Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire
Ouarzazate

الكلية متعددة التخصصات - ورزازات
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵜⴰⵙⵜⵉⵙⵏⵉⵜ – ⵡⴰⵔⵣⴰⵣⴰⵜ
FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE OUARZAZATE

Note de Cours
Électromagnétisme dans le Vide

Chapitre 1 : Courant Alternatif Sinusoïdal

Filière : SMI (S4)

Prof. Youssef HADDOUT
Département de Physique-Chimie

Année universitaire 2020-2021

Sommaire

Chapitre 1 : Courant alternatif sinusoïdal

Ce chapitre se propose de (d') :

- Étudier les circuits électriques linéaires dans le cas où des f.é.m. sinusoïdales sont appliquées aux bornes de ces circuits (régime sinusoïdal forcé). Ces circuits sont en général composés d'un élément *actif* (générateur à courant alternatif sinusoïdal) et des éléments *passifs* (résistances R, capacités C et inductances L). Dans ce cas, il est intéressant d'introduire le concept d'impédance complexe. Les lois de l'électricité se transforment alors en équations algébriques simples à résoudre.
- Déterminer les puissances en courant alternatif : Puissance active, puissance apparente facteur de puissance, puissance réactive et puissance complexe.

1. Généralité sur le courant alternatif

1.1. Définition

On appelle **courant alternatif** un courant électrique dont le sens varie périodiquement et dont l'intensité moyenne est nulle. De la même manière, une tension dont le signe s'inverse périodiquement et de moyenne nulle est appelée **tension alternative**. Ces grandeurs sont souvent notées avec le suffixe AC (pour Alternating Current) tandis que les grandeurs continues (courant ou tensions constants) sont notées DC (Direct Current).

Des cas particuliers en pratique du courant alternatif sont :

- Le courant alternatif sinusoïdal.
- Le courant alternatif triangulaire.
- Le courant alternatif rectangulaire.

Dans ce chapitre on s'intéressera qu'au ***courant alternatif sinusoïdal***.

1.2. Courant alternatif sinusoïdal

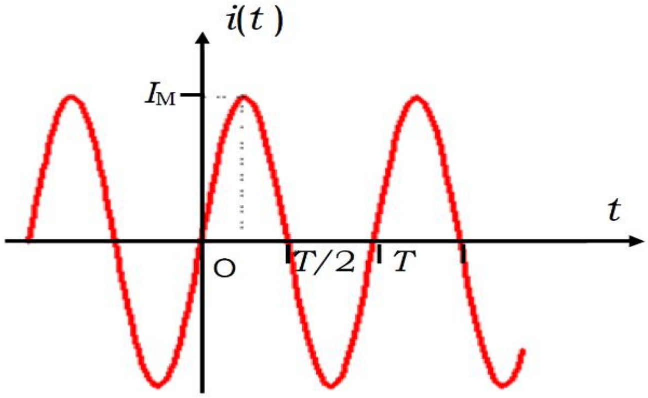
Le courant alternatif sinusoïdal est un cas particulier très utile en pratique. On dit qu'un courant alternatif est sinusoïdal lorsque son intensité est une fonction sinusoïdale du temps.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i') \quad avec \;\; \varphi_i' = \varphi_i - \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

$i(t)$ est *la valeur instantanée de l'intensité du courant* (mesurée en *A*); cette grandeur est généralement marquée par une *minuscule*.

Le courant alternatif sinusoïdal est caractérisé par les grandeurs suivantes :

- I_m *l'amplitude* ou la valeur maximale du courant, mesurée en *A*.
- ω *la pulsation*, mesurée en rad/s.
- φ_i *la phase initiale*, mesurée en radians.



On définit également :

- *Période* : C'est le plus court intervalle de temps qui sépare deux états électriques identiques. Elle est notée T, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et s'exprime en seconde.
- *Fréquence* : Notée f , c'est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$. Elle s'exprime en *Hz*. Pour une fréquence donnée, la pulsation électrique vaut $\omega = 2\pi f$.
- *Alternance* : également appelée demi-période, elle vaut $\frac{T}{2}$ et contient deux changements de signe.
- *Intensité efficace* :

  La valeur efficace d'un courant alternatif est définie comme la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période. Elle s'écrit :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \qquad (2)$$

Dans le cas d'un courant alternatif sinusoïdal, on obtient :

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

La valeur instantanée du courant alternatif sinusoïdal est :

$$i(t) = \sqrt{2}\, I_{eff}\, sin(\omega t + \varphi_i) \qquad (4)$$

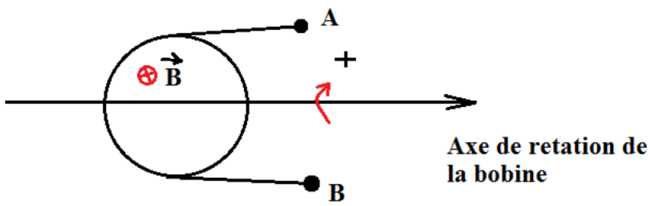
Remarque : les valeurs indiquées par les appareils de mesure de type voltmètre ou ampèremètre sont toujours des valeurs efficaces.

