



Note de Cours

Électromagnétisme dans le Vide

Chapitre 2 : Magnétostatique du Vide



Filière : SMI (S4)

Prof. Youssef HADDOUT
Département de Physique-Chimie

Année universitaire 2020-2021

Sommaire

1. Introduction.....	2
1.1. Définition.....	2
1.2. Un peu d'histoire.....	2
1.2.1. Expérience de Hans Christian Oersted (1819).....	2
1.2.2. Expérience de Rowland (1876).....	3
1.2.3. Interprétation des deux expériences.....	3
1.3. Sources du champ magnétique.....	3
1.4. Propriétés des aimants.....	4
1.5. Champ magnétique.....	4
1.6. Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une charge électrique : Force de Lorentz.....	5
1.7. Vecteur densité de courant électrique.....	6
1.8. Action d'un champ magnétique sur un courant électrique : Force de Laplace.....	7
2. Expressions du champ magnétique.....	8
2.1. Champ magnétique créé par une charge en mouvement.....	8
2.2. Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement.....	9
2.3. Champs magnétiques créés par des courants électriques : Loi de Biot et Savart.....	9
2.3.1. Courant filiforme (distribution linéique du courant).....	9
2.3.2. Courant volumique (distribution volumique du courant).....	10
2.3.3. Courant surfacique (distribution surfacique du courant).....	11
2.4. Sens du champ magnétique.....	11
2.5. Propriétés de symétrie et d'invariance d'un champ magnétique.....	12
2.5.1. Principe de Curie.....	12
2.5.2. Règles de symétrie.....	13
2.5.3. Exemple d'application : Champ créé par une spire circulaire.....	16
3. Lois fondamentales de la magnétostatique.....	18
3.1. Théorème d'Ampère.....	18
3.1.1. Forme intégrale du théorème d'Ampère.....	19
3.1.2. Forme locale du théorème d'Ampère.....	19
3.2. Flux conservatif du champ magnétique.....	20
3.2.1. Calcul de divergence du champ magnétique.....	20
3.2.2. Flux du champ magnétique.....	20
3.3. Potentiel Vecteur du champ magnétique.....	21
3.3.1. Définition.....	21
3.3.2. Cas d'un fil filiforme.....	21
3.4. Dipôle magnétique.....	22

Chapitre 2 : Magnétostatique du vide

- Nous étudierons dans ce chapitre des champs magnétostatiques, c'est à dire créé par des courants dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps.
- Ce chapitre se construit comme celui sur le champ électrostatique, ce parallèle nous permettra probablement de passer moins de temps sur des notions déjà vu (distributions, invariances, symétries, ...)

1. Introduction

1.1. Définition

- **L'électrostatique** est l'étude des interactions électriques entre des charges constantes et immobiles. Autrement dit, pas de courant électrique.
- **La magnétostatique** est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu) (charges en mouvements en régime stationnaire). Les courants et champ magnétiques sont indépendants du temps.
- On appelle **électromagnétisme** le domaine des sciences en général et de la physique en particulier lié à l'étude des charges électriques en mouvement relatif les unes par rapport aux autres, du champ électrique et du champ magnétique réunis dans le concept de champ électromagnétique.

1.2. Un peu d'histoire

1.2.1. Expérience de Hans Christian Oersted (1819)

On considère un fil conducteur rectiligne entouré de trois boussoles. En absence du courant électrique, celles-ci sont initialement alignées selon le champ magnétique terrestre.

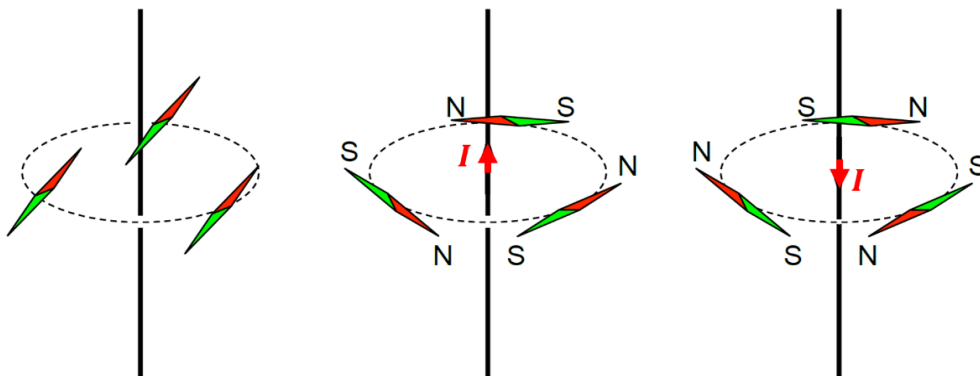


Figure 1

Quand le fil conducteur est parcouru par un courant, les boussoles se tournent et s'alignent selon un cercle entourant le fil. Si on inverse le sens du champ, le sens des boussoles s'inverse.

1.2.2. Expérience de Rowland (1876)

On considère une boussole placée devant un disque chargé en périphérie.

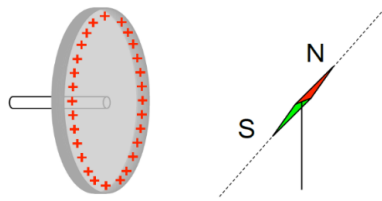


Figure 2

- En l'absence de rotation, la boussole est alignée selon les lignes du champ magnétique terrestre.

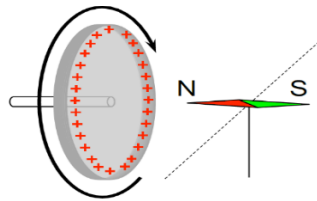


Figure 3

- Si le disque chargé tourne, on observe une déviation de l'aiguille aimantée de la boussole.

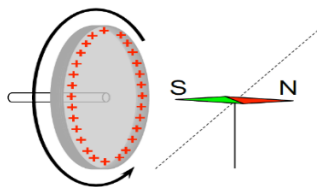


Figure 4

- Si on inverse le sens de rotation, l'aiguille dévie dans le sens opposé.

Des charges en mouvement modifient donc les propriétés de l'espace alentour. La boussole réagit à ces modifications, elle est soumise à des forces dont l'intensité diminue avec l'éloignement et dont le sens varie avec :

- Le sens du mouvement des charges.
- Le signe des charges.

1.2.3. Interprétation des deux expériences

Pour les deux expériences, le fil et disque chargé en rotation produisent le même effet : déviation de l'aiguille aimantée comme conséquences

- Le courant électrique est lié à un déplacement de charges électriques.
- Génération d'un champ magnétique agissant sur la boussole.
- Une relation étroite entre le courant électrique et le champ magnétique, c'est le phénomène de l'électromagnétisme.

1.3. Sources du champ magnétique

Un champ magnétique peut être produit par :

- **Des aimants permanents** constitués par des matériaux ferromagnétiques (l'oxide de fer magnétique Fe_3O_4 , cobalt, nickel).

- **Des aimants non permanents** (électro-aimants, bobines supraconductrices, etc.).
- **Une charge en mouvement.**
- **Un courant électrique** (particules chargées animées d'un mouvement d'ensemble).

1.4. Propriétés des aimants

Dès l'antiquité les grecs avaient remarqué qu'une pierre de Magnésie [*région de la Grèce antique en Asie Mineure (actuellement en Turquie)*], la magnétite, avait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer : d'où le mot magnétisme. Comme pour l'électricité, la contribution des grecs à l'étude du magnétisme fut purement linguistique.

Puis on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités : **les pôles**. Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, **pôle nord** et **pôle sud**, sont différents.

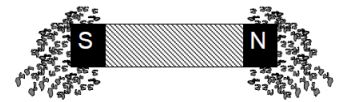


Figure 5

L'expérience montre que : *Deux pôles de même nom se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.*

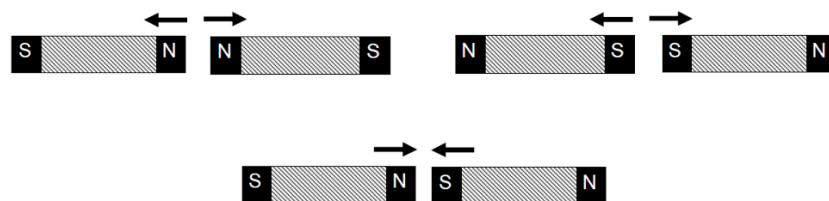


Figure 6

Au début du moyen âge, les chinois utilisèrent les propriétés de certains corps magnétiques et inventèrent les premières boussoles. Ce fut la première application du magnétisme.

