

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES
APPLIQUEES D' ALHOCEIMA (ENSAH)

Deuxième année préparatoire

Cours

Probabilités et Statistiques Descriptives

Réalisé par Pr. **ABDELHAFID SALMANI**

Année universitaire 2020-2021

Table des matières

1	Notions élémentaires du calcul des probabilités	3
1.1	Généralités sur les ensembles et événements aléatoires	3
1.1.1	Généralités sur les ensembles :	3
1.1.2	Événements aléatoires	5
1.2	Dénombrement :	6
1.2.1	Permutations d'un ensemble fini	6
1.2.2	Modèle du tirage avec remise	6
1.2.3	Modèle du tirage sans remise	7
1.2.4	Modèle du tirage simultané :	7
1.3	Espace probabilisé et calcul des probabilités :	8
1.3.1	Définitions et propriétés	8
1.3.2	Equiprobabilité des événements élémentaires	9
1.4	Probabilité conditionnelle	10
1.5	Indépendance et Indépendance mutuelle	11
1.5.1	Indépendance de deux événements	11
1.5.2	Indépendance de n événements avec $n \geq 2$	11
1.5.3	Formule de la probabilité complète	13
1.6	Formules de Bayes	13

Notions élémentaires du calcul des probabilités

1.1 Généralités sur les ensembles et événements aléatoires

1.1.1 Généralités sur les ensembles :

Définition 1.1.1 - Cardinal

Le cardinal d'un ensemble fini A , noté $\text{card}(A)$, est le nombre d'élément de A .
Par convention, l'ensemble vide \emptyset a un cardinal nul.

Proposition 1.1.1

1. Si A et B sont des ensembles finis, l'ensemble des parties de A , $\mathcal{P}(A)$ et le produit cartésien $A \times B$ sont des ensembles finis, de cardinal respectifs :

$$\text{card}\mathcal{P}(A) = 2^{\text{card}(A)}$$

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

2. Le cardinal du complémentaire d'un sous ensemble A d'un ensemble Ω se déduit du cardinal de A et de Ω :

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$$

3. Si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble fini alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Remarque 1.1.1

Le cardinal de la réunion de deux sous-ensembles disjoints est la somme des cardinaux :
 $A \cap B = \emptyset \implies \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Définition 1.1.2 - Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'un sous ensemble A d'un ensemble Ω est la fonction $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Proposition 1.1.2

1. La fonction caractéristique de l'intersection de deux sous ensembles A et B d'un ensemble Ω est le produit des fonctions caractéristiques :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

2. La fonction caractéristique du complémentaire d'un sous ensemble A d'un ensemble Ω est le complémentaire de la fonction caractéristique :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega).$$

3. Si Ω est un ensemble fini, le cardinal de A se calcule à partir de la fonction caractéristique :

$$\text{card}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

Theorème 1.1.1 - Formule du crible

Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont n sous ensembles d'un ensemble fini Ω , le cardinal de la réunion se déduit des cardinaux des intersections finis par la formule du crible :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{J \subset [1,n], \text{card}(J)=k} \text{card}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)}_{C_n^k \text{ termes}}$$

Remarque 1.1.2

La formule du crible peut s'écrire sous forme développée :

- lorsque $n=2$:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

- lorsque $n=3$:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

- En général :

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{card}(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card}\left(\bigcap_{1 \leq j \leq k} A_{i_j}\right) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+1} \text{card}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card}\left(\bigcap_{1 \leq j \leq k} A_{i_j}\right) \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.1 - Réunion d'ensembles disjoints

Le cardinal de la réunion de sous ensembles deux à deux disjoints est la somme des cardinaux :

$$(\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset) \implies \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

1.1.2 Événements aléatoires

L'étude d'un phénomène aléatoire commence par la description de l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple 1

Expérience 1 :

On jette un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le numéro apparu sur la face supérieure. On obtient un nombre $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

$\omega \in \Omega$ est appelé une réalisation ou une "épreuve".

$A \subset \Omega$ est appelé un événement.

$A = \text{"le nombre obtenu est pair"} , A \text{ est réalisé} \iff \omega \in \{2, 4, 6\}$.

Expérience 2 :

Soit un jeu de dominos (chacun des dominos porte deux nombres de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ éventuellement identiques).

On tire au hasard un domino. On obtient une paire $\{x, y\} \in \Omega = \{\{x, y\} : x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}\}$ $\{x, y\}$ est une réalisation ou une épreuve.

