

# Leçon 1 : Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

## I. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

### 1) Définition :

Un corps solide indéformable est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe sauf les points qui appartiennent à cet axe.

## II. Repérage d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

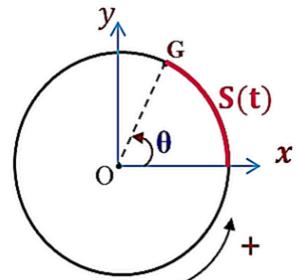
Pour repérer le mouvement d'un point G d'un corps solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, on considère un repère  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$  confondu avec le plan du mouvement.

On repère la position du point G par son abscisse angulaire ou par son abscisse curviligne

### 1) Abscisse curviligne (s)

- C'est la distance parcourue par un point du solide le long de sa trajectoire circulaire.
- Unité : mètre (m).

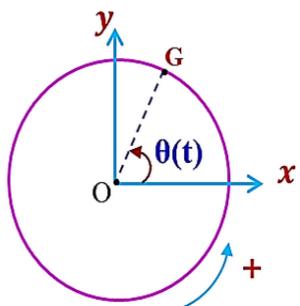
$$s(t) = \widehat{AG}$$



### 2) Abscisse angulaire (θ)

- C'est l'angle (en radian [rad]) qui correspond à l'arc parcouru.
- Relation :  $s = R \times \theta$ , où R est le rayon du cercle.

$$\theta(t) = (\widehat{ox}, \widehat{og})$$



### Application

Un disque de diamètre  $D = 50\text{cm}$  réalise un demi-tour pendant une durée  $\Delta t$ .

Le point M se trouve initialement sur l'axe des abscisses.

- ❶ Déterminer l'abscisse angulaire d'un point M du périmètre du disque
- ❷ Déduire la distance parcourue par ce point pendant la durée  $\Delta t$ .

Notons que le point M se trouve initialement sur l'axe des abscisses.

### Correction

❶ Le disque réalise un demi-tour donc l'abscisse angulaire du point M est :  $\theta = \pi = 3,14 \text{ rad}$

❷ La distance parcourue par le point M pendant la durée  $\Delta t$  est  $d = \Delta S = S - S_0$

Avec  $S_0 = 0\text{m}$  « le point M se trouve initialement sur l'axe des abscisses (Ox) »

Alors :  $d = S \Leftrightarrow d = R \cdot \theta$

$$\Leftrightarrow d = \frac{D}{2} \cdot \theta$$

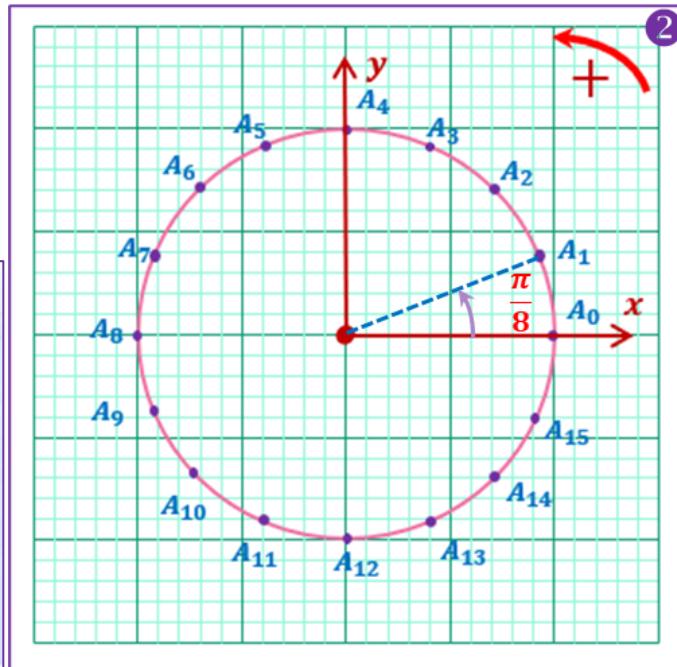
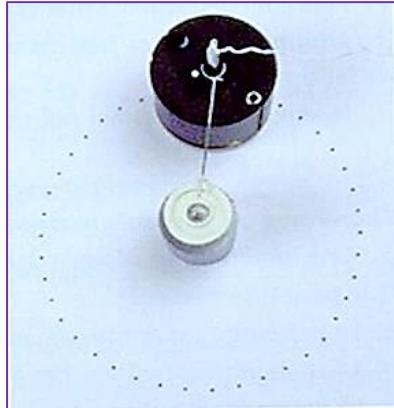
$$\text{A.N : } d = \frac{50 \times 10^{-2}}{2} \times 3,14 = 7,85 \times 10^{-2}\text{m}$$

