

# **Cours de Base de Données**

## **Cours n.3**

### **Algèbre relationnelle**

#### **L2 Informatique - Portail Sciences et Technologies**

Elisabetta De Maria - <http://www.i3s.unice.fr/~edemaria/>

DS4H et Laboratoire I3S, CNRS

2022-2023  
Université Côte d'Azur

# Algèbre relationnelle

- Langage procédural : indique comment construire une nouvelle relation à partir d'une ou plusieurs relations existantes
- Langage abstrait, avec des opérations qui travaillent sur une (ou plusieurs) relation(s) pour définir une nouvelle relation sans changer la (ou les) relation(s) originale(s)
- le résultat de toute opération est une relation (**propriété de fermeture**)

# Les opérations de l'algèbre relationnelle

## Les cinq opérations fondamentales

- sélection
- projection
- produit cartésien
- union
- différence

## Autres opérations

- jointure
- intersection
- division
- ...

# Opérateurs algébriques

## Opérateurs ensemblistes

- union
- intersection
- difference
- produit

## Opérateurs relationnels spécifiques

- sélection
- projection
- jointure
- division

## Tables d'exemple

- CLIENT(numéro, nom, adresse, téléphone)
- PRODUIT (référence, marque, prix)
- VENTE(numéro, ref\_produit#, no\_client#, date)

Client			
<u>numéro</u>	nom	adresse	téléphone
101	Durand	Nice	0493939393
106	Fabre	Paris	NULL
110	Prosper	Paris	NULL
125	Antonin	Marseille	0491919191

Produit		
<u>référence</u>	marque	prix
153	BMW	8 000 €
589	Peugeot	7 450 €
158	Toyota	6 725 €
589	Citroën	7 000 €

Vente			
<u>numéro</u>	ref_produit#	no_client#	date
102	153	101	12/10/2004
809	589	108	20/01/2005
11005	158	108	15/03/2005
12005	589	125	30/03/2005



# Opérations unaires

Soit  $R(a_1, a_2, \dots, a_N)$  une relation.

**Sélection :**  $\sigma_{\text{predicat}}(R)$

La sélection travaille sur  $R$  et définit une relation qui ne contient que les tuples de  $R$  qui satisfont à la condition (ou prédicat) spécifiée.

**Projection :**  $\pi_{a_1, \dots, a_k}(R)$

La projection travaille sur  $R$  et définit une relation restreinte à un sous-ensemble des attributs de  $R$ , en extrayant les valeurs des attributs spécifiés et en supprimant les doublons.

# Opérateur SELECTION

La sélection : opérateur **SELECT** - sélection d'un sous-ensemble de tuples d'une relation qui vérifient une condition

exemple :  $\sigma_{\text{adresse}=\text{PARIS}}$  (Client)

<u>Client</u>		numéro	nom	adresse	téléphone
relation résultante		101	Durand	NICE	0493942613
		106	Fabre	PARIS	
		110	Prosper	PARIS	
		125	Antonin	MARSEILLE	0491258472

La relation résultante :  
*même schéma que la relation  
sur laquelle porte la sélection*

Expression de sélection:

$= | \neq | \leq | < | > | \geq$

$\wedge | \vee | \neg$

# Exercice

1. Afficher les clients qui habitent Paris ou Nice
2. Afficher les ventes du client n° 120 du 20 oct 04
3. Afficher les clients qui n'habitent pas Nice

Q1 :  $\sigma$  adresse = PARIS or adresse = Nice (Client)

Q2 :  $\sigma$  numéro\_client = 120 and date = 20 oct 04 (Vente)

Q3 :  $\sigma$  adresse  $\neq$  Nice (Client)

Vente

numéro	référence_produit	numéro_client	date
00102	153	101	12/10/04
00809	589	108	20/01/05
11005	158	108	15/03/05
12005	589	125	30/03/05



# Opérateur PROJECTION

La projection : opérateur **PROJECT** – sélection de certaines colonnes d'une relation

exemple :  $\pi$  nom, téléphone (Client)

Client

numéro	nom	adresse	téléphone
101	Durand	NICE	0493942613
106	Fabre	PARIS	NULL
110	Prosper	PARIS	NULL
125	Antonin	MARSEILLE	0491258472

