Université Abdelmalek ESSAADI (UAE)
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima, Maroc

Analyse 3 : Fonctions de Plusieurs Variables

AP2 : Deuxième Année Cycle Préparatoire

Rédigé par

Moussaid Ahmed

Professeur Assistant
Département de Mathématiques-Informatique
ENSAH

$\mathscr{CT}$

2020/2021

Table des matières

Chapitre 1

Espace Métriques et Espace Vectoriels Normés

1.1 Espace Métriques

1.1.1 Distance

Définition 1 *Soit X un ensemble. Une application :*

$$\begin{array}{rcccc} d & : & X \times X & \to & \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

est appelée distance sur X si elle vérifie :
pour tout x ; y et $z \in X$, on ait

1. *Positivité : $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$*
2. *Séparation : $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*
3. *Symétrie : $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$*
4. *Inégalité triangulaire : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x,y,z \in X$*

Quelques Exemples :

1. Prenons $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une distance définie, pour tous x et $y \in X$ par

   $$d(x,y) = |\, x - y\, |$$

   appelée distance usuelle.
   où $|\,.\,|$: représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.
2. Prenons $X = \mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}$, l'application définie par :

   $$d_1(x,y) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x,y) \overset{def}{=} (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x,y) \overset{def}{=} \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$$

alors d_1 ; d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$; d_2 est appelée distance euclidienne classique sur $\mathbb{K}^n$.

PROPOSITION 1 *Nous avons les propriétés suivantes.*

1. *Pour $x_1;\cdots;x_n$ des points de X on a :*

$$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$$

2. *Pour tout x, y et z dans X on a :*

$$|d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z)$$

3. *Pour x ; x' et y ; y' dans X on a :*

$$|d(x,y) - d(x',y'| \le d(x,x') + d(y,y')$$

Démonstration.

1. La démonstration de (1) est immédiate par récurrence sur n.
2. Pour (2), nous avons, en effet,

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \qquad (inégalité \quad triangulaire)$$

ce qui donne

$$d(x,y) - d(y,z) \le d(x,z)$$

En permutant x et z, on a de la même manière

$$d(z,y) - d(y,x) \le d(x,z)$$

ce qui donne finalement

$$-d(x,z) \le d(x,y) - d(y,z) \le d(x,z)$$

3. Pour x ; x' et y ; y' dans X on a

$$d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$$

d'où

$$d(x,y) - d(x',y') \le d(x,x') + d(y',y)$$

En permutant les couples $(x;y)$ et $(x';y')$ on a

$$d(x',y') - d(x,y) \le d(x,x') + d(y',y)$$

PROPOSITION 2 *Soient d_1 et d_2 deux distances sur X. On suppose qu'il existe α, $\beta > 0$ tels que*

$$\alpha d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \beta d_2(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

*Alors d_1 et d_2 sont dites **équivalentes**.*

1.1.2 Espace Métriques

Définition 2 *On appelle Espace métrique tout ensemble non vide X muni d'une distance d et on le note $(X;d)$.*

Définition 3 *: (Boules et Sphères) Soit $(X;d)$ un espace métrique.*

1. *Pour $a \in X$ et $r \geq 0$, on définit les ensembles suivants :*
   - $B(a,r) = x \in X, d(x,a) < r$, boule ouvert de centre a et rayon r.
   - $\overline{B}(a,r) = x \in X, d(x,a) \leq r$, boule ermée de centre a et rayon r.
   - $S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r) = x \in X, d(x,a) = r$, sphère de centre a et rayon r.

