exo7. emath. fr   ch-int.pdf ($\int$ de Riemann)   M@ths en Ligne (Bernard Icart) cvu

Analyse p. l'ingénieur

Valérie PERRIER @ grenoble-inp.fr

Utilisat° de Jupiter | intégrer Python - LaTex
C2 : Transformée de Fourier
C3 : EVN

Rqe : - 12h 13h30 - permanence
- Regarder les annales (celles de 2017, 2016 mar)
- exo7 : calcul d'intégrale, limites, suites
Examen toute l'$\int$.

C1 : Intégrale de Lebesgue

poly de cours : chamillo/Analyse/Doc/poly-ana

(f^n non $\mathcal{C}^0$)

Historique : 1820 : Intégrale de Cauchy (f^n $\mathcal{C}^0$)
1854 : Riemann : f^n "réglées" (f^n en escalier & leur limite)
1901 : Lebesgue : construct° $\neq$: f^n "étagées"

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}pm$ le calcul Riemann & Lebesgue se recoupe ds le cas des $\mathcal{C}pm$.
Alors $\underbrace{\int_a^b f}_{\text{Riemann}} = \underbrace{\int_a^b f}_{\text{Lebesgue}}$

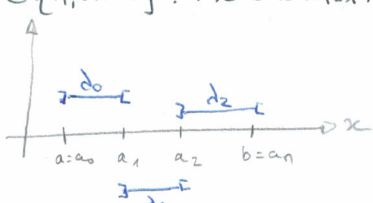
I - "Rappel" de la construction de l'intégrale de Riemann

A) Principe

Def : f^n en escalier $= \mathcal{E}([a,b])$

(i) subdivision de $[a,b]$: tout $n+1$-uplet $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$ tq $a_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$

(ii) Soit f def sur $[a,b]$ à val ds $\mathbb{R}$
f est en escalier si $\exists\ \sigma = (a_0, \dots a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et $d_1, \dots d_n \in \mathbb{R}^n$ tq
$\forall i \in \{1, \dots n\} : \forall x \in]a_{i-1}, a_i[: f(x) = d_i$



On écrit aussi $f = \sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{]a_{i-1}, a_i[}$

Avec la notation : $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (f^n caractéristique)

(iii) L'intégrale de f relativement à $\sigma = (a_0, \dots a_n)$ est $I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} d_i (a_i - a_{i-1})$ (somme des aires des rect)

Rqe : . Si $f \in \mathcal{E}([a,b])$ le choix de σ n'est pas unique : (on peut choisir $\neq$ subdivisions)
. $I(f, \sigma)$ ne dpt pas du choix de σ. noté $I(f) = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$
. $\forall f, g \in \mathcal{E}([a,b]) : f + g \in \mathcal{E}([a,b])$

Propriétés de I : a) linéarité : $\forall f, g \in \mathcal{E}([a,b]) : \forall d \in \mathbb{R} : \int_a^b (f + dg) = \int_a^b f + d\int_a^b g$

b) croissance : $\forall f, g \in \mathcal{E}([a,b]) : f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

c) $\forall f \in \mathcal{E}([a,b]) : \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Def : f^n int. de Riemann : $\mathcal{J}([a,b])$
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est R-int si $\forall \varepsilon > 0 : \exists\ \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ tq $\begin{cases} |f - \phi_\varepsilon| < \psi_\varepsilon \\ \text{et } \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon \end{cases}$
Dans ce cas on def $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \phi_\varepsilon$

Rqe : $|f - \phi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon$
$\Leftrightarrow\ -\psi_\varepsilon \leq f - \phi_\varepsilon < \psi_\varepsilon$ ε_1 ε_2
$\Leftrightarrow\ \underbrace{-\psi_\varepsilon + \phi_\varepsilon}_{\in \mathcal{E}} < f < \underbrace{\psi_\varepsilon + \phi_\varepsilon}_{\in \mathcal{E}}$

Rqe : $f \in \mathcal{J}([a,b]) \Rightarrow f$ bornée

$\exists M > 0, \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$

Dem : $\varepsilon > 0$, f est majorée par la f^n en escalier $\phi_\varepsilon + \psi_\varepsilon$ et une f^n en escalier est bornée (nbr fini de valeurs)

Ex de f^n R-intégrable (Riemann)

1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

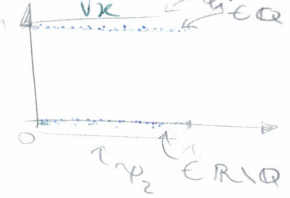
2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$pm (ie $\exists\ \sigma = (a_0, \dots a_n)$ subdivision de $[a,b]$ tq $\cdot \forall i \in [\![0, n-1]\!] : f\ \mathcal{C}^0$ sur $]a_i, a_{i+1}[$

$\cdot \forall i \in [\![1, n-1]\!]$: f admet une limite à g & à d.

f admet une lim | à droite en a.
| à gauche en b.

Ctr-ex de f^n R-intégrable

- f^n non bornées sur $[a,b]$. (ex : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas bornée sur $[0,1]$ donc $\notin \mathcal{J}([0,1])$)
- $f(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$



On prend $\psi_1 \geq \min = 1$

$\psi_2 \quad \max = 0$

Donc $\int_0^1 \psi_1 - \psi_2 \geq 1$

Donc $\not\to 0$

2) Th. de convergence pour l'intégrale de Riemann.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $f^n : [a,b] \to \mathbb{R}$

Th : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de f^n intégrables (au sens Riemann) sur $[a,b]$ tq

- $(f_n) \xrightarrow[{[a,b]}]{CVU} f$

Alors : (i) f est R-intégrable sur $[a,b]$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Rappel : $(f_n) \xrightarrow{CVU} f$ si : $\cdot \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ou $\cdot \lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ (où $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$ pour g bornée)

ex/ctrex :

- $f_n : x \mapsto x^n . e^{-x^2}$ sur $[0,1]$

f non $\mathcal{C}^0$ donc $f_n \xrightarrow{\cancel{CVU}} f$

$\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$

$f_n \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ e^{-1} \text{ si } x = 1 \end{cases}$ $\quad x^n \to 0$

Soit $a \in [0,1[$: $f_n : \begin{array}{l} [0,a] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n e^{-x^2} \end{array}$ (donc $\sup_{[0,a]} |f_n - f| \leq a^n \to 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

Soit $x \in [0,a]$: $|f_n(x) - f(x)| = |x^n e^{-x^2}| \leq a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $(f_n) \xrightarrow[{[0,a]}]{CVU} f$ donc $\lim_{n \to +\infty} \int_0^a x^n e^{-x^2} dx = \int_0^a f(x)\,dx = 0$

3) Intégrales impropres (au g^{al})

(i) On veut integrer sur un intervalle non borné.

Soit f une f^n R-intégrable sur $[a,R]$ $(R>a)$

Si $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ existe et est finie, notée $\lambda\in\mathbb{R}$, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ est semi-convergente (SC) et on écrit : $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lambda = \lim\limits_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx$

(ii) Cas où f int sur $[a+\varepsilon, b]$ mais non int. sur $[a,b]$.

