Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

Ahmed Moussaid

Deuxième Année Cycle Préparatoire
Semestre : S3
Module : Analyse 3

TD: Espaces Vectoriels Normées

December 1, 2020

Plan

1. Exercice 4

2. Exercice 5

Solution Ex 4

(Proposition dans le cours).
L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne est un espace vectoriel normé complet.

Solution Ex 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$.
Alors nous avons vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$.
D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass:(de toute suite bornée de rèels, on peut extraire une sous-suite convergente).

Solution Ex 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$.
Alors nous avons vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$.
D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass:(de toute suite bornée de rèels, on peut extraire une sous-suite convergente).

Solution Ex 4

on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
Or, toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge.
On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
donc, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet.

Solution Ex 4

on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
Or, toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge.
On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
donc, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet.

Solution Ex 4

on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
Or, toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge.
On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
donc, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet.

Solution Ex 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans valeurs $\mathbb{R}$, on définit $f \in E$.

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

1°) Vèrifier que $\|f\|_\infty$, et $\|f\|_1$ sont deux normes sur E.

Solution Ex 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans valeurs $\mathbb{R}$, on définit $f \in E$.

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

1°) Vèrifier que $\|f\|_\infty$, et $\|f\|_1$ sont deux normes sur E.

Solution Ex 5

- pour $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$

Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est bornnée. ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien définie.
Pour tout $f \in E$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty \geq 0$.
D'autre part, Si $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} = 0$, alors pour tout x dans $[0,1]$, $f(x) = 0$, et donc $f = 0$

Solution Ex 5

- pour $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$

Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est bornnée. ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien définie.

Pour tout $f \in E$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty \geq 0$.

D'autre part, Si $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} = 0$, alors pour tout x dans $[0,1]$, $f(x) = 0$, et donc $f = 0$

Solution Ex 5

- pour $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$
Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est bornnée. ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien définie.
Pour tout $f \in E$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty \geq 0$.
D'autre part, Si $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} = 0$, alors pour tout x dans $[0,1]$, $f(x) = 0$, et donc $f = 0$

Solution Ex 5

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et f dans E. Pour tout x de $[0,1]$, on a

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$$

et passant au max,

$$\|\lambda f(x)\|_\infty = |\lambda|\|f(x)\|_\infty$$

Solution Ex 5

- Etudions l'inégalité triangulaire.

Soient f et g deux éléments de E, Pour tout x de $[0,1]$
On a

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$$

Passant au max, on obtient

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

finallement $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$ est une norme sur E.

Solution Ex 5

- Etudions l'inégalité triangulaire.

Soient f et g deux éléments de E, Pour tout x de $[0,1]$
On a
$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$$
Passant au max, on obtient
$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$
finallement $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$ est une norme sur E.

Solution Ex 5

- Etudions l'inégalité triangulaire.

Soient f et g deux éléments de E, Pour tout x de $[0,1]$
On a

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$$

Passant au max, on obtient

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

finallement $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$ est une norme sur E.

Solution Ex 5

- Pour $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ • on a $\|f\|_1 \geq 0$.
• Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si , il s'agit de la fonction nulle.
Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue.
on a donc démontre que $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Solution Ex 5

- Pour $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ • on a $\|f\|_1 \geq 0$.

• Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si , il s'agit de la fonction nulle.

Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue.

on a donc démontre que $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Solution Ex 5

- Pour $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ • on a $\|f\|_1 \geq 0$.

• Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si , il s'agit de la fonction nulle.
Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue.
on a donc démontre que $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Solution Ex 5

- Pour $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ • on a $\|f\|_1 \geq 0$.
• Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si , il s'agit de la fonction nulle.
Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue.
on a donc démontre que $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Solution Ex 5

- D'autre part $\forall x \in [0,1]$

$$\int_0^1 |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|dx$$

donc

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$$

Solution Ex 5

- pour tout $x \in [0,1]$

on a

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$$

d'où

$$\int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx$$

alors

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \qquad \text{inégalité triangulaire}$$

Donc $\|.\|_1$ est une norme.

Solution Ex 5

- pour tout $x \in [0,1]$

on a

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$$

d'où

$$\int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx$$

alors

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \qquad \text{inégalité triangulaire}$$

Donc $\|.\|_1$ est une norme.

Solution Ex 5

2

°)Montere que pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, pouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Solution Ex 5

2

°)Montere que pour tout $f \in E, \quad \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, pouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Solution Ex 5

2°)

• Remarquons que pour chaque x de $[0,1]$, on a

$$|f(x)| \leq \|f(x)\|_\infty$$

on intégre cette inégalité entre 0 et 1, on trouve

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$$

• Pour $f_n(x) = x^n$, on a $\|f_n(x)\|_\infty = 1$ et $\|f_n(x)\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
si les normes étaient équivalentes, il existe une constante $k > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq k\|f\|_1$, pour $f = f_n$
on obtient

$$\|f_n\|_\infty \leq k\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{k}{n+1} \to 0 \quad \text{pour} n \mapsto +\infty$$

contrduction,
alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes

Solution Ex 5

2°)

• Remarquons que pour chaque x de $[0,1]$, on a

$$|f(x)| \leq \|f(x)\|_\infty$$

on intégre cette inégalité entre 0 et 1, on trouve

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$$

• Pour $f_n(x) = x^n$, on a $\|f_n(x)\|_\infty = 1$ et $\|f_n(x)\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
si les normes étaient équivalentes, il existe une constante $k > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq k\|f\|_1$, pour $f = f_n$
on obtient

$$\|f_n\|_\infty \leq k\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{k}{n+1} \to 0 \quad \text{pour} n \mapsto +\infty$$

contrduction,
alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Solution Ex 5

2°)

• Remarquons que pour chaque x de $[0,1]$, on a

$$|f(x)| \leq \|f(x)\|_\infty$$

on intégre cette inégalité entre 0 et 1, on trouve

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$$

• Pour $f_n(x) = x^n$, on a $\|f_n(x)\|_\infty = 1$ et $\|f_n(x)\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
si les normes étaient équivalentes, il existe une constante $k > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq k\|f\|_1$, pour $f = f_n$
on obtient

$$\|f_n\|_\infty \leq k\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{k}{n+1} \to 0 \quad \text{pour} n \mapsto +\infty$$

contrduction,
alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Solution Ex 5

2°)

• Remarquons que pour chaque x de $[0,1]$, on a

$$|f(x)| \leq \|f(x)\|_\infty$$

on intégre cette inégalité entre 0 et 1, on trouve

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$$

• Pour $f_n(x) = x^n$, on a $\|f_n(x)\|_\infty = 1$ et $\|f_n(x)\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
si les normes étaient équivalentes, il existe une constante $k > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq k\|f\|_1$, pour $f = f_n$
on obtient

$$\|f_n\|_\infty \leq k\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{k}{n+1} \to 0 \quad \text{pour} n \mapsto +\infty$$

contrduction,
alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Solution Ex 5

2°)

• Remarquons que pour chaque x de $[0,1]$, on a

$$|f(x)| \leq \|f(x)\|_\infty$$

on intégre cette inégalité entre 0 et 1, on trouve

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$$

• Pour $f_n(x) = x^n$, on a $\|f_n(x)\|_\infty = 1$ et $\|f_n(x)\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
si les normes étaient équivalentes, il existe une constante $k > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq k\|f\|_1$, pour $f = f_n$
on obtient

$$\|f_n\|_\infty \leq k\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{k}{n+1} \to 0 \quad \text{pour} n \mapsto +\infty$$

contrduction,
alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. $\square$