1.3. Générateur à courant alternatif sinusoïdal

Les générateurs à courant alternatif sinusoïdal sont des appareils qui permettent d'obtenir une différence de potentiel $u(t)$ qui varie d'une façon sinusoïdale dans le temps :

$$u(t) = V_A - V_B = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{5}$$

Ces générateurs sont constitués d'une bobine de N spires qui tourne à une vitesse angulaire ω constante dans un champs magnétique uniforme $\vec{B}$.



La différence de potentiel $(V_A - V_B)$ est égale à la force électromotrice d'induction :

$$V_A - V_B = e = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{6}$$

Où Φ est le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine.

Or : $$\Phi = \mathrm{N}\,\vec{B}\,\mathrm{S}\,\vec{n} = NBS \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{7}$$

Où N est le nombre de spires de la bobine, S est la surface d'une spire, $\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à S et φ l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ à l'instant t.

Donc

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega NBS \cos(\omega t + \varphi_u) = E_m \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{8}$$

Il en résulte, aux bornes de la bobine une différence de potentiel, ou tension sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω .

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{ou} \quad u(t) = \sqrt{2}\, U_{eff} \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{9}$$

U_{eff} est la valeur efficace de la tension $u(t)$.

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

2. Représentation complexe

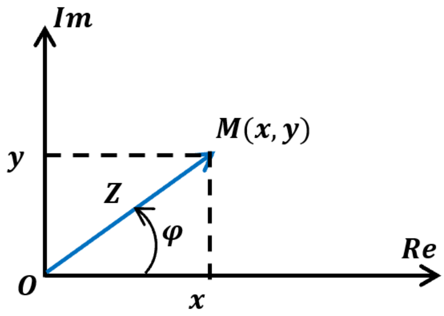
2.1. Rappel sur les nombres complexes

Tout nombre complexe $\bar{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme, dite cartésienne, suivante :

$$\bar{Z} = x + jy \tag{11}$$

Avec x la partie réelle et y la partie imaginaire, et j le nombre complexe vérifiant $j^2 = -1$.

Dans le plan complexe dont les axes sont les parties imaginaire (*OIm*) et réelle (*ORe*), le nombre complexe $\bar{Z}$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{OM}$, de composantes x et y faisant un angle φ par rapport à l'axe ORe.



- Le module de $\bar{Z}$ noté $|\bar{Z}|$ a pour expression : $|\bar{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

  $x = Z\cos(\varphi)$ et $y = Z\sin(\varphi)$
- Son argument φ est défini par : $\varphi = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Un nombre complexe sous sa forme polaire s'écrit :

$$\bar{Z} = x + jy = Z(cos\,\varphi + j\,sin\,\varphi) = Ze^{j\varphi} \qquad (12)$$

2.2. Notation complexe

En courant alternatif, il est plus pratique de représenter les grandeurs électriques par des expressions complexes.

Soit un signal sinusoïdal d'expression mathématique $x(t) = X_m\,cos(\omega t + \varphi)$, on lui associe une grandeur complexe :

$$\bar{x}(t) = X_m\,e^{j(\omega t+\varphi)} = X_m\,e^{j\omega t}e^{j\varphi} \qquad (13)$$

On pourra également définir une amplitude complexe :

$$\bar{X} = X_m e^{j\varphi} \quad \text{donc} \quad \bar{x}(t) = \bar{X}\,e^{j\omega t} \qquad (14)$$

On travaillera donc en notation complexe mais il sera facile de revenir au signal réel :

- Retour au signal réel complet grâce à la partie réelle du complexe :

$$x(t) = Re\big(\bar{x}(t)\big) \qquad (15)$$

- Retour à l'amplitude du signal réel grâce au module de l'amplitude complexe ou du signal complexe :

$$X_m = |\bar{X}| = |\bar{x}(t)| \qquad (16)$$

- Retour à la phase initiale grâce à l'argument de l'amplitude complexe :

$$\varphi = Arg(\bar{X}) \qquad (17)$$

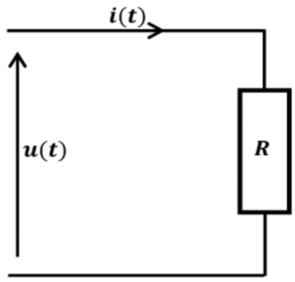
Ainsi, toutes les informations dont nous avons besoin pour reconstituer le signal réel sont contenues dans l'amplitude complexe.

3. Dipôles passifs linéaires en courant alternatif sinusoïdal

3.1. Circuit purement résistif

Le circuit le plus simple qu'on puisse étudier en courant alternatif est composé d'une source de tension et d'une résistance pure R. La tension alternative appliquée est sinusoïdale soit :

$$u(t) = U_m\, cos(\omega t + \varphi_u)$$



D'après la loi d'Ohm, à un instant quelconque $i(t)$ et $u(t)$ sont reliés par

$$u(t) = R\, i(t) \tag{18}$$

Soit

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R}\, cos(\omega t + \varphi_u) = I_m\; cos(\omega t + \varphi_i) \tag{19}$$

Avec $\boxed{U_m = R\, I_m}$ et $\varphi_u = \varphi_i$

- En valeurs efficaces : $\boxed{U_{eff} = R\, I_{eff}}$
- Déphasage : $\Delta\varphi = \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$.