Si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f$ existe et est finie, on dit que $\int_a^b f$ est SC et $\int_a^b f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f$

Int. de Riemann : $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha>0$

(1) $[1,+\infty[$: $\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^R = \frac{R^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha<1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha>1 \end{cases}$

$\alpha=1$: $\int_1^R \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^R = \ln R \xrightarrow[R\to+\infty]{} +\infty$ DV

(2) $\alpha\neq 1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{-\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{-\alpha+1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \\ +\infty & \text{si } \alpha>1 \end{cases}$ donc $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ est SC p. $\alpha<1$

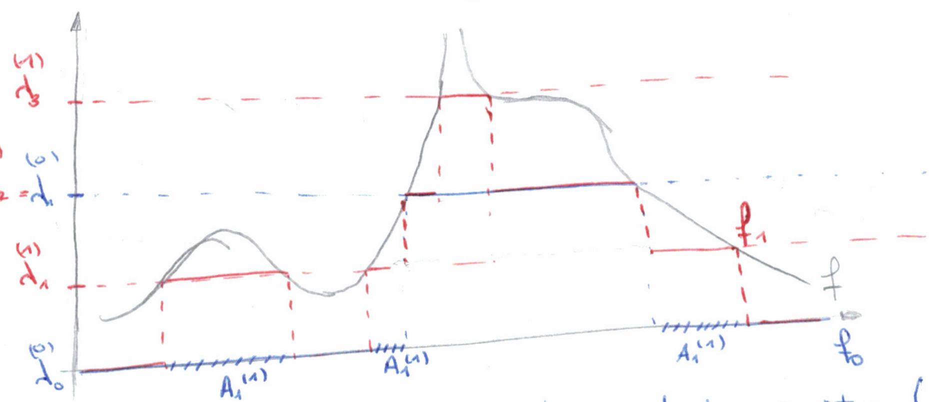
$\alpha=1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$ DV

II. Construction de l'intégrale de Lebesgue

1) Principe (schéma)

$f : \mathbb{R} \to [0,+\infty] = \overline{\mathbb{R}_+}$ $\quad f\geq 0$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f_0(x)\leq f_1(x)\leq f(x)$



On raffine les niveaux en construisant des suites $(\lambda_n^{(k)})_{n\in I_k}$ (k^e raffinement) $\{\lambda_n^{(k-1)}, n\in I_{k-1}\}\subset\{\lambda_n^{(k)}, n\in I_k\}$, $I_k\subset\mathbb{N}$ (fini)

et une suite (f_k) de f^n tq $f_k\leq f_{k+1}\leq f$ $\forall k$

f_k s'écrit : $f_k(x) = \sum\limits_{n\in I_k} \lambda_n^{(k)}\chi_{A_n^{(k)}}$

$A_n^{(k)} = \{x\in\mathbb{R},\ \lambda_n^{(k)}\leq f(x) < \lambda_{n+1}^{(k)}\} \overset{\text{def}}{=} f^{-1}([\lambda_n^{(k)}, \lambda_{n+1}^{(k)}[)$ ensembles mesurables (si f mesurable) ($\neq$ intervalle en g^{al})

f_k : f^n étagée (⚠ $\neq$ escalier-Riemann)

Rappel : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ croissante ($u_n \leq u_{n+1}\ \forall n$)
- Soit (u_n) est majorée ($u_n \leq M, \forall n$) et alors, $\exists\, d \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = d$
- Soit (u_n) n'est pas majorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Rqe : Dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, la suite (u_n) cv

$x \in \mathbb{R}$ fixé : $(u_k = f_k(n))_{k\geq 0}$ suite de $\mathbb{R}_+$, $\nearrow$ donc elle cv ds $\overline{\mathbb{R}_+}$ (vers $f(x)$)

En effet : - soit $f(x) \in \mathbb{R}_+$, c'est un majorant de la suite. } pas une démo.
- soit $f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_k(x) = +\infty$

Dans ce cas, on définit $\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_k}_{\text{Lebesgue}} = \sum\limits_{n\in I_k} d_n^{(k)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \chi_{A_n(k)}}_{\text{mesure } (A_k)}$

Construction de l'intégrale :

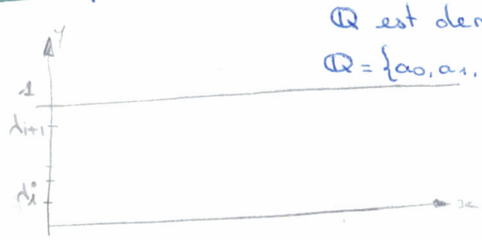
1) On def des Tribus (ensembles mesurables) Boréliens $\subset \mathbb{R}$ (cf annexe)
2) On def une mesure (de Lebesgue)
3) f^n mesurables
4) Construct° de l'intégrale par la suite de f^n étagées (f_k).

Dans le cours on ne manipule que des mesurables. (ens, f^n)

ex : $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ $\quad$ $\mathbb{Q}$: rationnels $= \{\frac{p}{q}, p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}^*\}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est dénombrable (en biject° avec $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ donc avec $\mathbb{N}$)

$\mathbb{Q} = \{a_0, a_1, \dots\}$



$$f^{-1}([d_i, d_{i+1}]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } d_i > 1 \\ \mathbb{Q} & \text{si } d_i \leq 1 < d_{i+1} \\ \emptyset & \text{si } 0 < d_i < d_{i+1} < 1 \\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} & \text{si } d_i = 0 \text{ et } d_{i+1} < 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } d_i = 0 \text{ et } d_{i+1} \geq 1 \end{cases}$$

2) Axiomatique

Avertissement : - On admet l'existence de l'intégrale p. les f^n positives le reste en découle
- On admet que tts les f^n considérées st mesurables.

Intégrale d'une fonction ≥ 0 : existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

On admet qu'il existe une app :

$$I : \mathcal{F}(\mathbb{R}^N; \overline{\mathbb{R}_+}) = \{f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$
$$f \longmapsto I(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx$$

vérifiant : (a) I linéaire : $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$: $\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g$

(b) I croissante : $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$, $f \leq g$ alors $\int_{\mathbb{R}^N} f \leq \int_{\mathbb{R}^N} g$

(c) Relation avec le volume :

$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$ hypercube

alors $\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A = \underbrace{\prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)}_{\text{volume de } A.}$

(d) I verifie le th de cv monotone (TCM) :

Soit $f_n : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ ($n \geq 0$)
Si (f_n) est une suite $\nearrow$ (de f^n positives)
alors $\int_{\mathbb{R}^N} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx$

Def : $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ si son intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} f \in \mathbb{R}_+$ $\left(\int_{\mathbb{R}^N} f < +\infty \right)$

Rqe : $x \in \mathbb{R}^N$ • $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ suite ↗ de $\mathbb{R}_+$ donc CV dans $\overline{\mathbb{R}_+}$: $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}_+}$

• $f_n \le f_{n+1} \overset{(b)}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \le \int_{\mathbb{R}^N} f_{n+1}$ donc $\left(\int_{\mathbb{R}^N} f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ suite ↗ de $\mathbb{R}_+$ donc cv ds $\overline{\mathbb{R}_+}$: $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \in \overline{\mathbb{R}}$

• Dans le thm on considère la CV simple de (f_n).

Si (f_n) CVS vers f : $\int_{\mathbb{R}^N} \underset{CS}{f} = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n$

Corollaire (utile en exo)

Soit $u_j : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ le terme général d'une série de $f^n \ge 0$.

Alors $\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} u_j \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_j$

Démo : $x \in \mathbb{R}^N$: $S(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(x) \ge 0$

• $S_{n+1}(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) \ge 0$ donc (S_n) est une suite ↗ donc : TCM :

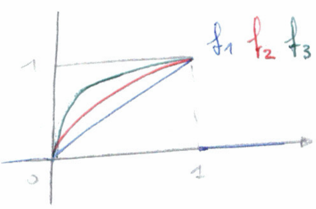
$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\lim_{n \to +\infty} S_n(x) \right) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) dx$$

• or $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} u_j(x) \in \overline{\mathbb{R}_+}$

$\overset{\text{(noté)}}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} u_j(x) \in \overline{\mathbb{R}_+}$ (notat° admise m si ça vaut $+\infty$)

• $\int_{\mathbb{R}^N} S_n = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^{+\infty} u_j \overset{(a)}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_j$

Ex : $f_n(x) = \chi_{[0,1]}(x) \times x^{\frac{1}{n}}$ $\quad x \in \mathbb{R}$.



(f_n) suite ↗ de $f^n \ge 0$

Donc $\int_{\mathbb{R}} \lim_{+\infty} f_n = \lim_{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]} x^n dx$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$ (Rqe pas de CVU)

donc $\int_{\mathbb{R}^N} (\lim f_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{]0,1]} \overset{(c)}{=} 1$

Rappel : $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$
admis $\quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f \in \overline{\mathbb{R}_+}$ tq

(a) $\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g \quad f, g \ge 0$

(b) $0 \le f \le g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f \le \int_{\mathbb{R}^N} g$

(c) $\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A = \prod_i (b_i - a_i)$
$A \subset \mathbb{R}^N \quad A = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$

(d) T.C.M (Beppo-Levi)

$f \ge 0$ int. sur $\mathbb{R}^N$ si $0 \le \int_{\mathbb{R}^N} f < +\infty$

3) Mesure des ensembles.

