TD n°8

Questions de cours

- Rappeler le principe d'une méthode de Monte-Carlo.

Exercice 1

Soient (U_n) et (V_n) deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes dans leur ensemble. On pose

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} X_n & = & 1 & \text{si } U_{2n} + V_{2n} \leq 1 \\ & & 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $Z_n = 4(X_1 + \cdots + X_n)/n$.

```
n <- 1000
u <- runif(n)
v <- runif(n)
plot(u, v, col = 1 +  (u^2 + v^2 > 1), pch = 19)
```

Question 1

- Déterminer la loi de la variable X_n.
- Calculer la variance de Z_n et montrer que la suite (Z_n) converge vers π.

Question 2

Soit $\alpha \in (0, 1)$ et $\epsilon > 0$.

- A l'aide de l'inégalité de Chebishev, déterminer un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathrm{P}(|Z_n - \pi| > \epsilon) \leq \alpha$$

- Ecrire un algorithme qui retourne une valeur approchée de π à 10^{-4} près, avec une probabilité supérieure à 0.95.

```
n <- 100000 #n'est pas la valeur demandée
u <- runif(n)
v <- runif(n)
```

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API | Printed with Pdfcrowd.com

```
4*mean(u^2 + v^2 < 1)
```

Question 3

On multiplie la variable Z_n par $\sqrt{n}$.

- Calculer la variance de la variable $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$. Cette variance converge-t-elle vers 0 ? Vers une constante ?
- Quelle loi connue fournit une bonne approximation de la loi de $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$?

```
rzn <- function(m=1,n=1000){
  zn <- NULL
  for (i in 1:m){
    u <- runif(n)
    v <- runif(n)
    zn <- c(zn, 4*mean(u^2 + v^2 < 1) )
  }
  return(zn)
}
z  <- sqrt(1000)*(rzn(10000) - pi)/sqrt(pi*(4-pi))
hist(z, prob = TRUE, col = "orange")
```

Exercice 2

On considère une suite (U_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$ et la fonction

$$\forall u \in (0,1), \quad \varphi(u) = \sqrt{(1-u)u^3}$$

Question 1

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(U_i)$$

- Montrer que la suite Y_n converge, au sens de la loi des grands nombres, vers la limite $\mathcal{I}$ définie ci-dessous

$$\mathcal{I} = \int_{10} \varphi(u) du$$

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com

On admettra que $\mathcal{I} = \frac{\pi}{16}$.

Question 2

- Calculer la variance de la variable aléatoire Y_n.
- Soit $\epsilon = 10^{-3}$. A l'aide du théorème de Chebyshev, donner une estimation du rang n à partir duquel on peut considérer que

$$\mathrm{P}(|Y_n - \mathcal{I}| < \epsilon) \geq 0.95$$

Question 3

On considère la loi de densité f définie sur l'intervalle $(0, 1)$ de la manière suivante

$$\forall v \in (0,1), \quad f(v) = 6v(1-v)$$

Soit (V_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi de densité f. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}.$$

- Montrer que la suite Z_n converge vers $\mathcal{I}$.
- Comparer la variance de la variable aléatoire Z_n à celle de la variable Y_n.

Question 4

- Proposer deux algorithmes de calcul de l'intégrale $\mathcal{I}$ s'appuyant sur les questions précédentes.
- Lequel vous semble le plus précis des deux pour n appels du générateur aléatoire ? Justifier.

```r
phi <- function(u){ sqrt((1-u)*u^3)}

# Algorithme 1
n <- 1000000
mean(y <- phi(runif(n)))
pi/16
var(y)

# Algorithme 2
n <- 1000000
f <- function(v){dbeta(v,2,2)}
```

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API | Printed with Pdfcrowd.com

```
u <- rbeta(n, 2, 2)
mean(z <- phi(u)/f(u))
pi/16
var(z)
```

Question 5

Soit $1 \leq \alpha \leq 3$. On considère désormais que f appartient à la famille de densités f_α définies sur l'intervalle $(0, 1)$ de la manière suivante

$$\forall v \in (0,1), \quad f_\alpha(v) = c_\alpha v^\alpha (1-v)$$

Loi $\text{beta}(\alpha+1,\ 2)$

- Montrer (ou admettre) que la constante c_α est égale à $(\alpha+2)(\alpha+1)$.
- A quel choix de α correspond l'algorithme de calcul de $\mathcal{I}$ le plus précis ?
- La précision est-elle supérieure à celle de l'algorithme s'appuyant sur la question 1 ?

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com