Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al Hoceima

UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI

# Statique des fluides

**Pr. Hajar IDDER**

***2ème Année Cycle Préparatoire***

***Année universitaire: 2020/2021***

# Chapitre 1

Introduction à la statique des fluides

# 1. Introduction à la mécanique des fluides

- La mécanique des fluides
  - Statique des fluides
  - Dynamique des fluides

Les branches liées à la mécanique des fluides l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, etc…

# 2. Définition

→ Un fluide peut être considéré comme étant un milieu continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler,

→ le fluide est un corps sans forme propre,

→ Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. (La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui définit le frottement interne des fluides).

**Fluides "newtoniens"**

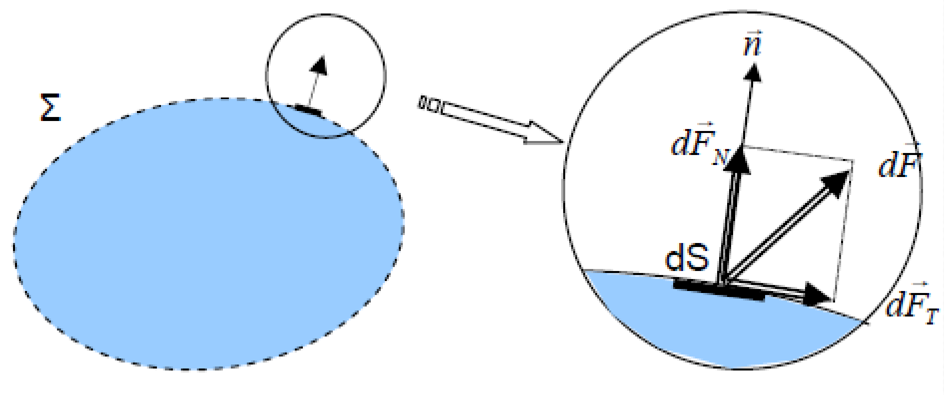
- Ils ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température.
- Comme l'eau, l'air et la plupart des gaz

**Fluides "non newtoniens"**

- Ils ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent.
- (le sang, les gels, les boues, les pâtes, …)

## a) Fluide parfait

Un fluide parfait est un fluide à l'intérieur duquel les forces de cohésion sont nulles.
L'eau est plus proche de la définition d'un fluide parfait que l'huile.




$d\vec{f}$: la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale $\vec{n}$ entre le fluide et le milieu extérieur. On Décompose $d\vec{f}$ en deux composantes: $d\vec{f}$N et $d\vec{f}$T.

Un fluide est dit parfait si $d\vec{f}$T est nulle. Autrement dit, la force $d\vec{f}$ est normale à l'élément de surface dS.

## b) Fluide réel

Pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits.

## c) Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

## d) Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles.
Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

# 3. CARACTERISTIQUES PHYSIQUES

### 3.1 Masse volumique

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

où :
$\rho$ : Masse volumique en $(\mathrm{kg}/m^3)$,
m : masse en (kg),
V : volume en $(m^3)$.

Exemples :

| Fluide | Masse volumique ϱ (kg/m3) | Type de fluide |
|---|---|---|
| Benzène | $0{,}888.\ 10^3$ | incompressible |
| Chloroforme | $1{,}489.\ 10^3$ | |
| Eau | $10^3$ | |
| Huile d'olive | $0{,}918.\ 10^3$ | |
| Mercure | $13{,}546.\ 10^3$ | |
| Air | $0{,}001205.\ 10^3$ | Compressible |
| Hydrogène | $0{,}000085.\ 10^3$ | |
| Méthane | $0{,}000717.\ 10^3$ | |

### 3.2 Poids volumique

$$\boxed{\varpi = \frac{g.m}{V} = \rho.\mathrm{g}}$$

$\varpi$ : Poids volumique en $(\mathrm{N}/m^3)$.
m : masse en (kg),
g : accélération de la pesanteur en $(\mathrm{m}/s^2)$,
V : volume en $(m^3)$.

