Алгебраические структуры

∃ M – мн-во, к элементам которого можем применять различные операции

- Унарные операции $M \to N$

как правило предполагаем, что $M = N$

Тогда операция явл. внутренней для мн-ва M или „мн-во M явл. замкнутым относ. этой операции"

Пример. $M = \mathbb{N}$ $*$ – операция удвоения – M замкнуто относ. $*$
$\circ$ – операция деления – M не замкнуто относ. $\circ$
$\Rightarrow$ операция деления не явл-ся внутренней

- Бинарные операции $M \times N \to K$ или $(m, n) \mapsto k$

∃ $M = N = K$

Такую бинарную операцию $(M \times M \to M)$ будем наз-ть внутренним законом композиции

Пример $2 + 3 = 5$ $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$

$2 \in \mathbb{N}$ $3 \in \mathbb{N}$ $5 \in \mathbb{N}$

Свойства внутр. законов композиции

$(M, *)$ — M — мн-во, $*$ — бинарная операция

ассоциативность $\forall x, y, z \in M$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Пример ① $M = \mathbb{R}$ $\quad x * y = \frac{x+y}{2}$

$$\frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} \overset{?}{\neq} \frac{x + \frac{y+z}{2}}{2}$$

неассоциативен

② $M = \mathbb{N}$ $\quad x * y = x^y$ $\quad x^{yz} = (x^y)^z \overset{?}{\neq} x^{(y^z)}$

Коммутативность $\forall x; y \in M$ $\quad x * y = y * x$

Пример M - мн-во ф-ий одной переменной $\quad] f(x) = \sin x \; ; \; g(x) = x^2$

$$(f * g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$$

$$(g * f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

Классификация элементов мн-ва относительно их свойств

Нейтральный элемент $e \in M$ если $\forall x \in M : x * e = e * x = x$

относ-но операции „+" $e =$

относительно операции „·" $e = 1$

относ. операции $\cup$ подмн-в $e = \varnothing$

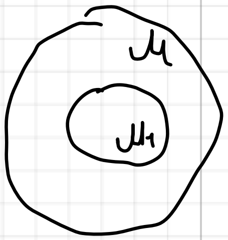
относ. операции $\cap$ подмн-в — то мн-во M, подмножества которого мы рассматриваем

Лемма. если в мн-ве определен нейтральный эл-т относ. операции $*$, то он !

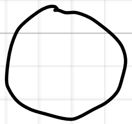
Поглощающий элемент $\sim \in M$ относ. данного закона композ.

$\forall x \in M \quad x * \sim = \sim = \sim * x$

Например, 0 — поглощающий эл-т относ. операции „·"



M поглотил M_1 $\qquad M_1 \cup M = M$



M и $\varnothing$ $\qquad \varnothing \cap M = \varnothing$ $\qquad \varnothing$ поглотило M

Обратный элемент

эл-т $y \in M$ – обратный к $x \in M$ если $y * x = x * y = e$

$2 + (-2) = 0$ $\qquad 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Пример $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ – внутр. з-н композиции

Лемма $(M, *)$ – внутр. з-н композиции
$\exists *$ – ассоциативно Тогда $\exists !$ обратный эл-т к эл-ту $x \in M$

Опр. алгебр. структурой будем называть $(M, *)$ - мн-во с введенной на нем операцией, кот. явл-ся внутр. з-ном композиции для данного мн-ва.

Иерархия

Магма (группоид) – мн-во с введеной на нем операцией, кот. явл. внутренним з-ном композиции $(M, *)$

Полугруппа – магма, в кот. выполняется ассоциативность

Моноид – полугруппа с нейтральным элементом

Группа – (G) моноид с обратным эл-м

$\forall x, y, z \in G$ ассоц. $x * (y * z) = (x * y) * z$ $\boxed{1}$

$\exists e \in G: \quad x * e = e * x = x$ $\boxed{2}$

$\exists x^{-1} \in G: \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ $\boxed{3}$

св-во коммутативности : коммут. магма (обладает свойством комм.)
коммут. полугруппа
коммут. моноид

$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3} + \boxed{4}$ Абелева группа = коммут. группа

$\boxed{4}$ $\forall x, y \in G \quad x * y = y * x$

Примеры магма: но не полугруппа $* : \dfrac{x+y}{2} \quad y, x \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{N}; +)$ $\nexists$ нейтр. эл-та $\Rightarrow$ полугруппа, но не моноид

$(\mathbb{Z}; +)$ – моноид, даже группа

$(\mathbb{Z}; \cdot)$ – моноид

$(M, \circ, *)$ $\circ$ – дистрибутивный относительно $*$ если

$\forall x, y, z \in M \quad x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ дистр. слева

$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$ дистр. справа

Пример $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Кольцо – множ-во, замкнутое относит. двух согласованных операций, которое является внутр. з-ном композиции и при этом работает двойная дистрибутивность и это мн-во – абелева группа относ. операции „+".

