \text{ dans } \mathbb{R}$$

* Si $\Delta < 0$, alors (E_0) admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$S_{\mathbb{R}}(0) = (K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x))e^{\alpha x} \quad K_1, K_2 \text{ dans } \mathbb{R}$$

Remarque 1.2

En physique, on utilise la forme :

$$K_1 cos(\beta x) + K_2 sin(\beta x) = Acos(\beta x - \varphi)$$

avec $A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ et $cos(\varphi) = \frac{K_1}{A}$ et $sin(\varphi) = \frac{K_2}{A}$

Remarque 1.3

Les constantes réelles K_1 et K_2 sont déterminées par les conditions initiales.

Exercices d'application

1. Résoudre :

$$y^{''} - 5y^{'} + 6y = 0 \qquad (y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

2. Résoudre :

$$y^{''} + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega \in \mathbb{R}^{*+} \qquad fix\acute{e} \quad et \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

3. Résoudre :

$$y^{''} - 4y^{'} + 4y = 0 \qquad (y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Résolution de l'équation normalisée :
$(E) : y'' + ay' + by = C(x)$ **(**C **continue de** I **dans** K**)**

Soient :

- $S(E)$ l'ensemble des solutions de (E)
- $S(0)$ l'ensemble des solutions de (E_0)

Théorème 1

On se donne $y \in S(E)$. On a alors :

$S(E) = y + S(0)$.

Théorème 1

On suppose que C est une fonction continue sur l'intervalle I . Si g est une solution particuliére de l'´equation :

$$(E) : y'' + ay' + by = C(x)$$

alors la solution g´en´erale sur I est :$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x) + g(x)$
où y_1 et y_2 forment une base de solutions de l'équation homogéne E_0.

Determination d'une solution particuliére de l'équation complete (E)

$$(E): \qquad y^{''}(x) + ay^{'} + by(x) = c(x)$$

* Cas où $c(x)$ est un polynôme de degré n Il existe une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré :
 n si $b \neq 0$;
 $n+1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$;
 $n+2$ si $a = b = 0$.
 La recherche de cette solution se fait par identification.

Exercices d'application

.
Trouver la solution particulière de l'équation

$$(E): y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$$

Solution

Soit l'équation

$$(E): y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$$

Le second membre est un polynôme $P(x)$ de degré 2. et comme $b \neq 0$ donc le $\deg \Psi(x) = 2$
soit $\Psi(x) = ax^2 + bx + c$
Par identification, on trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ et $c = \frac{5}{4}$
Donc

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

La solution générale de (E) est :

$$y(x) = S(H) + \Psi(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

* Cas où $C(t) = e^{kx}P(x)$ avec P polynôme avec $\deg P(x) = n$ et $r^2 + ar + b = 0$ (l'équation caractéristique).
 Alors une solution particulière de (E) de la forme : $\Psi(x) = e^{kx}Q(x)$, avec Q est un polynôme tq :

$$\begin{cases} \deg Q(x) = n & \text{si } k \text{ n'est pas une racine de } (E) \\ \deg Q(x) = n+1 & \text{si } k \text{ est une racine simple de } (E) \\ \deg Q(x) = n+2 & \text{si } k \text{ est une racine double de } (E) \end{cases}$$

Exercices d'application

.

Trouver la solution particulière $\Psi(x)$ de l'équation

$$(E): y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}$$

Solution

Equation homogène (E_0) : $y'' - 4y' + 4y = 0$,
Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$.ce qui donne $\Delta = 0$ donc $r_0 = 4/2 = 2$.
La solution homogène de (E_0) est : $y_0(x) = (C_1x + C_2)e^{2x}$
La solution particulière : Une solution particulière de (E) est de la forme

$$\Psi(x) = e^{2x}Q(x)$$

On a $k = 2$ est une racine double de (E) alors $degQ(x) = 5$ On calcule $\Psi'(x)$ et $\Psi''(x)$ et On remplace dans (E), on aura

$$Q''(x) = x^3 + x$$
$$Q'(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \lambda$$
$$Q(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} + \lambda x + \mu$$

Donc la solution est de la forme : $\Psi(x) = (\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} + \lambda x + \mu)e^{2x}$
Comme on recherche une solution particulière, on prend $\lambda = \mu = 0$. Donc
La solutio générale de (E) est

$$y(x) = (\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2)e^{2x}$$

* Cas où $C(t) = e^{\alpha x}cos\beta \times P(x)$ ou $C(x) = e^{\alpha x}sin\beta \times P(x)$ avec α et β réels, et P polynôme à coefficients réels Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution particulière obtenue pour l'équation de second membre $e^{(\alpha+i\beta)x} \times P(x)$.

Exercices d'application

.