### 3.3 Densité

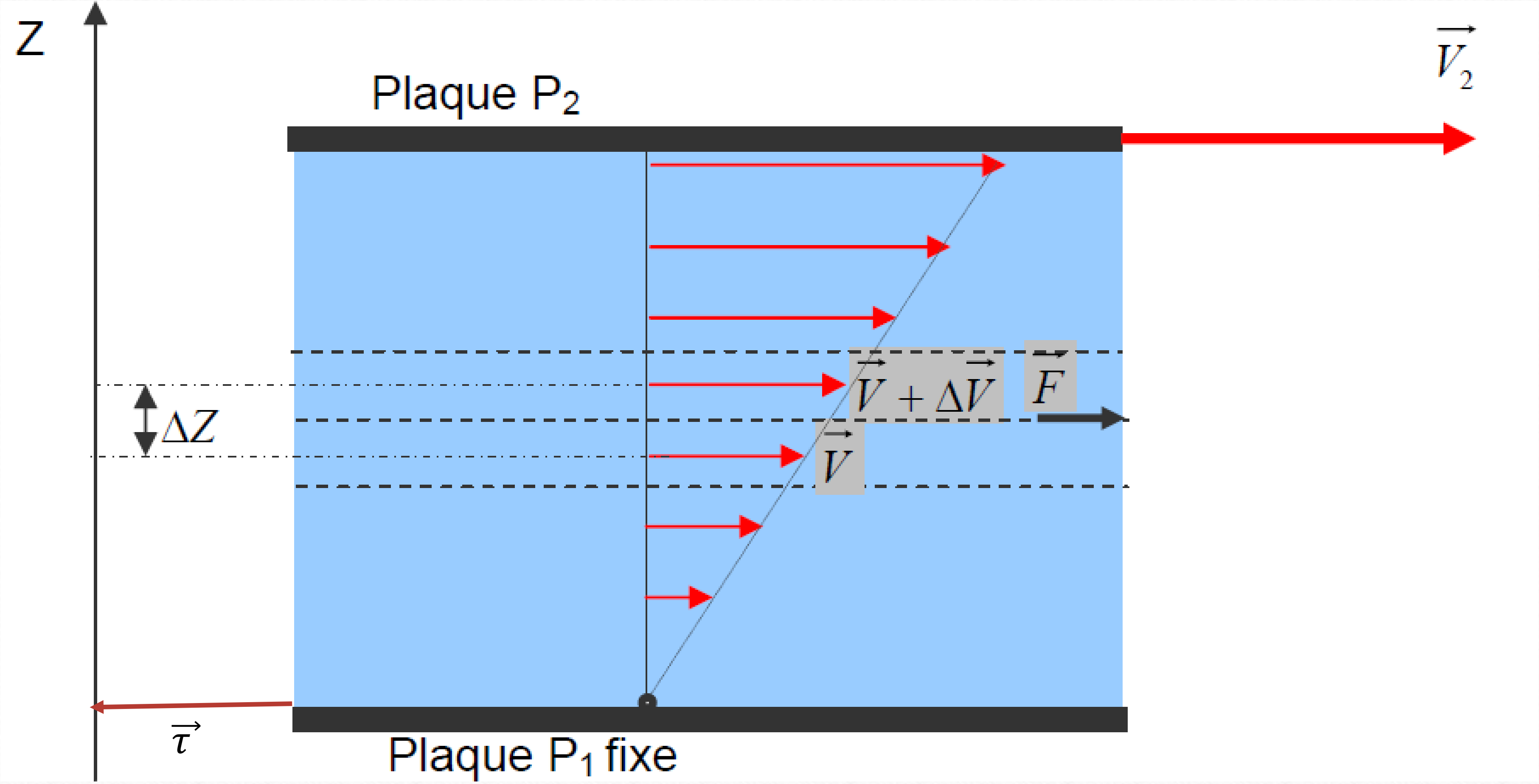
$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{réf}}$$

Dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

## 3.4 Viscosité

- C’est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide,
- Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force,
- Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille,
- Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standardisée,

La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes.



Z
Plaque P2
$\vec{V}_2$
$\vec{V} + \Delta\vec{V}$
$\vec{F}$
$\Delta Z$
$\vec{V}$
$\vec{\tau}$
Plaque P1 fixe

### 3.4.1 Viscosité dynamique

La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque.
Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.
Considérons deux couches de fluide adjacentes distantes de Δz. La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit Δv, à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz :
Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F=\mu.S.\Delta v/\Delta z$$

**où :**
**F : force de glissement entre les couches en (N),**
**μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s),**
**S : surface de contact entre deux couches en ($m^2$),**
**$\Delta V$: Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),**
**$\Delta Z$: Distance entre deux couches en (m).**

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa·s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa·s = 1 Pl = 1 kg/m·s

Exemple :

| Fluide | μ (Pa·s) |
|---|---|
| eau (0 °C) | $1,787\cdot10^{-3}$ |
| eau (20 °C) | $1,002\cdot10^{-3}$ |
| eau (100 °C) | $0,2818\cdot10^{-3}$ |
| Huile d'olive (20 °C) | $\approx 100\cdot10^{-3}$ |
| glycérol (20 °C) | $\approx 1000\cdot10^{-3}$ |
| Hydrogène (20 °C) | $0,86\cdot10^{-5}$ |
| Oxygène (20 °C) | $1,95\cdot10^{-5}$ |

### 3.4.2 Viscosité cinématique

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le ($m^2/s$).

**Remarque 1 (unité):**
On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique.

1 St= $10^{-4}$ $m^2/s$

**Remarque 2 (Influence de la température) :**
Lorsque la température augmente, la viscosité d'un fluide décroît car sa densité diminue.

**Remarque 3 (différence entre viscosité dynamique et viscosité cinématique)**
La viscosité cinématique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation (effort). En d'autre terme, cette dernière exprime la « rigidité » d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement.

# 4. CONCLUSION

Les fluides peuvent être classés en fluides parfaits (sans frottement), fluides réels (avec frottement), fluides incompressibles (liquides) et fluides compressibles (gaz). Les fluides sont caractérisés par les propriétés suivantes: la masse volumique, le poids volumique, la densité et la viscosité. Ces propriétés seront utilisées ultérieurement.

- Le comportement mécanique et les propriétés physiques des fluides compressibles et ceux des fluides incompressibles sont différents.
- En effet, les lois de la mécanique des fluides ne sont pas universelles. Elles sont applicables uniquement pour une classe de fluides donnée.
- Conformément à la classification qui a été faite, les lois relatives à chaque type de fluides seront exposées dans la suite du cours d'une façon indépendante.

