Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire
Ouarzazate

الكلية متعددة التخصصات - ورزازات
ⵜⴰⵙⴳⵉⵍⵜ ⵜⴰⵎⵜⵜⴻⴳⵜ - ⵡⴰⵔⵣⴰⵣⴰⵜ
FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE OUARZAZATE

Filière : SMI-S4

A.U : 2020-2021

Module : Électromagnétisme dans le Vide

Travaux Dirigés : Correction Série 1

Prof. Youssef HADDOUT

youssefhaddout@hotmail.com

Exercice 1 : Ponts diviseurs de tension et de courant

1. **Le circuit de la figure 1 est composé d'une seule maille. Si on applique la loi des mailles à ce circuit on obtient :**

$$\bar{Z}_1\bar{I} + \bar{Z}_2\bar{I} = \bar{E} \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{I}} = \frac{\bar{\boldsymbol{E}}}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}$$

Soit

$$\bar{\boldsymbol{U}}_1 = \bar{\boldsymbol{Z}}_1\bar{\boldsymbol{I}} = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_1}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}\bar{\boldsymbol{E}} \;\; et \;\; \bar{\boldsymbol{U}}_2 = \bar{\boldsymbol{Z}}_2\bar{\boldsymbol{I}} = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_2}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}\bar{\boldsymbol{E}}$$

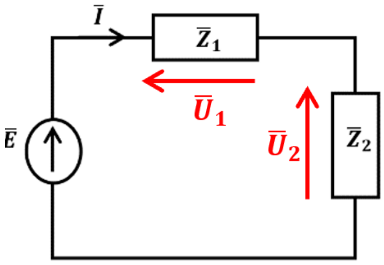


Figure 1

2. **Si on applique les lois de Kirchhoff au circuit considéré (Figure 2), on obtient le système d'équations suivant :**

$$\begin{cases} \bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \\ \bar{E} = \bar{Z}_1\bar{I}_1 = \bar{Z}_2\bar{I}_1 \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1} \;\; et \;\; \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_2}$$

Alors

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{E}\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} - \frac{1}{\bar{Z}_2}\right) = \bar{E}\,\frac{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1\bar{Z}_2} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{E}} = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_2\bar{\boldsymbol{Z}}_1}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}\bar{\boldsymbol{I}}$$

D'où

$$\bar{\boldsymbol{I}}_1 = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_2}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}\bar{\boldsymbol{I}} \quad et \quad \bar{\boldsymbol{I}}_2 = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_1}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}\bar{\boldsymbol{I}}$$

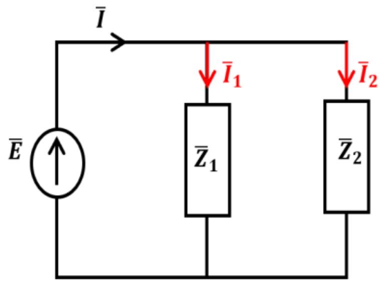


Figure 2

3. **Les règles des ponts diviseurs de tension et de courant sont donc les suivantes :**

- ***Pont diviseur de tension*** : La tension complexe $\bar{E}$ se divise en deux parties, une partie aux bornes de $\bar{Z}_1$ proportionnelle à $\bar{Z}_1$ et l'autre partie aux bornes de $\bar{Z}_2$:

$$\bar{\boldsymbol{U}}_1 = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_1}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}\bar{\boldsymbol{E}} \quad et \quad \bar{\boldsymbol{U}}_2 = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_2}{\bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2}\bar{\boldsymbol{E}}$$

- ***Pont diviseur de tension*** : Le courant complexe $\bar{I}$ se divise en deux parties, une partie dans $\bar{Z}_1$ proportionnelle à $\bar{Z}_2$ et l'autre partie dans $\bar{Z}_2$ proportionnelle à $\bar{Z}_1$:

$$\boldsymbol{\bar{I}_1 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\bar{I} \quad et \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\bar{I}}$$

***Exercice 2* :**

1. Impédance complexe $\bar{Z}_{AB}$ entre A et B pour chaque circuit.

- ***Pour la Figure 1*** : L'impédance complexe $\bar{Z}_{AB}$ entre la branche A et B est l'impédance équivalente à l'association des trois impédances $\bar{Z}_R$, $\bar{Z}_C$ et $\bar{Z}_L$ en parallèle.

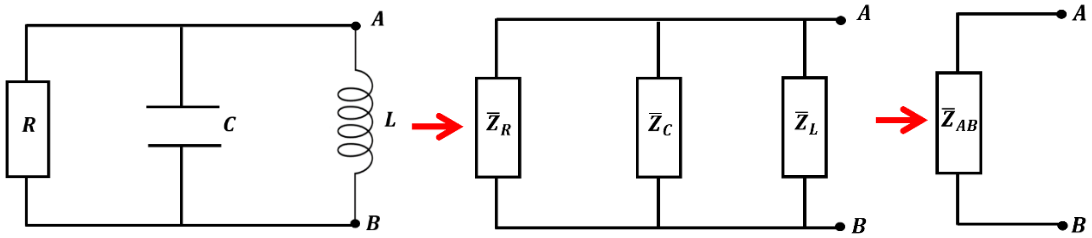


Figure 1

Donc

$$\frac{1}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C} + \frac{1}{\bar{Z}_L} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega}$$

D'où

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} = \frac{R(L\omega)^2 + jR^2L\omega(1 - LC\omega^2)}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}$$

Ou bien

$$\boxed{\bar{Z}_{AB} = \frac{R(L\omega)^2}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2} + j\frac{R^2L\omega(1 - LC\omega^2)}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2} = a + jb}$$

- ***Pour la Figure 2*** : L'impédance complexe $\bar{Z}_{AB}$ entre la branche A et B est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{Z}_L$ en série avec l'impédance équivalente $\bar{Z}_{CB}$ entre C et B.

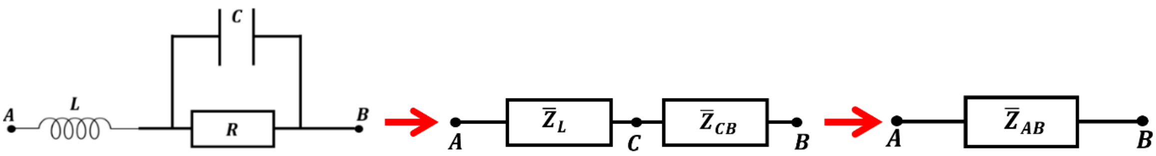


Figure 2

Or, $\bar{Z}_{CB}$ est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{Z}_R$ en parallèle avec $\bar{Z}_C$.