*Fabre à la place de Prosper?*

Relation résultante

# Exercice

---

1. Afficher la référence du produit et numéro de client
2. Afficher le nom et l'adresse des clients de Nice

Q1 :  $\pi$  Référence\_produit, numéro\_client (Vente)

Q2 :  $\pi$  nom, adresse (Client)

Vente

numéro	référence_produit	numéro_client	date
00102	153	101	12/10/04
00809	589	108	20/01/05
11005	158	108	15/03/05
12005	589	125	30/03/05

# Opérations ensemblistes (1)

Soient  $R(a_1, \dots, a_N)$  et  $S(b_1, \dots, b_M)$  deux relations.

## Union : $R \cup S$

L'union de deux relations  $R$  et  $S$  définit une relation qui contient tous les tuples de  $R$ , de  $S$  ou à la fois de  $R$  et  $S$ , les tuples en double étant éliminés.

## Différence d'ensembles : $R - S$

La différence d'ensemble définit une relation qui comporte les tuples qui existent dans la relation  $R$  et non dans la relation  $S$ .

## Intersection : $R \cap S$

L'intersection définit une relation constituée de l'ensemble de tous les tuples présents à la fois dans  $R$  et dans  $S$ .

# Opérations ensemblistes (2)

## Produit cartésien : $R \times S$

Le produit cartésien définit une relation constituée de la concatenation de tous les tuples de la relation  $R$  avec tous ceux de la relation  $S$

## Relations de schemas quelconques

# Opérateur UNION

Soit deux relations  $R1$  et  $R2$  de même schéma

$R1 \cup R2$  est la relation contenant les tuples appartenant à  $R1$  ou à  $R2$

**R1**

A1	A2	A3
a1	a2	a3
b1	b2	b3
c1	c2	c3
d1	d2	d3

\* \*

**R2**

A1	A2	A3
a1	a2	a3
e1	e2	e3
b1	b2	b3

\* \*

**UNION**  
 **$R1 \cup R2$**

Relation temporaire

A1	A2	A3
a1	a2	a3
b1	b2	b3
c1	c2	c3
d1	d2	d3
e1	e2	e3

\* \*  
Suppression des  
lignes identiques

commutatif:  $[R1 \cup R2] = [R2 \cup R1]$

associatif:  $[(R1 \cup R2) \cup R3] = [R2 \cup (R1 \cup R3)]$

# Opérateur INTERSECTION

Soit deux relations R1 et R2 de même schéma

$R1 \cap R2$  est la relation contenant les tuples appartenant à R1 et à R2

**R1**

A1	A2	A3
a1	a2	a3
b1	b2	b3
c1	c2	c3
d1	d2	d3

\* \*

**R2**

A1	A2	A3
a1	a2	a3
e1	e2	e3
b1	b2	b3

\* \*

## INTERSECTION

$R1 \cap R2$

Relation temporaire

A1	A2	A3
a1	a2	a3
b1	b2	b3

\* \*  
On garde que les  
lignes identiques

commutatif:  $[R1 \cap R2] = [R2 \cap R1]$

associatif:  $[(R1 \cap R2) \cap R3] = [R2 \cap (R1 \cap R3)]$

# Opérateur DIFFERENCE

Soit deux relations R1 et R2 de même schéma

**R1 - R2** est la relation contenant les tuples de R1 n'appartenant pas à R2

**R1**

A1	A2	A3
a1	a2	a3
b1	b2	b3
c1	c2	c3
d1	d2	d3

\*

\*

**R2**

A1	A2	A3
a1	a2	a3
e1	e2	e3
b1	b2	b3

\*

\*

## DIFFERENCE

**R1-R2**

Relation temporaire

A1	A2	A3
c1	c2	c3
d1	d2	d3

Non commutatif:  $[R1 - R2] \neq [R2 - R1]$

Non associatif:  $[(R1 - R2) - R3] \neq [R2 - (R1 - R3)]$

# Opérateur Produit cartésien

Soient les relations  $R(A_1, \dots, A_n)$  et  $S(B_1, \dots, B_p)$   
avec  $\{A_1, \dots, A_n\} \cap \{B_1, \dots, B_p\}$  éventuellement vide