Résolvez l'équation différentielle :

$$(E) \quad y^{''} - 2y^{'} + 5y = xe^x cos(2x)$$

Solution

Equation homogène (E_0) : $y'' - 2y' + 5y = 0$,
Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$. ce qui donne $\Delta = -16 < 0$ donc a deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + 2i$ et $r_1 = 1 - 2i$
La solution homogène de (E_0) est : $y_0(x) = e^x(K_1cos(2x) + K_2sin(2x))$ avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^{\not{2}}$
La solution particulière : Une solution particulière de (E) est la partie réelle de la solution de l'équation

$$Y^{''} - 2Y + 5Y = xe^{(1+2i)x}$$

Posons $Y = e^{(1+2i)x}Z$. La fonction Y est solution de l'équation ci-dessus si, et seulement si, Z vérifie $Z^{"} + 4iZ = x$.

Cette équation a une solution particulière de la forme $Z(x) = ax^2 + bx$
Par identification, on obtient $Z(x) = \frac{-i}{8}x^2 + \frac{1}{16}x$
On en déduit une solution particulière de (E)

$$y(x) = Re[(\frac{-i}{8}x^2 + \frac{1}{16}x)e^{(1+2i)x}] = e^x[\frac{x}{16}cos(2x) + \frac{x^2}{8}sin(2x)]$$

Sa solution générale de (E) est donc :

$$y = e^x[\frac{x}{16}cos(2x) + \frac{x^2}{8}sin(2x)] + e^x(K_1cos(2x) + K_2sin(2x))$$

Principe de superposition Si le second membre se présente sous la forme d'une somme de fonctions $c_1(x) + \cdots + c_n(x)$
on cherche une solution particulière correspondant à chacune des fonctions c_i, $1 \leq i \leq n$. séparément, puis d'après la linéarité on ajoute les différentes solutions particulières trouvées.

8 Méthodes générales

8.1 Méthode de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

Dans chacun des trois cas qui peuvent se présenter, la solution générale est de la forme :

$$y(x) = K_1y_1(x) + K_2y_2(x)$$

La méthode consiste à considérer K_1 et K_2 comme des fonctions de x. Par suite, on pose :

$$y(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x)$$

De plus, comme il suffit de trouver une solution particulière, nous allons imposer une restriction. Nous allons chercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = K_1y_1(x) + K_2y_2(x)$$

avec la condition

$$K_1^{'}(x)y_1(x) + K_2^{'}(x) + y_2(x) = 0$$

Maintenant, si on cherche $y^{'}(x)$, $y^{"}(x)$ puis on reporte dans l'équation (E), on obtient l'équation

$$K_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + K_2^{'}(x) + y_2^{'}(x) = c(x)$$

où $c(x)$ est le second membre de l'équation différentielle. Nous avons donc à résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} &K_1^{'}(x)y_1(x) + K_2^{'}(x) + y_2(x) = 0 \\ &K_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + K_2^{'}(x) + y_2^{'}(x) = c(x) \end{aligned}$$

Si on note

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{pmatrix}$$

alors on déduit
$K_1^{'}(x) = \frac{-y_2(x)c(x)}{W}(y_1, y_2)(x)$ et $K_2^{'}(x) = \frac{y_1(x)c(x)}{W}(y_1, y_2)(x)$
On cherchera alors à trouver une primitive K_1 et une primitive K_2.

Définition 11

La fonction $W(y_1; y_2)$ s'appelle le wronskien de y_1 et de y_2.

Remarque 1.4

* On peut noter que dans chacun des trois cas possibles, le wronskien des fonctions correspondantes ne s'annule en aucun point.
*On peut chercher des solutions sous la forme d'une série entière.

Exercices d'application

.

On se propose de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y^{''} + y^{'} = \frac{1}{sin(x)}$$

Solution

Nous savons d'après l'exemple précédent que la solution générale de l'équation ssm est :

$$y_0(x) = K_1 cous(x) + K_2 sin(x)$$

Dans ce cas, on a

$$W(y_1; y_2) = 1$$

D'après la méthode de la variation de la constante, et après calcul, on doit résoudre $K_1^{'}(x) = -1$ et $K_2^{'}(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$

On obtient alors

$K_1(x) = -x$ et $K_2(x) = ln|sin(x)|$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est :

$$y_{Par}(x) = -xcos(x) + sin(x) ln|sin(x)|$$

On en déduit donc la solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(x) = y_0(x) + y_{Par}(x)$$

CHAPITRE

2

Séries Numériques

1 Introduction - Définitions générales

Une série numérique est lorsque c'est possible un objet qui consiste à faire la somme d'un nombre infini de nombres réels ou complexes.
Si les sommes finis sont commutatives et associatives il semble que les sommes infinies ne possédant pas ses proprietés.
Eneffet, considérons l'exemple suivant :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ...$$

On montre que cette somme est strictement positive. On peut alors écrire $(1 - \frac{1}{2}) > 0$, $(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) > 0$, $(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) > 0$, $(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}) > 0$, ... En change l'ordre des termes ,
on a alors

$$\begin{aligned} S &= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10})... \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}... \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}... \\ &= \frac{S}{2} \Rightarrow S = 0 \quad \textit{contradiction}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Il faut donc cesser de croire que les sommes infinies sont commutatives et associatives.

