

أكاديمية الدار البيضاء

نيابة ابن مسيك

ثانوية أبي شعيب الدكالي

مُلْكُوكْتُ مَرْلَكْ فِي مَالِكْ

مَالِكْ بِي كَنْدَلْ

السنة الثانية من سلك البكالوريا

◀ شعبة العلوم التجريبية

▪ مسلك علوم الحياة والأرض

▪ مسلك العلوم الفيزيائية

▪ مسلك العلوم الزراعية

◀ شعبة العلوم و التكنولوجيات الصناعية

▪ مسلك العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية

▪ مسلك العلوم والتكنولوجيات الكهربائية

من إعداد: الأستاذ محمد الكيال

فَلَمَّا دَرَأَتْهُ
النَّعْدَةُ مِنْ حَيْثُ شَاءَ

الفصل

المصفحة:	الموضوع:
4	إشارة حدانية - إشارة و تعميل ثلاثة الحدود
5	متطابقات هامة - مجموعة تعريف دالة
6	النهايات
8	الاتصال
10	الاشتقاق
12	محور التماثل - مركز التماثل - نقطة الانعطاف
13	الفروع اللانهائية
14	الدالة العكسية
16	دالة الجذر من الرتبة n
18	المتتاليات العددية
20	الدوال الأصلية
22	التكامل
24	الدوال اللوغاريتمية
26	الدوال الأسية
28	الأعداد العقدية
31	المعادلات التفاضلية
32	الهندسة الفضائية
34	التعداد
36	الاحتمالات
38	الحساب المثلثي

اِشارة حدايیۃ

د. محمد الكيلاني

إشارة و نعميل ثلاثة الحدود

$(a \neq 0)$ $ax + b$ إشارة المدaneous: \leftarrow

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عکس إشارة a	٠	إشارة a

→ اشارة و نعميل ثلاثة الحدود:

$$P(x) = ax^2 + bx + c : \text{نضم}$$

المعادلة: حل $x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 0$	المميز	إشارات التغير	تعويذن												
$S = \emptyset$	$\Delta < 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$P(x)$</td><td>a</td><td>إشارة</td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	a	إشارة	غير ممكن بواسطة حدانيتين						
x	$-\infty$	$+\infty$													
$P(x)$	a	إشارة													
$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	$\Delta = 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$P(x)$</td><td>إشارة</td><td>○</td><td>إشارة</td></tr> <tr> <td></td><td>a</td><td></td><td>a</td></tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$P(x)$	إشارة	○	إشارة		a		a	$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$												
$P(x)$	إشارة	○	إشارة												
	a		a												
$S = \{x_1; x_2\}$ حيث: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta > 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td>$-\infty$</td></tr> <tr> <td>$P(x)$</td><td>إشارة a</td><td>عكس إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr> </table> <p>($x_1 < x_2$: نفترض أن)</p>	x	x_1	x_2	$+\infty$				$-\infty$	$P(x)$	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
x	x_1	x_2	$+\infty$												
			$-\infty$												
$P(x)$	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a												

إذا كان x_1 و x_2 حلّي المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{فإن:}$$

منظيقات هامة

ذ. محمد البال

مجموعة تعريف دالة عدديه

← منظيقات هامة:

لكل عددين حقيقيين a و b

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

← مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

لتكن P و Q حدوديتين

مجموعة تعريف الدالة f هي:	دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي:
$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = P(x)$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt{P(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$	$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \text{ و } Q(x) > 0\}$	$f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ و } Q(x) \neq 0\right\}$	$f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$

← نهايات الدوال و مقلوبياتها: $x \mapsto \sqrt{x}$ و $(n \in \mathbb{N}^*) x \mapsto x^n$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

إذا كان n عددا فرديا فإن:	إذا كان n عددا زوجيا فإن:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

← نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حدتها الأكبر درجة	نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدتها الأكبر درجة
--	---

← نهايات الدوال اطنلية:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	---

← نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$
$\sqrt{\ell}$	$\ell \geq 0$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← النهايات و التراث:

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← العمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شغ

نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شغ

نهاية خارج دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شغ	شغ

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← الانصهار في نقطة:

$$x_0 \text{ متصلة في } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

تعريف:

الانصهار على اليمين - الانصهار على اليسار:

$$x_0 \text{ متصلة على اليمين في } f \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0) \quad \bullet$$

$$x_0 \text{ متصلة على اليسار في } f \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0) \quad \bullet$$

$$f \text{ متصلة على اليمين و على اليسار في } x_0 \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } x_0$$

← الانصهار على مجال:

تكون f دالة متصلة على مجال مفتوح $[a, b]$ إذا كانت f متصلة في كل عنصر من المجال $[a, b]$

تكون f دالة متصلة على مجال مغلق $[a, b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح (a, b) و متصلة على اليمين في a و متصلة على اليسار في b

← العمليات على الدوال اطنصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

• الدوال $g + f$ و $g \times f$ و kf متصلة على المجال I

• إذا كانت g لا تندم على I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتين على المجال I

• كل دالة حدودية متصلة على \mathbb{R} نتائج:

• كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها

• الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+

• الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ متصلتان على \mathbb{R}

• الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

← انصهار مركب دالتين:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث:

فإن: gof متصلة على المجال I

← صورة مجال بدالة متصلة:

• صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

• صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتبة قطعا على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I	$f(I)$ المجال
$f(a); f(b)$ تناقصية قطعا على I	قطعيا على I ترقيدية
$[f(b); f(a)]$	$[f(a); f(b)]$
$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$
$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$
$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$
$\left[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right]$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$
	\mathbb{R}

← مبرهنة القيم الوسيطية:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a, b]$ بحيث :

ناتحة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حالا α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حالا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

← طريقة النفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a, b]$ بحيث :

ولتكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

إذا كان : $f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$

فإن : $\frac{b-a}{2} < \frac{a+b}{2} < \alpha < b$ وهذا التأثير سعته

يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ للحصول

على تأثير أدق للعدد α

إذا كان : $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$

فإن : $\frac{b-a}{2} < \alpha < \frac{a+b}{2}$ وهذا التأثير سعته

يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ للحصول

على تأثير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأثير للعدد α سعته مرغوب فيها

← قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

متقنية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز :

$$f'(x_0)$$

← معادل اطهاس طحنى دالة - الدالة التألفية اطهاس طحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتتقاق في x_0

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ هي :

$u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ كما يلي :

تسمى الدالة التألفية المماسة لـ f في x_0 وهي تقريب للدالة f بمحوار x_0

← قابلية الاشتقاق على اليمين - قابلية الاشتقاق على اليمين :

