الدرس 17

المظاهــــر الطـاقيــة
Aspects énergétiques

I. شغل قوة

I.1. شغل قوة ثابتة مطبقة على جسم صلب في إزاحة

تعبير شغل قوة ثابتة مطبقة على جسم صلب في حركة إزاحة خلال انتقال نقطة تأثيرها من النقطة **A** إلى النقطة **B** هو :

$$W_{AB}(\vec{F})=\vec{F}.\overrightarrow{AB}=F.AB.\cos\alpha$$

F : شدة القوة الثابتة **(N)** ؛ $\overrightarrow{AB}$:الإنتقال **(m)** ؛ α : الزاوية بين $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AB}$ ؛ $W_{AB}(\vec{F})$: شغل القوة **(J)**

لا يتعلق شغل قوة ثابتة بالمسار المتبع بل يتعلق فقط بموضعها البدئي والنهائي .

I.2. شغل قوة غير ثابتة

I.2.1. الشغل الجزئي

الشغل الجزئي الذي نرمز له بـ δW لقوة $\vec{F}$، خلال انتقال جزئي $\overrightarrow{\delta\ell}$، يعبر عنه كما يلي : $\delta W=\vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$

I.2.2. الشغل الكلي

الشغل الكلي للقوة $\vec{F}$ هو مجموع الأشغال الجزئية δW :

$$W_{AB}(\vec{F})=\sum\delta W=\sum\vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$$

I.3. مبرهنة الطاقة الحركية

في معلم غاليلي ، تغير الطاقة الحركية لجسم صلب (في إزاحة أو في حركة دوران حول محور ثابت) بين لحظتين يساوي المجموع الجبري لأشغال القوى الخارجية المطبقة عليه بين هاتين اللحظتين :

$$\Delta E_C=E_{C_f}-E_{C_i}=\sum W(\overrightarrow{F_{ext}})$$

- الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب كتلته **m** وسرعته **v** في حركة إزاحة هي : $E_C=\frac{1}{2}m.v^2$
- الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب عزم قصوره في حركة دورانية J_Δ هي : $E_C=\frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2$

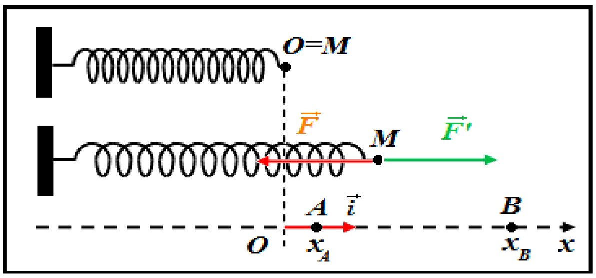
II. الدراســة الطاقية للنواس المـرن

II.1. شغل قوة خارجية مطبقة من طرف نابض

نعتبر نابضا ذي لفات غير متصلة صلابته **k** ، في وضع أفقي حيث ثبت أحد طرفيه إلى حامل ثابت .

نطبق على النابض عند طرفه الحر **M** قوة $\vec{F'}$، فيطال النابض بحيث تنتقل النقطة **M** بالمقدار $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}$ ،

مع **O** موضع **M** في الحالة البدئية للنابض .

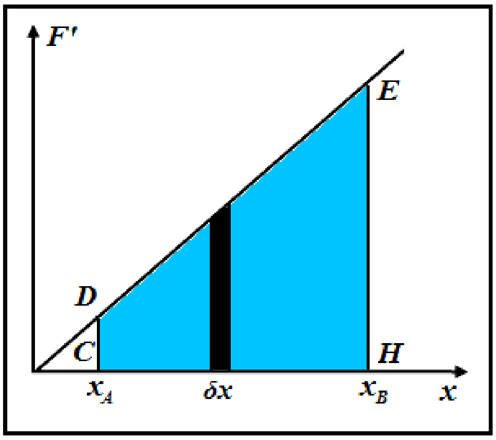


حسب القانون الثالث لنيوتن فإن النابض يطبق قوة ارتداد $\vec{F}$ معاكسة $\vec{F'}$ أي : $\vec{F}=-\vec{F'}$ مع $\vec{F}=-k.x.\vec{i}$

ومنه : $\vec{F'}=K.x.\vec{i}$ ($\vec{F'}$ قوة غير ثابتة نظرا لتعلقها بالأفصول **x**) .

