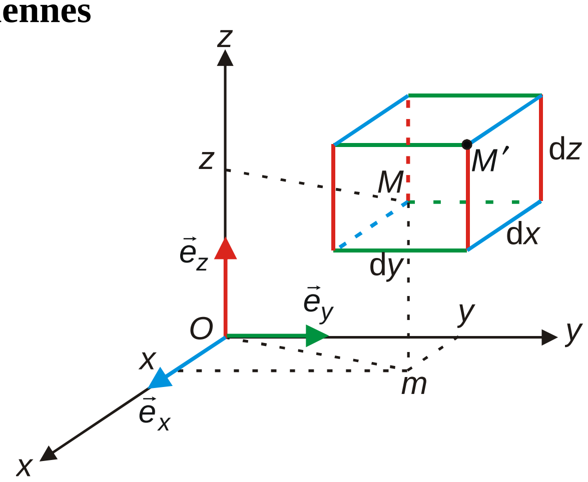
CHAMPS DE SCALAIRES ET DE VECTEURS

1. LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

1.1 Coordonnées cartésiennes



Dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le vecteur position s'écrit :

$\boldsymbol{\vec{r}} = \boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \boldsymbol{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$, où x (abscisse), y (ordonnée) et z (cote) sont les coordonnées cartésiennes du point M.

Déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin :

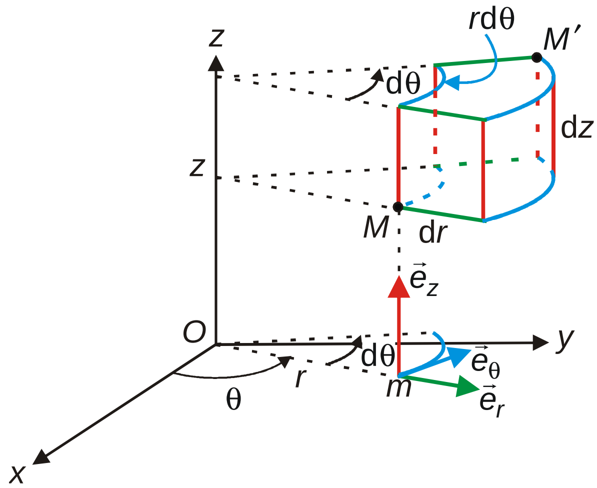
- si x varie de dx, le point matériel se déplace de dx selon le vecteur $\vec{e}_x$;
- si y varie de dy, le point matériel se déplace de dy selon le vecteur $\vec{e}_y$:
- si z varie de dz, le point matériel se déplace de dz selon le vecteur $\vec{e}_z$.

Sous l'effet d'une variation infinitésimale dx, dy, dz de ses coordonnées x, y, z, le vecteur position varie de $\boxed{\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z}$

Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cartésiennes : $\boxed{\mathrm{d}^3\mathscr{V} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$. Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est donc : $\mathscr{V} = \iiint_{P \in (D)} \mathrm{d}^3\mathscr{V} = \iiint_{P \in (D)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

On balaie l'espace entier en prenant $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

1.2 Coordonnées cylindriques



On projette les différents vecteurs dans une base mobile orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ attachée au point *M*, définie de la manière suivante :

Si *m* est le projeté orthogonal de *M* sur le plan *xOy*, $\vec{e}_r$ (vecteur radial) $= \dfrac{\overrightarrow{Om}}{r}$ avec $r = \left\|\overrightarrow{Om}\right\|$.

θ est l'angle orienté $(\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ dans le plan *xOy*, $\vec{e}_\theta$ (vecteur orthoradial) se déduit alors de $\vec{e}_r$ d'une rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$ autour de *Oz*. $\vec{e}_z$ complète le trièdre direct.

r (rayon polaire), θ (angle polaire) et *z* (cote) sont les coordonnées dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ du point *M*.

Le vecteur position s'écrit donc $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ (attention : *r* n'est pas ici la norme du vecteur position).

Déplacement élémentaire du point passant de *M* à *M′* infiniment voisin :

- si *r* varie de d*r*, le point matériel se déplace de d*r* selon le vecteur $\vec{e}_r$;
- si θ varie de dθ, le point matériel se déplace de *r*dθ selon le vecteur $\vec{e}_\theta$;
- si *z* varie de d*z*, le point matériel se déplace de d*z* selon le vecteur $\vec{e}_z$.

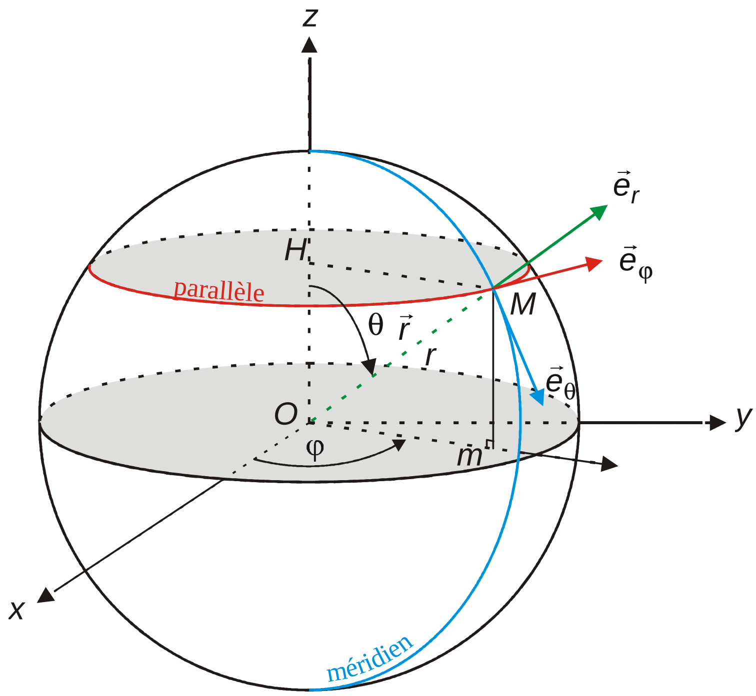
  remarque : dθ étant infiniment petit, l'arc de cercle de longueur *r*dθ se confond en fait avec un segment rectiligne.