2. *Une partie $U \subset X$ est dite ouverte si*

$$\forall a \in U, \quad \exists r > 0 \quad t.q. \quad B(a,r) \subset U$$

3. *Une partie $F \subset X$ est dite fermée si son complémentaire $F^c = X \setminus F$ est ouvert.*
4. *Une partie $A \subset X$ est dite bornée si*

$$\exists M > 0, \quad \forall x,y \in A, \quad d(x,y) \leq M$$

Lemme

Si x est dans X, pour $\epsilon < \epsilon'$, $\quad B(x,\epsilon) \subset B(x,\epsilon'), \quad et \quad \overline{B(x,\epsilon)} \subset \overline{B(x,\epsilon')}$

Théoréme 1 *(Propriétés des ensembles ouverts) Soit (E, d) un espace métrique. Alors*

1. *$\emptyset$ et E sont des ouverts.*
2. *Si $(\vartheta_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors $\cup_{i\in I}\vartheta_i$ est ouvert.*
3. *Si $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n$ sont des ouverts, alors $\vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$ est ouvert.*

Démonstration :

1. Evident.
2. Soient $\vartheta = \cup_{i\in I}\vartheta_i$ et $x \in \vartheta$ alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in \vartheta_{i_0}$ comme ϑ_{i_0} est ouvert $\Rightarrow \quad \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \vartheta_{i_0} \Rightarrow \quad B(x,r) \subset \cup_{i\in I}\vartheta_i = \vartheta$ comme $x \in \vartheta$ était quelconque $\Rightarrow \vartheta$ est ouvert.

3. Soit $x \in \vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$ alors $x \in \vartheta_1$, et $x \in \vartheta_2$ et $\cdots$ et $x \in \vartheta_n$.
   comme ϑ_i est ouvert, il existe $r_1 > 0, r_2 > 0, \cdots, r_n > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset \vartheta_1$ et $B(x, r_2) \subset \vartheta_2$ et, $\cdots$ et $B(x, r_n) \subset \vartheta_n$.
   soit $r = \min(r_1, r_2, \cdots, r_n)0$
   Alors $B(x, r) \subset \vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$.
   donc $\vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \ldots \cap \vartheta_n$ est ouvert.

Définition 4 *: (Intérieur, adhérence) Soit $(X; d)$ un espace métrique.*
Pour $A \subset X$,
On définit l'intérieurde A, A°, par

$$A^\circ = \bigcup_{U\, Ouvert, \quad U \subset A} U$$

et l'adhérence de A, $\overline{A}$, par

$$\overline{A} = \bigcap_{F\, fermé, \quad F \supset A} F$$

Définition 5 *: (voisinage, intérieur) Soit $(X; d)$ un espace métrique.*

1. *Soit V un sous-ensemble de X et $x \in X$: on dit que V est un voisinage de x s'il contient une boule ouverte de centre x.*
2. *Soit A un sous-ensemble de X : on dit qu'un élément a de X est un point intérieur à A si A est un voisinage de a ou, ce qui est équivalent, s'il existe $r > 0$ tel que $B(a; r) \subset A$. On appelle intérieur de A et on note A° l'ensemble des points intérieurs à A.*

PROPOSITION 3 *Soit A est un sou ensemble d'un espace métrique F. Alors :*

— *A° est un ouvert contenu dans A.*
— *Si U est un ouvert et $U \subset A$, alors $U \subset A^\circ$.*
Autrement dit, A° est le plus grand ouvert contenu dans A.
— *$\overline{A}$ est un fermé contenant A.*
— *Si F est un fermé et $F \supset A$, alors $F \supset \overline{A}$*
Autrement dit,$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Remarque
1-Si x appartient à A° il existe, $\varepsilon > 0$, tel que $x \in B(x, \varepsilon) \subset A^\circ \subset A$
2- Un point x est dans $\overline{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ intersecte A.