نقول إن دالة f قابلة للاشتتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية في x_0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

متقنية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في x_0 ويرمز له بالرمز :

$$f'_d(x_0)$$

نقول إن دالة f قابلة للاشتتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت النهاية :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

متقنية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في x_0 ويرمز له بالرمز :

$$f'_g(x_0)$$

تكون دالة f قابلة للاشتتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 و

← الاشتقاق و الانصاف:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

← جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k \in \mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

← العمليات على الدوال المشقة - مشقة مركب دالتي - مشقة دالة الدالت:

$(k \in \mathbb{R})$	$(ku)' = k(u)'$	$(u - v)' = u' - v'$	$(u + v)' = u' + v'$
	$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$		$(uv)' = u'v + uv'$
	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$		$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$		$(u \circ v)' = [u'ov] \times v'$

← الاشتقاق و نعمات دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتتقاق على مجال I	
f تزايدية على المجال $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$	◆◆◆
f تناقصية على المجال $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$	◆◆◆
f ثابتة على المجال $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$	◆◆◆

← الاشتقاق و التأويل الهندسي:

التأويل الهندسي للمنحنى (C_f) يقبل:	استنتاج	النهاية
مسا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a	f قابلة للاشتتقاق في x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a}{(a \neq 0)}$
مسا أفقيا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف ماس على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a	f قابلة للاشتتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a}{(a \neq 0)}$
نصف ماس أفقى على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف ماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل	f غير قابلة للاشتتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
نصف ماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى		$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
نصف ماس على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a	f قابلة للاشتتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a}{(a \neq 0)}$
نصف ماس أفقى على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
نصف ماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى	f غير قابلة للاشتتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
نصف ماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

محور النهايات – مركز النهايات

ذ. محمد البشّار

نقطة الانعطاف

← محور النهايات:

يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور قائم للمنحنى (C_f)

إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f \quad \bullet$$

$$\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x) \quad \bullet$$

← مركز النهايات:

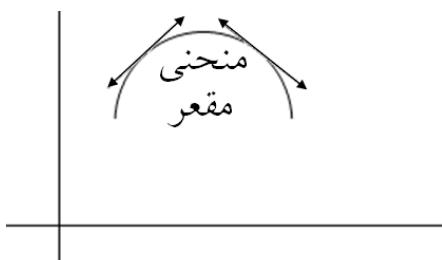
تكون النقطة $(a, b) I$ مركز قائم للمنحنى (C_f)

إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f \quad \bullet$$

$$\forall x \in D_f \quad f(2a - x) + f(x) = 2b \quad \bullet$$

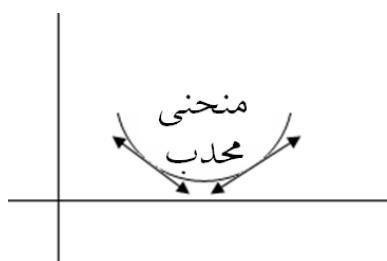
← التغير – التحدب - نقطة الانعطاف:



يكون منحنى دالة مقعرًا على مجال إذا كان يوجد تحت جميع مماساته على هذا المجال

$$\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$$

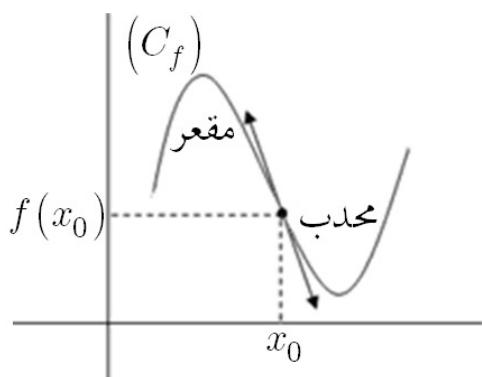
فإن: المنحنى (C_f) يكون مقعرًا على المجال I



يكون منحنى دالة محدباً على مجال إذا كان يوجد فوق جميع مماساته على هذا المجال

$$\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$$

فإن: المنحنى (C_f) يكون محدباً على المجال I



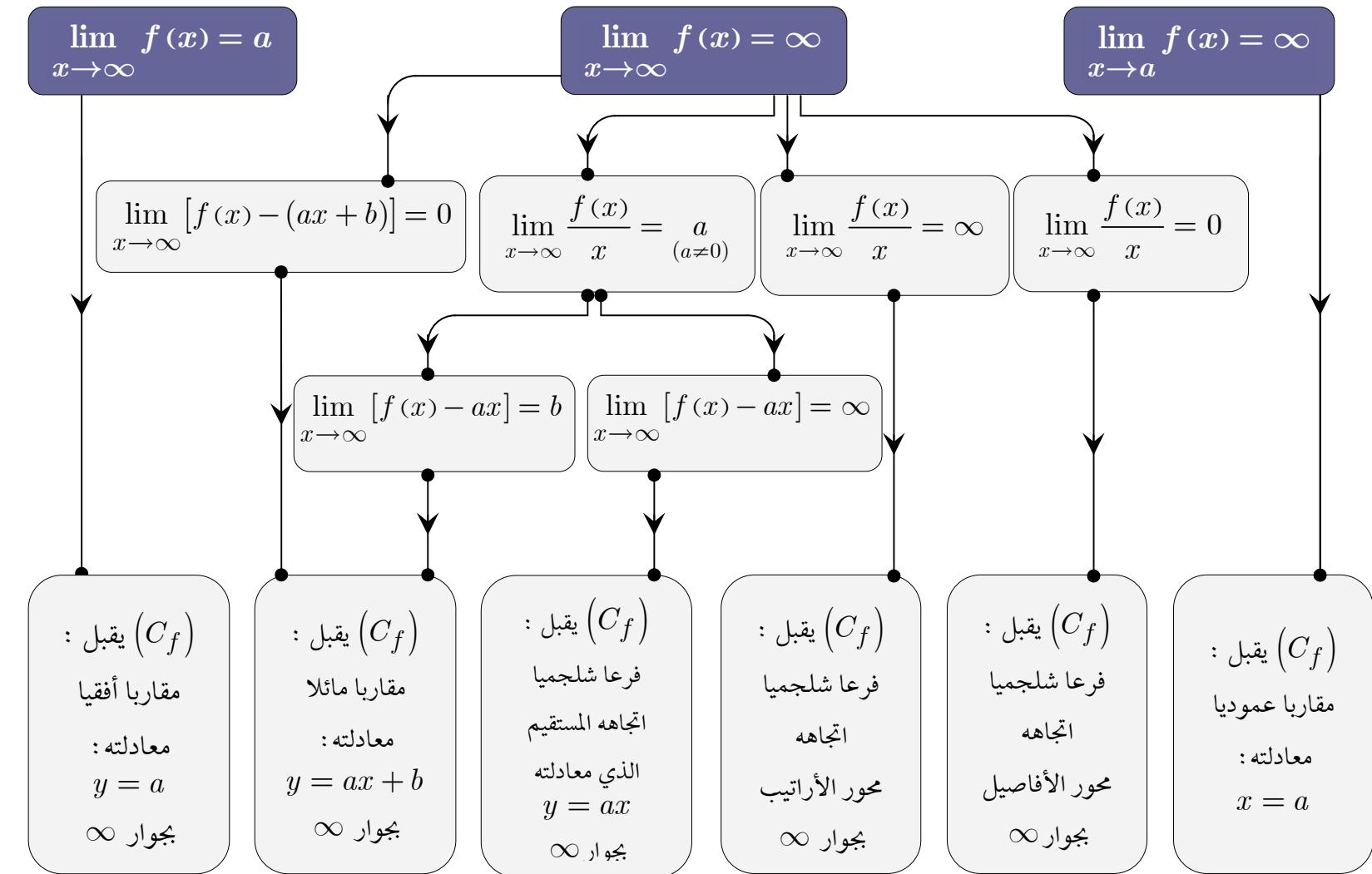
نقطة انعطاف منحنى دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها يتغير تغيره هذا المنحنى