Alors

$$\frac{1}{\bar{Z}_{CB}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_{CB} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Soit

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_L + \bar{Z}_{CB} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{R + j(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)}{1 + (RC\omega)^2}$$

Ou bien

$$\boxed{\bar{Z}_{AB} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\frac{(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)}{1 + (RC\omega)^2} = a + jb}$$

2. Module et l'argument de $\bar{Z}_{AB}$ pour chaque circuit.

- ***Pour la figure 1*** :

  - ***Module de $\bar{Z}_{AB}$***

$$\bar{Z}_{AB} = a + jb \quad \Longrightarrow \quad Z_{AB} = |\bar{Z}_{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Soit

$$\boxed{Z_{AB} = |\bar{Z}_{AB}| = \frac{\sqrt{(R(L\omega)^2)^2 + (R^2L\omega(1 - LC\omega^2))^2}}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2} = \frac{RL\omega}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}}$$

  - ***Argument de $\bar{Z}_{AB}$***

$$\bar{Z}_{AB} = a + jb \quad si\ \varphi_{AB}\ est\ l'argument$$

Alors

$$tg(\varphi_{AB}) = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{AB} = Arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Soit

$$\boxed{\varphi_{AB} = Arg(\bar{Z}_{AB}) = Arctg\left(\frac{R^2L\omega(1 - LC\omega^2)}{R(L\omega)^2}\right) = Arctg\left(\frac{R(1 - LC\omega^2)}{L\omega}\right)}$$

On peut écrire alors

$$\bar{Z}_{AB} = |\bar{Z}_{AB}|e^{j\,\varphi_{AB}}$$

- ***Pour la figure 2 :***

  - ***Module de $\bar{Z}_{AB}$***

$$\bar{Z}_{AB} = a + jb \quad \Longrightarrow \quad Z_{AB} = |\bar{Z}_{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Soit

$$\boxed{Z_{AB} = |\bar{Z}_{AB}| = \frac{\sqrt{R^2 + (L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)^2}}{1 + (RC\omega)^2}}$$

  - ***Argument de $\bar{Z}_{AB}$***

$$\bar{Z}_{AB} = a + jb \quad si\ \varphi_{AB}\ est\ l'argument$$

Alors

$$tg(\varphi_{AB}) = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{AB} = Arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Soit

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi_{AB} = Arg(\bar{Z}_{AB}) = Arctg\left(\frac{L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega}{R}\right)}}$$

On peut écrire alors

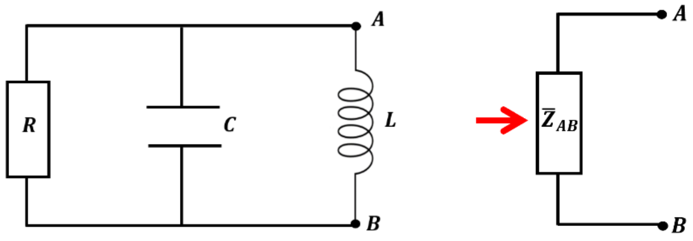
$$\boldsymbol{\bar{Z}_{AB} = |\bar{Z}_{AB}|e^{j\,\varphi_{AB}}}$$

3. Détermination la nature et la valeur des éléments passif du circuit équivalent.

- ***Données***

$$f = 50\,Hz \quad \Longrightarrow \quad \omega = 2\pi f = 314\ rad/s$$
$$R = 10\,k\Omega = 10^4\,\Omega$$
$$C = 200\,\mu F = 2\,10^{-4}F$$
$$L = 100\,mH = 0.1\,H$$

- ***Pour la figure 1 :***



$$\boldsymbol{\bar{Z}_{AB} = \frac{R(L\omega)^2}{R^2(1-LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2} + j\frac{R^2L\omega(1-LC\omega^2)}{R^2(1-LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$$

On peut écrire

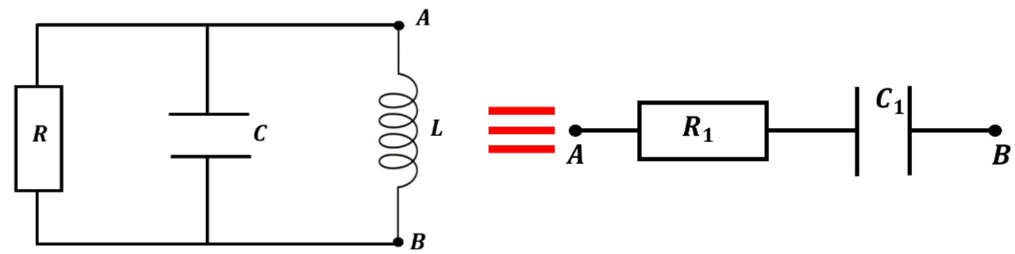
$$\boldsymbol{\bar{Z}_{AB} = Re(\bar{Z}_{AB}) + j\,Im(\bar{Z}_{AB})}$$

- ✓ $Re(\bar{Z}_{AB})$ c'est toujours une résistance.
- ✓ Si $Im(\bar{Z}_{AB}) > 0$ $c'est\ une\ bobine\ et\ si\ Im(\bar{Z}_{AB}) < 0\ \ c'est\ un\ condensateur$
- ✓ On pose $\boldsymbol{\bar{Z}_{AB} = R_1 + j\,X}$ le signe de X dépend de signe de $1 - LC\omega^2$

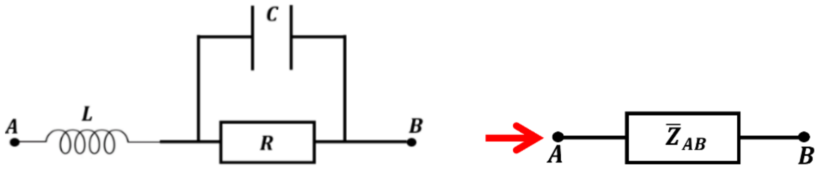
Alors, la partie réelle $Re(\bar{Z}_{AB})$ de $\bar{Z}_{AB}$ est positive et la partie imaginaire $Im(\bar{Z}_{AB})$ est négative (car $1 - LC\omega^2 = -0.972$ est négatif). Donc $\bar{Z}_{AB}$ est l'impédance équivalente à une résistance R_1 (partie réelle de $\bar{Z}_{AB}$) en série avec un condensateur C_1 telle que : $\frac{-1}{C_1\omega} = Im(\bar{Z}_{AB})$

Avec $\bar{Z}_{AB} = R_1 + j\,X\ = R_1 - j\,\frac{1}{C_1\omega}$, soit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{R_1 = Re(\bar{Z}_{AB}) = \dfrac{R(L\omega)^2}{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2} \approx 0.01\Omega} \\ \boldsymbol{C_1 = -\dfrac{1}{\omega\,Im(\bar{Z}_{AB})} \approx 920\mu F} \end{cases}$$



- ***Pour la figure 2*** :



$$\bar{Z}_{AB} = \frac{R}{1+(RC\omega)^2} + j\frac{(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)}{1+(RC\omega)^2}$$

On peut écrire

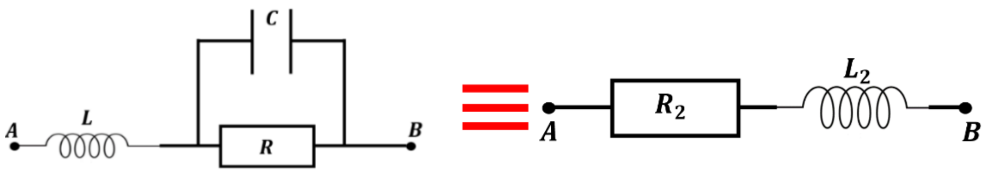
$$\bar{Z}_{AB} = Re(\bar{Z}_{AB}) + j\,Im(\bar{Z}_{AB})$$

- ✓ $Re(\bar{Z}_{AB})$ C'est toujours une résistance.
- ✓ Si $Im(\bar{Z}_{AB}) > 0$ *c'est une bobine et si* $Im(\bar{Z}_{AB}) < 0$ *c'est un condensateur*
- ✓ On pose $\bar{Z}_{AB} = R_2 + j\,X$ le signe de X dépend de signe de $L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega$

Alors, la partie réelle $Re(\bar{Z}_{AB})$ de $\bar{Z}_{AB}$ est positive et la partie imaginaire $Im(\bar{Z}_{AB})$ est positive (car $L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega = 1.17\ 10^8$ est positif). Donc $\bar{Z}_{AB}$ est l'impédance équivalente à une résistance R_2 (partie réelle de $\bar{Z}_{AB}$) en série avec une bobine d'inductance L_2 telle que : $L_2\omega = Im(\bar{Z}_{AB})$.