PROPOSITION 4 *Soient A et B, deux sous ensembles d'un espace métrique E. Alors :*

1. *On a* $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ *et* $\overline{A} \subset \overline{B}$
2. $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ *tel que* $B(x,\varepsilon) \subset A$
3. $x \in \overline{A}, \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
4. *A ouvert* $\Leftrightarrow A = A^\circ$
5. *A fermé* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
6. *A ouvert* $\Leftrightarrow$ *A est une union de boules ouvertes.*

Démonstration.(Exercice)

1.1.3 Suites et étude de la convergence dans un Espace métrique

Définition 6 *:(une suite extraite)*
Si (x_n) *est une suite, on notera une suite extraite (=sous-suite) soit par* (x_{n_k})*, soit par* $(x_{\varphi(n)})$*. Dans le premier cas* $n_0, n_1, \cdots$*, est une suite strictement croissante d'entiers ; dans le second,* $\varphi : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante. Par abus de notation, si tous les termes d'une suite* (x_n) *appartiennent à un ensemble* X *, on écrit* $(x_n) \subset X$.

Définition 7 *:(une suite convergente)*

Soit $(X;d)$ *un espace métrique. Si* $(x_n) \subset X$ *et* $x \in X$*, alors, par définition,* $x_n \to x$*, (*(x_n) *converge vers* x*) si et seulement si* $d(x_n;x) \to 0$.
Une suite (x_n) *est convergente s'il existe un* $x \in X$ *tel que* $x_n \to x$.
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$

Traduction de $x_n \to x$ *: pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \varepsilon$$

On dit que la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ *diverge ou est divergente si elle n'est pas convergente.*

Il est évident, à partir de la définition, que si $x_n \to x$, et si (x_{n_k}) est une sous-suite, alors $x_{n_k} \to x$

Rq :

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, cette définition coïncide avec la définition usuelle de la convergence.

Définition 8 *:(valeur d'adhérence) Soit $(X;d)$ un espace métrique. Si $(x_n) \subset X$ et $x \in X$, alors, par définition, x est une* ***valeur d'adhérence*** *de la suite (x_n) s'il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to x$.*

Exemple
Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de (x_n), car $x_{2n} \to 1$.

PROPOSITION 5 *Soit $(X;d)$ un espace métrique.*

1. *Si une suite (x_n), $n \in \mathbb{N}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$, alors x est unique : on dit alors que x est la limite de la suite (x_n), $n \in \mathbb{N}$;*
2. *on peut énoncer la définition de la convergence d'une suite avec le langage des voisinages : une suite (x_n), $n \in \mathbb{N}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ si*
   pour tout voisinage V de x , $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in V$
3. *Si $x_n \to x$, alors x est la seule valeur d'adhérence de la suite (x_n).*
4. *une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ si et seulement si la suite de réels positifs $(d(x_n;x))_n$ converge vers 0.*

1.1.4 Suites de Cauchy - Espace métrique complet.

Définition 9 *: (Suites de Cauchy) Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique $(X;d)$. On dit que $(x_n)_n$ est suite de Cauchy si elle satisfait :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall m \geq n_0, \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Remarque
La définition est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon$$

Exemple
dans $\mathbb{R}$, la suite$(\frac{1}{n})$ est de Cauchy.
Autrement dit, une suite de Cauchy est une suite dont les éléments sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang. En effet, on peut aisément montrer qu'une suite est de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une boule B_ε (ouverte ou fermée, cela ne change rien) de rayon ε (dont le centre n'est pas précisé mais dépend possiblement de ε) qui contient tous les élements de la suite à partir d'un certain rang

$$\exists n_0 \geq 0, \quad tq, \quad \forall n \geq n_0, \quad x_n \in B_\varepsilon$$

La remarque essentielle concernant les suites de Cauchy est la suivante.

PROPOSITION 6 *-Dans un espace métrique $(X;d)$ toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve : Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers une limite x. Pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ fixé, on peut trouver n_0 tel que $d(x_n;x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout n_0. Ainsi, si $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on a par inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x) < d(x, x_m) < \varepsilon$$

Ceci montre bien que la suite est de Cauchy.