$A \subset \Omega$ est appelé un événement.

$A = \text{l'événement "la somme des deux nombres obtenus est supérieure ou égale à 8"}$

$A = \{\{x, y\} / x + y \geq 8\}$

$= \{\{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 6\}\}$

$A \text{ est réalisé} \iff \{x, y\} \in A$.

Exemple 2

N°	Expérience	Ensemble de résultats possibles
1	Jeter un dé et relever le nombre qui est sur sa face supérieure	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2	Jeter une pièce de monnaie	$\Omega = \{pile; face\} = \{P; F\}$
3	Compter le nombre de personnes entrant dans un magasin entre 8h 30 et 22h	$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$
4	Jeter un dé deux fois de suite	$\Omega = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); \dots; (1, 6); (2, 1); \dots; (6, 6)\}$
5	Jeter une pièce de monnaie trois fois de suite	$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$
6	Observer la durée de vie d'une ampoule électrique	$\Omega = \mathbb{R}^+$

Les sous-ensembles de Ω sont appelés événements. On distingue les événements simples ou événements élémentaires qui sont constitués d'un seul élément (autrement dit, un singleton), des événements composés.

Exemple 3

Dans l'expérience $N^\circ 4$ de l'exemple 2 :

$A = \{(1, 2)\}$ est un événement simple.

$B = \{(1, 2); (1, 4); (5, 3)\}$ est un événement composé.

$C = \{\text{la somme des points obtenus est égale à } 4\}$. Il est clair que $C = \{(1, 3); (2, 2); (3, 1)\}$ est un événement composé.

1.2 Dénombrement :

1.2.1 Permutations d'un ensemble fini

Définition 1.2.1 - Permutation

Une permutation d'un ensemble fini Ω est une bijection de Ω dans Ω .

Theorème 1.2.1 - Dénombrement des permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble Ω à n éléments est le nombre noté $n!$ (factorielle n) :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

Démonstration :

Une permutation σ d'un ensemble à n éléments ω_i , numérotés de 1 à n est caractérisée par les images successives de ses éléments :

1. Il y a n possibilités pour l'image de ω_1 ,
2. une fois fixée l'image de ω_1 , il y a $n - 1$ possibilités pour l'image de ω_2 ,
3. puis $n - 2$ possibilités pour celle de ω_3 , et ainsi de suite

Le nombre total de possibilités est donc $n \times (n - 1) \times \dots \times 1$

Exemple 4

Le nombre de façons de trier un jeu de 32 cartes est le nombre de permutations d'un ensemble à 32 éléments, c'est à dire $32!$.

1.2.2 Modèle du tirage avec remise

Le tirage avec remise consiste à réaliser le tirage successif de p éléments d'un ensemble Ω , en remettant l'élément tiré à l'issue de chaque tirage. Le résultat est la liste ordonnée des éléments tirés, successivement (dans laquelle un élément donné peut éventuellement apparaître plusieurs fois)

Définition 1.2.2 - Liste(avec répétition)

Soit Ω un ensemble fini à n éléments. Une p -liste à valeur dans Ω est un p -uplet (x_1, x_2, \dots, x_p) d'éléments de Ω .

Theorème 1.2.2 - Dénombrement des p -listes

Si $A_p(\Omega)$ est l'ensemble des p -listes à valeur dans un ensemble Ω à n éléments :

$$\text{card}(A_p(\Omega)) = n^p$$

Démonstration :

$$A_p(\Omega) = \Omega^p = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_{p \text{ fois}}$$

Donc
$$\text{card}(A_p(\Omega)) = \text{card}(\Omega) \times \text{card}(\Omega) \times \dots \times \text{card}(\Omega) = n^p$$

Exemple 5

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On effectue 5 tirages successifs avec remise et on note les numéros obtenus. Le nombre totale de tirages possibles est le nombre de 5-listes à valeur dans $\{1, 2, \dots, 10\}$, c'est à dire 10^5 .

