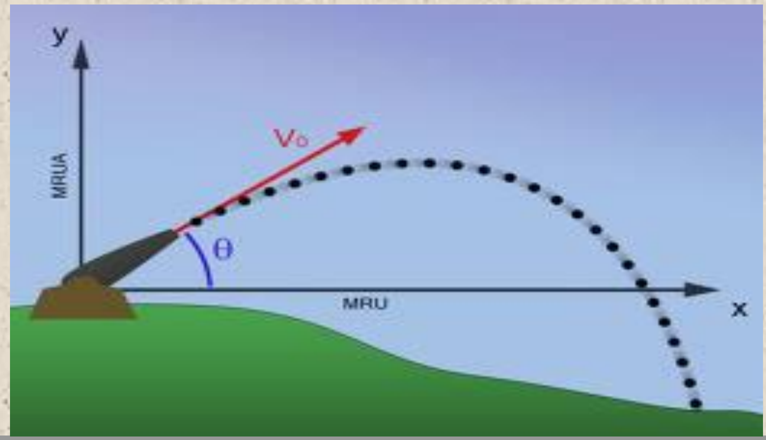
الحركات المستوية
حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم



1) مجال الثقالة .

كلما ما يحيط بالأرض يسقط نحو مركزها ، للأخذ بعين الاعتبار ظاهرة التجاذب هاته ، نقول بأن هناك مجال للثقالة بجوار الأرض ؛ يتميز هذا المجال عند نقطة معيَّنة بالمتجهة $\vec{g}$. كالإبرة الممغنطة التي تبرز وجود مجال مغنطيسي عندما تنحرف لتأخذ اتجاهها محددا ، جسما صلبا كتلته m يبرز وجود مجال الثقالة عندما يسقط نحو مركز الأرض .

ننمذج تأثير الأرض على جسم صلب كتلته m بقوة ، وزنه $\vec{P}$ حيث : $\vec{P} = m\vec{g}$

قوة موجهة نحو مركز الأرض . يمكن أن نعرف متجهة مجال الثقالة بالعلاقة :

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$$

هذا المجال له :

- اتجاه : الرأسي عند الموضع المعيَّن
- منحى : من الأعلى نحو الأسفل (نحو مركز الأرض)
- شدة ، تسمى شدة مجال الثقالة ، قيمتها المتوسطة $9,8 N.kg^{-1}$ عند سطح الأرض .

قيمة مجال الثقالة تتغير حسب المكان : تنقص مع الارتفاع ، لكن تزداد خط العرض (الزاوية الموجودة بين خط الاستواء و الرأسي عند الموضع المعيَّن) .

القطب الشمالي
$g = 9,83\ N.kg^{-1}$

الإكوادور
$g = 9,78\ N.kg^{-1}$

يمكن التدقيق في تعبير مجال الثقالة باعتماد قانون التجاذب الكوني لنيوتن . في الواقع ، نكافئ الوزن بقوة التجاذب المطبقة من طرف الأرض على الجسم ذي الكتلة m :

$$P = F$$

$$m\,g = G\frac{m\,M_T}{d^2} = G\frac{m\,M_T}{(R_T + z)^2}$$

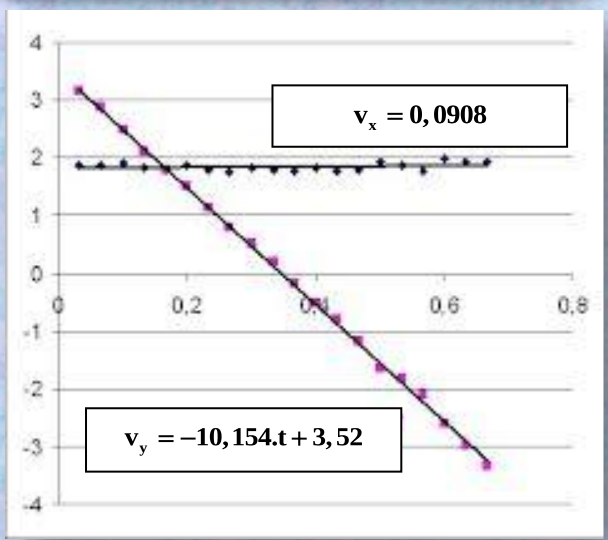
و بذلك نكتب :