- الشغل الجزئي للقوة $\vec{F'}$ خلال الإنتقال الجزئي $\overrightarrow{\delta\ell}=\delta x.\vec{i}$ هو : $\delta W=\vec{F'}.\overrightarrow{\delta\ell}=\vec{F'}.\delta x.\vec{i}$
- الشغل الكلي للقوة $\vec{F'}$ خلال الإنتقال من **A** إلى **B** هو : $W_{AB}(\vec{F'})=\sum_A^B\delta W=\sum\vec{F'}.\overrightarrow{\delta\ell}=\sum k.x.\vec{i}.\delta x.\vec{i}$

يمكن استعمال طريقتين لتحديد هذا المجموع :



II.1.1. الطريقة المبيانية

نعتبر المنحنى جانبه والذي يمثل تغيرات F’ بدلالة الأفصول x : دالة خطية .

يوافق الشغل الجزئي $\delta W(\vec{F'}) = k.x.\delta x$ مساحة المستطيل الجزئي الأسود .

يوافق الشغل الكلي للقوة $\vec{F'}$، عندما تنتقل النقطة M من نقطة A أفصولها x_A إلى نقطة B أفصولها x_B ، مجموع مساحات المستطيلات الجزئية ويساوي مساحة شبه المنحرف CDEH :

$$W_{AB}(\vec{F'}) = A_{CDEH} = A_{OEH} - A_{OCD}$$

$$W_{AB}(\vec{F'}) = \frac{1}{2}k.x_B^2 - \frac{1}{2}k.x_A^2$$

II.1.2. الطريقة التحليلية

نعوض في العلاقة $W_{AB}(\vec{F'}) = \sum k.x..\delta x$ المجموع "$\sum$" ، بالمجموع المتواصل "$\int$" ، ونعوض كذلك الإنتقال الجزئي δx بالمقدار dx نحصل على :

$$W_{AB}(\vec{F'}) = \int_{x_A}^{x_B} k.x.dx = \left[\frac{1}{2}k.x^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

ومنه :

$$W_{AB}(\vec{F'}) = \frac{1}{2}k.x_B^2 - \frac{1}{2}k.x_A^2$$

وبما أن قوة الإرتداد التي يطبقها النابض هي : $\vec{F} = -\vec{F'}$ فإن شغلـها هو :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k.x_A^2 - \frac{1}{2}k.x_B^2$$

II.2. الطاقـة الحركـيـة للمجموعـة

تساوي الطاقة الحركية E_C لنواس مرن مجموع الطاقة الحركية للجسم الصلب ، والطاقة الحركية للنابض.

وبما أن الطاقة الحركية للنابض شبه منعدمة لأن كتلته مهملة أمام كتلة الجسم الصلب فإن الطاقة الحركية للمجموعة تكافئ الطاقة الحركية للجسم الصلب . ونكتب :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{(J)}$$

m : كتلة الجسم الصلب و v سرعته .

II.3. طاقـة الوضع المـرنة

طاقة الوضع المرنـة للنواس المرن هي الطاقة التي تمتلكها المجموعة (جسم صلب ـ نابض) من جراء تشويه النابض وتعطيها العلاقة التالية :

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}k.x^2 + Cte \quad \text{(J)}$$

حيث k : صلابة النابض (N/m) و x : إطالته (m) .

والثابتة Cte تحدد قيمتها باختيار الحالة المرجعية (حيث تكون طاقة الوضع المرنة منعدمة $E_{Pe}=0$) .

عمليا نختار كحالة مرجعية $E_{Pe}=0$ عندما يكون النابض غير مشوها أي عند x=0 .