1.2.3 Modèle du tirage sans remise

Le tirage sans remise consiste à réaliser p tirages successif d'éléments d'un ensemble Ω , sans remettre l'élément tiré à l'issue de chaque tirage. Le résultat est la liste ordonnée des éléments tirés successivement (dans laquelle un élément donné ne peut pas apparaître plus d'une fois) :

Définition 1.2.3 - Liste sans répétition

Une p -liste sans répétition à valeur dans un ensemble Ω est un p -uplet (x_1, x_2, \dots, x_p) d'éléments de Ω deux à deux distincts. On parle aussi d'arrangement à n éléments est :

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Remarque 1.2.1

-Dénombrement des injections entre ensemble finis

A_n^p est le nombre d'injections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments. En effet, si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ est un ensemble à p éléments et $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ un ensemble à n éléments, on peut associer à toute injection $\sigma : A \longrightarrow B$ la p -listes des images des éléments de A : $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p))$.

Démonstration :

Lorsque l'on réalise un tirage sans répétition, on a n choix possibles pour le premier tirage, $n-1$ choix possibles pour le deuxième tirage et ainsi de suite, soit :

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$$

Si $p \leq n$, on en déduit $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Si $p \geq n+1$, l'un des termes du produit est nul, donc $A_n^p = 0$.

Exemple 6

20 athlètes s'affrontent lors d'une compétition. On suppose qu'il ne peut pas y avoir d'ex-aquo. Le nombre de podiums possibles est le nombre de 3-listes sans répétition dans l'ensemble des 20 athlètes : il y a donc A_{20}^3 podiums possibles.

1.2.4 Modèle du tirage simultané :

Le tirage simultané consiste à tirer simultanément k éléments d'un ensemble Ω . Le résultat est une partie à k éléments de l'ensemble Ω :

Définition 1.2.4 - Coefficients binomiaux

Soient k et n deux entiers. Le coefficient binomial $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Proposition 1.2.1 - Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux vérifient :

1. Complémentaire :

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

2. Formule de Pascal :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

3. Identité de Van der Monde :

$$\sum_{p=0}^k C_n^p C_m^{k-p} = C_{n+m}^k$$

1.3 Espace probabilisé et calcul des probabilités :

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3.1 - Tribu

Soit Ω un ensemble et \mathcal{T} un ensemble de parties de Ω . \mathcal{T} est une tribu de Ω si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) $\Omega \in \mathcal{T}$.

2) Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$ où \bar{A} est le complémentaire de A dans Ω .

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de \mathcal{T} , alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

Les éléments de \mathcal{T} sont appelés événements. En particulier pour tout $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé élémentaire.

Exemple 7

L'ensemble des parties de Ω est une tribu de Ω . C'est la plus grande tribu que l'on peut construire sur Ω . Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard un objet sur une ligne de conditionnement sur laquelle circulent trois types d'objets différents : a, b, c . L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{a, b, c\}$ et l'ensemble des parties de Ω , $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$ est une tribu de Ω .

Exemple 8

Si $A \subset \Omega$, alors $\{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ est une tribu de Ω .

Dans de nombreuses applications, Ω est \mathbb{R} . Dans ce cas, nous ne choisissons pas l'ensemble des parties de $\Omega = \mathbb{R}$ comme tribu. En effet, cet ensemble de parties est beaucoup trop grand pour y définir une probabilité \mathbb{P} . On utilisera la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de \mathbb{R} , c'est à dire la plus petite tribu contenant tous les intervalles de \mathbb{R} . Cette tribu est déjà grande et largement suffisante pour les applications pratiques.

Définition 1.3.2 - Probabilité

Soient Ω un ensemble et \mathcal{T} une tribu de Ω . Une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0; +\infty[$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

3. σ -additivité :

Pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements de \mathcal{T} incompatibles deux à deux (c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Définition 1.3.3 - Espace probabilisé

Soient Ω un ensemble, \mathcal{T} une tribu et $\mathbb{P} : \mathcal{T} \longrightarrow [0; +\infty[$ une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) .

le couple (Ω, \mathcal{T}) est appelé un espace probabilisable et le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé un espace probabilisé.

Proposition 1.3.1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2$
 - a. $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. D'où $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
 - b. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. $\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{T}$ on a, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_i)$

Démonstration :

1. A et \bar{A} forment une réunion disjointe : $A \cup \bar{A} = \Omega$ donc $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$.
2. $\emptyset = \bar{\Omega}$ donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$.
3. a. Soit $A \subset B$. Alors on a la réunion disjointe $B = A \cup (B \cap \bar{A})$
donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$.
Comme $\mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \geq 0$, on a $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
En prenant $B = \Omega$, on obtient l'encadrement voulu.
- b. D'une part $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$ donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$.
D'autre part $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$
Donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$, d'où le résultat.