إذا كانت f'' تنعدم في x_0 مع تغيير الإشارة

فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أقصولها x_0

إذا كانت f' تنعدم في x_0 دون تغيير الإشارة

فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أقصولها x_0



إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I
فإن f تقبل دالة عكسيّة معرفة من المجال (I) خواجال I
و يرمز لها بالرمز : f^{-1}

← خاصية:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \\ x \in I &\Leftrightarrow y \in f(I) \\ \forall x \in I \quad (f^{-1} \circ f)(x) &= x \\ \forall y \in f(I) \quad (f \circ f^{-1})(y) &= y \end{aligned} \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

← تحديد صيغة الدالة العكسيّة:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I
ليكن x عنصراً من المجال (I) و y عنصراً من المجال I
بالاستعانة بالتكافؤ التالي : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$
و بتحديد y بدلالة x نستنتج صيغة $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من (I)

← انصهار الدالة العكسيّة:

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I
فإن الدالة العكسيّة f^{-1} متصلة على المجال (I)

← اشتقاق الدالة العكسيّة:

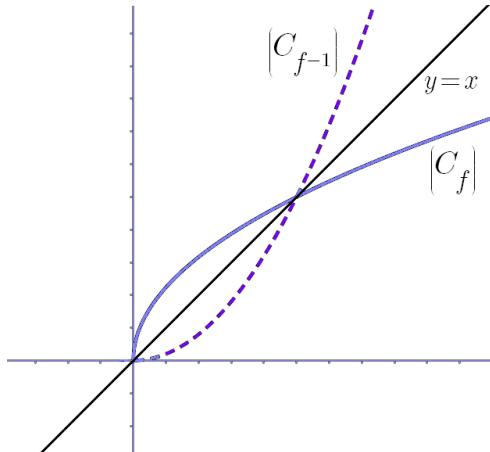
لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I
و ليكن x_0 عنصراً من المجال (I) و $y_0 = f(x_0)$
إذا كانت f' قابلة للاشتراق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$
فإن الدالة العكسيّة f^{-1} قابلة للاشتراق في y_0
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
 و لدينا :

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I
إذا كانت f قابلة للاشتراق على المجال I و دالتها المشتقّة f' لا تendum على المجال I
فإن الدالة العكسيّة f^{-1} قابلة للاشتراق على المجال (I)
$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
 و لدينا :

← إثابة الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I
الدالة العكسية f^{-1} لها نفس منحى تغير الدالة f

← النمذل اطباني للدالة العكسية:



لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I
التمثيلان المبيانيان للدالتين f و f^{-1} في معلم متعمد منظم
متماشيان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم

← ملاحظات هامة:

$(C_{f^{-1}})$ المنحنى
$A'(b, a) \in (C_{f^{-1}})$
يقبل مقارباً أفقياً
معادله: $y = a$
يقبل مقارباً عمودياً
معادله: $x = b$
$y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ يقبل مقارباً مائلاً معادله: و يتم تحديد المعادلة انطلاقاً من العلاقة:
$x = ay + b$
يقبل ماساً (أو نصف ماس) أفقياً
يقبل ماساً (أو نصف ماس) عمودياً



(C_f) المنحنى
$A(a, b) \in (C_f)$
يقبل مقارباً عمودياً
معادله: $x = a$
يقبل مقارباً أفقياً
معادله: $y = b$
يقبل مقارباً مائلاً
معادله: $y = ax + b$
يقبل ماساً (أو نصف ماس) عمودياً
يقبل ماساً (أو نصف ماس) أفقياً

دالة الجذر من الرتبة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

القوى الجذرية

ذ. محمد الكبار

← خاصية وتعريف:

الدالة : $x \mapsto x^n$ المعروفة على \mathbb{R}^+ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

$$\sqrt[n]{} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

ويرمز لها بالرمز :

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

حالات خاصة:

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} \quad \bullet$$

العدد : $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب ل x \bullet

← خصائص:

$$\begin{aligned} \forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ \sqrt[n]{x} \times \sqrt[m]{y} = \sqrt[nm]{x \times y} \\ (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[m]{x^n} \\ \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0) \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt[n]{x^n} = x \\ (\sqrt[n]{x})^n = x \\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y \\ \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y \end{aligned}$$

ملاحظة هامة:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

← مجموعه التعريف:

مجموعه تعريف الدالة f هي :	الدالة f معرفة كما يلي :
$D_f = [0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$

← النهايات:

$$\begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} \\ \hline \sqrt[n]{\ell} \\ \hline +\infty \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \\ \hline \ell \geq 0 \\ \hline +\infty \end{array}$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← الانصاف:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

← الاشتتاق:

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتتاق على مجال I

فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتتاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}} \quad \text{ولدينا:}$$

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتتاق على المجال $[0; +\infty)$

ولدينا:

$$\forall x \in [0; +\infty] \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

← حل اطعادلة:

عدد زوجي n	عدد فردي n	
$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$a > 0$
$S = \{0\}$	$S = \{0\}$	$a = 0$
$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{ a }\}$	$a < 0$

← القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

ليكن $r = \frac{p}{q}$ عدداً جذرياً غير منعدم حيث:

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

● ملاحظات:

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$$

$$(\sqrt[n]{u(x)})' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]_n^{1-n-1}$$

لكل عنصرين x و y من \mathbb{R}^* ولكل عنصرين r و r' من \mathbb{Q}^*

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad \bullet \quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'} \quad \bullet$$

$$(x \times y)^r = x^r \times y^r \quad \bullet \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad \bullet$$

$$\left(\frac{x^r}{x^{r'}}\right) = x^{r-r'} \quad \bullet \quad \frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'} \quad \bullet$$

← إثنااليات الحسابية – إثنااليات الهندسية:

لإثنالية هندسية	لإثنالية حسابية	
$u_{n+1} = q \times u_n$ هو الأساس q	$u_{n+1} = u_n + r$ هو الأساس r	تعريف
$u_n = u_p \times q^{n-p}$ $(p \leq n)$	$u_n = u_p + (n - p)r$ $(p \leq n)$	الحد العام
$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$ $(q \neq 1)$	$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$	مجموع حدود متتابعة
$b^2 = a \times c$	$2b = a + c$	c و b ثلاثة حدود متتابعة

← إثناالية امكورة – إثناالية امصغرورة:

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية
M مكبورة $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$ •
m مصغرورة $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$ •
M مكبورة و m مصغرورة $\Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ محدودة •

← رئالية متتالية عددية:

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية
تناقصية $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$ •
تزايدية $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$ •
ثابتة $(u_n)_{n \in I} \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$ •

← نهاية متتالية:

نهاية اطئالية (n^α) حيث: $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

نهاية اطئالية الهندسية (q^n) حيث: $q \in \mathbb{R}$

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
(q^n) المتالية ليس لها نهاية	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

← مصاديق النقاب:

كل متالية تزايدية و مكبورة هي متالية متقاربة •

كل متالية تناظرية و مصغرورة هي متالية متقاربة •

$$\left. \begin{array}{l} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

← متالية من النوع:

نعتبر المتالية (u_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

حيث f دالة متصلة على مجال I بحيث $I \subset f(I)$ و a عنصر من I

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها ℓ حل للمعادلة :

الدوال الأصلية

← الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال:

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
 نقول أن F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I
 إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\begin{aligned} F &\text{ قابلة للاشتتقاق على المجال } I \\ \forall x \in I \quad F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

خاصيات:

كل دالة متصلة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
 إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن:
 جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي:

$$x \mapsto F(x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I
 ولتكن x_0 عنصراً من I و y_0 عنصراً من \mathbb{R}
 توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I

$$F(x_0) = y_0$$
 تتحقق الشرط البدئي:

← الدوال الأصلية: طبائع دالنـ لـ دالـة و عـدـ حـقـيقـيـ

خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I و k عدداً حقيقياً
 إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على المجال I على التوالي فإن:

$$\begin{aligned} F + G &\text{ دالة أصلية للدالة } f + g \text{ على المجال } I \\ kF &\text{ دالة أصلية للدالة } kf \text{ على المجال } I \end{aligned}$$

← جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية:

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
e^x	$e^x + k$
	$(k \in \mathbb{R})$

← استعمال صيغ الاشتقاق لنجد بد بعض الدوال الأصلية:

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + k$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$(a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$(a \neq 0)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$
	$(k \in \mathbb{R})$

← تكامل دالة متصلة على قطعة:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على المجال I
و a و b عنصرين من المجال I

تكامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

تعريف:

← خاصيات:

الخطانية:

$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$	$\int_a^a f(x) dx = 0$
$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$	$(k \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

علاقة شال:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

← التكامل والثلث:

$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$ إذا كان : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ فإن :	$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$ إذا كان : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ فإن :
---	---

← القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$

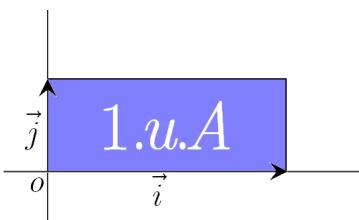
القيمة المتوسطة للدالة على المجال هي العدد الحقيقي :

← اطلاعه بالأحزاء:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتراق على المجال I بحيث الدالتين u' و v' متصلتين على المجال I
و a و b عنصرين من المجال I

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

← مساحة حيز



ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد (o, \vec{i}, \vec{j})
وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة o و المتجهتين \vec{i} و \vec{j}

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

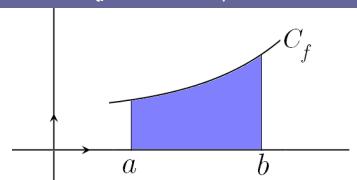
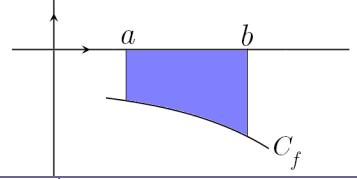
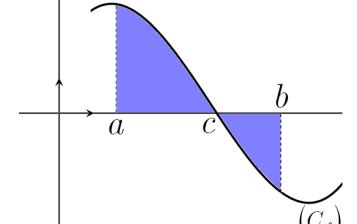
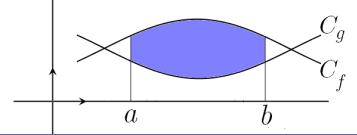
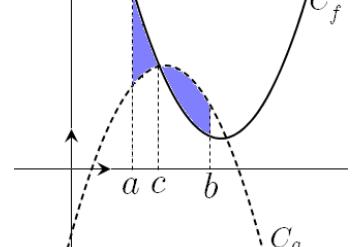
لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a, b]$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين C_f و C_g ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x = b \quad x = a \\ \left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) . u.A \quad \text{هي:}$$

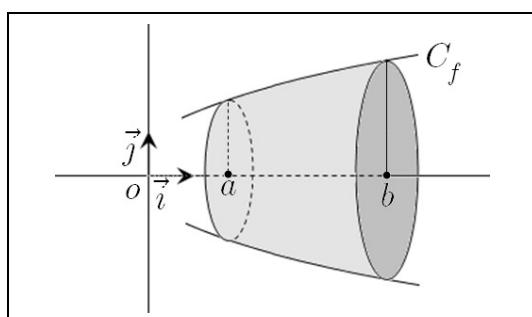
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x = b \quad x = a \\ \left(\int_a^b |f(x)| dx \right) . u.A \quad \text{هي:}$$

حالات خاصة:

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز البنفسجي في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b f(x) dx \right) . u.A$
	f سالبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b -f(x) dx \right) . u.A$
	<ul style="list-style-type: none"> • f موجبة على المجال $[a, c]$ • f سالبة على المجال $[c, b]$ 	$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) . u.A$
	(C_g) يوجد فوق (C_f) على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) . u.A$
	<ul style="list-style-type: none"> • (C_g) فوق (C_f) على المجال $[a, c]$ • (C_f) فوق (C_g) على المجال $[c, b]$ 	$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) . u.A$

حسن حمد:



حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a; b]$ هو:

$$V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v$$
 وحدة الحجم uv

◀ الدالة اللوغاریتمية النبیرية

◆ نعرف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $\frac{1}{x} \mapsto x$ على المجال $[0; +\infty]$

والتي تندم في 1 و يرمز لها بالرمز: \ln

◆ استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in]0; +\infty[$	$\forall y \in]0; +\infty[$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$			
$(r \in \mathbb{Q}) \quad \ln(x^r) = r \ln x$		$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$	$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$		$\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	
$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$		
$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln(x^n) = n \ln x \quad \text{إذا كان } n \text{ عدداً زوجياً} \quad \text{إإن:}$		$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

◆ مجموعه التعريف:

مجموعه تعريف الدالة f هي:	الدالة f معرفة كما يلي:
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$	$f(x) = \ln[u(x)]$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) \neq 0\}$	$f(x) = \ln[(u(x))^2]$
	$f(x) = \ln u(x) $

◆ نهايات أساسية:

$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^n \ln x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

◆ الانصاف:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $[0; +\infty[$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u موجبة قطعاً و متصلة على مجال I فإن الدالة $[x \mapsto \ln[u(x)]]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

لتكن u دالة معرفة على مجال I
إذا كانت u دالة موجبة قطعاً وقابلة للاشتتقاق على مجال I
فإن: الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتتقاق على المجال I
 $\forall x \in I \quad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ولدينا:

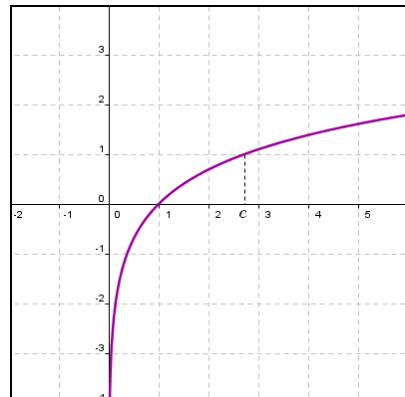
الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتتقاق على $]0; +\infty[$
ولدينا:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

اشارة \ln :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

النمذيل الاطيابي:



الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{حيث:}$$

نعرف:

اسئلنيات و خاصيات:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$(r \in \mathbb{Q}) \quad \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

$$\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$$

نهايات و متفاونات:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

اطشقة:

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

← الدالة اللوغاريتمية النبيرية

نعرف:

الدالة الأسية النبيرية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية النبيرية

و يرمز لها بالرمز :

$$\exp(x) = e^x \quad \text{نضع لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$	$e^x \times e^y = e^{x+y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$
$(r \in \mathbb{Q}) \quad (e^x)^r = e^{rx}$	$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$
	$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$\forall x \in]0, +\infty[\quad e^{\ln x} = x$
		$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[$
		$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$
		$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
		$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

مجموعة التعريف:

مجموعة تعريف الدالة f هي:	الدالة f معرفة كما يلي:
$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = e^x$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$	$f(x) = e^{u(x)}$

نهايات أساسية:

$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n} \right) = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x) = 0$
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

الأنصاف:

الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على \mathbb{R}

لتكن u دالة معرفة على مجال I
إذا كانت u متصلة على المجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

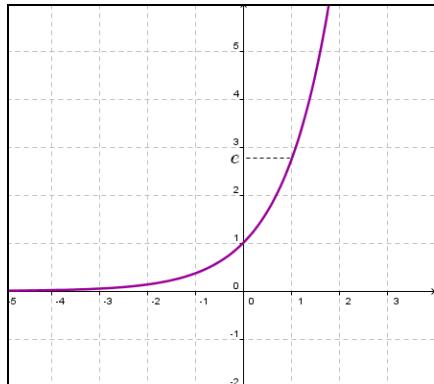
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x \quad \text{الدالة } x \mapsto e^x \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا:}$$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن: الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \text{ولدينا:}$$

النمذج الطبيعي للدالة \ln :



← الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

الدالة العكسية للدالة \log_a تسمى الدالة الأسية للأساس a ويرمز لها بالرمز:

تعريف:

$$\exp_a(x) = a^x \quad \text{نضع لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

استنتاجات وخاصيات:

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	$\log_a(a^x) = x$
$(r \in \mathbb{Q}) \quad (a^x)^r = a^{rx}$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad a^{\log_a(x)} = a$
$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$	$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\quad a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

نهايات ومتقاربون:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

المشتققة:

$$(a^x)' = (\ln a) \times a^x$$

الأعداد العقدية

مجموعه الأعداد العقدية هي: $\{z = a + ib \mid (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } i^2 = -1\}$

← الكثافة الذهنية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عدداً عقدياً حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z

العدد a يسمى الجزء الحقيقى للعدد z ويرمز له بالرمز: $\operatorname{Re}(z)$

العدد b يسمى الجزء التخيلى للعدد z ويرمز له بالرمز: $\operatorname{Im}(z)$

- إذا كان: $\operatorname{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي

- إذا كان: $\operatorname{Re}(z) = 0$ فإن z يسمى عدداً تخيلياً صرفاً

حالان خاصان:

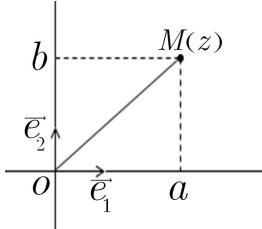
← نساوى عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$$z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ و } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

← النمثيل اطبائى لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوباً إلى معلم متعمد منظم $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

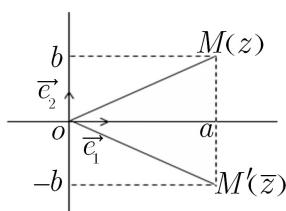


ليكن $z = a + ib$ عدداً عقدياً حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a, b)$

العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب: $M(z)$

العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة \overrightarrow{OM} و نكتب: $z = \operatorname{Aff}(\overrightarrow{OM})$ أو $\overrightarrow{OM}(z)$



← مرافق عدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عدداً عقدياً حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\bar{z} = a - ib$

و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

$z = \bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ عددي حقيقي

$z = -\bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ عددي تخيلي صرفي

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$z\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$$

$$\frac{\bar{z} + z'}{\bar{z} \times z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