Avec $\bar{Z}_{AB} = R_2 + j\,X = R_2 + j\,L_2\omega$, soit :

$$\begin{cases} R_2 = Re(\bar{Z}_{AB}) = \dfrac{R}{1+(RC\omega)^2} \approx 0.025\Omega \\ L_2 = \dfrac{Im(\bar{Z}_{AB})}{\omega} \approx 49mH \end{cases}$$

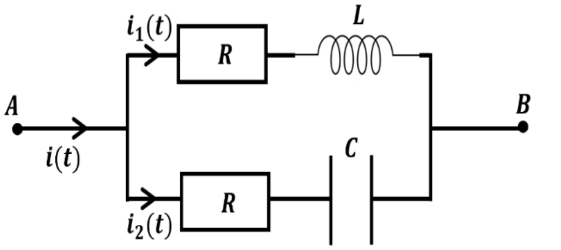


Exercice 3 :

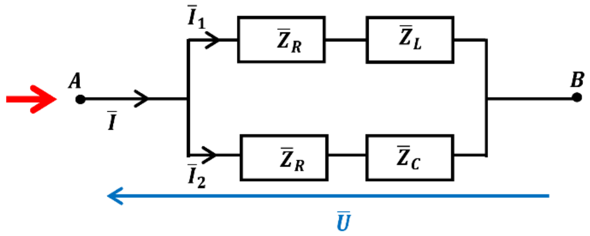
Considérons le circuit ci-dessous, on applique entre A et B une tension sinusoïdale

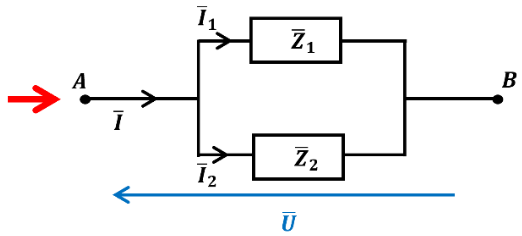
$$u(t) = U_m\cos(\omega t)$$

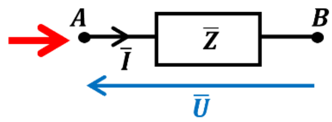
On pose $R = L\omega = \frac{1}{C\omega}$



1. Impédance complexe $\bar{Z}$ équivalente du circuit AB.







L'impédance complexe $\bar{Z}$ entre la branche A et B est l'impédance équivalente à l'association de l'impédance équivalente $\bar{Z}_1$ en parallèle avec l'impédance équivalente $\bar{Z}_2$.

- $\bar{Z}_1$ est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{Z}_R$ en série avec $\bar{Z}_L$

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L = R + jL\omega = R(1+j)$$

- $\bar{Z}_2$ est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{Z}_R$ en série avec $\bar{Z}_C$

$$\bar{Z}_2 = \bar{Z}_R + \bar{Z}_C = R - j\frac{1}{C\omega} = R(1-j)$$

Soit

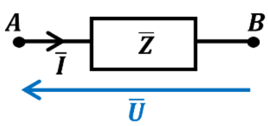
$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = R}$$

2. Intensités des courants $i(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

- Pour le courant $i(t)$, $\boldsymbol{i(t) = I_m\, cos(\omega t + \varphi_i)}$

$$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I}$$

$$\Longrightarrow \bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}}$$



$$\Longrightarrow \begin{cases} I_m = |\bar{I}| = \dfrac{|\bar{U}|}{|\bar{Z}|} = \dfrac{U_m}{R} \\ \varphi_i = Arg(\bar{I}) = Arg(\bar{U}) - Arg(\bar{Z}) = 0 - Arctg\left(\dfrac{0}{R}\right) = 0 \end{cases}$$

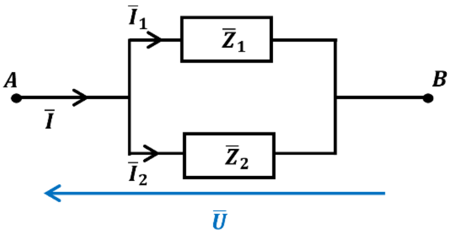
D'où

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = \frac{U_m}{R}\, cos(\omega t)}}$$

➢ Pour le courant $i_1(t)$, $\boldsymbol{i_1(t) = I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_{1i})}$

$$\bar{U} = \bar{Z}_1 \bar{I}_1$$

$$\Longrightarrow \ \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1}$$



$$\Longrightarrow \begin{cases} I_{1m} = |\bar{I}_1| = \dfrac{|\bar{U}|}{|\bar{Z}_1|} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}R} \\ \varphi_{1i} = Arg(\bar{I}_1) = Arg(\bar{U}) - Arg(\bar{Z}_1) = 0 - Arctg\left(\dfrac{R}{R}\right) = -Arctg(1) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

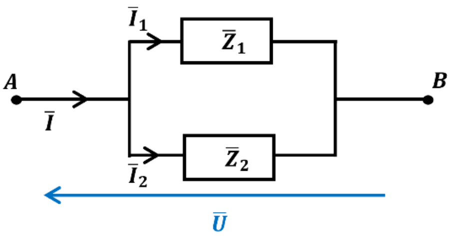
D'où

$$\boxed{\boldsymbol{i_1(t) = \frac{U_m}{\sqrt{2}R}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

➢ Pour le courant $i_2(t)$, $\boldsymbol{i_2(t) = I_{2m}\cos(\omega t + \varphi_{2i})}$

$$\bar{U} = \bar{Z}_2 \bar{I}_2$$

$$\Longrightarrow \ \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2}$$



$$\Longrightarrow \begin{cases} I_{2m} = |\bar{I}_2| = \dfrac{|\bar{U}|}{|\bar{Z}_2|} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}R} \\ \varphi_{2i} = Arg(\bar{I}_2) = Arg(\bar{U}) - Arg(\bar{Z}_2) = 0 - Arctg\left(-\dfrac{R}{R}\right) = Arctg(1) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\boldsymbol{i_2(t) = \frac{U_m}{\sqrt{2}R}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}}$$

3. Vérification : $\boldsymbol{i(t) = i_1(t) + i_2(t)}$

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{2}R}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{U_m}{\sqrt{2}R}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{U_m}{\sqrt{2}R}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Or, on a $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

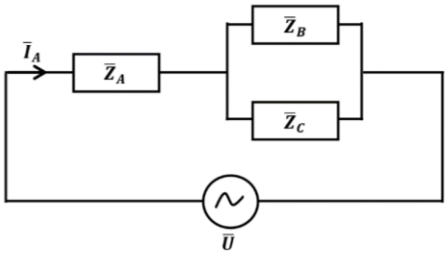
Soit

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = \frac{2U_m}{\sqrt{2}R}\cos(\omega t)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{U_m}{R}\cos(\omega t)}}$$

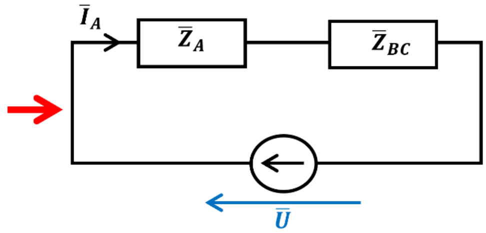
Exercice 4 :

I. On considère un montage à l'aide de trois impédances $\bar{Z}_A$, $\bar{Z}_B$ et $\bar{Z}_C$ branchées comme indiqué sur le schéma. Ce montage (***Figure 1***) est alimenté par une source de tension sinusoïdale :

$$u(t) = U_0 \, cos(\omega t)$$



1. Détermination en fonction de $\bar{U}$, $\bar{Z}_A$, $\bar{Z}_B$ et $\bar{Z}_C$ le courant $\bar{I}_A$ qui circule dans l'impédance $\bar{Z}_A$.