# Chapitre 2

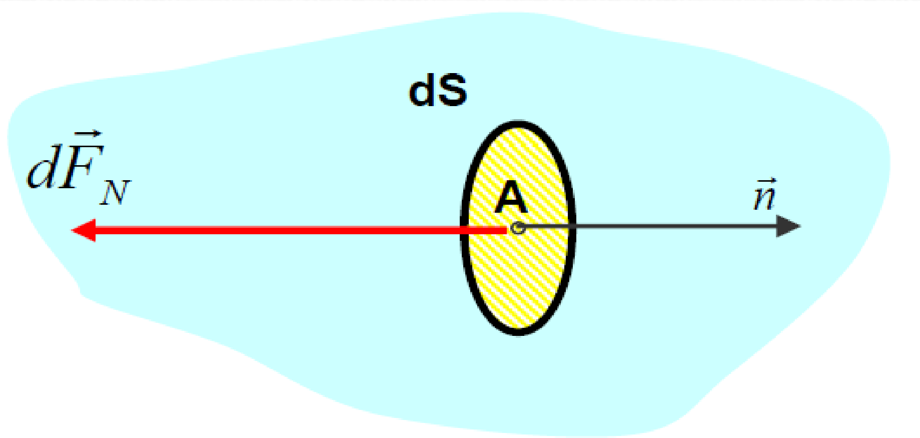
## STATIQUE DES FLUIDES

# 1. INTRODUCTION

La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide.
Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact.
Le champ d'applications est très large et concerne par exemple le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs.

# 2. NOTION DE PRESSION EN UN POINT D'UN FLUIDE

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :




$$P_A = \frac{\left\|\overrightarrow{df_N}\right\|}{ds}$$

où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

*n* : Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$dF_N$ : Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

$P_A$ : pression en A (en Pascal),

Sur la surface de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $n$ , la force de pression élémentaire $dF$ s'exprime par :

$$\overrightarrow{dF_N} = -P_A . ds . \vec{n}$$

***<u>Remarque :</u>***

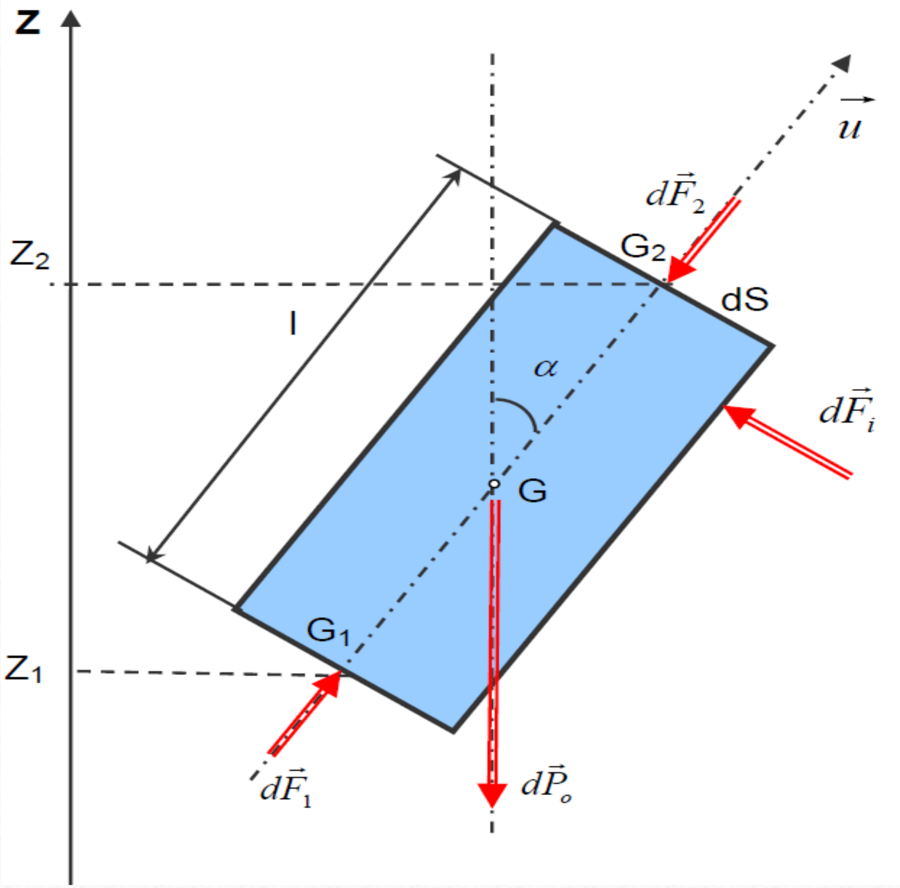
L'unité internationale de pression est le Pascal : ***1Pa = 1 N/m²***. Cette unité est très petite. On utilise le plus souvent ses multiples. En construction mécanique, résistance des matériaux , etc., l'unité utilisée est le méga pascal :

$$1\ MPa = 1\ N/mm^2 = 10^6\ Pa$$

En mécanique des fluides on utilise encore très souvent le bar. Le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne :

$$1\ bar = 10^5 Pa.$$

# 3 .RELATION FONDAMENTALE DE L’HYDROSTATIQUE



Soit $G_1$ d'altitude $Z_1$ et $G_2$ d'altitude $Z_2$, les centres des sections droites extrêmes.

Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire, celui-ci est soumis aux :

- actions à distance : son poids : $dP_0 = -\varpi l \, dS \, Z$
- actions de contact : forces de pression s'exerçant sur :

o la surface latérale : $\Sigma \, dF \, i$ .

o les deux surfaces planes extrêmes : $dF_1 = P_1 . dS . \vec{u}$ et $dF_2 = -P_2 . dS . \vec{u}$ .avec $P_1$ et $P_2$ les pressions du fluide respectivement en $G_1$ et en $G_2$.

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\overrightarrow{dP_0} + \sum \overrightarrow{dF_i} + \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \vec{0}$$

En projection sur l'axe de symétrie $(G, u)$ du cylindre,

$$-\varpi l \, dS \, Z . \mathrm{Cos}\alpha + P_1 . dS - P_2 . dS = 0$$

Exprimons la différence de pression $P_1 - P_2$ après avoir divisé par dS et remarqué que $l.Cos\alpha = Z_2 - Z_1$

$\boxed{P_1 - P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1) = \rho g\ (Z_2 - Z_1)}$ : Relation fondamentale de l'hydrostatique.