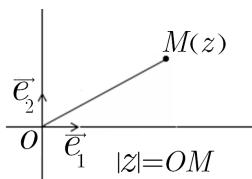
$$\frac{\bar{z} \times z'}{\bar{z} \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad \bar{z}^n = \bar{z}^n$$

$$\left(\frac{1}{z'} \right) = \frac{1}{\bar{z}'} \quad \bullet$$

$$(z' \neq 0) \quad \left(\frac{z}{z'} \right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

← معنار عدد عقدي:

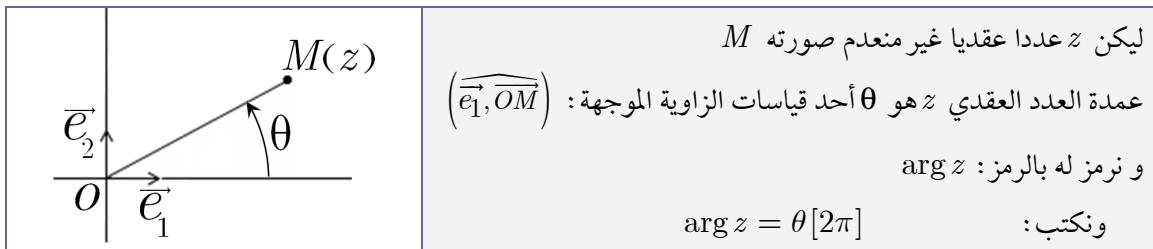


ليكن $z = a + ib$ عدداً عقدياً حيث: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

معنار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$ z \times z' = z \times z' $	$ z^n = z ^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$ \bar{z} = z $	$ -z = z $
$\left \frac{1}{z'} \right = \frac{1}{ z' }$	$\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' } \quad (z' \neq 0)$

← الشكل الذهلي و الكثانية الأساسية لعدد عقدي غير منعدم:



حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a < 0$	$a > 0$
$a = [-a, \pi]$	$a = [a, 0]$
$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$

ليكن z عدداً عقدياً غير منعدم

نضع $|z| = r$ و $\arg z = \theta [2\pi]$

• الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$$

• الكتابة الأساسية للعدد العقدي z هي:

$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$	$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$	$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$	$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$
$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$	$-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$	$-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$	$[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$	$\arg z^n \equiv n \arg z [2\pi]$
$\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$	$\frac{1}{[r'; \theta']} = \left[\frac{1}{r'}, -\theta' \right]$	$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$
$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$	$\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$
$z \text{ عدد حقيقي } \Leftrightarrow \arg z = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$		$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$

← صيغنا أولى:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$(\cos \theta + i \sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

← حل اطعالة حث $z \in \mathbb{C}$ $z^2 = a$

المعادلة:	مجموعه حلول المعادلة:	
$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$	
$a = 0$	$S = \{0\}$	
$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$	$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$

حل المعادلة: $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و $a, b, c \in \mathbb{C}$

المعادلة:	مجموعة حلول المعادلة:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$ $\Delta > 0$
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$ $\Delta = 0$
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$ $\Delta < 0$

مفهوم هندسي و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة	$AB = z_B - z_A $
متصف القطعة I	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
قياس الزاوية	$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
نقط مستقيمية A, B, C	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
نقط متداورة A, B, C, D	$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ أو $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$ z - z_A = r$ $(r > 0)$	$AM = r$ • • تتمي إلى الدائرة التي مركزها A وشعاعها r
$ z - z_A = z - z_B $	$AM = BM$ • • تتمي إلى واسط M
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	مثلث قائم الزاوية في A ABC
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	مثلث متساوي الساقين في A ABC
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A ABC
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	مثلث متساوي الأضلاع ABC

متناهٰيات عقدية لبعض النحويات الاعتيادية:

التحول	تمثيله العقدي هو:
الإزاحة t ذات المتجهة \vec{u}	حيث b لحق المتجهة \vec{u} $z' = z + b$
التحاكي h الذي مركزه Ω ونسبة k	حيث ω لحق النقطة Ω $z' - \omega = k(z - \omega)$
الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته θ	حيث ω لحق النقطة Ω $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

<p>الحل العام للمعادلة التفاضلية :</p> $y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	<p>المعادلة التفاضلية :</p> $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$
--	---

المعادلة التفاضلية:	معادلتها المميزة:	المعادلة المميزة تقبل :	الحل العام للمعادلة التفاضلية:
$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ حيث:	r_1, r_2 مختلفين حلين حقيقيين	$\Delta > 0$	
$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ حيث:	r حلاً حقيقياً وحيداً	$\Delta = 0$	$r^2 + ar + b = 0$
$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ حيث:	$r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$ حلين عقديين متراافقين:	$\Delta < 0$	$(\Delta = a^2 - 4b)$ $y'' + ay' + by = 0$

في سياق هذا المللخص ليكن الفضاء منسوبا إلى معلم متعمد منظم مباشر $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

← الصيغة التحليلية لـ: البداء السلمي - منظم منجهة - البداء اطنجهي

لتكن $(c) \vec{v} = (a', b', c')$ و $(a) \vec{u} = (a, b, c)$ متجهتين من \mathcal{V}_3

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$$

← امسافة:

المسافة بين نقطتين A و B هي:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

المسافة نقطة M عن مستوى (P) معادلته $ax + by + cz + d = 0$ هي:

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(A, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{المسافة نقطة } M \text{ عن مستقيم } (\Delta) \text{ هي: } \Delta(A, \vec{u})$$

← معادلة مسئوي:

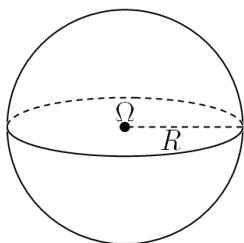
(P) : $\vec{n}(a, b, c)$ متجهة منظمية على المستوى (P) $\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$

إذا كانت A و B و C نقط غير مستقيمة فإن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

يمكن تحديد معادلة المستوى (ABC) بالاستعانة بالتكافؤ التالي:

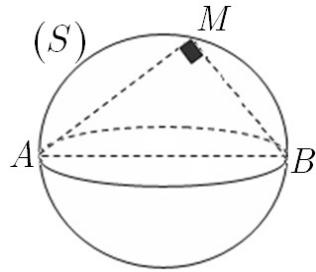
$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

← معادلة فلكة:



معادلة فلكة مركزها (a, b, c) وشعاعها R هي:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