Définition 1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou de nombres complexes). On définit la suite (S_n) par

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + U_3 + U_4 + ... + U_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} U_k. \end{aligned} \tag{2.2}$$

On appelle série numérique le couple $((U_n)_n, (S_n)_n)$, avec le nombre U_n est appelé terme générales de la série
et$(S_n)_n$ est appelé la suites des sommes partielles associes à la serie .

Définition 2

On dit que la série de terme générale U_n notée formellement $\sum U_n$ est convergent SSI la suite des somme partielles $(S_n)_n$ admet une limite finie.
Dane ce cas cette limite est appelée Somme de la série et est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty}$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

Définition 3

Lorsque la série de terme général U_n converge on appelle reste de rang (ou d'ordre) n le nombre

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \sum_{k=0}^{n} U_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k. \end{aligned}$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} R_n &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

(car la série est converge) C. à d $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$

2 Quelque exemple des séries numériques

2.1 Série géométrique

On considére la serie de terme général $U_n = r^n \quad r > 0$
On a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} U_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} r_k \\ &= \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & si \quad r \neq 1 \\ n+1 & si \quad r = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

alors comme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} r^{n+1} &= r \times \lim_{n\to+\infty} r^n \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad -1 < r < 1 \\ +\infty & si \quad r \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & si \quad -1 < r < 1 \\ +\infty & si \quad r \geq 1. \end{cases}$$

D'où la série de terme général $U_n = r^n$ converge si $-1 < r < 1$ et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$$

Exercices d'application

Si $r = \frac{1}{2}$ alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k = 2$$

pour $r = -1$, $\sum_k^{+\infty} r^k$ diverge, En effet,

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

pour $r < -1$, $\sum_k^{+\infty} r_k$ diverge, En effet,

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.2 Série télescopiques

Soit $(V_n)_n$ une suite de nombre réels ou complexes convergeant vers V i.e $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = V$
On pose $U_n = V_{n+1} - V_n$
Etudions la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$. Pour cela On calcule (S_n) la suite de somme partielle.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercices d'application

.
Soit

$$U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

on pose que $V_n = \frac{1}{n+1}$

....
....
....
....
....
....

2.3 Série harmoniques

On considére la série de terme général $U_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Nous allons M.q que la série de terme général $U_n = \frac{1}{n}$ est divergente.
Supposons par l'absurde que la série de terme général $U_n = \frac{1}{n}$ est converge. alors par définition la suite de somme partielle $S_n)_n$
d'où $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ admet une limite finie noté $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l$
donc

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - \lim_{n\to+\infty} S_n = l - l = 0$$

Or

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n) \geq 1/2$
ce qui donne un contradiction que $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n) = 0$.
D'où la série de terme général $U_n = \frac{1}{n}$ est divergente.

3 Proprietés des séries Numériques

3.1 Condition necessaire de convergence d'une série

Propriété 1

Soit $(U_n)_n$ est une suite numérique tq $\sum_n Un$ C.V. Alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Remarque 2.1

La C.d necessaire de C.V peut servir par fois pour démontrer q'une série est divergente.

Par exemple : Considerons la serie de terme générale $U_n = (-1)^n$, On sait que $\lim_{n\to+\infty} U_n$ n'exeste pas, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0$
D'où la série de terme générale $U_n = (-1)^n$ est d.v
Cette Cd. n'est pas suffisante . par exemple la série de terme générale $U_n = \frac{1}{n}$ est divergente, Par contre la série de terme générale $U_n = \frac{1}{n^2}$ est C.V.
Mais on a $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

3.2 Critère de Cauchy

Définition 4

Une série $\sum_{n\geq 0} U_n$ un est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, (N \in \mathbb{N}), \forall n > m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} U_k \right| \leq \varepsilon$$

Proposition

Une série est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3 3 Somme et Produit par scalaire d'une série

Propriété 2

Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites de nombres reéles (ou complexes) et λ un réel (ou complexes)

1. Si les 2 séries $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ sont convergentes alors la série $\sum_n (U_n + \lambda V_n)$ et aussi convergente.
2. Si la série $\sum_n U_n$ est C.V. et $\sum_n V_n$ est div. alors la série $\sum_n (U_n + \lambda V_n)$ est div.

Preuve

La preuve est une conséquence immédiate des propriétés des limites sur les suites : En effe

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Remarque 2.2

Si les 2 séries $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ sont divergentes , On ne peut rien affirmer sur la somme $\sum_n (U_n + V_n)$. Par exemple $U_n = 1$ et $V_n = -1$ alors on a $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ sont divergentes (car $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1 \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = -1 \neq 0$) par contre $\sum_n (U_n + V_n) = \sum_n (1-1) = \sum_n 0 = 0$est C.V.