## III. Vitesse angulaire ( $\omega$ )

### Activité

On considère un autoporteur qui peut tourner autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ). On connecte l'autoporteur à un détonateur latéral A ( la figure ❶ ).

On lance l'autoporteur et on enregistre le mouvement du détonateur A pendant des périodes de temps égales et successives  $\tau = 40\text{ms}$  ( la figure ❷ )



- ① Quelle est la nature de la trajectoire du détonateur  $A$  ?
- ② Calculer la vitesse instantanée du détonateur aux positions  $A_3$  et  $A_5$ . Que concluez-vous ?
- ③ Représenter le vecteur vitesse instantanée aux positions  $A_3$  et  $A_5$
- ④ On définit la vitesse angulaire instantanée par la relation suivante :  $\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ .  
Calculer la vitesse angulaire instantanée du détonateur A aux positions  $A_3$  et  $A_5$ .
- ⑤ Calculer la vitesse angulaire moyenne du détonateur A entre les positions  $A_1$  et  $A_8$ . Que remarquez-vous ?
- ⑥ Calculer le rapport  $\frac{v_i}{\omega_i}$  et le comparer avec le rayon de la trajectoire du détonateur A. Que concluez-vous ?

- ❶ La trajectoire du détonateur A est circulaire .  
 ❷ On calcule les valeurs de la vitesse instantanée, en utilisant la relation suivante :  $V_i = \frac{\widehat{A_{i+1}A_{i-1}}}{2\tau}$ .

▪ À la position  $A_3$

$$\text{On a : } V_3 = \frac{\widehat{A_4A_2}}{2\tau}.$$

$$\text{A.N : } V_3 = \frac{2,2 \times 10^{-2}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$$

$$\text{On trouve : } V_3 = 2,75 \times 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$$

▪ À la position  $A_5$

$$\text{On a : } V_5 = \frac{\widehat{A_6A_4}}{2\tau}.$$

$$\text{A.N : } V_5 = \frac{1,7 \times 10^{-2}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$$

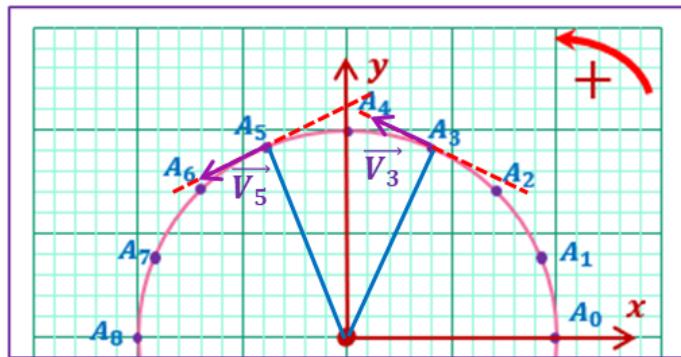
$$\text{On trouve : } V_5 = 2,12 \times 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$$

→ Puisque  $V_3 = V_5$  donc le mouvement du détonateur A est uniforme .

- ❸ Pour représenter les vecteurs vitesses instantanées  $\vec{V}_3$  et  $\vec{V}_5$ , on doit déterminer leurs caractéristiques

Vecteur vitesse	$\vec{V}_3$	$\vec{V}_5$
Origine	$A_3$	$A_5$
Direction	La tangent à la trajectoire au point $A_3$	La tangent à la trajectoire au point $A_5$
Sens	Celui du mouvement	
Norme en ( $\text{m.s}^{-1}$ )	$V_3 = V_5 = 2,75 \times 10^{-1}$	

On représente les vecteurs vitesses  $\vec{V}_3$  et  $\vec{V}_5$  en utilisant l'échelle suivante :  $1\text{cm} \mapsto 0,21\text{m.s}^{-1}$   
 « L'élève représente les vecteurs vitesses dans le document de la figure ❹»



- ❹ On calcule les valeurs de la vitesse angulaire instantanée, en utilisant la relation suivante :  $V_i = \frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2\tau}$ .

