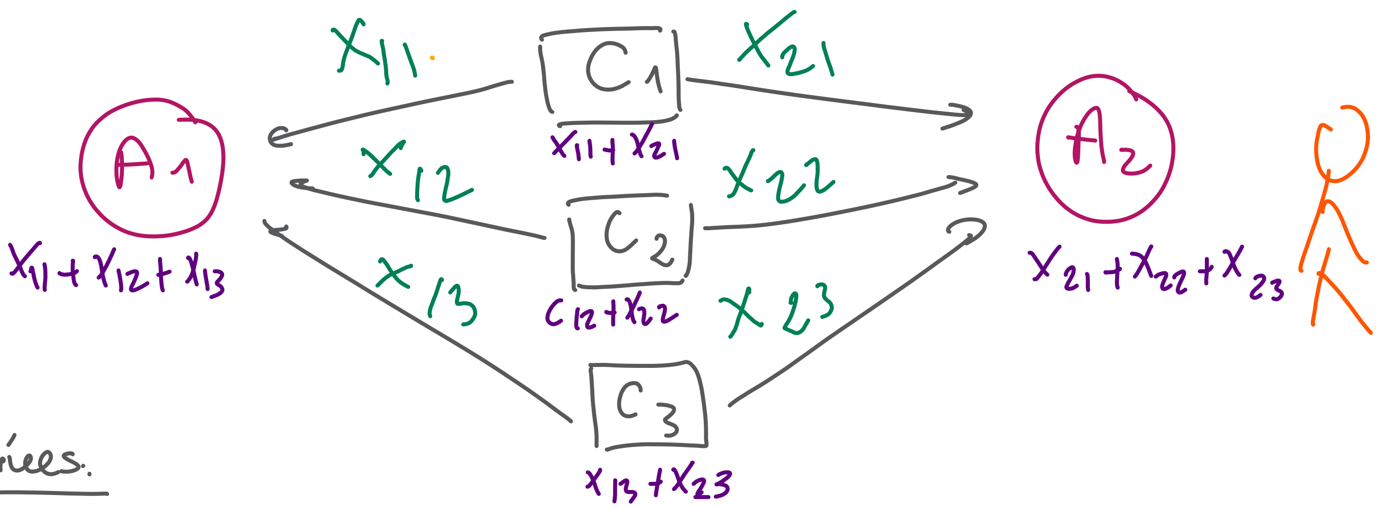
Cours PL le 09/02/2024

Suite Chapitre 1 : Modélisation linéaire

Exemple de Mélange :

Une entreprise qui cherche à préparer 2 mélanges A_1 et A_2 à partir de 3 Composants C_1, C_2 et C_3



Données.

	Spéc	Prix de vente
A_1	Pas plus que 40% de Fe Pas moins que 30% de Zn	600 DT / tonne
A_2	Pas moins que 20% Cu	500 DT / tonne

	Disponibilité	Prix d'achat	Composition Fe	Cu	Zn	Al
C_1	300 tonnes	200 DT / tonne	20%	30%	35%	15%
C_2	450 tonnes	300 DT / tonne	20%	30%	30%	20%
C_3	400 tonnes	250 DT / tonne	15%	35%	25%	30%

1) Définir les V.D :

X_{ij} : Qté de C_j dans A_i (tonnes) : 6 V.D

2) " les contraintes :

. Disponibilité : 3 contraintes

. % de Fe, Cu et Zn dans A_1 et A_2 : 3 contraintes

3) objectif :

Maximiser le gain = Vente (A_1 et A_2) − Achat (C_1, C_2, C_3)

4). Mise en équations :

$$\text{Max} \left(600 (x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 500 (x_{21}+x_{22}+x_{23}) - 200 (x_{11}+x_{21}) - 300 (x_{12}+x_{22}) - 250 (x_{13}+x_{23}) \right)$$

SC

stock C_1 : $x_{11} + x_{21} \leq 300$ tonnes

. " C_2 : $x_{12} + x_{22} \leq 450$ "

. " C_3 : $x_{13} + x_{23} \leq 400$ "

