

# Практическая работа: Векторы и аналитическая геометрия в прикладных задачах (Задача принадлежности точки тетраэдру)

---

## Цель

Освоить различные методы векторной алгебры и аналитической геометрии для проверки принадлежности точки тетраэдру: сравнить их эффективность и применимость. Сформулировать задачу в терминах прикладных областей.

## Постановка задачи

Определить, принадлежит ли заданная точка  $P(x, y, z)$  тетраэдру  $ABCD$ .

Исследуйте случаи: внутри; на грани; на ребре; совпадение с вершиной; снаружи.

## Методы решения (идеи методов)

### Метод 1: Метод объёмов (через смешанное произведение)

Вычисляем объём пирамиды  $ABCD$  и объёмы пирамид с вершиной в  $P$  ( $PBCD$ ,  $APCD$ ,  $ABPD$ ,  $ABCP$ ) с помощью смешанного произведения векторов. Сравниваем сумму объёмов пирамид  $PBCD$ ,  $APCD$ ,  $ABPD$ ,  $ABCP$  и объём пирамиды  $ABCD$ .

### Метод 2: Метод знаков смешанных произведений

Для каждой грани сравниваем знаки смешанных произведений для точки  $P$  и противоположной вершины (например, для грани  $ABC$  сравниваем знаки смешанных произведений  $AB \cdot AC \cdot AP$  и  $AB \cdot AC \cdot AD$ ).

### Метод 3: Метод уравнений плоскостей

Составляем уравнение плоскости через три вершины каждой грани. Подставляем координаты точки  $P$  и противоположной вершины и сравниваем знаки полученных значений.

### Метод 4: Альтернативные подходы

Выберите и реализуйте один из указанных ниже методов (или другой, основанный на методах векторной алгебры и аналитической геометрии):

- Метод барицентрических координат.
- Метод нормалей.
- Метод триангуляции граней.
- Метод луча.
- Метод расстояний.

## Требования

- Корректно задать вершины пирамиды (невыврожденная фигура).
- Протестировать задачу на нескольких точках  $P$ , охватывающих разные случаи.
- Реализовать задачу вручную и с помощью кода.
- Сравнить методы (таблица «плюсы-минусы»).
- Сформулировать задачу в терминах выбранной прикладной области.
- Визуализировать пирамиду и тестовые точки с помощью одного из доступных инструментов (GeoGebra, Python, Matlab, PowerPoint и др.).

## Отчёт

Оформить отчёт по предложенному шаблону, приведенному ниже.

# Практическая работа: Векторы и аналитическая геометрия в прикладных задачах (Задача принадлежности точки тетраэдру)

## 1. Цель

Сформулируйте цель своими словами

## 2. Постановка задачи

Определить, принадлежит ли заданная точка  $P(x, y, z)$  тетраэдру  $ABCD$ .

Исследовать случаи: внутри; на грани; на ребре; совпадение с вершиной; снаружи.

## 3. Вершины пирамиды

- Таблица координат вершин  $A, B, C, D$ . *Задайте координаты вершин пирамиды.*

Вершина	Координаты
$A$	( ; ; )
$B$	( ; ; )
$C$	( ; ; )
$D$	( ; ; )

- Проверка корректности.

*Докажите, что пирамида не вырождена (вершины не лежат в одной плоскости, объём не равен нулю или т.п.). Если данные не корректны, измените их.*

## 4. Методы решения

*Ниже приведены основные идеи методов. Для каждого метода приведите детальное математическое обоснование и реализацию (можно использовать Python, Matlab или другой инструмент) для всех случаев: внутри; на грани; на ребре; совпадение с вершиной; снаружи.*

### Метод 1: Метод объёмов (через смешанное произведение)

- Основная идея.** Вычисляем объём пирамиды  $ABCD$  и объёмы пирамид с вершиной в  $P$  ( $PBCD, APCD, ABPD, ABPC$ ) с помощью смешанного произведения векторов. Сравниваем сумму объёмов пирамид  $PBCD, APCD, ABPD, ABPC$  и объём пирамиды  $ABCD$ .
- Описание математической реализации.**
- Решение вручную.**
- Решение с помощью кода.**

- Выводы.

## Метод 2: Метод знаков смешанных произведений

- **Основная идея.** Для каждой грани сравниваем знаки смешанных произведений для точки  $P$  и противоположной вершины (например, для грани  $ABC$  сравниваем знаки смешанных произведений  $AB \cdot AC \cdot AP$  и  $AB \cdot AC \cdot AD$ ).
- **Описание математической реализации.**
- **Решение вручную.**
- **Решение с помощью кода.**
- **Выводы.**

## Метод 3: Метод уравнений плоскостей

- **Основная идея.** Составляем уравнение плоскости через три вершины каждой грани. Подставляем координаты точки  $P$  и противоположной вершины и сравниваем знаки полученных значений.
- **Описание математической реализации.**
- **Решение вручную.**
- **Решение с помощью кода.**
- **Выводы.**

## Метод 4: (Другой) подход

- **Основная идея.**
- **Описание математической реализации.**
- **Решение вручную.**
- **Решение с помощью кода.**
- **Выводы.**

## Тестовые точки

Заполните таблицу тестовых точек с указанием расположения (внутри, на грани, на ребре, вершина, снаружи). Подберите точки для каждого случая расположения.

Координаты точки $P$	Расположение	Примечание
( ; ; )		

## 5. Сравнение методов

Метод	Плюсы	Минусы

Вывод:

*Приведите краткий вывод, какой метод более удобный/понятный/универсальный/...*

## 6. Формулировка прикладной задачи

*Сформулируйте задачу в терминах прикладной области. Например: в компьютерной графике: проверить, попадает ли точка (камера или объект) в пирамиду видимости; в робототехнике: определить, входит ли манипулятор в пирамидальную зону безопасности и т.п.*

*Выберите область (компьютерная графика, робототехника, физика, геоинформатика или другая) и опишите задачу своими словами (1–2 абзаца)*

## 7. Визуализация результатов

*Визуализируйте пирамиду и тестовые точки с помощью одного из доступных инструментов (по выбору: GeoGebra, Python, Matlab, MS PowerPoint или др.). В отчёте укажите, какой инструмент использован. Отметьте различными цветами или символами положения точек: внутри, на грани, на ребре, на вершине, снаружи.*

*Сделайте наглядные схемы для всех методов проверки.*

*Прикрепите рисунки к отчёту и подпишите ключевые элементы.*