D'après la loi d'Ohm

$$\bar{U} = (\bar{Z}_A + \bar{Z}_{BC})\bar{I}_A$$

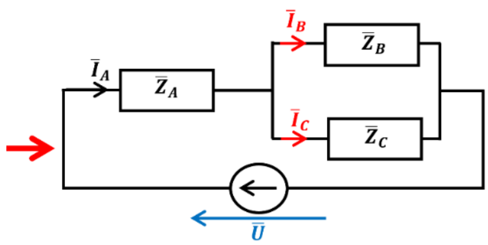
Or $\bar{Z}_{BC}$ est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{\boldsymbol{Z}}_B$ en parallèle avec $\bar{\boldsymbol{Z}}_C$

$$\frac{1}{\bar{Z}_{BC}} = \frac{1}{\bar{Z}_B} + \frac{1}{\bar{Z}_C} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\boldsymbol{Z}}_{BC} = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_B \bar{\boldsymbol{Z}}_C}{\bar{\boldsymbol{Z}}_B + \bar{\boldsymbol{Z}}_C}$$

Soit

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{I}}_A = \frac{\bar{\boldsymbol{U}}}{\bar{\boldsymbol{Z}}_A + \bar{\boldsymbol{Z}}_{BC}} = \frac{\bar{\boldsymbol{Z}}_B + \bar{\boldsymbol{Z}}_C}{\bar{\boldsymbol{Z}}_A \bar{\boldsymbol{Z}}_B + \bar{\boldsymbol{Z}}_A \bar{\boldsymbol{Z}}_C + \bar{\boldsymbol{Z}}_B \bar{\boldsymbol{Z}}_C} \bar{\boldsymbol{U}}}$$

2. Détermination en fonction de $\bar{U}$, $\bar{Z}_A$, $\bar{Z}_B$ et $\bar{Z}_C$ le courant $\bar{I}_C$ qui circule dans l'impédance $\bar{Z}_C$.



D'après la loi des nœuds

$$\bar{I}_A = \bar{I}_B + \bar{I}_C$$

Or

$$\bar{Z}_B \bar{I}_B = \bar{Z}_C \bar{I}_C \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_B = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_B} \bar{I}_C$$

$$\bar{I}_A = \left(\frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_B} + 1\right) \bar{I}_C \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_c = \frac{\bar{Z}_B}{\bar{Z}_B + \bar{Z}_C} \bar{I}_A$$

Soit

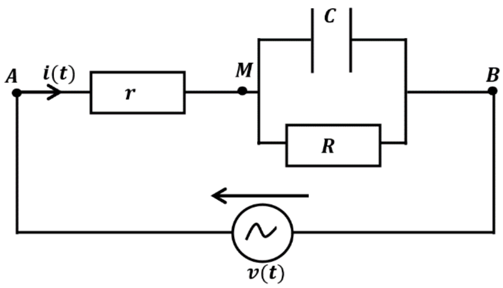
$$\boxed{\bar{I}_C = \frac{\bar{Z}_B}{\bar{Z}_A \bar{Z}_B + \bar{Z}_A \bar{Z}_C + \bar{Z}_B \bar{Z}_C} \bar{U}}$$

3. Comment peut-on constituer $\bar{Z}_A$ et $\bar{Z}_B$ pour que le courant $\bar{I}_C$ soit indépendant de $\bar{Z}_C$.

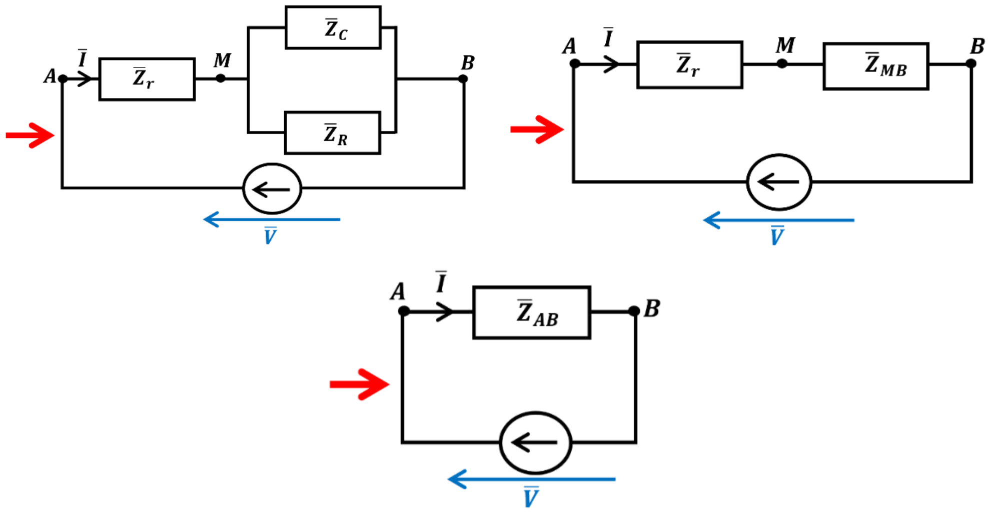
Pour que $\bar{I}_C$ soit indépendant de $\bar{Z}_C$, alors

$$\bar{Z}_A \bar{Z}_C + \bar{Z}_B \bar{Z}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_A + \bar{Z}_B = 0$$

II. On considère le circuit électrique présenté sur la ***figure 2***.



1. Impédance complexe $\bar{Z}_{AB}$ du circuit (module, argument).



L'impédance complexe $\bar{\boldsymbol{Z}}_{AB}$ entre la branche A et B est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{\boldsymbol{Z}}_r = \boldsymbol{r}$ en série avec l'impédance équivalente $\bar{\boldsymbol{Z}}_{MB}$.

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_r + \bar{Z}_{MB}$$

Or, $\bar{\boldsymbol{Z}}_{MB}$ est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{\boldsymbol{Z}}_R$ en parallèle avec $\bar{\boldsymbol{Z}}_C$.

$$\frac{1}{\bar{Z}_{MB}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{R} + jC\omega \implies \bar{Z}_{MB} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Soit

$$\bar{Z}_{AB} = r + \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{r + R + jrRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\implies \bar{Z}_{AB} = \frac{r + R + jrRC\omega - j(r+R)RC\omega + rR^2C^2\omega^2}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

$$\boxed{\implies \bar{Z}_{AB} = \frac{r + R + rR^2C^2\omega^2 - jR^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} = \frac{r + R + rR^2C^2\omega^2}{1 + R^2C^2\omega^2} + j\frac{(-R^2C\omega)}{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

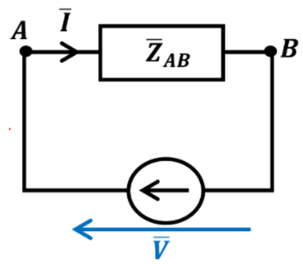
$$\boxed{\implies \bar{Z}_{AB} = a + jb = Z_{AB}\, e^{j\phi} = |\bar{Z}_{AB}|\, e^{j\phi}}$$

$$\boxed{\implies \begin{cases} \text{Module: } Z_{AB} = |\bar{Z}_{AB}| = \sqrt{\left(\dfrac{r + R + rR^2C^2\omega^2}{1 + R^2C^2\omega^2}\right)^2 + \dfrac{R^4C^2\omega^2}{(1 + R^2C^2\omega^2)^2}} \\ \text{Argument : } \phi = Arg(\bar{Z}_{AB}) = Arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) = -Arctg\left(\dfrac{R^2C\omega}{r + R + rR^2C^2\omega^2}\right) \end{cases}}$$

