TP: Options américaines
Ensimag (2024-2025)

Olivier Zahm*

Dans ce TP nous allons calculer la valeur d'une option américaine à un seul actif en résolvant l'inéquation de Black-Scholes 1D par différences finies. On commencera par implémenter la méthode de Gauss-Seidel projeté pour la résolution d'un problème de complémentarité linéaire et on validera l'implémentation sur un problème d'obstacle. Puis on résoudra l'inéquation de Black-Scholes et on étudiera l'évolution des zones d'exercice et d'arrêt.

Consignes: Vous utilisez le langage de programmation de votre choix (R, Python, Matlab, Julia...). Les consignes sont assez ouvertes : n'hésitez pas à prendre des initiatives. **Un rapport au format pdf par binôme à envoyé avant ce soir (18 novembre) à 23h00 à l'adresse `olivier.zahm@inria.fr`.**

Le nom du fichier doit être comme suit:

$\boxed{\texttt{NOM1\_NOM2.pdf}}$

*olivier.zahm@inria.fr

1 Méthode de Gauss-Seidel projeté (GSP)

On considère le problème de complémentarité linéaire suivant: étant donné $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $B \in \mathbb{R}^N$, $G \in \mathbb{R}^N$, trouver $X \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$AX - B \geq 0, \quad X \geq G, \quad (AX-B)^T(X-G) = 0. \tag{1}$$

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons une méthode itérative qui consite en une suite $\{X^k\}_{k\geq 0}$ définie par

$$X^{k+1} = \Psi(X^k),$$

où $\Psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une application contractante dont le point fixe $X = \Psi(X)$ est solution de (1).

Nous définissions $\Psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de la façon suivante:

$$\Psi(X) = Z, \qquad \text{avec} \qquad \text{avec } Z_n = \max\{Y_n, G_n\}, \ \forall n \leq N$$

où Y_n est donné par

$$Y_n = \frac{1}{A_{n,n}}\left(B_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_{n,i}Z_i - \sum_{i=n+1}^{N} A_{n,i}X_i\right). \tag{2}$$

Nous supposerons que la matrice A est tridiagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

Cette hypothèse permet de simplifier la formule (2) ainsi que son implémentation.

Tâche 1: À l'aide d'une boucle `while`, implémenter une routine que l'on appellera `GSP` qui prend en entrée les données suivantes:

- les scalaires α, β, γ définissant A,
- les vecteurs B et G,
- l'initialisation $X^0 \in \mathbb{R}^N$,
- les paramètres de l'algo: ε et $K_{\max}$ (typiquement $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-6}, ...$ et $K_{\max} = 1000, 5000, ...$),

et qui calcule les itérés $X^{k+1} = \Psi(X^k)$ jusqu'à ce que la condition de stationnarité

$$\frac{\|X^{k+1} - X^k\|}{\|X^k\|} \leq \varepsilon,$$

soit satisfaite, ou bien jusqu'à ce que le nombre d'itérations maximal $k = K_{\max}$ soit atteint (on éviter ainsi de potentielles boucles infinies...). La routine `GSP` retournera

- L'itéré final X^k
- Le nombre d'itérations k

1.1 Le problème d'obstacle

La fonction

$$g(x) = 3\exp\left(-\frac{(x+0.4)^2}{0.1}\right) + 4\exp\left(-\frac{(x-0.4)^2}{0.2}\right) - 1, \tag{4}$$

définit un obstacle surlequel nous tendons une corde $u(x)$ attachée en 0 aux points $x = -1$ et $x = 1$, voir Figure 1. La fonction u est l'unique solution de

$$\underbrace{u(-1) = u(1) = 0,}_{\text{conditions aux bords}} \quad \underbrace{-u''(x) \geq 0,}_{\text{inéquation}} \quad \underbrace{u(x) \geq g(x),}_{\text{obstacle}} \quad \underbrace{(u''(x))(u(x) - g(x)) = 0,}_{\text{complémentarité}}$$

pour tout $x \in [-1, 1]$. En utilisant une discrétisation spatiale à $N+2$ point donnée par $x_n = -1 + n\Delta x$, $i = 0, \ldots, N+1$ avec $\Delta x = 2/(N+1)$, le problème revient à chercher $X \in \mathbb{R}^N$ solution de (1) avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix},$$

La solution $X = (X_n)_{n \leq N}$ fournit ainsi une estimation de $(u(x_n))_{n \leq N}$.