$$g(z) = G \times \frac{M_{Terre}}{\left(R_{Terre} + z\right)^2}$$

نعتبر مجال الثقالة منتظم في حيز أبعاده لها رتبة القدر $1km$: في هذه الحالة نعتبر أن الاتجاهات الرأسية تكون متوازية (شعاع الأرض $R_T = 6380km \gg 1km$) و أن قيمة g ثابتة

2) الدراسة التجريبية .

نقذف كرية نحو الأعلى بسرعة بدئية اتجاهها مائل ، ثم نقوم بتصويرها بكاميرا رقمية .
المعالجة المعلوماتية بواسطة حاسوب تمكن من خط المنحنيين $v_x = f(t)$ و $v_y = f(t)$
مع v_x و v_y على التوالي الإحداثي الأفقي و الإحداثي الرأسي لمتجهة سرعة مركز قصور الكرية .



معادلة السرعة على المحور الأفقي (Ox) هي :

$$v_x(t) = 0,0908 \quad (m.s^{-1})$$

معادلة السرعة على المحور الرأسي (Oy) هي :

$$v_y(t) = -10,154 + 3,52 \quad (m.s^{-1})$$

- **نستنتج أن حركة مركز قصور الكرية حركة منتظمة على المحور الأفقي و متغيرة بانتظام على المحور الرأسي .**

و منه فإن إحداثيات متجهة التسارع هي :

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -10 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{a} = -10\vec{j}$$

نلاحظ أن $\vec{a} \approx \vec{g}$ أي أن السقوط حر .

- **المعادلات الزمنية**

من العلاقة $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ وبالتكامل نحصل على المعادلة الزمنية:

$$(1) \quad x(t) = 0,0908.t \quad \text{باعتبار} \quad x(t=0) = 0$$

من العلاقة $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ و بالتكامل نحصل على المعادلة الزمنية :

$$(2) \quad y(t) = -5,077.t^2 + 3,52.t \quad \text{باعتبار} \quad y(t=0) = 0$$

- **معادلة المسار**

نقصي البارامتر t بين المعادلتين (1) و (2) فنجد : $y = -615,79.x^2 + 38,76.x$
مسار مركز قصور الكرية جزء منشلجم

3) الدراسة النظرية .

معلم الدراسة

دراسة السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة المنتظم تنجز في مرجع مرتبط بالأرض و الذي نعتبره غاليليا :
حيث أن مدد السقوط لا تتجاوز غالبا بعض الثواني أو الدقائق ، و هي مدد مهملة مقارنة مع مدة يوم .

التسارع

المجموعة المدروسة جسم صلب كتلته m و مركز قصوره G .

الوزن $\vec{P} = m\vec{g}$ هو القوة الوحيدة المطبقة على المجموعة : يمكن القانون الثاني لنيوتن من كتابة :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = m\overrightarrow{a_G}$$

