Correction Feuille 3

Méthodes itératives pour systèmes linéaires

Exercice 1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de J associée à un vecteur propre x non nul, vérifiant donc $Jx = \lambda x$.

$$|\lambda|\|x\|_\infty = \|Jx\|_\infty \leqslant \|J\|_\infty \|x\|_\infty \;\Rightarrow\; |\lambda| \leqslant \|J\|_\infty. \tag{1}$$

D'où $\rho(J) \leqslant \|J\|_\infty$. De plus,

$$\|J\|_\infty = \max_i \sum_j |J_{ij}| = \max_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \tag{2}$$

car A est à diagonale strictement dominante. Tout ceci implique finalement que $\rho(J) < 1$; la méthode de Jacobi converge donc dans ce cas.
Remarque : on peut parler de a_{ii}^{-1} et donc de D^{-1} car $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geqslant 0$.

Exercice 2

1. Méthode de Jacobi :

$$J = I - A = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   On remarque que $(1\ 1\ 1)^T$ est vecteur propre de J pour la valeur propre $-\frac{3}{2}$. On en conclu que $\rho(J) > 1$, la méthode de Jacobi ne converge donc pas.

2. Méthode de Gauss-Seidel : on remarque que $(1\ 1\ 1)^T$ est vecteur propre de A pour la valeur propre $\frac{5}{2}$ et que

$$A - \frac{1}{4} I = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

   qui annule $(1\ -1\ 0)^T$ et $(1\ 0\ -1)^T$. C'est donc que $\mathrm{Sp}(A) = \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\} \subset \mathbb{R}_+^*$. A est finalement symétrique définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge donc.

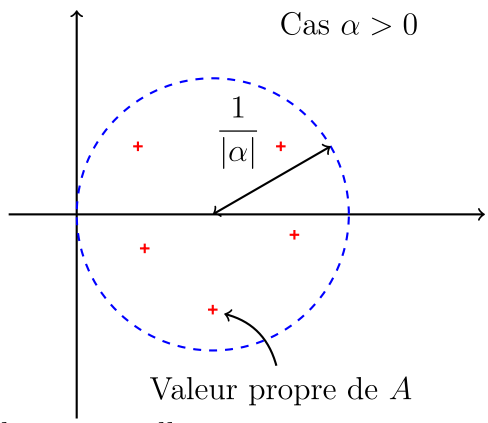
Exercice 3 On pose $R = I - \alpha A$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(R) \Leftrightarrow \det(R - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(I - \alpha A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det\left(A - \frac{1-\lambda}{\alpha} I\right) = 0 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\alpha} \in \mathrm{Sp}(A). \tag{6}$$

Ceci entraîne que la méthode de Richardson converge si et seulement si

$$\begin{aligned}
\rho(R) < 1 &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(R),\ |\lambda| < 1 && (7)\\
&\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathrm{Sp}(A),\ |1-\alpha\mu| < 1 && (8)\\
&\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathrm{Sp}(A),\ \left|\frac{1}{\alpha}-\mu\right| < \frac{1}{|\alpha|}. && (9)
\end{aligned}$$



Dans le cas où A possède à la fois des valeurs propres de partie réelle négatives et positives, la méthode de Richardson divergera quelque soit α. En revanche, si toutes les parties réelles des valeurs propres de A sont de même signe, on pourra toujours trouver une valeur de α tel que la méthode converge : il suffit de prendre $|\alpha| < \frac{1}{\rho(A)}$. L'inconvénient est que $\rho(R) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 1$: la vitesse de convergence de la méthode décroit lorsque α tend vers 0.