4 séries à termes positifs

On se focalisedans cette patie sur le cas où le terme général de la série est une suite dont les termes sont positifs (ou positifs à partir d'un certain rang).

Définition 5

On dit qu'une ssérie réelle $\sum_n U_n$ est à termes positifs s'il existe n_0 tel que $U_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$

Proposition 2.1

Soit U_n une suite de terme positifs. Alors la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ est croissante.

Preuve

....
....
....
....
....
....

Rappel. Une suite de nombres réels croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.

Proposition 2.2

Soit U_n une suite de terme positifs.
La série $\sum_n U_n$ est Convergente $\Leftrightarrow$ La série des sommes partielles S_n est majorée.

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercices d'application

. Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ ou $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,
alors
$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \geq 1$
Dans $(S_n)_n \leq 1$ est majorée et par suite $\sum_{n=1} U_n$ est convergente
(elle converge vers 1).

Remarque 2.3

Si (S_n) n'est pas majorée alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On écrit dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = +\infty$.

5 Critères de comparaison

Théorème 0

Théorémes de comparaison

Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites à termes positifs. Alors

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang) $U_n \leq V_n$ Alors
   a) si la série $\sum_n^{+\infty} V_n$ CV alors la srie $\sum_n^{+\infty} U_n$ CV aussi.
   b) si la série $\sum_n^{+\infty} U_n$ div alors la srie $\sum_n^{+\infty} V_n$ div aussi.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n > 0$ ae que $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lambda > 0$.Alors
   les 2 séries $\sum_n^{+\infty} U_n$ et $\sum_n^{+\infty} V_n$ sont de même nature.

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercices d'application

.

1- la série $\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.
On $\forall n \geq 2$,
$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente
Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

2- la série $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente Car,
On $\forall n \geq 1$,
$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente
Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Corollaire 1

Soient $\sum_{n}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n}^{+\infty} V_n$ deux séries à termes positifs telles que il existe deux constantes positives a et b vérifiant :
$$aU_n \leq V_n \leq bU_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Alors les deux séries sont de mêmes nature.

Remarque 2.4

Toute ces résultats de comparaison restent valables si on suppose que les inégalités sont vraies seulement à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.

Théorème 0

Soient $\sum_{n\geq} U_n$ et $\sum_{n\geq} V_n$ sont deux séries à termes positifs, et si $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ sont des suites équivalentes quand $n \to +\infty$ (c'est à dire $\frac{U_n}{V_n} \to 1$) alors les deux séries sont de même nature

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....

Exercices d'application

.

1- la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10}$,
on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$
On pose que $V_n = \frac{1}{2n^2}$ et $U_n = \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10}$
Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$ et on a la série $\sum_{n=1} \frac{1}{2n^2}$ est convergente alors la série $\sum_{n=1} U_n$ est convergente.

5 1 Critere de Conparaison serie Integrale

Théorème 0

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[N, +\infty[$ positive et décroissante Alors Les propriétes suivantes sont équivalentes.

1. La série de teme général $U_n = f(n)$ C.V (i.e $\sum_n^{+\infty} f(n)$ C.V)
2. La série de teme général $V_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$ C.V (i.e $\sum_n^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)dt$ C.V)
3. Une primitive F de f sur $[N, +\infty[$ admet une limite en $+\infty$ (l'integrale $\int_N^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_N^n f(t)dt$ converge.

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....

Conclusion

$\int_N^{+\infty} f(t)dt$ et $\sum\limits_{n \geq N} f(n)$ sont de même nature si f est decroissante positive sur $[N, +\infty[$

5 2 Serie de Riemann

Théorème 0

La Série de terme général $U_n = \frac{1}{n^\alpha}$ converge SSi $\alpha > 1$

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5 3 Serie de Bertrand

Théorème 0

La Série de terme général $U_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ pour $n \geq 2$ converge SSi 1)$\alpha > 1$ (ou 2) $\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Preuve Exercice (Distinguer les cas , $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, $\alpha = 1$,

6 Régles de Convergence

6 1 Comparaison à une série géométrique

Proposition 2.3

(Critère de Cauchy)
Soit U_n une suite de terme positifs.

1. S'il existe $0 < k < 1$, $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait $\sqrt[n]{U_n} \leq K$, alors la série $\sum_n U_n$ est Convergente
2. S'il existe $k \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait $\sqrt[n]{U_n} \geq K$, alors la série $\sum_n U_n$ est divergente et U_n ne tend pas vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

Preuve
1- $\sqrt[n]{U_n} \leq K \Rightarrow U_n < k^n$
Or la série géométrique $\sum_n k^n$ est convergente pour $0 < k < 1$ alors $\sum_n U_n$ est convergente
2- $\sqrt[n]{U_n} \geq K \geq 1 \Rightarrow U_n \geq k^n \geq 1$ alors
U_n ne tend pas vers 0, quand n tend vers $+\infty$. et par suite $\sum_n U_n$ diverge.