1.3.2 Equiprobabilité des événements élémentaires

Considérons $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On note $\Omega' = \{E_i, 1 \leq i \leq n\}$ une partition de Ω en événements élémentaires.

Définition 1.3.4

On dit qu'il y a équiprobabilité des événements si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_j)$$

Proposition 1.3.1

1. S'il y a équiprobabilité des événements élémentaires, alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{n} \text{ où } n = \text{card}(\Omega').$$

2. Si A est un événement composé : $A = \bigcup_{i=1}^m E_i$, alors $\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega')}$

Démonstration :

$$1. \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i) = n\mathbb{P}(E_1) \text{ donc } \mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{n}$$

$$2. \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_i) = \frac{m}{n}. \text{ Alors pour un événement } A \text{ de cardinal } m :$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemple 9

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini, les ω_i étant distincts 2 à 2, la probabilité uniforme sur Ω est définie en posant $p_i = \frac{1}{n}$.

Exemple 10

On jette deux dés de couleurs différentes. On note i le résultat du premier dé et j du second dé.

On a donc $\Omega = \{(i, j) / 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6\}$

$\text{Card}(\Omega) = 36$.

On munit l'ensemble Ω de la probabilité uniforme, $\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36}$.

On s'intéresse à la probabilité de la somme $i + j$ des deux dés.

Soit l'événement $A_k = \{(i, j) \in \Omega; i + j = k\}; k \in \{2, 3, \dots, 12\}$

$$\mathbb{P}(\{A_2\}) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(\{A_3\}) = \mathbb{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\mathbb{P}(\{A_4\}) = \mathbb{P}(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\mathbb{P}(\{A_{12}\}) = \mathbb{P}(\{(6, 6)\}) = \frac{1}{36}$$

1.4 Probabilité conditionnelle

Dans la pratique, il est très souvent utile de savoir calculer la probabilité d'un événement A , conditionnellement à ou sachant l'événement B . Par exemple, dans un jeu de dé à 6 faces, quelle est la probabilité que le résultat soit 6 sachant que ce résultat est pair? Dans cette question, on cherche donc à calculer la probabilité de l'événement $A = \{6\}$ conditionnellement à l'événement $B = \{2, 4, 6\}$. Comme il y a équiprobabilité des tirages et qu'il n'y a qu'une seule chance sur 3 de tirer 6 parmi $\{2, 4, 6\}$, l'intuition nous dit que la probabilité conditionnelle de A sachant B est $1/3$. La définition générale qui permet de retrouver ce résultat est l'axiome de Bayes suivant

Définition 1.4.1 Probabilité conditionnelle

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et un événement A tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Pour tout $B \in \mathcal{T}$, on définit la probabilité conditionnelle de B sachant A , noté $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B/A)$, par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \quad [\text{Axiome de Bayes}]$$

Remarque 1.4.1

-L'application \mathbb{P}_A définit un nouvel espace probabilisé : $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_A)$.

-On peut aussi considérer une nouvelle tribu \mathcal{T}_A , la tribu-trace sur A constitué des événements $B \cap A$ où $B \in \mathcal{T}$.

On a ainsi un autre espace probabilisé : $(A, \mathcal{T}_A, \mathbb{P}_A)$.

1.5 Indépendance et Indépendance mutuelle

1.5.1 Indépendance de deux événements

Définition 1.5.1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \neq 0$.

On dit que A et B sont \mathbb{P} -indépendants lorsque $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A/\overline{B})$.

Savoir que B est vrai, ou que \overline{B} est vrai, ne modifie pas la probabilité que A soit vrai.

Proposition 1.5.1

A et B sont deux événements \mathbb{P} -indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Démonstration :

$\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2$ on a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B/\overline{A}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(\overline{A}))\mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B/\overline{A}) \\ &= \mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\overline{A})[\mathbb{P}(B/\overline{A}) - \mathbb{P}(B/A)]\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)\right) &\iff \left(\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\right) \\ &\iff \left(\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B/\overline{A})\right)\end{aligned}$$

et de même en échangeant les rôles de A et B .