PROPOSITION 7

1. *Dans un espace métrique $(X;d)$ Toute suite de Cauchy est bornée. Ceci résulte essentiellement du fait que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in B_f(x_{n_0};\varepsilon)$.*
2. *Si les métriques d et $d^{'}$ sont équivalentes sur X, alors toute suite de Cauchy pour d est une suite de Cauchy pour $d^{'}$.*

Définition 10 *: (Espaces métriques complets)*
Un espace métrique $(X;d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy dans $(X;d)$ est convergente.

PROPOSITION 8

1. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $F \subset X$. Alors (F,d) est complet si et seulement si F est fermé dans X*
2. *Soit (X,d) un espace métrique. Si X est compact alors il est borné : il existe $M > 0$ tel que $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) \leq M$.*

1.2 Espace Vectoriels Normés

On étudie des espaces vectoriels sur le corps K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$

Définition 11 *: (Norme)*
Soit E un k- espace vectoriel réel. Une application $N : \quad E \to \mathbb{R}^+$ est appelée norme sur E si elle vérifie

1. *Positivité :*
$$\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$$
2. *Séparation :*
$$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
3. *Homogénéité :*
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
4. *Inégalité triangulaire :*
$$\forall x, y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

Rq : Le plus souvent, on note une norme par $\|.\|$.

- **Exemples classiques**

1. Les applications définies par $\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$
   (a) $N_1(X) = \sum_{i=1}^n |x_i| = ||X||_1$
   (b) $N_2(X) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2} = ||X||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
   (c) $N_2(X) = \max_{1 \leq i \leq n}(|x_i|) = ||X||_\infty$
   Sont des Normes dans K^n
2. Les applications définies par $\forall f \in C^0([a,b], K)$
   (a) $N_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt$
   (b) $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$
   (c) $N_\infty(f) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$
   Sont des normes sur $C^0([a,b], K)$

Req
Lorsque seules les propriétés (1), (3) et (4) de la définition sont vérifiées, ont dit que N est une semi norme.

Définition 12 *: (Espace Vectoriels Normés) Un espace **vectoriel normé** est un couple (E,N) où E est un K-espace vectoriel et N est une norme sur E (en abrégé. e.v.n.).*

PROPOSITION 9 *Soient E un K- espace verctoriel et N une norme sur E alors :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad |N(x) - N(y)| \leq N(x+y)$$

Démonstration :
Soit $(x,y) \in E^2$
$N(x) = N(x+y+(-y)) \leq N(x+y) + N(-y) = N(x+y) + N(y)$ car $N(-y) = N(y)$
donc $N(x) - N(y) \leq N(x+y)$
En échangeant les rôle de x et y, on obtient
$N(y) - N(x) \leq N(x+y)$
et finalement

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x+y)$$

PROPOSITION 10 $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n, \quad \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n, \quad \| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|x_k\|$

1.2.1 Distance associée à une norme

Définition 13 *: Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.*
Pour $(x,y) \in E^2$, la distance de s à y est $d(x,y) = \|x-y\|$

PROPOSITION 11 *Si N est une norme sur E, l'application définie par :*
$\forall (x,y) \in E^2, \qquad d(x,y) = N(x-y)$, est une distance sur E appelée distance associée (ou liée) à la Norme N.

Démonstration :

— d est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ ie. $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) \geq 0$.
— pour $(x,y) \in E^2$
$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\iff N(x-y) = 0 \\ &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$
— pour $(x,y) \in E^2$

$$\begin{aligned} d(y,x) &= N(y-x) \\ &= N(-(x-y)) \\ &= |-1| N(x-y) \\ &= N(x-y) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

— pour $(x,y,z)\in E^3$

$$\begin{aligned} d(x,z) &= N(x-z)\\ &= N((x-y)+(y-z))\\ &\leq N(x-y)+N(y-z)\\ &= d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

1.2.2 Normes Équivalentes

Définition 14 *: Soient E un K-espace vectoriel puis N et $N^{'}$ deux normes sur E, $N^{'}$ est équivalente à N si et seulement si il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :*

$$\forall x\in E \qquad \alpha N(x)\leq N^{'}(x)\leq \beta N(x)$$

Exercice

Dans $E=\mathbb{R}^n$ Montrer que $\|.\|_1, \quad \|.\|_2 \quad et \quad \|.\|_\infty$ des normes deus à deux équivalentes.