  Donc la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont ***en phase***.
- En notation complexe, si on associe à $u(t)$ le complexe $\bar{u}(t)$

$$u(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(t) = U_m\, e^{j(\omega t+\varphi_u)} \quad \Rightarrow \quad \bar{U} = U_m e^{j\varphi_u} \tag{20}$$

Alors

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} \;\Rightarrow\; \bar{\imath}(t) = \frac{\bar{u}(t)}{R} = \frac{U_m}{R}\, e^{j(\omega t+\varphi_u)} = I_m\, e^{j(\omega t+\varphi_i)} \;\Rightarrow\; \bar{I} = I_m e^{j\varphi_i} \tag{21}$$

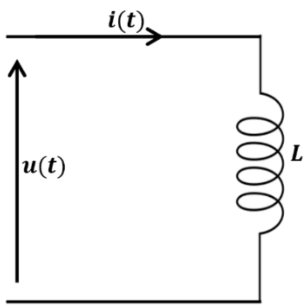
D'où

$$\boxed{\bar{U} = R\, \bar{I}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_m = R\, I_m \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases} \tag{22}$$

Cette dernière relation est analogue à la loi d'Ohm en courant continu.

3.2. Circuit purement inductif

Lorsqu'on applique une tension alternative $u(t) = U_m\, cos(\omega t + \varphi_u)$ aux bornes d'une self pure (bobine idéale d'inductance L (en *Henry H*)), elle sera parcourue par un courant alternatif d'intensité $i(t)$.



Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

Où ; e est la force électromotrice (f.é.m) induite (ou d'induction) et Φ le flux magnétique variable.

- Si Φ ne dépend pas du temps $\Longrightarrow$ $e = 0$
- Si $i(t)$ dépend du temps $\Longrightarrow$ $\Phi(\mathrm{t})$ dépend du temps $\Longrightarrow$ $e(\mathrm{t}) \neq 0$

Alors, la force électromotrice induite dans le circuit est égale et opposée à la tension appliquée. Par conséquent, l'équation devient

$$u(t) = -e(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \tag{23}$$

Or $\Phi(t) = L\, i(t)$; donc

$$\boxed{u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Longrightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt} \tag{24}$$

Ce qui donne

$$i(t) = \frac{U_m}{L}\int\ cos(\omega t + \varphi_u)\ dt = \frac{1}{L\omega}U_m sin(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{L\omega}U_m cos\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right) \tag{25}$$

Soit

$$i(t) = I_m cos(\omega t + \varphi_i) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} I_m = \frac{1}{L\omega}U_m & \Longrightarrow \quad \boxed{U_m = L\omega I_m} \\ \varphi_i = \varphi_u - \frac{\pi}{2} & \Longrightarrow \quad \Delta\varphi = \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{26}$$

- La tension $u(t)$ est donc ***<u>en avance</u>*** de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur l'intensité $i(t)$.
- La relation $U_m = L\omega I_m$ est analogue à la loi d'Ohm, mais la résistance doit être remplacée par le produit $L\omega$, qui porte le nom *d'inductance*, qu'on note $Z_L = \omega L$. Contrairement à la résistance R, l'inductance augmente avec la fréquence du courant alternatif ; pour un courant d'amplitude constante, l'amplitude de la tension aux bornes de la self sera d'autant plus grande que la fréquence sera élevée.
- En valeurs efficaces :

$$\boxed{U_m = L\omega I_m \quad \Longrightarrow \quad U_{eff} = L\omega I_{eff}} \tag{27}$$

- En notation complexe, si on associe à $u(t)$ le complexe $\bar{u}(t)$

$$u(t) \quad \Longrightarrow \quad \bar{u}(t) = U_m\, e^{j(\omega t + \varphi_u)} \tag{28}$$

Alors

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt \quad \Longrightarrow \quad \bar{\imath}(t) = \frac{1}{L}\int \bar{u}(t)dt = \frac{1}{j\omega L}U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \frac{1}{j\omega L}\bar{u}(t) \tag{29}$$

Soit

$$\bar{u}(t) = j\omega L\, \bar{\imath}(t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\bar{U} = j\omega L\bar{I} = \bar{Z}_L\bar{I}} \tag{30}$$

Avec $\bar{Z}_L = j\omega L$ est l'impédance complexe de la bobine. Si l'on compare cette expression à celle de la formule $Z_L = \omega L$, on voit qu'elle est identique, à l'exception du facteur j. C'est que l'impédance complexe représente deux choses à la fois :

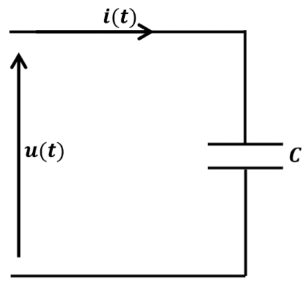
- L'amplitude, donnée par le facteur ωL
- Le déphasage de $\frac{\pi}{2}$, qui résulte de la multiplication par j.