L'expérience de l'aimant brisé montre que : *Il est impossible de séparer le pôle nord du pôle sud d'un aimant.*

En effet si on casse un aimant en deux parties, on obtient deux autres petits aimants ayant chacun un pôle nord et un pôle sud. Si on répète cette opération, on obtient, à chaque fois, des aimants de plus en plus petits dotés chacun d'un pôle nord et d'un pôle sud.

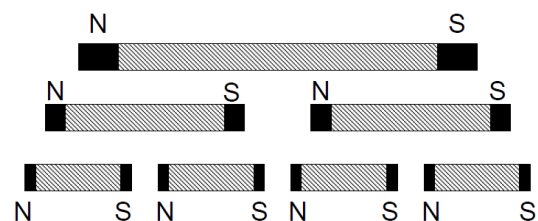


Figure 7

1.5. Champ magnétique

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un champ magnétique de la même manière qu'un champ gravitationnel existe au voisinage de la terre et un champ électrique autour d'une charge électrique. De même il existe, comme nous allons le voir, au voisinage d'un circuit électrique un champ magnétique.

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force.

Comme en électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique noté \vec{B} . Ce vecteur est tangent aux lignes de champ.

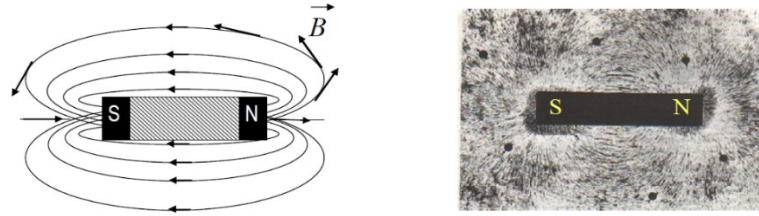


Figure 8

Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud.

Dans le système d'unité international M.K.S.A (le Mètre, le Kilogramme, le Seconde et l'Ampère), le champ magnétique est mesuré en tesla (T), en hommage au savant serbe Nikola Tesla (1856-1943), inventeur de l'alternateur.

Historiquement le concept de champ est d'abord introduit en magnétisme. Faraday, en répandant de la limaille de fer au voisinage d'un aimant, constate que les grains de fer s'orientent et forment une figure, puis ce concept est étendu à l'électricité.

1.6. Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une charge électrique : Force de Lorentz.

A la fin du XIXe siècle, le physicien hollandais Hendrik Lorentz donne l'expression de la force \vec{F} qui s'exerce sur une charge ponctuelle q , se déplaçant à la vitesse \vec{V} dans des champs électrique et magnétique \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (1)$$

En présence du seul champ magnétique \vec{B} ($\vec{E} = \vec{0}$), la force de Lorentz devient :

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2)$$

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en l'absence du champ électrique \vec{E} , une charge q animée d'une vitesse \vec{V} , est soumise à l'action d'une force $\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$.

Cette nouvelle définition du champ magnétique est obtenue à partir de la force de Lorentz. Cette force

- a pour module : $F = q V B |\sin(\vec{V}, \vec{B})|$,
- Sa direction est la perpendiculaire au plan formé par \vec{V} et \vec{B} ,
- Son sens est tel que, dans le cas d'une charge positive, les vecteurs \vec{V} , \vec{B} et \vec{F} forment un trièdre direct (règle de la main droite). Lorsque la charge est négative la force change de sens.

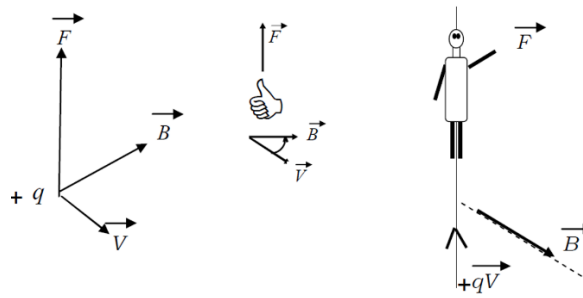


Figure 4

Le sens de cette force est également donné par **la règle du bonhomme d'Ampère** : Le bonhomme d'Ampère, traversé des pieds vers la tête par la charge (+q) animée d'une vitesse \vec{V} , voit fuir les lignes de champ, et a la force à sa gauche

1.7. Vecteur densité de courant électrique

Soit un conducteur possédant n atomes par unité de volume, chaque atome possédant une charge libre q . Le conducteur est soumis à un champ électrique qui provoque un déplacement d'ensemble des charges libres du conducteur.

L'intensité du courant di qui traverse une section dS du conducteur est égale à la quantité de charge d^2q qui traverse la section pendant le temps dt . On peut donc écrire

$$di = \frac{d^2q}{dt} \quad (3)$$

La quantité de charges d^2q qui va traverser dS pendant dt se situe dans un cylindre de section dS et de largeur $\vec{V}dt = \vec{dl}$ où \vec{V} est la vitesse des porteurs de charges. Si on note \vec{n} la normale à la surface, on a :

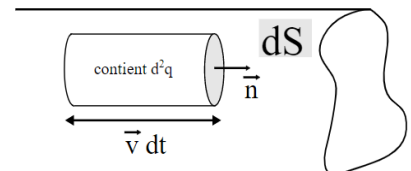


Figure 9 : Volume élémentaire d'un conducteur électrique

$$d^2q = \text{nombre de charges par unité de volume} \\ \times \text{charge} \times \text{volume}$$

Donc

$$d^2q = n q \times \vec{V}dt \cdot \vec{n}dS \quad (4)$$

D'où

$$di = \frac{d^2q}{dt} = n q \times \vec{V} \cdot \vec{n}dS \quad (5)$$

Soit

$$I = \iint_S n q \vec{V} \cdot \vec{n}dS \quad (6)$$

On introduit alors la notion de *vecteur densité de courant* :

$$\vec{j} = n q \vec{V} = \rho_m \vec{V} \quad (7)$$

Où $\rho_m = n q$ est la densité volumique de charges mobiles ayant la vitesse \vec{V} .

D'après cette expression, \vec{j} s'exprime en $A m^{-2}$.

L'intensité de courant est donc égale au **flux** du vecteur densité de courant :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (8)$$

1.8. Action d'un champ magnétique sur un courant électrique : Force de Laplace

Soit un circuit filiforme, parcouru par un courant continu I , placé dans un champ magnétique \vec{B} créé par un autre circuit ou par un aimant. Un élément de courant $I d\vec{l}$ contenant dq charges se déplaçant à une vitesse uniforme \vec{V} . La force magnétique totale agissant sur l'élément du circuit dl est :

$$d\vec{F} = dq \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (\text{Force de Lorentz}) \quad (9)$$

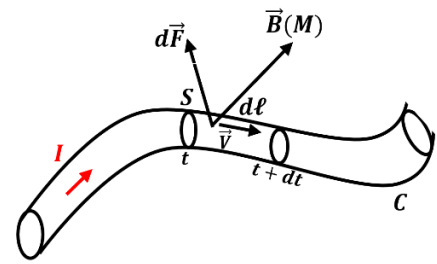


Figure 10

Relation entre $dq \vec{V}$ et $I d\vec{l}$:

On considère que l'élément du circuit dl de volume $d\tau = \vec{S} \cdot d\vec{l} = \vec{S} \cdot \vec{V} dt$.

dq est la charge contenue dans $d\tau$, soit : $dq = n q d\tau = \rho_m \vec{S} \cdot d\vec{l}$

$dq \vec{V} = \rho_m \vec{V} d\tau = \vec{j}_v d\tau = \vec{j}_v \cdot \vec{S} d\vec{l} = I d\vec{l}$ car \vec{j}_v et $d\vec{l}$ sont parallèles et de même sens.