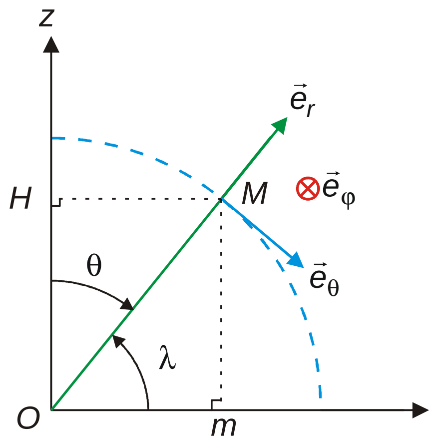
Sous l'effet d'une variation infinitésimale d*r*, dθ, d*z* de ses coordonnées *r*, θ, *z*, le vecteur position varie de $\boxed{\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z}$

Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cylindriques : $\boxed{\mathrm{d}^3\mathscr{V} = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$. Le volume d'un domaine compact (*D*) de l'espace est donc : $\mathscr{V} = \iiint_{P\in(D)} \mathrm{d}^3\mathscr{V} = \iiint_{P\in(D)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

On balaie l'espace entier en prenant $r \in [0,+\infty[$, $\theta \in [0,2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$

1.3 Coordonnées sphériques





On projette les différents vecteurs dans une base mobile orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ attachée au point M, définie de la manière suivante :

$$\vec{e}_r \text{ (vecteur radial)} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} \text{ avec } r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \|\vec{r}\|.$$

θ est l'angle orienté $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ dans le plan $(O, \vec{e}_z, \vec{e}_r)$, $\vec{e}_\theta$ (vecteur orthoradial) est alors un vecteur du plan vectoriel $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ se déduisant de $\vec{e}_r$ d'une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

$\vec{e}_\varphi$ complète le trièdre direct. C'est un vecteur du plan vectoriel $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ car il est orthogonal à $\vec{e}_z$.

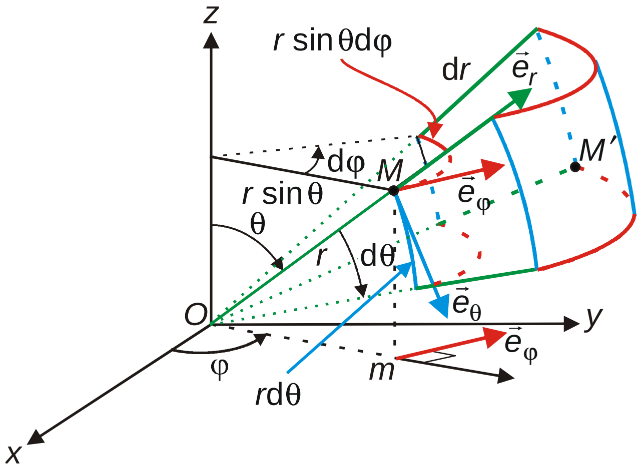
r (rayon), θ (colatitude) et φ (azimut) sont les coordonnées dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ du point M.

Pour visualiser les directions de $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$, on peut tracer la sphère de centre O et de rayon r.

$\vec{e}_\theta$ est alors porté par un méridien et $\vec{e}_\varphi$ par un parallèle. Ces références au repérage d'un point à la surface de la Terre sont précisément à l'origine du nom colatitude porté par l'angle θ (la latitude λ est l'angle $(\overrightarrow{Om}, \vec{e}_r)$, on a donc $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda$, comme on peut le voir sur la figure représentant le plan méridien.

Le vecteur position s'écrit donc $\boldsymbol{\vec{r}} = \boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \boldsymbol{r\vec{e}_r}$ (r est bien ici la norme du vecteur position).

Déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin :



- si r varie de dr, le point matériel se déplace de dr selon le vecteur $\vec{e}_r$;
- si θ varie de dθ, le point matériel se déplace de rdθ selon le vecteur $\vec{e}_\theta$;
- si φ varie de dφ, le point matériel se déplace de $r$sinθdφ selon le vecteur $\vec{e}_\varphi$.

Sous l'effet d'une variation infinitésimale dr, dθ, dφ de ses coordonnées r, θ, φ, le vecteur position varie de $\boxed{\mathbf{d}\vec{r} = \mathbf{d}r\vec{e}_r + r\,\mathbf{d\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\mathbf{sin\,\theta d\varphi}\,\vec{e}_\varphi}$

Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées sphériques : $\boxed{\mathbf{d^3}\mathscr{V} = r^2\,\mathbf{sin\,\theta\,d}r\,\mathbf{d\theta\,d\varphi}}$. Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est donc : $\mathscr{V} = \iiint_{P\in(D)} \mathrm{d}^3\mathscr{V} = \iiint_{P\in(D)} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

$\mathrm{d}^3\mathscr{V}$ étant positif, on balaie l'espace entier en prenant $r \in [0,+\infty[$ $,\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$

2. DÉFINITIONS DES CHAMPS ET OPÉRATIONS

2.1 Définitions

Un **champ de scalaires** (par exemple un champ de températures) est défini en un point M et à un instant donné t par :

$$\begin{array}{l} \mathrm{R}^4 \xrightarrow{V} \mathrm{R} \\ (M,t) \mapsto V(M,t) \end{array} \text{, soit, en coordonnées cartésiennes : } \begin{array}{l} \mathrm{R}^4 \xrightarrow{V} \mathrm{R} \\ (x,y,z,t) \mapsto V(x,y,z,t) \end{array}$$

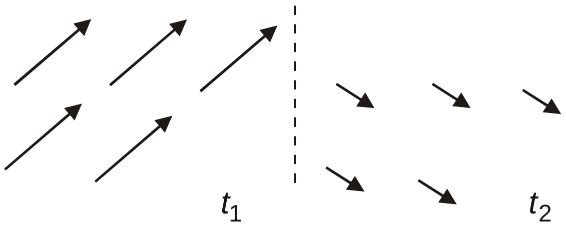
Un **champ de vecteurs** (par exemple un champ de forces) est défini par :

$$\begin{array}{l} \mathrm{R}^4 \xrightarrow{\vec{A}} \mathrm{R}^3 \\ (M,t) \mapsto \vec{A}(M,t) \end{array} \text{, soit, en coordonnées cartésiennes : } \begin{array}{l} \mathrm{R}^4 \xrightarrow{\vec{A}} \mathrm{R}^3 \\ (x,y,z,t) \mapsto \vec{A}(x,y,z,t) \end{array}$$

Ces champs peuvent n'être définis que dans un domaine restreint de l'espace.