Def : $A \subset \mathbb{R}^N$. Soit $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

On pose $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A$ μ mesure de Lebesgue.

Rqe : $A = [a_1, b_1] \times \dots [a_N, b_N]$ hypercube

$\mu(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ d'après (c).

• dans $\mathbb{R}$: $\mu([a,b]) = b - a$

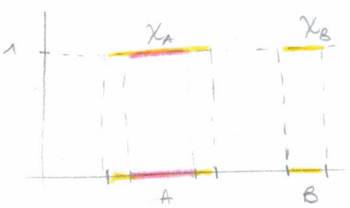
prop : μ est une mesure au sens ensembliste, ie

(i) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) σ-add : Soit (A_n) une suite de sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ disjoints 2 à 2 : $A_m \cap A_p = \emptyset$ si $m \neq p$

Alors $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Démo : (i) Soit $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$



$x \in \mathbb{R}^N$

si $x \in A \subset B$, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$

si $x \in B$ et $x \notin A$, $\begin{cases} \chi_A(x) = 0 \\ \chi_B(x) = 1 \end{cases}$ donc $\chi_A(x) \leq \chi_B$

si $x \notin A \cup B$, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$

D'après (b) (croissance de l'$\int$) on a : $\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A}_{\mu(A)} \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \chi_B}_{\mu(B)}$

(ii) (A_m) tq $A_n \cap A_p = \emptyset$ si $m \neq p$

Soit $\mu_n = \chi_{A_m}$

Alors $\chi_{\cup A_m} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$ car : $\chi_{\cup A_m}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n \\ 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, x \notin A_n \end{cases}$

Soit $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ alors $\exists ! p \in \mathbb{N}$, $x \in A_p$ (A_n disjoints 2 à 2)

alors $\mu_n(x) = \chi_{A_m}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = p \\ 0 & \forall n \neq p \end{cases}$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_m(x) = \mu_p(x)$ donc $\chi_{\cup A_n}(x) = \sum \mu_n(x)$ (*)

Donc $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\cup A_n} = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{n \in \mathbb{N}} \underset{\geq 0}{\mu_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} \mu_m = \sum \mu(A_m)$

corollaire du TCM

Ex : Dans $\mathbb{R}$. $a \in \mathbb{R}$.

• $\mu(\{a\}) = \mu([a,a]) = a - a = 0$

• $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}^N$ (a_i) distincts

• $\mu(\{a_1, a_2, \dots\}) \overset{(ii)}{=} \sum_{i \geq 1} \mu(\{a_i\}) = 0$

Mesure d'une suite denombrable : 0.

Donc tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$\mu(\mathbb{Q}) = 0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}$ donc $\chi_{\mathbb{Q}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

4) Ensembles négligeables "presque partout"

Rappel (Riemann) :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue
alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0_{[a,b]}$

Def : Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. A est négligeable si $\mu(A) = 0$

Ex dans $\mathbb{R}$: $\{a\}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q} \ldots$

- $\mu(]a,b[) = b - a \neq 0$ si $b \neq a$

Donc si $]a,b[\subset A$, $\mu(A) \neq 0$ par $\nearrow$

Propriétés (Lebesgue) :
Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$
Alors $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0 \iff f = 0$ presque partout

Def : On dit qu'une pté $P(x), x \in \mathbb{R}^N$ est vraie presque partout (p.p.) si elle est vraie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle.

$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N, P(x) \text{ fausse}\}) = 0$

Ex : • $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $\quad \mu(\mathbb{Q}) = 0$

$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ p.p.

• $u_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ $\Big|$ $x \in [0,1], u_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \quad (\mu(\{1\}) = 0) \end{cases}$

$u_n \longrightarrow 0$ p.p. sur $[0,1]$.

Démo : $A = \{x \in \mathbb{R}^N, f(x) \neq 0\}$

Rqe : • $f(x) = 0$ pp $\iff \mu(A) = 0$
• $\forall x \in \mathbb{R}^N : f(x) = f(x) \cdot \chi_A(x)$

$\Rightarrow$/ hyp : $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0$ Mq $\mu(A) = 0$ $\quad (\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A$ on va chercher à maj χ_A par une f$^{\circ}$ dt l'int vaut 0 (ex : f))

$\forall x \in \mathbb{R}^N : \quad \chi_A(x) \leq \lim_{n \to +\infty} (n \cdot f(x))$

$x \notin A \quad 0 \leq 0$
$x \in A \quad 1 \leq \underbrace{\lim (n f(x))}_{+\infty}$ ($f(x) > 0$)

Par $\nearrow$ de l'$\int$: $\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \to +\infty} (n f(x)) dx$

$u_n(x) = n f(x) \geq 0$
$(u_n) \nearrow$

$\leq \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} n f(x) dx$ (d) TCM

$\leq \lim_{n \to +\infty} n \cdot \int_{\mathbb{R}^N} f = 0$ car $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0$

donc $\mu(A) = 0$

$\Leftarrow$/ hyp : $f = 0$ p.p. ie $\mu(A) = 0$ Mq $\int_{\mathbb{R}^N} f$

$f(x) \leq \lim_{n \to +\infty} n \chi_A(x)$

$x \notin A \quad 0 \leq 0$
$x \in A \quad 0 < f(x) < \lim_{+\infty} (n \times 1) = +\infty$

donc $0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \to +\infty} (n \chi_A)$

$\leq \lim_{n \to +\infty} n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A}_{\mu(A)} = 0$

donc $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0$

III - Fonctions intégrables Lebesgue

1) Définitions.

$f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$

On définit $\left.\begin{array}{l} f^+(x) = \max(0, f(x)) \geq 0 \\ f^-(x) = \max(0, -f(x)) \geq 0 \end{array}\right\}$ $f = f^+ - f^-$

f est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ si f^+ est intégrable ($\int_{\mathbb{R}^N} f < +\infty$) et f^- aussi ($\int_{\mathbb{R}^N} f < +\infty$)

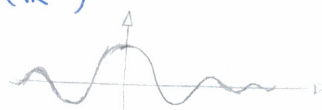
Dans ce cas on pose $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ - \int_{\mathbb{R}^N} f^-$

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ = ens. des f^n int.

Rqe : 1) $|f| = f^+ + f^-$

donc : $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N) \iff |f| \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$

Ex : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (= 1 en 0)



on peut dem. $\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx$ est finie $\to$ int. semi-cv.

On peut aussi dem que. $\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$

donc $\frac{\sin x}{x} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

Prop : $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ est un ev sur $\mathbb{R}$. ($\forall f, g \in \mathcal{L}^1 : \forall \lambda \in \mathbb{R} : f + \lambda g \in \mathcal{L}^1$)

On a : (a) liné. $\forall f, g \in \mathcal{L}^1 : \forall \lambda \in g : \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f + g) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f + \int_{\mathbb{R}^N} g$

(b) croissance : $\forall f, g \in \mathcal{L}^1 : f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f \leq \int_{\mathbb{R}^N} g$

(c) $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tq $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

Si $|f| \leq g$ alors $f \in \mathcal{L}^1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |f| \leq \int_{\mathbb{R}^N} g$

(d) $f \in \mathcal{L}^1 \iff |f| \in \mathcal{L}^1$

et on a : $\left|\int_{\mathbb{R}^N} f\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|$

Dem : (d) $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ - \int_{\mathbb{R}^N} f^- \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^+ + \int_{\mathbb{R}^N} f^-$ $\quad \int_{\mathbb{R}^N} |f| = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ + \int_{\mathbb{R}^N} f^-$

2) Intégration sur un sous-ensemble

Def : $A \subset \mathbb{R}^N$ $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On def, si elle existe, $\int_A f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot \chi_A(x)\, dx$

$\mathcal{L}^1(A)$: espace des f^n $\int$ sur A.

ex : • $\int_{[a,b[} f \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_{[a,b[} \overset{\text{noté}}{=} \int_a^b f$

Si $f = 1$: $\int_a^b 1 = \int \chi_{[a,b]} = b - a$

• $\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{[a_i, a_{i+1}[}\right)}_{f^n \text{ en escalier}} = \sum_{i=1}^{n} d_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} 1 = \sum_{i=1}^{n} d_i (a_{i+1} - a_i)$

AI

Propriété : Soit $f \geq 0$ et $E \subset \mathbb{R}^N$ de <u>mesure nulle</u>.

