Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire de Ouarzazate
Module : Analyse Numérique
Année universitaire : 2020/2021

Prof. A. Ou-yassine

Feuille d'exercices 1 : (SMI4)

Exercice 1 :

1) Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée admette une décomposition LU.
Montrer que si la décomposition LU existe alors cette décomposition est unique.
2) Déterminer l'inverse de la matrice triangulaire A (utiliser la méthode de remontée) et appliquer la méthode de Gauss pour résoudre le système linéaire (S)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (S) \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 13x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 18x_3 = 11 \end{cases}$$

Exercice 2 :

On considère le système linéaire $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

.

1) Vérifier que A admet une décomposition LU.
2) Calculer la factorisation LU de A.
3) Résoudre le système $Ax = b$ (utiliser la décomposition LU)

Exercice 3 :

On considère le système linéaire $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

1) Expliquer pourquoi A n'admet pas de décomposition LU ?
2) Trouver une matrice P de permutation de façon à ce que la matrice PA soit factorisable, puis calculer la factorisation LU de PA.
3) Résoudre le système $Ax = b$ (utiliser la factorisation trouvée).
4) Calculer le déterminant de la matrice A en utilisant la factorisations LU.

Exercice 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.
2) Ecrire l'algorithme de factorisation de Cholesky
3) Déterminer la matrice L triangulaire inférieure telle que $A = L^T L$.
4) Calculer le déterminant de la matrice A en utilisant la factorisations $L^T L$.

Exercice 5 :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\rho(J) < 1 < \rho(L_{GS})$,
   avec J matrice de Jacobi et L_{GS} matrice de Gauss-Seidel.
2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\rho(L_{GS}) < 1 < \rho(J)$.