وبالتعويض في التعبير السابق نحصل على Cte=0 .

وبالتالي يعبر عن طاقة الوضع المرنة للنواس المرن بالعلاقة :

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}k.x^2$$

ملحوظة

يرتبط شغل قوة مطبقة من طرف نابض بتغير طاقة الوضع المرنة :

$$\Delta E_{Pe} = -W_{AB}(\vec{F})$$

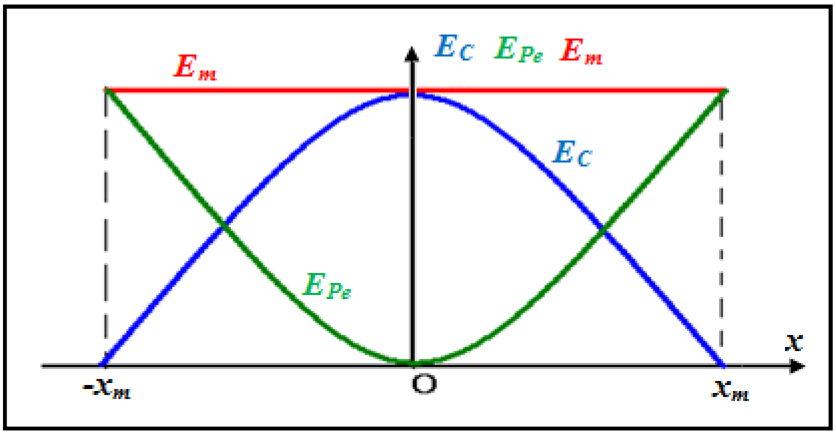
II.4. الطاقـة الميكانيكية

II.4.1. تعريف

تعبير الطاقة الميكانيكية لمجموعة { جسم صلب ـ نابض } أفقية هو :

$$E_m = E_C + E_{Pe} = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k.x^2 + Cte$$

ويمثل الشكل التالي مخططات الطاقة لكل من الطاقة الميكانيكية والطاقة الحركية والطاقة الوضع المرنة .



2.4.II ـ تعبر الطاقة الميكانيكية في حالة إحتكاكات مهملة

في غياب الإحتكاكات يبقى وسع التذبذبات x_m ثابتا ، فنحصل على نظام دوري دوره T_0 .

لدينا : $E_m = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k.x^2$ ونعلم أن : $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$

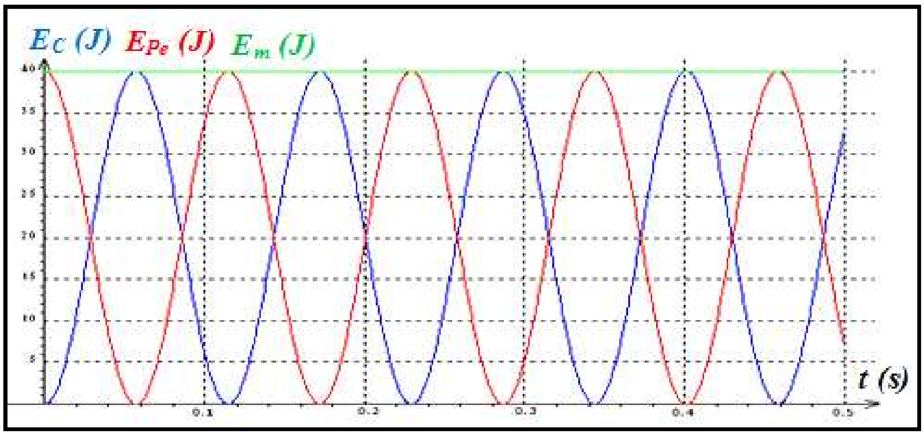
ومنه : $v = \dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$

ومن ثم : $E_m = \frac{1}{2}m.x_m^2.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2}k.x_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$

وبما أن $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ فإن : $E_m = \frac{1}{2}m.x_m^2 = \frac{1}{2}k.x_m^2$

نلاحظ أن تعبير الطاقة الميكانيكية ثابت وبالتالي في غياب الإحتكاكات تنحفظ الطاقة الميكانيكية للنواس المرن الأفقي .