▪ À la position  $A_3$

$$\text{On a : } \omega_3 = \frac{\theta_4-\theta_2}{2\tau}.$$

$$\text{A.N : } \omega_3 = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$$

$$\text{Donc : } \omega_3 = 9,82 \text{ rad.s}^{-1}$$

▪ À la position  $A_5$

$$\text{On a : } \omega_5 = \frac{\theta_6-\theta_4}{2\tau}.$$

$$\text{A.N : } \omega_5 = \frac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$$

$$\text{Donc : } \omega_5 = 9,82 \text{ rad.s}^{-1}$$

- ❺ On calcule la vitesse moyenne du détonateur A entre les positions  $A_1$  et  $A_8$

$$\text{On a } \omega_m = \frac{\theta_8-\theta_1}{t_8-t_1} = \frac{\theta_8-\theta_1}{7\tau}$$

$$\text{A.N : } \omega_m = \frac{\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}}{7 \times 40 \times 10^{-3}}$$

$$\text{Donc : } \omega_m = 9,82 \text{ rad.s}^{-1}$$

→ On constate que la vitesse angulaire moyenne est égale à la vitesse angulaire instantanée .

- ❻ On a :  $\frac{V_3}{\omega_3} = \frac{2,12 \times 10^{-1}}{9,82}$

$$\frac{V_3}{\omega_3} \approx 2,8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Et d'après la figure ❹ rayon de la trajectoire est  $R = 2,8 \text{ cm}$

Ou bien :  $R = 2,8 \times 10^{-2} \text{ m}$

On constate que :  $\frac{V_3}{\omega_3} = R$

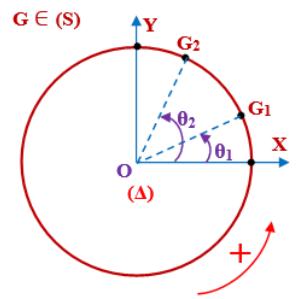
On déduit que :  $V_i = R\omega_i$

## 1) La vitesse angulaire moyenne:

- La vitesse angulaire moyenne  $\omega_m$  d'un point

$$G \text{ entre deux instants } t_1 \text{ et } t_2 \text{ est : } \omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}.$$

- L'unité de la vitesse angulaire dans le système international des unités est : rad. s<sup>-1</sup>
- Elle exprime la rapidité de variation de l'angle.

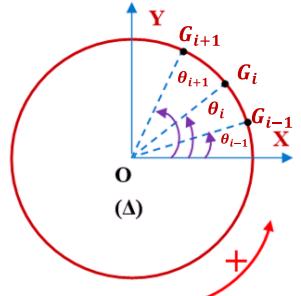


## 2) La vitesse angulaire instantanée

La vitesse angulaire instantanée  $\omega_i$  d'un point G

$$\text{à l'instant } t_i \text{ est définie par la relation suivante : } \omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}.$$

Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire au même instant



## 3) La vitesse linéaire instantanée

La vitesse linéaire « curviligne » instantanée  $V_i$  d'un point G à l'instant  $t_i$  est définie par la relation suivante :  $V_i = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ .

L'unité de la vitesse angulaire dans le système international des unités est : m. s<sup>-1</sup>.