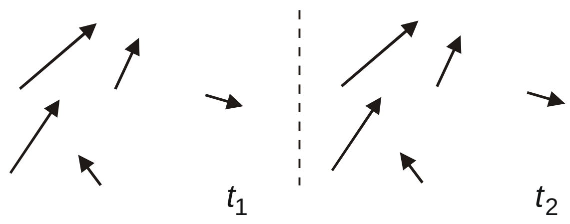
Un champ est **uniforme** s'il est indépendant du point M, ce que l'on peut noter selon le type de champs $\frac{\partial V}{\partial M} = 0$ ou $\frac{\partial \vec{A}}{\partial M} = \vec{0}$. Par exemple en coordonnées cartésiennes, on a pour un champ uniforme $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ ou $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \vec{0}$ avec $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{pmatrix}$

On peut représenter en quelques points un champ vectoriel uniforme à deux instants différents :



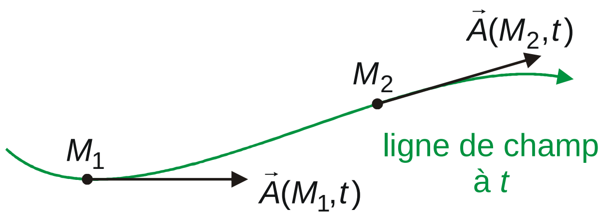
Un champ est **stationnaire** (ou **permanent**) s'il garde la même valeur en un point M donné au cours du temps, soit $\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$ ou $\boldsymbol{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}}$ avec en coordonnées cartésiennes $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix}$

On peut représenter en quelques points un champ vectoriel stationnaire à deux instants différents :

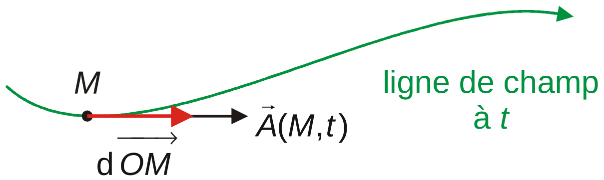


2.2 Lignes, tubes et cartes de champ pour un champ de vecteurs

À un instant t fixé, une **ligne de champ** relie les points M tels que le champ $\vec{A}(M,t)$ soit **tangent** à la ligne. On l'oriente dans le sens du champ.



Si on note $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est colinéaire au M à $\vec{A}(M,t)$, soit $\boxed{\mathbf{d}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t}) = \vec{\mathbf{0}}}$, ce qui fournit un **système d'équations différentielles** permettant de trouver l'équation d'une ligne de champ.

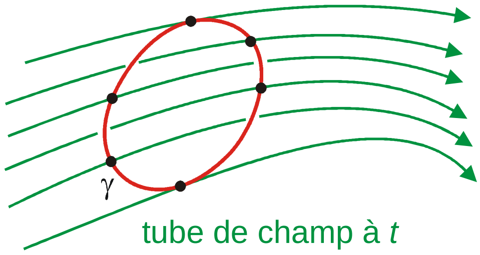


Par exemple pour un champ à deux dimensions en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x(x,y,t) \\ A_y(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{A_x(x,y,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y(x,y,t)}$$

Un ensemble de lignes de champ passant par un réseau de points donnés constitue une **carte de champ**.

L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé γ constitue un **tube de champ** (c'est donc une surface).



2.3 Opérations sur les vecteurs

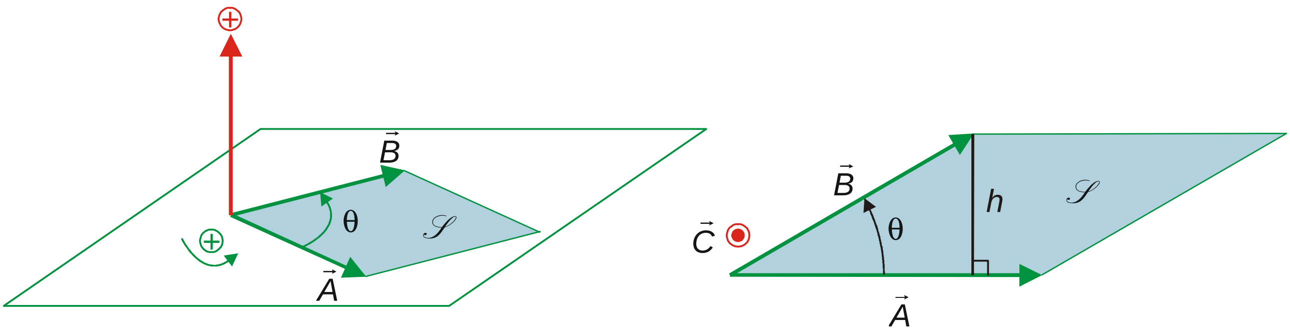
Produit scalaire dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\boldsymbol{V = \vec{A} \cdot \vec{B} = \left\|\vec{A}\right\| \left\|\vec{B}\right\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3}$$

Produit vectoriel dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, où $\vec{e}_3$ est orientée dans le sens de déplacement d'un tire-bouchon quand on tourne de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$:

$$\boldsymbol{\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix}}$$

$\vec{C}$ est orthogonal à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$, tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ soit direct et $\left\|\vec{C}\right\| = \left\|\vec{A}\right\| \cdot \left\|\vec{B}\right\| \cdot \left|\sin(\vec{A}, \vec{B})\right| = \left\|\vec{A}\right\| \cdot \left\|\vec{B}\right\| \cdot \left|\sin\theta\right|$



