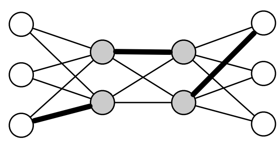
Ensimag, 1ère Année, 2016-2017
Recherche Opérationnelle
Examen du 16 mai 2017

Nom : Prénom : Groupe :

Barème : le QCM suivant comprend 30 questions. Il n'y a qu'une seule bonne réponse par question. Chaque réponse juste vous rapportera 1 point. Chaque réponse fausse vous 'rapportera' -2 points. Une absence de réponse comptera pour 0 points à la question. **Nous vous invitons donc à ne répondre à une question que si vous êtes absolument certain de votre réponse**. La note finale sur 30 sera ensuite ramenée sur 20.

Questions de théorie des graphes

Considérons le graphe suivant :



Question 1

Les arêtes en gras forment :
- ☐ Une chaîne augmentante
- ☐ Un arbre
- ☐ Un couplage

Question 2

Le graphe est biparti car :
- ☐ la taille d'un couplage maximum est égale à la taille d'un transversal minimum
- ☐ il n'y a pas de triangle
- ☐ il n'y a pas d'arête dans $E[N_i(\{u, v, w\})]$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ où u, v, w sont les trois sommets les plus à gauche sur la figure

Question 3

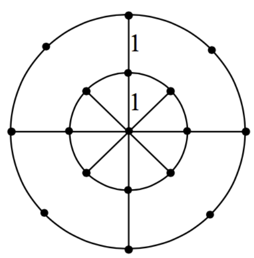
Dans ce graphe l'algorithme de König pour le couplage de cardinalité maximale va terminer avec un couplage de taille :
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

Question 4

Dans ce graphe, la taille d'un transversal minimum est égal à :
- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 4

Arbre de coût minimum

On considère le graphe suivant :



Les longueurs des arêtes sont les longueurs géométriques.

Question 5

L'arbre couvrant de coût minimum a un coût de
- ☐ $15\frac{\pi}{4} + 5$
- ☐ $12 + 4\frac{\pi}{2}$
- ☐ $8 + 8\frac{\pi}{4}$

Question 6

Il y a plusieurs arbres couvrants de coût minimum. En tout, il y en a :
- ☐ 16
- ☐ 16!
- ☐ 2^{10}

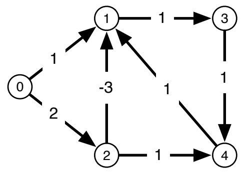
Question 7

Parmi les arbres couvrants de coût minimum, celui qui a le plus de sommet de degré 1 en a :
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 8

Algorithmes de plus court chemin

Question 8

L'algorithme de Dijkstra appliqué au graphe G suivant



en partant de 0, retournera :
☐ les plus courts chemins de 0 à tous les autres sommets
☐ les plus courts chemins de 0 à tous les autres sommets dans le graphe obtenu en supprimant l'arc $(2, 1)$ de G
☐ ni l'un ni l'autre

Question 9

L'algorithme d'ordre topologique appliqué au graphe G de la question précédente terminera avec :
☐ l'ordre topologique correspondant à la numérotation des sommets du graphe
☐ la detection d'un circuit
☐ un ordre topologique différent de la numérotation des sommets

Question 10

Après quelques étapes de l'algorithme de Bellman-Ford (sur le graphe de la question 8), on obtient les valeurs suivantes pour les plus courts chemins courants de 0 à tout sommet $[0, -1, 2, 2, +\infty]$ (dans l'ordre des sommets). Les valeurs à l'étape d'après seront :
☐ $[0, -1, 2, 0, 3]$
☐ $[0, -1, 2, 0, 1]$
☐ $[0, -1, 2, 2, 3]$

Question 11

On considère le problème d'ordonnancement des tâches A, B, C, D, E, F de durées respectives $7, 3, 5, 4, 2, 6$. Les précédences sont données dans le tableau suivant :