A_1 { Fe : $\underbrace{\overbrace{\underbrace{\tfrac{20\, x_{11}}{100}}_{\text{Qté de Fe dans A1 à partir de } C_1} + \underbrace{\tfrac{10\, x_{12}}{100}}_{C_2} + \underbrace{\tfrac{15\, x_{13}}{100}}_{C_3}}^{\text{tonne}}}_{\text{Qté de Fe dans A1}} \leq \tfrac{40}{100} \underbrace{(x_{11} + x_{12} + x_{13})}_{\text{Qté totale de A1}}$

Zn : $35\, x_{11} + 30\, x_{12} + 25\, x_{13} \geq 30 (x_{11} + x_{12} + x_{13})$

A_2 : Cu : $30\, x_{21} + 30\, x_{22} + 35\, x_{33} \geq 20 (x_{21} + x_{22} + x_{23})$

$$X_{ij} \geq 0$$

Chap 2 : Résolution graphique.

I). Objectif :

* Résoudre graphiquement un PL à 2 V.D (plan)

RQ :
- Cette méthode est applicable aussi pour les PL à 3 V.D (espace).
- " " nous permettra d'interpréter l'algo. Simplexe (chapitre suivant).

II). Etapes de résolution

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ 2x_1 + x_2 \leq 100 \end{cases}$$

$2x_1 + x_2 = 100 \Rightarrow$ ensemble des pts constituant une droite Δ

$2x_1 + x_2 \leq 100 \Rightarrow \frac{1}{2}$ plan constitué par les points $M(x_1, x_2)$ au dessous de la droite Δ.

Prenons l'exemple suivant :

$$\text{Max } (30x_1 + 20x_2)$$

SC

1. $x_1 + 2x_2 \leq 200$
2. $x_1 + x_2 \geq 20$
3. $2x_1 + x_2 \leq 220$
4. $2x_2 \leq 180$

$x_1, x_2 \geq 0$

1) Écrire toutes les contraintes sous forme des égalités
2). Déterminer 2 pts pour chaque droite
3). choisir l'échelle
4). Tracer le repère.
5). Placer les points et tracer les droites
6). Déduire les $\frac{1}{2}$ plans.
7). Déduire l'intersection de toutes les contraintes $\mathcal{D}$ domaine des solutions réalisables ou admissibles