2. **Entre les bornes A et B on applique la tension sinusoïdale $v(t) = V_m\cos(\omega t)$.**

Détermination du courant principal $i(t)$, $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$

En notation complexe



$$v(t) = V_m\cos(\omega t) \implies \bar{V} = V_m e^{j0}$$

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi) \implies \bar{I} = I_m e^{j\varphi}$$

$$\boxed{\bar{V} = \bar{Z}_{AB}\bar{I}}$$

Or $\bar{I}\cdot\bar{I}^* = I_m^2$ (où $\bar{I}^*$ est le complexe conjugué de $\bar{I}$)

$$V_m^2 = \bar{V}\cdot\bar{V}^* = \bar{Z}_{AB}\bar{I}\cdot\bar{Z}_{AB}^*\,\bar{I}^* = |\bar{Z}_{AB}|^2 I_m^2 = Z_{AB}^2 I_m^2$$

D'où

$$\boxed{\implies I_m = \frac{V_m}{|\bar{Z}_{AB}|} = \frac{V_m}{Z_{AB}}}$$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{\left(\dfrac{r + R + rR^2C^2\omega^2}{1 + R^2C^2\omega^2}\right)^2 + \dfrac{R^4C^2\omega^2}{(1 + R^2C^2\omega^2)^2}}}}$$

Or, on a

$$\bar{V} = \bar{Z}_{AB}\bar{I} \quad \Longrightarrow \quad V_m e^{j0} = Z_{AB} e^{j\phi} I_m e^{j\varphi}$$

$$\Longrightarrow \quad V_m e^{j0} = Z_{AB} I_m e^{j(\phi+\varphi)}$$

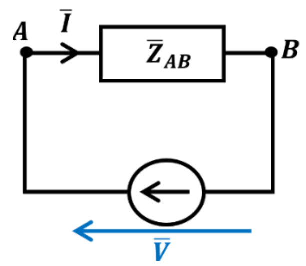
$$\Longrightarrow \quad \phi + \varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -\phi$$

D'où

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi = -\phi = Arctg\left(\frac{R^2 C\omega}{r + R + rR^2C^2\omega^2}\right)}}$$

Ou bien ; d'après la loi d'Ohm

$$\bar{V} = \bar{Z}_{AB}\bar{I} \quad \Longrightarrow \quad \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{AB}}$$



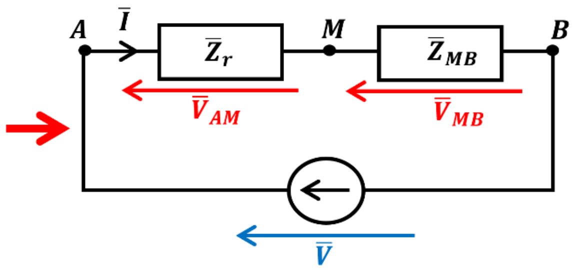
Soit

$$\boxed{\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{I_m = |\bar{I}| = \dfrac{|\bar{V}|}{|\bar{Z}_{AB}|} = \dfrac{V_m}{\sqrt{\left(\dfrac{r + R + rR^2C^2\omega^2}{1 + R^2C^2\omega^2}\right)^2 + \dfrac{R^4C^2\omega^2}{(1 + R^2C^2\omega^2)^2}}}} \\ \boldsymbol{\varphi = Arg(\bar{I}) = Arg(\bar{V}) - Arg(\bar{Z}_{AB}) = 0 - \phi = Arctg\left(\dfrac{R^2C\omega}{r + R + rR^2C^2\omega^2}\right)} \end{cases}}$$

3. **La tension $\boldsymbol{v_{MB}(t)}$ aux bornes de l'association de $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{C}$ en parallèle en fonction de $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{\omega}$.**

$$v_{MB}(t) = \mathrm{V}_m^{MB} \cos(\omega t + \varphi_{MB})$$

Or on a



$$\bar{V}_{MB} = \bar{Z}_{MB}\bar{I} = \bar{Z}_{MB}\frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{\bar{Z}_{MB}}{\bar{Z}_{AB}}\bar{V}$$

Or

$$\bar{Z}_{MB} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad et \quad \bar{Z}_{AB} = \frac{r + R + jrRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\bar{Z}_{MB}}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{R}{r + R + jrRC\omega}$$

Soit

$$\bar{V}_{MB} = \frac{R}{r + R + jrRC\omega}\,\bar{V}$$

Alors

❖ **L'amplitude V_m^{MB} de la tension $v_{MB}(t)$**

$$\boxed{\mathbf{V}_m^{MB} = |\bar{V}_{MB}| = \frac{R}{\sqrt{(r+R)^2 + (rRC\omega)^2}}\,V_m}$$

❖ **La phase φ_{MB} à l'origine de la tension $v_{MB}(t)$**

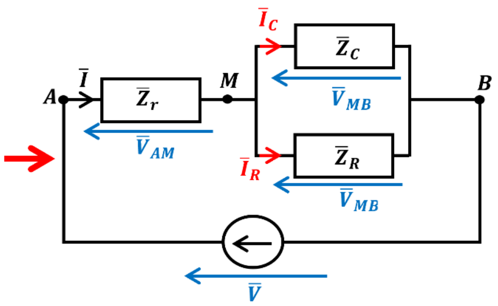
$$\varphi_{MB} = Arg(\bar{V}_{MB}) = Arg(R) - Arg(r + R + jrRC\omega) + Arg(\bar{V})$$

$$\varphi_{MB} = Arctan\left(\frac{0}{R}\right) - Arctan\left(\frac{rRC\omega}{r+R}\right) + 0$$

$$\boxed{\varphi_{MB} = -Arctan\left(\frac{rRC\omega}{r+R}\right)}$$

4. Le courant $i_C(t) = I_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_C)$ qui circule dans le condensateur C.

Or on a



$$\bar{V}_{MB} = \bar{Z}_C \bar{I}_C \quad \Longrightarrow \quad \bar{I}_C = \frac{\bar{V}_{MB}}{\bar{Z}_C} = \frac{\bar{Z}_{MB}}{\bar{Z}_{AB}}\frac{\bar{V}}{\bar{Z}_C}$$

Soit

$$\Longrightarrow \quad \bar{I}_C = \frac{jRC\omega}{r + R + jrRC\omega}\,\bar{V}$$

D'où

❖ **L'amplitude I_{Cm} du courant $i_C(t)$**

$$\boxed{I_{Cm} = |\bar{I}_C| = \frac{|jRC\omega|}{|r + R + jrRC\omega|}|\bar{V}| = \frac{RC\omega}{\sqrt{(r+R)^2 + (rRC\omega)^2}}\,V_m}$$

❖ **La phase φ_C à l'origine du courant $i_C(t)$**

$$\varphi_C = Arg(\bar{I}_C) = Arg(jRC\omega) - Arg(r + R + jrRC\omega) + Arg(\bar{V})$$

$$\varphi_C = Arctan\left(\frac{RC\omega}{0}\right) - Arctan\left(\frac{rRC\omega}{r+R}\right) + 0$$

$$\varphi_C = \frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{rRC\omega}{r+R}\right)$$

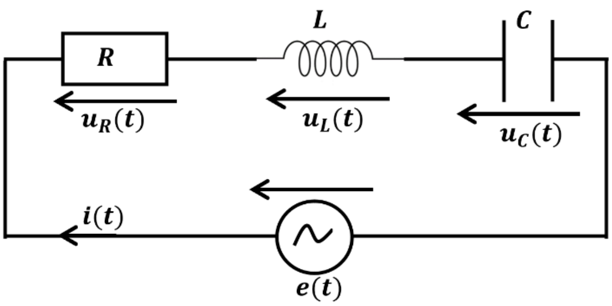
Or on a $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Donc