Alors $\int_E f = 0$

Demo : On sait que pour $g \geq 0$: $\int_{\mathbb{R}^N} g = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ p.p. en x $(*)$

On a $\int_E f \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{f \cdot \chi_E}_{g}$: $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\mu(E) = 0$ donc $g(x) = 0$ p.p.

D'après $(*)$, $\int_{\mathbb{R}^N} g = 0$ donc $\int_E f = 0$

Pté 2 : Soit $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ tq $f(x) = g(x)$ p.p.

<u>Alors</u> si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} g$

Démo : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $g = f$ p.p.

$\begin{cases} g(x) = f(x) + (g-f)(x) & \forall x \\ (g-f)(x) = 0 & \text{p.p par hyp.} \end{cases}$

On a $\left| \int_{\mathbb{R}^N} (g-f)(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{|(g-f)(x)|}\, dx = 0$

De plus $|g(x)| = |f(x) + (g-f)(x)| \leq |f(x)| + \overset{0 \text{ p.p.}}{|(g-f)(x)|}$

Par ↗ de l'$\int$: $\int_{\mathbb{R}^N} |g| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |g-f|}_{0} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| < +\infty$

donc $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

Comme $g = f + (g-f)$

Donc $\int_{\mathbb{R}^N} g = \int_{\mathbb{R}^N} f + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} (g-f)}_{0} = \int_{\mathbb{R}^N} f$

ex : • $\int_{]a,b[} f = \int_{[a,b]} f = \int_{]a,b]} f = \dots$ $\quad [a,b] =]a,b[\cup \underbrace{\{a,b\}}_{\text{mesure nulle}}$

• $\int_{\mathbb{Q}} f = 0$ car $\mu(\mathbb{Q}) = 0$

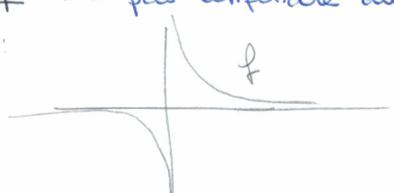
Pté : Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ ⚠ utile en exo

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, <u>alors</u> f est finie p.p. ($f(x) \in \mathbb{R}$ p.p.) $\Leftrightarrow \mu\{x \in \mathbb{R}^N, f(x) = \pm\infty\} = 0$

f est finie p.p $\Leftrightarrow |f(x)| < +\infty$ p.p.

Rqe : Ne pas confondre avec f bornée p.p. qui sg : $\exists n > 0$, $|f(x)| \leq n$ p.p en x

ex :



f est finie p.p ($f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*$)

Mais f n'est pas <u>bornée</u>

Démo en exo de TD (travail sur la mesure)

3) Th. de Lebesgue ou de convergence dominée.

Théorème : Soit $f_n : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ une suite de f^n intégrables sur $\mathbb{R}^N$

tq : (i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. en x

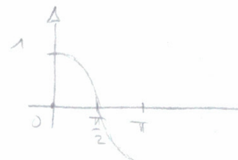
(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. en x — au moins à partir d'un certain rg.

Alors : $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n$$

Demo : Voir poly.

exo : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$



On pose $f_n : x \mapsto \cos^n x$

(i) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$: $|\cos x| < 1$ donc $|\cos x|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $x = 0$ $\quad \cos x = 1 \quad |\cos x|^n \longrightarrow 1$

Donc $f_n \longrightarrow f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad$ Donc $f_n(x) \longrightarrow 0$ p.p en $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(ii) $n \in \mathbb{N}$: $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $|\cos x|^n \leq 1$ et $x \mapsto 1$ est $\int$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ($x \mapsto 1 \in \mathcal{L}^1([0, \frac{\pi}{2}])$)

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} (\cos x)^n}_{0 \text{ p.p}} dx = 0$

Rqe : Sur $\mathbb{R}$: $(x \mapsto 1) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ⚠ car $\int_{\mathbb{R}} 1 = +\infty$

III - Calcul pratique d'intégrales (lien Riemann / Lebesgue)

1) Sur un intervalle $[a,b]$ borné

Pté (admise) f Riemann-intégrable sur $[a,b] \Rightarrow f$ Lebesgue $\int$ sur $[a,b]$, et les $\int$ st égales

Csq : P. les f^n $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}_{pm}$, ttes les règles de calcul restent (primitives, IPP...)

2) Sur un intervalle non borné $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+ \dots$

Pté : Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ ($f \geq 0$) tq f est $\int$ Riemann sur $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$ et tq son $\int$ sur $\mathbb{R}$ est semi-cv : $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

Alors : $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f$

Démo : Soit (R_n) une suite $\mathbb{R}_+$ tq $R_n \to +\infty$

Soit $f_n = f \cdot \chi_{]-R_n, R_n]}$

On a : $\cdot$ $f_n \geq 0$

$\cdot$ f_n est croissante, $f_n \leq f_{n+1}$

$\cdot$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ $\forall x$.

D'après le TCM : $\displaystyle\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f}_{\text{Lebesgue}} \overset{\text{cv monotone}}{=} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_n}_{\text{Lebesgue}} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{[-R_n, R_n]} f}_{\text{Lebesgue = Riemann}} = \overbrace{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f}_{\text{par def}^\circ}}^{\text{semi-cv Riemann}} < +\infty$

(si $\int_{-R}^{R} f \xrightarrow[R\to+\infty]{}$ à une lim$_\infty$ on la note $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Donc $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

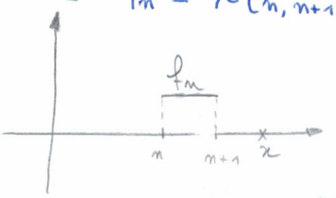
ex : . $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} [\arctan x]_{-R}^{R} \overset{\text{on peut passer direct}}{=} [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi \in \mathbb{R}$$

Donc $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $f(x) = \frac{\sin x}{x} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = +\infty$ (admis) par contre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[)$ si $\alpha > 1$
- $\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^1(]0,1])$ si $\alpha < 1$

Ctr-ex : $f_n = \chi_{[n,n+1[}$



. $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} (\lim f_n) = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$

(la seule majoration possible est $|f_n| \leq 1 \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc on ne peut pas appliquer le TCD.)

