

Leçon 1 : Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

I. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

1) Définition :

Un corps solide indéformable est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe sauf les points qui appartiennent à cet axe.

II. Repérage d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour repérer le mouvement d'un point G d'un corps solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, on considère un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ confondu avec le plan du mouvement.

On repère la position du point G par son abscisse angulaire ou par son abscisse curviligne

1) Abscisse curviligne (s)

- C'est la distance parcourue par un point du solide le long de sa trajectoire circulaire.
- Unité : mètre (m).

$$s(t) = \widehat{AG}$$

2) Abscisse angulaire (θ)

- C'est l'angle (en radian [rad]) qui correspond à l'arc parcouru.
- Relation : $s = R \times \theta$, où R est le rayon du cercle.

$$\theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OG})$$

Application

Un disque de diamètre $D = 50\text{cm}$ réalise un demi-tour pendant une durée Δt .

Le point M se trouve initialement sur l'axe des abscisses.

- ❶ Déterminer l'abscisse angulaire d'un point M du périmètre du disque
- ❷ Déduire la distance parcourue par ce point pendant la durée Δt .

Notons que le point M se trouve initialement sur l'axe des abscisses.

Correction

- ❶ Le disque réalise un demi-tour donc l'abscisse angulaire du point M est : $\theta = \pi = 3,14 \text{ rad}$

- ❷ La distance parcourue par le point M pendant la durée Δt est $d = \Delta S = S - S_0$

Avec $S_0 = 0\text{m}$ « le point M se trouve initialement sur l'axe des abscisses (Ox) »

Alors : $d = S \Leftrightarrow d = R \cdot \theta$

$$\Leftrightarrow d = \frac{D}{2} \cdot \theta$$

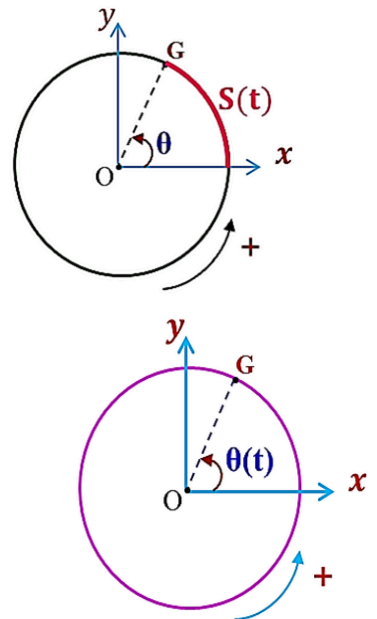
$$\text{A.N : } d = \frac{50 \times 10^{-2}}{2} \times 3,14 = 7,85 \times 10^{-2} \text{m}$$

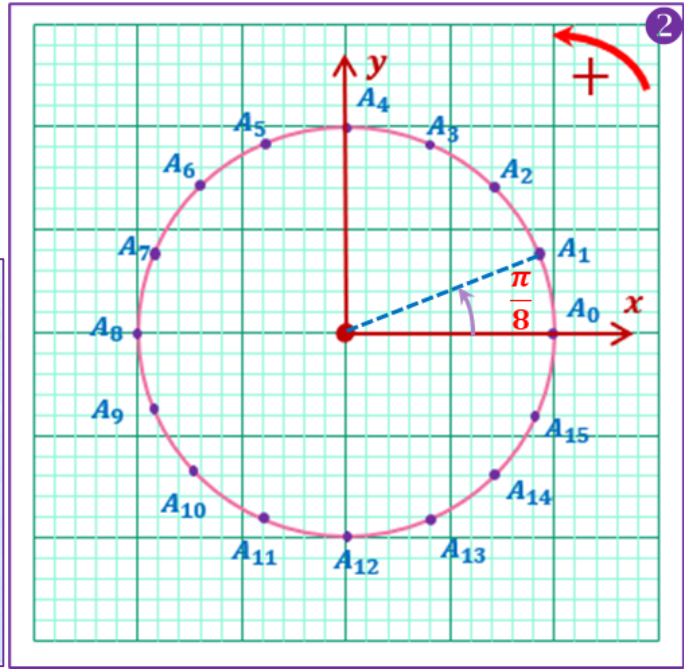
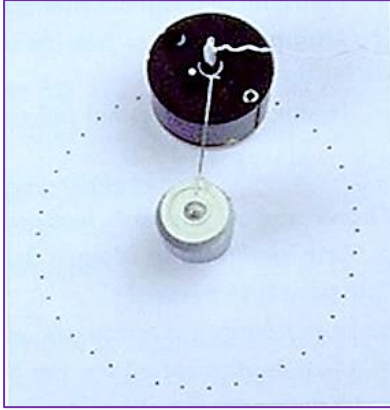
III. Vitesse angulaire (ω)