Définition 15 *: Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, la restriction à F de la norme de E est une norme sur F, appelée norme induite.*

Rq :

Evident car les propriétés sont vraies pour tous les éléments de E, donc pour ceux de F. La norme induite sur F sera notée comme la norme sur E.

Théoréme 2 *Si $E=\prod_{k=1}^{n} E_k$ est un produit d'espaces vectoriels E_k normés par la norme N_k, l'application N définie sur E par $N(x)=\max_{1\leq k\leq p} N_k(x_k)$ si $x=(x_1,\ldots,x_p)$ est une norme sur E appelée norme produit.*

Démonstration :

C'est évidemment une application de E dans $\mathbb{R}^+$.

* $N(x)=0$ si et seulement si $\forall k\in [\![1;p]\!], \quad N_k(x_k)=0$, donc si $\forall k\in [\![1;p]\!]$, $x_k=0$ donc $x=0$
* Soit $\lambda\neq 0$:
  $N(\lambda x)=\max_{1\leq k\leq p} N_k(\lambda x_k)=\max_{1\leq k\leq p}|\lambda|N_k(x_k)$
  Or $\forall k\in [\![1;p]\!], \quad N_k(x_k)\leq N(x)$.
  Donc : $\forall x\in E, \quad N(\lambda x)\leq |\lambda| N(x)$. Donc $\forall x\in E, \quad N(\frac{1}{\lambda}\lambda x)\leq \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda x)$

Donc : $\forall x \in E, \quad |\lambda| N(x) \leq N(\lambda x)$.
Donc si $\lambda \neq 0$ on a $\forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
Pour $\lambda = 0$, l'égalité est évidente.
Donc : $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in K \quad |\lambda| N(x) \leq N(\lambda x)$.

* $N(x+y) = \max\limits_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k + y_k)$.
Or $\forall k \in [\![1;p]\!], \quad N_k(x_k + y_k) \leq N_k(x_k) + N_k(y_k)$
Donc $\forall k \in [\![1;p]\!], \quad N_k(x_k + y_k) \leq N(x) + N(y)$.
Donc $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

1.2.3 Normes subordonnées

Définition 16 *: Soient E et F deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E dans F. La norme de T est :*

$$|||t||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x\|$$

dite norme subordonnée à la norme $\|.\|$.

1.2.4 Suites dans un K-espace vectoriel normé.

Suites bornées

Définition 17 *Soit* (E,N) *un K-espace vectoriel normé.*
Soit $(U_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ *(une suite d'élément de E est une application de* $\mathbb{N}$ *dans E)*
$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est bornée si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R}^+$ *telque* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(U_n) \leq M$

Théoréme 3 *Soit E un K-espace vectoriel.*
Soint N et $N^{'}$ *deux normes sur E.*
Si N et $N^{'}$ *sont équivalents, alors pour tout suite* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *d'éléments de E,* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est une suite bornée de l'espace vectoriel normé* (E,N) *si et seulement si* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}})$ *est une suite bornée de l'espace vectoriel normé* $(E,N^{'})$

Démonstration :
Par hypothése, il existe deux réels strictement positifs telque $\alpha N \leq N^{'} \leq \beta N$.
Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une suite d'élément de E .
On suppose la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}})$ bornée pour la norme N.
il existe $M \in \mathbb{R}^+$ telque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(U_n) \leq M$.
Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$N^{'}(U_n) \leq \beta N(U_n) \leq \beta M$$

Donc, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est borné par la norme $N^{'}$.
En échangeant les rôle de N et $N^{'}$, on a aussi, si la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est borné par

la norme $N^{'}$, alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est borné par la norme N.
Finalement, pour toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ d'élément de E, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est bornée par la norme N ssi $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est bornée par la norme $N^{'}$.