أي

$$m\vec{g} = m\overrightarrow{a_G}$$

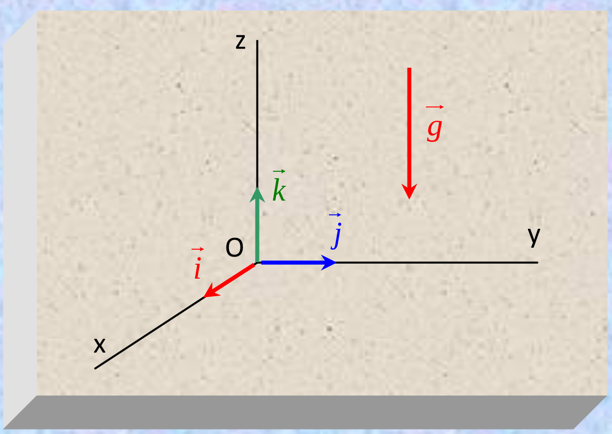
و منه

$$\overrightarrow{a_G} = \vec{g}$$

متجهة تسارع مركز قصور الجسم الصلب خلال سقوط حر تساوي متجهة مجال الثقالة : قيمة التسارع لا تتعلق بكتلة الجسم .
و بذلك فإن الكريات خلال سقوطها لها نفس متجهة التسارع رغم اختلاف كتلها و رغم حدوث ذلك بسرعة بدئية أو بدون سرعة بدئية .

حركة متغيرة بانتظام

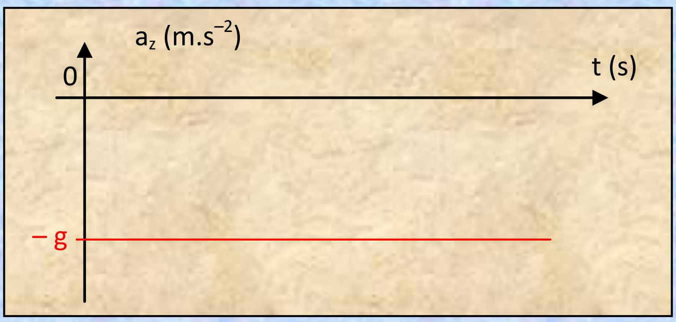
في المرجع الأرضي ، نختار معلما للفضاء متعامد و ممنظم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ حيث المحور الرأسي $\left(O;\vec{k}\right)$ موجه نحو الأعلى .



العلاقة المتجهية $\overrightarrow{a_G} = \vec{g}$ تمكن من الحصول على إحداثيات متجهة التسارع لمركز قصور الجسم بما أننا نعرف إحداثيات $\vec{g}$.

$$\overrightarrow{a_G}(t) = \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$$

التسارع حسب المحور (Oz) ثابت : نقول بأن الحركة حسب المحور الرأسي حركة متغيرة بانتظام .
تمثيل $a_z(t)$ بدلالة الزمن مستقيم أفقي .



المعادلات التفاضلية للحركة

نعرف أن التسارع هو مشتقة السرعة ، نستنتج المعادلات التفاضلية التي تحققها إحداثيات متجهة السرعة :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

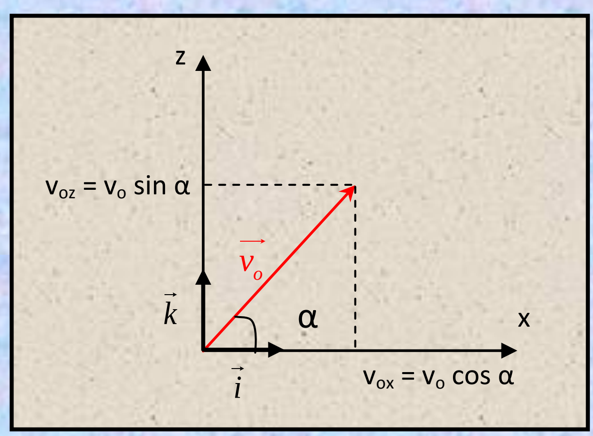
حل تحليلي للمعادلات التفاضلية

أي إيجاد المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة $\vec{v}(t)$ و متجهة الموضع $\overrightarrow{OG}(t)$ لمركز قصور الجسم :

إعطاء التعابير للإحداثيات بدلالة الزمن . لهذا يجب معرفة الشروط البدئية .

نختار المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ بحيث يكون أصل المعلم يطابق موضع مركز قصور الجسم عند اللحظة $t=0$.

لنفترض أن عند اللحظة $t=0$ نقذف الكرية بسرعة بدئية غير منعدمة $\vec{v}_0(t=0)=\vec{v}_0$ تنتمي للمستوى (xOz) و تكون الزاوية α بالنسبة للمستوى الأفقي .