Ou bien $I = \iint \vec{j}_v \cdot d\vec{S} = \vec{j}_v \cdot \iint d\vec{S} = \vec{j}_v \cdot \vec{S}$ si \vec{j}_v est uniforme dans tout le circuit et S est la section de conducteur.

Donc, pour un courant filiforme, on obtient l'expression de la force de Laplace :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (10)$$

Qu'on peut l'écrire en utilisant la densité volumique de courant \vec{j}_v sous la forme :

$$d\vec{F} = \vec{j}_v d\tau \wedge \vec{B} \quad (11)$$

Ceci est l'expression de la **force de Laplace** pour un conducteur parcouru par un courant volumique.

Caractéristiques de la force de Laplace :

- Direction : $d\vec{F}$ est perpendiculaire au plan formé par $d\vec{l}$ et \vec{B} ;
- Sens : Le trièdre formé par $(d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F})$ est direct (le sens de $d\vec{F}$ est donné par la règle du bonhomme d'Ampère : *Le bonhomme d'Ampère, parcouru par le courant I , des pieds vers la tête, a la force à sa gauche lorsqu'il regarde les lignes de champ*).
- Module : $dF = I dl B \sin \theta$ où θ étant l'angle entre $d\vec{l}$ et \vec{B} .

2. Expressions du champ magnétique

2.1. Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M de l'espace par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse \vec{V} dans un référentiel galiléen est donnée par :

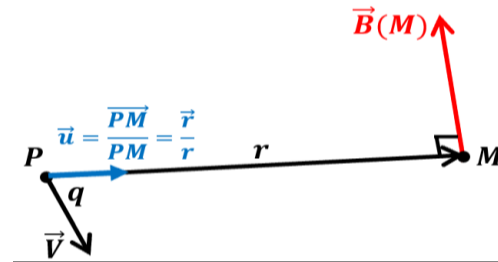


Figure 11

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{V} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{V} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (12)$$

L'unité de champ magnétique dans le système international est le Tesla (T). Une autre unité appartenant au système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde), le Gauss (G) est également très souvent utilisé : $1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla}$

Le facteur μ_0 est une constante universelle appelée perméabilité magnétique du vide, reliée à la permittivité du vide ϵ_0 et à la célérité de la lumière c par la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Sa valeur dans le système d'unité international MKSA (Mètre-Kilogramme-Seconde-Ampère) est : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ (H pour Henry, unité légale de l'inductance).

Remarque

- L'expression de \vec{B} n'est valable que dans le cas où les particules se déplacent à des vitesses très inférieures à c , vitesse de la lumière dans le vide ;
- Le champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire au plan formé par \vec{V} et $\vec{PM} = \vec{r}$;
- \vec{B} est défini par un produit vectoriel de deux grandeurs polaires, \vec{B} est un vecteur axial ou pseudo-vecteur ;
- Le trièdre $(q \vec{V}, \vec{PM} = \vec{r}, \vec{B})$ est direct.

Sens du champ magnétique créé par une charge mobile

Le sens du champ magnétique créé par une charge mobile peut être déterminée à l'aide de la règle du tire-bouchon ou des trois doigts de la main droite.

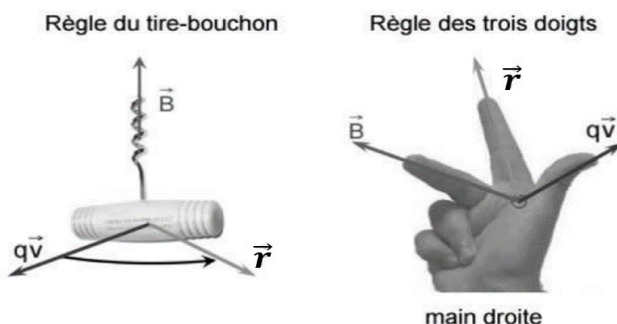


Figure 12 : Sens du champ magnétique créé par une charge mobile

Quelques grandeurs du champ magnétique :

- Le champ magnétique terrestre est très faible de l'ordre de : $B = 0.5 \text{ G}$ ($50 \mu\text{T}$).
- Les aimants courants $B = 10 \text{ mT}$.
- Les électroaimants produisent des champs magnétiques allant de $0, 1\text{T}$ à 2T . Ces valeurs correspondent à des champs moyens.
- Les bobines de fil de cuivre émaillé créent des champs magnétiques allant jusqu'à 100T . Ce sont des champs très intenses.

2.2. Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement**Principe de superposition**

S'il existe deux charges ou plus en mouvement alors le champ magnétique créé en un point M par ces charges est la somme vectorielle des champs créés par chaque charge.

Pour N charges en mouvement, le champ magnétique total en un point M vaut :

$$\vec{B}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i(M) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_i \vec{V}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3} \quad (13)$$

Si le nombre N de charges ponctuelles en mouvement est très important dans un volume V , on peut remplacer une distribution de charges discrètes par une distribution de courant continues, c'est le cas des circuits parcourus par des courants électriques. La somme discrète se transforme en une intégrale sur des charges élémentaires contenues dans le volume élémentaire $d\tau$ du volume V .

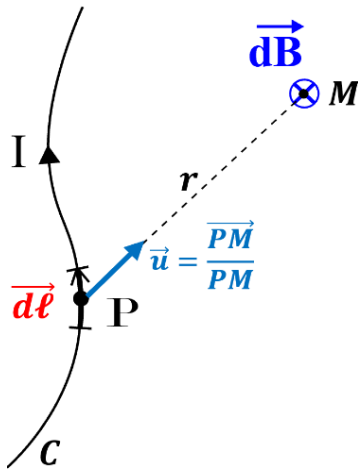
2.3. Champs magnétiques créés par des courants électriques : Loi de Biot et Savart

Hans Christian Oersted a montré la génération d'un champ magnétique par un courant, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart en effectuant une étude quantitative des interactions entre aimants et courants au cours de l'année 1820, on établit empiriquement la loi qui porte leurs noms et qui permet d'exprimer le champ magnétique créé par un courant en un point M dans l'espace.

2.3.1. Courant filiforme (distribution linéique du courant)

Considérons un conducteur filiforme, c.à.d., ayant une longueur très supérieure à la dimension transversale et décrivant une courbe (C) quelconque. Ce fil est parcouru par un courant d'intensité I .

On considère en un point P une portion élémentaire de fil $d\vec{l}$ orientée dans le sens du courant I . Si on note $\overrightarrow{PM} = \vec{r} = r \vec{u}$ le vecteur position d'un point M relativement à P , le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ créé en tout point M de l'espace est alors donné par :



$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\vec{V} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (14)$$

$$\text{Or } dq\vec{V} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = I d\vec{l} = d\vec{C}$$

$d\vec{C} = I d\vec{l}$ est l'élément de courant du fil conducteur, s'exprime en A m

Soit,

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{PM^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (15)$$

(Loi de Biot et Savart)

Figure 13 : Loi de Biot et Savart

Cette expression de $d\vec{B}$, déduite d'expériences (par Biot et Savart) constitue la loi de Biot et Savart.

Caractéristiques du champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$:

- La direction $d\vec{B}$ est perpendiculaire au plan formé par $d\vec{l}$ et \overrightarrow{PM} ;
- Le sens est tel que le trièdre $(d\vec{l}, \overrightarrow{PM}, d\vec{B})$ soit direct.
- Le module est défini par : $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \theta$ où θ désigne l'angle $(d\vec{l}, \vec{u})$

Le champ magnétique \vec{B} créé en un point M par le circuit filiforme total s'obtient par intégration de la relation précédente

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{circuit}} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{circuit}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (16)$$

2.3.2. Courant volumique (distribution volumique du courant)

Considérons un conducteur volumique (non filiforme) de grande section S et de longueur l , parcouru par un courant de densité \vec{j} . Le conducteur peut être considéré comme un ensemble de conducteurs filiformes de section dS parcourus par des courants élémentaires d'intensités $dI = \vec{j}_v \cdot d\vec{S}$ ($\vec{j} = \vec{j}_v$) comme le montre la figure ci-contre.