Tâche	A	B	C	D	E	F
Précédence	-	-	A,D	B	B,C	D

Si on pouvait raccourcir une des tâches d'une unité de temps, pour diminuer le temps total minimum d'exécution du projet on choisirait :
☐ la tâche A ☐ la tâche C ☐ la tâche F

Modélisation en Programmation Linéaire

Une entreprise fabrique trois qualités différentes d'huile d'olive. Les quantités maximales pouvant être vendues chaque mois ainsi que les prix de vente sont donnés dans le tableau suivant :

produit	ventes maximales	prix de vente
huile A	3000 litres	4€/litre
huile B	2600 litres	5€/litre
huile C	2000 litres	10€/litre

L'entreprise paie 900 € par tonne d'olives. Chaque tonne d'olives fournit soit 300 litres d'huile A, soit 200 litres d'huile B (les coûts de ces transformations n'interviennent pas dans la modélisation). Chaque litre d'huile A peut être raffiné pour produire 6 dl d'huile B et 2 dl d'huile C. Le coût d'un tel raffinement est de 0,6 € par litre. De même, chaque litre d'huile B peut être raffiné pour obtenir 8 dl d'huile C. Le coût de ce raffinement et de 0,8 € par litre. L'entreprise veut déterminer le plan mensuel de production qui maximise son profit net tout en ne produisant pas au delà de la demande maximale. On propose de modéliser le problème en utilisant les variables de décision suivante :
- x_A représente le nombre de tonnes d'olives pressé pour obtenir de l'huile de type A,
- x_B représente le nombre de tonnes d'olives pressé pour obtenir de l'huile de type B,
- y_A représente le nombre de litres d'huile de type A qui sont rafinés,
- y_B représente le nombre de litres d'huile de type B qui sont rafinés.

Question 12

La contrainte imposant que la production d'huile de type B ne peut pas dépasser la demande maximale s'écrit :

☐ $200x_B + 0.6y_A - y_B \leq 2600$
☐ $200x_B - y_B \leq 2600$
☐ $x_B + 0.6y_A - y_B \leq 2600$

Question 13

La fonction objectif s'écrit :

☐ $\max 300x_A + 200x_B + 0.4y_A + 2.2y_B$
☐ $\max x_A + x_B - y_A - y_B$
☐ $\max 300x_A + 100x_B + 0.4y_A + 2.2y_B$

Question 14

Supposons qu'on ne puisse pas raffiner plus de 5000 litres. Comment se modélise cette contrainte supplémentaire ?

☐ $x_A + x_B \leq 5000$
☐ $x_A + x_B - y_A - y_B \leq 5000$
☐ $y_A + y_B \leq 5000$

Question 15

Il faut imposer que la quantité d'huile de type A raffinée ne puisse pas être supérieure à la quantité d'huile de type A produite. Cette contrainte s'écrit :

- ☐ $x_A - y_A \geq 0$
- ☐ $300x_A - y_A \geq 0$
- ☐ $300x_A + 0.6y_B - 0.8y_A \geq 0$

Question 16

Supposons qu'une huile ne puisse pas être raffinée deux fois. Il suffit alors de modifier la contrainte sur la quantité d'huile de type B qui peut être raffinée en :

- ☐ $200x_B - y_B \geq 0$
- ☐ $200x_B + 0.6y_A - y_B \geq 0$
- ☐ $200x_A - 0.8y_B \geq 0$

Question 17

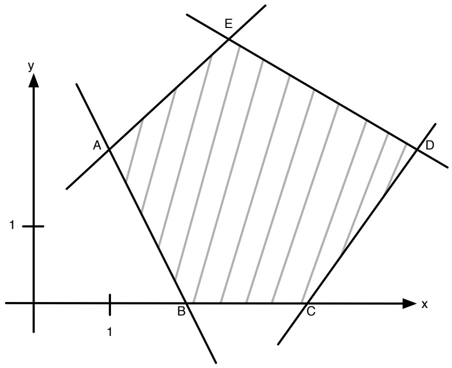
On peut modeliser une fonction objectif du type min $|x + 3y|$ en programmation linéaire en :

