fiche 3 :

Exercice 1 : Pont Brownien :

1] Caractéristique du pont brownien entre 0 et 1 :

$\forall t \in [0,1] \quad B_t = W_t - tW_1$

a)

i) Mq B est un processus gaussien à trajectoire continue

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ tq $t_1 < t_2 < \ldots t_n$

On a $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad B_{t_i} = W_{t_i} - t_i W_1$

On pose $W_{n+1} = \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \\ W_1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \\ B_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \\ W_1 \end{pmatrix}$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

et comme W est M.B.S donc $\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \\ W_1 \end{pmatrix}$ est un ~~processus gau~~ vecteur gaussien

donc $\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \\ B_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien or $B_1 = 0$

donc $\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

Donc B est un processus gaussien **CQFD**.

* Comme W à trajectoire continue donc B aussi a un trajectoire continue.

ii) Mq $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et $cov(B_t, B_s) = s(1-t)$ $\forall s \leq t$

- $\mathbb{E}(B_t) = \mathbb{E}(W_t - tW_1) = \underbrace{\mathbb{E}(W_t)}_{0} - t\underbrace{\mathbb{E}(W_1)}_{0} = 0$

- $\forall s \leq t$,

$cov(B_t, B_s) = cov(W_t - tW_1, W_s - sW_1)$
$= cov(W_t, W_s) - s\,cov(W_t, W_1) - t\,cov(W_s, W_1) + ts\,cov(W_1, W_1)$
$= \Gamma(s,t) - s\Gamma(t,1) - t\Gamma(s,1) + ts\,\underbrace{var(W_1)}_{1}$

or $\Gamma(s,t) = s \wedge t$ et $W_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$

D'où

$\forall s \leq t$ $cov(B_t, B_s) = s - st - \cancel{ts} + \cancel{ts}$
$= s(1-t)$

Donc $\forall s \leq t$ $cov(B_t, B_s) = s(1-t)$

iii) Loi de B_t $\forall t \in [0,1]$:

soit $t \in [0,1]$

Comme B est un processus gaussien donc B_t suit une loi normale

et comme on a $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et
$cov(B_t, B_t) = t(1-t)$

Donc

$B_t \sim \mathcal{N}(0, t(1-t))$

(b) Mq : $B_t \perp\!\!\!\perp W_1$

Soit $t \in [0,1]$

On a $\begin{pmatrix} B_t \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t - tW_1 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \\ W_1 \end{pmatrix}$

or $\begin{pmatrix} W_t \\ W_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

donc $\begin{pmatrix} B_t \\ W_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

or $cov(B_t, W_1) = cov(W_t - tW_1, W_1)$

$= \underbrace{cov(W_t, W_1)}_{= t} - t\,\underbrace{cov(W_1, W_1)}_{= 1}$

$= t - t$

$= 0$

Donc on a $\begin{pmatrix} B_t \\ W_1 \end{pmatrix}$ vecteur gaussien et $cov(B_t, W_1) = 0$

Donc $B_t \perp\!\!\!\perp W_1$

c) * loi $W_t \mid W_1 = 0$:

On a $W_t \mid \{W_1 = 0\} = B_t + tW_1 \mid \{W_1 = 0\}$

$= B_t \mid \{W_1 = 0\}$

or $B_t \perp\!\!\!\perp W_1$

donc loi de $W_t \mid \{W_1 = 0\}$ est de m loi que B_t.

donc $W_t \mid \{W_1 = 0\} \sim \mathcal{N}(0, t(1-t))$.

2] Pont Brownien sur $[u,v]$:

Soient $0 \leq u \leq v$

$\forall\, t \in [u,v]$

$$B_t^{u,v} = (W_t - W_u) - \frac{t-u}{v-u}(W_v - W_u)$$

i) Mq $B^{u,v}$ p.g à trajectoire continue, centré

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in [u,v]^n$

On a $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$ $\quad B_{t_i}^{u,v} = (W_{t_i} - W_u) - \dfrac{t_i-u}{v-u}(W_v - W_u)$