Où \vec{j}_v est le vecteur densité volumique de courant.

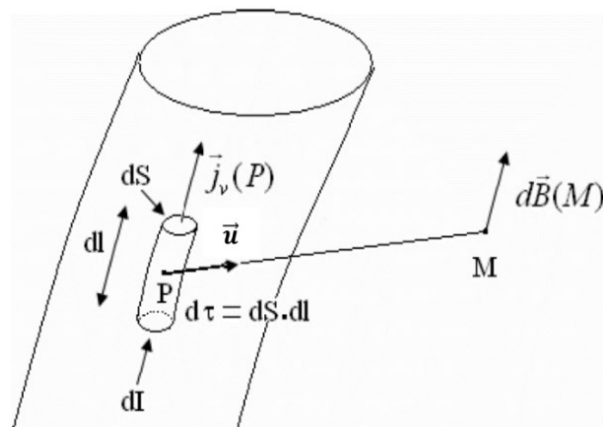


Figure 14

L'élément de courant $d\vec{C}$ au point P pris à l'intérieur du conducteur est alors

$$d\vec{C} = dI d\vec{l} = \vec{j}_v \cdot d\vec{S} d\vec{l} = \vec{j}_v d\tau \quad (17)$$

Le champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant $d\vec{C} = \vec{j}_v d\tau$ en un point M de l'espace est :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}}{PM^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_v d\tau \wedge \vec{u}}{PM^2} \quad (18)$$

D'où

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{volume}} \frac{\vec{j}_v \wedge \vec{u}}{PM^2} d\tau \quad (19)$$

2.3.3. Courant surfacique (distribution surfacique du courant)

Pour une distribution surfacique de courant on a :

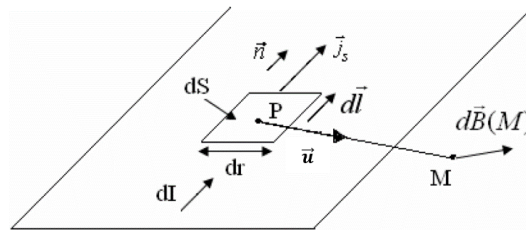


Figure 15

Soit \vec{j}_s le vecteur densité surfacique de courant, l'élément de courant $d\vec{C} = \vec{j}_s dS$ au point P de la surface crée au point M un champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}}{PM^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s dS \wedge \vec{u}}{PM^2} \quad (20)$$

En intégrant sur la surface S on a :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\text{surface}} \frac{\vec{j}_s \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} dS \quad (21)$$

2.4. Sens du champ magnétique

Le champ créé par le fil est la somme vectorielle de tous les $d\vec{B}(M)$: $\vec{B}(M) = \int_C d\vec{B}(M)$.

Comme $d\vec{B}(M)$ est défini par un produit vectoriel la détermination de son sens peut se faire en utilisant l'une des règles suivantes (*règles mnémotechniques*) :

➤ Règle du bonhomme d'Ampère

Observateur disposé le long du conducteur de façon que le courant électrique circule de ses pieds vers sa tête, tendant la main gauche et regardant un point M de l'espace. Le champ magnétique en ce point est dirigé suivant la main gauche de l'observateur.

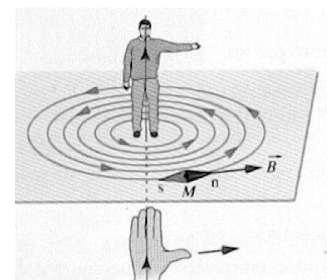
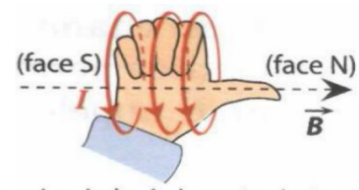


Figure 16

➤ Règle de la main droite

- Les doigts de la paume s'enroulent dans le sens du courant circulant dans les spires, et le pouce indique la face N et le sens du champ magnétique \vec{B} .



La règle de la main droite

Figure 17

- Lorsque les doigts enroulent le fil dans le sens du champ magnétique, le pouce indique le sens du courant.

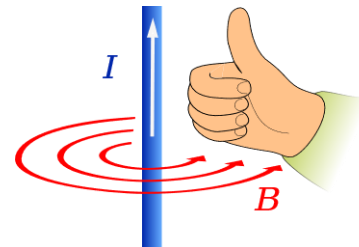


Figure 18

➤ Règle du tire-bouchon (de Maxwell)

Courant rectiligne

- Le tire-bouchon doit « s'enfoncer » dans le sens du courant.
- Le sens de rotation du tire-bouchon donne le sens du vecteur champ magnétique.

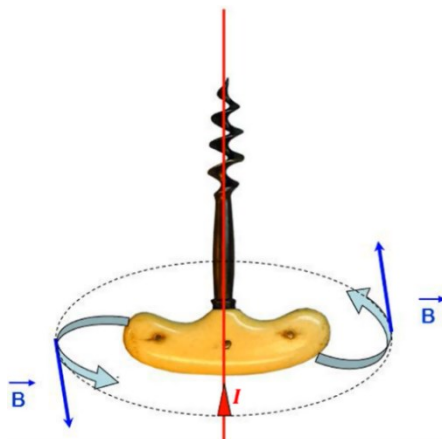


Figure 19

Spire de courant

- Le tire-bouchon tourne dans le sens du courant.
- Le sens dans lequel le tire-bouchon s'enfonce donne le sens du vecteur champ magnétique.

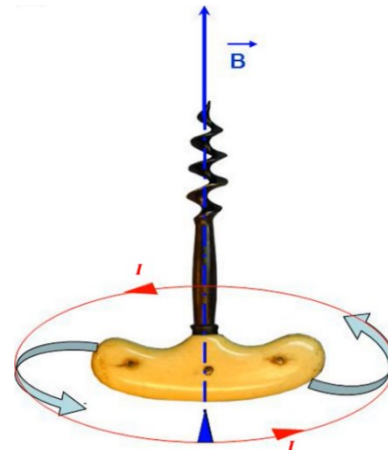


Figure 20

2.5. Propriétés de symétrie et d'invariance d'un champ magnétique

2.5.1. Principe de Curie

Le principe de symétrie de Pierre Curie affirme que « *Lorsque certaines **causes** produisent certains **effets**, les éléments de symétrie des **causes** doivent se retrouver dans les **effets** produits* ».

En magnétostatique, le champ magnétique est un effet créé par la distribution de courant (cause).

Les propriétés de symétrie et d'invariance sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ magnétique. Les raisons de symétrie permettent de réduire les composantes de champ magnétique créé par des distributions de courants, c.à.d. de déterminer sa direction, alors que les invariances permettent de réduire le nombre de coordonnées spatiales dont dépend le champ magnétique.

Vecteurs et pseudo-vecteurs

- Un **vecteur polaire**, ou **vrai vecteur**, est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés. Exemples : vitesse d'une particule, champ électrostatique, densité de courant.
- Un **vecteur axial**, ou **pseudo-vecteur**, est un vecteur dont le sens est défini à partir d'une convention d'orientation d'espace et dépend donc de cette convention. Exemples : le vecteur rotation instantanée, le champ magnétique, la normale à une surface.

2.5.2. Règles de symétrie

A. Invariance

➤ Invariance par translation :

Une distribution de courant est invariante par translation parallèlement à un axe Oz lorsque le courant en P est identique au courant en tout point P' obtenu par une translation de P de Δz parallèlement à cet axe ($\vec{j}(P) = \vec{j}(P')$). Ceci n'est possible qu'avec une distribution s'étendant jusqu'à l'infini. D'après le principe de Curie, le champ magnétique ne dépend pas de la variable z de cette translation.