- ☐ ajoutant la contrainte $x + 3y \geq 0$
- ☐ oubliant la valeur absolue
- ☐ ajoutant au PL une variable auxiliaire t, des contraintes $t \geq x + 3y, t \geq -x - 3y$ et en minimisant t

Questions de Programmation Linéaire

Question 18

Sur le dessin suivant, on a hachuré le domaine réalisable d'un PL dans les variables x et y.



Si la fonction objectif est $\min 2x - y$, la solution optimale est :
☐ le point A
☐ le point B
☐ le point D

Question 19

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & x_1 & - & 2x_2 & & \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

Le problème sous forme standard associé est :
☐ $\min\{x_1 - 2x_2 : x_1 + x_2 - y_1 = 3, 2x_1 - 3x_2 + y_2 = 4, x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0\}$
☐ $\min\{x_1 - 2x_2 : x_1 + x_2 + y_1 = 3, 2x_1 - 3x_2 + y_2 = 4, x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0\}$
☐ $\min\{x_1 - 2x_2 : x_1 + x_2 - y_1 = 3, 2x_1 - 3x_2 - y_2 = 4, x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0\}$

Question 20

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & x_1 & - & 2x_2 & & \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & = & 2 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

Le problème auxiliaire associé (Phase I) est :
☐ $\min\{y_1 + y_2 : x_1 + x_2 + y_1 = -1, 2x_1 - 3x_2 + y_2 = 2, x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0\}$
☐ $\min\{y_1 + y_2 : x_1 + x_2 - y_1 = -1, 2x_1 - 3x_2 + y_2 = 2, x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0\}$
☐ $\min\{x_1 - 2x_2 : x_1 + x_2 + y_1 = -1, 2x_1 - 3x_2 + y_2 = 2, x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0\}$

Question 21

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \\ & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 2 \\ & x_1 \geq 0, & & x_2 \leq 0 & & & & \end{array}$$

Le problème dual associé est :

☐ $\min\{4y_1 - 2y_2 + 2y_3 : y_1 - y_2 - y_3 \geq 1, y_1 + 3y_2 - y_3 \leq -1, -2y_1 + y_2 + 2y_3 = 1, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0\}$
☐ $\min\{4y_1 - 2y_2 + 2y_3 : y_1 - y_2 - y_3 \leq 1, y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -1, -2y_1 + y_2 + 2y_3 = 1, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0\}$
☐ $\min\{4y_1 - 2y_2 + 2y_3 : y_1 - y_2 - y_3 \geq 1, y_1 + 3y_2 - y_3 \leq -1, -2y_1 + y_2 + 2y_3 = 1, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0\}$

Question 22

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{llllll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Si vous pouviez choisir entre ajouter une unité à la première ressource (c.à.d. passer de 7 à 8 dans la première contrainte) ou 0.4 unité à la seconde ressource (c.à.d. passer de 8 à 8.4 dans la deuxième contrainte), vous choisiriez :

☐ d'augmenter la première
☐ d'augmenter la seconde
☐ ni l'une, ni l'autre

Question 23

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ s.c. & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

En utilisant le théorème des écarts complémentaires, vous pouvez justifier que la solution réalisable $x_1 = 2, x_2 = 3$ est une solution optimale du PL car

☐ $3y_1 + y_2 = 1, 2y_1 + 2y_2 = 1$ admet une unique solution
☐ $3y_1 + y_2 = 1, 2y_1 + 2y_2 = 1, y_1, y_2 \geq 0$ admet une solution
☐ $3y_1 + y_2 \geq 1, 2y_1 + 2y_2 \geq 1, y_1, y_2 \geq 0$ admet une solution

Algorithme du Simplexe

NB : Dans cette section, les tableaux sont donnés comme ils ont été présentés en CM. Pour ceux qui ont fait les TDs avec M. Bienia, il suffit de multiplier la dernière ligne par -1 (sauf pour le coefficient de z).