$$B_{t_i}^{u,v} = \alpha_i W_u + W_{t_i} + \beta_i W_v$$

avec $\alpha_i = -1 + \dfrac{t_i-u}{v-u}$, $\quad \beta_i = -\dfrac{t_i-u}{v-u}$

et $\alpha_u = -1$ et $\beta_u = 0$ et $\alpha_v = 0$ et $\beta_v = -1$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} B_u^{u,v} \\ B_{t_1}^{u,v} \\ \vdots \\ B_{t_n}^{u,v} \\ B_v^{u,v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} W_u \\ W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \\ W_v \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & 0 & \cdots & \beta_u \\ \alpha_1 & 0 & 1 & (0) & \beta_1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & (0) & & & \beta_n \\ \alpha_v & 0 & \cdots & 0 & \beta_v \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} B_{u} \\ B_{t_1} \\ | \\ B_{t_n} \\ B_v \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien car $\begin{pmatrix} W_u \\ W_{t_1} \\ | \\ W_{t_n} \\ W_v \end{pmatrix}$ v.g

or $B_u = B_v = 0$

donc $\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ | \\ B_{t_n} \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

~~Donc~~ $\boxed{B^{u,v} \text{ processus gaussien}}$ CQFD

* Comme W_t à trajectoire continue donc $B^{u,v}$ à trajectoire continue.

* on a

$$\mathbb{E}(B_t^{u,v}) = \underbrace{\mathbb{E}(W_t)}_{0} - \underbrace{\mathbb{E}(W_u)}_{0} - \frac{t-u}{v-u}\underbrace{(\mathbb{E}(W_v) - \mathbb{E}(W_u))}_{0}$$

$$= 0$$

donc $B^{u,v}$ est centré.

ii) rq $B^{u,v} \perp\!\!\!\perp \sigma(W_s \mid 0 \le s \le u)$, $B^{u,v} \perp\!\!\!\perp \sigma(W_s, s \ge v)$.

* $B^{u,v} \perp\!\!\!\perp \sigma(W_s, 0 \le s \le u)$

mq $B_t^{u,v} \perp\!\!\!\perp W_s$ avec $t \in [u,v]$ et $s \le u$

on a $B_t^{u,v} = (W_t - W_u) - \frac{t-u}{v-u}(W_v - W_u)$

~~Comme W M.B.S donc~~ ~~$\begin{cases} W_t - W_u \perp\!\!\!\perp W_s - W_0 = W_s \\ \text{et} \\ W_v - W_u \perp\!\!\!\perp W_s - W_0 = W_s \end{cases}$ car $0 \le s \le u \le t \le v$~~

On a $B_t^{u,v} = W_t + \alpha W_u + \beta W_v$

avec $\alpha = -1 + \frac{t-u}{v-u}$ et $\beta = \frac{-(t-u)}{v-u}$

on a $\begin{pmatrix} B_u \\ B_t \\ W_s \\ B_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ W_t + \alpha W_u + \beta W_v \\ W_s \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_s \\ W_u \\ W_t \\ W_v \end{pmatrix}$

or $s \leq u \leq t \leq v$ donc $\begin{pmatrix} W_s \\ W_u \\ W_t \\ W_v \end{pmatrix}$ vecteur gaussien

donc $\begin{pmatrix} B_u \\ B_t \\ W_s \\ B_v \end{pmatrix}$ vecteur gaussien

or $B_u = B_v = 0$

donc $\boxed{\begin{pmatrix} B_t \\ W_s \end{pmatrix} \text{ est un vecteur gaussien}}$

pour montrer l'indépendance il suffit de montrer que
$\operatorname{cov}(B_t, W_s) = 0$

$\operatorname{cov}(B_t, W_s) = \operatorname{cov}(W_t + \alpha W_u + \beta W_v, W_s)$

$= \operatorname{cov}(W_t, W_s) + \alpha \operatorname{cov}(W_u, W_s) + \beta \operatorname{cov}(W_v, W_s)$

$= s + \alpha s + \beta s$

$= s(1 + \alpha + \beta)$ or $\alpha + \beta = -1$

$= s(1-1)$

$= 0$

donc $\operatorname{cov}(B_t, W_s) = 0$ et $\begin{pmatrix} B_t \\ W_s \end{pmatrix}$ v.g

Donc $B_t \perp\!\!\!\perp W_s$

or ceci étant pour tout $s \leq u$

Donc $\boxed{B_t \perp\!\!\!\perp \sigma(W_s, s \leq u)}$ CQFD.