IV - Fonctions définies par une intégrale

$F(t) = \int_A f(t,x)\,dx \quad (t \in I)$

$f : I \times A \to \overline{\mathbb{R}}$

I intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\forall t \in I$: $x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1(A)$

$A \subset \mathbb{R}^N$

Pté 1 : continuité def

(i) $t \mapsto f(t,x)$ $\mathcal{C}^0$ p.p en x

(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(A)$ tq $\forall t \in I$: $|f(t,x)| \leq g(x)$ p.p en x

alors : F est continue sur I

Démo : Soit $t \in I$. F est $\mathcal{C}^0$ en t si $\forall (t_n)$ suite de I tq $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$, alors $\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = F(t)$

Soit (t_n) suite d'élt de I tq $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$

Alors $F(t_n) = \int_A \underbrace{f(t_n,x)}_{g_n(x)}\,dx$

On a : a) $g_n(x) = f(t_n,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t,x)$ p.p. en x
car $t \mapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^0$ en t (i), p.p. en x

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $|g_n(x)| = |f(t_n,x)| \underset{\text{p.p en } x}{\leq} g(x)$ d'après (ii)

D'après le TCD :

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_A \underbrace{f(t_n,x)}_{g_n(x)}\,dx \overset{\text{TCD}}{=} \int_A \lim_{n\to+\infty} f(t_n,x)\,dx = \int_A f(t,x)\,dx = F(t)$$

donc F continue sur I

Pté 2 : Dérivabilité

$F(t) = \int_A f(t,x)\,dx$

Si (i) $t \mapsto f(t,x)$ est dér. sur I, p.p. en x

(ii) $\exists h \in \mathcal{L}^1(A)$, $\forall t \in I$: $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq h(x)$ p.p en x

Alors : F est dérivable sur I et $F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$

Démo : Soit $A \in I$. F est dérivable en t si $\forall (t_n)$ suite de I tq $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n) = t$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n - t}$ existe et est notée $F'(t)$

(t_n) suite de I tq $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t$ $t \in I$ fixé

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \underset{(\int \text{continue})}{=} \int_A \underbrace{\frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t}}\,dx$$

Or : a) $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ (d'après (i))

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ $\mathcal{D}^0$ sur $]a,b[$

b) $\varphi_n(x) = \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(c,x)$, $c \in (t, t_n)$ (d'après le TAF : $\exists c \in]a,b[$ tq $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \varphi'(c)$)

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$: $|\varphi_n(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(c,x)\right| \leq \underset{\in \mathcal{L}^1(A)}{h(x)}$ d'après l'hyp (ii)

D'après le TCD, on a :

$$F'(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to+\infty} \int_A \varphi_n(x)\,dx = \int_A \left(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n\right)(x)\,dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Rqe : (p/t au th. de Riemann) * A peut ê non bornée ($A = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \dots$)

* On a juste besoin : $t \mapsto f(t,x)$ dérivable (et pas $\mathcal{C}^1$)

⚠ à l'hyp (ii)

Ex : $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$

continuité, dérivabilité de F ?

(i) $t \mapsto \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$

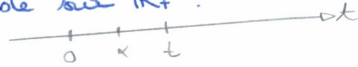
(ii) $\mathcal{C}^0$? $\forall t \in \mathbb{R}_+$: $0 \leq \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

Donc F continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}(-x^2).e^{-tx^2} = -\frac{x^2}{1+x^2}.e^{-tx^2}$

Mq : F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$t \in \mathbb{R}_+^*$:



$\exists \alpha$, $t \in [\alpha, +\infty[$

Mq : F est dérivable sur $[a, +\infty[$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall t \geq a$: $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2}\right| \leq |e^{-tx^2}| \leq e^{-ax^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

Donc F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et $F'(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx}\,dx$ $\forall a > 0$ donc vrai sur $\mathbb{R}_+^*$

V - Théorème de Fubini

$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}$ (ds les app $N = P = 1$)
$(t, x) \longmapsto f(t,x)$

$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^P = \mathbb{R}^{N+P}$ (?) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N+P}} f(t,x)\,\underbrace{d(t,x)}_{dt\,dx} \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^P} f(t,x)\,dx\right)dt \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^P}\int_{\mathbb{R}^N} \dots$

- Si $f \geq 0 \to$ tjrs vrai ds $\overline{\mathbb{R}}_+$ (th. de Tonelli)
- Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{N+P})$ vrai égalem^t (th. de Fubini)

Rqe : $\underbrace{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{N+P})}_{\text{etape 2}} \Leftrightarrow \underbrace{|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{N+P})}_{\text{etape 1 (th. de Tonelli)}}$

Théorème de Tonelli (ou Fubini ≥ 0)

Si $f \geq 0$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^{N+P}} f(t,x)\,dt\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^P} f(t,x)\,dx\right)dt = \int_{\mathbb{R}^P}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x)\,dt\right)dx \quad (\text{vrai ds } \overline{\mathbb{R}}_+)$$

Si une de ces 3 int. est finie, alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{N+P})$

Théorème de Fubini

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{N+P})$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N+P}} f = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^P} f(t,x)\,dx\right)dt = \int_{\mathbb{R}^P}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x)\,dt\right)dx$

Ex : $f : [1,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto e^{-xy}\sin y$

Calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\int_0^{+\infty}\int_1^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\left[\int_1^{+\infty} |\sin y|.e^{-xy}\,dx\right]dy \quad (\text{Tonelli})$$

$$= \int_0^{+\infty} |\sin y|\left(\left[\frac{e^{-xy}}{-y}\right]_1^{+\infty}\right)dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{|\sin y|.\frac{e^{-xy}}{y}}_{\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+) \text{ car } |\cdot| \leq e^{-y} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)}.dy$$

Donc $f \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[\times[0,+\infty[)$

Donc d'après Fubini $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_1^{+\infty} \sin y.e^{-xy}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \underbrace{\sin y.e^{-xy}\,dx}_{\text{soit 2 IPP, soit } \sin y \to e^{iy}}\right)dy$

On a :

$$\int_0^{+\infty} e^{iy}e^{-xy}\,dy = \int_0^{+\infty} e^{y(i-x)}\,dy = \left[\frac{e^{y(i-x)}}{(i-x)}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{i-x} \dots$$

$\lim\limits_{y\to+\infty} \underbrace{e^{iy}}_{\text{de module } 1} e^{-xy} = 0$

VI - Les espaces de Lebesgue L^p ($p \in \mathbb{N}^*$, $p = +\infty$)

1) L'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

Motivation pour def $L^1(\mathbb{R}^N)$: • $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ tq $f = g$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$, alors $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} g$, $f, g \geq 0$

• Si on pose, pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$: $N_1(f) = \int_{\mathbb{R}^N} |f|$

on a : (i) $N_1(\lambda f) = |\lambda| . N_1(f)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (par linéarité de $\int$) : homogénéité

(ii) $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$: $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$ inégalité triangulaire

Démo : $N_1(f+g) = \int_{\mathbb{R}^N} |f+g| \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|f| + |g|)$

$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| + \int_{\mathbb{R}^N} |g|$

$\leq N_1(f) + N_1(g)$

(iii) A-t-on : $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$: $N_1(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$?

Non car $N_1(f) = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.

Def : Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

On dit que $f \sim g$ (éq. à g) si $f = g$ p.p sur $\mathbb{R}^N$

C'est une relation d'équivalence :

× symétrie : $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$

× transitivité : $f \sim g$ et $g \sim h \Rightarrow f \sim h$

démo : $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ p.p $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus E$, $\mu(E) = 0$

$g \sim h \Leftrightarrow g = h$ p.p $\Leftrightarrow g(x) = h(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus F$, $\mu(F) = 0$

On a $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus (E \cup F)$

$\mu(E \cup F) = 0$ car $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$ disjoints

donc $\mu(E \cup F) = \underbrace{\mu(E)}_{=0} + \mu(F \setminus E) = 0$

De plus $F \setminus E \subset F$ donc $\mu(F \setminus E) \leq \mu(F) = 0$

Def 2 : $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

• Classe d'équivalence de f pour $\sim$.

$$\dot{f} = \{ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) ; g \sim f \}$$

• $L^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) / \sim = \{ \dot{f}, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \}$

On a : • $\dot{f} = \dot{g}$ dans $L^1(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow f = g$ p.p

• $\dot{f} \neq \dot{g}$ dans $L^1(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow f \neq g$ sur un ens. de mesure non nulle.

Rqe : $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ tq $\int_{\mathbb{R}^N} |f| = 0$ Alors $f = 0$ p.p donc $\dot{f} = 0$ ds L^1

Propriétés : N_1 est une norme ds $L^1(\mathbb{R}^N)$

notée $\| \cdot \|_{L^1}$

$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx$

$L^1(\mathbb{R}^N)$ est un e.v.n.

Théorème : Soit (f_n) une suite de $L^1(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tq $\|f - f_n\|_{L^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

(on dit que $f_n \longrightarrow f$ ds L^1)

Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de (f_n) tq $f_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x)$ p.p. en x

2) Les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$

$p \in \mathbb{N}^*$: $L^p(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}},\ \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p < +\infty$? ($p \geq 1$)

$= \{ f,\ |f|^p \in L^1(\mathbb{R}^N) \}$

Norme dans $L^p(\mathbb{R}^N)$: $\| f \|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p \right)^{1/p}$

Cas particulier : $p = 2$.