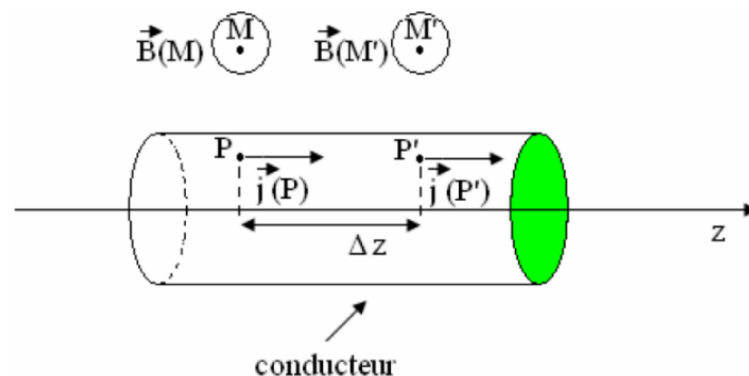


Figure 21

$$\Rightarrow \vec{j}(P) = \vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y) \text{ indépendante de } z \text{ d'où } \vec{B}(M) = \vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$$

➤ **Invariance par rotation (Symétrie axiale) :**

S'il existe un axe Oz pour lequel toute rotation d'angle θ laisse invariante la distribution de courant, alors le champ magnétique \vec{B} ne dépend pas de l'angle θ . Le problème est dit à symétrie de révolution. Ou bien, On dit que la distribution est invariante par rotation $\Delta\theta$ si $\|\vec{j}(P)\| = \|\vec{j}(P')\|$ où P' est obtenu par rotation $\Delta\theta$ de P .

$\Rightarrow \vec{j}(P) = \vec{j}(r, z)$ est indépendant de θ . Donc d'après le principe de Curie :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z) \quad (22)$$

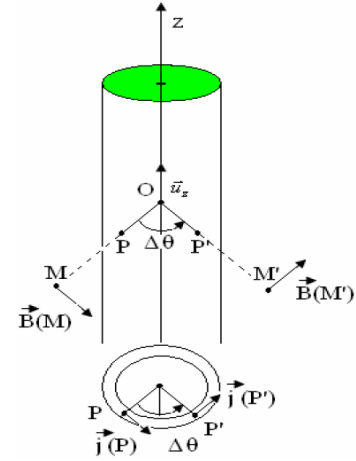


Figure 22

➤ **Symétrie cylindrique :**

Si une distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe Oz et par rotation autour de ce même axe, alors le champ magnétique exprimé en coordonnées cylindriques (r, θ, z) ne dépendra que de la coordonnée cylindrique r . Le problème est dit à symétrie cylindrique. En coordonnées cylindriques :

$$\vec{j}(P) = \vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r) \quad (23)$$

➤ **Symétrie sphérique :**

Si une distribution de courant est invariante par toute rotation autour d'un point fixe O , alors le champ magnétique exprimé en coordonnées sphériques (r, θ, φ) ne dépendra que de la coordonnée sphérique r . Le problème est dit à symétrie sphérique.

En coordonnées sphériques :

$$\vec{j}(P) = \vec{j}(r, \theta, \varphi) = \vec{j}(r) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, \varphi) = \vec{B}(r) \quad (24)$$

B. Plan de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courant

➤ **Plan de symétrie**

(π) est un *plan de symétrie* pour la distribution de courants si une symétrie par rapport à π laisse inchangée la distribution de courants : les densités de courant en deux points P et P' symétriques par rapport à (π) sont symétriques l'une de l'autre :

$$\vec{j}(P') = \text{sym}_{\pi} \vec{j}(P) \quad (25)$$

Ou bien

$$I \vec{dl}(P) = I \vec{dl}'(P') \quad \text{ou} \quad d\vec{C}(P) = d\vec{C}'(P')$$

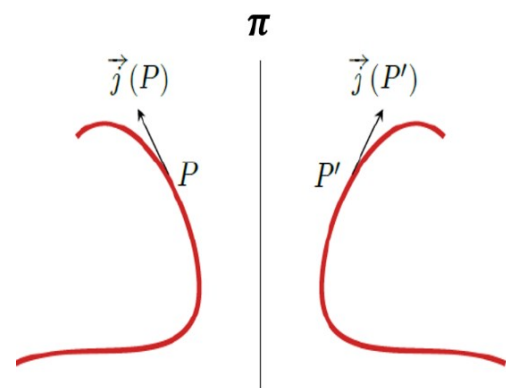


Figure 23

Effets sur \vec{B} d'un plan de symétrie

Les champs magnétostatiques en deux points M et M' symétriques par rapport à (π) sont anti-symétriques (opposé du symétrique) l'un par rapport à l'autre (Voir Figure 24) :

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{\pi}\vec{B}(M) \quad (26)$$

Si une distribution de courants admet un plan de symétrie π passant par un point M , alors le champ \vec{B} est forcément **perpendiculaire à ce plan de symétrie** (Voir Figure 25). Cela signifie que l'existence d'un seul plan de symétrie nous permet de trouver la direction du champ magnétique.

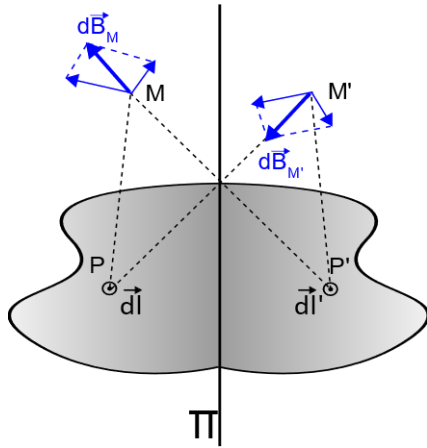


Figure 24 : Champ magnétique antisymétrique avec un plan de symétrie

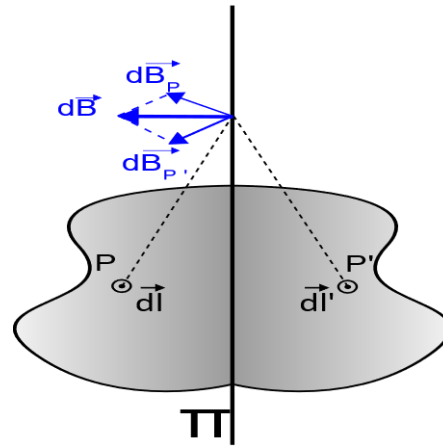


Figure 25 : Champ magnétique et plan de symétrie

➤ Plan d'antisymétrie

(π') est un **plan d'antisymétrie** pour la distribution de courants si une symétrie par rapport à π' inverse le sens des courants : les densités de courant en deux points P et P' symétriques par rapport à (π') sont antisymétriques l'une de l'autre :

$$\vec{j}(P') = -\text{sym}_{\pi'}\vec{j}(P) \quad (27)$$

Ou bien :

$$I\vec{dl}(P) = -I\vec{dl}'(P') \text{ ou } d\vec{C}(P) = -d\vec{C}'(P')$$

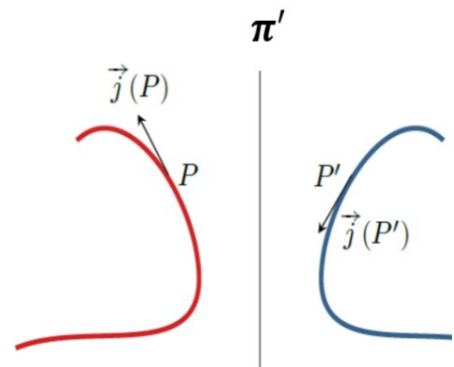


Figure 26

Effets sur \vec{B} d'un plan d'antisymétrie

Les champs magnétostatiques en deux points M et M' symétriques par rapport à (π') sont symétriques l'un par rapport à l'autre (Voir Figure 27) :

$$\vec{B}(M') = \text{sym}_{\pi'}\vec{B}(M) \quad (28)$$

Si une distribution de courants admet un plan d'antisymétrie, alors le champ \vec{B} est contenu dans ce plan (**\vec{B} appartient au plan d'antisymétrie**) (Voir Figure 28).