Or l'aire $\mathscr{S}$ du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ vaut $\mathscr{S} = \left\|\vec{A}\right\| \cdot h$ (base $\times$ hauteur), soit :

$\mathscr{S} = \left\|\vec{A}\right\| \cdot \left\|\vec{B}\right\| \cdot \left|\sin\theta\right|$, donc **la norme du produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est l'aire du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.**

Double produit vectoriel : $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$ est orthogonal à $\vec{B}\wedge\vec{C}$. Il est donc dans le plan vectoriel généré par $\vec{B}$ et $\vec{C}$, soit $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$. On retient alors facilement la formule :

$$\boxed{\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})}$$

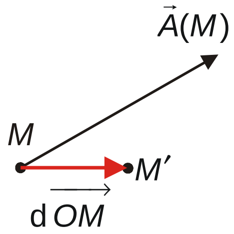
Un **produit mixte** $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})\overset{\text{déf}}{=}(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}$ est **invariant par permutation circulaire** :

$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{C}\wedge\vec{A})\cdot\vec{B}=(\vec{B}\wedge\vec{C})\cdot\vec{A}$

2.4 Circulation d'un champ de vecteurs

On définit la circulation d'un champ de vecteur à un instant *t* si le champ n'est pas stationnaire. On omettra le temps *t* dans $\vec{A}(M,t)$ pour ne pas alourdir les notations.

Considérons un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ à partir du point *M*. Par définition, la **circulation élémentaire** du champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ le long de ce déplacement élémentaire est $\boxed{\delta\mathscr{C}=\vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}$

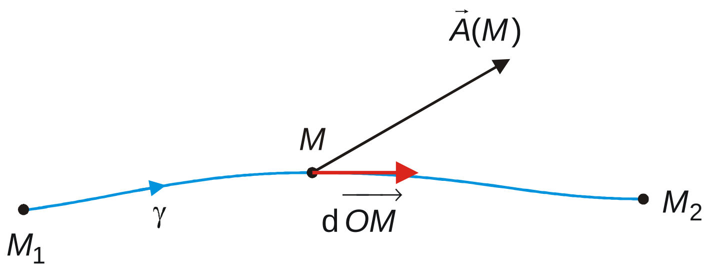


Attention ! ce n'est pas *a priori* une différentielle, c'est-à-dire la variation élémentaire d'une fonction de l'espace *f*(*M*) : $\delta\mathscr{C}\neq\mathrm{d}f=f(M')-f(M)$ avec $\overrightarrow{MM'}=\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$

Exemple : le travail élémentaire d'une force $\vec{F}(M)$ s'exerçant sur un point matériel qui se déplace de $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ est une circulation : $\delta W=\vec{F}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

Circulation d'un champ de vecteurs le long d'un contour orienté γ :

$\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2}=\int_{M_1}^{M_2}\vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$, qui dépend *a priori* du chemin γ choisi pour aller de M_1 à M_2.



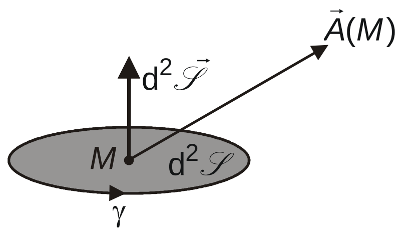
On a en conséquence $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2}=-\mathscr{C}^{\gamma}_{M_2\to M_1}$

Si le contour γ est fermé, on note $\mathscr{C}^{\gamma}=\oint_{\gamma}\vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$, circulation *a priori* $\neq 0$

2.5 Flux d’un champ de vecteurs

On définit le flux d’un champ de vecteur à un instant t si le champ n’est pas stationnaire. On omettra le temps t dans $\vec{A}(M,t)$ pour ne pas alourdir les notations.

Considérons une surface élémentaire $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ autour d’un point M. Cette surface est limitée par un contour élémentaire fermé γ dont l’orientation détermine grâce à la règle du tire-bouchon celle du vecteur surface $\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ (de norme $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$, orthogonal à l’élément de surface).

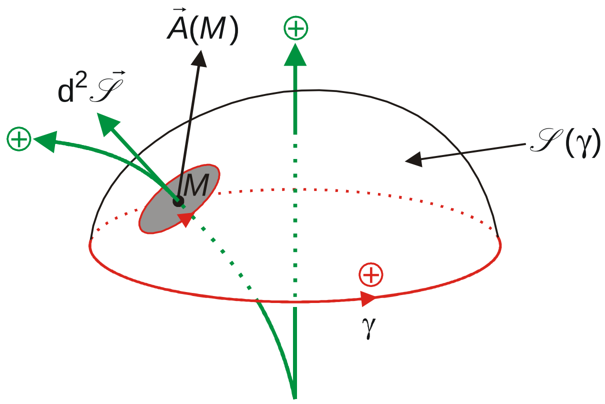


Le flux élémentaire du champ $\vec{A}(M)$ à travers $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ est la grandeur orientée $\boxed{\mathbf{d^2\Phi = \vec{A}(M)\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}}}$

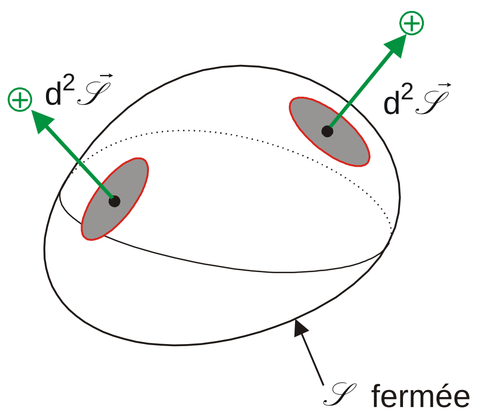
Flux d’un champ de vecteurs à travers une surface finie.

