

Exercice 1 (6pts)

Var de décisions (y_i 1pt + x_i 1pt)

$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si on décide de cultiver le légume } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

x_i : nombre de m^2 alloués à la culture i

1 : courgettes
2 : courgettes
3 : Tomates
4 : concombres

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4$$

1 pt

s.l.c

Contraintes 0.25pt par contrainte

$$0,75x_1 + 1,5x_2 + 2,25x_3 + 1,8x_4 \leq 250$$

$$1,25x_1 + 1,70x_2 + 1,75x_3 + 1,4x_4 \leq 210$$

$$0,5x_1 + x_2 + 1,2x_3 + x_4 \leq 180$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12000 m^2$$

$$4x_1 \leq 0,3 (4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \leq y_2 \\ y_1 \leq y_4 \end{pmatrix} \text{ ou } (2y_1 \leq y_2 + y_4)$$

$$x_1 \leq \pi_1 y_1$$

$$x_2 \leq \pi_2 y_2$$

$$x_3 \leq \pi_3 y_3$$

$$x_4 \leq \pi_4 y_4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

Exercice 2

3pts = Domaine réalisable 2pt ; solution optimale 1pt

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.p.c } 2x_1 + x_2 \leq 10$$

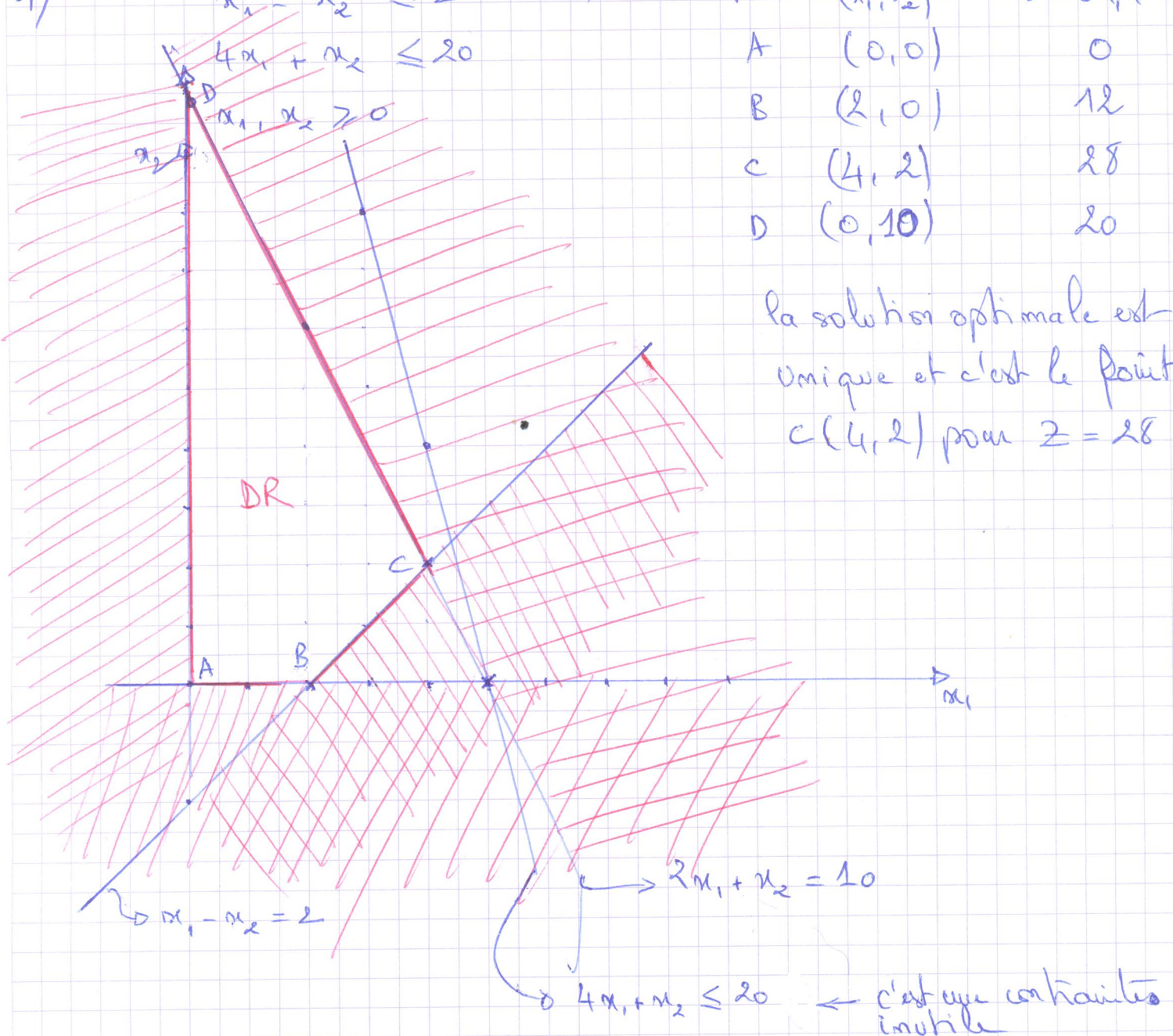
$$1/ \quad x_1 - x_2 \leq 2 \quad \equiv (P)$$

