Ex 4

Rappel : méthode de relaxation pour résoudre $Ax = b$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. On pose $A = L + D + U$ où L est triangulaire inf (stricte), D diagonale et U triang. sup. stricte
Soit ω le paramètre de relaxation.

$$(D + \omega L)\, x_{k+1} = [(1-\omega) D - \omega U]\, x_k + \omega b$$

Posons $\mathcal{L}_\omega = (D + \omega L)^{-1} [(1-\omega) D - \omega U]$

La méthode de relaxat° converge ssi $\underset{\text{rayon spectral}}{\rho(\mathcal{L}_\omega)} < 1$

$\rightarrow$ Mq meth rx° cv $\Rightarrow \omega \in]0, 2[$, ie $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1 \Rightarrow \omega \in]0, 2[$

Notons $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ les VP de $\mathcal{L}_\omega$. $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$ (hypothèse), donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| < 1$
Par ailleurs, $\det(\mathcal{L}_\omega) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, donc $|\det(\mathcal{L}_\omega)| < 1$.

Or,
$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \det\left[(D + \omega L)^{-1}((1-\omega) D - \omega U)\right]$$
$$= \frac{1}{\det(D + \omega L)} \det((1-\omega) D - \omega U)$$
$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} d_{ii}} \prod_{i=1}^{n} (1-\omega) d_{ii} = (1-\omega)^n$$

Donc $|\det(\mathcal{L}_\omega)| < 1 \iff 0 < \omega < 2$.

Ex 6

1. $J = I - D^{-1}A$ or, par def de A, $D = 2I$, donc $J = I - \frac{1}{2}A$
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit X_i un vecteur propre associé à la VP λ_i.

$$J X_i = (I - \tfrac{1}{2}A) X_i = X_i - \tfrac{1}{2}\lambda_i X_i = (1 - \tfrac{\lambda_i}{2}) X_i.$$

Donc les VP de J st $\mu_i = 1 - \frac{\lambda_i}{2}$, $1 \leq i \leq n$.

Ainsi, $\forall m \in [\![1, n]\!]$:

$$\left|1 - \frac{\lambda_m}{2}\right| = \left|1 - 2\sin^2\left(\frac{m\pi}{2(n+1)}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right|$$

$\rho(J) = \max\left(\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ (atteint en $m = 1$ et $m = n$)

Donc $\rho(J) < 1$: la méthode de Jacobi converge.

De plus, $\rho(J) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc la cv est lente qd la taille de la matrice est grande.

2. Comme A est tridiagonale, et que la méthode de Jacobi converge, alors la méthode de Gauss-Seidel cv et $\rho(G) = (\rho(J))^2 < \rho(J)$.

La mth de G-S cv plus vite que celle de Jacobi.

Ex 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ (tridiagonale).

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$.

$Jx = \lambda x \Leftrightarrow (I - D^{-1}A)x = \lambda x \Leftrightarrow (D-A)x = \lambda D x$.

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $-a_{i,i+1} x_{i+1} - a_{i,i-1} x_{i-1} = \lambda a_{ii} x_i$ (*)
(on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$).

Soient $\mu \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}^n$, $y \neq 0$.

$Gy = \mu y \Leftrightarrow -(D+L)^{-1} U y = \mu y \Leftrightarrow -Uy = \mu (D+L) y$

$\Leftrightarrow -Uy - \mu L y = \mu D y$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $-a_{i,i+1} y_{i+1} - \mu a_{i,i-1} y_{i-1} = \mu a_{ii} y_i$ (**)
(on pose $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = 0$).

Chg^t variable : On pose $x_i = \sigma^i y_i$, $\sigma \neq 0$.

Alors (*) $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $-a_{i,i+1} \sigma^{i+1} y_{i+1} - a_{i,i-1} \sigma^{i-1} y_{i-1} = \lambda a_{ii} \sigma^i y_i$
$\Leftrightarrow$ " " $-a_{i,i+1} \sigma y_{i+1} - a_{i,i-1} \sigma^{-1} y_{i-1} = \lambda a_{ii} y_i$
$\Leftrightarrow$ " " $-a_{i,i+1} y_{i+1} - a_{i,i-1} \sigma^{-2} y_{i-1} = \lambda \sigma^{-1} a_{ii} y_i$

On choisit donc σ tel que $\sigma^{-2} = \lambda \sigma^{-1}$, donc $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$.

Alors (*) $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $-a_{i,i+1} y_{i+1} - a_{i,i-1} \lambda^2 y_{i-1} = \lambda^2 a_{ii} y_i$.
↳ on retrouve (**) avec $\mu = \lambda^2$.

Donc $\lambda \neq 0$ est VP de J ssi $\lambda^2 \neq 0$ est VP de G.

D'où $\rho(G) = \rho(J)^2$.