6 2 Régle de Cauchy

Théorème 0

Soit $\sum_n U_n$ une série à termes positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{U_n} = L$ alors :

1. Si $L < 1$, $\sum_n U_n$ est convergente.
2. Si $L > 1$, $\sum_n U_n$ est divergente.
3. Si $L = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercices d'application

.

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$, On a $\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{n} \to 0 < 1$ (Règle de Cauchy). D'où la série est convergente.
2) $\sum_{n\geq 1} (\frac{n+1}{2n})^n$, on a $\sqrt[n]{U_n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} < 1$ (Règle de Cauchy). D'où la série est convergente.
3) $\sum_{n\geq 0} (\frac{1}{3+\sin(n)})^n$, on a $\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{3+\sin(n)}$,
Or $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\sin(n)} < \frac{1}{2}$, Et en appliquant le critère de Cauchy, on déduit que $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente.

Proposition 2.4

Soient $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ deux séries à termes positifs telles que.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{V_{n+1}}{V_n} \quad pour \quad n \geq N$$

. Alors :

1. Si la série $\sum_n V_n$,est convergente, alors la série $\sum_n U_n$ est Convergente.
2. Si la série $\sum_n U_n$,est divergente, alors la série $\sum_n V_n$ est divergente

Preuve

....
....
....
....
....
....
....
....
....

6 3 Régle de d'Alenbert

Proposition 2.5

(Critère de d'Alembert)
Soit $\sum_n U_n$ une série à termes positifs.
Alors :

1. S'il existe $K < 1$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{U_{n+1}}{U_n} < K$, por tout,$n \geq N$ Alors la série $\sum_n U_n$,est convergente.
2. S'il existe $K \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq K$, por tout,$n \geq N$ Alors la série $\sum_n U_n$,est divergente.

Preuve
Soit $\sum_n U_n$ une série à termes positifs.

1. $\forall n \geq N$, on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} < k < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_n}{U_N} < k^n$
On pose $V_n = k^n$. Puisque $k < 1$, la serie $\sum_n V_n$,est convergente alors $\sum_n U_n$,est aussi convergente.
2. De même $\forall n \geq N$, on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_n}{U_N} \geq k^n$
On pose $V_n = k^n$. Puisque $k \geq 1$, la serie $\sum_n V_n$,est divergente. alors $\sum_n U_n$,est aussi divergente.

Théorème 0

Régle de d'Alenbert
Soit $\sum_n U_n$ une série à termes positifs.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$.
alors :

1. Si $0 \leq l < 1$, $\sum_n U_n$ est convergente.
2. Si $l > 1$, $\sum_n U_n$ est divergente.
3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$.

1. Cas où $0 \leq l < 1$
soit $a \in \mathbb{R}$ tq $l < a < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$. alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq N \Rightarrow |\frac{U_{n+1}}{U_n} - l| \leq \varepsilon)$
Pour $\varepsilon = a - l > 0$ On a $\exists N \in \mathbb{N}$ $(n \geq N \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq a))$
alors
$$\forall n \geq N+1, \quad \frac{U_n}{U_N} \leq a^n$$
$\Rightarrow \forall n \geq N+1, \quad U_n \leq U_N a^n$ (car $U_N > 0$)
Par le théoreme de comparaison , on a $\sum_{n\geq N+1} U_N a^n = U_N \sum_{n\geq N+1} a^n$ qui est une série géométrique de raison $0 < a < 1$ convergente , alors la série $\sum_n U_n$ est convergente aussi. $\sum_n U_n$ est convergente.
2. Cas où $l > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |\frac{U_{n+1}}{U_n} - l| \leq \varepsilon)$
Pour $\varepsilon = l - 1 > 0$ On a $\exists N \in \mathbb{N}$ $(n \geq N \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1))$ i.e $U_{n+1} \geq U_n$
D' ou la suite $(U_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang N , Il ya deux cas.
soit la suite $(U_n)_n$ est majorée et donc elle est convergente par sa limite U, c. à.d on a $\forall n \geq N, \quad 0 < U_n \leq U = supU_n, n \geq N \Rightarrow u > 0$
ou bien la suite $(U_n)_n$ n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Dans les deux cas, on a $\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0$
D'où la série $\sum_n U_n$ est divergente.

Remarque 2.5

1) On prèfèrera la règle de d'Alembert si (u_n) comporte des factorielles et celle de Cauchy s'il comporte des puissances $n^{ième}$.
2) Règle de Duhamel.
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$. Alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{1+\frac{\alpha_n}{n}}$ avec $n \geq N$ et $\alpha_n > 0$. Donc

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = l \Rightarrow \begin{cases} l > 1, \Rightarrow & \sum_n U_n \text{ est convergente ;} \\ l < 1, \Rightarrow & \sum_n U_n \text{ est divergente ;} \\ l = 1, & \text{cas douteux..} \end{cases}$$

6 4 R'egle de Riemann.