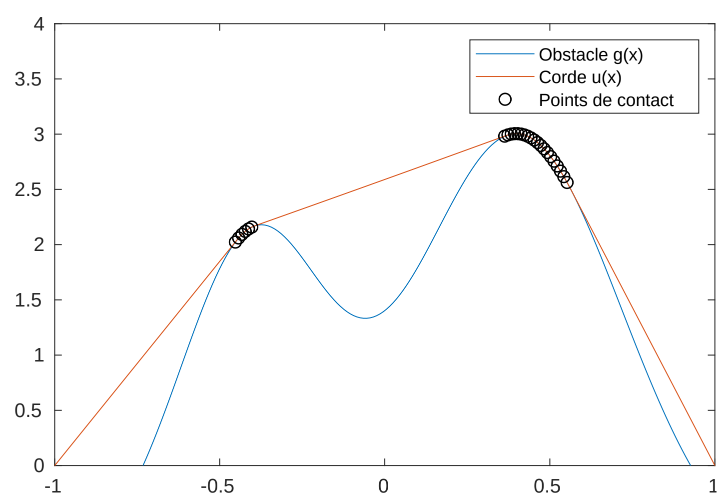

Figure 1: Une corde tendue $u(x)$ au dessus d'un obstacle $g(x)$

Tâche 2: Résoudre ce problème à l'aide de la routine `GSP`. On pourra, si on le souhaite, tester avec une autre fonction g que celle donnée en (4) (vous avez carte blanche pour imaginer d'autre g). Quelques pistes à explorer:

- Lorsque N augmente, comment évolue le nombre d'itération k de l'algorithme de Gauss-Seidel projeté ? Quel est la limite de cette approche ?
- On sait que `GSP` ne donne qu'une approximation de la solution du problème (1). Laquelle des conditions $X \geq G$, $AX - B \geq 0$ et/ou $(AX-B)^T(X-G) = 0$ n'est pas satisfaite ?

2 Options américaines

On rappelle que la valeur d'une option américaine est

$$V(s,t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{S_t=s}\left[e^{-r(\tau-t)}\Phi(S_\tau)\right], \qquad \text{avec } \begin{cases} \Phi(s) = (s-K)_+ & \text{si call,} \\ \Phi(s) = (K-s)_+ & \text{si put.} \end{cases}$$

Pour calculer $V(s,t)$ on considère le changement de variable $t = T - \tau$ et $s = \exp(x)$ et on introduit

$$u(x,\tau) = V(\exp(x), T-\tau). \tag{5}$$

Cette fonction u satisfait le système d'inéquations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} - \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \delta - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + ru & \geq 0 & \forall \tau, x \\ u(x,\tau) & \geq \Phi(\exp(x)) & \forall \tau, x \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + ru\right)(u - \Phi(\exp(x))) & = 0 & \forall \tau, x \\ u(x,0) & = \Phi(\exp(x)) & \forall x \end{cases}$$

défini pour $x \in \mathbb{R}$ et $\tau \in [0,T]$. Nous allons résoudre numériquement ce système sur l'intervalle $x \in [a,b]$ avec $a = \log(K/10)$ et $b = \log(10K)$ en considérant les conditions aux bords

$$u(a,\tau) = \Phi(\exp(a)), \qquad u(b,\tau) = \Phi(\exp(b)), \qquad \forall \tau.$$

