# TP: Différences finies pour options à barrières Ensimag (2024-2025)

Olivier Zahm*

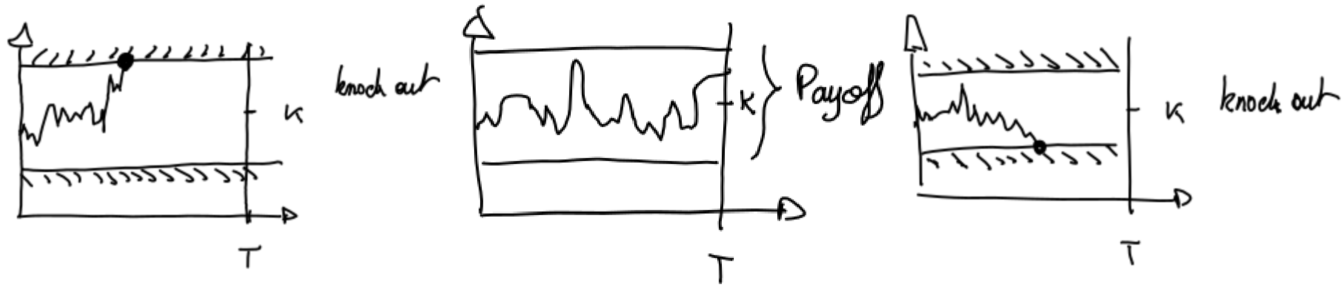
Le but du TP est d'étudier quelques schémas de résolution par différences finies de l'équation de Black-Scholes. On s'intéressera en particulier à la convergence et à la stabilité des schémas. Si le temps le permet, on comparera à une approche de type Monte-Carlo.

**Consignes:** Vous utilisez le langage de programmation de votre choix (R, Python, Matlab, Julia, Fortran...). Les consignes sont assez ouvertes : n'hésitez pas à prendre des initiatives !

*olivier.zahm@inria.fr

# 1 Option à barrière

Une option à barrière est une option (put ou call) qui se désactive si le sous-jacent dépasse une certaine barrière (knock-out option).




Nous considérons ici deux barrières: une basse $s = a$ et une haute $s = b$. La valeur $V(s,t)$ de l'option correspond à l'espérance du payoff, en prenant en compte que si le sous-jacent touche l'une des deux barrières avant la date $T$, alors l'option est désactivée. Il s'avère que $V(s,t)$ satisfait l'équation de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0$$

avec $V(s,T) = \Phi(s)$ comme condition terminale et

$$V(a,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(b,t) = 0,$$

comme conditions aux limites.

# 2 Équation de la chaleur

Après un changement de variables approprié vu en cours, le problème revient à résoudre l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \qquad \forall (x,t) \in [a,b] \times [0,T] \\ u(a,t) &= \alpha \qquad \forall t \in [0,T] \\ u(b,t) &= \beta \qquad \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) &= \phi(x) \qquad \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

On pourra, par exemple, choisir $a = -1$, $b = 1$, $\sigma^2 = 0.1$, $\alpha = \beta = 0$, $T = 1$ et $\phi(x) = \max\{x, 0\}$. On discrétise l'espace avec $N+2$ points et le temps avec $M+1$ points

$$\begin{aligned} x_n &= a + n\Delta x, \quad n = 0, \ldots, N+1 \\ t_m &= m\Delta t, \quad m = 0, \ldots, M, \end{aligned}$$

avec $\Delta x = (b-a)/(N+1)$ et $\Delta t = T/M$. On notera $u_n^m$ l'approximation de $u(x_n, t_m)$ optenue par les différents schémas suivants:

- **Schéma explicite**

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{\Delta x^2} = 0$$

- **Schéma implicite**

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}}{\Delta x^2} = 0$$

- **Schéma Crank Nicolson**

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{\Delta x^2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}}{\Delta x^2} \right) = 0$$

**Tâche 1** Implémenter et analyser ces 3 schémas. On commencera par mettre sous forme matricielle ces trois schémas en faisant intervenir les quantitiés suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \qquad \mu = \frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2}$$

Quelques pistes d'analyse et d'argumentation:

- Analyser le schéma de Crank Nicolson:
  1. Montrer que le schéma Crank Nicolson est d'ordre 2 en temps et 2 en espace.
  2. Montrer que le schéma est inconditionnellement stable (au sens de Von Neuman).
- Vérifier numériquement la stabilité du schéma explicite en fonction de la valeur de $\mu$. Montrer ce qu'il se passe lorsque $\mu \geq 1/2$.
- Pour le schéma implicite comme pour celui de Crank Nicolson, on aura besoin de résoudre un système linéaire. Quel solveur allez-vous utiliser?
- Vérifiez la convergence des schémas. On pourra par exemple utiliser la condition initiale suivante:

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{\pi p(x-a)}{b-a}\right)$$

avec $p \in \mathbb{N}$ (choisi arbitrairement) pour laquelle on connaît la solution exacte

$$u_{\text{ex}}(x,t) = \exp\left(-t\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{p\pi}{b-a}\right)^2\right)\sin\left(\frac{\pi p(x-a)}{b-a}\right).$$

Il suffira donc de comparer la solution obtenue par différence finies avec $u_{\text{ex}}(x,T)$ évalué aux points $x_1,\dots,x_N$ (attention: on pensera bien mesurer des erreurs relatives $||U-U_{\text{ex}}||/||U_{\text{ex}}||$).

- Quel schéma utiliser ? Comment choisir $N$ en fonction $M$ ? Pour répondre à ces questions, on pourra lancer une batterie de tests pour plusieurs valeurs de $N$ et $M$ et on étudiera les erreurs relatives obtenues.

# 3 Méthode de Monte Carlo (optionnel)

On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ définit par

$$\begin{aligned} X_0 &= x \\ \mathrm{d}X_t &= \sigma \mathrm{d}W_t \end{aligned}$$

avec $W_t$ un processus de Wiener. On pose $\tau(x)$ la première date $t$ à laquelle $X_t$ sort de l'intervalle $[a,b]$ entre le temps $t=0$ et $t=T$. Si $X_t$ ne sort par de l'intervalle entre $t=0$ et $t=T$, alors on pose $\tau(x)=T$. La solution $u(x,T)$ de l'équation de la chaleur s'écrit comme

$$u(x,T) = \mathbb{E}[\Phi(X_{\tau(x)}, \tau(x))]$$

avec

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } t = T \\ \alpha & \text{si } t < T \text{ et } x = a \\ \beta & \text{si } t < T \text{ et } x = b \end{cases}$$

**Tâche 2** On se propose de calculer $u(x,t)$ en utilisant la méthode de Monte Carlo. On commence par approcher le processus continu $X_t$ par le processus discret $X_m \approx X_{t_m}$ donné par

$$\begin{aligned} X_0 &= x \\ X_{m+1} &= X_m + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\xi_m, \end{aligned}$$

avec $\xi_1,\dots,\xi_M \sim \mathcal{N}(0,1)$ des variables indépendantes. En réalisant $K$ tirages, calculer un estimateur Monte Carlo de $\mathbb{E}[\Phi(X_{\tau(x)},\tau(x))]$. Comparer numériquement la précision obtenue par Monte Carlo et par différences finies.