CH 6 : Arbitrage

Introduction : la notion d'arbitrage est moins exigente que la notion d'équilibre, elle se contente de donner des relations entre les prix des actifs de façon relative c-à-d elle ne donne pas des prix / valeur "absolues"

on sait bien définir la notion "d'absence d'oportunité d'arbitrage"

définition (Connolly 1989)

⚠ j'ai acheté des actifs (portion p) et pour la financer j'ai vendu la même portion en d'autre actifs

une oportunité d'arbitrage est la possibilité pour un investisseur de détenir aujourd'hui un portefeuill d'actif financiers dont le prix aujourd'hui vaut 0 € et qui donne dans le futur des flux positifs avec une proba strictement positive et des flux negatifs avec une proba nulle

(on sait instantanement la valeur de \$ à paris et à N-Y en même temps

Contre exemple 1 : impossible que \$ 1 = 0,8 € à Paris = 1 € à N-Y

Contre exemple 2 : Contrat "Futur" ou "Forward"

un contrat forward ou futur donne l'obligation à l'acheteur de ce contrat d'acheter un actif donné (ie. sous-jacent) à une date donné (la date d'exercice) et à un prix fixé aujourd'hui (prix futur)

exemple : Contrat futur sur une action qui vaut 40 € aujourd'hui, echéance 3 Mois

taux sans risque = 5% par an, prix du contrat futur = F_0

on suppose que le contrat futur vaut $F_0 = 43$ €

aujourd'hui
- J'emprunte 40 €
- Achète l'action
- vendre le contrat future

portefeuille = 0 €

à l'échéance du futur
- je rembourse l'emprunt $40\left(1+\frac{5\%}{4}\right) = 40{,}5$ €
- je donne l'action à l'acheteur du futur
- l'acheteur me donne 43 €

$\Rightarrow$ gain 2,5 €

si le prix du futur en $t=0$ vaut $F_0 = 39$ €

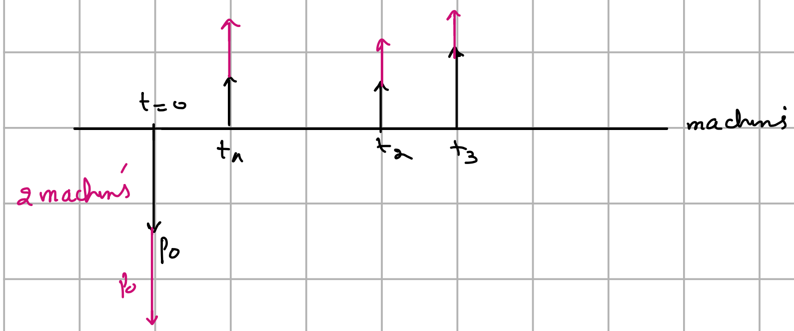
- je vends l'action à decouvert
- j'achète le contrat
- je place les 40 € au taux sans risque à l'echéance
- je touche $40 \times \left(1+\frac{5\%}{4}\right) = 40{,}50$ €
- j'utilise les 39 € pour payer le forward
- le forward me donne l'action
- je rends l'action que j'avais vendu à decouvert Gain = 1,50 €

donc le bon prix de $F_0 = \underbrace{S_0}_{\text{prix d'action}}(1+\underbrace{rt}_{\text{taux d'intérêt sur la periode}})$ qui annule l'arbitrage

II – Théorèmes fondamentaux :

Resultats "intuitif"

Ingersoll (1989) : si 1 "machin" vaut 50 € alors 2 machins valent $1 qu'il aient été achetés ou non avec des "bidules"



① Hypothèses

on a 2 dates, 0 aujourd'hui, on fabrique les portefeuilles

1 futur : tout est dénoué (ce qui a été acheté en t=0 est vendu, ce qui a été vendu en t=0 est réacheté

on a N titres sur le marché $(a_1 \dots, a_N)$ le prix aujourd'hui de ces N titres est

$S_i \equiv S(a_i)$ et on pose $S' = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}$

on note $\Omega \equiv$ ensemble des états de la nature en t = 1, et pour $\omega \in \Omega$ on note $F_i(\omega)$ le flux financiers donné par l'actifs a_i en t = 1 dans l'état ω