Autre forme plus générale :

En divisant les deux membres de la relation précédente par $\varpi$ :

$\frac{P_1}{\bar{w}} + Z_1 = \frac{P_2}{\bar{w}} + Z_2 \frac{P_1}{\bar{w}}$. Ou encore $\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$

Comme $G_1$ et $G_2$ ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide de poids volumique $\varpi$ , on peut écrire en un point quelconque d'altitude Z, ou règne la pression p :

$$\boxed{\frac{P_{bas}}{\bar{w}} + Z = \frac{P_{haut}}{\bar{w}} + Z = Cte}$$

# 4. THEOREME DE PASCAL

## 4.1 Enoncé

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

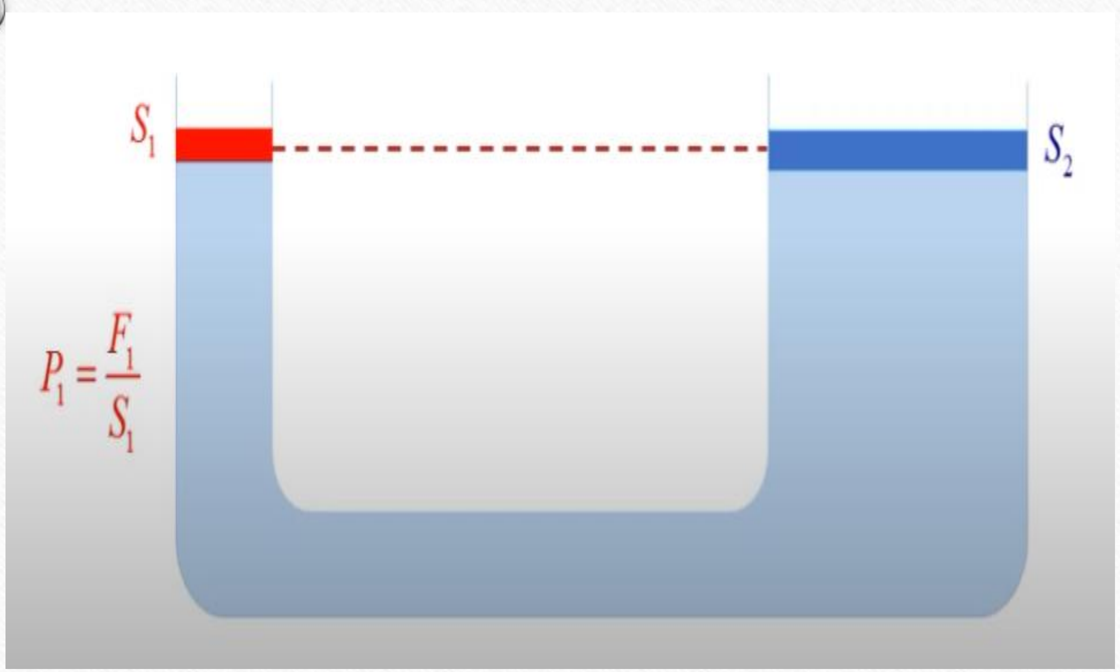
## 4.2 Démonstration: ( application à la presse hydraulique)

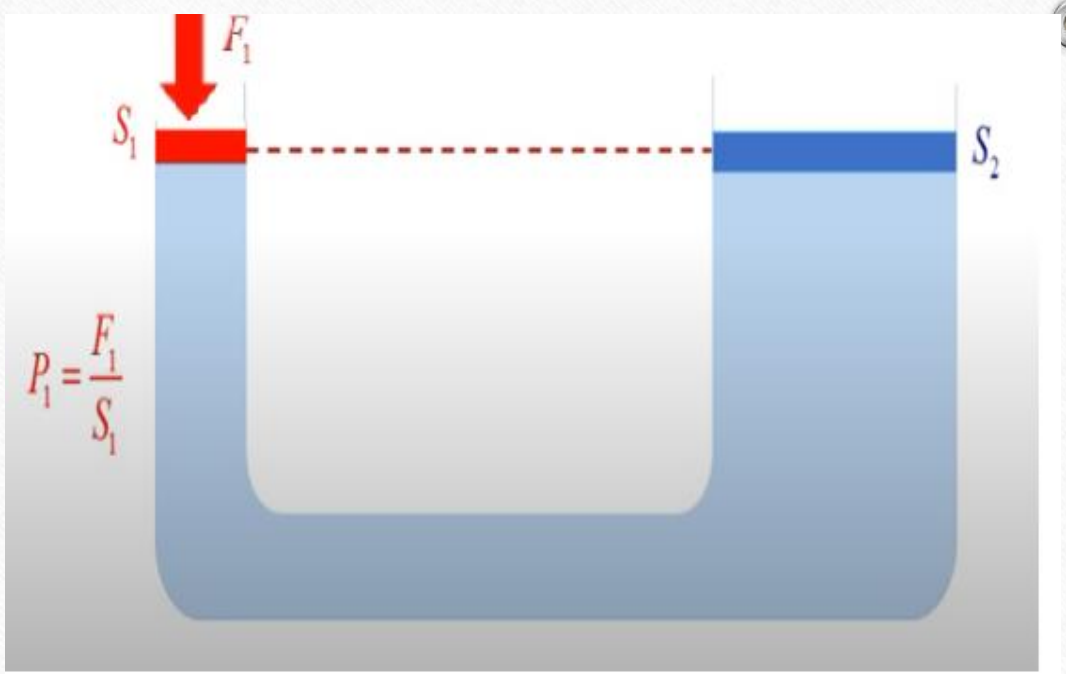
Supposons qu'au point $G_1$ intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$.