- Si la surface s’appuie sur un contour fermé γ orienté, on a par définition :

$\boxed{\Phi_{\mathscr{S}} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}}$, qui dépend *a priori* de la surface $\mathscr{S}$ choisie s’appuyant sur γ. Comme la figure ci-dessous le montre, les vecteurs surface élémentaires sont orientés dès que le contour γ l’est.



- Si la surface $\mathscr{S}$ est fermée, tous les vecteurs surface élémentaires sont orientés par convention **de l’intérieur vers l’extérieur**, et on note $\boxed{\Phi_{\mathscr{S}} = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}}$.



3. LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

3.1 Gradient

Cet opérateur linéaire s'applique à un champ de scalaires $V(M)$. Donnons d'abord son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &\xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}} \mathrm{R}^3 \\ V &\mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}V \end{aligned} \quad \text{avec } \overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : on introduit parfois l'opérateur « **nabla** » noté $\vec{\nabla}$ dont l'expression en coordonnées cartésiennes est $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}} \end{pmatrix}$ si bien que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \vec{\nabla}V$.

Lorsque l'on passe du point $M(x,y,z)$ au point $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ infiniment voisin, la fonction V varie de $\mathrm{d}V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \overrightarrow{\mathrm{grad}}V \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

Cette relation fournit la **définition intrinsèque** (indépendante du système de coordonnées choisi) de l'opérateur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$: lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$, V varie de $\mathrm{d}V$, avec :

$$\boxed{\mathbf{d}\boldsymbol{V} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} \cdot \mathbf{d}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}$$

Expression dans un système de coordonnées cylindriques :

puisque $\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$, on a :

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}r\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \overrightarrow{\mathrm{grad}}V \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}\text{, d'où :}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques :

puisque $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$, on a :

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}r\mathrm{d}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}r\sin\theta\mathrm{d}\varphi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}V\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$, d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \theta} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}\,\mathbf{sin}\,\theta}\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).}$$

Interprétation physique de l'opérateur $\overrightarrow{\mathbf{grad}}$:

$\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}V\right\|$ « mesure » les variations spatiales locales de V : plus V varie fortement au voisinage de M, plus $\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}V\right\|$ est grand.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ indique dans quelles direction et sens varie localement V.

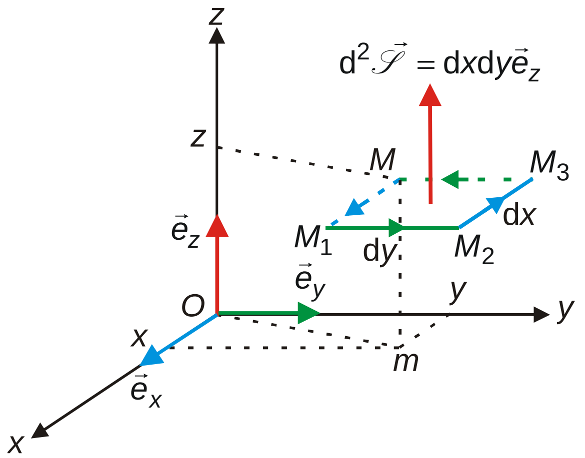
3.2 Rotationnel

Cet opérateur linéaire s'applique à un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$. Donnons d'abord son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{R}^3 \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{rot}}} \mathrm{R}^3 \\ \vec{A} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \end{array} \quad \text{avec } \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_x} \\ \boldsymbol{A_y} \\ \boldsymbol{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{A_z}}{\partial \boldsymbol{y}} - \dfrac{\partial \boldsymbol{A_y}}{\partial \boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{A_x}}{\partial \boldsymbol{z}} - \dfrac{\partial \boldsymbol{A_z}}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{A_y}}{\partial \boldsymbol{x}} - \dfrac{\partial \boldsymbol{A_x}}{\partial \boldsymbol{y}} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).}$$

Remarque : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Pour donner une définition intrinsèque de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$, on calcule la circulation élémentaire de $\vec{A}$ le long d'un contour fermé. Ce contour étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un rectangle de côtés dx et dy.



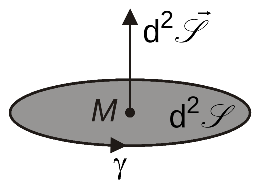
$$\delta^2\mathscr{C} = \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM_1} + \vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} + \vec{A}(M_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_3} + \vec{A}(M_3)\cdot\overrightarrow{M_3M} \quad \text{or} \quad \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM_1} = \vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{MM_1}$$

puisque $\overrightarrow{MM_1} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$ est déjà d'ordre 1 en dx. De même $\vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{A}(M_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$. On a donc $\delta^2\mathscr{C} = \left[\vec{A}(M_1) - \vec{A}(M_2)\right]\cdot \mathrm{d}x\vec{e}_x + \left[\vec{A}(M_2) - \vec{A}(M_3)\right]\cdot \mathrm{d}y\vec{e}_y$

$$\delta^2\mathscr{C} = \left[-\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

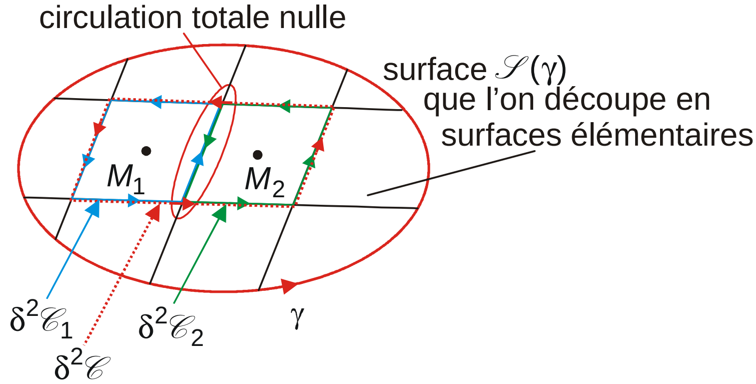
Finalement $\delta^2\mathscr{C} = \left[\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)\cdot\vec{e}_z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$

Cette relation fournit la **définition intrinsèque** de l'opérateur $\overrightarrow{\textbf{rot}}$: soit le champ vectoriel $\vec{A}$ quelconque : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\vec{A}} \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto \vec{A}(M) \end{array}$. On considère un contour élémentaire orienté γ, au voisinage du point M, et $\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ le vecteur surface élémentaire d'une surface quelconque s'appuyant sur le contour. Soit $\delta^2\mathscr{C}$ la circulation de $\vec{A}$ sur ce contour. On a alors : $\boxed{\boldsymbol{\delta^2\mathscr{C} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}}}$.