معادلة فلكة (S) أحد أقطارها $[AB]$ يمكن تحديدها بالاستعانة

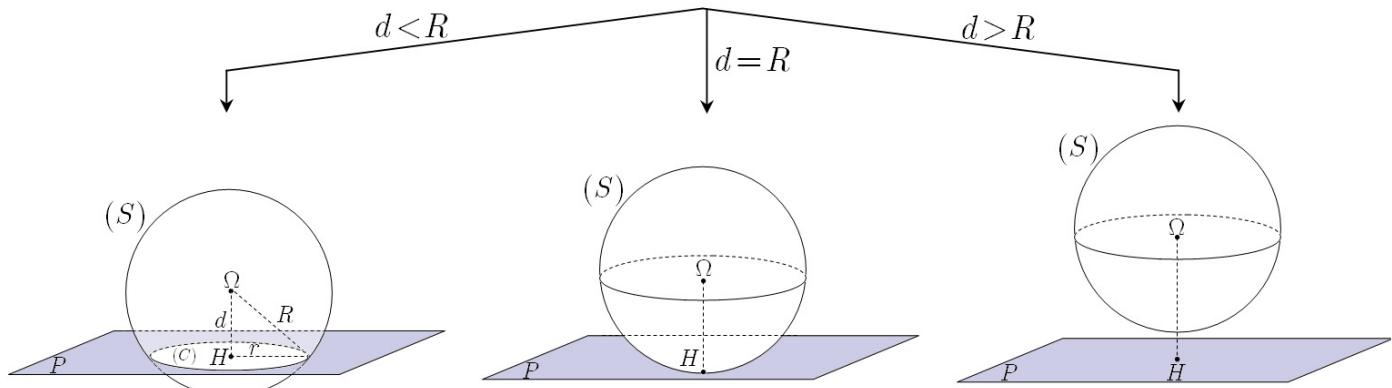
$$M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \quad \text{بالتكافؤ التالي:}$$

ملاحظة: الفلكة (S) مركزها Ω متتصف $[AB]$ وشعاعها $\frac{AB}{2}$

نقطة فلكة (S) ومستوى (P)

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

$$d = \Omega H = d(\Omega; (P)) \quad \text{نضع:}$$



المستوى (P) يقطع الفلكة (S)

وتق دائره (C)

مركزها: H

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} \quad \text{وشعاعها:}$$

المستوى (P) مماس للفلكة (S)

في النقطة H

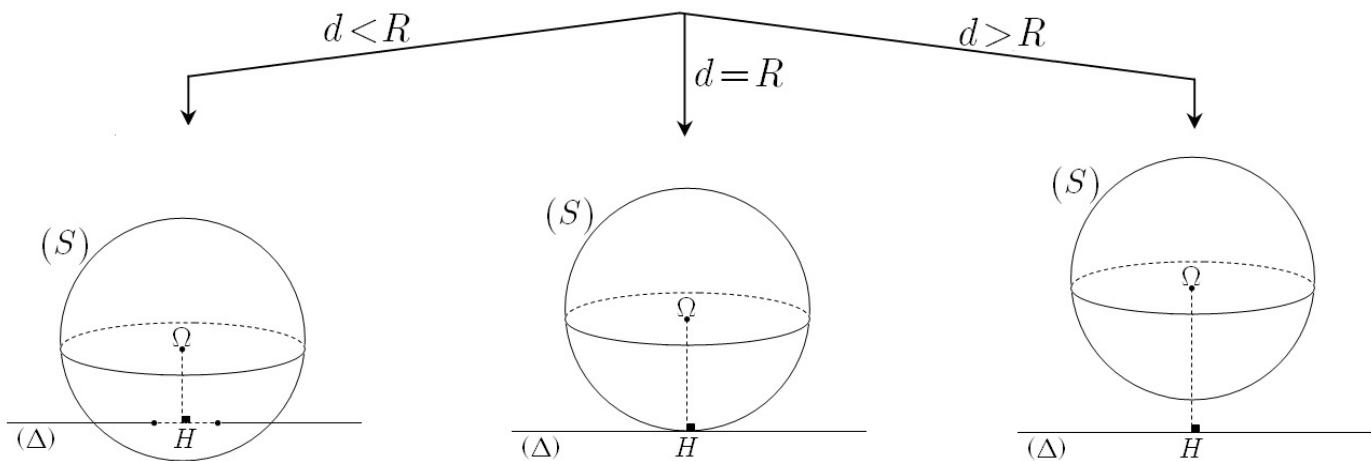
المستوى (P) و الفلكة (S)

لا يتقاطعان

نقطة فلكة (S) ومستقيم (Δ)

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (Δ)

$$d = \Omega H = d(\Omega; (\Delta)) \quad \text{نضع:}$$



المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S)
في نقطتين مختلفتين

المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S)
في النقطة H

المستقيم (Δ) الفلكة (S)
لا يتقاطعان

← أئسبي مجموعه:

◆ نعرف:

رئيسي مجموعه متنهية E هو عدد عناصر المجموعه E ويرمز له بالرمز :

Card $\emptyset = 0$: حالة خاصة

◆ خاصية:

A و B مجموعتان متنهيتان

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$$

← متمم مجموعه:

◆ نعرف:

ليكن A جزءا من مجموعه متنهية E

متتم A بالنسبة للمجموعه E هي المجموعه التي يرمز لها بالرمز :

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\} \quad \text{حيث}$$

◆ ملاحظات:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = E$$

$$\text{card} \bar{A} = \text{card}E - \text{card}A$$

← اطيراً الأساسي للنعداد:

$$(p \in \mathbb{N}^*)$$

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا

إذا كان الاختيار الأول يتم بـ n_1 كيفية مختلفة

و كان الاختيار الثاني يتم بـ n_2 كيفية مختلفة

.....