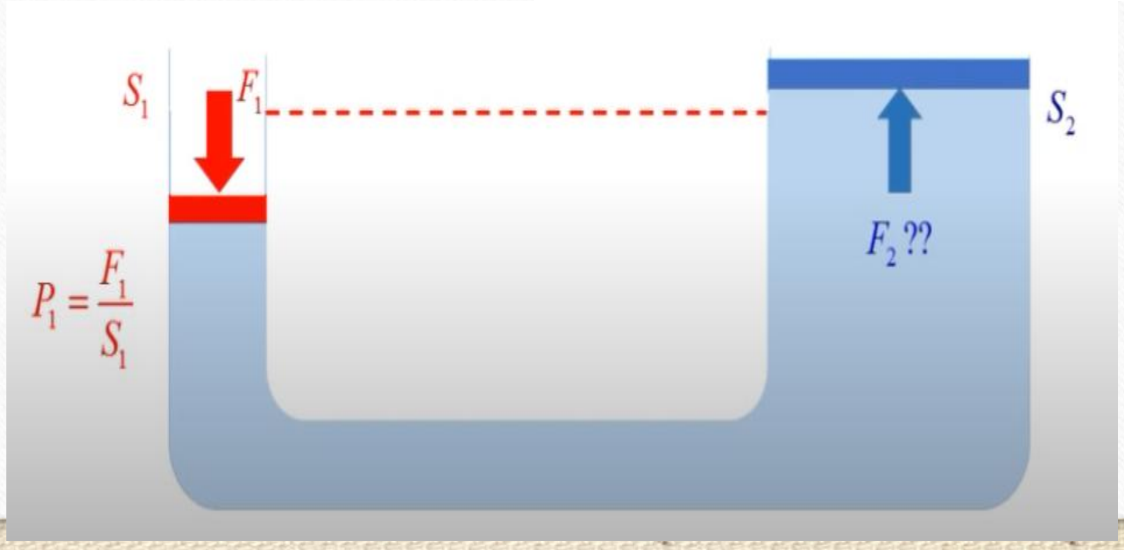
$\Delta P_1$ étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression $\Delta P_2$ qui en résulte en $G_1$.

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre $G_1$ et $G_2$ pour le fluide

- **À l 'état initial**: $P_1 - P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1)$ **(1)**
- **À l 'état final**: $P_1 + \Delta P_1 = P_2 + \Delta P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1)$ **(2)**


$S_1$
$S_2$
$P_1 = \frac{F_1}{S_1}$


$F_1$
$S_1$
$S_2$
$P_1 = \frac{F_1}{S_1}$


$S_1$
$F_1$
$S_2$
$F_2$??
$P_1 = \frac{F_1}{S_1}$

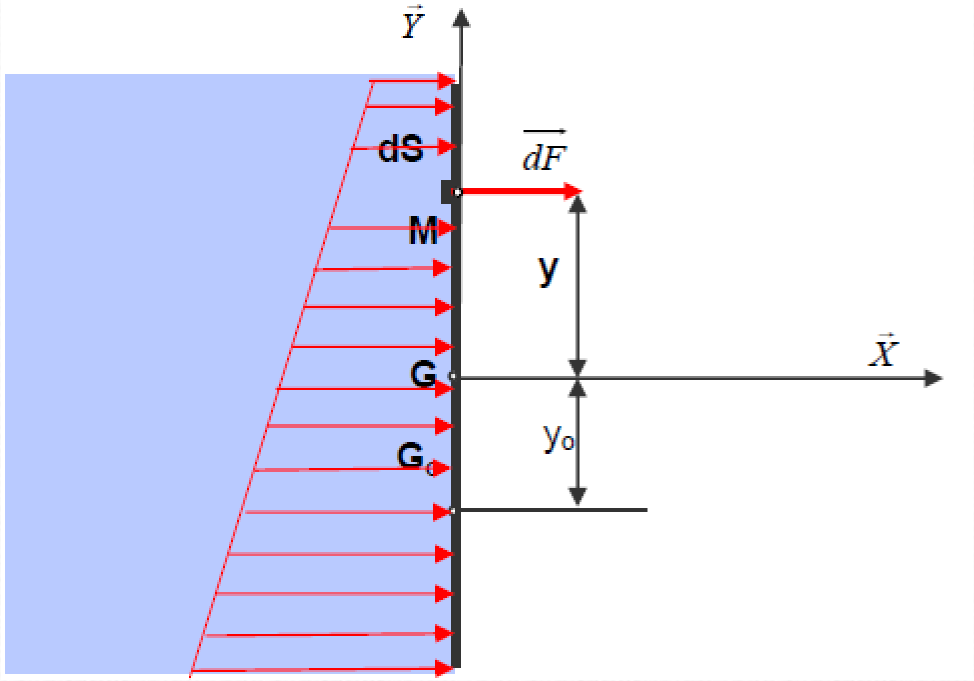
En faisant la différence entre les équations (2) et (1) on obtient :

$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$.

D'où $\Delta P_1 = \Delta P_2$

# 5. POUSSEE D'UN FLUIDE SUR UNE PAROI VERTICALE

## 5.1 Hypothèses



La paroi verticale possède un axe de symétrie $(G, \overrightarrow{Y})$. G est son centre de surface.