Pour résoudre numériquement ce problème, on discrétise en temps et en espace

$$\begin{aligned} x_n &= a + n\Delta x, \qquad 0 \leq n \leq N+1 \\ \tau_m &= m\Delta\tau, \qquad 0 \leq m \leq M \end{aligned}$$

avec $\Delta x = (b-a)/(N+1)$ et $\Delta\tau = T/M$. En utilisant un schéma d'intégration implicite, nous avons vu que l'approximation U_n^m de $u(x_n, \tau_m)$ se calcule iterativement en partant de $U_n^0 = \Phi(\exp(x_n))$ puis en calculant U^{m+1} en résolvant

$$\boxed{AU^{m+1} - (U^m + F) \geq 0, \qquad U^{m+1} - G \geq 0, \qquad \left(AU^{m+1} - (U^m+F)\right)^T\left(U^{m+1} - G\right) = 0}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \qquad F = \begin{pmatrix} -\gamma\,\Phi(\exp(a)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\beta\,\Phi(\exp(b)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N},$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= \Big(1 + \frac{\sigma^2\Delta\tau}{\Delta x^2} + r\Delta\tau\Big) \\ \beta &= \Big(- \frac{\sigma^2\Delta\tau}{2\Delta x^2} - \frac{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta\tau}{2\Delta x}\Big) \\ \gamma &= \Big(- \frac{\sigma^2\Delta\tau}{2\Delta x^2} + \frac{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta\tau}{2\Delta x}\Big). \end{aligned}$$

Tâche 3: Le but est de tracer la figure 2 vue en cours. Pour cela, il faut calculer et enregistrer les vecteurs U_n^m pour $m = 1, \dots, M$ et $n = 1, \dots, N$ et tracer la "zone de contact" où $U_n^m = G_n$. On pourra remplir une matrice $C \in \mathbb{R}^{N\times M}$ telle que $C_{n,m} = 1$ si $U_n^m = G_n$ (on exerce) et $C_{n,m} = 0$ sinon (on continue), et puis tracer la matrice C comme si c'était une image (attention à bien prendre en compte le changement de variable (5) !). On poura tester par exemple avec $N = M = 100$, $K = 1$, $T = 1$, $\sigma = 0,5$, $r = 0.02$ et $\delta = 0.01$

- À chaque itération, quelle initialisation X^0 pour `GSP` choisissez-vous ?
- Que se passe-t-il dans le cas d'un call sans dividence $\delta = 0$? Dans le cas d'un put sans intérêt $r = 0$?
- Dans le cas d'un call, il se peut que la condition au bord $u(a, \tau) = \Phi(\exp(a)) = 0$ induise un contact qui n'a pas lieu d'être. Comment remédier à cela ?

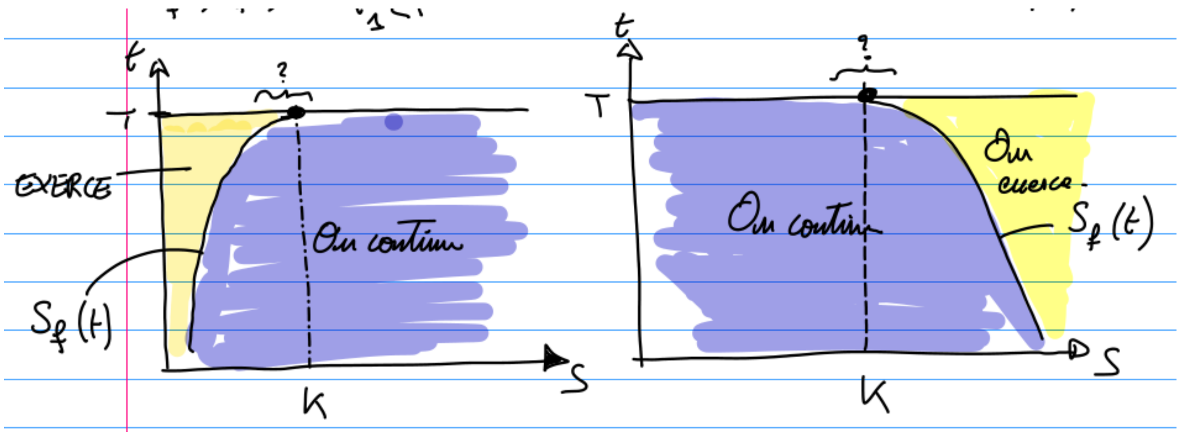

Figure 2: Zone d'exercice de l'option américaine (put à gauche, call à droite)