و كان الاختيار p يتم بـ n_p كيفية مختلفة

فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء :

← الترتيبات بتكرار - الترتيبات بدون تكرار:

◆ الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من \mathbb{N}^*

عدد الترتيبات بتكرار لـ p عنصر من بين n عنصر هو :

ليكن n و p عنصرين من \mathbb{N}^*

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ من العوامل}}$$

حالة خاصة:

كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \quad \text{و عددها :}$$

← التأليفان:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n

كل جزء A من E عدد عناصره p

يسمي تأليفه ل p عنصر من بين n عنصر

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{و عدد هذه التأليفات هو :}$$

← الأعداد: C_n^p و A_n^p و $n!$

$n \in \mathbb{N}^*$	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
$0! = 1$	
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^0 = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	$C_n^1 = n$
	$C_n^p = C_n^{n-p}$

← بعض أنواع السحب:

نسحب p عنصر من بين n عنصر ($p \leq n$)

نلخص النتائج في الجدول التالي :

الترتيب	عدد السحبات الممكنة هو :	نوع السحب:
غير مهم	C_n^p	آنبي
مهم	n^p	بالتابع و بإحلال
مهم	A_n^p	بالتابع و بدون إحلال

← مصطلحات

المصطلح الاحتمالي:	معناه :
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω	هي مجموعة الإمكانيات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	جزء من كون الإمكانيات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصراً وحيداً
تحقق الحدث $A \cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A \cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معاً
الحدث المضاد للحدث A	$(A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ و } A \cup \bar{A} = \Omega)$ هو الحدث \bar{A}
و حدثان غير منسجمين	$A \cap B = \emptyset$

← استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

- ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية
 - عندما يستقر احتمال حدث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو:
 - ونكتب: $P(\{\omega_i\}) = p_i$
 - احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث
 - أي إذا كان $\{A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}\}$ حدثاً من Ω فإن احتمال الحدث A هو:
- $$p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots + p(\omega_n)$$

خاصيات:

- ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية
 - $p(\Omega) = 1$ و $p(\emptyset) = 0$
 - لكل حدث A من Ω $0 \leq p(A) \leq 1$
 - احتمال اتحاد حدفين:
 - لكل حددين A و B من Ω
 - $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
 - إذا كان A و B غير منسجمين $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
 - احتمال الحدث المضاد:
 - لكل حدث A من Ω :
- $$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

← فرضية نساوي الاحتمالات:

تعريف:

- إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω
 - فإن احتمال كل حدث A من Ω هو:
- $$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$$

← الاحتمال الشرطي - استقلالية حدثين:

تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \neq 0$

$$p(B) = p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

احتمال حدث B علماً أن الحدث A متحقق هو العدد:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \times p(B) \neq 0$

$$p(A \cap B) = p(A) \times p\left(\frac{B}{A}\right) = p(B) \times p\left(\frac{A}{B}\right)$$

لدينا:

نتيجة:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

$$A \text{ و } B \text{ حدثان مستقلان} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزئاً لـ Ω

$$(\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \text{ و } \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega)$$

$$p(A) = p(\Omega_1) \times p\left(\frac{A}{\Omega_1}\right) + p(\Omega_2) \times p\left(\frac{A}{\Omega_2}\right)$$

لكل حدث A من Ω :

خاصية:

← الاختارات المذكورة:

ليكن A حدثاً في تجربة عشوائية احتماله p

إذا أعيدت هذه التجربة n مرة فان احتمال تحقق الحدث A , k مرة بالضبط هو:

$$(k \leq n) \quad C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k}$$

← قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن متغيراً عشوائياً على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المراحلتين التاليتين:

- تحديد $\{X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- ححسب الاحتمال $p(X = x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1; 2; \dots; n\}$

← الأمل الرياضي - الاتغيرة - الاتغافر الطرازي طبغر عشوائي:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

ليكن X متغيراً عشوائياً قانونه
معروف بالجدول التالي:

تعريف:

$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n$	الأمل الرياضي للمتغير X :
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	المغايرة للمتغير X :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$	الاتغافر الطرازي للمتغير X :

← القانون الدناني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية، نعيد هذه التجربة n مرة

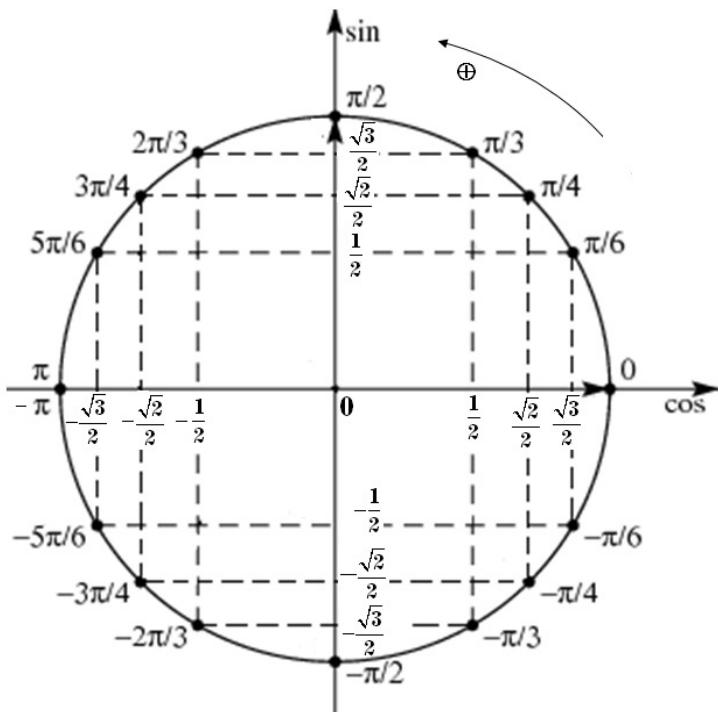
المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A يسمى توزيعاً دنانياً وسيطاه n و p

$$\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \quad p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

ولدينا

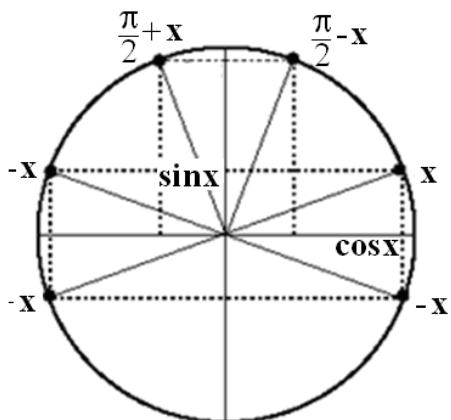
$$V(X) = np(1-p) \quad \text{و} \quad E(X) = n \times p \quad \text{و}$$

← جدول القيم الاعتيادية و الدائرة المثلثية:



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undefined

← العلاقات بين النسب المثلثية:



	$-x$	$\pi - x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
\sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
\cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

$$\begin{aligned}\cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \\ \tan(x + k\pi) &= \tan x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1\end{aligned}$$

← معادلات مثلثية أساسية:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ أو } x = -a + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ أو } x = (\pi - a) + 2k\pi$$

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

صيغ تحويل مجموعات ↪

$$\cos(a - b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

شنائج ↪

$$t = \tan \frac{a}{2} : \text{بوضع}$$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \times \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

تحويل جداء إلى مجموعات ↪

تحويل جداء إلى مجموعات ↪

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$\cos a \times \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

$$a \cos x + b \sin x : \text{تحويل} ↪$$

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) \end{aligned}$$

حيث α عدد حقيقي يتحقق:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$