– Nombre d'états de la nature $K \in \mathbb{N}^*$ $\Omega = \{\omega_1 \dots, \omega_K\}$

$F_{ik} = F_i(\omega_k)$ $\quad \mathcal{F} = [F_{ik}]_{\substack{i=1\dots N \\ k=1\dots K}} \in \mathcal{M}_{N,K}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F} = \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\text{états}} \\ \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & \dots & F_1(\omega_K) \\ \vdots & & \\ F_N(\omega_1) & \dots & F_N(\omega_K) \end{bmatrix} \end{array} \Big\updownarrow \text{actifs}$$

un portefeuille peut être représenté par un vecteur $X \in \mathbb{R}^N$ où X_i est le nombre d'actifs i acheté si $(X_i > 0)$ ou vendu si $(X_i < 0)$ en t = 0

prix du portefeuille en t = 0 $\quad P(0) = \sum_{i=1}^{N} X_i S_i = {}^tX S' = {}^tS' X$

prix du portefeuille en t = 1 dans l'état k $\quad P_1(\omega_k) = \sum_{i=1}^{N} X_i F_{ik}$

il y a arbitrage si $\exists X \in \mathbb{R}^N$ tel que $\quad \bullet\ {}^tS' X = X^t S' = 0 \quad \bullet\ \forall k \in \{1 \dots, K\}\ P_1(\omega_k) \geq 0$

$\Leftrightarrow {}^t\mathcal{F} X \geq 0_{\mathbb{R}^K} \quad \bullet\ \exists k \in \{1 \dots, K\}\ P_1(\omega_k) > 0 \Leftrightarrow {}^t\mathcal{F} X \mathbb{1}_K > 0$

Théorème :

il y a A.O.A sur un marché financier

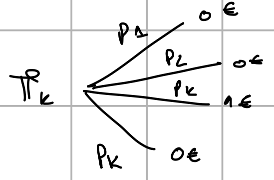
a) le prix d'un porte feuille représenté par le vecteur X en $t=0$ est $P_0 = \sum_{i=1}^{N} X_i S_i$

b) si pour $X \in \mathbb{R}^N$ on a ${}^t\mathcal{F}X \geq 0$, ${}^tX\,\mathcal{F}\,\mathbb{1}_K > 0$ alors ${}^tX S' > 0$

Si un porte feuille fournit dans le futur des flux ≥ 0 dans tous les états du marché et > 0 dans au moins 1 des états du monde alors son prix aujourd'hui est > 0

définition : Créance d'arrow - Debreu

on appelle C-A-D ou actif pur, un actif qui verse 1 € dans un des états du monde est en $t=1$ et 0 € dans tous les autres états on note π_k le prix en $t=0$ de la CA-D verse 1 € dans l'état k

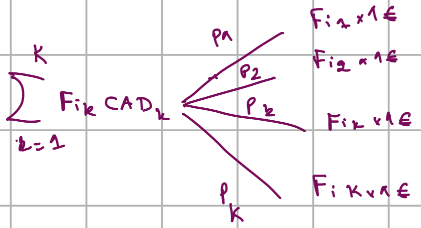


actif i = portefeuille qui contient F_{ik} CAD_k pour $k \in \{1, \dots, K\}$

Remarque : l'actif i verse un flux égal à $F_{ik} = F_i(w_k)$ dans l'état k

= le flux versé par F_{ik} CAD_k

s'il y a A.O.A sur le marché on doit avoir $S_i = \sum_{k=1}^{K} F_{ik}\pi_k$ ie : $S' = \mathcal{F}\pi$ ou $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_K \end{pmatrix}$



⚠ si deux actifs verse tout le temps le même flux alors leurs prix aujourd'hui est sûrement le même

Théorème :