Théorème 0

Soit $\sum_n U_n$ une série à termes positifs.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n U_n = l$.
alors :

1. Si l est finie et $\alpha > 1$, alors la série $\sum_n U_n$ est convergente.
2. Si $l > 0$ et $\alpha \leq 1$,alors la série $\sum_n U_n$ est divergente.

Preuve
1-On suppose que $0 \leq l < +\infty$
On a $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n U_n = l$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |n^\alpha U_n - l| < \varepsilon)$
Pour $\varepsilon = 1$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow U_n \leq \frac{l+1}{n^\alpha}$
Par le théoréme d'encadrement, on a si $\alpha > 1$ la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ C.V (série de Rieman) et donc la série $\sum_n U_n$ converge aussi.
2-On suppose que $l > 0$.
On a $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n U_n = l$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow n^\alpha U_n \geq l - \varepsilon)$
* Si $l < +\infty$ on prend $\varepsilon = \frac{l}{2}$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow U_n \geq \frac{l-1}{2n^\alpha}$
alors si $\alpha \leq 1$, la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ est une (série de Rieman) divergente et donc aussi la série $\sum_n U_n$ est div.
**si $l = +\infty$, alors $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow n^\alpha U_n \geq A)$
Pour $A = 1$,$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{n^\alpha})$
Si $\alpha \leq 1$ la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ est une (série de Rieman) divergente et donc aussi la série $\sum_n U_n$ est div. par théoréme de comparaison.
■

7 SÉRIES A TERMES QUELCONQUES

7 1 Séries Absolument Convergente

Définition 6

Soit $(U_n)_n$ une suite numérique, on dit que la série de terme général U_n Converge Absolument si la série de terme général $| U_n |$ Converge.(ie $\sum_n | U_n |$ est C.V).

Remarque 2.6

Les critéres de compraison s'appliquent aux suites $|U_n|$ et donnent du critéres de convergence absolue. De plus on pourra appliques Les régles de Cauchy, d'Alenbert, et Riemann.Par exemple le Critére de d'Alenbert devient $\lim_{n\to+\infty} |\frac{U_{n+1}}{U_n}| = l$ alors :
1-si $l < 1$ la série $\sum_n |U_n|$ C.V.
2-si $l > 1$ la série $\sum_n |U_n|$ div.
On a la proposition suivante :

Proposition 2.6

Une série absolument convergente est une série convergente.

Preuve

On suppose que la série $\sum_n |U_n|$ converge. Donc elle verifie le critere de Cauchy :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (m > n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} |U_n|| \leq \varepsilon$
D'où $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (m > n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} U_n| < |\sum_{k=n+1}^{m} |U_n|| \leq \varepsilon$
Finalement $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (m > n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} U_n| < \varepsilon$
Par le critere de Cauchy, On a la série $\sum_n U_n$ converge.
De plus, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}, |\sum_{n=0}^{m} U_n| \leq \sum_{n=0}^{m} |U_n|$$

on fait que m tend vers $+\infty$ on a

$$|\sum_{n=0}^{+\infty} U_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$$

car les 2 séries $\sum |U_n|$ et $\sum U_n$ sont convergentes.

Remarque 2.7

La réciproque de la proposition n'est pas toujours vraie. Une série peut être convergente sans être absolument convergente.

Exercices d'application

.

On vera que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais $\sum_{n\geq 1} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Définition 7

1-Une série convergente, $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n|$ diverge est appelée une série conditionnellement convergente.
2-Une série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n|$ converge est appelée une série absolument convergente.

Exercices d'application

.

On vera que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente car : $\sum_{n\geq 1} |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente.

7 2 Séries produit

Définition 8

Soient $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=n_0'}^{+\infty} V_n$ deux séries, la série produit des séries $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=n_0'}^{+\infty} V_n$ est la s´erie :

$$\sum_{n=n_0+n_0'}^{+\infty} W_n$$

où

$$W_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ p\geq n_0, q\geq n_0'}} U_p V_q$$

Remarque 2.8

1-Dans la définition précédante si $n_0 = n_0' = 0$ alors :

$$W_n = \sum_{p+q=n} U_p V_q = U_n V_0 + U_{n-1} V_1 + U_{n-2} V_2 + \cdots + U_0 V_n = \sum_{k=0}^{n} U_{n-k} V_k$$

2-La série produit de deux série est appelée aussi produit de Cauchy .