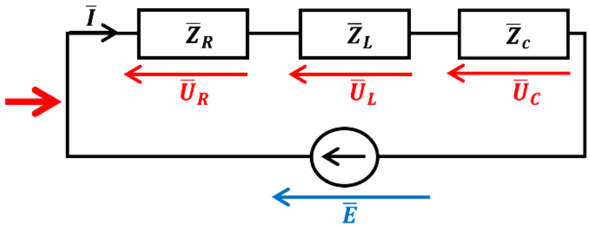
$$\boxed{\varphi_C = Arctan\left(\frac{r+R}{rRC\omega}\right)}$$

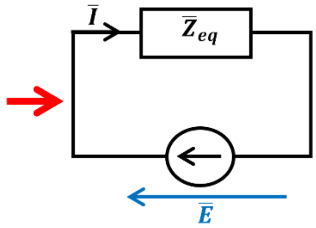
<u>Exercice 5</u> :

Le circuit suivant est alimenté par un générateur de fréquence $f = 50\ Hz$ et d'amplitude $E_m = 311\ V$. La phase à l'origine de la tension $\mathrm{e}(t)$ délivrée par le générateur est prise égale à zéro. Données : $R = 40\ \Omega$, $L = 0.2\ H$, $C = 5\ \mu F$.



1. **L'amplitude complexe $\bar{I}$ du courant $i(t)$. En déduire l'amplitude I_m et la phase à l'origine φ_i de l'intensité $i(t)$.**





L'impédance complexe $\bar{\boldsymbol{Z}}_{eq}$ équivalente du circuit est l'impédance équivalente à l'association des trois impédances $\bar{\boldsymbol{Z}}_R$, $\bar{\boldsymbol{Z}}_C$ et $\bar{\boldsymbol{Z}}_L$ en série.

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + j\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)$$

Or ; d'après la loi d'Ohm

$$\bar{E} = \bar{Z}_{eq}\bar{I} = \left[R + j\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)\right]\bar{I}$$

Soit $\Longrightarrow \boxed{\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{\bar{E}}{R + j\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)}}$

D'où $\boldsymbol{i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)}$; avec :

❖ **L'amplitude I_m du courant $i(t)$**

$$\boxed{I_m = |\bar{I}| = \frac{|\bar{E}|}{|\bar{Z}_{eq}|} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)^2}} = 0.54\ A}$$

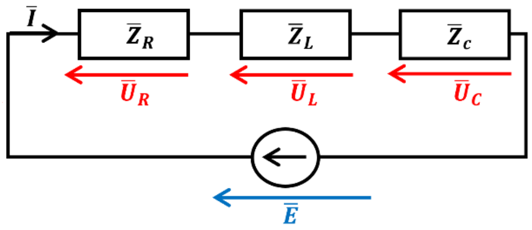
❖ **La phase φ_i à l'origine du courant $i(t)$**

$$\varphi_i = Arg(\bar{I}) = Arg(\bar{E}) - Arg(\bar{Z}_{eq})$$

$$\varphi_i = 0 - Arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}\right)$$

$$\boxed{\varphi_i = Arctan\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) = 86°}$$

2. **Exprimer les amplitudes complexes $\bar{U}_R$, $\bar{U}_L$ et $\bar{U}_C$ des tensions aux bornes de chacun des dipôles. En déduire les amplitudes et les phases à l'origine de ces tensions.**



Or ; on a toutes les impédances $\bar{Z}_R$, $\bar{Z}_L$ et $\bar{Z}_C$ sont traversées par le même courant $\bar{I}$; donc

➢ ***Dans la résistance*** : on a

$$\bar{U}_R = \bar{Z}_R \bar{I} = R\bar{I} \qquad avec \quad \bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{eq}}$$

Soit $\qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\bar{U}_R = \frac{R}{\bar{Z}_{eq}}\bar{E} = \frac{R}{R + j\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)}\bar{E}}$

Alors $\boldsymbol{u_R(t) = U_{Rm} \cos(\omega t + \varphi_R)}$; avec :

❖ **L'amplitude U_{Rm} de la tension $u_R(t)$**

$$\boxed{U_{Rm} = |\bar{U}_R| = \frac{|R|}{|\bar{Z}_{eq}|}|\bar{E}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)^2}} E_m}$$

❖ **La phase φ_R à l'origine de la tension $u_R(t)$**

$$\varphi_R = Arg(R) + Arg(\bar{E}) - Arg(\bar{Z}_{eq})$$

$$\varphi_R = Arctan\left(\frac{0}{R}\right) + 0 - Arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\varphi_R = Arctan\left(\frac{1-LC\omega^2}{RC\omega}\right) = 86°}}$$

➢ ***<u>Dans la bobine</u>*** : on a

$$\bar{U}_L = \bar{Z}_L \bar{I} = jL\omega\bar{I}$$

Soit $\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\bar{U}_L = \frac{jL\omega}{\bar{Z}_{eq}}\bar{E} = \frac{jL\omega}{R+j\left(\frac{LC\omega^2-1}{C\omega}\right)}\bar{E}}}$

Alors $\boldsymbol{u_L(t) = U_{Lm}\,cos(\omega t + \varphi_L)}$; avec :

❖ **L'amplitude $\boldsymbol{U_{Lm}}$ de la tension $\boldsymbol{u_L(t)}$**

$$\boxed{\boldsymbol{U_{Lm} = |\bar{U}_L| = \frac{|jL\omega|}{|\bar{Z}_{eq}|}|\bar{E}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{LC\omega^2-1}{C\omega}\right)^2}}E_m}}$$

❖ **La phase $\boldsymbol{\varphi_L}$ à l'origine de la tension $\boldsymbol{u_L(t)}$**

$$\varphi_L = Arg(jL\omega) + Arg(\bar{E}) - Arg(\bar{Z}_{eq})$$

$$\varphi_L = Arctan\left(\frac{L\omega}{0}\right) + 0 - Arctan\left(\frac{LC\omega^2-1}{RC\omega}\right)$$

$$\varphi_L = \frac{\pi}{2} + 0 - Arctan\left(\frac{LC\omega^2-1}{RC\omega}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\varphi_L = \frac{\pi}{2} + Arctan\left(\frac{1-LC\omega^2}{RC\omega}\right) = 176°}}$$

➢ ***<u>Dans le condensateur</u>*** : on a

$$\bar{U}_C = \bar{Z}_C\bar{I} = \frac{1}{jC\omega}\bar{I}$$

Soit $\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\bar{U}_C = \frac{1}{jC\omega\,\bar{Z}_{eq}}\bar{E} = \frac{1}{jC\omega\left[R+j\left(\frac{LC\omega^2-1}{C\omega}\right)\right]}\bar{E}}}$

Alors $\boldsymbol{u_C(t) = U_{Cm}\,cos(\omega t + \varphi_C)}$; avec :

❖ **L'amplitude $\boldsymbol{U_{Cm}}$ de la tension $\boldsymbol{u_C(t)}$**

$$\boxed{\boldsymbol{U_{Cm} = |\bar{U}_C| = \frac{|\bar{E}|}{|jC\omega||\bar{Z}_{eq}|} = \frac{E_m}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{LC\omega^2-1}{C\omega}\right)^2}}}}$$

❖ **La phase $\boldsymbol{\varphi_C}$ à l'origine de la tension $\boldsymbol{u_C(t)}$**

$$\varphi_C = Arg(\bar{E}) - Arg(jC\omega) - Arg(\bar{Z}_{eq})$$

$$\varphi_C = 0 - Arctan\left(\frac{C\omega}{0}\right) - Arctan\left(\frac{LC\omega^2-1}{RC\omega}\right)$$