الشروط البدئية هي اذن :

$$\overrightarrow{OM_o}\begin{cases} x(t_o)=0 \\ y(t_o)=0 \\ z(t_o)=0 \end{cases}$$

و

$$\vec{v}(t_o)=\overrightarrow{v_o}\begin{cases} v_x(t_o)=v_{ox}=v_o\cos\alpha \\ v_y(t_o)=v_{oy}=0 \\ v_z(t_o)=v_{oz}=v_o\sin\alpha \end{cases}$$

تحديد متجهة السرعة

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

بالتكامل نحصل على

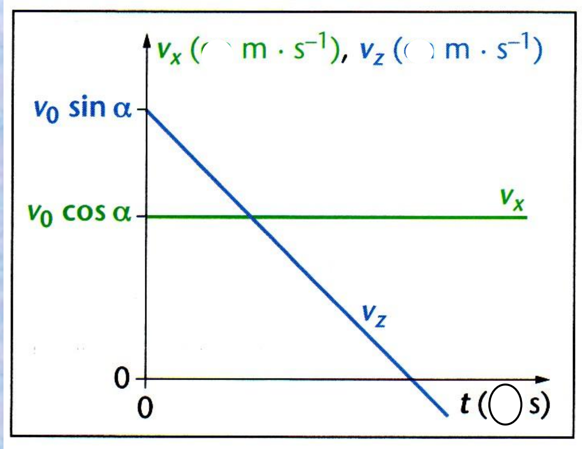
$$\begin{cases} v_x(t)=C_1 \\ v_y(t)=C_2 \\ v_z(t)=-g\,t+C_3 \end{cases}$$

لتحديد قيم الثوابت نعتمد على الشروط البدئية

$$\overrightarrow{v_o}\begin{cases} v_x(t_o)=C_1=v_o\cos\alpha \\ v_y(t_o)=C_2=0 \\ v_z(t_o)=C_3=v_o\sin\alpha \end{cases}$$

إحداثيات متجهة السرعة عند كل لحظة هي :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_o \cos\alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -g\,t + v_o \sin\alpha \end{cases}$$



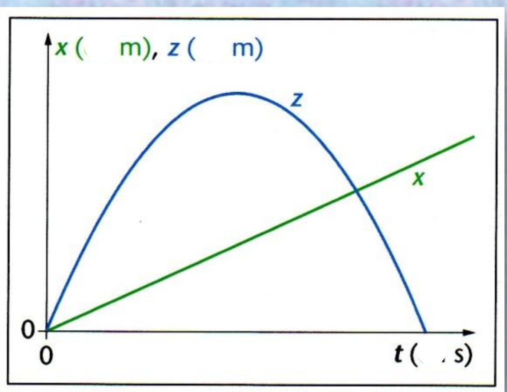
تحديد متجهة الموضع .

نحصل على إحداثيات متجهة الموضع بواسطة التكامل لإحداثيات متجهة السرعة :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_o \cos\alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -g\,t + v_o \sin\alpha \end{cases}$$ بالتكامل نجد $$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) = v_o\left(\cos\alpha\right)t + C_4 \\ y(t) = C_5 \\ z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_o\left(\sin\alpha\right)t + C_6 \end{cases}$$

نحدد قيم الثوابت باعتماد الشروط البدئية : متجهة الموضع بدئيا $(t=0)$ متجهة منعدمة ، و بذلك فإن الثوابت منعدمة ، و منه متجهة الموضع اللحظية تكتب :

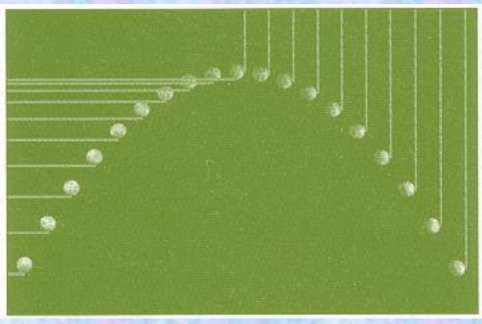
$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) = v_o\left(\cos\alpha\right)t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + vo\left(\sin\alpha\right)t \end{cases}$$



بما أن $y(t)=0$ ، فإن الحركة تتم في المستوى الرأسي (xOz) ، أي المستوى الرأسي الذي يضم متجهة السرعة البدئية $\vec{v}_0$.