Exercice 4 On pose $S = (D+\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega U\right)$,

$$\begin{aligned}
\det(S) &= \frac{\det\left((1-\omega)D-\omega U\right)}{\det(D+\omega L)} = \frac{\det((1-\omega)D)}{\det(D)} = \frac{(1-\omega)^n\det(D)}{\det(D)} && (10)\\
&= (1-\omega)^n. && (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{SOR converge} \Leftrightarrow \rho(S) < 1 &\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}|\lambda_i| < 1 \Rightarrow |\det(S)| < 1 && (12)\\
&\Rightarrow |1-\omega|^n < 1 \Rightarrow |1-\omega| < 1 \Rightarrow \omega \in\ ]0;2[. && (13)
\end{aligned}$$

Exercice 5 Par convention, les quantités indicées avec les indices 0 ou $N+1$ sont nuls.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(G) &\Leftrightarrow \exists x \neq 0\ /\ Gx = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \neq 0\ /\ -Ux = \lambda(D+L)x && (14)\\
&\Leftrightarrow \exists x \neq 0\ /\ \lambda(D+L)x + Ux = 0 && (15)\\
&\Leftrightarrow \exists x \neq 0\ /\ \lambda a_{ii-1}x_{i-1} + \lambda a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} = 0,\ i = 1,\dots,N. && (16)
\end{aligned}$$

Soit $\mu \neq 0 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\mu \in \mathrm{Sp}(J) &\Leftrightarrow \exists y \neq 0\ /\ Jy = \mu y \Leftrightarrow \exists y \neq 0\ /\ (A-D)y + \mu D y = 0 && (17)\\
&\Leftrightarrow \exists y \neq 0\ /\ a_{ii-1}y_{i-1} + \mu a_{ii}y_i + a_{ii+1}y_{i+1} = 0,\ i = 1,\dots,N && (18)\\
&\Leftrightarrow \exists y \neq 0\ /\ a_{ii-1}\mu^{i+1}y_{i-1} + \mu^{i+2}a_{ii}y_i + a_{ii+1}\mu^{i+1}y_{i+1} = 0,\ i = 1,\dots,N && (19)\\
&\Leftrightarrow \exists z \neq 0\ /\ a_{ii-1}\mu^2 z_{i-1} + \mu^2 a_{ii}z_i + a_{ii+1}z_{i+1} = 0,\ i = 1,\dots,N && (20)\\
&\Leftrightarrow \mu^2 \in \mathrm{Sp}(G). && (21)
\end{aligned}$$

$$\rho(G) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(G)}|\lambda| = \max_{\mu^2\in\mathrm{Sp}(G)}|\mu|^2 = \left(\max_{\mu\in\mathrm{Sp}(J)}|\mu|\right)^2 = \rho(J)^2. \qquad (22)$$

On en conclu que, dans le cas d'une matrice A tridiagonale, si la méthode de Jacobi converge alors la méthode de Gauss-Seidel converge aussi mais plus rapidement puisque $\rho(G) = \rho(J)^2 < \rho(J)$ puisque $\rho(J) \in\ ]0;1[$.

Exercice 6 Méthode de Jacobi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(J) \Leftrightarrow \det(J-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det\left(I-\frac{1}{2}A-\lambda I\right)=0 \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(A-2(1-\lambda)I\right)=0 \Leftrightarrow 2(1-\lambda)\in \mathrm{Sp}(A). \tag{24}$$

$$\rho(J)=\max_m \left|1-\frac{1}{2}\lambda_m\right| = \max_m \left|1-2\sin^2\left(\frac{m\pi}{2(n+1)}\right)\right| = \max_m \left|\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right| \tag{25}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < 1. \tag{26}$$

Donc la méthode de Jacobi converge mais d'autant moins vite que n est grand puisque $\rho(J) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Méthode de Gauss-Seidel : d'après l'exercice précédent, puisque A est tridiagonale, $\rho(G)=\rho(J)^2=\cos^2\left(\frac{\pi}{n+1}\right)<1$. La méthode converge donc.
Remarque : on aurait aussi pu démontrer la convergence de la méthode de Gauss-Seidel en remarquant que A est symétrique définie positive.

Bonus Implémenter les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR (en fonction de ω) et Richardson (en fonction de α). Appliquer ces algorithmes à la recherche de la solution de $Ax=b$ où
- A est la matrice de l'exercice précédent
- x est tiré aléatoirement de manière à avoir accès à l'erreur $\|x_k-x\|$
- $b=Ax$.

Faire varier la dimension n et les paramètres α et ω. Quelle influence sur la vitesse de convergence ?