من خلال المبيان التالي يمكن التحقق من أن هناك تحولا لطاقة الوضع المرنة إلى طاقة حركية ، والعكس صحيح .



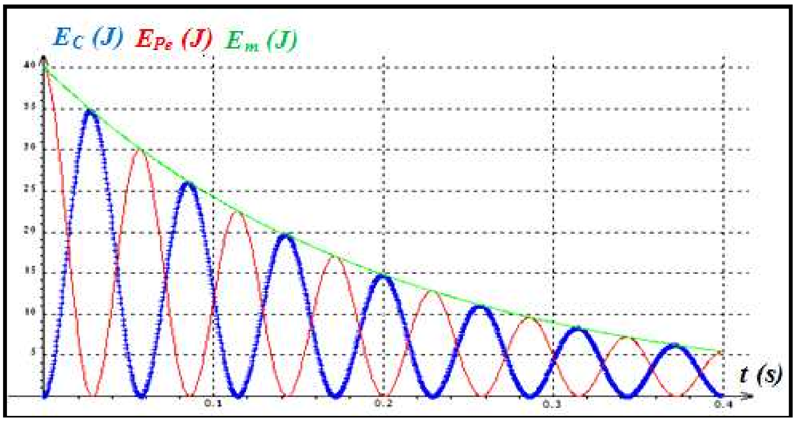
ـ لدينا : $E_m = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k.x^2 = Cte$ ومنه : $\frac{dE_m}{dt} = m.\dot{x}\ddot{x} + k.\dot{x}x = 0$

وبالتالي : $m\ddot{x} + kx = 0$ أي : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

وهي المعادلة التفاضلية للنواس المرن .

3.4.II ـ الطاقة الميكانيكية في حالة إحتكاكات غير مهملة

في هذه الحالة يتناقص وسع التذبذبات تدريجيا ، فنحصل على نظام شبه دوري أي أن الطاقة الميكانيكية لا تنحفظ والسبب في ذلك قوى الإحتكاك التي تسبب في تبدد الطاقة .



III. الدراسة الطاقية لنواس اللي

III.1. شغل مزدوجة اللي

يعبر عن شغل مزدوجة اللي W_C عندما تتغير زاوية اللي من القيمة θ_1 إلى القيمة θ_2 بالعلاقة : $W_C=\frac{1}{2}C.\theta_1^2-\frac{1}{2}C.\theta_2^2$

III.2. الطاقة الحركية للمجموعة

تنحصر الطاقة الحركية لنواس اللي في الطاقة الحركية للقضيب ، ونكتب : $E_C=\frac{1}{2}J_\Delta\,\dot{\theta}^2$ (J)

مع J_Δ: عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) و $\dot{\theta}$: السرعة الزاوية لدوران القضيب .

III.3. طاقة الوضع اللي

تسمى طاقة الوضع اللي المقدار : $E_{Pt}=\frac{1}{2}C.\theta^2+Cte$ (J)

مع : C : ثابتة لي السلك و θ الأفصول الزاوي .

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{Pt}=0$ عندما تكون $\theta=0$ وبذلك تكون $Cte=0$.

وبالتالي : $E_{Pt}=\frac{1}{2}C.\theta^2$

ملحوظة: يساوي تغير طاقة الوضع اللي مقابل شغل مزدوجة اللي : $\Delta E_{Pt}=-W_C$

III.4. الطاقة الميكانيكية للمجموعة

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي هو : $E_m=E_C+E_{Pt}=\frac{1}{2}J_\Delta\,\dot{\theta}+\frac{1}{2}C.\theta^2+Cte$

ـ نعتبر أن الإحتكاكات مهملة ، لنبين أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ ؟