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

P.E	(x_1, x_2)	$Z = 6x_1 + 2x_2$
A	(0,0)	0
B	(2,0)	12
C	(4,2)	28
D	(0,10)	20

la solution optimale est unique et c'est le point C(4,2) pour $Z = 28$



$$2/ \quad \text{Min } Z' = 10y_1 + 2y_2 + 20y_3$$

s.p.c

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 6$$

$$y_1 - y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

c'est le dual de (P)

1.5pt = Fonction-objectif 0.5pt contraintes 1pt

3/

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 8x_2$$

(P) s.l.c

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 20 \rightarrow y_1$$

$$x_1 - x_2 + s_2 = 2 \rightarrow y_2$$

$$4x_1 + x_2 + s_3 = 20 \rightarrow y_3$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z' = 10y_1 + 2y_2 + 20y_3$$

(D) s.l.c

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 - r_1 = 6$$

$$y_1 - y_2 + y_3 - r_2 = 2$$

$$y_1, y_2, y_3, r_1, r_2 \geq 0$$

les écarts complémentaires indiquent que :

$$x_1 \times r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$$

$$x_2 \times r_2 = 0 \Rightarrow r_2 = 0$$

$$y_1 \times s_1 = 0 \quad \text{—}$$

$$y_2 \times s_2 = 0 \quad \text{—}$$

$$y_3 \times s_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 0$$

la solution optimale de

$$(P) \text{ est : } \begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = 28$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 6 \\ y_1 - y_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{8}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow la solution optimale de (D) est :

$$Z' = 28 \quad \begin{pmatrix} y_1 = \frac{8}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \\ y_3 = 0 \\ r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \end{pmatrix}$$

2pts = Z' 0.5pt + 0.5pt x 3 pour y_i

et 4/5

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	CD	Ratio
s_1	2	1	1	0	0	10	5
s_2	1	-1	0	1	0	2	2 ←
s_3	4	1	0	0	1	20	5
Z	-6	-2	0	0	0	0	

solutions de Base

A

$$\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ s_1 = 10 \\ s_2 = 2 \\ s_3 = 20 \end{pmatrix}$$

$Z_A = 0$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	CD	Ratio
s_1	0	3	1	-2	0	6	2 ←
x_1	1	-1	0	1	0	2	-
s_3	0	5	0	-4	1	12	$\frac{12}{5}$
Z	0	-8	0	6	0	12	

B

$$\begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ s_1 = 6 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 12 \end{pmatrix}$$

$Z_B = 12$

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	CD
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	2
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	4
s_3	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	2
Z	0	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	28

C

$$\begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 2 \end{pmatrix}$$

$Z_C = 28$

le point C est l'unique solution optimale

3pts = 2 pts pour les dictionnaires et 1 pt pour la solution optimale

6/ on sait que la solution optimale de (P) est :

$$\begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 2 \end{pmatrix}$$

1.5pt = 0.5 par
contrainte + 0.5pt
pour l'explication

\Rightarrow Donc les deux premières contraintes de (P) sont saturées puisque leur variable d'écart sont nulles ($s_1 = s_2 = 0$)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases} \text{ sont saturées à l'optimalité}$$

7/ si on remplace le côté droit de la première contrainte de (P) par (11) (Donc +1 par rapport l'ancienne valeur) alors la nouvelle valeur de $z = 28 + \frac{8}{3} = 30,67$

\Rightarrow c'est le coût réduit associé à la première contrainte.

1.5pt = 1pt pour la solution + 0.5pt pour l'explication