Activité

On considère un autoporteur qui peut tourner autour d'un axe fixe (Δ). On connecte l'autoporteur à un détonateur latéral A (la figure ❶).

On lance l'autoporteur et on enregistre le mouvement du détonateur A pendant des périodes de temps égales et successives $\tau = 40\text{ms}$ (la figure ❷)





❶ Quelle est la nature de la trajectoire du détonateur A ?

❷ Calculer la vitesse instantanée du détonateur aux positions A_3 et A_5 . Que concluez-vous ?

❸ Représenter le vecteur vitesse instantanée aux positions A_3 et A_5

❹ On définit la vitesse angulaire instantanée par la relation suivante : $\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$.

Calculer la vitesse angulaire instantanée du détonateur A aux positions A_3 et A_5 .

❺ Calculer la vitesse angulaire moyenne du détonateur A entre les positions A_1 et A_8 . que remarquez-vous ?

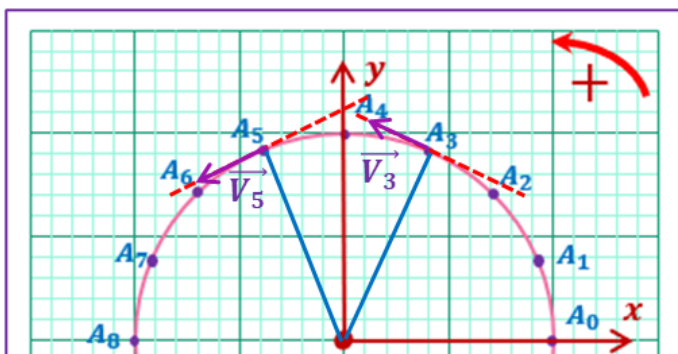
❻ Calculer le rapport $\frac{v_i}{\omega_i}$ et le comparer avec le rayon de la trajectoire du détonateur A . Que concluez-vous ?

- ❶ La trajectoire du détonateur A est circulaire .
 - ❷ On calcule les valeurs de la vitesse instantanée, en utilisant la relation suivante : $V_i = \frac{\widehat{A_{i+1}A_{i-1}}}{2\tau}$.
 - À la position A_3
 On a : $V_3 = \frac{\widehat{A_4A_2}}{2\tau}$.
 A.N : $V_3 = \frac{2,2 \times 10^{-2}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$
 On trouve : $V_3 = 2,75 \times 10^{-1} m.s^{-1}$
 - À la position A_5
 On a : $V_5 = \frac{\widehat{A_6A_4}}{2\tau}$.
 A.N : $V_5 = \frac{1,7 \times 10^{-2}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$
 On trouve : $V_5 = 2,12 \times 10^{-1} m.s^{-1}$
- ⇒ Puisque $V_3 = V_5$ donc le mouvement du détonateur A est uniforme .
- ❸ Pour représenter les vecteurs vitesses instantanées \vec{V}_3 et \vec{V}_5 , on doit déterminer leurs caractéristiques

Vecteur vitesse	\vec{V}_3	\vec{V}_5
Origine	A_3	A_5
Direction	La tangent à la trajectoire au point A_3	La tangent à la trajectoire au point A_5
Sens	Celui du mouvement	
Norme en ($m.s^{-1}$)	$V_3 = V_5 = 2,75 \times 10^{-1}$	

