

Практическая работа: Векторы и аналитическая геометрия в прикладных задачах (Задача принадлежности точки тетраэдру)

Цель

Освоить различные методы векторной алгебры и аналитической геометрии для проверки принадлежности точки тетраэдру: сравнить их эффективность и применимость. Сформулировать задачу в терминах прикладных областей.

Постановка задачи

Определить, принадлежит ли заданная точка $P(x, y, z)$ тетраэдру $ABCD$.

Исследуйте случаи: внутри; на грани; на ребре; совпадение с вершиной; снаружи.

Методы решения (идеи методов)

Метод 1: Метод объёмов (через смешанное произведение)

Вычисляем объём пирамиды $ABCD$ и объёмы пирамид с вершиной в P ($PBCD, APCD, ABPD, ABCP$) с помощью смешанного произведения векторов. Сравниваем сумму объёмов пирамид $PBCD, APCD, ABPD, ABCP$ и объём пирамиды $ABCD$.

Метод 2: Метод знаков смешанных произведений

Для каждой грани сравниваем знаки смешанных произведений для точки P и противоположной вершины (например, для грани ABC сравниваем знаки смешанных произведений $AB \cdot AC \cdot AP$ и $AB \cdot AC \cdot AD$).

Метод 3: Метод уравнений плоскостей

Составляем уравнение плоскости через три вершины каждой грани. Подставляем координаты точки P и противоположной вершины и сравниваем знаки полученных значений.

Метод 4: Альтернативные подходы

Выберите и реализуйте один из указанных ниже методов (или другой, основанный на методах векторной алгебры и аналитической геометрии):

- Метод барицентрических координат.
- Метод нормалей.
- Метод триангуляции граней.
- Метод луча.
- Метод расстояний.

Требования

- Корректно задать вершины пирамиды (невырожденная фигура).
- Протестировать задачу на нескольких точках P , охватывающих разные случаи.
- Реализовать задачу вручную и с помощью кода.
- Сравнить методы (таблица «плюсы-минусы»).
- Сформулировать задачу в терминах выбранной прикладной области.
- Визуализировать пирамиду и тестовые точки с помощью одного из доступных инструментов (GeoGebra, Python, Matlab, PowerPoint и др.).

Отчёт

Оформить отчёт по предложенному шаблону, приведенному ниже.

Практическая работа: Векторы и аналитическая геометрия в прикладных задачах (Задача принадлежности точки тетраэдру)

1. Цель

Сформулируйте цель своими словами

2. Постановка задачи

Определить, принадлежит ли заданная точка $P(x, y, z)$ тетраэдру $ABCD$.

Исследовать случаи: внутри; на грани; на ребре; совпадение с вершиной; снаружи.

3. Вершины пирамиды

- Таблица координат вершин A, B, C, D . *Задайте координаты вершин пирамиды.*

Вершина	Координаты
A	(; ;)
B	(; ;)
C	(; ;)
D	(; ;)

- Проверка корректности.

Докажите, что пирамида не вырождена (вершины не лежат в одной плоскости, объём не равен нулю или т.п.). Если данные не корректны, измените их.

4. Методы решения

Ниже приведены основные идеи методов. Для каждого метода приведите детальное математическое обоснование и реализацию (можно использовать Python, Matlab или другой инструмент) для всех случаев: внутри; на грани; на ребре; совпадение с вершиной; снаружи.

Метод 1: Метод объёмов (через смешанное произведение)

- Основная идея.** Вычисляем объём пирамиды $ABCD$ и объёмы пирамид с вершиной в P ($PBCD, APCD, ABPD, ABCP$) с помощью смешанного произведения векторов. Сравниваем сумму объёмов пирамид $PBCD, APCD, ABPD, ABCP$ и объём пирамиды $ABCD$.
- Описание математической реализации.**
- Решение вручную.**
- Решение с помощью кода.**

- Выводы.

Метод 2: Метод знаков смешанных произведений

- **Основная идея.** Для каждой грани сравниваем знаки смешанных произведений для точки P и противоположной вершины (например, для грани ABC сравниваем знаки смешанных произведений $AB \cdot AC \cdot AP$ и $AB \cdot AC \cdot AD$).
- **Описание математической реализации.**
- **Решение вручную.**
- **Решение с помощью кода.**
- Выводы.

Метод 3: Метод уравнений плоскостей

- **Основная идея.** Составляем уравнение плоскости через три вершины каждой грани. Подставляем координаты точки P и противоположной вершины и сравниваем знаки полученных значений.
- **Описание математической реализации.**
- **Решение вручную.**
- **Решение с помощью кода.**
- Выводы.

Метод 4: (Другой) подход

- **Основная идея.**
- **Описание математической реализации.**
- **Решение вручную.**
- **Решение с помощью кода.**
- Выводы.

Тестовые точки

Заполните таблицу тестовых точек с указанием расположения (внутри, на грани, на ребре, вершина, снаружи). Подберите точки для каждого случая расположения.

Координаты точки P	Расположение	Примечание
(; ;)		

5. Сравнение методов

Метод	Плюсы	Минусы

Вывод:

Приведите краткий вывод, какой метод более удобный/понятный/универсальный/...

6. Формулировка прикладной задачи

Сформулируйте задачу в терминах прикладной области. Например: в компьютерной графике: проверить, попадает ли точка (камера или объект) в пирамиду видимости; в робототехнике: определить, входит ли манипулятор в пирамидальную зону безопасности и т.п.

Выберите область (компьютерная графика, робототехника, физика, геоинформатика или другая) и опишите задачу своими словами (1–2 абзаца)

7. Визуализация результатов

Визуализируйте пирамиду и тестовые точки с помощью одного из доступных инструментов (по выбору: *GeoGebra*, *Python*, *Matlab*, *MS PowerPoint* или др.). В отчёте укажите, какой инструмент использован.

Отметьте различными цветами или символами положения точек: внутри, на грани, на ребре, на вершине, снаружи.

Сделайте наглядные схемы для всех методов проверки.

Прикрепите рисунки к отчёту и подпишите ключевые элементы.