On sait en effet que $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$. Multiplier par j revient donc à ajouter $\frac{\pi}{2}$ à la phase du nombre complexe.

Remarque : Une bobine réelle est équivalente à une bobine idéale en série avec une résistance r (qui représente la résistance du fil constituant la bobine) qui est très faible.

3.3. Circuit purement capacitif

Lorsqu'on applique une tension alternative $u(t) = U_m\, cos(\omega t + \varphi_u)$ aux bornes d'un condensateur pur de capacité C (en *Farad F*), il sera parcouru par un courant alternatif d'intensité $i(t)$.



La charge du condensateur à tout instant est donnée par

$$q(t) = C\, u(t) \tag{31}$$

Le courant circulant dans le circuit est donné par l'équation

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\,\frac{du(t)}{dt}} \tag{32}$$

Soit

$$i(t) = -C\omega U_m\, sin(\omega t + \varphi_u) = C\omega U_m\, cos\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \tag{33}$$

Donc

$$i(t) = I_m\, cos(\omega t + \varphi_i) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_m = C\omega U_m & \Rightarrow \quad \boxed{U_m = \frac{1}{C\omega} I_m} \\ \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{34}$$

- La tension $u(t)$ est donc ***en retard*** de phase de $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ sur l'intensité $i(t)$.
- La relation $U_m = \frac{1}{C\omega} I_m$ est analogue à la loi d'Ohm, mais la résistance doit être remplacée par la quantité $\frac{1}{C\omega}$, qui porte le nom de *capacitance*, qu'on note $Z_C = \frac{1}{\omega C}$. Elle diminue avec la fréquence du courant alternatif ; pour un courant d'amplitude constante, l'amplitude de

la tension aux bornes du condensateur sera d'autant plus petite que la fréquence sera élevée.

- En valeurs efficaces :

$$\boxed{U_m = \frac{1}{C\omega} I_m \quad \Longrightarrow \quad U_{eff} = \frac{1}{C\omega} I_{eff}} \tag{35}$$

- En notation complexe, si on associe à $u(t)$ le complexe $\bar{u}(t)$

$$u(t) \quad \Longrightarrow \quad \bar{u}(t) = U_m\, e^{j(\omega t + \varphi_u)} \tag{36}$$

Alors

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\imath}(t) = C\frac{d\bar{u}(t)}{dt} = C\, j\omega U_m\, e^{j(\omega t + \varphi_u)} = j\omega C \bar{u}(t) \tag{37}$$

Soit

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{j\omega C}\bar{\imath}(t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\bar{U} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I} = \bar{Z}_C \bar{I}} \tag{38}$$

Avec $\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$ est l'impédance complexe du condensateur de capacité C où le facteur $-j$ exprime ici un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ entre la tension et le courant.

<u>Remarque :</u> Un condensateur réel est équivalent à un condensateur idéal en parallèle avec une résistance R (qui représente la résistance de l'isolant situé entre les deux armatures) qui est très grande.

3.4. Notion d'impédance complexe

Il est donc possible, et souvent préférable, de représenter la tension et le courant alternatifs sous leurs formes complexes $\bar{U}$ et $\bar{I}$.

On définit également la notion d'impédance complexe comme une généralisation de la notion de résistance. Elle représente la faculté du composant à s'opposer au passage du courant (résistance), mais également à créer un champ magnétique lors du passage d'un courant (inductance) ou à stocker les charges électriques (capacité).

La loi d'Ohm en régime alternatif devient alors :

$$\boxed{\bar{U} = \bar{Z}\,\bar{I}} \tag{39}$$

Si $\bar{U} = U_m\, e^{j(\omega t + \varphi_u)}$ et si $\bar{I} = I_m\, e^{j(\omega t + \varphi_i)}$, alors l'impédance vaut :

$$\bar{Z} = \frac{U_m\, e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m\, e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{U_m}{I_m}\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \tag{40}$$

Le module de l'impédance est donc égal au rapport des modules de la tension et de l'intensité. Son argument ou déphasage est égal à la différence des arguments de la tension et de l'intensité.

L'impédance complexe d'un circuit électrique s'écrit, sous forme cartésienne :

$$\boxed{\bar{Z} = R + jX} \tag{41}$$

où R est sa résistance et X sa réactance, ou bien sous forme polaire:

$$\boxed{\bar{Z} = Z\, e^{j\,\varphi}} \tag{42}$$

avec $Z = |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\varphi = Arctg\left(\frac{X}{R}\right)$ le déphasage, entre la tension et le courant, introduit par l'impédance Z. L'inverse de l'impédance est appelé admittance et est noté $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$ (en *Siemens* *S*).