La vitesse angulaire et la vitesse linéaire sont liées par la relation suivante :  $V_i = R \omega_i$

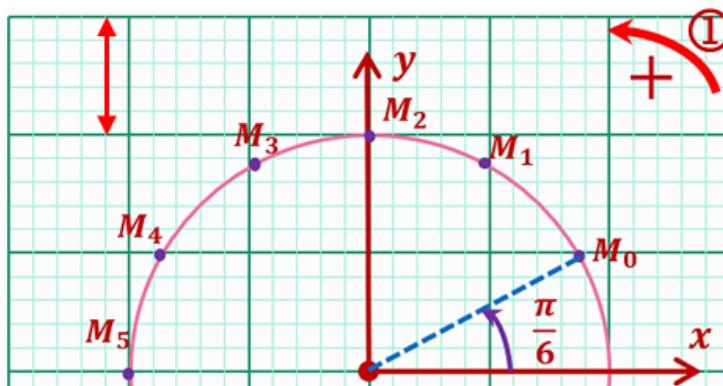
La vitesse linéaire augmente en s'éloignant de l'axe de rotation.

## III. Mouvement de rotation uniforme

### Activité

On enregistre les positions occupées par un point M d'un solide (S) en mouvement de rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) sur une table à coussin d'air pendant des intervalles de temps égaux à

$\tau = 20ms$ , on obtient l'enregistrement de la figure ①. Le point  $M_0$  est la position occupée par le point M à l'instant  $t_0 = 0s$



❶ En exploitant l'enregistrement de la figure ① compléter le tableau ci-dessous .

Position	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
Date $t(ms)$	0	20	40	60	80
Abscisse angulaire $\theta(rad)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

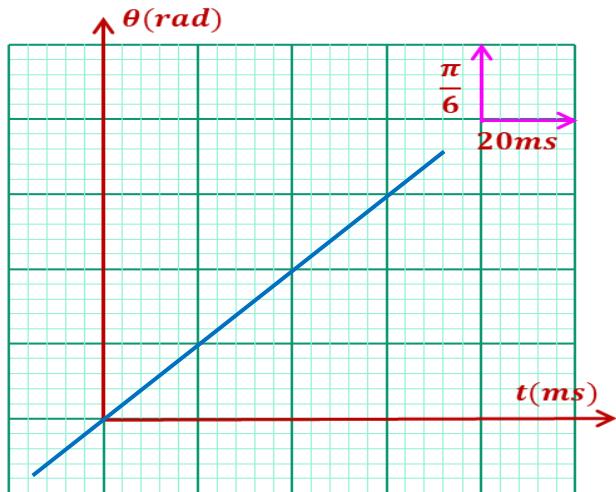
- ❷ Calculer la valeur de la vitesse angulaire instantanée du point M aux positions  $M_1$  et  $M_4$  et déduire la nature du mouvement du corps (S)

- ❸ Dresser sur la figure ② la courbe  $\theta = f(t)$  qui représente l'évolution de l'abscisse angulaire en fonction de temps en déterminant sa nature .

- ❹ Déterminer la valeur du coefficient directeur de la courbe  $\theta = f(t)$  et le comparer avec la valeur de la vitesse angulaire .

- ❺ Déduire l'équation modélisant l'évolution temporelle de l'abscisse curviligne de point M.

- ❻ Déterminer la période et la fréquence du mouvement du solide (S) .



②

❶ Voir le tableau ci-dessus

❷ Calculons la vitesse angulaire instantanée :

▪ À la position  $M_1$

$$\text{On a : } \omega_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2\tau} .$$

$$\text{A.N : } \omega_1 = \frac{\frac{\pi}{6} \times 2}{2 \times 20 \times 10^{-3}}$$

$$\text{Donc : } \omega_1 = 2,62 \times 10^1 \text{ rad.s}^{-1}$$

▪ À la position  $A_5$

$$\text{On a : } \omega_4 = \frac{\theta_5 - \theta_3}{2\tau} .$$

$$\text{A.N : } \omega_4 = \frac{\frac{\pi}{6} \times 2}{2 \times 20 \times 10^{-3}}$$

$$\omega_4 = 2,62 \times 10^1 \text{ rad.s}^{-1}$$

▪ Puisque  $\omega_1 = \omega_4 = \text{Cte}$  donc le solide (S) est en rotation uniforme

- ❸ Voir la courbe de la figure ② . Cette courbe montre que l'évolution temporelle de l'abscisse angulaire du point M est une fonction affine d'équation :  $\theta(t) = at + b$

- ❹ D'après la courbe de ② figure on trouve :  $a = \frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{(60-20) \times 10^{-3}} = 2,62 \times 10^1 \text{ rad.s}^{-1}$ . On constate que :  $a = \omega$  .