Proposition 1.5.1

Si A et B sont des événements \mathbb{P} -indépendants, alors \overline{A} et B , A et \overline{B} , \overline{A} et \overline{B} sont aussi \mathbb{P} -indépendants.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que si A et B sont \mathbb{P} -indépendants, alors A et \overline{B} sont \mathbb{P} -indépendants :

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

1.5.2 Indépendance de n événements avec $n \geq 2$

Définition 1.5.2

Soient A, B et C 3 événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Ils sont dits \mathbb{P} - mutuellement indépendants si et seulement si :

- ils sont 2 à 2 \mathbb{P} - indépendants
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

Pour $n = 3$, l'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

Généralisation :

n événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont dit \mathbb{P} - mutuellement indépendants si et seulement si pour toute

famille finie $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$, avec $\text{card}(K) \geq 2$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) = \prod_{i \in K} \mathbb{P}(A_i)$.

Pour $n \geq 3$, l'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

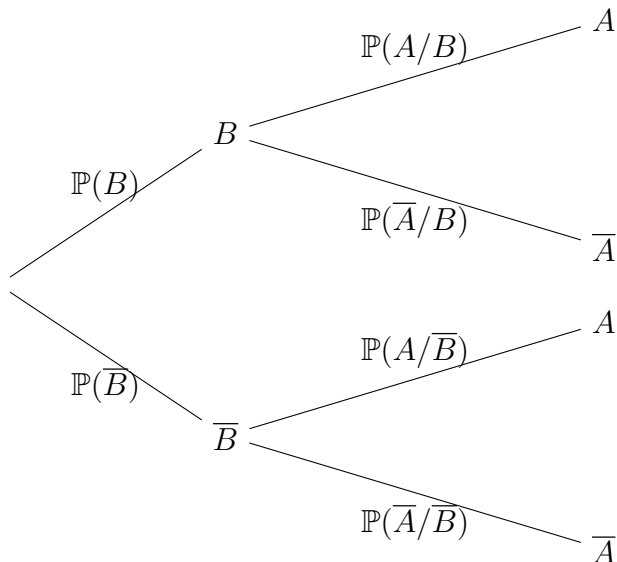
Exemple 11

Une fabrique produit des articles, avec une probabilité globale de 4% qu'ils soient défectueux. Une procédé de contrôle rapide mais imparfait, conduit à mettre au rebut les articles corrects avec une probabilité de 2% et à accepter des articles défectueux avec une probabilité de 5%. Quelle est la probabilité qu'un article pris au hasard soit accepté ?

Pour un article, on distingue les événements :

- B il est bon ou correct
- \bar{B} il est défectueux
- A il est accepté au contrôle
- \bar{A} il est refusé

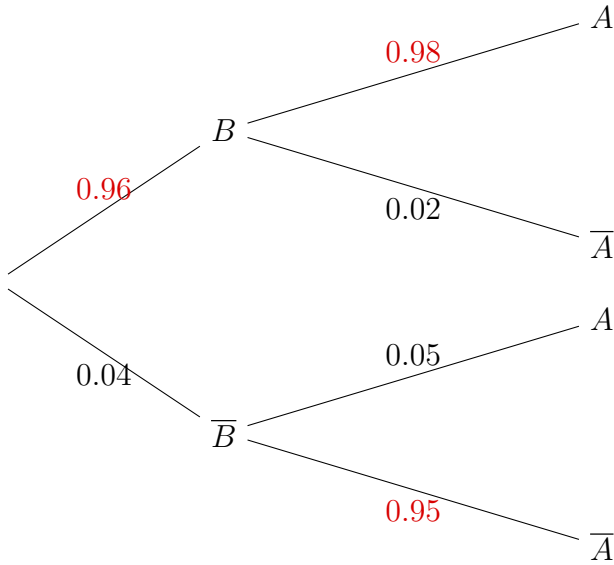
Arbre des causes : on représente tous les cas possibles



Données : on sait que

- $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0.04$
- $\mathbb{P}(\bar{A}/B) = 0.02$
- $\mathbb{P}(A/\bar{B}) = 0.05$

Arbre des causes : on représente tous les cas possibles



On a $\Omega = B \cup \bar{B}$ donc $A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

$$\begin{aligned} D'o\grave{u} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \\ &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A/B) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A/\bar{B}) \\ &= 0.96 \times 0.98 + 0.04 \times 0.05 = 0.9458. \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{P}(A) = 0.9428$.

1.5.3 Formule de la probabilité complète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini

Définition 1.5.3

Soient $n \geq 2$, n événements $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ de probabilités non nulles forment un système complet d'événements si et seulement si constituent une partition de Ω .