D'un coté de la paroi il y a un fluide de poids volumique $\varpi$ , de l'autre coté, il y a de l'air à la pression atmosphérique $P_{atm}$. On désigne par $P_G$ la pression au centre de surface G du coté fluide.

## 5.2 Eléments de réduction du torseur des forces de pression

Connaissant la pression $P_G$ au point G, la pression $P_M$ au point M est déterminée en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique : $P_G - PM = \varpi( YM - YG)$ Dans le repère $(G, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ défini sur la figure : $y_G = 0$ et $y_M = y$, donc : $P_M = P_G - \varpi . y$

Exprimons la force de pression en M : $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi . y).\mathrm{d}s\,\vec{X}$

Soit $\{\tau_{poussée}\}$ le torseur associé aux forces de pression relative :

$$\{\tau_{poussée}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} = \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \overrightarrow{M_G} = \int_{s} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} \end{matrix} \right\}_G$$

## 5.2.1 Résultante

$$\vec{R} = \int_{s} (P_G - \varpi . y).\mathrm{d}s\,\vec{X}$$

que l'on peut écrire en mettant en facteur les termes constants :

$$\vec{R} = \left[P_G . \int_{s} \mathrm{d}s - \varpi . \int_{s} y . ds\right] . \vec{X}$$

On note que $\int_{(s)} dS = S$ (aire de la paroi),

$\int_{(s)} Y.dS = YG.S=0$ : Moment statique de la surface S par rapport à l'axe (G, $\vec{Z}$ ), donc

$\boxed{\vec{R} = P_G\, S\, \vec{X}}$

## 5.2.2 Moment

$\overrightarrow{M_G} = \int \overrightarrow{G_M} \Lambda \overrightarrow{d_F}$

Dans le repère (G, $\vec{X}$ , $\vec{Y}$ , $\vec{Z}$ ) on peut écrire:

$\overrightarrow{G_M} = y.\vec{Y}$ Et $\overrightarrow{d_F} = (P_G - \varpi.y).ds.\vec{X}$

donc $\overrightarrow{M_G} = \int_{(s)} \lfloor y.\vec{Y} \Lambda (PG - \varpi.y).ds.\vec{X}) \rfloor$

Sachant que $\vec{Y} \wedge \vec{X} = \overrightarrow{-z}$

donc $\overrightarrow{M_G} = \left[ P_G . \int_{(s)} y . ds - \varpi \int_{(s)} y^2 . ds \right] . \overrightarrow{-Z}$

On sait que $\int_{(s)} y . ds = y_G . \mathrm{S} = 0$ et $\int_{(s)} y^2 . ds = I_{(G,Z)}$

$I_{(G,Z)}$: Moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe (G, $Z$ ) passant par le centre de surface G. Donc

$\overrightarrow{M_G} = \varpi . I_{(G,Z)} . \vec{Z}$

En résumé :

$$\boxed{\left\{ \tau_{poussée} \right\} = \left\{ \begin{matrix} P_G . S . \vec{X} \\ \varpi . I_{(G,Z)} . \vec{Z} \end{matrix} \right\}_G}$$

## 5.3 Centre de poussée

On cherche à déterminer un point $G_0$ où le moment résultant des forces de pression est nul.

Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe $(G,\vec{Y})$ et il est tel que :

$$\overrightarrow{M_{G0}} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Ecrivons alors que : $\overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_G}$

Avec les résultats précédents, on obtient : $y_0.\vec{Y} \wedge P_G.S.\vec{X} = \varpi.I_{(G,Z)}.\vec{Z}$

ce qui conduit à

$$\boxed{y_0 = -\frac{\varpi.I_{(G,Z)}}{P_G.S}}$$

Go existe, il s’appelle le centre de poussée de la paroi.

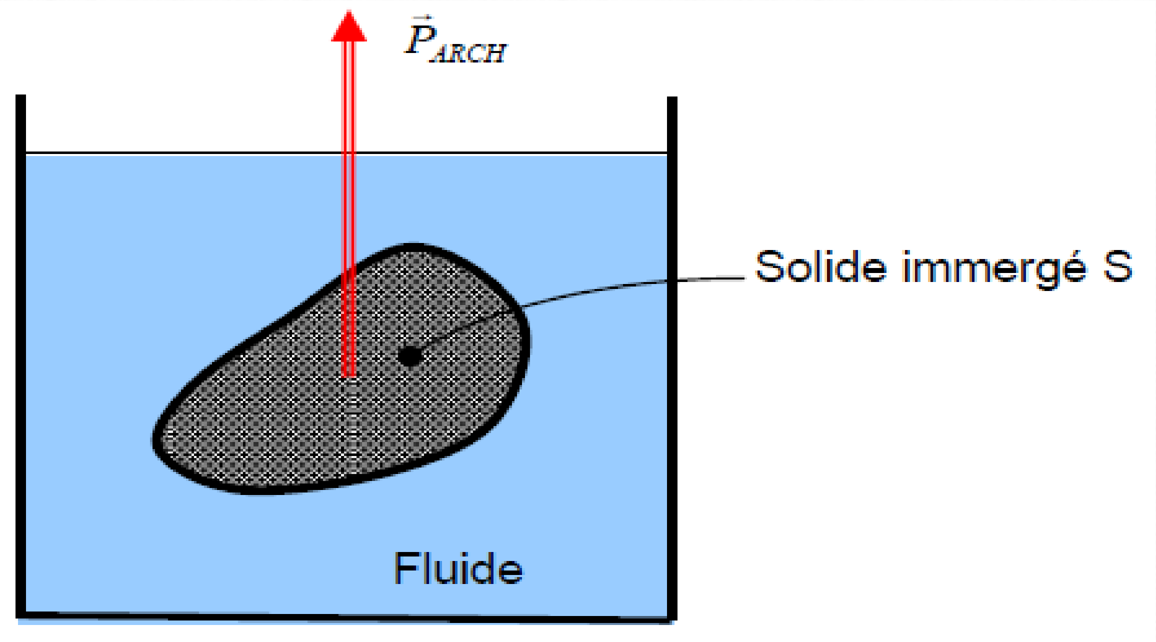
Remarque : Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G.

