

# Feuille de TD n.11 de IPD 2022-2023, Ensimag 2A IF

H. Guiol

**Exercice 1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $B = (B_t)_{0 \leq t}$  un mouvement brownien standard. On se place dans les conditions habituelles et on notera  $(\mathcal{F}_t)_{T \geq t \geq 0}$  la filtration naturelle (complétée) de  $B$ , on supposera de plus que  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ .

On rappelle que dans ces conditions  $\mathcal{F}_0$  est la tribu triviale complétée par tous les  $\mathbb{P}$ -négligeables.

1. Soit  $Z$  une v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurable et de carré intégrable, on note  $m$  sa moyenne. On considère  $M = (M_t)_{T \geq t \geq 0}$  le processus défini par  $M_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

1.1. Que vaut  $M_0$ ? Quel est  $M_T$ ?

1.2. Montrer que  $M$  est une martingale de carré intégrable.

1.3. Justifier qu'il existe un processus  $H$  dont on précisera les propriétés tel que  $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$ .

1.4. En déduire  $\langle M \rangle_t$ .

2. À partir d'ici on suppose que  $Z = \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma B_T)$  où  $r \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ .

2.1. Calculer explicitement  $M_t$ ,  $\mathbb{E}(M_t)$ ,  $\mathbb{E}(M_t^2)$  et  $\mathbb{E}(M_t^4)$ .

2.2. Ecrire la décomposition d'Itô de  $M$ .

2.3. En déduire  $\langle M \rangle_t$  justifier qu'il s'agit bien d'un processus croissant adapté et calculer  $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$ .

2.4. On pose  $N_t = M_t^2 - \langle M \rangle_t$ , quelle est la nature du processus  $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$ ?

2.5. Calculer  $\mathbb{E}(N_t)$  et retrouver  $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$ .

2.6. Trouver la décomposition d'Itô de  $N_t$  et en déduire  $\langle N \rangle_t$  et  $\mathbb{E}(\langle N \rangle_t)$ .

**Exercice 2.** Soient  $W$  un  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ -M.B.S. et  $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{*,+}$  des fonctions déterministes continues sur  $[0, T]$ . On considère le processus  $S$  défini pour tout  $t \in [0, T]$

$$S_t = s_0 \exp \left( \int_0^t \left( \mu(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \right)$$

où  $s_0 > 0$  est une constante.

(a) Quelle est la loi de  $\log(S_t)$ , préciser ses paramètres. En déduire la loi de  $S_t$  en précisant son espérance et sa variance.

(b) Trouver l'équation différentielle satisfaite par le processus  $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ .

(c) Montrer qu'il existe  $\widetilde{W}$  un  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ -M.B.S sous une probabilité  $\mathbb{Q}_T$  que l'on précisera tel que

$$dS_t = \sigma(t) S_t d\widetilde{W}_t$$

(d) En déduire que  $S$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}_T$ . Donner  $\langle S \rangle_t$  et  $\mathbb{E}(\langle S \rangle_t)$ .

**Exercice 3. Put Européen.**

Un put européen de strike  $K$ , de maturité  $T$  sur le titre  $S$  est une option de vente de payoff  $h = (K - S_T)_+$ . Calculer son prix et sa couverture dans le modèle de Black-Scholes-Merton sans utiliser la formule de parité Call-Put.