لدينا : $\frac{dE_m}{dt}=J_\Delta\,\dot{\theta}\ddot{\theta}+C.\theta\dot{\theta}=\dot{\theta}\left(J_\Delta\,\ddot{\theta}+C.\theta\right)$

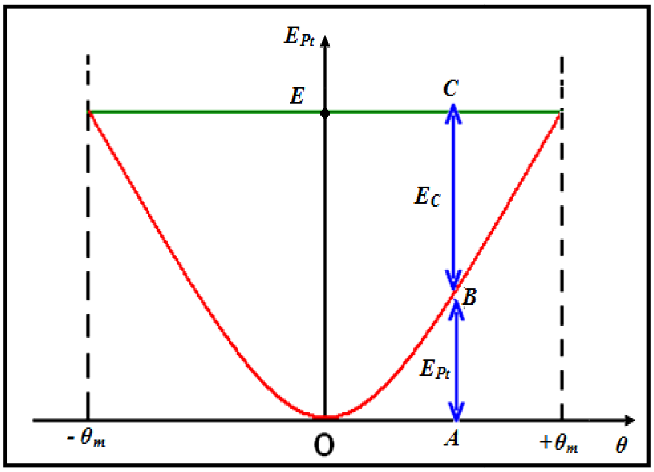
وبما أن المعادلة التفاضلية لنواس اللي تكتب كما يلي : $J_\Delta\,\ddot{\theta}+C.\theta=0$

فإن : $\frac{dE_m}{dt}=0$ أي : $E_m=Cte$

← في غياب الإحتكاكات تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس لي حر وغير مخمد : $E_m=\frac{1}{2}C.\theta_m^2=Cte$

مخططات الطاقة :

أنظــر الوثيقــة جانبه .



ملحوظة :

بوجود الإحتكاكات ، تتناقص الطاقة الميكانيكية لنواس اللي بحيث تتحول إلى طاقة حرارية .

IV ـ الدراسة الطاقية لنواس وازن

IV.1ـ الطاقة الحركية للمجموعة

تساوي الطاقة الحركية لنواس وازن في لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بالأرض نصف جداء عزم قصوره J_Δ ومربع سرعته الزاوية : $E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$ (J)

IV.2ـ الطاقةالوضع الثقالية للمجموعة

تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وازن في مجال الثقالة هو : $E_{Pp} = mgz + Cte$

حيث : m : كتلة النواس ؛ z : أنسوب G مركز قصور النواس الوازن ؛ g : شدة مجال الثقالة .

والثابتة Cte تتعلق بالحالة المرجعية $E_{Pp}=0$.

غالبا ما نأخذ Cte=0 بالنسبة للأنسوب z=0 ، $E_{Pp}=0$ أي : $E_{Pp} = mgz$

ملحوظة :

في حالة تطابق الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية مع أصل محور الأناسيب نأخذ Cte=0 .

ـ لدينا $z = d(1-\cos\theta)$ ومنه $E_{Pp} = mgd(1-\cos\theta)$

ـ عندما تأخذ θ قيما صغيرة $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ وبالتالي : $E_{Pp} = \frac{1}{2} mgd.\theta^2$

IV.3ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وازن في معلم مرتبط بالأرض هو : $E_m = E_C + E_{Pp} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgz + Cte$

ـ لدينا في غياب الإحتكاكات : $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgd.\theta^2 + Cte$ أي : $\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} + mgd.\theta\dot{\theta}$

ومنه : $\frac{dE_m}{dt} = \dot{\theta}\left(J_\Delta \ddot{\theta} + mgd.\theta\right)$

وبما أن المعادلة التفاضلية للنواس الوازن تكتب كما يلي : $J_\Delta \ddot{\theta} + mgd.\theta = 0$