Théorème de Stokes

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Stokes, en découpant une surface quelconque $\mathscr{S}$ s'appuyant sur un contour fermé γ en surfaces élémentaires. On considère deux de ces surfaces élémentaires voisines (elles possèdent un bout de contour commun) autour de M_1 et M_2.



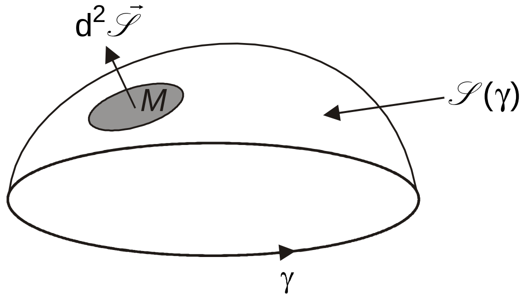
Les contours élémentaires sur lesquels elles s'appuient sont orientés dans le même sens que γ, si bien que la circulation sur le segment commun est comptée avec des signes opposés dans le calcul des circulations élémentaires $\delta^2\mathscr{C}_1$ et $\delta^2\mathscr{C}_2$. La circulation $\delta^2\mathscr{C}$ sur le contour qui entoure les deux surfaces élémentaires vaut donc :

$$\delta^2\mathscr{C} = \delta^2\mathscr{C}_1 + \delta^2\mathscr{C}_2 = (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A})(M_1)\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}_1 + (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A})(M_2)\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}_2 .$$

En sommant les circulations sur tous les contours élémentaires, on obtient le **théorème de Stokes** :

$$\boxed{\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathbf{d}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \overrightarrow{\textbf{rot}}\ \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathbf{d}^2\vec{\mathscr{S}}}$$

la circulation du champ $\vec{A}$ sur un contour fermé γ est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$ sur une surface quelconque $\mathscr{S}(\gamma)$ s'appuyant sur γ.



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel, on trouve après calculs les expressions de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\ \vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\theta\right] - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

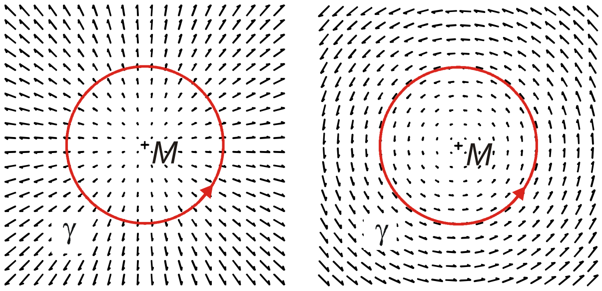
Expression dans un système de coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\ \vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left[A_\varphi \sin\theta\right] - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\varphi\right] \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\theta\right] - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

Interprétation physique de l'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$:

De $\delta^2\mathscr{C} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}$, on déduit que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ permet de quantifier le **caractère tourbillonnaire** d'un champ au voisinage d'un point *M*.

Prenons l'exemple d'un champ localement radial, $\delta^2\mathscr{C} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$, alors que pour un champ orthoradial $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \neq \vec{0}$



$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)(M) = \vec{0}$ $\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)(M) \neq \vec{0}$

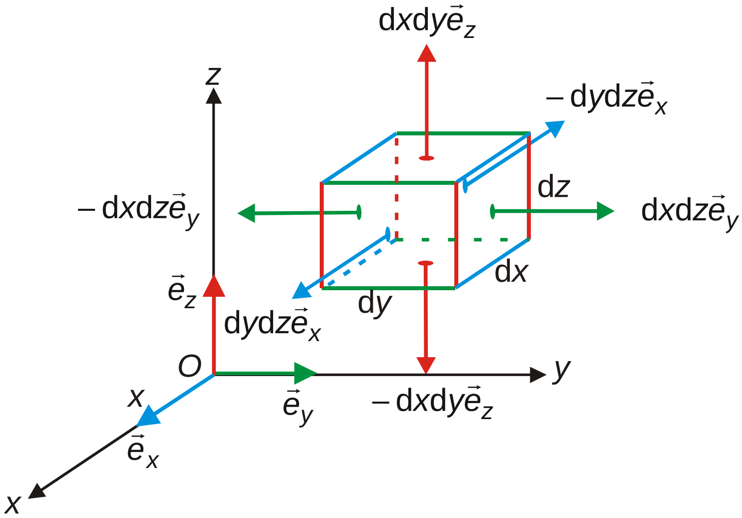
3.3 Divergence

Cet opérateur linéaire s'applique à un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$. Donnons d'abord son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{R} \\ \vec{A} \mapsto \text{div}\vec{A} \end{array} \quad \text{avec } \mathbf{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Remarque : $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

Pour donner une définition intrinsèque de $\text{div}\vec{A}$, on calcule le flux de $\vec{A}$ à travers une surface fermée élémentaire entourant un volume $d^3\mathscr{V}$. Ce volume étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un parallélépipède de côtés d*x*, d*y* et d*z*. On a donc $d^3\mathscr{V} = dxdydz$



$$d^3\Phi = \left[\vec{A}(x+dx) - \vec{A}(x)\right]\cdot dydz\vec{e}_x + \left[\vec{A}(y+dy) - \vec{A}(y)\right]\cdot dxdz\vec{e}_y + \left[\vec{A}(z+dz) - \vec{A}(z)\right]\cdot dxdy\vec{e}_z \text{ soit :}$$