On représente les vecteurs vitesses \vec{V}_3 et \vec{V}_5 en utilisant l'échelle suivante : $1cm \mapsto 0,21m.s^{-1}$

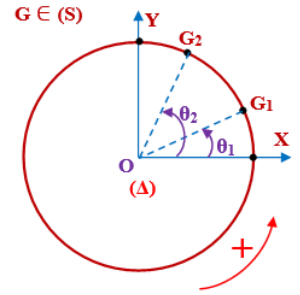
« L'élève représente les vecteurs vitesses dans le document de la figure ❷ »



- ❹ On calcule les valeurs de la vitesse angulaire instantanée, en utilisant la relation suivante : $V_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$.
 - À la position A_3
 On a : $\omega_3 = \frac{\theta_4 - \theta_2}{2\tau}$.
 A.N : $\omega_3 = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$
 Donc : $\omega_3 = 9,82 rad.s^{-1}$
 - À la position A_5
 On a : $\omega_5 = \frac{\theta_6 - \theta_4}{2\tau}$.
 A.N : $\omega_5 = \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}}{2 \times 40 \times 10^{-3}}$
 Donc : $\omega_5 = 9,82 rad.s^{-1}$
 - ❺ On calcule la vitesse moyenne du détonateur A entre les positions A_1 et A_8
 On a $\omega_m = \frac{\theta_8 - \theta_1}{t_8 - t_1} = \frac{\theta_8 - \theta_1}{7\tau}$
 A.N : $\omega_m = \frac{\pi - \frac{\pi}{8}}{7 \times 40 \times 10^{-3}}$
 Donc : $\omega_m = 9,82 rad.s^{-1}$
- ⇒ On constate que la vitesse angulaire moyenne est égale à la vitesse angulaire instantanée .
- ❻ On a : $\frac{V_3}{\omega_3} = \frac{2,12 \times 10^{-1}}{9,82}$
 $\frac{V_3}{\omega_3} \approx 2,8 \times 10^{-2} m$
- Et d'après la figure ❷ rayon de la trajectoire est $R = 2,8 cm$
 Ou bien : $R = 2,8 \times 10^{-2} m$
 On constate que : $\frac{V_3}{\omega_3} = R$
 On déduit que : $V_i = R\omega_i$

1) La vitesse angulaire moyenne:

- La vitesse angulaire moyenne ω_m d'un point G entre deux instants t_1 et t_2 est : $\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$.
- L'unité de la vitesse angulaire dans le système international des unités est : $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- Elle exprime la rapidité de variation de l'angle.

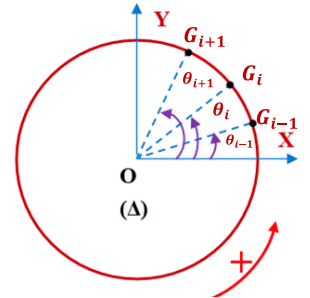


2) La vitesse angulaire instantanée

La vitesse angulaire instantanée ω_i d'un point G

à l'instant t_i est défini par la relation suivante : $\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$.

Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire au même instant



3) La vitesse linéaire instantanée

La vitesse linéaire « curviligne » instantanée V_i d'un point G à l'instant t_i est défini par la relation suivante : $V_i = \frac{\widehat{A_{i+1}A_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$.

L'unité de la vitesse angulaire dans le système international des unités est : $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La vitesse angulaire et la vitesse linéaire sont liées par la relation suivante : $V_i = R \omega_i$

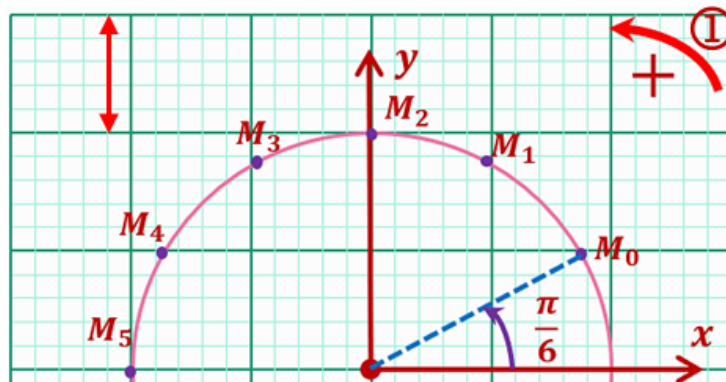
La vitesse linéaire augmente en s'éloignant de l'axe de rotation.

