E. Chaabelasri
Département Génie Civil

Cycle préparatoire - Semestre 3

Notes de cours:

Mécanique des solides

(Chapitre I: Préliminaires)

Univérsité Mohamed 1ER
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al-Hociema - Maroc

Chapitre I : Préliminaires

I- Vecteurs

Toute grandeur physique qui dépend de l'espace (point d'application, sens et direction) est définie par un vecteur.

Exemple : La vitesse, Déplacement, Force, ….

Selon la connaissance des éléments du vecteur, on distingue les types suivant :

- Vecteur libre : on ne connait pas le point d'application et la direction.
- Vecteur unitaire : son module égale à 1
- Vecteur glissant : le point d'application n'est pas fixé
- Vecteur lié : le point d'application est fixé, l'origine et la direction sont des éléments connus.

1- Vecteur lié :

Est défini par la donnée d'un couple $(A,\vec{u})$, où A est appelé origine ou point d'application et $\vec{u}$ est un vecteur appelé grandeur vectorielle dont les composantes dans une base orthonormée $R=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont :

$$\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{u}=\underset{(i,j,k)}{\left| \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{matrix} \right.}$$

Exemple : Force $\vec{F}$ appliquée en un point donné.

2- Vecteur glissant :

C'est un vecteur défini à un glissement près sur un axe (Δ) appelé support. Le vecteur glissant est donné par : $(\Delta,\vec{u})$

Exemple : Résultante de force de frottement.

3- Opération sur les vecteurs :

- Produit scalaire : le résultat est un scalaire et commutatif $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$
- Produit vectoriel : le résultat est un vecteur et anticommutatif $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\left| \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{matrix} \right. \wedge \left| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} w_x = u_y v_z - u_z v_y \\ w_y = u_z v_x - u_x v_z \\ w_z = u_x v_y - u_y v_x \end{matrix} \right.$$

- Double produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

- Produit mixte

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

II- Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment est un outil mathématique largement utilisé en physique (Moment d'une force, moment cinétique,…)

Le moment d'un vecteur lié $(A, \vec{u})$ en un point O est noté $\vec{M}(O, \vec{u}(A))$ ou $\vec{M}(\vec{u}(A))/_0$ est définit par :

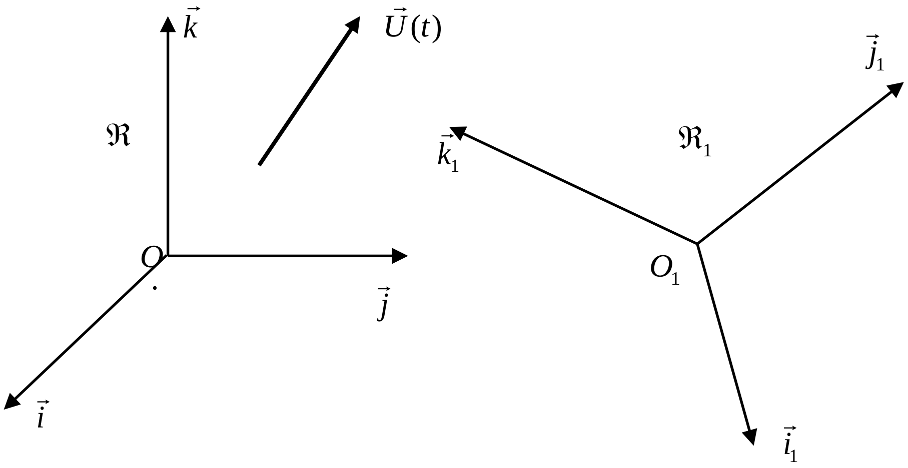
$$\vec{M}(O, \vec{u}(A)) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}$$

Remarque : Pour un vecteur glissant $\vec{u}(M)$, le moment est indépendant du point M.

Preuve : Voir Cours.

III- Dérivation d'un vecteur dans deux repères en mouvement l'un par rapport à l'autre

Soit deux repères orthonormés directs : $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.



Soit $\vec{U}(t)$ un vecteur quelconque dépendant du temps t.

On peut définir ce vecteur par ses composantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

$$\boxed{\vec{U}(t) = \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right._{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}}$$

Ou

$$\boxed{\vec{U}(t) = \left| \begin{array}{l} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{array} \right._{(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)} = x_1(t)\,\vec{i}_1 + y_1(t)\,\vec{j}_1 + z_1(t)\,\vec{k}_1}$$

Comparons maintenant les deux vecteurs dérivés, par rapport au temps, de $\vec{U}(t)$ dans les deus repères $\Re$ *et* $\Re_1$: $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re}$ et $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re_1}$:

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\right]_{\Re} = \overset{\circ}{x}(t)\,\vec{i} + \overset{\circ}{y}(t)\,\vec{j} + \overset{\circ}{z}(t)\,\vec{k}}$$

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re_1} = \frac{d}{dt}\left[x_1(t)\,\vec{i}_1 + y_1(t)\,\vec{j}_1 + z_1(t)\,\vec{k}_1\right]_{\Re_1} = \overset{\circ}{x}_1(t)\,\vec{i}_1 + \overset{\circ}{y}_1(t)\,\vec{j}_1 + \overset{\circ}{z}_1(t)\,\vec{k}_1}$$