Suites convergentes

Définition 18 *Soit (E,N) un K-espace vectoriel normé.*
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E^n$ et $l \in E$.
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ Converge vers l si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow N(U_n - l) \leq \varepsilon)$.
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ Converge ssi il existe $l \in E$ telque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ Converge vers l. Dans le cas contraires la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est diverge.

Commentaire

une définition équivalente est :
$(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ Converge vers $l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow U_n \in B_f(l,\varepsilon)$

Théoréme 4 *$(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ Converge vers $l \quad \Leftrightarrow \quad (u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ Converge vers $0_E \quad \Leftrightarrow$ $(N(U_n - l))_{n\in\mathbb{N}}$ Converge vers 0_E.*

Théoréme 5 *Si une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l , alors l est unique.*

Commentaire

Si une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, on peut dire que l est la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

Théoréme 6 *Soit E un K-espace vectoriel, soient N et $N^{'}$ deux Normes sur E. Si N et $N^{'}$ sont équivalentes, alors pour tout $l \in E$, et toute suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans (E,N) si et seulement si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans $(E,N^{'})$.

Démonstration.
Soient N et $N^{'}$ deux normes équivalentes. Soient α et β deux réels strictement positifs tels que $\alpha N \leq N^{'} \leq \beta N$.
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Supposons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans dans l'espace vectoriel normé (E,N).Alors,
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow N(U_n - l) \leq \varepsilon)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0 \quad N(U_n - l) \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$.
Pour $n \geq n_0$, on a

$$N^{'}(U_n - l) \leq \beta N(U_n - l) \leq \beta \frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow N'(U_n - l) \leq \varepsilon)$$

et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans l'espace vectoriel normé (E, N'). En échangeant les rôles de N et N', ceci montre aussi que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans l'espace vectoriel normé (E, N'), alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans l'espace vectoriel normé (E,N).

Exemple.

Reprenons l'exemple des normes N et N' définies sur $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ par $N(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = x^n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E. Pour tout entier naturel $n, \quad N(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et pour tout entier naturel$n, \quad N'(f_n) = 1$. Donc, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N) et ne converge pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N'). On en déduit que les normes N et N' ne sont pas des normes équivalentes.

Théoréme 7 *Si la suite $(U_n)_n$ converge (pour la norme N), alors $(U_n)_n$ est bornée (pour la même norme N).*

Démonstration.
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers un certain élément l de E. Il existe un entier n_0 strictement positif tel que pour $n \geq n_0, \quad N(U_n - l) \leq 1$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$N(U_n) = N(U_n - l + l) \leq N(U_n - l) + N(l) \leq 1 + N(l)$$

Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$N(U_n) \leq \max(N(U_0 - l), ..., N(U_{n_0-1} - l), 1 + N(l))$$

Ceci montre que la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Théoréme 8
1. *Si la suite $(U_n)_n$ converge vers l et la suite $(V_n)_n$ converge vers l', Alors pour tout $(\alpha, \beta) \in K^2$, la suite $(\alpha U_n + \beta V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha l + \beta l'$*
2. *Si la suite $(U_n)_n$ converge vers l et la suite $(V_n)_n$ converge vers l', alors la suite $(U_n V_n)_n$ converge vers ll'*

Théoréme 9 *(Liens entre suite et suites coordonnées dans une base de l'espace)*
Soit E un espace de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$
Soit $\beta = (e_1, ..., e_p)$ une base donnée de E.
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et l un élément de E.
Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \sum_{k=1}^{p} u_{n,k} e_k$ et $l = \sum_{k=1}^{p} l_k e_k$
la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si pour tout $k \in [\![1;p]\!]$ la suite numérique $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_k.