حسب المحور الأفقي ، الحركة مستقيمية منتظمة .

حسب المحور الرأسي ، الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام .



معادلة المسار .

بما أن الحركة توجد في المستوى (xOz) ، فإن المعادلة الديكارتية للمسار تأخذ الشكل $z(x)$: للحصول عليها ، نقصي الزمن t بين المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $z(t)$.

$$\begin{cases} x(t) = v_o(\cos\alpha)t & (1) \\ z(t) = -\frac{1}{2}g t^2 + vo(\sin\alpha)t & (2) \end{cases}$$

باعتماد المعادلة (1) ، يمكن أن نعبرعن t بدلالة x :

$$t = \frac{x}{v_o \cos\alpha}$$

ثم نعوض هذا التعبير في المعادلة (2) :

$$z(t) \rightarrow z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right)^2 + v_o(\sin\alpha)\left(\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right)$$

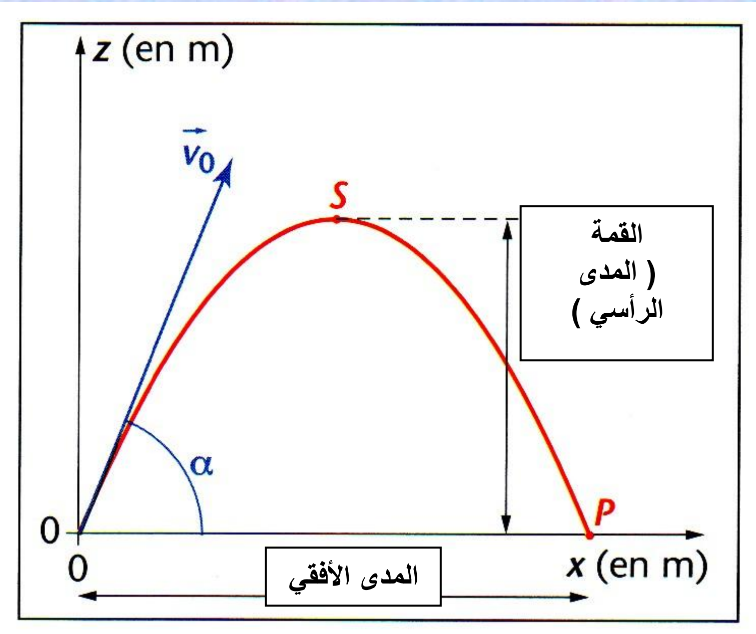
يعني

$$z(x) = -\frac{g}{2(v_o \cos\alpha)^2}x^2 + \frac{v_o \sin\alpha}{v_o \cos\alpha}x$$

و بالأخص

$$z(x) = -\frac{g}{2(v_o \cos\alpha)^2}x^2 + (\tan\alpha)x$$

$z(x)$ دالة من الدرجة الثانية ، تمثيلها المبياني شلجم
و هذا يتطابق مع الدراسة التجريبية



مميزات المسار .

* قمة المسار هي الارتفاع القصوي الذي تصل إليه القذيفة ، يوافق ارتفاع النقطة S . أحد طرق تحديد إحداثيات النقطة S تكمن في أن عند هذه النقطة متجهة السرعة تكون أفقية : الإحداثي $v_z(t_S)$ منعدم .