Опр. Кольцо – мн-во с двумя бинарными операциями „+" и „·", удовлетворяющее аксиомам

1. ассоц. слож-я $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. коммут. слож-е $x + y = y + x$
3. $\exists$ 0 – нейтр. эл-т : $x + 0 = x$ $\quad \forall x$
4. $\forall x$ $\exists$ противоп. элемент : $(-x)$ $\quad -x + x = 0$
5. Умножение дистрибутивно относ. слож-я : $(x + y) z = xz + yz$

$$z(x + y) = zx + zy$$

Поле – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой эл-т имеет обратный

аксиомы 1 – 5 + $\exists$-е обр. эл-та

Линейные пространства

Опр. мн-во $\mathcal{L}(K)$ элементов $\forall$ природы наз-ся линейным пр-вом над полем K если

1. $\forall x, y \in \mathcal{L} \quad (x+y) \in \mathcal{L}$
2. $\forall x \in \mathcal{L} \quad \forall \lambda \in K \ : \ \lambda x \in \mathcal{L}$
3. Указанные операции (1; 2) подчиняются аксиомам лин. пр-ва:

(1) $\forall x, y \in \mathcal{L} \ : \ x + y = y + x$ сложе-е коммутативно

(2) $\forall x, y, z \in \mathcal{L} \ : \ (x+y)+z = x+(y+z)$ сложе-е ассоц.

(3) $\exists \ \Theta \in \mathcal{L} \quad \forall x \in \mathcal{L} \quad \Theta + x = x$ $\exists$ нейтр. эл-т

(4) $\forall x \in \mathcal{L} \quad \exists \ (-x) \in \mathcal{L} \ : \ x + (-x) = \Theta$ $\exists$ противоп. эл-т

(5) $\forall x \in \mathcal{L} \quad 1 \cdot x = x$ $\exists$ нейтр. эл-т по умнож.

(6) $\forall x \in \mathcal{L} \quad \forall \lambda; \mu \in K \quad \lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$

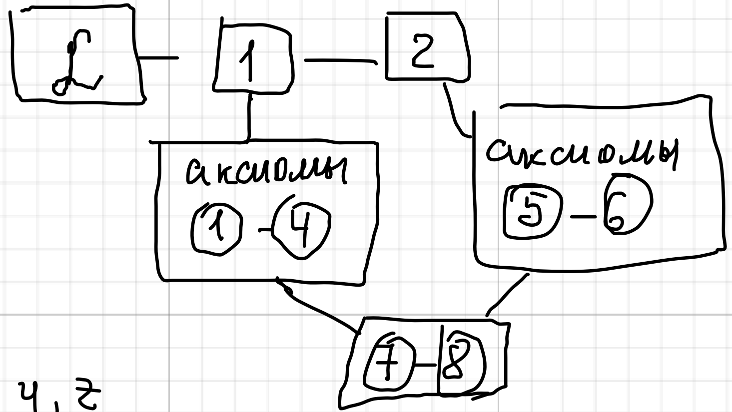
(7) дистриб-ть умн-я на число относ. сложения чисел из поля K

$\forall x \in \mathcal{L}$ и $\forall \lambda, \mu \in K \quad (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

(8) дистр-ть умн-я на число относ. сложения эл-в из $\mathcal{L}$:

$\forall x, y \in L \quad \forall \lambda \in R \quad (x+y)\lambda = \lambda x + \lambda y$

(1) – (8) — аксиомы лин. пространства



Элементами линейного пространства будем называть векторы и обозн x, y, z

Примеры линейных пространств

1. $\mathbb{R}^3$ – мн-во свободных векторов ($\mathbb{R}^2$ – векторы на пл-ти)
2. Мн-ва матриц $A_{m\times n}$ с эл-тами $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (обозн. $A_{m\times n}(\mathbb{R})$)
3. мн-во функций, $C[a;b]$ с операциями $+$ и $\cdot$ на число

нулевой элемент $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$

Базис линейного пространства

Опр. базисом линейного пространства $L(K)$ будем называть упорядоченное мн-во лин. независ. векторов $(e_1 \dots e_n) \in L(K)$

$$\forall x \in L \quad \exists x_1 \dots x_n : \underbrace{x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n}_{\text{разложение вектора } x \text{ по базису } (e_1 \dots e_n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$x_1, \ldots, x_n$ - координаты вектора x в базисе $(e_1 \ldots e_n)$

Теорема (единственность разложения)
в линейном пространстве разложение вектора по данному базису единственно.

Док-во от противного: $\exists$ в $\mathcal{L}(K)$ $\exists\ x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n =$

$x = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$

и $\exists$ хотя бы один i : $x_i \neq y_i$

$$\theta = (x_1 - y_1) e_1 + \ldots + \underbrace{(x_i - y_i)}_{\neq 0} e_i + \ldots + (x_n - y_n) e_n$$ противоречие

$x_i = y_i \quad \forall i$ $\boxtimes$

Размерность линейного пространства

Опр. максимальное кол-во линейно-независимых векторов в данном лин. пр-ве $\mathcal{L}$ наз-се размерностью лин. пр-ва

обозн $\dim \mathcal{L} = n$