- $x_1 + 2x_2 = 200$: D_1

$A_1(0; 100)$; $A_2(100; 50)$

- $x_1 + x_2 = 20$: Δ_2

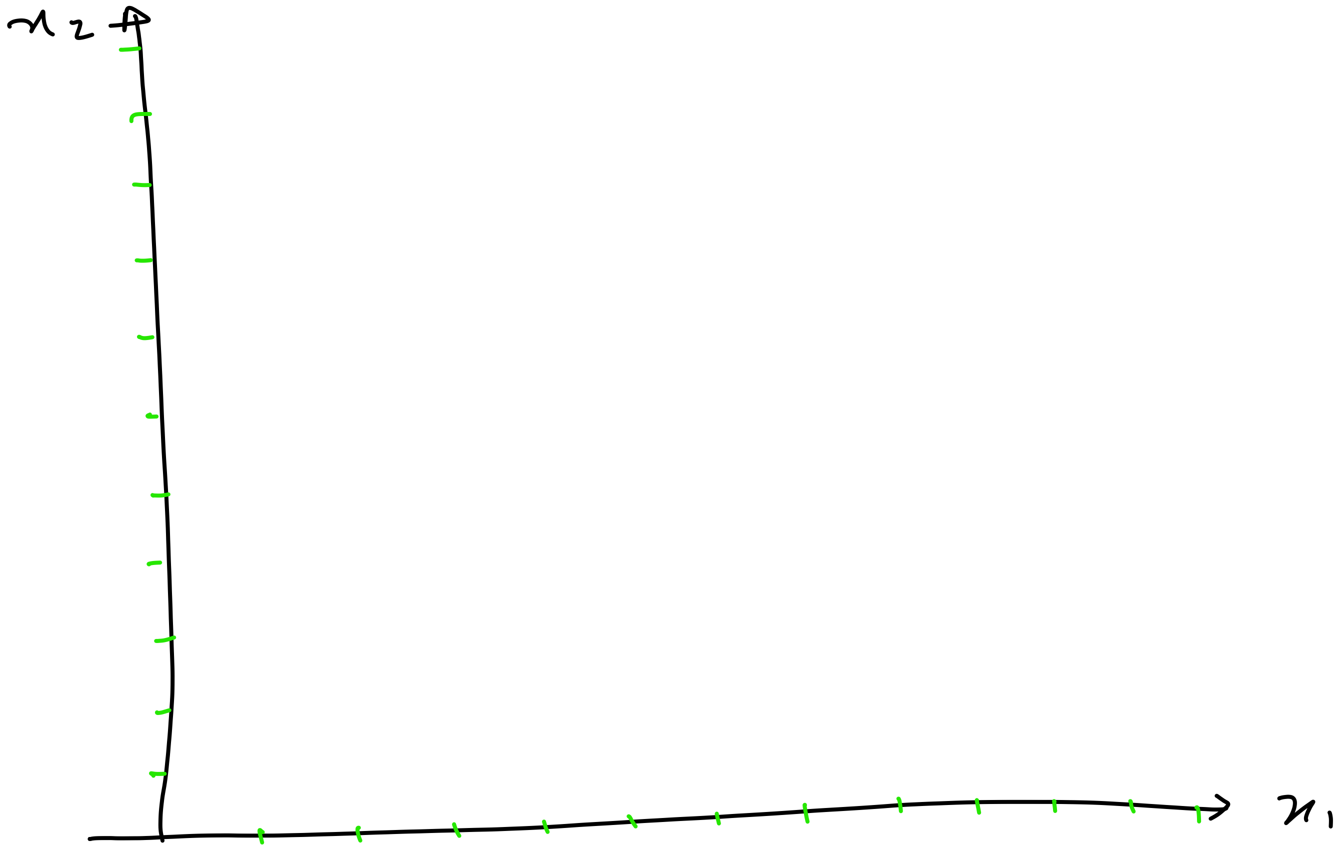
$B_1(20; 0)$; $B_2(0; 20)$

- $2x_1 + x_2 = 220$: Δ_3

$C_1(60; 100)$; $C_2(80; 60)$

- $2x_2 = 180$: Δ_4

$D_1(0; 90)$; $D_2(60; 90)$


x_2
x_1

Chap3 : Algorithme Simplexe

I). obj

II). forme Canonique

III). " standard

IV). Etapes de l'algo

Soit le PL suivant :

(PL1)
$$\text{Min}\{(2x_1 - 4x_2 - 7x_3) = z\}$$
SC
$$x_1 - x_2 - x_3 \geq -100$$
$$-5x_1 - x_2 + 10x_3 \leq 150$$
$$x_1 \leq 0 ;\ x_2 \geq 0 ;\ x_3 \geq 0$$

Soit $X = -x_1$

$$-\text{Max}\{(2X + 4x_2 + 7x_3) = z\}$$
SC
$$X + x_2 + x_3 + e_1 = 100$$
$$5X - x_2 + 10x_3 + e_2 = 150$$
$$X \geq 0 ;\ x_2 \geq 0 ;\ x_3 \geq 0$$

V.B \ Var	X	x_2	x_3	e_1	e_2	$= b_i$	l_i
e_1	1	1	1	1	0	100	100/1
e_2	5	-1	10	0	1	150	150/10
$-z$	2	4	7	0	0	0	

Colonne Pivot

ligne Pivot

ligne Pivot $\cap$ Colonne Pivot $=$ {Pivot} $= \{P\}$

$x_3 : 0 \longrightarrow 15$

$z : 0 \longrightarrow 0 + 7.15$

	X	x_2	x_3	e_1	e_2	$= b_i$
e_1	1/2	11/10	0	1	-1/10	85
x_3	1/2	-1/10	1	0	1/10	15
$-z$	-15/10	47/10	0	0	-7/10	-105

- $A_{pj} = a_{pj} / P$
- $A_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip} \cdot a_{pj}}{P}$