III. Mouvement de rotation uniforme

Activité

On enregistre les positions occupées par un point M d'un solide (S) en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) sur une table à coussin d'air pendant des intervalles de temps égaux à

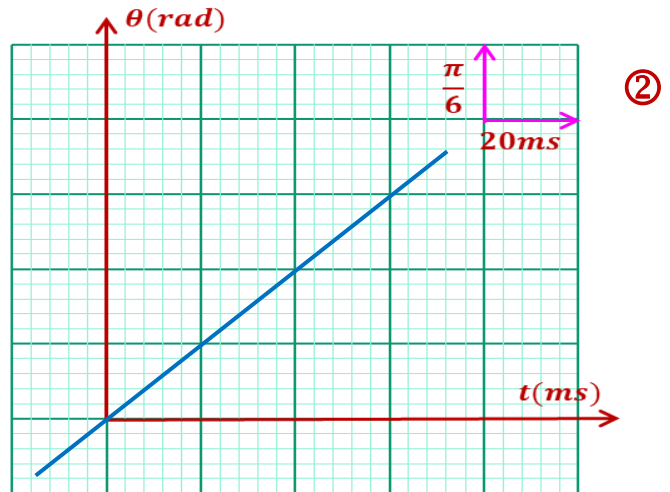
$\tau = 20\text{ms}$, on obtient l'enregistrement de la figure ①. Le point M_0 est la position occupée par le point M à l'instant $t_0 = 0\text{s}$



① En exploitant l'enregistrement de la figure ① compléter le tableau ci-dessous.

Position	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
Date $t(\text{ms})$	0	20	40	60	80
Abscisse angulaire $\theta(\text{rad})$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

- ② Calculer la valeur de la vitesse angulaire instantanée du point M aux positions M_1 et M_4 et déduire la nature du mouvement du corps (S)
- ③ Dresser sur la figure ② la courbe $\theta = f(t)$ qui représente l'évolution de l'abscisse angulaire en fonction de temps en déterminant sa nature .
- ④ Déterminer la valeur du coefficient directeur de la courbe $\theta = f(t)$ et le comparer avec la valeur de la vitesse angulaire .
- ⑤ Dédire l'équation modélisant l'évolution temporelle de l'abscisse curviligne de point M.
- ⑥ Déterminer la période et la fréquence du mouvement du solide (S) .



① Voir le tableau ci-dessus

② Calculons la vitesse angulaire instantanée :

▪ À la position M_1

$$\text{On a : } \omega_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2\tau} .$$

$$\text{A.N : } \omega_1 = \frac{\frac{\pi}{6} \times 2}{2 \times 20 \times 10^{-3}}$$

$$\text{Donc : } \omega_1 = 2,62 \times 10^1 \text{rad.s}^{-1}$$

▪ À la position A_5

$$\text{On a : } \omega_4 = \frac{\theta_5 - \theta_3}{2\tau} .$$

$$\text{A.N : } \omega_4 = \frac{\frac{\pi}{6} \times 2}{2 \times 20 \times 10^{-3}}$$

$$\omega_4 = 2,62 \times 10^1 \text{rad.s}^{-1}$$

▪ Puisque $\omega_1 = \omega_4 = \text{Cte}$ donc le solide (S) est en rotation uniforme

- ③ Voir la courbe de la figue ② . Cette courbe montre que l'évolution temporelle de l'abscisse angulaire du point M est une fonction affine d'équation : $\theta(t) = at + b$

- ④ D'après la courbe de ② figure on trouve : $a = \frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{(60-20) \times 10^{-3}} = 2,62 \times 10^1 \text{rad.s}^{-1}$. On constate que : $a = \omega$.