Il y a AOA sur le marché financier ssi : $\exists \pi \in \mathbb{R}^K$ tel que

1) $S = \mathcal{F}\pi$

2) $\pi > 0$

démo $\Leftarrow$ (CS) $\exists \pi \in \mathbb{R}^K$, $\pi > 0$ et $S' = \mathcal{F}\pi$ soit un porte feuille représenté par $X \in \mathbb{R}^N$ $P_X = {}^tX S' = {}^tX\mathcal{F}\pi = {}^t\pi\,{}^t\mathcal{F}X$ si le porte feuille est un portefeuille d'arbitrage alors $P_X = 0$, ${}^t\mathcal{F}X \geq 0$ et au moins une lignes de ${}^t\mathcal{F}X$ est > 0

comme $\pi > 0$ ${}^t\pi\,{}^t\mathcal{F}X = \sum \pi_k$ (une ligne de ${}^t\mathcal{F}X$) > 0 donc $P_X > 0$ contradiction

CN ⇒ Je cherche le prix aujourd'hui minimum d'un portefeuille qui fournit en $t=1$ des flux ≥ 0 dans tous les états du monde

(P) : $\min\limits_{\substack{X \in \mathbb{R}^N \\ {}^t\mathcal{F}X \geq 0}} {}^tX S$ (simplexe)

≤ 0 car pour $X = 0_{\mathbb{R}^N}$ ${}^tXS = 0$ et ${}^t\mathcal{F}X = 0$ l'AOA implique le minimum $= 0$ car si ce n'est pas le cas : X^* solution et ${}^tSX^* < 0$ et ${}^t\mathcal{F}X^* \geq 0$ (je gagne de l'argent aujourd'hui, j'en perds jamais dans le futur

⇒ arbitrage

Conclusion : le portefeuille mini vaut 0 € car aujourd'hui et toutes les contraintes sont saturés

dual du problème (P) est (D) $\max\limits_{\substack{\pi \in \mathbb{R}^K \\ \mathcal{F}\pi \leq S}} {}^t0\pi$

les contraintes du primal sont saturées ⇒ les contraintes du dual sont saturées et donc

$\mathcal{F}\pi^* = S$

reste a montrer $\pi^* \geq 0$ (donc il faut se rappeler c'est quoi les variables dual)

comment je vois π_k^* dans le simplexe on a donc

π_k^* = de combien on améliore (dégrade) la solution du problème primal si on relache (resserre) la contrainte n° k d'une unité

si je resserre la contrainte k d'une unité c'est dire que dans l'état k le flux obtenu est ≥ 1 €

la contrainte se sature, le prix du portefeuille passe de 0 € à π_k^* = prix de la CAD$_k$ est ≥ 0

en modèle à 2 états

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 80 \\ 150 & 58 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_u \\ P_d \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} S \\ T \\ B \end{matrix} = \begin{cases} 120P_u + 80P_d \\ 150P_u + 58P_d \\ P_u + P_d \end{cases}$$

$$S_0 \begin{cases} \xrightarrow{p} S_{1u} = uS_0 \quad B_{1u} = r \quad B_0 = r \\ \xrightarrow{1-p} S_{1d} = dS_0 \quad B_{1d} = r \quad B_0 = r \end{cases}$$

$B_0 = \frac{1}{r}$

$u > d$

$p \in]0,1[$

$r > 0$

AOA ssi $\exists \pi > 0$ tq $S = \mathcal{F}\pi$ $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} uS_0 & dS_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$S = F^0 \Pi \Rightarrow \Pi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \frac{r-d}{r-u} \\ \frac{u-r}{r-d} \end{pmatrix}$

AOA ssi $\Pi > 0$ ssi $\frac{r-d}{r-u} > 0$ et $\frac{u-r}{r-d} > 0$ ssi $d < r < u$

⚠ si je fabrique un instrument financier tq $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $F_i = 1€$ j'ai le Z.C il vaut

$b_0 = \sum_{j=1}^{k} \Pi_j$

Remarques sur le th 2.2 :

R1 : les CAD n'existent pas obligatoirement sur le marché

R2 : Π est solution du système $S_{N\times 1} = F^0_{N\times k} \Pi_{k\times 1}$

3 Cas : a) Pas de solution $\Rightarrow$ arbitrage

ex :