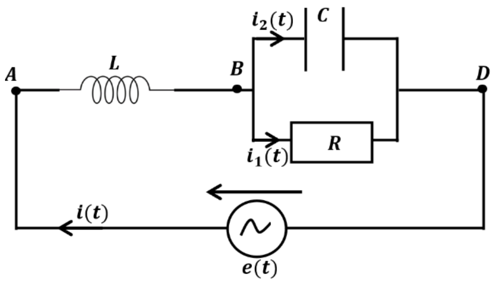
$$\varphi_C = 0 - \frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}\right) = -\left[\frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right)\right]$$

Avec $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

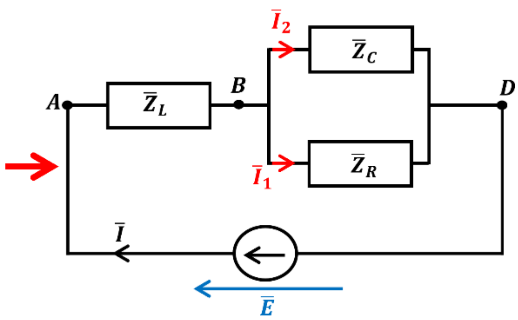
$$\Longrightarrow \boxed{\varphi_C = -Arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) = -4°}$$

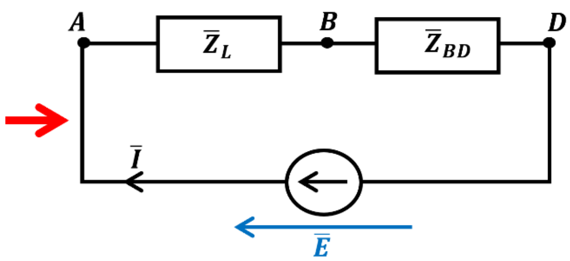
Exercice 6 :

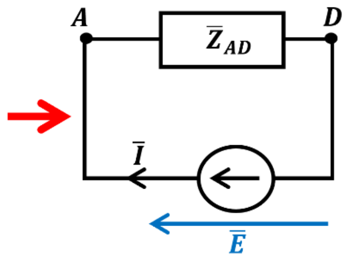
Le circuit de la figure ci-dessous est alimenté par un générateur de fréquence $f = 50\ Hz$ et d'amplitude $E_m = 311\ V$. La phase à l'origine de la tension e(t) délivrée par le générateur est prise égale à zéro. Données : $R = 40\ \Omega$, $L = 0.2\ H$, $C = 5\ \mu F$.



1. L'expression de l'impédance complexe $\bar{Z}_{AD}$ de ce circuit.







L'impédance complexe $\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{AD}}$ entre la branche A et D est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{L}}$ en série avec l'impédance équivalente $\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{BD}}$ entre B et D.

Or, $\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{BD}}$ est l'impédance équivalente à l'association de $\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{R}}$ en parallèle avec $\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{C}}$.

Donc :

$$\frac{1}{\bar{Z}_{BD}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \quad \Longrightarrow \quad \bar{Z}_{BD} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Soit

$$\bar{Z}_{AD} = \bar{Z}_L + \bar{Z}_{BD} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{R + j(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)}{1 + (RC\omega)^2}$$

Alors

$$\boxed{\bar{Z}_{AD} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\frac{(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)}{1 + (RC\omega)^2} = a + jb}$$

2. L'inductance L en fonction de R, C et ω pour que le dipôle AD soit équivalent à une résistance pure $\mathrm{R_{eq}}$. Calculer L ainsi que R_{eq}.

Pour que ***le dipôle AD soit équivalent à une résistance pure R_{eq}*** ; il faut que

$$\bar{Z}_{AD} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\frac{(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)}{1 + (RC\omega)^2} = R_{eq} + j0$$

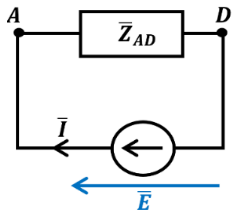
Soit (**Partie imaginaire nulle, il reste la partie réelle = R_{eq}**)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{R}{1 + (RC\omega)^2} = R_{eq} \\ \dfrac{(L\omega + R^2LC^2\omega^3 - R^2C\omega)}{1 + (RC\omega)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{eq} = \dfrac{R}{1 + (RC\omega)^2} = 36,4\ \Omega \\ L = \dfrac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2} = 0,12\ H \end{cases}$$

3. L'amplitude I_m de l'intensité $i(t)$

Or ; d'après la loi d'Ohm

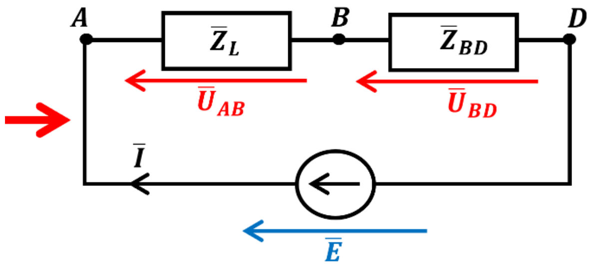
$$\bar{E} = \bar{Z}_{AD}\bar{I} = R_{eq}\bar{I}$$



Soit $\Rightarrow \boxed{\bar{I} = \dfrac{\bar{E}}{R_{eq}}}$

Alors $\boxed{I_m = \dfrac{E_m}{R_{eq}} = 4,3\ A}$

4. Les amplitudes U_{AB} et U_{BD} des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{BD}(t)$



Or ; on a les impédances $\bar{Z}_L = \bar{Z}_{AB}$ et $\bar{Z}_{BD}$ sont traversées par le même courant $\bar{I}$; donc

- ***Pour la tension*** $u_{AB}(t)$:

  on a

$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_{AB}\bar{I} = \bar{Z}_L\bar{I} = jL\omega\bar{I}$$

  Soit

$$\Longrightarrow \quad U_{AB} = |\bar{U}_{AB}| = \ |jL\omega||\bar{I}|$$

  Alors

$$\boxed{U_{AB} = \ L\omega\, I_m = 206\ V}$$

- ***Pour la tension*** $u_{BD}(t)$:

  on a

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_{BD}\bar{I} = \frac{R}{1+jRC\omega}\bar{I}$$

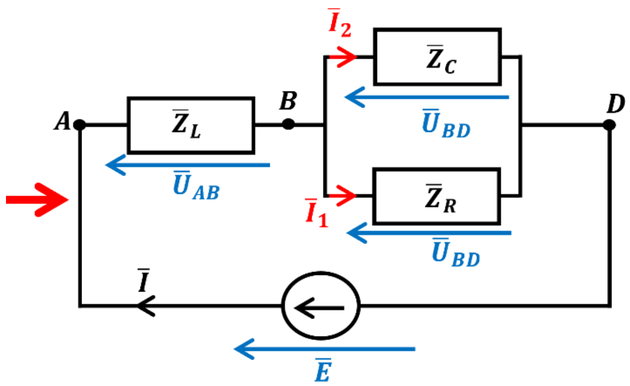
  Soit

$$\Longrightarrow \quad U_{BD} = |\bar{U}_{BD}| = \left|\frac{R}{1+jRC\omega}\right||\bar{I}|$$

  Alors

$$\boxed{U_{AB} = \frac{R}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\, I_m = 260\ V}$$

5. Amplitudes I_{1m} et I_{2m} des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$



- ***Pour le courant*** $i_1(t)$***:***

  On a

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_R\bar{I}_1 = R\bar{I}_1 \quad \Longrightarrow \quad \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{BD}}{R}$$