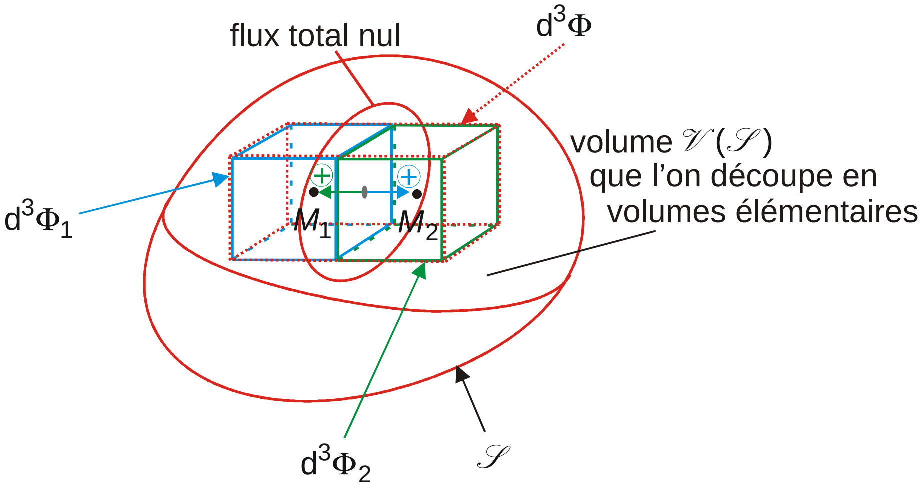
$$d^3\Phi = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x}dx\right]\cdot dydz + \left[\frac{\partial A_y}{\partial y}dy\right]\cdot dxdz + \left[\frac{\partial A_z}{\partial z}dz\right]\cdot dxdy = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]dxdydz$$

Finalement $d^3\Phi = \mathrm{div}\vec{A}\, d^3\mathscr{V}$

Cette relation fournit la **définition intrinsèque** de l'opérateur **div** : soit le champ vectoriel $\vec{A}$ quelconque : $\begin{array}{l} R^3 \xrightarrow{\vec{A}} R^3 \\ M \mapsto \vec{A}(M) \end{array}$. On considère une surface élémentaire fermée entourant le point M. On note $d^3\mathscr{V}$ le volume élémentaire à l'intérieur de cette surface. Soit $d^3\Phi$ la flux de $\vec{A}$ à travers cette surface. On a alors : $\boxed{\mathbf{d^3\Phi = div\vec{A}\, d^3\mathscr{V}}}$.

Théorème de Green-Ostrogradski

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Green-Ostrogradski, en découpant un volume $\mathscr{V}$ à l'intérieur d'une surface fermée $\mathscr{S}$ en volumes élémentaires.



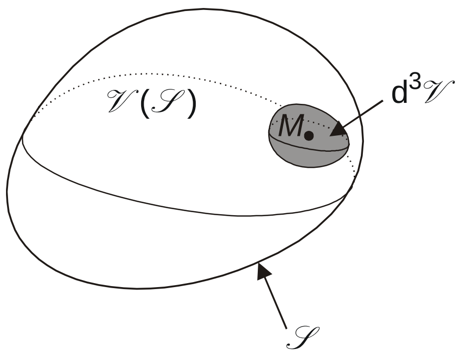
On considère deux de ces volumes élémentaires voisins (ils possèdent une surface commune) autour de M_1 et M_2. Les surfaces élémentaires entourant ces volumes sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur, si bien que le flux à travers la surface commune est compté avec des signes opposés dans le calcul des flux élémentaires $d^3\Phi_1$ et $d^3\Phi_2$. Le flux $d^3\Phi$ à travers la surface qui entoure les deux volumes élémentaires vaut donc :

$$d^3\Phi = d^3\Phi_1 + d^3\Phi_2 = (\mathrm{div}\vec{A})(M_1)d^3\mathscr{V}_1 + (\mathrm{div}\vec{A})(M_2)d^3\mathscr{V}_2$$

En sommant les flux à travers toutes les surfaces élémentaires, on obtient le **théorème de Green-Ostrogradski** :

$$\boxed{\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot d^2\vec{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{V}(\mathscr{S})} \mathrm{div}\vec{A}\, d^3\mathscr{V}}$$

le flux du champ $\vec{A}$ à travers une surface fermée $\mathscr{S}$ est égal à l'intégrale de $\mathrm{div}\vec{A}$ sur le volume $\mathscr{V}(\mathscr{S})$ à l'intérieur de $\mathscr{S}$.



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur divergence, on trouve après calculs les expressions de $\mathrm{div}\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rA_r\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

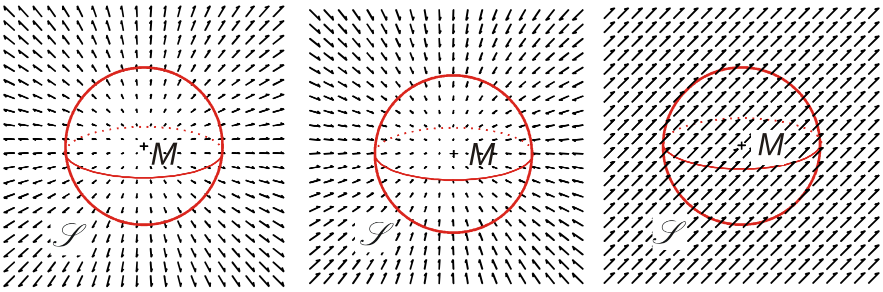
Expression dans un système de coordonnées sphériques :

$$\mathbf{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 A_r\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[A_\theta \sin\theta\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Interprétation physique de l'opérateur div :

De $d^3\Phi = \mathrm{div}\vec{A}\, d^3\mathscr{V}$, on déduit que $\mathrm{div}\vec{A}$ permet de quantifier le **caractère divergent** d'un champ au voisinage d'un point M.