Proposition 2.7

La série prduit $\sum_{n=n_0+n_0'}^{+\infty} W_n$ de deux série absolument convergentes $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=n_0'}^{+\infty} V_n$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=n_0+n_0'}^{+\infty} W_n = (\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n) \times (\sum_{n=n_0'}^{+\infty} V_n)$$

Preuve

a)-Cas où les deux séries $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=n_0'}^{+\infty} V_n$ sont à termes positifs, on a pour tout entier $m \geq n_0 + n_0'$

$$(\sum_{n=n_0}^{m} U_n) \times (\sum_{n=n_0'}^{m} V_n) \leq \sum_{n=n_0+n_0'}^{2m} W_n \leq (\sum_{n=n_0}^{2m} U_n) \times (\sum_{n=n_0'}^{2m} V_n)$$

donc si les deux séries sont convergente alors la séries $\sum_{n=n_0+n_0'}^{+\infty} W_n$ converge. Il découle des deux inégalités précédantes que

$$\sum_{n=n_0+n_0'}^{+\infty} W_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n \times \sum_{n=n_0'}^{+\infty} V_n$$

b)-Cas général. Soit pour tout entier $m \geq n_0 + n_0'$

$$| - (\sum_{n=n_0}^{m} U_n) \times (\sum_{n=n_0'}^{m} V_n) = | \sum_{\substack{m<p+q \\ p\leq m, q\leq m}} U_p V_q | \leq \sum_{\substack{m<p+q \\ p\leq m, q\leq m}} |U_p V_q|$$

Soit $\sum_{n=n_0+n_0'}^{+\infty} W_n'$ la série produit de $\sum_{n=n_0}^{\infty} |U_n|$ et $\sum_{n=n_0'}^{\infty} |V_n|$. Alors on a

$$\sum_{\substack{m<p+q \\ p\leq m, q\leq m}} |U_pV_q| = \sum_{n=n_0+n_0'}^{m} W_n' - (\sum_{n=n_0}^{m} |U_n|) \times \sum_{n=n_0'}^{m} |V_n|$$

Donc d'aprés a), $\lim_{m\to+\infty} \sum_{\substack{m<p+q \\ p\leq m, q\leq m}} |U_pV_q| = 0$. D'où

$$\sum_{n=n_0+n_0'}^{m} W_n' - (\sum_{n=n_0}^{m} |U_n|) \times \sum_{n=n_0'}^{m} |V_n| = 0$$

Ainsi, la série produit est convergente et on a

$$\sum_{n=n_0+n_0'}^{+\infty} W_n = (\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n) \times (\sum_{n=n_0'}^{+\infty} V_n)$$

De plus pour tout entier $n \geq n_0 + n_0'$, on a, $|W_n| \leq W_n'$ donc la série produit est absolument convergente.$\square$

Exercices d'application

.

Soit $r \in]-1, -1[$, etudions la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)r^n$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+1)r^n = \sum_{k=0}^{n} r^{n-k}r^k$ Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)r^n$ n'est autre que la série produit de $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$. D'où elle est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)r^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} r^n) \times (\sum_{n=0}^{+\infty} r^n) = \frac{1}{1-r} \times \frac{1}{1-r}$$

Attention

En général

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_nV_n \neq (\sum_{n=0}^{+\infty} U_n) + (\sum_{n=0}^{+\infty} V_n)$$

par exemple

$(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n})^2 = 2^2 \neq \frac{4}{3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2^n})^2$

7 3 Série Semi Convergente

Définition 9

Soit $(U_n)_n$ une suite numérique, On dit que $\sum_n U_n$ est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

Proposition 2.8

si la série $\sum_n U_n$ est semi-convergente et la série $\sum_n V_n$ est absolument convergentes alors la série $\sum_n (U_n + V_n)$ est semi-convergente

Preuve

Supposons que la série $\sum_n (U_n+V_n)$ converge absolument, alors
$|U_n| = |U_n+V_n-V_n| \leq |U_n+V_n| + |-V_n| = |U_n+V_n| + |V_n|$
On a $\sum_n |V_n|$ C.V et $\sum_n |U_n+V_n|$ converge aloors $\sum_n |U_n|$ converge
C.à.d. que $\sum_n (U_n$ converge absolument, cequi est donne un <u>contradiction</u>
alors $\sum_n (U_n+V_n)$ est Semi-convergente.$\square$

8 Séries D'Abel.

Définition 10

(Série d'Abel)
Une série d'Abel est une série de la forme $\sum_{n\geq 0} \alpha_n V_n$ vérifiant :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$
2. La série $\sum_{n\geq 0} |V_n - V_{n+1}|$ est convergente.
3. $\exists M>0, \forall n>m\geq 0, \quad |\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_n| \leq M$

Remarque 2.9

Si la suite $(V_n)_n$ est décroissante, alors l'hypothèse 2) de la définition de la série d'Abel est automatiquement vérifiée :
En effet

$$\sum_{k=0}^{n} |V_k - V_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (V_k - V_{k+1}) = V_0 - V_{n+1} \to V_0 \quad quand n \to +\infty$$

puisque $V_{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$

Théorème 0

Toute série d'Abel est convergente.

