TD 5 Probas

Rédacteurs : Nathan Gicquel, Chaimae Menouar, Youssef Benhachem
Relecteurs : Romain Pigret-Cadou, Baptiste Pierrard, Antonin Perez

08/11/2020

Questions de cours

- Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ssi :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $E(X) = \lambda$
- Théorème de transfert pour une loi discrète :

$$E[\varphi(X)] = \sum_{n \geq 0} \varphi(n) P(X = n)$$

- Formule de conditionnement pour une loi discrète :

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = \sum_{k \in \Omega} E[Y|X = k] P(X = k)$$

Exercice 1

Question 1

$$P(L = l | K = k) = \frac{P(L = l \cap K = k)}{P(K = k)} = \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l}$$

Question 2

On a :

$$
\begin{aligned}
P(L=l) &= \sum_{k=l}^{+\infty} P(L=l|K=k)P(K=k) \\
&= \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{k!}{l!(k-l)!} p^l (1-p)^{k-l} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{p^l}{l!} e^{-\lambda} \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{(1-p)^{k-l}}{(k-l)!} \lambda^k \\
&= \frac{p^l}{l!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m}{m!} \lambda^{m+l} \\
&= \frac{p^l}{l!} e^{-\lambda} \lambda^l \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m}{m!} \lambda^m \\
&= \frac{p^l}{l!} e^{-\lambda} \lambda^l e^{\lambda(1-p)}
\end{aligned}
$$

D'où

$$P(L=l) = \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda p}$$

$E[L] = \lambda p$ (Loi de poisson de paramètre λp)

Question 3

Soit M le nombre de buts marqués à la main,
loi de Poisson de paramètre $\lambda\epsilon$:

$$P(M=k) = \frac{(\lambda\epsilon)^k}{k!} e^{-\lambda\epsilon}$$

$$P(M \geq 1) = 1 - P(M=0) = 1 - e^{-\lambda\epsilon}$$

Exercice 2

Question 1

- Si le rat choisi la porte 1 il retourne au point de départ, ce qui incrémente de 1 minute le temps de trajet, d'où:

$$E[T|N=1] = 1 + E[T]$$

- S'il choisi la porte 2, alors de manière équiprobable :
  - Soit il sort en 2 minutes au total depuis le départ.
  - Soit il retourne au point de départ et il aura perdu 2 minutes d'aller retour.

  D'où

$$E[T|N=2] = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2}(E[T]+2) = 2 + \frac{1}{2}E[T]$$

- On obtient donc :

$$E[T] = \frac{1}{3}E[T|N=1] + \frac{2}{3}E[T|N=2] = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}E[T]$$

  D'où :

$$E[T] = 5$$

Question 2

- Soit $k \in \mathbb{N}$
  Pour que le temps passé soit égal à k , le rat doit passer d'un point à l'autre jusqu'à arriver sur le point s. Chaque passage d'un point à l'autre prend 1 min, d'où le lien avec T:

$$(\forall k \in \mathbb{N}), P(T \leq k) = P(X_k = s|X_0 = d)$$

  (lorsque le rat est sorti il ne rerentre pas dans le labyrinthe ce qui justifie $\leq$ et non =)

- On montre facilement à l'aide de la formule des probabilités totales que :

$$\begin{cases} P_{ds}^{k+1} = \frac{1}{2}P_{di}^{k} + \frac{1}{3}P_{dd}^{k-1}(1) \\ \\ P_{di}^{k} = \frac{2}{3}P_{dd}^{k+1}(2) \end{cases}$$

  De plus

$$P_{ds}^{k+1} = 1 - P_{dd}^{k+1} - P_{di}^{k+1}(*)$$

  Car les évènements $(X_{k+1} = s); (X_{k+1} = d); (X_{k+1} = i)$ sont deux à deux disjoints. Donc en utilisant (1) et (2) dans $(*)$, on déduit que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}*) P_{ds}^{k+1} = \frac{1}{3}(1 + P_{ds}^{k} + P_{ds}^{k-1})$$

- En remarquant que (1) est une solution particulière de l'équation ci-dessus, on obtient après calcul :

$$P(T \leq n) = 1 - \left(\left(\frac{1 + \frac{5}{\sqrt{13}}}{2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right)^n + \left(\frac{1 - \frac{5}{\sqrt{13}}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right)^n \right)$$

- Par calcul on conclut que :

$$E[T] = \sum_{n \geq 0} P(T > n)$$

$$E[T] = 5$$