* Mq $B^{u,v} \perp\!\!\!\perp \sigma(W_s, s \geq v)$

soit $s \geq v$ et $t \in [u, v]$

on a $B_t = W_t + \alpha W_u + \beta W_v$ avec $\begin{cases} \alpha = \frac{t-u}{v-u} - 1 \\ \beta = \frac{-(t-u)}{v-u} \end{cases}$

de même on a $\begin{pmatrix} B_t \\ W_s \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien

et
$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(B_t, W_s) &= \operatorname{cov}(W_t, W_s) + \alpha \operatorname{cov}(W_u, W_s) + \beta \operatorname{cov}(W_v, W_s) \\
&= t + \alpha u + \beta v \\
&= t + \left(\frac{t-u}{v-u} - 1\right) u + v\left(\frac{u-t}{v-u}\right) \\
&= \frac{t(v-u) + (t-\cancel{u} + \cancel{u} - v) u + v(u-t)}{v-u} \\
&= \frac{t(v-u) + (t-v) u + v(u-t)}{v-u} \\
&= \frac{\cancel{tv} - tu + \cancel{tu} - \cancel{vu} + \cancel{vu} - \cancel{vt}}{v-u} = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc

$\operatorname{cov}(B_t, W_s) = 0$ et $\begin{pmatrix} B_t \\ W_s \end{pmatrix}$ vecteur gaussien

Donc $B_t^{u,v} \perp\!\!\!\perp W_s$ or ceci étant pour tout $s \geq v$ et pour tout $t \in [u, v]$

donc $\boxed{B^{u,v} \perp\!\!\!\perp \sigma(W_s, s \geq v)}$

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$

On pose $Y = W_t \mid \{W_u = a, W_v = b\}$

On a

~~Y est / d. même loi que~~ $\cancel{(W_t - a) \sim \frac{t-u}{v-u}(b-a)}$

~~or / $W_t \sim \mathcal{N}(0,1)$~~

On a $W_t = B_t^{u,v} + W_u + \frac{t-u}{v-u}(W_v - W_u)$

$\cancel{W_t}\ Y = \cancel{B_t^{u,v}} \mid W_u = a, W_v = b$

$= B_t^{u,v} + a + \left(\frac{t-u}{v-u}\right)(b-a) \mid W_u = a, W_v = b$

or $B_t^{u,v} \perp\!\!\!\perp W_u, W_v$

donc Y suit m̂ loi que $B_t^{u,v} + a + \left(\frac{t-a}{v-a}\right)(b-a)$

or $B^{u,v}$ p.g donc $B_t^{u,v}$ suit une loi normale

$\mathbb{E}(B_t^{u,v}) = 0$

et $\mathrm{var}(B_t^{u,v}) = \mathrm{var}\left((W_t - W_u) - \frac{t-u}{v-u}(W_v - W_u)\right)$

~~or~~ $\cancel{W_t - W_u}$ ~~⫫~~ $\cancel{W_v - W_t}$

$B_t^{u,v} / \mathcal{F}$

$$\text{var}\left(B_t^{u,v}\right) = \text{cov}\left(W_t + \alpha W_u + \beta W_v \,,\, W_t + \alpha W_u + \beta W_v\right)$$

avec $\begin{cases} \alpha = \dfrac{t-v}{v-u} - 1 = \dfrac{t-v}{v-u} \\ \beta = \dfrac{u-t}{v-u} \end{cases}$ $(\alpha + \beta = -1)$

$$\text{var}\left(B_t^{u,v}\right) = t + \alpha u + \beta t + \alpha u + \alpha^2 u + \alpha\beta u + \beta t + \alpha\beta u + \beta^2 v$$
$$= t(1+2\beta) + u\left(\underbrace{2\alpha + \alpha^2 + \overset{-2\alpha-2\alpha^2}{2\alpha\beta}}_{-\alpha^2}\right) + \beta^2 v$$

donc

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

avec $\begin{cases} \mu = a + \dfrac{t-a}{v-a}(b-a) \\ \sigma^2 = \text{var}\left(B_t^{u,v}\right) \end{cases}$

or $\text{var}\left(B_t^{u,v}\right) = \dfrac{(v-t)(t-u)}{(v-u)}$.

3) Simulation $\max_{0 \le u \le t} W_u$

(a) W_t sur $[0,T]$

* $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ $t \in [0,T]$

donc $Z = \frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

donc on peut simuler Z par la methode de Box-Muller

$R \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$, $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$

$\sqrt{R}\sin(\Theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$

et par simulation de Z on trouve $W_t = \sqrt{t}\, Z$

(b) Simulation de M_t :

On a

$$\mathbb{P}(M_t \geq y \mid W_t = x) = e^{-\frac{2y(y-x)}{t}}$$

On a $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$

* On simule W_t
* Après on utilise la methode d'inversion pour simuler M_t

en inversant la fonction h :

$h(y) = e^{-\frac{2y(y-x)}{t}}$