Examen à mi-parcours

Mardi 23 novembre 2010 - 1h30

Documents manuscrits et calculatrice autorisés

Exercice 1

Déterminer si elle existe la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}dx$$

Exercice 2

Soit a, b, et L, des réels tels que $0 < a < b$ et $L > 0$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(xy)\ \chi_{[a,b]\times[0,L]}(x,y)$.
(χ désignant la fonction caractéristique)

1. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$

2. En déduire :

$$\lim_{L\to+\infty}\int_0^L \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx = \ln(\frac{b}{a})$$

Exercice 3

Calculer la transformée de Fourier de

$$f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\frac{x-\frac{1}{2}}{a})$$

où $a > 0$ et $\chi_{[-1/2,1/2]}$ est la fonction indicatrice de $[-1/2, 1/2]$.

Exercice 4

On considère $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$, l'espace mesuré où $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens sur $[0,1]$ et μ la mesure de Lebesgue. Soit E un intervalle ouvert de $[0,1]$ et χ_E sa fonction indicatrice.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $j = 1, \cdots 2^n$, on pose : $I_j^n =]\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}[$
(on notera que à n fixé, les I_j^n sont deux à deux disjoints de mesure 2^{-n} et que $[0,1] = \overline{\bigcup_j I_j^n}$).
On considère la fonction sur $[0,1]$:

$$h_n(x) = 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \mu(E \bigcap I_j^n)\ \chi_{I_j^n}(x)$$

1. Soit $K = \{\frac{j}{2^n}\ ;\ 1 \le j \le 2^n \ \ et \ \ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que la mesure de K est nulle.

2. Montrer que si $x \notin K$, alors x appartient à une suite décroissante d'ensembles $I_{j_n}^n$.

3. En déduire :

(i) Si x appartient à $E \setminus K$ (i.e. E privé de K), alors $h_n(x)$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.

(ii) Si x appartient à $[0,1] \setminus (E \bigcup K)$, alors $h_n(x)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

4. En déduire que $h_n(x)$ tend vers l'indicatrice de l'ensemble E presque partout.