On pourra naturellement combiner dans le même circuit des résistances pures, des condensateurs et des selfs en nombre quelconque. Il suffira de prendre chaque fois l'impédance complexe correspondante. Le tableau résume les différentes formules utilisées

	Résistance *R*	**Inductance *L***	**Capacité *C***
Equation fondamentale	$u_R(t) = R\, i(t)$	$u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$i(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$
Impédance *Z*	$Z_R = R$	$Z_L = \omega L$	$Z_C = \dfrac{1}{\omega C}$
Impédance complexe $\bar{Z}$	$\bar{Z}_R = R$	$\bar{Z}_L = j\omega L$	$\bar{Z}_C = \dfrac{-j}{\omega C}$
Relation entre les valeurs efficaces	$U_{eff} = RI_{eff}$	$U_{eff} = L\omega I_{eff}$	$U_{eff} = \dfrac{1}{C\omega}I_{eff}$
Déphasage φ	$\varphi_R = 0$: la tension et le courant sont en phase	$\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$: la tension est en avance sur le courant	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$: la tension est en retard sur le courant

3.5. Association des impédances

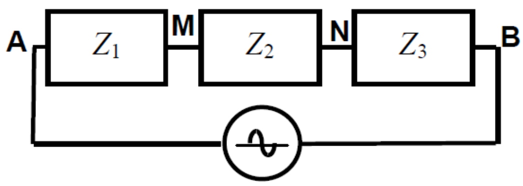
Les lois, relatives aux associations des résistances en courants continus, restent valables en courants sinusoïdaux lorsqu'on utilise les impédances complexes.

3.5.1. Impédances montées en série

La figure ci-contre montre que

$$\bar{U} = \bar{U}_{AB} = \bar{U}_{AM} + \bar{U}_{MN} + \bar{U}_{NB}$$

Toutes les impédances sont traversées par le même courant $i(t)$.



$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I} = \bar{Z}_1\bar{I} + \bar{Z}_2\bar{I} + \bar{Z}_3\bar{I} = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)\bar{I}$

Dans le cas de n impédances, on obtient :

$$\bar{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_i \tag{43}$$

3.5.2. Impédances montées en parallèle

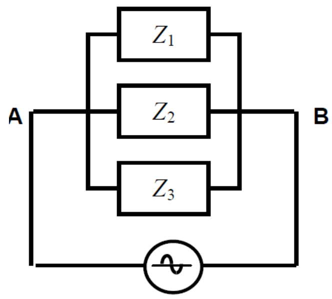
La figure ci-contre montre que

$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I} = \bar{Z}_1\bar{I}_1 = \bar{Z}_2\bar{I}_2 = \bar{Z}_3\bar{I}_3$

L'équation du nœud en A donne ;

$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$

D'où, $\bar{I} = \bar{U}\left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\right]$



Dans le cas de n impédances, on obtient :

$$\bar{I} = \bar{U}\left[\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\bar{Z}_n}\right] = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\bar{Z}_i} \tag{44}$$

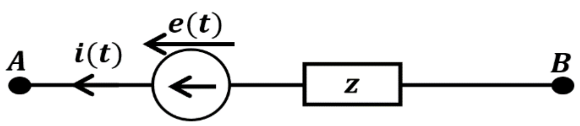
4. Réseaux électriques en courant alternatif sinusoïdal

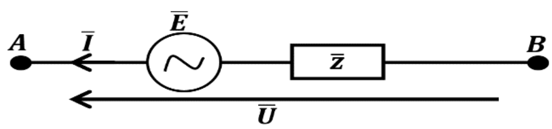
En courant alternatif, les mots réseau, maille, branche et nœud gardent les mêmes définitions qu'en courant continu. Puisqu'en représentation complexe, les éléments passifs en courant alternatif se comportent comme des résistances en courant continu, l'étude des réseaux en courant alternatif est régie par les mêmes lois que celles utilisées en courant continu à condition de considérer les grandeurs complexes.

4.1. Générateur en courant alternatif sinusoïdal

4.1.1. Générateur de tension

Un générateur de tension en courant alternatif est caractérisé par sa f.é.m. sinusoïdale $e(t)$ et son impédance interne z en série. $e(t) = E_m\, cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \bar{E}$



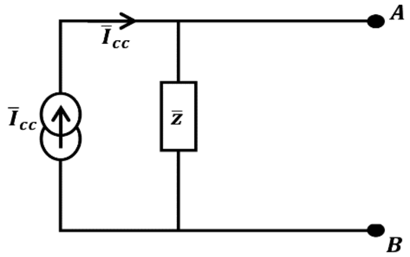


En notation complexe, la tension $\bar{U}$ entre ses bornes et donnée par :

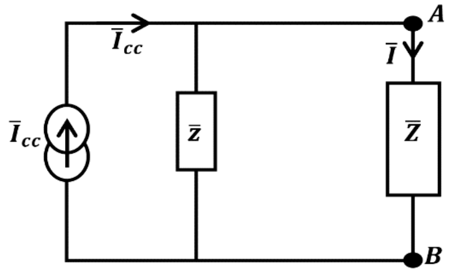
$$\bar{U} = \bar{E} - \bar{z}\bar{I} \tag{45}$$

Si $\bar{z} = 0$, $\bar{U} = \bar{E}$ quelque soit l'impédance de l'élément branché entre A et B : le générateur de tension est dit idéal.