$L^2(\mathbb{R}^N) = \{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 < +\infty \}$

Produit scalaire : $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$\langle f | g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(x)\, dx$ (si $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$)

Si f, g $\mathbb{C}$: $\langle f | g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)}\, dx$ conjugué (produit hermitien)

$\| f \|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\langle f | f \rangle_{L^2}}$

Produit scalaire :
- bilinéaire : $\langle f | g + h \rangle_{L^2} = \langle f | g \rangle_{L^2} + \langle f | h \rangle_{L^2}$
- symétrie : $\langle f | g \rangle_{L^2} = \langle g | f \rangle_{L^2}$ (si complexe $\langle f | g \rangle_{L^2} = \overline{\langle g | f \rangle_{L^2}}$: sym. hermitienne)
- déf. pos : $\langle f | f \rangle_{L^2} = 0 \iff f = 0$ dans L^2

Prop : Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall f, g \in L^2$: $|\langle f | g \rangle_{L^2}| \leq \| f \|_{L^2} . \| g \|_{L^2}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f . \overline{g} \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g|^2 \right)^{1/2}$$

VII – Formule du changem^t de var. dans $\mathbb{R}^N$.

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$\Phi : U \subset \mathbb{R}^N \to V \subset \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^1$, inv et Φ^{-1} $\mathcal{C}^1$.

Matrice Jacobienne : $\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq N}$

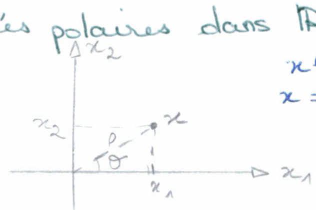
Jacobien : $J_\Phi(x) = \det \left(\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n} \right)$

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\Phi(x)) . |J_\Phi(x)|\, dx$$

Ex : Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$

$x \in \mathbb{R}^2$
$x = (x_1, x_2)$

$\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
$\theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$



$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx \overset{?}{=} \iint f(\quad)\, d\rho\, d\theta$

- $\rho \in \mathbb{R}_+$
- $\theta \in [0, 2\pi[$

$x = \Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} = \Phi_1(x) \\ = \Phi_2(x) \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$

$J_\Phi(x) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho$ $\quad |J_\Phi(x)| = |\rho| = \rho$.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) . \rho . d\rho\, d\theta .$$

Feuille de TD Intégration

Exercice 1
Trouver une primitive pour les fonctions suivantes :

1. $|x|$ *sur* $\mathbb{R}$
2. $\ln(x)$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$
3. $\cos(\ln(x))$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(deux méthodes possibles)*
4. $e^{\sqrt{x}}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 2
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme et* $k > 0$ *un entier.*

1. *Calculer une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $P(x)e^x$.
2. *En déduire une primitive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $e^{\sqrt[k]{x}}$

Exercice 3 *Montrer que la fonction* f *définie sur* $[0,1]$ *par*

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in]0,1] \quad et \quad f(0) = 0$$

admet une primitive mais n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 4

1. *Soit* f *une fonction Riemann-intégrable sur* $[a,b]$. *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}dx = 0$$

(Commencer par supposer f *en escalier)*

2. *Déterminer deux réels* α *et* β *tels que pour tous* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2)\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2}$$

En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Exercice 5 *Soit* (f_n) *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$$

1. *La suite* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[0,1]$*? Sur* $[a,1]$ *avec* $a > 0$*?*
2. *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Exercice 6
Soit $f \in C^1$ *une fonction bornée de dérivée bornée.*
Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Montrer d'abord : $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 7

1. *(Inégalité de Tchebychev) Soit f une fonction positive intégrable et a un réel strictement positif, montrer que :*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^N, \quad f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^N} f dx$$

(μ désigne la mesure de Lebesgue).

2. *Démontrer que si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, alors f est finie presque partout.*
Indication : Raisonner par l'absurde et considérer les ensembles :

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}; |f(x)| \geq k\} \qquad \textit{pour} \qquad k > 0$$

Exercice 8 1. *Montrer que pour $x > 0$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

2. *Pour $p \geq 0$, on définit les intégrales:*

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^2 \, e^{-px} \, dx$$

Calculer I_p.

3. *En utilisant les questions précédentes, calculer l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \, dx$$

Exercice 9 *Soit f une fonction positive, intégrable sur $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

2. *En déduire que la série $\sum_{n \in Z} f(x+n)$ converge pour presque toute valeur de x.*

Exercice 10 *Existe-t-il une application g Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad n e^{-n|x|} \leq g(x)$$ (ressemble à une hyp de dominat°)

Exercice 11 *Soit f une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$. La quantité suivante a-t-elle une limite lorsque α ($\alpha > 0$) tend vers zéro :*

→ TCD ?
→ on prend une suite $\alpha_n \to 0$

$$I_\alpha = \int_0^1 f(x)|\sin \frac{\pi}{x}|^\alpha dx$$

Exercice 12 *Montrer la majoration suivante : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \ln(\cos x) \leq -\frac{x^2}{2}$.*
En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

→ CV p. mettre la $\sqrt{n}$ ds la borne p. avoir la borne → +∞

Exercice 13 *Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$:* TCD

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n[} \, (1 - \frac{x}{n})^n \quad , \qquad n \geq 1$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction indicatrice. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$.

à ne pas faire

Exercice 14 1. Soit $p > -1$ et $q \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^p(\ln x)^q \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} x^p(\ln x)^q e^{-x} dx$$

2. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\ln n - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})\right]$

TCD

Exercice 15 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et intégrable sur $[0, 2\pi]$. Soit $A = \int_0^{2\pi} |f(x)|dx$.

1. On pose $\varphi_n(x) = \frac{f(nx)}{n^2}$. Calculer $\int_0^{2\pi} |\varphi_n(x)|dx$ en fonction de A. En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ converge presque partout sur $[0, 2\pi]$.
2. Montrer que la fonction $(\ln|\cos x|)^2$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. En déduire que la suite de fonctions $|\cos nx|^{1/n}$ converge presque partout vers 1.

à savoir faire

Exercice 16 Calculer l'intégrale :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy$$

Fubini + CV polaire

En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$.

à faire ou pas

Exercice 17 On considère la fonction, définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Montrer, par une méthode de votre choix, que cette fonction n'est pas intégrable sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Exercice 18 On pose

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt$$

Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et calculer $\int f$.

Exercice 19 1. Vérifier

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-tx} dt$$

2. Utiliser ce résultat pour montrer :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 20 Convergence et calcul de l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$$

Exercice 21 Soit $f \in L^{\infty}([0, 1])$, positive ou nulle presque partout sur $[0, 1]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$F(t) = \int_0^1 (f(x) + t^2)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

1. Montrez que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que F est dérivable à droite en 0. Calculez la dérivée à droite en 0 de F.

α **Exercice 22** Soit

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

1. Calculer $f'(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

2. en déduire la valeur de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
3. Peut-on en déduire la valeur en $t = 0$?

Exercice 23 1. Montrer que la fonction φ définie par $(a \geq 0)$:

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(u^2 + au^{-2})} du$$

est définie et continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$.

