Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2020/2021

DL1 du Module AP31 : "Algèbre Quadratique"
à rendre avant 10février 2021 à 23h59 envoyé dans l'adresse Mail
m.addam@uae.ac.ma
N.B. : Je demande tous les étudiants de rédiger leurs compte-rendus sur des feuilles blanche de type A4, ceci pour la bonne visibilité de vos rédactions respectives

---

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Soit f l'endomorphisme de E défini sur les éléments de la base $\mathbb{B}$ par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - 5e_2 - 8e_3 + 6e_4 \\ f(e_2) = 5e_2 + 8e_3 - 4e_4 \\ f(e_3) = 3e_1 + 4e_2 + 2e_3 \\ f(e_4) = 6e_1 + 11e_2 + 8e_3 - 2e_4 \end{cases}$$

1. Montrer que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors l'endomorphisme f est diagonalisable.
2. Déterminer une base de E formée de vecteurs propres de f ; ordonner la base selon l'ordre croissant des valeurs propres de f.
3. Préciser la matrice de passage de la base $\mathbb{B}$ à la nouvelle base obtenue.
4. Que peut-on dire du cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Exercice 2
Soit $U = (u_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice carrée d'ordre n tels que $u_{ij} = 1$ pour tout $1 \le i, j \le n$.

1. (a) Déterminer le noyau et l'image de U.
   (b) En déduire que U est diagonalisable.
   (c) Déterminer le polynôme caractéristique de U
2. Soit $A = aI_n + bU$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) Vérifier que A est diagonalisable.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ une base de E. On définit une application g de E dans E par $g(e_i) = 4f_i$ et $g(f_i) = e_i$ pour tout $1 \le i \le n$.

1. Montrer que g est un endomorphisme de E, puis déterminer la matrice $\mathrm{M}_{\mathbb{B}}(g)$.
2. Déterminer le polynôme minimal de g. L'application g est-elle inversible ?

3. Décomposer E en une somme direct de sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \ldots, E_n$, de dimension 2 et tels que le polynôme minimal de la restriction de g à E_i reste celui de g pour tout $1 \leq i \leq n$.
4. En déduire le polynôme caractéristique de g ainsi qu'une base de vecteurs propres de g. Conclure.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel muni du produit scalaire habituel $(X, Y) = X^T Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où X et Y sont des vecteurs exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{R})$. Montrer que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de M sont orthogonaux deux à deux.
4. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{R})$ est à la fois semblable et congruente à une matrice diagonale.

Exercice 5

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. L'endomorphisme u est représenté par la matrice A relativement à une base $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -17 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels propres associés aux différentes valeurs propres de u. Conclure.
2. Déterminer la réduite de Jordan de la matrice A.
3. En déduire le polynôme minimal de u.

Exercice 6

Soient n un entier naturel non nul et E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degrés $\leq n$ et dont la base canonique $\{1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n\}$. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe un polynôme Q vérifiant $Q(X) = f(P)(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$, pour tout indéterminée X.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. On note par F_p le sous-espace vectoriel de E engendré par les polynômes X^p et X^{n-p} avec $(0 \leq p \leq \frac{n}{2})$.
   (a) Quelle est la dimension de F_p ?(*Justifier*)
   (b) Montrer que E est la somme directe des F_p.
3. Montrer que les sous-espaces F_p sont stables par f et que f est diagonalisable.

4. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de f. Trouver une matrice diagonale représentant f (*discuter suivant la parité de* n)
5. On désigne par D l'opérateur de dérivation dans E défini par :

$$D[P(X)] = P'(X)$$

   (a) Vérifier que D est nilpotent et préciser son indice de nilpotence.

   (b) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice D est une matrice nilpotente de type Jordan.
6. On note par E_p $(0 \leq p \leq \frac{n}{2})$, le sous-espace vectoriel de E engendré par X^p et X^{n-p-1} et E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par X^n. En utilisant ces sous-espaces.

   (a) Vérifier que $D \circ f$ est diagonalisable.

   (b) Donner ses valeurs propres (*discuter suivant la parité de* n).

Exercice 7

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$. On note par I_r la matrice identité d'ordre r.