4.1.2. Générateur de courant



Un générateur de courant alternatif est caractérisé par son courant de court-circuit $i_{cc}(t)$ et son impédance interne z en parallèle. Soit $\bar{I}_{cc}$ et $\bar{z}$ en notation complexe.



Si on branche entre les bornes A et B du générateur un élément d'impédance complexe $\bar{Z}$, le courant $\bar{I}$ dans cet élément est donné par :

$$\bar{I} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} + \bar{Z}} \bar{I}_{cc}$$

(D'après la règle de diviseur de courant)

Si $\bar{z} \longrightarrow \infty$ alors $\bar{I} = \bar{I}_{cc}$ et par suite $i_{cc}(t) = i(t)$ quelque soit l'impédance de l'élément branché entre A et B : le générateur de courant est dit idéal.

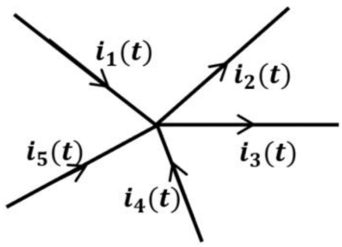
4.2. Lois de Kirchhoff en courant alternatif sinusoïdal

Les lois de Kirchhoff en courant continu restent valables en courant alternatif pour les valeurs instantanées et les grandeurs complexes.

4.2.1. Loi des nœuds

A un instant t quelconque, la somme algébrique des courants dans un nœud est égale à zéro :

$$\sum_n \varepsilon_n i_n(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_n \varepsilon_n \bar{I}_n = 0$$



Avec $\varepsilon_n = 1$ si le courant arrive au nœud et $\varepsilon_n = -1$ si le courant part du nœud.

4.2.2. Loi des mailles

A un instant t quelconque, la somme algébrique des tensions aux bornes des différents éléments d'une maille du réseau est nulle :

$$\sum_n \varepsilon_n u_n(t) = 0 \qquad (46)$$

Avec $\varepsilon_n = 1$ si le sens de parcours de la maille est le même que le sens d'orientation de la tension et $\varepsilon_n = -1$ si le sens de parcours de la maille est le sens contraire du sens d'orientation de la tension.

En notation complexe :

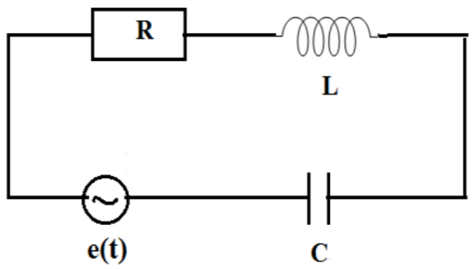
$$\sum_n \varepsilon_n \bar{U}_n = 0 \qquad (47)$$

Remarque :

Les théorèmes de superposition, de Thevenin et de Norton en courant continu restent valables en courant alternatif.

4.3. Exemple : Circuit RLC série

Considérons l'exemple d'un circuit composé d'une résistance, une capacité pure et une inductance pure branchées en série aux bornes d'un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E_m\, cos(\omega t)$



4.3.1. Etude en représentation trigonométrique

D'après la loi des mailles

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad \Rightarrow \quad e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (48)$$

Or $i(t) = I_m\, cos(\omega t + \varphi)$, soit

$$E_m\, cos(\omega t) = RI_m\, cos(\omega t + \varphi) - L\omega I_m\, sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C\omega} I_m\, sin(\omega t + \varphi) \qquad (49)$$

$$\Rightarrow \quad E_m\, cos(\omega t) = RI_m\, cos(\omega t + \varphi) + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) I_m\, sin(\omega t + \varphi) \quad \forall\, t \qquad (50)$$

En particulier pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$ $\left(t\omega = \frac{\pi}{2}\right)$, on obtient donc :

- Si $t = 0$: $E_m = RI_m\, cos(\varphi) + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) I_m\, sin(\varphi)$ $\quad(\mathbf{1})$
- Si $t\omega = \frac{\pi}{2}$: $0 = -RI_m sin(\varphi) + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) I_m\, cos(\varphi)$ $\quad(\mathbf{2})$
- $(\mathbf{1}) \times sin(\varphi) + (\mathbf{2}) \times cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad E_m sin(\varphi) = \left(\frac{1 - LC\omega^2}{C\omega}\right) I_m$ $\quad(\mathbf{3})$
- $(\mathbf{1}) \times cos(\varphi) - (\mathbf{2}) \times sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad E_m cos(\varphi) = RI_m$ $\quad(\mathbf{4})$

- $(\mathbf{3}) \quad \Longrightarrow \quad sin(\varphi) = \left(\frac{1-LC\omega^2}{C\omega}\right)\frac{I_m}{E_m}$
- $(\mathbf{4}) \quad \Longrightarrow \quad cos(\varphi) = R\,\frac{I_m}{E_m}$