2. Calculer $\varphi(a)$ pour tout $a \geq 0$ en établissant une équation différentielle vérifiée par φ.

Brigitte Bidegaray

TD : Analyse

Exercice 1 :

1. $|x|$: $\int^x |t|dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+C & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}+C' & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Pour que ce soit continu en 0 : on prend $C = C'$

Une Primitive de $x : x \mapsto \frac{x|x|}{2}$ $C = 0$

2. $\ln(x)$: IPP : $x \mapsto x\ln x - x$

3. $\cos(\ln(x))$: 2 IPP ou CV

1. 2 IPP : $\int^x \cos(\ln t)\,dt = [t.\cos(\ln t)]^x - \int -\frac{1}{\cancel{t}}\sin(\ln t).\cancel{t}\,dt$

$= x\cos(\ln x) + [t\sin(\ln t)]^x - \int^x \cos(\ln t)\,dt$

$\Leftrightarrow 2\int^x \cos(\ln t)\,dt = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$

2. CV : $u = \ln(t)$ $t = e^u$ $dt = e^u du$

$\int^x \cos(\ln t)\,dt = \int^{\ln(x)} \cos u\, e^u du = \mathrm{Re}\left(\int^{\ln x} e^{iu} e^u du\right) = \mathrm{Re}\left(\int^{\ln x} e^{u(i+1)} du\right)$

$= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(i+1)u}}{i+1}\right]^{\ln x} = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1-i}{2}.e^{(i+1)u}\right]^{\ln x}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((1-i)e^{(i+1)\ln x}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(x.(1-i).e^{i\ln x}\right)$

$= \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)) + \sin(\ln x)\right)$

4. CV : $\int^x e^{\sqrt{t}}dt = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$

Exercice 2 :

1. $\int^x P(t)e^t dt = [P(t)e^t]^x - \int^x P'(t)e^t dt$

Par récurrence évidente : $\int^x P(t)e^t dt = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j P^{(j)}(x)e^x$ (n : d° du polynome)

Rqe : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. $P^{(j)}(x) = \sum_{i=j}^{n} a_i \times i \times \dots (i-j+1)\,x^{i-j} = \sum_{i=j}^{n} a_i \frac{i!}{(i-j)!} x^{i-j}$

2. $\int^x e^{\sqrt[k]{t}}dt$ $u = \sqrt[k]{t}$ $u^k = t \Leftrightarrow dt = k u^{k-1}$

$\int^x e^{\sqrt[k]{t}}dt = \int^{\sqrt[k]{x}} k e^u u^{k-1} du$ → (on identifie : $a_i = k$ $n = k-1$; $i = k-1$

$\int^x e^{\sqrt[k]{t}}dt = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j . k . \frac{k!}{(k-1)!} (\sqrt[k]{x})^{k-1-j} e^{\sqrt[k]{x}}$

Exercice 3 :

. $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \in]0,1]$ et $f(0) = 0$

f $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1]$ donc elle admet une primitive sur $]0,1]$

. $\frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (sin bornée et $\sqrt{x} \to 0$)

$\left|-\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable

$F(x) = x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}$ $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Pas Riemann intégrable car pas bornée

$\forall C \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x_n \to 0, f(x_n) \longrightarrow C$.

$x_n = \frac{1}{2n\pi}$ $\quad \cos(x_n) = 1, \sin(x_n) = 0$

$f(x_n) = -\sqrt{2n\pi} \longrightarrow -\infty$

Exercice 4 :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) e^{inx} dx$

f en escalier, il existe une subdivision de $[a,b]$ sur laquelle f est cste sur chaque…

$x_0 = a < x_1 < \dots x_m = b$ $\quad d_j = f(x),\ x \in [x_j, x_{j+1}[$

$$\int_a^b f(x) e^{inx} dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{m-1} d_j \mathbb{1}_{]x_j, x_{j+1}[}(x) e^{inx} dx$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} d_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{inx} dx$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} d_j \cdot \frac{1}{in} \cancel{x} (e^{inx_{j+1}} - e^{inx_j})$$

$|a-b| \leq |a| + |b|$

or $|e^{i\theta}| \leq 1$

donc $\left| \frac{1}{in} (e^{inx_{j+1}} - e^{inx_j}) \right| \leq \frac{2}{in}$

Donc $\left| \int_a^b f(x) e^{inx} dx \right| \leq \frac{2}{in} \sum_{j=0}^{m-1} d_j \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

f. R-intégrable : $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Psi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon$ f^n en escalier, $|f - \Psi_\varepsilon| < \varphi_\varepsilon$ et $\int \varphi_\varepsilon \leq \varepsilon$

$$\left| \int_a^b f(x) e^{inx} dx \right| = \left| \int_a^b (f - \Psi_\varepsilon)(x) e^{inx} dx + \int_a^b \Psi_\varepsilon(x) e^{inx} dx \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \int_a^b (f - \Psi_\varepsilon)(x) e^{inx} dx \right|} + \underbrace{\left| \int_a^b \Psi_\varepsilon(x) e^{inx} dx \right|}_{\exists n_0, \forall n \geq n_0 : |\ | \leq \varepsilon}$$

$$\leq \int_a^b |f - \Psi_\varepsilon| dx$$

$$\leq \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) dx$$

$$\leq \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon$$

2. * $\int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) \cos(nx) dx \overset{IPP}{=} -\int_0^\pi (\alpha + 2\beta x) \frac{\sin(nx)}{n} dx + \left[(\alpha x + \beta x^2) \sin(nx) \right]_0^\pi$

$$\overset{IPP}{=} -\int_0^\pi 2\beta \frac{\cos(nx)}{n^2} dx + \left[(\alpha + 2\beta x) \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi$$

$$= (\alpha + 2\beta\pi) \cdot \frac{(-1)^n}{n^2} - \alpha \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

On prend $\begin{cases} \alpha + 2\beta\pi = 0 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$

* $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) \cos(nx) dx = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^N \int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) e^{inx} dx = \mathrm{Re} \int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) \cdot \sum_{n=1}^N e^{inx} dx$

$\sum_{n=1}^N e^{inx} = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1}$ pas de vrai pb en 0.

$e^{i(N+1)x}$ → intégrale → 0 d'après 1

$$\frac{-e^{ix}(e^{-ix} - 1)}{e^{ix} - 1} = \underbrace{\frac{e^{ix} - 1}{2 - 2\cos x}}_{\mathrm{Re} = -\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2) dx + \text{terme qui tend vers } 0.$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{12} \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

TD Analyse

Exercice 5 :

$f_n : x \longmapsto \dfrac{2^n . x}{1+n.2^n x^2}$

1. À x fixé : $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ limite simple

. P. mq la cv n'est pas uniforme, il suffit de trouver une suite x_n tq $f_n(x_n) \not\to 0$

$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n 2^n}}$. $f_n(x_n) = \dfrac{2^n . \frac{1}{\sqrt{n 2^n}}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2^n}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

. Pour $x \in [a,1]$: $\dfrac{2^n x}{1+n.2^n x^2} \leq \dfrac{2^n}{1+n2^n a^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Donc il y a CVU sur $[a,1]$.

2. Comme il y a CVU, on peut intervertir lim & $\int$ donc la limite est 0.

ou : $\int_a^b f_n(x)dx = \left[\dfrac{1}{2n} \ln(1+n.2^n x^2)\right]_a^b \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \ln\dfrac{b}{a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Exercice 6 :

• $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt$

• $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\dfrac{k}{n}\right) dt$

$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \right| \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt$

car $\mathcal{C}^1$ donc dérivée bornée

f est C-lipschitzienne sur $[0,1]$: $\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq C.\left|t - \frac{k}{n}\right|$ sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

Rappel : $|f(x)-f(y)| \leq K.|x-y|$ K-lipschitzienne

f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, f' est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ max $|f'|$ existe et est fini

$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \right| \leq C. \underbrace{\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n}\right) dt}_{\int_0^{1/n} t\,dt}$

$\leq \dfrac{C}{2} . \dfrac{1}{n^2}$

$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t\,dt - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{k}{n}\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} - \frac{k}{n}\left[t\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$

$= \dfrac{(k+1)^2}{2n^2} - \dfrac{k^2}{2n^2} - \dfrac{2k(k+1)}{2n^2} + \dfrac{2k^2}{2n^2}$

$= \dfrac{(k+1)^2 - 2k(k+1) + k^2}{2n^2}$

$=$

$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{C}{2} . \dfrac{1}{n^2} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$= \dfrac{C}{2} . \dfrac{1}{n}$

Exercice 7 :

1. $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\{x, f(x) \geq a\}} f(x)\,dx + \int_{\{x, f(x) < a\}} f(x)\,dx$

$\geq \int_{\{x, f(x) \geq a\}} a\,dx + \cancel{\int_{\{x, f(x) < a\}} 0\,dx}$

$= \int_{\mathbb{R}^N} a . \mathbb{1}_{\{x, f(x) \geq a\}}(x)\,dx$

$= a . \mu(\{x, f(x) \geq a\})$

Donc $\mu(\{x, f(x) \geq a\}) \leq \dfrac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx$

2. f finie p.p.
   $|f|$ finie p.p.