On peur, aussi, écrire que :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re} = \frac{d}{dt}\left[x_1(t)\,\vec{i}_1 + y_1(t)\,\vec{j}_1 + z_1(t)\,\vec{k}_1\right]_{\Re} = \overset{\circ}{x}_1(t)\,\vec{i}_1 + x_1(t)\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} +$$

$$\overset{\circ}{y}_1(t)\,\vec{j}_1 + y_1(t)\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} + \overset{\circ}{z}_1(t)\,\vec{k}_1 + z_1(t)\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re_1} + x_1(t)\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} + y_1(t)\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} + z_1(t)\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re}$$

Posons :

$$\vec{A} \quad = \quad x_1(t)\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{d\,t}\right]_{\Re} + y_1(t)\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{d\,t}\right]_{\Re} + z_1(t)\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{d\,t}\right]_{\Re}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{d\,\vec{U}}{d\,t}\right]_{\Re} = \left[\frac{d\,\vec{U}}{d\,t}\right]_{\Re_1} + \quad \vec{A}$$

Développons le vecteur $\vec{A} \quad = \quad x_1(t)\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{d\,t}\right]_{\Re} + y_1(t)\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{d\,t}\right]_{\Re} + z_1(t)\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{d\,t}\right]_{\Re}$

On sait que la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ est une base orthonormée directe.

$$\vec{i}_1.\vec{i}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2.\vec{i}_1.\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} \perp \vec{i}_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} \in Plan\ (\vec{j}_1, \vec{k}_1)$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha_1, \beta_1) \quad ; \quad \left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} = \alpha_1\,\vec{j}_1 + \beta_1\,\vec{k}_1 \qquad (1)$$

$$\vec{j}_1.\vec{j}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2.\vec{j}_1.\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} \perp \vec{j}_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} \in Plan\ (\vec{k}_1, \vec{i}_1)$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha_2, \beta_2) \quad ; \quad \left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} = \alpha_2\,\vec{k}_1 + \beta_2\,\vec{i}_1 \qquad (2)$$

$$\vec{k}_1.\vec{k}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2.\vec{k}_1.\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re} \perp \vec{k}_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re} \in Plan\ (\vec{i}_1, \vec{j}_1)$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha_3, \beta_3) \quad ; \quad \left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re} = \alpha_3\,\vec{i}_1 + \beta_3\,\vec{j}_1 \qquad (3)$$

$$\vec{i}_1.\vec{j}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{i}_1.\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} + \left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re}.\vec{j}_1 = 0 \quad .$$

Et, en tenant compte de (1) et (2) : on obtient : $\beta_2 = -\alpha_1$

$$\vec{i}_1.\vec{k}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{i}_1.\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re} + \left[\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re}.\vec{k}_1 = 0 \quad .$$

Et, en tenant compte de (1) et (3) : on obtient : $\beta_1 = -\alpha_3$

$$\vec{j}_1.\vec{k}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_1.\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re} + \left[\frac{d\,\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re}.\vec{k}_1 = 0 \quad .$$

Et, en tenant compte de (2) et (3) : on obtient : $\beta_3 = -\alpha_2$

Nous avons alors :

$$\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right]_{\Re} = \alpha_1 \vec{j}_1 - \alpha_3 \vec{k}_1 \ ; \ \left[\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right]_{\Re} = \alpha_2 \vec{k}_1 - \alpha_1 \vec{i}_1 \ \text{ et } \ \left[\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right]_{\Re} = \alpha_3 \vec{i}_1 - \alpha_2 \vec{j}_1$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= x_1(t)\left[\alpha_1 \vec{j}_1 - \alpha_3 \vec{k}_1\right] + y_1(t)\left[\alpha_2 \vec{k}_1 - \alpha_1 \vec{i}_1\right] + z_1(t)\left[\alpha_3 \vec{i}_1 - \alpha_2 \vec{j}_1\right] \\ &= \left[-\alpha_1 y_1(t) + \alpha_3 z_1(t)\right].\vec{i}_1 + \left[\alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 z_1(t)\right].\vec{j}_1 + \left[-\alpha_3 x_1(t) + \alpha_2 y_1(t)\right].\vec{k}_1\end{aligned}$$

On constate, que ce vecteur $\vec{A}$ peut s'écrire sous la forme du produit vectoriel d'un vecteur $\vec{R}$ par le vecteur $\vec{U}(t)$:

$$\vec{A} = {}_{(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)}\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}x_1(t)\\ y_1(t)\\ z_1(t)\end{bmatrix} = \vec{R} \wedge \vec{U}(t)$$

On peut dire que : $\exists \quad Un\,vecteur \quad \vec{R} \quad tel\ que$:

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re_1} + \vec{R} \wedge \vec{U}$$

Le vecteur $\vec{R}$ peut être déterminé si on connait **la nature du mouvement** du repère $\Re_1$ par rapport au repère $\Re$.

On l'appelle « Vecteur rotation instantanée du repère $\Re_1$ par rapport au repère $\Re$ ». On le note : $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$ (Il est déterminé si on connait la nature du mouvement de $\Re_1/\Re$: voir plus loin).

Finalement, on a le résultat important suivant :

Soient deux repères orthonormés directs : $\Re$ et $\Re_1$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Soit, alors $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$ le vecteur rotation instantanée du repère $\Re_1$ par rapport au repère $\Re$

$$\boxed{\forall \quad Un\,vecteur \quad \vec{U}(t) \ : \ \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{U}}$$