  Soit

$$\Longrightarrow \quad I_{1m} = |\bar{I}_1| = \frac{|\bar{U}_{BD}|}{|R|}$$

  Alors $\boxed{I_{1m} = \frac{U_{BD}}{R} = \ 2,6\ A}$

- ***Pour le courant*** $\boldsymbol{i_2(t)}$**:**

on a

$$\bar{U}_{BD} = \bar{Z}_C \bar{I}_2 = \frac{1}{jC\omega}\bar{I}_2 \quad \Longrightarrow \quad \bar{I}_2 = jC\omega \bar{U}_{BD}$$

Soit

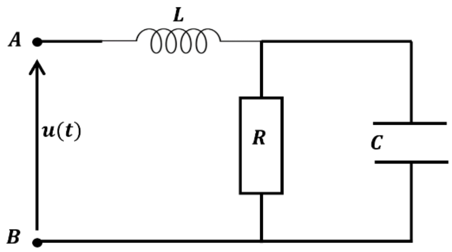
$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{I_{2m} = |\bar{I}_2| = |jC\omega||\bar{U}_{BD}|}$$

Alors

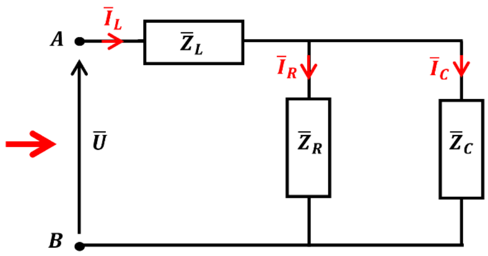
$$\boxed{\boldsymbol{I_{2m} = C\omega U_{BD} = \ 3,4\ A}}$$

Exercice 7

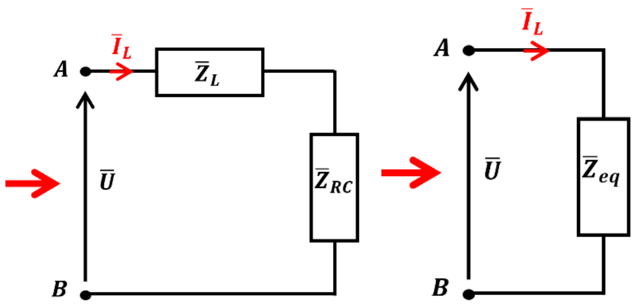
On considère le circuit de la figure ci-dessous où $u(t) = U_m\ cos(\omega t)$.



1. Intensités des courants dans chacune des branches du circuit



- ***Dans la bobine :***



L'impédance complexe $\boldsymbol{\bar{Z}_{eq}}$ entre la branche A et B est l'impédance équivalente à l'association de $\boldsymbol{\bar{Z}_L}$ en série avec l'impédance équivalente $\boldsymbol{\bar{Z}_{RC}}$.

Or, $\boldsymbol{\bar{Z}_{RC}}$ est l'impédance équivalente à l'association de $\boldsymbol{\bar{Z}_R}$ en parallèle avec $\boldsymbol{\bar{Z}_C}$.

Donc

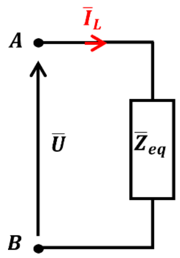
$$\frac{1}{\bar{Z}_{RC}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \quad \Longrightarrow \quad \bar{Z}_{RC} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Soit

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_L + \bar{Z}_{RC} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{1 + jRC\omega}$$

D'après la loi d'Ohm

$$\bar{U} = \bar{Z}_{eq}\bar{I}_L$$



$$\Longrightarrow \quad \bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{(1 + jRC\omega)\bar{U}}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{i_L(t) = I_{Lm}\cos(\omega t + \varphi_L)} \\ \boldsymbol{I_{Lm} = |\bar{I}_L| = \dfrac{|\bar{U}|}{|\bar{Z}_{eq}|} = \dfrac{U_m\sqrt{(1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}} \\ \boldsymbol{\varphi_L = arg(\bar{I}_L) = Arctan(RC\omega) - Arctan\left(\dfrac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right)} \end{cases}$$

- ***Dans le condensateur :***

D'après la loi des nœuds

$$\bar{I}_L = \bar{I}_C + \bar{I}_R$$

Or

$$\bar{Z}_R\bar{I}_R = \bar{Z}_C\bar{I}_C \quad \Longrightarrow \quad \bar{I}_R = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_R}\bar{I}_C = \frac{1}{jRC\omega}\bar{I}_C$$

Soit

$$\bar{I}_L = \bar{I}_C + \bar{I}_R = \left(1 + \frac{1}{jRC\omega}\right)\bar{I}_C = \frac{jRC\omega + 1}{jRC\omega}\bar{I}_C$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{I}_C = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}\bar{I}_L = \frac{jRC\omega\,\bar{U}}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{i_C(t) = I_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_C)} \\ \boldsymbol{I_{Cm} = |\bar{I}_C| = \dfrac{RC\omega\, U_m}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}} \\ \boldsymbol{\varphi_C = arg(\bar{I}_C) = \dfrac{\pi}{2} - Arctan\left(\dfrac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right) = Arctan\left(\dfrac{R(1 - LC\omega^2)}{L\omega}\right)} \end{cases}$$

- ***Dans la résistance :***

Or on a

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_R}\bar{I}_C = \frac{1}{jRC\omega}\bar{I}_C = \frac{\bar{U}}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{i_R(t) = I_{Rm}\cos(\omega t + \varphi_R)} \\ \boldsymbol{I_{Rm} = |\bar{I}_R| = \dfrac{U_m}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}} \\ \boldsymbol{\varphi_R = arg(\bar{I}_R) = -Arctan\left(\dfrac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right)} \end{cases}$$

2. Puissances actives et réactives dans les différentes branches.

- ***Dans la bobine :***

$$P_a = 0 \quad et \quad P_r = L\omega I_{effL}^2 = \frac{1}{2}L\omega I_{Lm}^2$$

$$I_{Lm}^2 = \frac{U_m^2(1 + RC\omega)^2}{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}$$

Donc

$$P_r = \frac{1}{2}\frac{U_m^2 L\omega(1 + RC\omega)^2}{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}$$

- ***Dans le condensateur :***

$$P_a = 0 \quad et \quad P_r = -\frac{1}{C\omega}I_{effC}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C\omega}I_{Cm}^2$$

$$I_{Cm}^2 = \frac{U_{\mathrm{m}}^2(RC\omega)^2}{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}$$

Donc

$$P_r = -\frac{1}{2}\frac{U_{\mathrm{m}}^2 R^2 C\omega}{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}$$

- ***Dans la résistance :***

$$P_a = RI_{effR}^2 = \frac{1}{2}RI_{Rm}^2 \quad et \quad P_r = 0$$

$$I_{Rm}^2 = \frac{U_m^2}{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}$$

Donc

$$P_a = -\frac{1}{2}\frac{RU_m^2}{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}$$

- ***Bilan des puissances :***

$$\bar{P} = P_a + jP_r = \frac{1}{2}\bar{U}\bar{I}_L^*$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}U_m^2\frac{(1 - jRC\omega)}{-jL\omega + R(1 - LC\omega^2)} = \frac{1}{2}U_m^2\frac{R - j[(R^2C\omega(1 - LC\omega^2) - L\omega]}{((L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2)^2}$$

Donc

$$P_a = \frac{1}{2}\frac{U_m^2 R}{((L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2)^2} \qquad et \qquad P_r = \frac{1}{2}\frac{U_m^2[(R^2C\omega(1 - LC\omega^2) - L\omega]}{((L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2)^2}$$