Ce qui donne

$$tan(\varphi) = \frac{sin(\varphi)}{cos(\varphi)} = \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\varphi = Arctg\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right)} \tag{51}$$

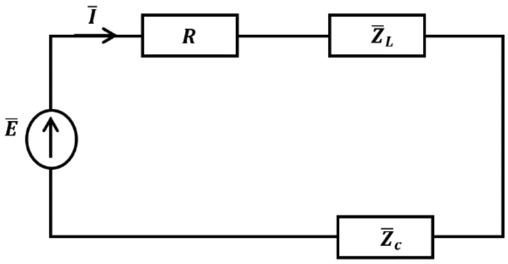
$$cos^2(\varphi) + sin^2(\varphi) = 1 \;\; \Longrightarrow \;\; \left(\frac{I_m}{E_m}\right)^2\left[R^2 + \left(\frac{1 - LC\omega^2}{C\omega}\right)^2\right] = 1 \tag{52}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1 - LC\omega^2}{C\omega}\right)^2}}} \tag{53}$$

4.3.2. Etude en représentation complexe

$e(t) = E_m\, cos(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad \bar{E} = E_m e^{j0}$

$i(t) = I_m\, cos(\omega t + \varphi) \quad \Longrightarrow \quad \bar{I} = I_m e^{j\varphi}$



D'après la loi des mailles

$$\bar{E} = R\bar{I} + \bar{Z}_L\bar{I} + \bar{Z}_C\bar{I} = \left[R + j\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)\right]\bar{I} \tag{54}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)}} \tag{55}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} I_m = \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)^2}} = \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1 - LC\omega^2}{C\omega}\right)^2}} \\ \varphi = 0 - Arctg\left(\dfrac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}\right) = Arctg\left(\dfrac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) \end{cases} \tag{56}$$

On obtient donc le même résultat que celui obtenu à l'aide de la représentation trigonométrique. La représentation complexe permet de déduire $i(t)$ plus rapidement que la représentation trigonométrique.

5. Puissance électrique en courant alternatif sinusoïdal

La puissance est la quantité d'énergie par unité de temps, elle est exprimée en Watt (W).

Dans un dipôle électrique, la puissance s'écrit sous la forme

- Régime continu : $P = UI$
- Régime variable : $p(t) = u(t)\, i(t)$

p en Watt (W), u en Volt (V) et i en Ampère (A).

En régime alternatif, les grandeurs électriques (tension, intensité) sont variables. La puissance instantanée, $p(t) = u(t)\, i(t)$, est aussi variable.

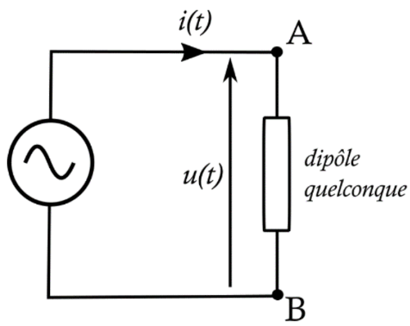
On définit plusieurs grandeurs physiques, homogènes à une puissance :

- La puissance active ou réelle ;
- La puissance apparente ;
- La puissance réactive.
- La puissance complexe ;

5.1. Puissance active

On considère, sur la figure ci-contre, un dipôle en régime sinusoïdal, parcouru par un courant $i(t)$ et une tension $u(t)$. On note

$$\begin{cases} u(t) = \sqrt{2}U_{eff}cos(\omega t) \\ i(t) = \sqrt{2}I_{eff}\, cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$



On a la puissance instantanée

$$p(t) = u(t)\, i(t) = 2U_{eff}I_{eff}cos(\omega t)\, cos(\omega t - \varphi) \tag{57}$$

Or, on a : $cos(a)\, cos(b) = \frac{1}{2}[cos(a - b) + \, cos(a + b)]$

Donc

$$p(t) = U_{eff}I_{eff}[cos(\varphi) + cos(2\omega t - \varphi)] \tag{58}$$

On a deux contributions : ***la puissance active*** P_a et la puissance fluctuante $p_f(t)$ (partie variable dans le temps de la puissance instantanée).

$$p_f(t) = U_{eff}I_{eff}cos(2\omega t - \varphi) \tag{59}$$

$$P_a = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = U_{eff}I_{eff}cos(\varphi) \tag{60}$$

- Le déphasage φ joue donc un rôle crucial dans la puissance active.