On déduit que l'équation horaire vérifiée par l'abscisse angulaire  $\theta$  d'un point d'un solide en mouvement de rotation uniforme est affine dont le coefficient directeur est égale à la valeur de la vitesse angulaire .  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$  .

- ❺ D'après la question précédente on a :  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$  avec  $\omega = 2,62 \times 10^1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\theta_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$  et puisque  $s(t) = R \cdot \theta(t)$  avec  $R = 2,28 \text{ cm}$

$$\text{Donc : } s(t) = 2,8 \times 10^{-2} (2,62 \times 10^1 t + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{Finalement on trouve : } s(t) = 7,34 \times 10^{-1} t + 1,47 \times 10^{-2} .$$

- ❻ Calculons la période et la fréquence du mouvement solide (S) .

- La période :  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2,62 \times 10^{-1}} = 2,40 \times 10^{-1} s$

La fréquence :  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,40 \times 10^{-1}} = 4,17 \text{ Hz}$

## 1) Définition

Le mouvement est uniforme si  $\omega = \text{constante}$ .

## 2) Grandes caractéristiques du mouvement de rotation uniforme :

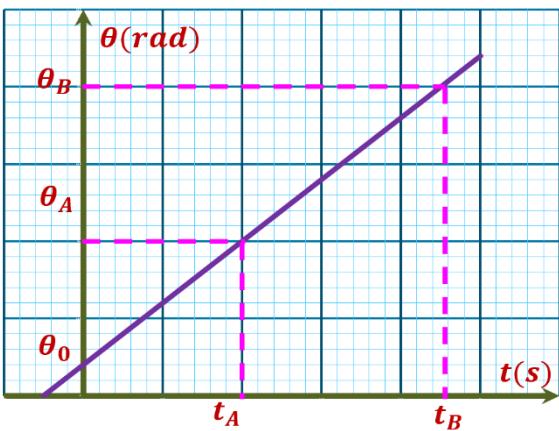
- Période (T) : durée d'un tour complet (s).  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Fréquence (f) : nombre de tours par seconde (Hz).  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

## 3) Les équations horaires du mouvement de rotation uniforme

Les équations horaires du mouvement d'un point d'un solide en mouvement de rotation uniforme sont :

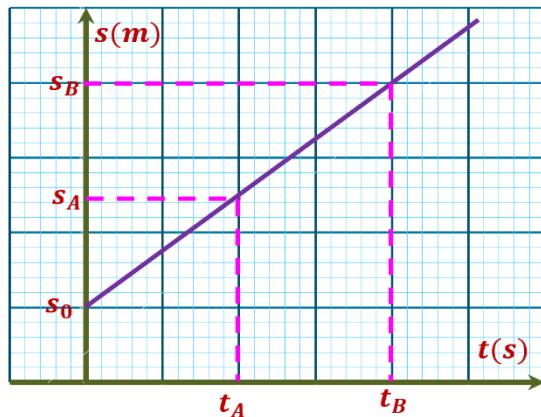
$$\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0 \text{ et } s(t) = v \cdot t + s_0$$

- $\theta_0$  : est l'abscisse angulaire initial.
- $s_0$  : est l'abscisse curviligne initial.



L'abscisse angulaire  $\theta(t)$  d'un point d'un corps solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est une fonction affine dont le coefficient directeur est la vitesse angulaire  $\omega$ .

On peut déterminer graphiquement la valeur de la vitesse angulaire, en utilisant la relation suivante :  $\omega = \frac{\theta_B - \theta_A}{t_B - t_A}$



L'abscisse curviligne  $s(t)$  d'un point d'un corps solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est une fonction affine dont le coefficient directeur est la vitesse linéaire  $v$ .

On peut déterminer graphiquement la valeur de la vitesse linéaire, en utilisant la relation suivante :  $v = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A}$