# 6 THEOREME D’ARCHIMEDE

## 6.1 Énoncé

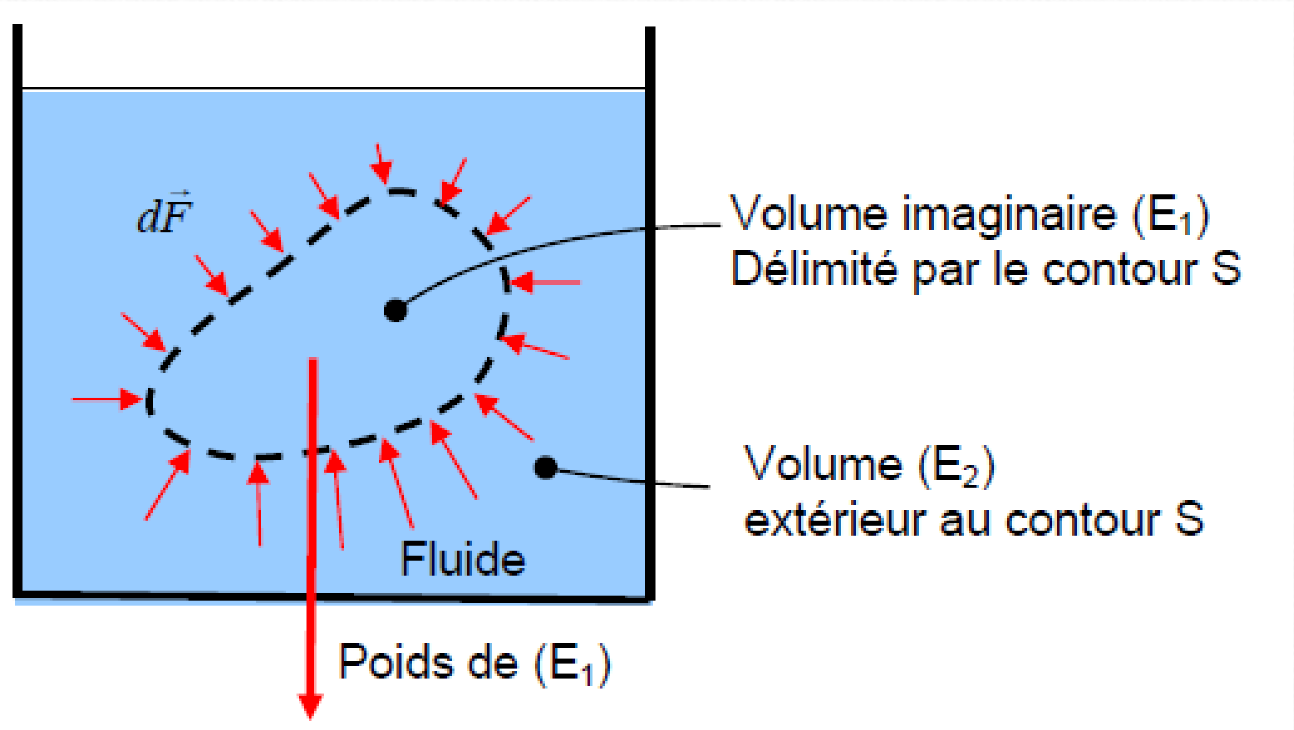
Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

$$P_{ARCH} = \rho_{fluide} . V_{imm} . g$$




## 6.2 Démonstration

Dans un fluide (E) de poids volumique $\varpi$ , imaginons un certain volume de fluide ($E_1$) délimité par un contour fermé (S) :




Si le fluide est au repos, il est évident que (E1) est en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures suivantes :

- Action de la pesanteur, modélisable par le torseur : $\{\tau(pes \rightarrow E_1)\}$
- Action des forces de pression d$\vec{F}$ du fluide ($E_2$) qui entoure ($E_1$) modélisable par le torseur :$\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\}$
- On peut donc écrire l'équation d'équilibre de ($E_1$) :$\{\tau(pes \rightarrow E_1)\}$+$\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\}$=$\{\vec{0}\}$

Nous savons qu'en G, centre de gravité du fluide ($E_1$) le torseur des forces de pesanteur

se réduit à un glisseur : $\{\tau(pes \rightarrow E_1)\}$=$\begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

Il est donc évident qu'au même point G le torseur des forces de pression d$\vec{F}$ se réduira lui aussi à un glisseur :

$$\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\}=\begin{Bmatrix} \int_{(s)} \mathrm{d}\vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

L'équation d'équilibre de la portion de fluide ($E_1$) s'écrit : $\int_{(s)} \mathrm{d}\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$

($E_1$) est ici une portion de fluide et P est le poids du fluide occupant le volume ($E_1$). Si le volume ($E_1$) est occupé par un solide immergé ayant le même contour S, les forces de poussée sur ce contours (S) sont les mêmes , ce qui revient à dire que la force de poussée ne dépend que du volume du fluide déplacé et non pas de la nature du solide immergé (plomb, acier, etc).