- Le produit $U_{eff}I_{eff}$ est appelé ***puissance apparente :*** $P_{app} = U_{eff}I_{eff}$ *(mesurée en Volt-Ampère (VA)).*
- Le rapport $\frac{P_a}{U_{eff}I_{eff}} = cos(\varphi)$ est appelé ***facteur de puissance*** : $\frac{P_a}{P_{app}} = cos(\varphi) = \lambda$

Si $\bar{Z} = R + jX$ est l'impédance complexe de la branche AB considérée, alors : $U_m = |\bar{Z}|I_m$ et $cos(\varphi) = \frac{R}{|\bar{Z}|}$

D'où :

$$P_a = U_{eff}I_{eff}cos(\varphi) = |\bar{Z}|\frac{I_m^2}{2}\frac{R}{|\bar{Z}|} = R\frac{I_m^2}{2} = RI_{eff}^2 \quad (61)$$

<u>Remarque :</u>

Cette dernière expression de P_a qui n'est autre que la puissance dissipée par effet joule dans une résistance R, est à l'origine de la définition de la valeur efficace. En effet, la valeur efficace d'un courant (ou d'une tension) sinusoïdale est la valeur du courant (ou de la tension) continu qui demeurait la même puissance, que la puissance active dissipée par effet joule aux bornes de R.

5.2. Puissance réactive

La puissance réactive n'est définie qu'en régime sinusoïdal, c'est l'amplitude de la composante alternative de la puissance instantanée. On la définit symétriquement à la puissance active selon

$$P_r = U_{eff}I_{eff}sin(\varphi) \quad (62)$$

Si $\bar{Z} = R + jX$ est l'impédance complexe de la branche AB considérée, alors : $U_m = |\bar{Z}|I_m$ et $sin(\varphi) = \frac{X}{|\bar{Z}|}$

D'où :

$$P_r = U_{eff}I_{eff}sin(\varphi) = |\bar{Z}|\frac{I_m^2}{2}\frac{X}{|\bar{Z}|} = X\frac{I_m^2}{2} = XI_{eff}^2 \quad (63)$$

La partie imaginaire X de $\bar{Z}$ est appelée *réactance* de la branche AB.

L'unité de puissance réactive est le *VOLT-AMPÈRE-RÉACTIF (VAR)*, son signe dépend de l'angle de déphasage produit par le récepteur considéré :

- Pour un récepteur inductif ($\varphi > 0$) la puissance réactive est positive,
- Pour un récepteur capacitif ($\varphi < 0$) la puissance réactive est négative.

5.3. Puissance complexe

On appelle la puissance complexe $\bar{P}$ le complexe dont la partie réelle est la puissance active P_a et la partie imaginaire est la puissance réactive P_r :

$$\bar{P} = P_a + jP_r \tag{64}$$

Elle permet de regrouper les différentes puissances définies précédemment :

$$P_a = Re(\bar{P})\ ;\quad P_r = Im(\bar{P}) \quad et \quad P_{app} = \sqrt{P_a^2 + P_r^2} = U_{eff}I_{eff} \tag{65}$$

On peut exprimer la puissance complexe $\bar{P}$ sous la forme suivante

$$\bar{P} = U_{eff}I_{eff}cos(\varphi) + jU_{eff}I_{eff}sin(\varphi) = \frac{U_m I_m}{2}e^{j\varphi} = \frac{1}{2}\bar{U}\bar{I}^* \tag{66}$$

Où $\bar{I}^*$ est le complexe conjugué de $\bar{I}$

Or on a $\bar{U} = \bar{Z}\bar{I}$; soit

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{U}\bar{I}^* = \frac{1}{2}\bar{Z}I_M^2 = \bar{Z}I_{eff}^2 \tag{67}$$

- Pour une résistance pure : $\bar{U} = R\bar{I} \quad \Longrightarrow \quad \bar{P} = RI_{eff}^2 = P_a \;\; et \;\; P_r = 0$
- Pour une inductance pure : $\bar{U} = jL\omega\bar{I} \quad \Longrightarrow \quad \bar{P} = jL\omega I_{eff}^2 = jP_r \;\; avec \;\; P_a = 0 \; et \; P_r = L\omega I_{eff}^2$
- Pour une capacité pure : $\bar{U} = \frac{-j}{C\omega}\bar{I} \quad \Longrightarrow \quad \bar{P} = \frac{-j}{C\omega}I_{eff}^2 = jP_r \;\; avec \;\; P_a = 0 \; et \; P_r = -\frac{I_{eff}^2}{C\omega}$

Remarque : P_a est toujours positive (c'est une vraie puissance) alors que P_r peur être aussi bien positive que négative (c'est une puissance fictive qui n'a pas de réalité physique).

5.4. Méthode de Boucherot

Théorème de Boucherot : Si un circuit contient N composants, absorbant chacun une puissance active P_{ai} et une puissance réactive P_{ri} , alors les puissances actives et réactives totales sont respectivement les sommes des puissances actives et réactives du circuit :

$$P_{atot} = \sum_i P_{ai} \quad et \quad P_{rtot} = \sum_i P_{ri} \tag{68}$$

Remarque

La puissance apparente totale peut s'exprimer en fonction des puissances active et réactive :

$$P_{apptot} = \sqrt{P_{atot}^2 + P_{rtot}^2} \tag{69}$$

En revanche, elle n'est pas égale à la somme des puissances apparentes :

$$P_{apptot} \neq \sum_i P_{appi} \tag{70}$$