Ω est ainsi la réunion disjointe de ces événements : $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

Soit un système complet d'événements $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$.

Soit A un événement de \mathcal{T} , on a

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n) \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n) \\ &= \mathbb{P}(A/B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A/B_n)\mathbb{P}(B_n) \end{aligned}$$

Theorème 1.5.1 - Formule de la probabilité complète

On suppose que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$. Si $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements, pour tout événement A on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A/B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

1.6 Formules de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Theorème 1.6.1 - Formule de Bayes, cas simple

Si A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On a aussi : $\mathbb{P}(A/B).\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A).\mathbb{P}(A)$.

C'est un changement de point de vue : on passe de probabilités "sachant B ", à des probabilités "sachant A ".

Exemple 12

1) Exemple du contrôle de qualité :

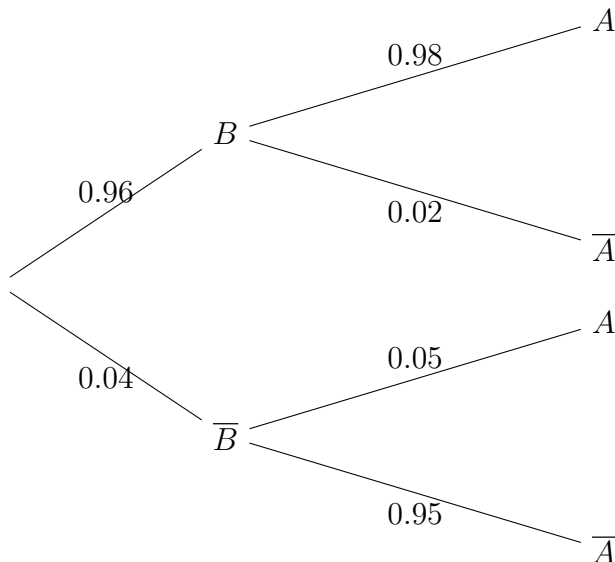
Pour un article, on a distingué les événements :

- B il est bon ou correct

- \bar{B} il est défectueux

- A il est accepté au contrôle

- \bar{A} il est refusé



a) Risque de première espèce :

Quelle est la probabilité pour qu'un article accepté par ce contrôle rapide soit en réalité défectueux ?

$$\mathbb{P}(\bar{B}/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.04 \times 0.05}{0.9428} = 0.0021$$

C'est le risque client.

b) Risque de deuxième espèce : Quelle est la probabilité pour qu'un article soit bon, sachant qu'il a été refusé ?

$$\mathbb{P}(B/\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbb{P}(\bar{A}/B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{0.96 \times 0.02}{0.0572} = 0.0336$$

C'est le risque vendeur.

2) Exemple d'un test :

Une population est atteinte par un virus. On dispose d'un test.

Pour un individu, on distingue les événements :

- V il est porteur du virus

- \bar{V} il n'est pas porteur du virus

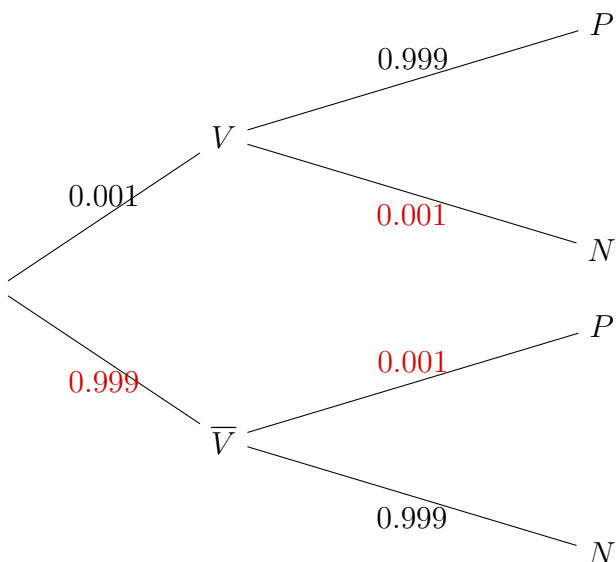
- P son test est positif
- N son test est négatif

On envisage différentes situations selon :