$z = 105 + \frac{47}{10} \cdot \frac{850}{11}$

$x_2 : 0 \longrightarrow 850/11$

$$0 - \frac{47}{\cancel{10}} \cdot \frac{1}{11/\cancel{10}} = -47/11$$

	x	x_2	x_3	e_1	e_2	$= b_i$
x_2	$5/11$	1	0	$10/11$	$-1/11$	$850/11$
x_3	$6/11$	0	1	$1/11$	$1/11$	$250/11$
$-z$	$-40/11$	0	0	$-47/11$	$-30/110$	$-5150/11$

$x^* = 0$

$x_2^* = 850/11$

$x_3^* = 250/11$

$e_1^* = 0$

$e_2^* = 0$

$z^* = 5150/11$

$$A_{21} = \frac{1}{2} + \frac{1/2 \cdot 1/10}{11/10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{22} = \frac{12}{22} = 6/11$$

$$A_{24} = 0 + 1/10 / 11/10 = 1/11$$

$$A_{25} = \frac{1}{10} - \frac{1/10 \cdot 1/10}{11/10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{110} = \frac{10}{110} = 1/11$$

$$A_{26} = 15 + \frac{85 \cdot 1/10}{11/10} = 15 + \frac{85}{11} = \frac{165+85}{11} = \frac{250}{11}$$

Condition d'arrêt:

Pour un prb de maximisation, tous les coef. de la ligne obj sont négatifs

La solution de notre problème de départ (PL1) est:

$x_1 = -x = 0$; $x_2 = 850/11$; $x_3 = 250/11$; $e_1 = 0$; $e_2 = 0$

$Z' = -z = -5150/11$

R.Q.1) les coef de la ligne obj sont appellés: ombres coûts, coûts marginaux ou coûts de dual (Dual Price).

$\boxed{Z' \leftarrow z + \text{ombre coût} \times \text{nouvelle valeur de la var. entrante}}$

4. On peut appliquer l'algo. Simplexe pour un problème de minimisation (avec contraintes de signe $\leq$ et tous les 2nd membres des contraintes sont (+) avec variables positives)

$$\min(-2x_1 - 11x_2 + 6x_3)$$
SC
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$$
$$4x_1 + 7x_3 \leq 150$$
$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0$$

$$-\max(2x_1 + 11x_2 - 6x_3)$$
SC
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$$
$$4x_1 + 7x_3 \leq 150$$
$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0$$

Pour le cas de minimisation, la condition d'arrêt est : tous les coef. de la ligne obj sont (+)

Dans ce cas, on garde le même critère de choix de la variable sortante que le prob. de maximisation : la plus petite limitation positive et finie.

V). Cas particuliers

1).

V.B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	2	1	-2	0	0	-1	30
x_5	-2	0	-1	3	1	2	40
$-Z$	9	0	4	6	0	0	6000

la Slt est optimale :

$x_1^* = 0$
$x_2^* = 30$
$x_3^* = 0$
$x_4^* = 0$
$x_5^* = 40$
$x_6^* = 0$
$Z^* = -6000$
(Minimisation)

- 6 variables dont 4 Var. de décision et 2 Var. d'écart
- nbre de V.Base = nbre des Var. d'écart = nbre des contraintes
- V.B = colonne b_i et VHB = 0

⇒ Si on atteint la condition d'arrêt (max ou min), avec une Var. hors base ayant un ombre coût égale à zéro, donc la slt optimale n'est pas unique.

2). Soit le tab simplexe ci-dessous :

V.B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	= b_i	l_i
x_2	0	1	0	0	0	1	100	$100/0 \to \infty$
x_1	1	0	-1	0	1	-1	80	$80/-1 \to -80$
x_4	0	0	-2	1	1	2	120	$120/-2 \to -60$
$-z$	0	0	5	0	-2	-1	-400	

$z = 400 \Rightarrow$ maximisation

Var. entrante $= x_3$

Var. sortante = la plus petite limitation positive et finie

→ pas de var. sortante ⇒ solution non bornée $(z \to \infty)$

. Si on trouve une Var. entrante sans trouver une Var. sortante, donc la slt est non bornée $(z \to \infty)$

Exercice : Résoudre avec 2 méthodes le (PL) :

$$\max(10x_1 + 20x_2)$$

SC

$$2x - y \leq 10$$
$$-x \leq 5$$
$$x - y \leq 5$$
$$x \geq 0 \,;\, y \geq 0$$