1. Montrer par un calcul direct que si $A = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, alors les polynômes caractéristiques de AB et BA sont égaux
2. Soit r le rang de A, donc il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $Q^{-1}AP = A' = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, posons $B' = P^{-1}BQ$. Montrer que AB et $A'B'$ ont même polynôme caractéristique.
3. Déduire de ce qui précède que AB et BA ont le même polynôme caractéristique (A et B étant deux matrices carrées arbitraire de même ordre).
4. En utilisant le résultat précédent, montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres ; et que $\mathrm{tr}((AB)^m) = \mathrm{tr}((BA)^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ où $\mathrm{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice carrée M.
5. Trouver deux matrices A et B d'ordre 2 telles que AB et BA ne soient pas semblables.
6. Donner une condition suffisante simple non triviale pour que l'on ait : *AB est diagonalisable si et seulement si BA l'est aussi.*

Exercice 8

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, u un endomorphisme de E et $v = u^2 = u \circ u$.

1. Soit $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

   (a) Vérifier que la matrice de v dans la base $\mathbb{B}$ est triangulaire et préciser les éléments diagonaux de la matrice de v en fonction de ceux de la matrice.

   (b) En déduire le polynôme caractéristique de v en fonction des valeurs propres λ_i de u et de leurs ordres de multiplicité α_i.
2. En déduire que :

   (a) si λ est une valeur propre de u, alors λ^2 est une valeur propre de v.

(b) si μ est une valeur propre de v et si λ est un nombre complexe dont le carré est égal à μ, alors λ ou $-\lambda$ est une valeur propre simple de u.

(c) si 0 est une valeur propre simple de v alors 0 est une valeur propre simple de u.

3. Vérifier que si u est diagonalisable alors v est diagonalisable aussi. Donner un contre-exemple pour la réciproque.

4. Soient $Q_u(X)$ le polynôme minimal de u et $Q_v(X)$ le polynôme minimal de v. Montrer que $Q_u(X)$ divise $Q_v(X^2)$.
   (a) Montrer que si u est un automorphisme, alors $Q_u(X)$ n'est pas divisible par X.
   (b) Déduire de 3. que si u est un automorphisme et si v est diagonalisable, alors u est diagonalisable.
   (c) Montrer que si v est diagonalisable et possède 0 comme valeur propre simple, alors u diagonalisable.

Exercice 9

1. Soient E l'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. On note par $\det_{\mathbb{B}}$ l'application déterminant relativement à une base $\mathbb{B}$ de E. Soient $c_1, c_2, \dots, c_n, u$ des vecteurs dans E où $\dim(E) = n$.
   Montrer qu'il existe a_0 et a_1 dans $\mathbb{K}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
   $$\det_{\mathbb{B}}(c_1 + \lambda u, c_2 + \lambda u, \dots, c_n + \lambda u) = a_0 + a_1\lambda.$$

2. Soient $r_1, r_2, \dots, r_n, a, b$ des scalaires dans $\mathbb{K}$, on pose
   $$A = \begin{bmatrix} r_1 & a & \dots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & r_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   soit $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto \phi(\lambda) = \det_{\mathbb{B}}(A + \lambda U)$ une application.
   (a) Déduire de la question 1. qu'il existe α et β dans $\mathbb{K}$ tels que
   $$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \phi(\lambda) = \alpha + \beta\lambda.$$
   (b) Calculer $\phi(-a)$ et $\phi(-b)$.
   (c) En déduire que si $a \neq b$, alors on a :
   $$\det_{\mathbb{B}}(A) = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a} \quad \text{où} \quad P(X) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - X).$$
   (d) On suppose que $a \neq b$, calculer le polynôme caractéristique de A.
   (e) Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $r_1 = r_2 = \dots = r_n = a = b = 1$.
      i. Dans ce cas, montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme
      $$P_A(X) = (-X)^{n-1}(n - X).$$
      (*Indication : on pourra prendre $a = 1$ et $b = 1 + h$ dans l'expression de la question 5., puis ensuite faire tendre h vers 0*)

ii. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 10

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ deux éléments de $\mathbb{C}^n$. On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}} \quad \text{et} \quad V_k = (1, \alpha^k, \alpha^{2\,k}, \ldots, \alpha^{(n-1)k}) \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

1. Montrer que $D_n = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.
2. Montrer que le système $\{V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
3. Montrer que
   (a) $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} P(\alpha^k)$ où $P(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n$.
   (b) A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.