ENSIMAG 1ère année (2009-10) Méthodes Numériques

Examen du 12 Mai 2010

Durée : 3h.

Les seuls documents autorisés sont les notes du cours et des travaux dirigés de méthodes numériques. Les calculatrices sont interdites.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte pour l'évaluation des copies.

Exercice 1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On cherche à résoudre le système linéaire

$$A^2\, x = b, \tag{1}$$

avec $b, x \in \mathbb{R}^n$.

1. On considère une première méthode qui consiste à calculer A^2 puis résoudre (1) par la méthode de Cholesky. Donner un équivalent du coût de cet algorithme (nombre d'opérations arithmétiques élémentaires) lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer qu'on peut résoudre (1) sans calculer A^2, en utilisant la factorisation de Cholesky de A. Donner un équivalent du coût de cet algorithme lorsque $n \to +\infty$, et comparer son efficacité à celle de la méthode précédente lorsque n est grand.

Exercice 2 On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que f admet un minimum local en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, et que les valeurs propres de la matrice hessienne $H_f(\bar{x})$ sont strictement positives. Pour calculer numériquement $\bar{x}$ on considère l'algorithme du gradient à pas fixe

$$x_{k+1} = x_k - \rho\, \nabla f(x_k), \tag{2}$$

où $\rho > 0$ est un paramètre. On note par la suite $N_\rho(x) = x - \rho\, \nabla f(x)$.

1. Exprimer la matrice jacobienne $DN_\rho(\bar{x})$ en fonction de $H_f(\bar{x})$.

2. Montrer que pour tout ρ assez petit, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x_0 - \bar{x}\| < \eta$ alors $x_k \to \bar{x}$ quand $k \to +\infty$.

Exercice 3 **sur les "splittings" de matrices**

Dans toute la suite, A est une matrice (n, n) inversible à éléments réels, et b est donné dans $\mathbb{R}^n$. Soit $M - N = A$ un splitting de A (M inversible) auquel est associée l'itération suivante pour résoudre $Ax = b$:

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\ x^{k+1} = Tx^k + h \end{cases} \qquad \text{avec } T = M^{-1}N \text{ et } h = M^{-1}b.$$

On supposera le splitting convergent ($\rho(T) < 1$).

1. Montrer que la donnée de A et T définit M et N de façon unique (on explicitera M et N en fonction de A et T).

2. On considère alors deux splittings de A:

$$A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2 \qquad (M_1, M_2 \text{ inversibles })$$

et on pose: $T_1 = M_1^{-1}N_1$; $T_2 = M_2^{-1}N_2$; $h_1 = M_1^{-1}b$; $h_2 = M_2^{-1}b$.
On supposera les deux splittings convergents: $\rho(T_1) < 1$ et $\rho(T_2) < 1$.
Pour résoudre $Ax = b$, on considère l'itération:

$$(I) \qquad \begin{cases} x^0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\ M_1 x^{k+\frac{1}{2}} = N_1 x^k + b \qquad (\text{qui définit } x^{k+\frac{1}{2}}) \\ M_2 x^{k+1} = N_2 x^{k+\frac{1}{2}} + b \qquad (\text{qui définit } x^{k+1}). \end{cases}$$

Montrer que le passage de x^k à x^{k+1} s'exprime sous forme d'une itération linéaire:

$$x^{k+1} = Tx^k + h. \qquad (*)$$

On explicitera T et h, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de cette itération.

3. Montrer par un exemple (2,2) qu'il est possible d'avoir $\rho(T_1) < 1$, $\rho(T_2) < 1$ et $\rho(T) \geq 1$. Qu'en concluez-vous?

4. On note S la norme de matrice induite par une norme vectorielle de $\mathbb{R}^n$, notée $\| \;\|$:

$$S(Z) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Zx\|}{\|x\|}.$$

Monter que si $S(T_1) < 1$ et $S(T_2) < 1$ alors l'itération $(*)$ est convergente.

5. On va maintenant supposer que

$$\begin{cases} M_1 \text{ et } N_2 \text{ commutent} \quad (M_1 N_2 = N_2 M_1) \\ M_1 + N_2 \text{ est inversible} \end{cases}$$

et l'on reconsidère l'itération (I).
Montrer que l'on a:

$$(M_1 + N_2)^{-1} M_1 M_2 x^{k+1} = (M_1 + N_2)^{-1} N_2 N_1 x^k + b.$$

6. En déduire alors que l'itération (I) correspond à un splitting $A = M - N$ avec:

$$M = (M_1 + N_2)^{-1} M_1 M_2 \quad \text{ et } \quad N = (M_1 + N_2)^{-1} N_2 N_1.$$

Retrouver l'expression de $T = M^{-1}N$ en fonction de M_1, M_2, N_1, N_2.