$S_0 = 100$; $T_0 = 100$; $B_0 = \frac{1}{1{,}05}$

$1/2$: $S_{1u} = 120$; $T_{1u} = 130$; $B_{1u} = 1$; $P_0 = 0$

$1/2$: $S_{1d} = 80$; $T_{1d} = 70$; $B_{1d} = 1$; $P_{1u} = 2{,}5$; $P_{1d} = 0{,}5$

$P = -S + 0{,}7T + 30 \times 1{,}05\, B$

b) une solution unique - marché est complet

- il y a autant d'actifs financiers linéairement indépendants que d'états de la nature

si dans ce marché il y a plus d'actifs que d'état du monde, on peut répliquer un actif par un portefeuille d'autres actifs

$S_0 = 100$; $T_0 = 110$; $B_0 = \frac{1}{1{,}05}$

$1/2$: $S_{1u} = 120$; $T_{1u} = 150$; $B_{1u} = 1$

$1/2$: $S_{1d} = 80$; $T_{1d} = 58$; $B_{1d} = 1$

$T = \frac{23}{10} S - 120 \times 1{,}05\, B$

le système a une infinité de solution :

$\Rightarrow$ plus d'état de la nature futur que d'actifs linéairement indépendants,

$\Rightarrow$ on ne peut pas répliquer un actif en fonction des autres actifs

$\Rightarrow$ pas de système de prix unique

S_0 ? T_0 ? — 1/3, 1/3, 1/3

$S_{1u} = 120$, $T_{1u} = 150$

$S_{1m} = 100$, $T_{1m} = 110$

$S_{1d} = 80$, $T_{1d} = 58$

$\begin{cases} S_0 = 110 \\ T_0 = 132 \end{cases}$ AOA

$\begin{cases} S_0 = 100 \\ T_0 = 110 \end{cases}$ A.O.A

III –

① _Construction : Soit P un portefeuille représenté par le vecteur $X \in \mathbb{R}^N$ s'il y a A.O.A sur le marché, le prix P_0 aujourd'hui de ce portefeuille vaut

$$P_0 = {}^tX s' = {}^ts X \underset{A.O.A}{=} {}^t(F\pi)\, X = {}^t\pi\, ({}^tF X)$$

avec ces notations : $P_0 = ({}^t\mathbb{1}_K \pi_K)\, {}^tQ\, ({}^tF X)$ que représente ${}^tF X$?

$\Rightarrow$ Flux produit par le portefeuille P en $t=1$ dans chaque état de la nature

$P \equiv \sum_{i=1}^N x_i S_i$

$F(w_1) = \sum_{i=1}^N w_i F_i(w_1)$

$F(w_2) = \sum_{i=1}^N w_i F_i(w_2)$

$\vdots$

$F(w_k) = \sum_{i=1}^N w_i F_i(w_k)$

$\Rightarrow$ prix du Portefeuille en $t=1$ dans chaque état de la nature $= P(1) \in \mathbb{R}^K$

$$\rightarrow P_0 = ({}^t\mathbb{1}_K\pi)\, {}^tQ\, P(1) = ({}^t\mathbb{1}_K\pi) \sum_{k=1}^K Q_k P_1(w_k)$$

$P_1(w_k)$ = prix du portefeuille en $t=1$ dans l'état k

$$P_0 = ({}^t\mathbb{1}_K\pi)\, \mathbb{E}_Q(P(1))$$

que vaut ${}^t\mathbb{1}_K\pi$ $\sum_{k=1}^K \pi_k =$ prix aujourd'hui du portefeuille $\sum_{k=1}^K CAD_k$ = prix aujourd'hui de E.C $= \frac{1}{1+r_f}$ r_f : taux sans risque

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{1+r_f} \mathbb{E}_Q(P(1))$$

⚠ le prix d'un actif risqué = l'espérance de son prix en $t=1$ actualisé au taux sans risque

$\Rightarrow$ si on actualise au taux sans risque c-à-d pas de prime de risque

si on remplace la "vraie" probabilité ("on l'appelle historique) par la probabilité Q, les agents sont neutres vis-à-vis du risque $\Rightarrow$ Q est la proba risque neutre.