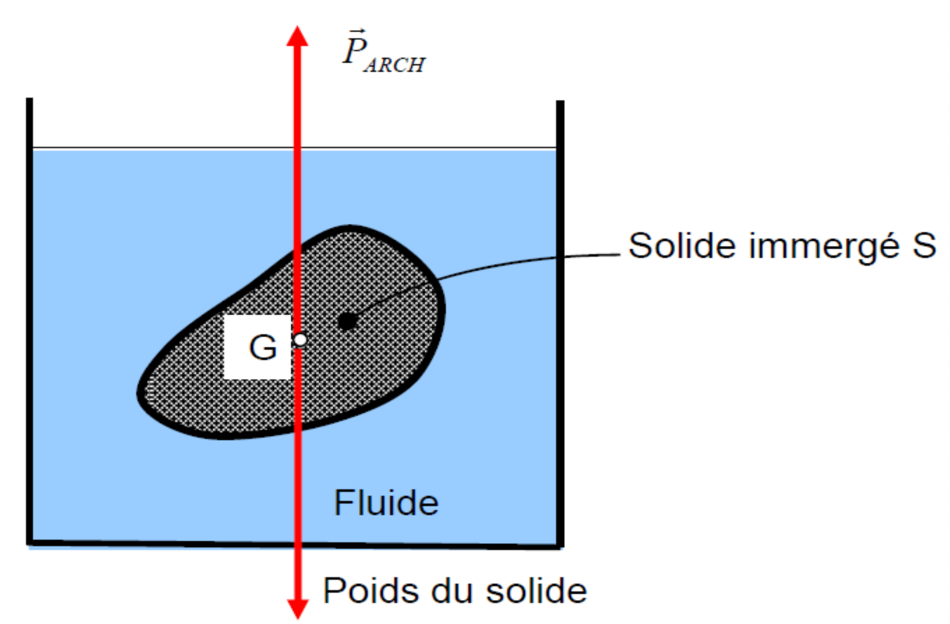
CONCLUSION

Tout corps solide immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à des forces de pression $\overrightarrow{dF}$ dont les actions mécaniques sont modélisables au centre de gravité du fluide déplacé par un glisseur dont la résultante est directement opposée au poids du fluide déplacé.

$$\{\tau(E_2 \to E_1)\} = \begin{Bmatrix} -\vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

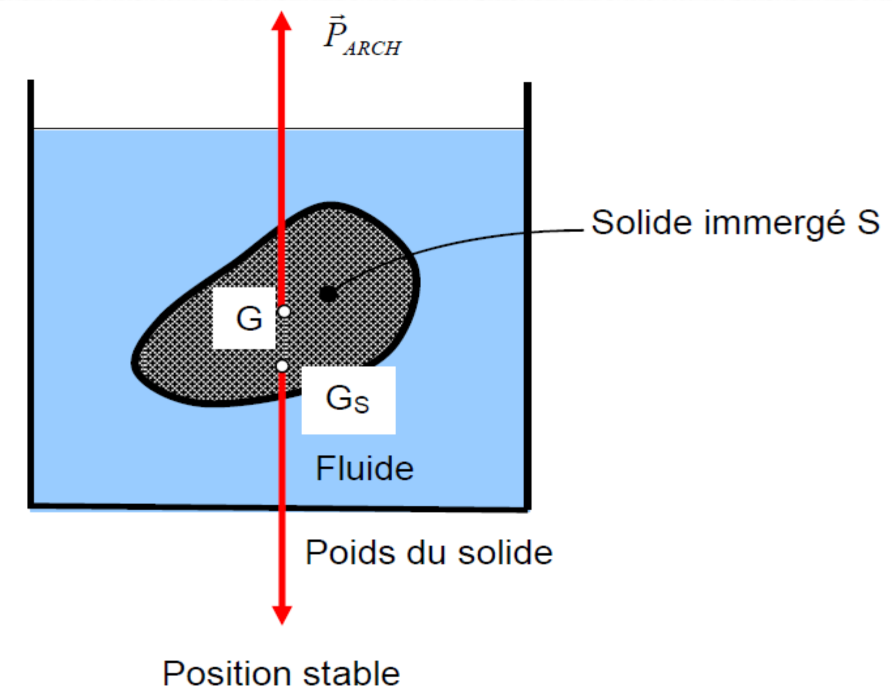
**Remarques** :

- 1er cas : **Si le solide immergé est homogène** alors le centre de poussée G, point d'application de **la poussée d'Archimède sera confondu avec le centre de gravité du solide**. L'équilibre du solide est indifférent.



- $2^{\text{ième}}$ cas : **Si le solide immergé est hétérogène** alors le centre de poussée G, point d'application de **la poussée d'Archimède n'est pas confondu avec le centre de gravité Gs du solide**

<u>L'équilibre du solide est instable si G est au dessous de $G_S$</u>



# 7 Conclusion

La statique des fluides est basée principalement sur les résultats suivants:

**a)** La différence de pression entre deux points est proportionnelle à leur différence de profondeur :

$P_1 - P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1) = \rho g\ (Z_2 - Z_1)$ : C'est la **relation fondamentale de l'hydrostatique**,

**b)** Toute variation de pression en un point engendre la même variation de pression en tout autre point d'après le **théorème de Pascal.**

**c)** Le torseur associé aux forces de pression d'un fluide sur une paroi plane verticale est :

$$\{\tau_{poussée}\} = \begin{Bmatrix} P_G . S . \vec{X} \\ \varpi . I_{(G,Z)} . \vec{Z} \end{Bmatrix}_G$$

**d)** La position du centre de poussée. est

$$y_0 = -\frac{\varpi . I_{(G,Z)}}{P_G ,s}$$

**e)** Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, orientée vers le haut c'est **la poussée d'Archimède** et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.