Question 24

Considérons le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	RHS
0	0	0	-1	1	0	2
1	0	1	-1	0	0	1
0	1	-2	1	0	0	-1
0	0	-2	1	0	1	0

La solution de base associée est :
- ☐ réalisable mais non optimale
- ☐ non réalisable
- ☐ optimale

Question 25

Considérons le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	RHS
0	0	0	-1	1	0	2
1	0	1	1	0	0	1
0	1	-2	-1	0	0	0
0	0	-2	1	0	1	0

La prochaine itération du simplexe va :
- ☐ détecter que le progamme linéaire associé est non borné
- ☐ détecter que le progamme linéaire associé est irréalisable
- ☐ déterminer une nouvelle base réalisable qui est optimale

Question 26

Considérons le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	RHS
0	0	0	-1	1	0	3
1	0	-1	1	0	0	0
0	1	-1	-1	0	0	0
0	0	-2	1	0	1	0

La prochaine itération du simplexe va :
- ☐ détecter que le progamme linéaire associé est dégénéré
- ☐ détecter que le progamme linéaire associé est non borné
- ☐ déterminer une nouvelle base réalisable qui est optimale

Question 27

Considérons le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	RHS
0	0	0	-1	1	0	3
1	0	-1	1	0	0	0
0	1	-1	-1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0

On peut conclure immédiatement que :
☐ la solution de base associée est optimale
☐ le problème est non bornée
☐ ni l'un ni l'autre, le tableau n'est pas sous la bonne forme

Question 28

Considérons le tableau suivant. Les variables x_i sont les variables d'origine et les variables y_j les variables auxiliaires. Le problème d'origine consiste à minimiser $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	RHS
1	0	2	0	3	1	0	0
0	0	-1	1	1	0	0	2
0	1	1	0	-1	2	0	1
0	0	0	0	1	1	1	0

A ce stade de la Phase I, on peut :
☐ conclure que le problème d'origine n'est pas réalisable
☐ Démarrer la phase II avec comme tableau initial (a)
☐ Démarrer la phase II avec comme tableau initial (b)

x_1	x_2	x_3	x_4	z	RHS
1	0	2	0	0	0
0	0	-1	1	0	2
0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

(a)

x_1	x_2	x_3	x_4	z	RHS
1	0	2	0	0	0
0	0	-1	1	0	2
0	1	1	0	0	1
0	0	-2	0	1	-3

(b)

Theorie des jeux

Question 29

Considérons le jeu à deux joueurs à somme nulle donné par la matrice des gains suivante (les gains sont ceux du joueur jouant les lignes).

1	-1	0
-2	2	-1

☐ Le jeu admet un point d'équilibre en stratégie pure.
☐ Le jeu n'admet pas de point d'équilibre en stratégie pure.
☐ Le jeu n'admet pas de point d'équilibre en stratégie mixte.

Question 30

Considérons le jeu à deux joueurs à somme nulle donné par la matrice des gains suivante (les gains sont ceux du joueur jouant les lignes).

2	-1	0
-3	2	-1

La stratégie optimale du joueur X (jouant les lignes) est solution du PL :
☐ $\max\{t : t \leq 2x_1 - 3x_2, t \leq -x_1 + 2x_2, t \leq -x_2, x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0\}$
☐ $\min\{t : t \leq 2x_1 - 3x_2, t \leq -x_1 + 2x_2, t \leq -x_2, x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0\}$
☐ $\min\{w : w \geq 2y_1 - y_2, w \geq -3y_1 + 2y_2 - y_3, y_1 + y_2 + y_3 = 1, y_1, y_2, y_3 \geq 0\}$