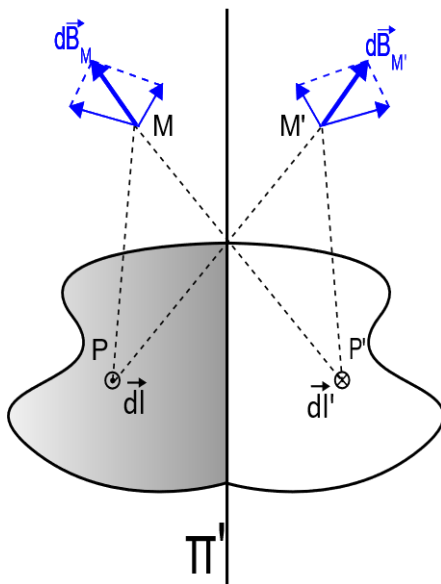


Figure 27 : Champ magnétique symétrique avec un plan d'antisymétrie

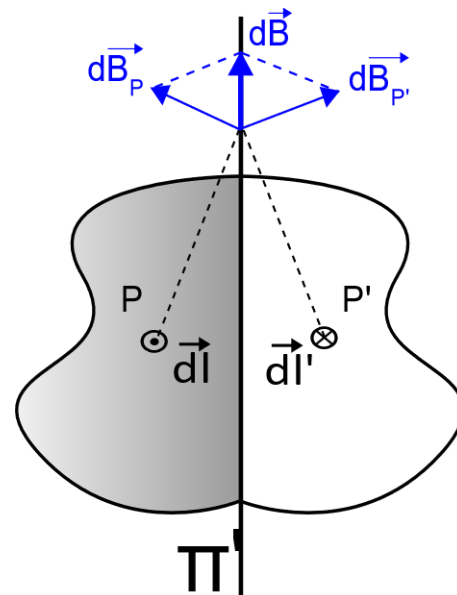
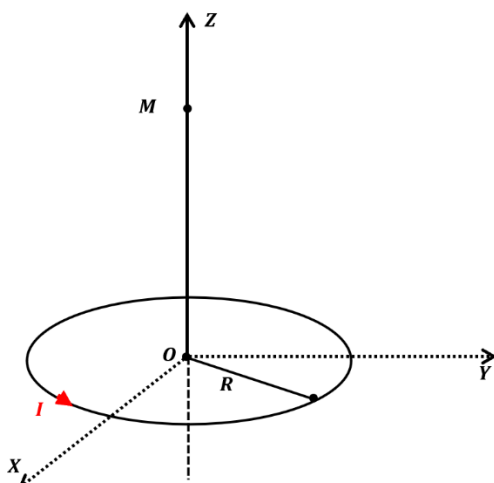


Figure 28 : Champ magnétique et antisymétrie

Calcul du champ magnétostatique avec la loi de Biot et Savart : Méthode

- 1) **Etape 1** : Utilisation des symétries pour déterminer la direction et le sens de \vec{B} ainsi que les variables dont il dépend.
- 2) **Etape 2** : Exprimer le champ élémentaire $d\vec{B}$ produit par un élément de courant $I d\vec{l}$.
- 3) **Etape 3** : Projection de $d\vec{B}$ sur la direction du champ déterminé grâce aux symétries.
- 4) **Etape 4** : Somme (intégration) pour avoir le champ total \vec{B} .

2.5.3. Exemple d'application : Champ créé par une spire circulaire



Considérons une spire circulaire (C) d'axe OZ de centre O et de rayon R parcourue par un courant constant d'intensité I . On veut déterminer le champ magnétique créé par la spire circulaire en un point M situé sur l'axe (OZ) de la spire.

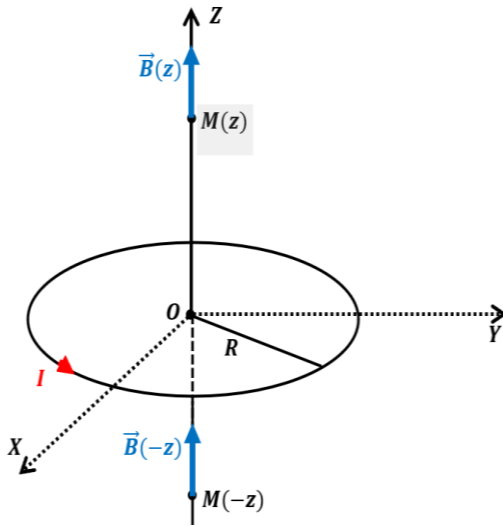
✓ Étude de l'invariance

La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe OZ

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, z) \quad (29)$$

M est choisi sur l'axe $OZ \Rightarrow$ sa composante radiale $r = 0$, d'où

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z) = \vec{B}(z) \quad (30)$$

✓ Etude de symétrie

Tous les plans contenant l'axe (OZ) sont des plans d'antisymétrie, par conséquent :

$$\vec{B}(z) = B(z)\vec{u}_z \quad (31)$$

Le plan (OXY) est un plan de symétrie pour la répartition de courants, par conséquent :

$$\vec{B}(-z) = \vec{B}(z) \quad (32)$$

✓ Calcul du champ sur l'axe :

Le champ magnétique élémentaire créé par l'élément de longueur $d\vec{l}$ au point P vaut :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{PM^2} \quad (33)$$

Les vecteurs $d\vec{l}$ et \vec{u} sont perpendiculaires et le champ magnétique élémentaire est porté par \vec{u}_α

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{PM^2} \vec{u}_\alpha \quad (34)$$

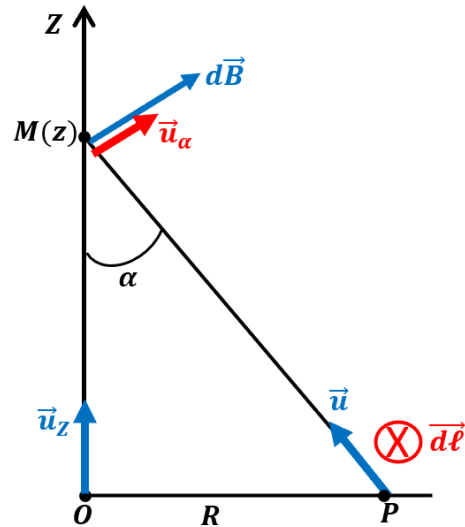
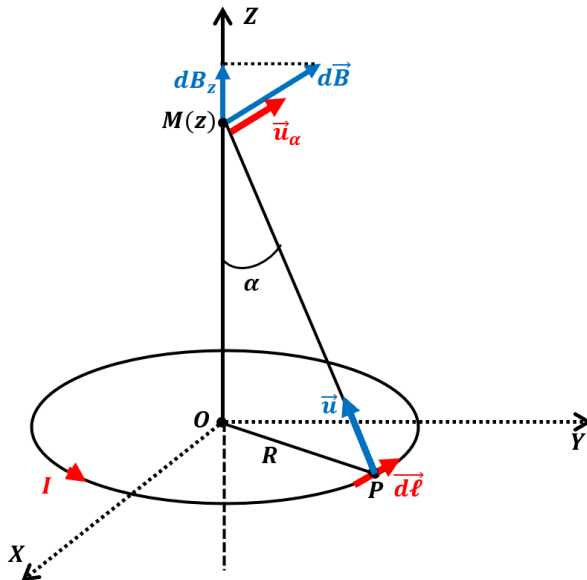


Figure dans le plan méridien (OPM)

En projection sur l'axe (OZ) :

$$dB_z(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{PM^2} \vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_z \quad (35)$$

Alors

$$dB_z(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{PM^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{PM^2} \sin \alpha \quad (36)$$

Avec $\sin \alpha = \frac{R}{PM}$ et $dl = R d\theta$, il vient :

$$dB_z(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin^3 \alpha}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha d\theta \quad (37)$$

Soit,

$$B(M) = \oint_{\text{spire}} dB_z(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \quad (38)$$

D'où

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \quad (39)$$

Ou encore, avec $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \quad (40)$$

Le champ au centre de la spire ($z = 0$) est :

$$B(O) = \frac{\mu_0}{2R} I \quad (41)$$

3. Lois fondamentales de la magnétostatique

3.1. Théorème d'Ampère

Énoncé

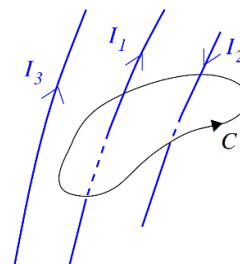
Dans le vide, la circulation du vecteur champ magnétique \vec{B} le long d'une courbe fermée et orientée (C) appelé contour d'Ampère est égale à la somme algébrique des intensités des courants enlacés par (C) multipliée par μ_0 .

