ENSA d'Al-Hoceima
AP-I, Première Année,
Algèbre Linéaire,

Année 2019/2020
Semestre 2
TD1-bis

Série N^{o}1 : S-e. supplémentaires et Coordonnées sphériques

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que : $f \circ f = f$.
   Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
   (a) Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 2

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; x + y - 2z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2, 1, 1)$.

Exercice 3

On considère $\mathbb{P}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1 + X, \quad P_2 = (1 + X)^2, \quad \text{et} \quad P_3 = (1 + X)^3.$$

1. Montrer que le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{P}_3[X]$
2. Soit $P = -3X + X^3$, écrire P comme combinaison linéaire dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3).
3. Trouver une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soit E l'espace physique muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi/2]$. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon ρ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}}) = \varphi$ et M' la projection orthogonale de M sur le plan (xOy) tel que $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$

1. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
3. Trouver les expressions des vecteurs $\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$, $\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$.
4. Calculer $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ en fonction de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.
5. Que peut-on déduire ?