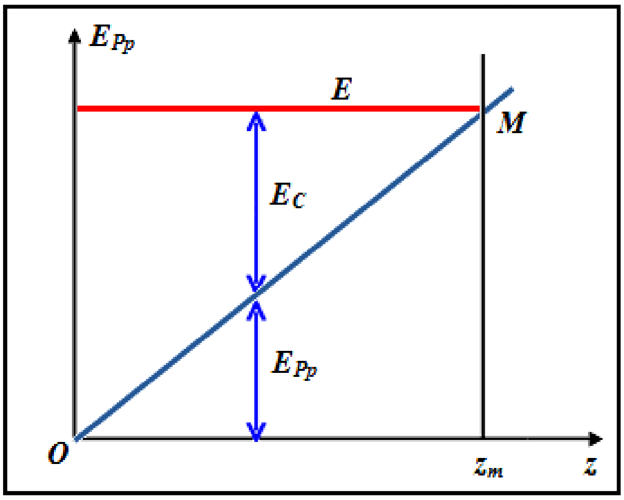
فإن : $\frac{dE_m}{dt} = 0$ أي : $E_m = Cte$

← في غياب الإحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية لنواس وازن حر في مجال الثقالة ثابتة $E_m = Cte$. إذن النواس الوازن مجموعة محافظية .

IV.4ـ مخططات الطاقة

ـ يمثل الشكل جانبه منحنى تغيرات كل من E_{Pp} طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن و E_m الطاقة الميكانيكية بدلالة الأنسوب z .

نلاحظ أثناء الحركة التذبذبية الحرة وغير المخمدة لنواس وازن تحول الطاقة الحركية E_C إلى طاقة الوضع الثقالية والعكس .



ـ حساب تغيرات **E_{Pp}** بدلالة الأفصول الزاوي :

لدينا : $E_{Pp} = mgd(1-\cos\theta)$ أي : $\frac{dE_{Pp}}{d\theta} = mgd.\dot{\theta}.\sin\theta = 0$ ومنه : $\sin\theta = 0 \Leftarrow \theta = \pi$ أو $\theta = -\pi$

وبالتالي : $0 \le E_{Pp} \le 2mgd$

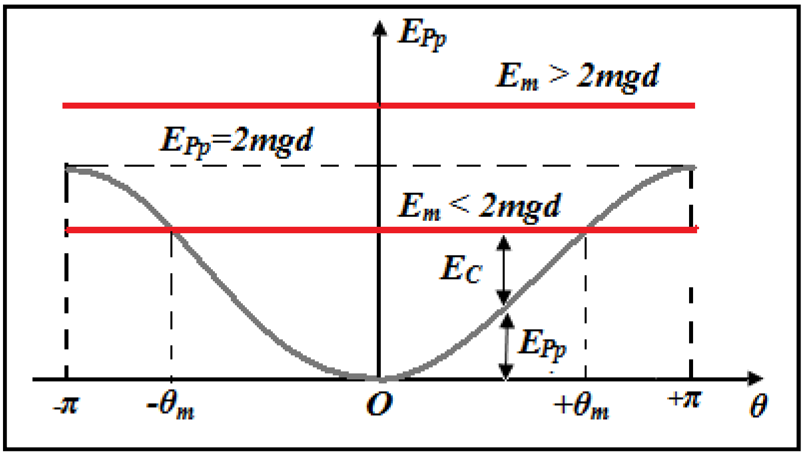
❖ عندما تكون $E_m > 2mgd$ و $E_m = E_{Pp} + E_C$ فإن $E_C > 0$

إذن فالطاقة الحركية للنواس الوازن لا تنعدم وبالتالي لا يتذبذب بل يدور باستمرار حول المحور (Δ) .

❖ $E_m < 2mgd$ و $E_C = E_m - E_{Pp}$ أي أن $E_C \ge 0$

إذن في هذه الحالة تنعدم الطاقة الحركية للنواس الوازن عند θ_m و $-\theta_m$ وبالتالي للمجموعة حركة تذبذبية حرة وغير مخمدة تتحول خلالها الطاقة الحركية إلى طاقة الوضع الثقالية .

ـ يمثل المبيان التالي منحنى تغيرات **E_{Pp}** بدلالة الأفصول الزاوي .



في حالة θ صغيرة نحصل على المنحنى التالي :