Preuve

Soit $p<q$. On note :

$$W_k = \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + ... + \alpha_k, \qquad k \geq p+1$$

$$\begin{aligned}
|\alpha_{p+1}V_{p+1} + ... + \alpha_q V_q| &= |V_{p+1}W_{p+1} + V_{p+2}(W_{p+2} - W_{p+1}) + ... + V_{q-1}(W_{q-1} - W_{q-2}) \\
&\quad + V_q(W_q - W_{q-1})| \\
&= |W_{p+1}(V_{p+1} - V_{p+2}) + ... + W_{q-1}(V_{q-1} - V_q) + W_q V_q| \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{q-1} |W_k||V_k - V_{k+1}| + |W_q||V_q| \\
&\leq M(\sum_{k=p+1}^{q-1} |V_k - V_{k+1}| + |V_q|) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Les hypothèses d'une série d'Abel impliquent que, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q > p > N$ on a

— $\mid V_q \mid \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ (Car $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$)

— $\sum_{k=p+1}^{q-1}|V_k - V_{k+1}| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ (Car $\sum|V_n - V_{n+1}|$ est convergente donc de Cauchy)
Ainsi, $\sum_{n\geq 0}\alpha_n V_n$ est une suite de Cauchy. Elle est donc convergente. De plus, si on fait tendre $q \to +\infty$ (*) devient

$$|\sum_{k=p+1}^{+\infty}\alpha_k V_k| \leq M(\sum_{k=p+1}^{+\infty}|V_k - V_{k+1}|)$$

9 Séries alternées.

Définition 11

Soit $\sum_n U_n$ une série convergente, le reste d'ordre n de cette série est la somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$

Remarque 2.10

En général le reste d'ordre n d'une série est noté R_n donc on a $S = S_n + R_n$ où S et S_n sont respectivement la somme et la somme partielle d'ordre n de la série.

Définition 12

Une série alternée est une série dont le terme général U_n est de la forme $U_n = (1)^n V_n$ où

— $(V_n)_n$ est une suite positive,
— $(V_n)_n$ est une suite décroissante,
— $(V_n)_n$ converge vers zéro.

Proposition 2.9

Soit la série $\sum_n U_n$ une série altérnée telle que la suite $(|U_n|)_n$ est décroissante et tend vers 0 ; alors $\sum_n U_n$ est une série d'Abel. Donc convergente.

Preuve

On pose $\alpha_n = (-1)^n$ et $V_n = |U_n|$
La série $\sum_n U_n = \sum_n(-1)^n|U_n| = \sum_n \alpha_n V_n$
vérifie les hypothèses d'une série d'Abel. Donc convergente.

Exercices d'application

•

$\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente pour si $0 < \alpha \leq 1$ mais non absolument convergente, donc semi convergente.

Proposition 2.10

Toute série alternée $\sum_n(-1)^n V_n$ est convergente. De plus :
1-(Formule de majoration du reste) Pour tout entier n, $|R_n| \leq V_{n+1}$.
2-La somme partielle S_n vérifie

$$S_{2n+1} \leq \sum_{n}^{+\infty}(-1)^n V_n \leq S_{2n}$$

De plus les deux suites $(S_{2n+1})_n$ et $(S_{2n})_n$ sont adjacentes.

Preuve

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = S_{2n+1} \quad \text{et} \quad b_n = S_{2n}$$

On a

$$a_{n+1} - a_n = V_{2n+2} - V_{2n+3} \geq 0$$

$$b_{n+1} - b_n = -V_{2n+1} + V_{2n+2} \leq 0$$

$$b_n - a_n = V_{2n+1} \to 0^+$$

Donc les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ converge vers une même limite qui n'est autre que la somme S de la série $\sum_n^{+\infty} (-1)^n V_n$.
Par suite

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

Il reste à montrer 1). On a pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
|R_{2n}| &= \lim_{n\to+\infty} |S_{2n+1} - S_{2n}| \\
&= \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_{2n+1} \\
&\leq S_{2n} - S_{2n+1} = V_{2n+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R_{2n+1}| &= \lim_{n\to+\infty} |S_{2n} - S_{2n+1}| \\
&= \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_{2n+1} \\
&\leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = V_{2n+2} \blacksquare.
\end{aligned}$$

Corollaire 2

Criteire de Leibnitz

Soit $(U_n)_n$ une suite réelle positive décroissant tq $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ Alors la série alternée $\sum_n (-1)^n U_n$ est convergente.

Preuve

On applique le critére d'Abel avec $U_n = a_n$ et $b_n = (-1)^n$
On a $(U_n)_n$ est une suite positive décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad |\sum_{k=0}^n (-1)^k| \leq 1$
D'apres le Critére d'Abel. $\sum_n (-1)^n U_n$ est convergente.$\square$

FIN