Le **produit cartésien** de S et de R noté  $R \times S$

est défini par la relation  $Q(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_p)$  telle que :

$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p) \in Q$  ssi  $(a_1, \dots, a_n) \in R$  et  $(b_1, \dots, b_p) \in S$

R1

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a3	b3	c3

R2

X	Y
x1	y1
x2	y2

## PRODUIT CARTESIEEN

**R1XR2**

A	B	C	X	Y
a1	b1	c1	x1	y1
a2	b2	c2	x1	y1
a3	b3	c3	x1	y1
a1	b1	c1	x2	y2
a2	b2	c2	x2	y2
a3	b3	c3	x2	y2



UNIVER  
CÔTE D'AZUR

commutatif:  $[R1 \times R2] = [R2 \times R1]$

associatif:  $[(R1 \times R2) \times R3] = [R2 \times (R1 \times R3)]$



# Propriétés de la structure

---

## Même schéma

$$\text{degré}(R1 \cup R2) = \text{degré}(R1) = \text{degré}(R2)$$

$$\text{degré}(R1 \cap R2) = \text{degré}(R1) = \text{degré}(R2)$$

$$\text{degré}(R1 - R2) = \text{degré}(R1) = \text{degré}(R2)$$

## Schéma quelconque

$$\text{degré}(R1 \times R2) = \text{degré}(R1) + \text{degré}(R2)$$

# Opérations de jointure

## Jointure thêta ( $\theta$ -join) : $R \bowtie_P S$

La thêta-jointure définit une relation qui contient les tuples qui satisfont le prédicat  $P$  du produit cartésien de  $R$  et  $S$ . Le prédicat  $P$  est de la forme  $R.a_i \theta S.b_j$  où  $\theta$  est l'un des opérateurs de comparaison ( $<, \leq, >, \geq, =, \neq$ ).

Si le prédicat  $P$  est l'égalité ( $=$ ), on parle d'**équijointure**

## Jointure naturelle : $R * S$

La jointure naturelle est une équijointure des relations  $R$  et  $S$  sur tous les attributs communs en retirant les occurrences multiples d'attributs.

# Opérateur JOINTURE / Theta-JOINTURE

La jointure : opérateur **JOIN**, noté  - combiner une paire de tuples de deux relations en un seul tuple

Client



Vente

numéro = no\_client

Critère de sélection:

= |  $\neq$  |  $\leq$  |  $<$  |  $>$  |  $\geq$

Client

Vente

numéro	nom	adresse	téléphone	numéro	ref_produit	no_client	date
101	Durand	NICE	0493942613	00102	AF153	101	12/10/04
106	Fabre	PARIS	NULL	00809	BG589	106	18/10/04
106	Fabre	PARIS	NULL	11005	VF158	106	05/10/04
125	Antonin	MARSEILLE	0491258472	12005	BG589	125	25/10/04

La relation résultante :

- autant d'attributs que le produit cartésien ( $\text{degré}(R1) + \text{degré}(R2)$ )
- moins de tuples

# Exercice

1. Afficher le nom des clients avec les dates de leurs achats
2. Afficher, pour le client numéro 125, le numéro de vente et la marque des produits achetés

Q1 :  $\pi$  (Client  $\bowtie$  Vente)  
Client.nom, Vente.date      Client.numéro = Vente.no\_client

Q2 :  $V1 = \sigma$  (Vente)  
Vente.no\_client = 125

$R1 = V1$   $\bowtie$  Produit  
Vente.ref\_produit = Produit.référence

Res =  $\pi$  ( R1 )  
Vente.numéro, Produit.marque

## Exercice (suite)

3. Afficher la référence des produits dont le prix est supérieur au produit qui a pour référence 153.

PRODUIT

référence	marque	prix
153	BMW	1000
589	PEUGEOT	1800
158	TOYOTA	1500



curseurs



PRODUIT

référence	marque	prix
153	BMW	1000
589	PEUGEOT	1800
158	TOYOTA	1500

Q3  $P1 = \rho(\text{Produit})$

*opérateur de renommage*

$P2 = \sigma$  (P1)