1.2.5 Suites extraites

Définition 19 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé.*
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
une suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. où φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Théoréme 10 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace normée (E,N).*
Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans (E,N) , alors toute suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de même limite que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce résultat s'énonce encore de la façon suivante : toute suite extraite d'une suite convergente dans un espace vectoriel normé est convergente dans cet espace de même limite.

PROPOSITION 12 *Une suite extraite d'une suite convergente est convergente. Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite l est une suite convergeant vers l*

COROLLAIRE 1 (Critère de divergence d'une suite) *Soit (u_n) une suite d'un evn $(E,\|.\|)$. On suppose qu'il existe deux suites extraites $u_{\varphi(n}$ et $u_{\varphi'(n)}$ telles que :*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{\varphi'(n)} = \ell'$
- $\ell \neq \ell'$

Alors la suite (u_n) est divergente.

PROPOSITION 13 *Deux suites extraites particulières*
Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell \in E$, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exemple :
Si $U_n = (-1)^n$
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{2n+1} = -1$ donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est diverge.

Définition 20 *Soit (E,N) un espace vectoriel normé.*
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et soit $\ell \in E$.
ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ.

Théoréme 11 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.*
Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence et une seule, à savoir sa limite. Ainsi, si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Théoréme 12 *(Théoréme de Bolzano-Weierstrass.)*
Soit E un K-espace de dimension finie.
De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente ou encore toute suite bornée d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Définition 21 *(SUITES DE CAUCHY)*
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tous

$$n, m \geq N \quad \Rightarrow \|U_n - U_m\| < \varepsilon$$

Théoréme 13 *Toute suite convergente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy.*

Démonstration :
Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors
$\forall\varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|U_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc si $n \geq n_0, \quad et \quad m \geq n_0 : \quad \|U_n - U_m\| \leq \|U_n - \ell\| + \|U_m - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

PROPOSITION 14 *Soit (E,N), un espace vectoriel normé. Alors :*
1- Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E, alors, toute suite de Cauchy pour N_1 est également une suite de Cauchy pour N_2.
2- Toute suite de Cauchy est bornée

PROPOSITION 15 *Caractérisation séquentielle des fermés.*
Soit (E,N), un espace vectoriel normé, et A, un sous-ensemble de E. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *A est fermé dans E.*
2. *Toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$ implique que $\ell \in A$*

1.2.6 Espace vectoriel normé complet :

Définition 22 *Espace Vectoriel Normé complet. Soit (E,N), un espace vectoriel normé. On dit que E est complet si, et seulement si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

PROPOSITION 16 *L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne est un espace vectoriel normé complet.*

Démonstration.(exercice)

PROPOSITION 17 *Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2), deux espaces vectoriels normés complets. Alors, l'espace produit $E_1 \times E_2$ est également complet.*

PROPOSITION 18 *Soit (E, N), un espace vectoriel normé complet. Soit X, une partie de E. Alors,X est complète si, et seulement si X est fermée.*

Démonstration : On va démontrer les deux implications :
- Sens $\Rightarrow$:
supposons X complète dans E complet. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de X convergeant dans E. On note ℓ sa limite dans E. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy (car convergente) dans E, donc en particulier dans X qui est complet. On en déduit l'existence de $\ell' \in X$ tel que $U_n \overset{dansX}{\rightarrow}_{n\to+\infty} \ell'$. Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans E, par unicité de la limite, $\ell' = \ell \in X$. On retrouve la caractérisation séquentielle des fermés. Ainsi, X est une partie fermée.

- Sens $\Leftarrow$
supposons X fermée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy d'éléments de X. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, donc est convergente vers $\ell \in E$ Mais puisque X est fermée, toujours d'après la caractérisation séquentielle des fermés, il s'ensuit que $\ell \in X$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge dans X.
□