S'il y a AOA, le prix aujourd'hui de n'importe quel instrument financier est égal à l'espérance de sa valeur future actualisé au taux sans risque, si l'espérance est calculé sous proba risque neutre

② application : évaluation d'une option :

S_0 ; $B_0 = \frac{1}{r}$; $C_0 = ?$

p : $S_{1u} = u S_0$; $B_{1u} = 1$; $C_{1u} = (S_{1u} - K)^+$

$1-p$: $S_{1d} = d S_0$; $B_{1d} = 1$; $C_{1d} = (S_{1d} - K)^+$

$\Rightarrow$ AOA $d < r < u$

But : trouver le prix de l'option d'achat C en $t=0$

Méthode ① : $C = C_{1u}\, CAD_u + C_{1d}\, CAD_d$

donc le prix du portefeuille $C_0 = C_{1u}\Pi_u + C_{1d}\Pi_d = \frac{1}{r}\left[\frac{r-d}{u-d}(uS_0 - K)^+ + \frac{u-r}{u-d}(dS_0 - K)^+\right]$

Méthode ② : $C_0 = \frac{1}{r}\mathbb{E}_Q(C_1) = \frac{1}{r}\left[q_u C_{1u} + q_d C_{1d}\right]$

$\begin{pmatrix} q_u \\ q_d \end{pmatrix} = \frac{1}{{}^t\Pi\, \mathbb{1}_k}\begin{pmatrix} \Pi_u \\ \Pi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r-d}{u-d} \\ \frac{u-r}{u-d} \end{pmatrix}$

Méthode ③ Portefeuille qui réplique les flux de l'option raisonnement à la Black-Scholes

en $t=0$ je vends l'option $+ C_0$ €

j'achète Δ actions $- \Delta S_0$ €

en $t=1$ le portefeuille vaut : $C_{1u} - \Delta u S_0$ dans l'état u

$C_{1d} - \Delta d S_0$ dans l'état d

Pour que le portefeuille soit sans risque il faut $C_{1u} - \Delta u S = C_{1d} - \Delta d S$

$\Rightarrow \Delta = \frac{C_{1u} - C_{1d}}{(u-d)S_0}$

Δ pcq le E.C est sans risque $\Rightarrow$ pcq $E.C = 1 \; \forall \omega \in \Omega$

donc pour avoir un actif sans risque il doit avoir même valeur sur l'ensemble des états

si on choisit ce Δ, le prix aujourd'hui du portefeuille sans risque

$C_0 - \Delta S_0 = \frac{1}{r}(C_{1u} - \Delta u S_0) = \frac{1}{r}(C_{1d} - \Delta d S_0)$

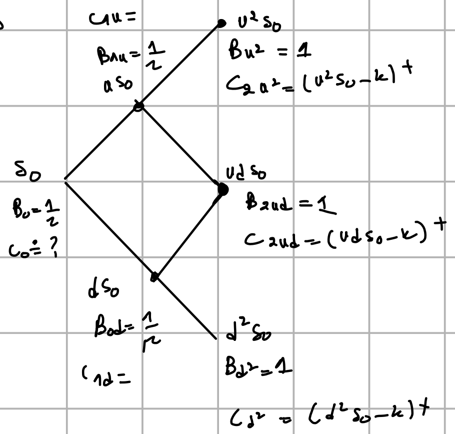
$C_0 = \Delta S_0 + \frac{1}{r}(C_{1u} - \Delta u S_0)$

Rmq : $\frac{1}{r} = B_0$ le prix du Z.C

$C_0 = \Delta S_0 + B_0 (C_{1u} - \Delta u S_0)$ donc $C = \Delta S' + (C - \Delta u S'_0) \beta$

__extension : plus de deux dates :__

3 dates



$$C_0 = \frac{1}{r^2} \mathbb{E}_Q (C_2)$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[q_{u^2} C_{2u^2} + q_{ud} C_{2ud} + q_{ud^2} C_{2d^2} \right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[q^2 C_{2u} + 2 q (1-q) C_{2ud} + (1-q)^2 C_{2d^2} \right)$$