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}} \quad (42)$$

Remarques

- Le contour C n'a pas de réalité physique, il est purement fictif et n'a aucune raison de correspondre avec un contour réel de la distribution étudiée ;
- Le sens d'orientation du contour est déterminé arbitrairement. L'orientation du contour détermine alors le signe de $I_{\text{enlacé}}$.

Exemple

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2) \quad (43)$$


3.1.1. Forme intégrale du théorème d'Ampère

Dans le cas d'une distribution de courant de densité \vec{j} définie en tout point de l'espace, l'intensité totale qui traverse la surface S qui s'appuie sur le contour (C) est :

$$I_{\text{enlacé}} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (44)$$

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (45)$$

L'orientation de la surface S et du contour (C) doit alors être faite de manière cohérente.

3.1.2. Forme locale du théorème d'Ampère

Le théorème de Stokes permet d'écrire :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S} \quad (46)$$

Soit

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad (47)$$

Il s'agit d'une forme partielle de l'équation de *Maxwell-Ampère*. Elle n'est valable que dans l'hypothèse de courant constant dans le temps (ou lentement variable dans le temps).

Remarque :

Le théorème d'Ampère joue en magnétostatique le même rôle que joue le théorème de Gauss en électrostatique. C'est l'outil le plus puissant pour calculer le champ d'induction magnétique d'un système de courant possédant un haut degré de symétrie (bobine indéfinie, fil indéfini, solénoïde, nappe de courant...). Le contour orienté (C) est en général une courbe purement imaginaire (géométrique).

Calcul du champ magnétostatique avec le théorème d'Ampère : Méthode

- 1) **Etape 1** : Utilisation des symétries pour déterminer la direction et le sens de \vec{B} ainsi que les variables dont il dépend. Il faut choisir un système de coordonnées adapté à la symétrie du problème.
- 2) **Etape 2** : Choisir un contour d'Ampère qui possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution filiforme de courant.
- 3) **Etape 3** : Application du théorème d'Ampère.

3.2. Flux conservatif du champ magnétique

3.2.1. Calcul de divergence du champ magnétique

Soit un élément de circuit $d\vec{l}$ parcouru par un courant I . Le champ $d\vec{B}$ créé en un point M est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (48)$$

Pour un circuit fermé (C), le champ créé en M est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (49)$$

Calculons $\text{div}(\vec{B})$:

$$\text{div}(\vec{B}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \text{div} \left(\frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \quad (50)$$

Sachant que $\text{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U}) - \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$

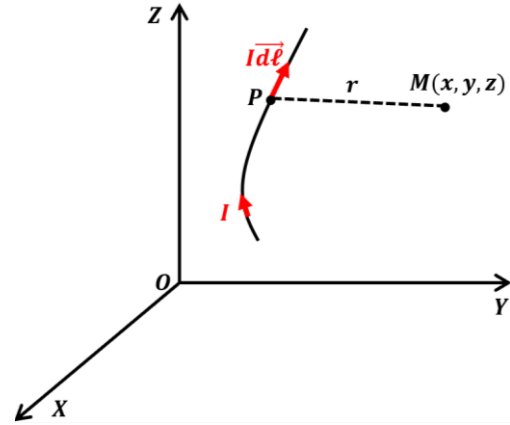


Figure 29

On aura :

$$\text{div}(\vec{B}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(d\vec{l}) - d\vec{l} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right) \quad (51)$$

Les opérateurs sont calculés par rapport aux coordonnées de M , ce qui implique que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(d\vec{l}) = \vec{0} \quad (52)$$

D'autre part, on a $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{0}$

Par suite :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (53)$$

C'est la formule locale de la conservation du flux du champ magnétique à travers une surface fermée. Cette relation constitue une propriété intrinsèque du champ magnétique.

3.2.2. Flux du champ magnétique

Soit une surface fermée quelconque S , s'appuyant sur une courbe (C) fermée et orientée. On choisit un élément de surface $d\vec{S} = dS \vec{n}$ dont le vecteur normal \vec{n} est, par convention, orienté vers l'extérieur. Le flux du champ magnétique \vec{B} à travers S est :

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{B}) d\tau = 0 \quad (\text{Théorème d'Ostrogradski}) \quad (54)$$

Conclusion : le flux d'un champ magnétique \vec{B} est conservatif, c'est-à-dire qu'il est nul à travers une surface fermée. Cette loi est générale et reste valable même en régime variable.

D'autre part, d'après le théorème de Maxwell, pour un champ statique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \mu_0 \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (55)$$

$\text{div}(\vec{j}) = 0$, implique que les vecteurs doivent décrire des boucles fermées.

Remarque : le flux à travers une surface S s'appuyant sur un contour fermé (C) est indépendant du choix de cette surface. Prenons deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur (C) et telles que $S = S_1 + S_2$ soit une surface fermée. La conservation du flux magnétique impose que :

$$\phi_S = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (56)$$

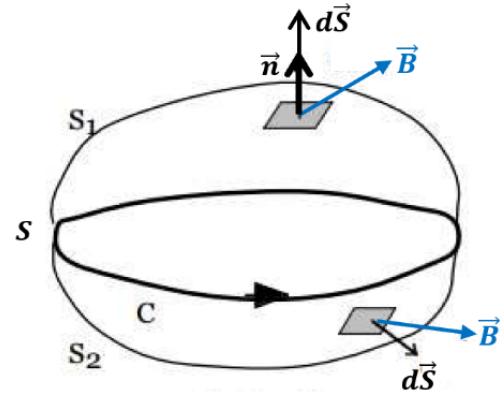


Figure 30

Soit

$$\phi_S = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_2) dS = \phi_{S_1} - \phi_{S_2} = 0 \quad (57)$$

Donc $\phi_{S_1} = \phi_{S_2}$ ce qui rentre d'un côté ressort de l'autre.

3.3. Potentiel Vecteur du champ magnétique

3.3.1. Définition

En électrostatique on a vu que le champ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ où V est le potentiel électrostatique car le rotationnel de \vec{E} est toujours nul. Ce n'est pas le cas pour le rotationnel de \vec{B} , par contre sa divergence est toujours nulle. D'autre part, $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}) = 0$ est toujours nulle. Par conséquent, on peut définir un vecteur tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \quad (58)$$

Le vecteur \vec{A} est appelé potentiel vecteur du champ magnétique \vec{B} . Il est défini à un gradient d'une fonction scalaire près. En effet, soit \vec{A} et \vec{A}' deux potentiels vecteurs tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}') \quad (59)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} - \vec{A}') = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} - \vec{A}' = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \quad (60)$$

Pour faciliter le calcul on prend $\varphi = 0$ à grande distance.

3.3.2. Cas d'un fil filiforme

Soit un circuit filiforme parcouru par un courant I . En un point M le champ magnétique élémentaire créé par un élément de courant $I d\vec{l}$ est :

$$d\vec{B} = \overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (61)$$

Or $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ par conséquent :

$$\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \overrightarrow{dl} \quad (62)$$

Or $\overrightarrow{rot}(f\vec{V}) = f\overrightarrow{rot}(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge \vec{V}$ avec $f = \frac{1}{r}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{dl}$

D'où

$$\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{dl}}{r}\right) - \frac{1}{r} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{dl}) \right] \quad (63)$$

Or $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{dl}) = \vec{0}$ car la dérivation se fait suivant les coordonnées du point M , c'est-à-dire x, y, z . Donc

$$\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{dl}}{r}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl}}{r}\right) \quad (64)$$

Et donc par identification :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\overrightarrow{dl}}{r}\right) \quad (65)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{circuit}} \frac{I \overrightarrow{dl}}{PM} \quad \text{avec } r = PM \quad (66)$$

Dans le cas d'une distribution volumique de courant \vec{j}_v , on a $I \overrightarrow{dl} = \vec{j}_v d\tau$, le vecteur potentiel est donné par la relation :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_v}{PM} d\tau \quad (67)$$

Et dans le cas d'une distribution surfacique de courant :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j}_s}{PM} dS \quad (68)$$

3.4. Dipôle magnétique

Champ magnétique créé par une spire

Soit une spire plane, de forme quelconque, de centre d'inertie O , parcourue par un courant permanent I . Nous allons calculer le champ magnétique créé par cette spire en tout point M de l'espace, situé à grande distance de la spire (précisément, à des distances grandes comparées à la taille de la spire).