$P1.\text{référence} = 153$

$\text{Res} = \pi$  (  $\text{Produit}$   $\bowtie$   $P2$  )  
 $\text{Produit.référence} \quad \text{Produit.prix} > P1.\text{prix}$

# Opérateur Equijointure / Jointure naturelle

- **Théta-jointure** avec opérateur =
- **Equijointure** la condition fait appel à l'opérateur =
- Jointure **naturelle** noté \* :  
éqijointure dont la condition porte sur des attributs identiques (de même domaine et même nom)  
un seul des deux attributs est conservé dans le résultat

} **Equivalent**

no\_client

<u>Client</u>				<u>Vente</u>			
numéro	nom	adresse	téléphone	numéro	ref_produit	no_client	date
101	Durand	NICE	0493942613	00102	AF153	101	12/10/04
106	Fabre	PARIS		00809	BG589	106	18/10/04
106	Fabre	PARIS		11005	VF158	106	05/10/04
125	Antonin	MARSEILLE	0491258472	12005	BG589	125	25/10/04

# Exemple de jointure naturelle

Afficher le nom des clients avec les dates de leurs achats

$\pi$  (Client  $\bowtie$  Vente)  
Client.nom, Vente.date      Client.numéro = Vente.no\_client

ou

Renommage Client.numéro en Client.no\_client

$\pi$  (Client \* Vente)  
Client.nom, Vente.date

no_client	nom	adresse	téléphone	numéro	ref_produit	date
101	Durand	NICE	0493942613	00102	AF153	12/10/04
106	Fabre	PARIS		00809	BG589	18/10/04
106	Fabre	PARIS		11005	VF158	05/10/04
125	Carré	MARSEILLE	0491258472	12005	BG589	25/10/04

# Opération de division

Supposons que la relation  $R$  soit définie sur l'ensemble d'attributs  $A$  et que la relation  $S$  soit définie sur l'ensemble d'attributs  $B$ , de telle sorte que  $B \subseteq A$ . Soit  $C = A - B$ .

## Division $R \div S$

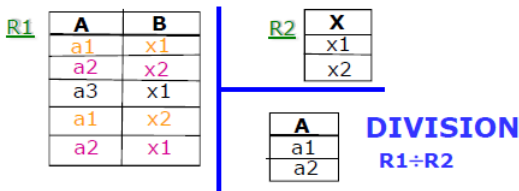
La division définit une relation sur les attributs  $C$ , constituée de l'ensemble des tuples de  $R$  qui correspondent à la combinaison de **tous les** tuples de  $S$ .

- $T_1 = \pi_C(R)$
- $T_2 = \pi_C((S \times T_1) - R)$
- $T = T_1 - T_2$



# Opérateur DIVISION

La division : opérateur **DIVIDE**, noté  $\div$ , utilisé pour répondre à des requête du type : "quels sont les références des produits achetés par tous les clients?"



$R1 = \pi_{\text{Vente.ref\_produit, Vente.no-client}} (\text{Vente})$

$R2 = \pi_{\text{Client.numéro}} (\text{Client})$

$RES = R1 \div R2$

# Autres opérateurs

---

Opérateur **renommer** noté  $\alpha$

- ☐ Changer le nom d'un (ou plusieurs) attribut d'une relation R:  
 $\alpha [\text{nom\_attr1: nouveau\_nom\_pour\_attr1}, \dots ] R$
- ☐ Utile avant les jointures (homonymie, synonymie), ou avant les opérations ensemblistes (même nom requis).

Opérateurs dérivés

- ☐ Jointure externe
- ☐ Semi-jointure gauche, droite

# Autres jointures

## Jointure externe (gauche) entre $R$ et $S$

La jointure externe gauche est une jointure dans laquelle les tuples de la relation  $R$  qui n'ont pas nécessairement de valeur correspondante dans  $S$  parmi les attributs communs de  $R$  et  $S$ , sont également inclus dans la relation résultante. Les valeurs manquantes dans la seconde relation sont mises à nul.

