Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2020/2021

DL1 du Module AP31 : "Algèbre Quadratique"
à rendre avant 10février 2021 à 23h59 envoyé dans l'adresse Mail m.addam@uae.ac.ma
N.B. : Je demande tous les étudiants de rédiger leurs compte-rendus sur des feuilles blanche de type A4, ceci pour la bonne visibilité de vos rédactions respectives

---

Exercice 1
On désigne par $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et par f l'endomorphisme de E définie par

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_1 \\ f(e_2) = e_2 + e_3 \\ f(e_3) = -5e_2 - e_3 + e_4 \\ f(e_4) = 12e_2 + e_3 - 3e_4 \end{cases}$$

1. Pour $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$, calculer $f(v)$.
2. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. Calculer l'inverse de f si elle existe.
4. Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit une matrice de Jordan que l'on pricisera.

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$ et $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$ une base de E. On définit une application linéaire de E dans E par :

$$f(v_k) = v_{k+1} \text{ si } k \text{ est impair et } f(v_k) = v_{k-1} \text{ si } k \text{ est pair.}$$

1. Déterminer le polynôme minimal de f et en déduire que f est inversible.
2. Décomposer E en une somme directe de sous-espaces vectoriels de E de dimension 2.
3. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ces sous-espaces propres tels que le polynôme minimal de la restriction de f à E_i reste égale à celui de f. Déterminer le polynôme caractéristique de f ainsi qu'une base de vecteurs propres de f.

Exercice 3
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\widetilde{P}_A(X) = \det(A + XI_n)$$

où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On écrit

$$\widetilde{P}_A(X) = P_0(A)X^n + P_1(A)X^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(A)X + P_n(A)$$

et on rappelle que $P_0(A) = 1$, $P_1(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{Tr}(A)$ et $P_n(A) = \det(A)$.

1. Montrer que l'application tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \mathrm{tr}(A) = P_1(A)$ est linéaire.
2. Dans la suite, on pose $\mathbb{K}' = \mathbb{Q}(\mathbb{K}[X])$ le corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$. Pour $R \in \mathbb{K}'$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on note naturellement $P(R) = \sum_{i=0}^{n} a_i R^i$.
   (a) Montrer que si A est inversible et $B = A^{-1}$, alors on a
   $$\widetilde{P}_B(X) = \frac{1}{\det(A)} X^n \widetilde{P}_A\left(\frac{1}{X}\right).$$
   (b) En déduire que lorsque A est inversible on a
   $$\mathrm{tr}(A^{-1}) \times \det(A) = P_{n-1}(A).$$
3. Pour A fixée, on écrit $A' = I_n - XA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$.
   (a) Montrer que A' est inversible.
   (b) Montrer que $(I_n - XA)(I_n + XA + X^2A^2 + \ldots + X^mA^m) = I_n - X^{m+1}A^{m+1}$.
   (c) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a
   $$\mathrm{tr}((A')^{-1}) = n + X\mathrm{tr}(A) + X^2\mathrm{tr}(A^2) + \ldots + X^m\mathrm{tr}(A^m) + R$$
   où $R = X^{m+1}\frac{P(X)}{Q(X)}$ avec P et Q sont dans $\mathbb{K}[X]$ et $Q(0) \neq 0$.
   (d) Montrer que
   $$\widetilde{P}_{A'}(Y) = (-X)^n \widetilde{P}_A\left(-\frac{1+Y}{X}\right).$$
   (e) En déduire la valeur de $P_{n-1}(A')$.
   (f) Montrer que pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on a
   $$\sum_{\ell=1}^{k} \mathrm{tr}(A^\ell)(-1)^{\ell+1} P_{k-\ell}(A) = k\, P_k(A).$$

Exercice 4

1. Soient E l'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. On note par $\det_{\mathbb{B}}$ l'application déterminant relativement à une base $\mathbb{B}$ de E. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n, u$ des vecteurs dans E où $\dim(E) = n$.
   Montrer qu'il existe a_0 et a_1 dans $\mathbb{K}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
   $$\det\nolimits_{\mathbb{B}}(c_1 + \lambda u, c_2 + \lambda u, \ldots, c_n + \lambda u) = a_0 + a_1\lambda.$$
2. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n, a, b$ des scalaires dans $\mathbb{K}$, on pose
   $$A = \begin{bmatrix} r_1 & a & \ldots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \ldots & b & r_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   soit $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto \phi(\lambda) = \det_{\mathbb{B}}(A + \lambda U)$ une application.

(a) Déduire de la question 1. qu'il existe α et β dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \phi(\lambda) = \alpha + \beta \lambda.$$

(b) Calculer $\phi(-a)$ et $\phi(-b)$.

(c) En déduire que si $a \neq b$, alors on a :

$$\det_{\mathbb{B}}(A) = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a} \quad \text{où} \quad P(X) = \prod_{i=1}^{n} (r_i - X).$$

(d) On suppose que $a \neq b$, calculer le polynôme caractéristique de A.

(e) Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = a = b = 1$.

i. Dans ce cas, montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme

$$P_A(X) = (-X)^{n-1}(n - X).$$

(*Indication : on pourra prendre $a = 1$ et $b = 1 + h$ dans l'expression de la question 5., puis ensuite faire tendre h vers 0*)

ii. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 5

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ deux éléments de $\mathbb{C}^n$. On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}} \quad \text{et} \quad V_k = (1, \alpha^k, \alpha^{2\,k}, \ldots, \alpha^{(n-1)k}) \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

1. Montrer que $D_n = \displaystyle\prod_{i<j} (x_j - x_i)$.
2. Montrer que le système $\{V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
3. Montrer que

   (a) $\det(A) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(\alpha^k)$ où $P(x) = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n$.

   (b) A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.