$$v_z(t_S) = -g t_S + v_o \sin\alpha = 0$$

نستنتج لحظة المرور من النقطة S

$$t_S = \frac{v_o \sin\alpha}{g}$$

و التي تمكن من الحصول على إحداثيات S باعتماد المعادلات الزمنية للحركة ،

$$\begin{cases} x(t_S)=v_o(\cos\alpha)t_S=\dfrac{v_o^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}=\dfrac{v_o^2\sin(2\alpha)}{2g} \\ z(t_S)=-\dfrac{1}{2}g\,t_S^2+v_o(\sin\alpha)t_S=-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{vo\sin\alpha}{g}\right)^2+\dfrac{v_o^2\sin^2\alpha}{g}=\dfrac{v_o^2\sin^2\alpha}{2g} \end{cases}$$

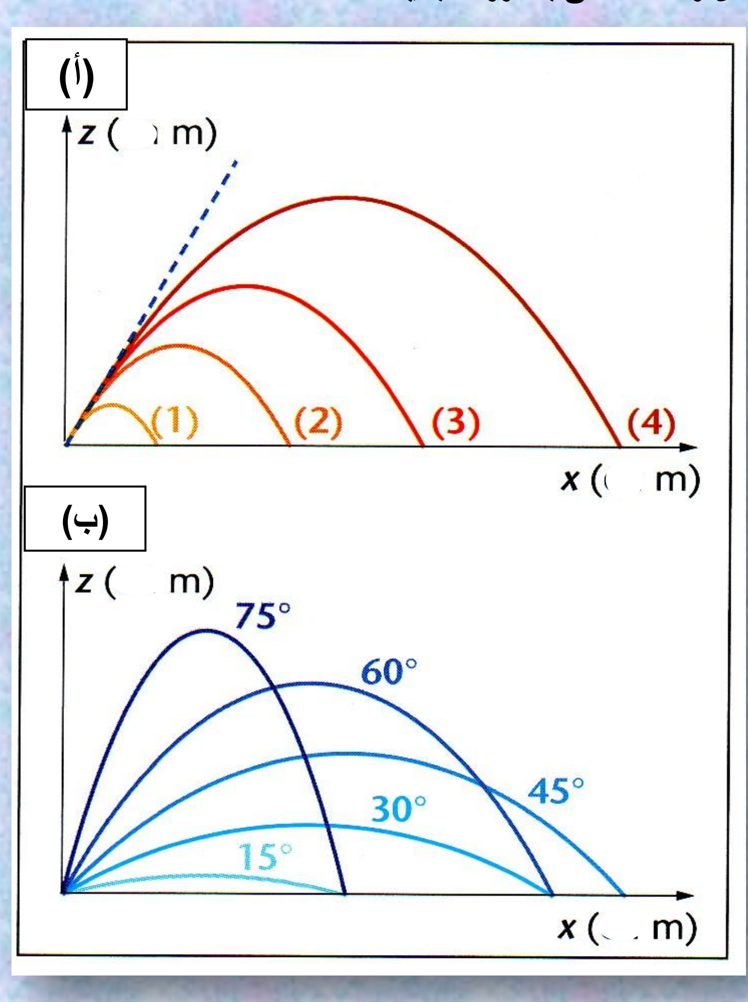
*المدى هي المسافة الفاصلة بين نقطة الانطلاق O و نقطة الوصول P التي تنتمي للمستوى الأفقي الذي يضم O .
عند النقطة P ، الإحداثي z للموضع ينعدم ، و حسب معادلة المسار

$$z_P=-\frac{g}{2(v_o\cos\alpha)^2}x_P^2+(\tan\alpha)x_P=0$$

$$x_P=\frac{2v_o^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}=\frac{2v_o^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_o^2\sin(2\alpha)}{g}$$

بالنسبة لقيمة معيَّنة ل v_0 ، نحصل على المدى القصوي عندما تكون $\sin 2\alpha=1$ ، أي عندما تكون $\alpha=45°$.

قيمة كل من المدى و القمة تتعلق بالشروط البدئية :



(أ)الزاوية α ثابتة ، قيمة السرعة البدئية v_0 تزداد من المنحنى (1) إلى المنحنى (4) .

(ب) الزاوية α تتغير ، قيمة السرعة البدئية v_0 ثابتة