- **Jointure externe droite** : le résultat conserve tous les tuples de la relation de droite
- **Jointure externe complete** : le résultat reprend tous les tuples de deux relations et remplit de nuls les attributs absents pour tous les cas de non-correspondence

## Semi-jointure entre $R$ et $S$

La semi-jointure définit une relation qui contient les tuples de  $R$  qui participent à la jointure de  $R$  avec  $S$ .

# Opérateur JOINTURE EXTERNE

La jointure externe entre les relations S et R notée  $S \bowtie R$  :

- ✓ la jointure  $S \bowtie R$
- ✓ les tuples de S et R ne participant pas à la jointure

CLIENT  $\bowtie$  VENTE

no_client	nom	adresse	téléphone	numéro	ref_produit	date
101	Durand	NICE	0493942613	00102	AF153	12/10/04
106	Fabre	PARIS	NULL	00809	BG589	18/10/04
106	Fabre	PARIS	NULL	11005	VF158	05/10/04
110	Prosper	PARIS	0491258472	12005	BG589	25/10/04
125	Antonin	MARSEILLE	NULL	NULL	NULL	NULL

*A droite et à gauche*

*Pas d'informations*

# Opérateurs déduits

Intersection :

$$R \cap S = R - (R - S) = S - (S - R) \text{ ou}$$

$$R \cap S = (R \cup S) - ((R - S) \cup (S - R))$$

Jointure naturelle :

Soient  $R(X,Y)$  et  $S(Y,Z)$

$$R * S = \pi [X,Y,Z] \sigma [Y = Y'] (R \times \alpha[Y : Y']S)$$

Thêta jointure :

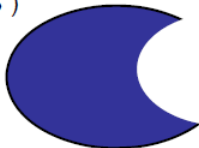
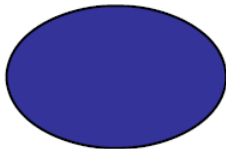
Soient  $R(X,Y)$  et  $S(U,V)$

$$R * [p] S = \sigma [p] (R \times S)$$

Division :

Soient  $R(X,Y)$  et  $S(Y)$

$$R/S = \pi [X] R - \pi [X] ( ( \pi [X] R ) \times S ) - R )$$



# Complexité des opérateurs

---

## Sélection : $\sigma$ [condition] R

- Au plus: balayer la relation + tester la condition sur chaque tuple.
- Complexité =  $\text{card}(R)$ .
- Taille du résultat :  $[0 : \text{card}(R)]$ .

## Projection : $\pi [A_i, A_k \dots] R$

- Balayer la relation + élimination doublons
- Complexité =  $\text{card}(R)$ . 0 si inclut dans une sélection
- Taille du résultat :  $[1 : \text{card}(R)]$ .

## Jointure (naturelle ou thêta) entre R et S

- Balayer R et pour chaque tuple de R faire :  
Balayer S et comparer chaque tuple de S avec celui de R.
- Complexité =  $\text{card}(R) \times \text{card}(S)$ .
- Taille du résultat :  $[0 : \text{card}(R) \times \text{card}(S)]$ .



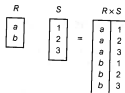
# Fonctions des opérateurs



a) Sélection

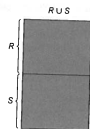


b) Projection

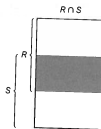


c) Produit cartésien

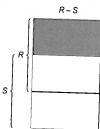
**Figure 4.1**  
Illustration des  
fonctions des  
opérations  
de l'algèbre  
relationnelle.



d) Union



e) Intersection



f) Différence d'ensembles



g) Jointure  
naturelle



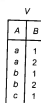
h) Semi-jointure



i) Jointure gauche  
externe



j) Division (zone partagée)



Exemple de division



# Exercice

---

## Relations :

- Journal (code-j, titre, prix, type, périodicité)
- Dépôt (no-dépôt, nom-dépôt, adresse)
- Livraison (no-dépôt, code-j, date-liv, quantité-livrée)

## Requêtes :

- Quel est le prix des journaux ?
- Donnez tous les renseignements connus sur les hebdomadaires.
- Donnez les codes des journaux livrés à Nice.
- Donnez les numéros des dépôts qui reçoivent tous les journaux.