On déduit que l'équation horaire vérifiée par l'abscisse angulaire θ d'un point d'un solide en mouvement de rotation uniforme est affine dont le coefficient directeur est égale à la valeur de la vitesse angulaire . $\theta(t) = \omega t + \theta_0$.

- ⑤ D'près la question précédente on a : $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ avec $\omega = 2,62 \times 10^1 \text{rad.s}^{-1}$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{6} \text{rad}$

et puisque $s(t) = R. \theta(t)$ avec $R = 2,28 \text{cm}$

$$\text{Donc : } s(t) = 2,8 \times 10^{-2} (2,62 \times 10^1 t + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{Finalement on trouve : } s(t) = 7,34 \times 10^{-1} t + 1,47 \times 10^{-2} .$$

- ⑥ Calculons la période et la fréquence du mouvement solide (S) .

- La période : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2,62 \times 10^1} = 2,40 \times 10^{-1} s$

La fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,40 \times 10^{-1}} = 4,17 \text{ Hz}$

1) Définition

Le mouvement est uniforme si $\omega = \text{constante}$.

2) Grandeurs caractéristiques du mouvement de rotation uniforme :

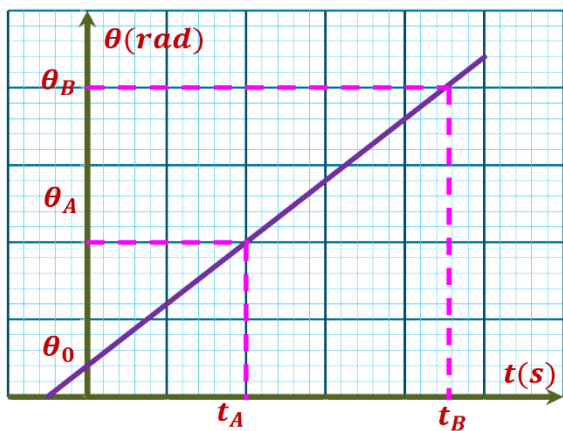
- Période (T) : durée d'un tour complet (s). $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Fréquence (f) : nombre de tours par seconde (Hz). $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

3) Les équations horaires du mouvement de rotation uniforme

Les équations horaires du mouvement d'un point d'un solide en mouvement de rotation uniforme sont :

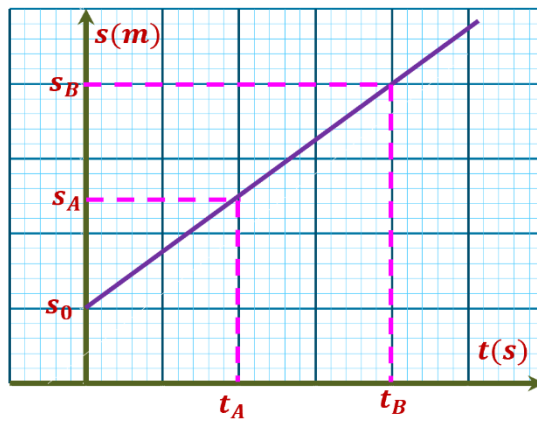
$$\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0 \text{ et } s(t) = v \cdot t + s_0$$

- θ_0 : est l'abscisse angulaire initial.
- s_0 : est l'abscisse curviligne initial.



L'abscisse angulaire $\theta(t)$ d'un point d'un corps solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est une fonction affine dont le coefficient directeur est la vitesse angulaire ω .

On peut déterminer graphiquement la valeur de la vitesse angulaire, en utilisant la relation suivante : $\omega = \frac{\theta_B - \theta_A}{t_B - t_A}$



L'abscisse curviligne $s(t)$ d'un point d'un corps solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est une fonction affine dont le coefficient directeur est la vitesse linéaire v .

On peut déterminer graphiquement la valeur de la vitesse linéaire, en utilisant la relation suivante : $V = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A}$