- La probabilité (proportion) qu'une personne soit porteur du virus : $\mathbb{P}(V)$
- La probabilité qu'un test soit positif pour un porteur du virus : $\mathbb{P}(P/V)$
- La probabilité qu'un test soit négatif pour un non-porteur du virus : $\mathbb{P}(N/\bar{V})$

1^{er} cas : Les données sont :

- $\mathbb{P}(V) = 0.001$
- $\mathbb{P}(P/V) = 0.999$
- $\mathbb{P}(N/\bar{V}) = 0.999$



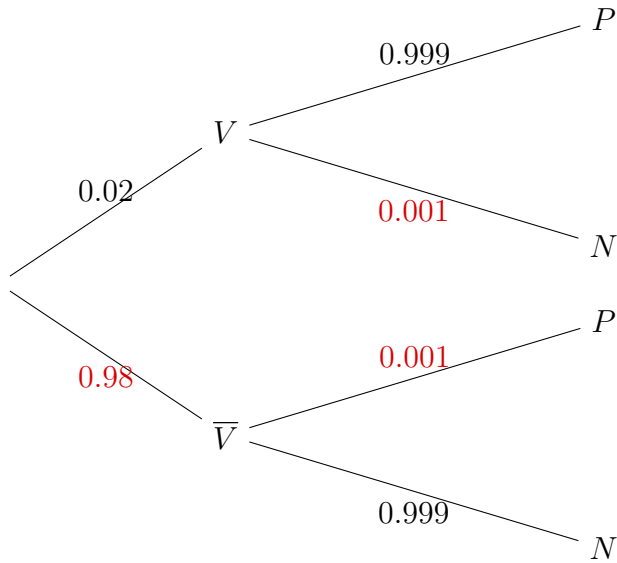
$\mathbb{P}(V/P) = \frac{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P)}$ est la probabilité d'être porteur du virus, sachant que le test est positif.

$$\mathbb{P}(V/P) = \frac{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(P/\bar{V}) \times \mathbb{P}(\bar{V})}$$

$$= \frac{0.999 \times 0.001}{0.999 \times 0.001 + 0.001 \times 0.999} = \frac{1}{2}$$

2^{me} cas :

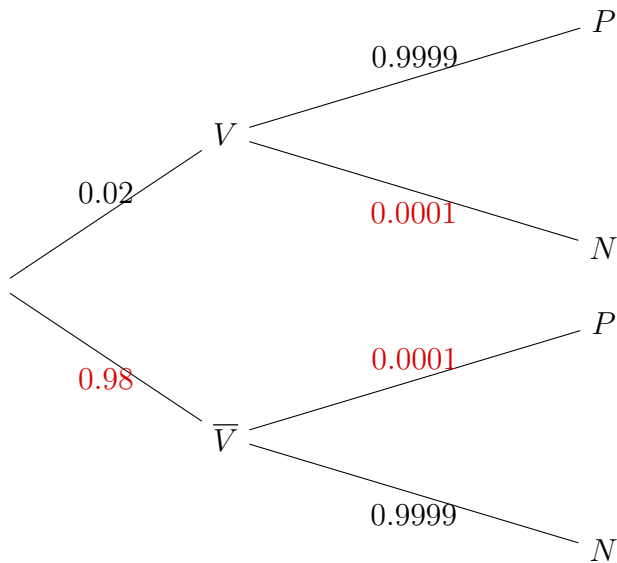
- $\mathbb{P}(V) = 0.02$
- $\mathbb{P}(P/V) = 0.999$
- $\mathbb{P}(N/\bar{V}) = 0.999$



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V/P) &= \frac{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P)} \\ &= \frac{0.02 \times 0.999}{0.02 \times 0.999 + 0.98 \times 0.001} \approx 0.953\end{aligned}$$

3^{me} cas :

- $\mathbb{P}(V) = 0.02$
- $\mathbb{P}(P/V) = 0.9999$
- $\mathbb{P}(N/\bar{V}) = 0.9999$



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V/P) &= \frac{\mathbb{P}(P/V) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(P)} \\ &= \frac{0.02 \times 0.9999}{0.02 \times 0.9999 + 0.98 \times 0.0001} \approx 0.995\end{aligned}$$

Theorème 1.6.2 - Formule de Bayes, cas général

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et un entier $n \geq 1$. Si $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements, avec $\forall i, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$, alors, pour A tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \mathbb{P}(B_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B_j) \times \mathbb{P}(B_j)}{\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A/B_i) \times \mathbb{P}(B_i)}$$