AP1 : Analyse 2

T.D : Séries Entières

séries N° : 4

A. Moussaid

Exercice 1 :

Etudier la convergence de la série entière :

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)}$ et calculer sa somme.

Sol :

On a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1$ avec $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

Donc le rayon de convergence $R = 1$

. Si $|x| = 1$ alors $|U_n(x)| = \frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

La série est donc convergente sur le segment $[-1,1]$.

- Le terme générale de cette série s'écrit :

$$U_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)} = (-1)^{n+1} x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n+1}$$

Or $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{n}$

D'où $x \cdot S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} - x$

$= \ln(1+x) - x$

Alors $\boxed{S(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}$

Par conséquent : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n(n+1)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) - 1 \quad \text{pour } |x|<1 \text{ et } x \neq 0}$

et la somme de cette série est nulle lorsque $x=0$.

Exercice 2 :

Déterminer la somme de la série : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!}$

Sol : on pose que $a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$

• pour $x \geq 0$, on pose $x = u^2$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{u^{2(n+1)}}{(2n+1)!} = u \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= u \cdot \operatorname{sh} u = \sqrt{x} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{x}$$

• Si $x \leq 0$, on pose $x = -u^2$

Alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{u^{2n+2}}{(2n+1)!} = -u \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= -u \sin u = -\sqrt{-x} \sin \sqrt{-x}$$

La somme $f(x)$ de cette série est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{-x} \sin(\sqrt{-x}), & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sh}(\sqrt{x}), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Déterminer la fonction f somme de la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Sol :

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = 0$

Alors la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ a pour rayon de convergence. $R = +\infty$

On a $f(0) = 1$ car $f(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots + \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$

si $x \neq 0$ et $x > 0$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = ch(\sqrt{x})$

si $x \in \mathbb{R}_-^*$; $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x})$

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 1 & \\ f(x) = ch(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Déterminer la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dont la somme $y = f(x)$ est telle que $f(0) = 1$ et vérifie l'équation différentielle : $y' - y - 2x^2 = 0$

Sol :

Compte tenu de $f(0) = 1$, on a :

$$y = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

En identifiant les termes des deux membres de l'équation différentielle $y' = 2x^2 + y$.

on obtient : $a_1 = 1$, $2a_2 = a_1$

$3a_3 = 2 + a_2$; $4a_4 = a_3$

$5a_5 = a_4$

$\vdots$

$n a_n = a_{n-1}$

D'où $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{5}{6}$, $a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{5}{4\times 2\times 3} = \frac{5}{4!}$

$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{5}{5!}$ . . . . . , $a_n = \frac{5}{4!}$ pour $n \geq 4$

Par suite : $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{5}{n!} x^n$

et le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Exercice 5:

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x(x^2+1)y'' + (x^2-1)y' = 1$$

1°) On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0, $y_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Déterminer les coefficients a_n.

2) En déduire l'expression de y_0.

3) Intégrer directement l'équation (E) et montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions que celles trouvées au 2°).

Sol°:

1°) Soit $y_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la solution de (E) de rayon de convergence R.

Alors pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$y_0' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y_0'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

En reportant dans (E), on obtient :

$$(x^3+x)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right) + (x^2-1)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right) = 1$$

Soit encore.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2)(n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1$$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a_1 = -1 \\ 3a_3 + a_1 = 0 \end{cases}$

pour $n \geq 3$,

$$(n-2)(n-1)a_{n-1} + n(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} - (n+1)a_{n+1} = 0$$

Soit $(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} = 0$

Autrement dit, $a_3 = -1$ et $a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

si $n = 2p$. Alors,

$\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = -\frac{2p-1}{2p+1} a_{2p-1} = \dots = \frac{(-1)^p}{2p+1} a_1$

si $n = 2p-1$ Alors

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = -\frac{2p-2}{2p} a_{2p-2} = \dots = \frac{(-1)^{p-1}}{p} a_2$

2°) Par suite,

$$y_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} + a_2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^{2p}$$

$$y_0 = a_0 \cdot \mathrm{Arctg}\, x + a_2 \ln(1+x^2), \quad \forall a_0, a_2.$$

3°) on pose $u = y'$, L'équation (E) devient:

$$x(x^2+1)u' + (x^2-1)u = 1$$

L'équation homogène associée donne:

$$\frac{u'}{u} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$$

D'où $u = k \cdot \frac{x}{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$

La méthode de la variation de la constante k donne:

$$k' = \frac{1}{x^2} \text{ et } k = -\frac{1}{x} + c$$

Ainsi, $u = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{cx}{1+x^2} = y'$

Par suite, $y = -\mathrm{Arctg}\, x + \frac{c}{2}\ln(1+x^2) + d \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2$

Autrement dit $y = y_0$ car a_0 et a_2 sont quelconques.