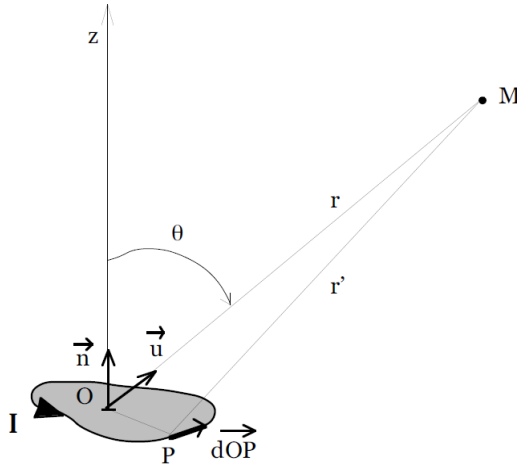


Figure 31

On pose

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} \quad \vec{r}' = \overrightarrow{PM}$$

$$\vec{\rho} = \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{r}' \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

On va donc utiliser la formule de Biot et Savart, dans la limite $r \gg \rho$, pour tout point P appartenant à la spire ($d\vec{l} = d\overrightarrow{OP} = d\vec{\rho}$)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\rho} \wedge \vec{r}'}{r'^3} \quad (69)$$

Evaluons le terme \vec{r}'/r'^3 pour des points M situés à grande distance de la spire :

$$\frac{\vec{r}'}{r'^3} = \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{(r^2 + \rho^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{\rho})^{3/2}} \approx \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{r^3 \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r^2}\right)^{3/2}} \quad (70)$$

$$\approx \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{r^3} \left(1 + 3\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r^2}\right) \approx \frac{\vec{u}}{r^2} - \frac{\vec{\rho}}{r^3} + 3\frac{\vec{u} \cdot \vec{\rho}}{r^3} \vec{u} \quad (71)$$

où nous avons fait un développement limité à l'ordre 1. En reportant cette expression dans la formule de Biot et Savart on obtient

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left[\oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \wedge \vec{u} - \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\rho} \wedge \vec{\rho}}{r} + \frac{3}{r} \oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \wedge \vec{u} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) \right] \quad (72)$$

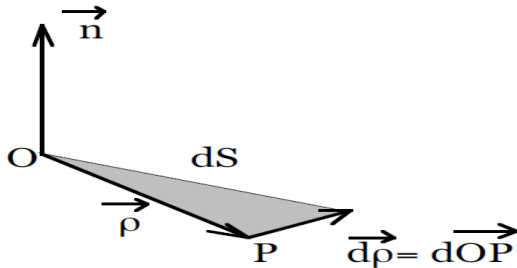
Evaluons séparément chaque terme intervenant dans la parenthèse :

$$\diamond \oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \wedge \vec{u} = \left[\oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \right] \wedge \vec{u} = [\vec{\rho}(P_0) - \vec{\rho}(P_0)] \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

Puisque le vecteur \vec{u} est indépendant du point P sur la spire et qu'on fait une intégration sur toute la spire, en revenant au point de départ P_0 .

$$\diamond - \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\rho} \wedge \vec{\rho}}{r} = \frac{1}{r} \oint_{\text{spire}} \vec{\rho} \wedge d\vec{\rho} = \frac{2S}{r} \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur normal au plan de la spire (vecteur de base de l'axe z) et S sa surface. Ce calcul est général, valable quelle que soit la surface.



En effet, une surface élémentaire dS , telle que

$$\frac{1}{2} \vec{\rho} \wedge d\vec{\rho} = dS \vec{n} \quad (73)$$

est toujours engendrée lors d'un petit déplacement du vecteur $\vec{\rho}$.

$$\diamond \oint_{\text{spire}} \vec{d\rho} \wedge \vec{u} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) = -\vec{u} \oint_{\text{spire}} \vec{d\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{u})$$

Prenons une surface S plane quelconque. Sur cette surface, on a $\oint d(xy) = [xy]_{P_0}^{P_0} = 0$ puisqu'on revient au même point de départ P_0 . On a donc l'égalité $\oint xdy = -\oint ydx$. Par ailleurs, on a également la propriété suivante $\oint xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_0} = \oint ydy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_0}^{y_0} = 0$.

On va utiliser ces propriétés générales pour calculer l'intégrale inconnue ci-dessus.

Si on décompose les vecteurs $\vec{\rho}$ et \vec{u} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) engendrant le plan de la spire, on obtient

$$\vec{d\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) = d\rho_1(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) \vec{e}_1 + d\rho_2(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) \vec{e}_2 \quad (74)$$

Or

$$\oint_{\text{spire}} \rho_1 u_1 d\rho_1 = \frac{u_1}{2} [\rho_1^2(P_0) - \rho_1^2(P_0)] = 0 \quad (75)$$

D'où

$$\oint_{\text{spire}} \vec{d\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) = u_2 \oint_{\text{spire}} \rho_2 d\rho_1 \vec{e}_1 + u_1 \oint_{\text{spire}} \rho_1 d\rho_2 \vec{e}_2 \quad (76)$$

$$= u_2 S \vec{e}_1 + u_1 S \vec{e}_2 = S \vec{n} \wedge \vec{u} \quad (77)$$

En rassemblant ces résultats, on obtient un champ magnétique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left[\frac{2S}{r} \vec{n} + \frac{3}{r} \vec{u} \wedge (S \vec{n} \wedge \vec{u}) \right] \quad (78)$$

On voit donc apparaître une grandeur importante car décrivant complètement la spire « vue » depuis une grande distance, à savoir le **moment magnétique dipolaire**

$$\vec{\mathcal{M}} = IS \vec{n} \quad (79)$$

En utilisant l'égalité $\vec{u} \wedge (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}})$, on obtient alors l'expression du champ magnétique créé par un dipôle

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3 \vec{u}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}) - \vec{\mathcal{M}}] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}}{r^2} \quad (80)$$

Ou bien

$$\vec{B}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_M \quad \text{avec} \quad V_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}}{r^2} \quad (81)$$

En coordonnées polaires (r, θ) , $\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}} = M \cos \theta$ et le champ \vec{B} s'écrit comme suit :

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad B_r = -\frac{\partial V_M}{\partial r} \quad \text{et} \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_M}{\partial \theta} \quad (82)$$

Soit

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} \end{cases} \Rightarrow B = (B_r^2 + B_\theta^2)^{1/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}(1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}}{r^3} \quad (83)$$

Lignes de champ :

Les lignes de champ ne sont pas des courbes où la norme du champ magnétique est constante. Ici, les lignes de champs définies par l'équation :

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} \quad (84)$$

Soit

$$\frac{\frac{dr}{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}}{r^3} \cos \theta}}{\frac{r d\theta}{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3} \sin \theta}} = \Rightarrow \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} \quad (85)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = 2 \ln\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}\right) \Rightarrow r = r_0 \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}\right)^2 \quad (86)$$

Où le rayon r_0 correspond à un angle θ_0 arbitraire.

Remarques :

- ❖ Ces expressions ne sont pas à retenir : il faut par contre comprendre et savoir reproduire la démonstration.
- ❖ Pour établir l'expression du champ créé par un dipôle, nous avons fait un développement limité en ne conservant que les termes d'ordre 1. Les termes d'ordre supérieur (multipolaires) ne jouent un rôle qu'à proximité immédiate de la spire.