Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Première année
Année universitaire 2019/2020

Examen de rattrapage du Module AP21 : "Algèbre Linéaire"
à rendre avant le 22 Septembre 2020 à 23h59 envoyé dans l'adresse Mail m.addam@uae.ac.ma
N.B. : Je demande tous les étudiants de rédiger leurs compte-rendus sur des feuilles blanche de type A4, ceci pour la bonne visibilité de vos rédactions respectives

---

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ où $\dim(E) = n$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent avec $f \neq 0_{E,E}$. Pour $x \in E$, on note $n(f,x)$ le plus petit entier k tel que $f^k(x) = 0_E$, soit $n(f,x) = \min\{p,\ f^p(x) = 0_E\}$.
Soit $x \in E$ ($x \neq 0_E$), $k = n(f,x)$.

1. Montrer que le système $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}$ est libre.
2. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$, on a
   $Q(f)(x) = 0_E$ si et seulement si X^k divise Q dans $\mathbb{K}[X]$.
3. On note $\mathcal{C}(x) = \text{Vect}\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(x)$ est stable par f.
   (b) Donner la matrice de la restriction de f à $\mathcal{C}(x)$. (*Indication : considérer à valeurs dans* $\mathcal{C}(x)$ *dans la base* $\mathbb{B} = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}$).
   (c) On pose $m_1 = \sup\{n(f,y),\ y \in E\}$ dans $\mathbb{N}$. Justifier l'existence de m_1 et montrer qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $m_1 = n(f, x_1)$.
4. Dans la suite pour $x \in E$, on note $\overline{x}$ la classe de x modulo le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(x_1)$. On considère l'application

$$\overline{f}\ :\ E/\mathcal{C}(x_1)\ \to\ E/\mathcal{C}(x_1), \quad \overline{x} \mapsto \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)}$$

   (a) Montrer que $\overline{f}$ est bien définie et qu'elle est linéaire.
   (b) Soit $x \in E$, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $\overline{f}^k(\overline{x}) = \overline{f^k(x)}$.
   (c) Montrer $\overline{f}$ est nilpotent.
   (d) Soit $y \in E$, $k = n(\overline{f}, \overline{y})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f^k(y) = Q(f)(x_1)$.
   (e) Montrer que X^k divise Q.
   (f) On pose $Q_1 = Q/X^k$ et $x = y - Q_1(f)(x_1)$. Montrer que $\overline{x} = \overline{y}$ et que $n(\overline{f}, \overline{x}) = n(f, x)$.
   (g) Utiliser ce qui précède pour donner une autre preuve de l'existence d'une base de Jordan pour f.