Prenons l'exemple d'un champ localement radial et divergent, $d^3\Phi > 0 \Rightarrow \mathrm{div}\vec{A} > 0$, alors que pour un champ localement radial et convergent $\mathrm{div}\vec{A} < 0$ et que pour un champ localement uniforme $\mathrm{div}\vec{A} = 0$



$(\mathrm{div}\vec{A})(M) > 0$ $(\mathrm{div}\vec{A})(M) < 0$ $(\mathrm{div}\vec{A})(M) = 0$

3.4 Laplacien

Cet opérateur linéaire s'applique à un champ de scalaires $V(M)$ ou à un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$.

- **Appliqué à un champ scalaire** : $\begin{array}{l} \mathbf{R} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{R} \\ \boldsymbol{V} \mapsto \Delta \boldsymbol{V} \end{array}$

Donnons d'abord son **expression en coordonnées cartésiennes :** $\boldsymbol{\Delta V} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Remarque : $\Delta V = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V)$

On a donc $\boxed{\Delta \boldsymbol{V} = \mathbf{div}\left[\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\boldsymbol{V}\right]}$, ce qui constitue la **définition intrinsèque** du laplacien de V.

Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur laplacien scalaire, on trouve les expressions de ΔV dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial V}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \text{ ou } \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

On peut utiliser $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right]=\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rV]$

- **Appliqué à un champ vectoriel** : $\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}^3 \\ \vec{A} \mapsto \Delta\vec{A} \end{array}$

Donnons d'abord son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix}\Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z).}$$

Remarque, on peut trouver également la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$

On en déduit après calcul la définition intrinsèque : $\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\vec{A}\right] - \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}\right]$, qui permet de trouver l'expression de $\Delta\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques et sphériques :

Attention ! $\Delta\vec{A} \neq \begin{pmatrix}\Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_z\end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ et $\Delta\vec{A} \neq \begin{pmatrix}\Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_\varphi\end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

L'expression la plus générale est lourde et très rarement utilisée. En revanche on calcule plus facilement $\Delta\vec{A}$ dans des cas particuliers. Par exemple en coordonnées sphériques, si $\vec{A} = A_\varphi(r,\theta)\vec{e}_\varphi$:

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\vec{A}\right] - \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right] \text{ avec } \text{div}\vec{A} = 0 \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi \sin\theta\right] \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\varphi\right] \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_r(r,\theta) \\ a_\theta(r,\theta) \\ a_\varphi = 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[-\dfrac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_r}{\partial\varphi} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left[ra_\theta\right] - \dfrac{\partial a_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA_\varphi\right] - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi\sin\theta\right]\right] \end{pmatrix}.$$

Finalement, dans ce cas, on a $\Delta\vec{A} = \left\{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA_\varphi\right] + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi\sin\theta\right]\right]\right\}\vec{e}_\varphi$

3.5 Formules utiles

Les formules intrinsèques suivantes peuvent être par exemple démontrées en coordonnées cartésiennes.

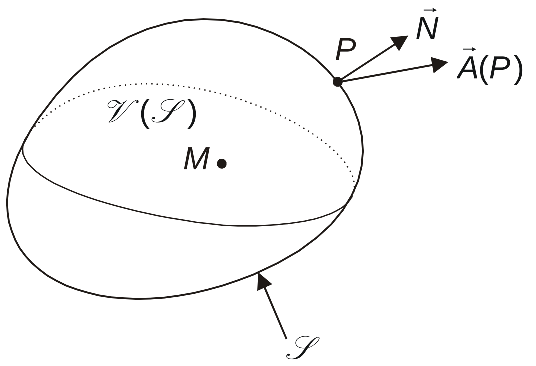
- $\overrightarrow{\textbf{rot}}\left[\overrightarrow{\textbf{grad}}\,\boldsymbol{V}\right] = \vec{\mathbf{0}}$
- $\textbf{div}\left[\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}\right] = \mathbf{0}$
- $\textbf{div}(\boldsymbol{V}\vec{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{V}\textbf{div}\vec{\boldsymbol{A}} + \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\boldsymbol{V} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$
- $\overrightarrow{\textbf{rot}}\,(\boldsymbol{V}\vec{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} + \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\boldsymbol{V} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}$
- $\textbf{div}(\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}) = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}}$
- $\overrightarrow{\textbf{rot}}\left[\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}\right] = \overrightarrow{\textbf{grad}}\left[\textbf{div}\vec{\boldsymbol{A}}\right] - \Delta\vec{\boldsymbol{A}}$ (définition intrinsèque du Laplacien vectoriel)

Deux théorèmes intégraux dérivés respectivement des théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski peuvent être démontrés en utilisant les formules ci-dessus :

- $\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{V} \cdot \mathbf{d}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \iint_{\mathscr{S}(\boldsymbol{\gamma})} \mathbf{d^2}\vec{\mathscr{S}} \wedge \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\boldsymbol{V}$
- $\oiint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{V} \cdot \mathbf{d^2}\vec{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{V}(\mathscr{S})} \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\boldsymbol{V}\ \mathbf{d^3}\mathscr{V}$

3.6 Théorème de Helmholtz

Ce théorème assure l'**unicité** d'un **champ de vecteurs** dont on connaît le **rotationnel et la divergence** en tout point M d'un volume $\mathscr{V}$ contenu dans une surface fermée $\mathscr{S}$, à condition que l'on connaisse les **conditions aux limites** : $\vec{A}(P) \cdot \vec{N}$ en tout point de $\mathscr{S}$, où $\vec{N}$ est la normale extérieure à $\mathscr{S}$ en P.



Pour un **champ scalaire**, le théorème de Helmholtz assure l'**unicité** de $V(M)$ dont on connaît le **laplacien** en tout point M de $\mathscr{V}$ à condition que l'on connaisse les **conditions aux limites** $V(P)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{N}$ en tout point de $\mathscr{S}$.

Ces théorèmes d'unicité fonctionnent également quand le volume $\mathscr{V}$ est infini, à condition de connaître les conditions aux limites en l'infini.

En revanche, il n'y pas unicité quand les conditions aux limites portent sur un domaine doublement connexe (comme un tore, ou un cylindre infini).