Contraire de f finie p.p : $\exists$ un ens. A de mesure non nulle tq $|f| = +\infty$.

Si $x \in A$: $|f(x)| = +\infty$

$|f(x)| \geq k$ pour $\forall k \in \mathbb{N}$.

$x \in A_k$ "

$A \subset A_k$ pour $\forall k$.

$\mu(A) \leq \mu(A_k)$ "

$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx}_{\text{fini}} \geq k.\mu(A_k)$ pour $\forall k$.

$\geq k.\mu(A) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ Absurde, donc f est fini p.p.

car f Lebesgue $\int$
$\Rightarrow |f|$ "

Exercice 8 :

1. $a = e^{-x}$: série géo
2. 2 IPP $I_p = \frac{2}{p^3}$
3. Interversion $\lim_{N \to +\infty} \sum_{p=1}^{N}$ avec l'$\int$. En utilisant soit Beppo-Levi, soit le TCD.

Exercice 9.

1. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(\underbrace{x+n}_{y=x+n})\,dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y)\,dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy}_{\text{fini}}$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} = \sum_{n=-N}^{N}$

2. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{|n| \leq N} \int_0^1 f(x+n)\,dx$

$= \lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \sum_{|n| \leq N} f(x+n).\,dx$

$f_N(x) = \sum_{|n| \leq N} f(x+n)$ suite $\nearrow$ de f^n. D'après le th. de Beppo-Levi, on peut intervertir lim-$\int$.

$= \int_0^1 \lim_{N \to +\infty} \sum_{|n| \leq N} f(x+n).\,dx$

$= \int_0^1 \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)}_{h(x) \text{ finie ou infinie}}\,dx$

$\int_0^1 h(x)\,dx$ est finie
$\Rightarrow h$ finie p.p.

$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_A h(x)\,dx + \underbrace{\int_{[0,1]\setminus A} h(x)\,dx}_{\text{finie}}$

A ↳ ens. sur lequel h est ∞

Exercice 10 :

On pose $f_n(x) = n.e^{-n|x|}$

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. (sauf en 0) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$

$f(x) = 0$

$\int_{\mathbb{R}} n.e^{-n|x|}\,dx = 2.\int_0^{+\infty} n.e^{-nx}\,dx$ car f_n est paire.

$= 2.\left[\cancel{n}.\frac{e^{-nx}}{-\cancel{n}}\right]_0^{+\infty} = 2$

Donc : $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 2 \\ \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx = 0 \end{cases}$

Donc le ~~th~~ TCD ~~ne~~ s'applique pas, donc une des 2 hyp est fausse.
i) est vérifiée par construct° de f
donc ii) est fausse (th. de conv. dom.)

TD : Analyse

Exercice 16 :

On va utiliser le th. de Fubini : si $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \neq \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dy\,dx$ alors f non $\int$.

$f(x,y) = \dfrac{\overset{u'}{x^2} - y^2}{\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{v}} = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $\qquad \dfrac{1\cdot(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)}$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{1+y^2}$

- $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\,dy = [-\arctan y]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{1+x^2}$

- $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Exercice 21 :

. $f \in \mathcal{L}^\infty([0,1])$, $\geqslant 0$ p.p sur $[0,1]$.

$\forall t \in \mathbb{R}$: $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{(f(x)+t^2)^{1/2}}_{g(x,t)}\,dx$

$x \mapsto g(x,t) \in \mathcal{L}^1([0,1])$

$|(\underset{\downarrow \\ \mathcal{L}^\infty \text{ et pos.}}{f(x)} + t^2)^{1/2}| \leq |(\underset{\downarrow \\ \geqslant 0}{M} + t^2)^{1/2}|$

Analyse pour l'ingénieur
Transformée de Fourier

I. Transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

1) Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On def $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f par :

$$\forall \nu \in \mathbb{R} : \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

x : temps (s)
ν : freq (H_z)

Rqe : $\hat{f}$ est bien déf. en $|f(x)e^{-2i\pi\nu x}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$

2) Propriétés

1) $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, $f \longmapsto \hat{f} = \mathcal{F}(f)$ est linéaire & vérifie : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$

démo : . $\forall \nu \in \mathbb{R}$:

$$|\hat{f}(\nu)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx\right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)e^{-2i\pi\nu x}| dx$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}$$

Donc $\hat{f}$ est bornée (donc $\in L^\infty(\mathbb{R})$) par $\|f\|_{L^1}$

On a : $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$

. $\mathcal{F}$ est linéaire : linéarité de l'intégrale :

$f, g \in L^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(f + \lambda g)(\nu) = \int (f + \lambda g)(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \stackrel{\vee}{=} \mathcal{F}(f)(\nu) + \lambda \mathcal{F}(g)(\nu)$

2) Théorème de Riemann - Lebesgue (***)

. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. $\hat{f}$ est une f^n continue sur $\mathbb{R}$, et $\lim_{\nu \to +\infty} \hat{f}(\nu) = 0$

démo :

. Continuité : $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x).e^{-2i\pi\nu x}}_{\varphi(x,\nu)} dx$

× Soit $x \in \mathbb{R}$: $\nu \mapsto \varphi(x,\nu) = f(x)e^{-2i\pi\nu x}$ est continue pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
($f \in L^1 \Rightarrow f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ p.p.)

× $|f(x)e^{-2i\pi\nu x}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$

D'après le th. de continuité sous $\int$, $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

. Calcul de la limite en $\pm\infty$

Cas particulier : On suppose $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ~~et $\lim_{\pm\infty} f = 0$~~ et tq $\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\} \subset [-M, M]$ (support compact)

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx \stackrel{IPP}{=} \underbrace{\left[f(x).\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x).\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu x} dx$$

étude en module :

$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)e^{-2i\pi\nu x}| = \lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = 0 \text{ par hyp}$$

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2i\pi\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

car si $f = 0$ alors $f' = 0$ (donc en dehors de $[-\pi, \pi]$)

$$|\hat{f}(\nu)| \leq \frac{1}{2\pi|\nu|} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx = \frac{1}{2\pi|\nu|} \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx}_{< +\infty} \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} 0$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on utilise la densité C_0^1 (f^n C^1 à support compact) ds $L^1(\mathbb{R})$ p conclure.

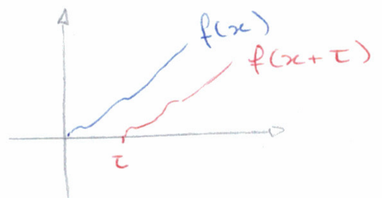
3) Théorème de retard-dilatation

× Prop (retard) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{R}$ (retard)

$\forall x \in \mathbb{R} : f_\tau(x) = f(x - \tau)$

Alors : $\mathcal{F}(f_\tau)(\nu) = \hat{f}(\nu) . \underbrace{e^{-2i\pi\nu\tau}}_{f^n \text{ de retard}}$

Rqe :



$|\hat{f}_\tau(\nu)| = |\hat{f}(\nu)|$: module inchangé

$\hat{f}(\nu) = \underbrace{M(\nu)}_{\text{module de la TF}} . e^{i\underbrace{\varphi(\nu)}_{\text{phase de la TF}}}$

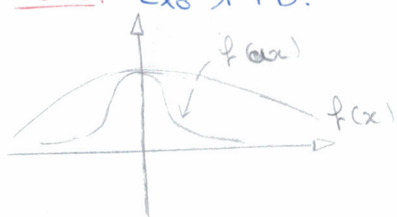
$\varphi_{\hat{f}_\tau}(\nu) = \varphi_{\hat{f}}(\nu) - 2\pi\nu\tau$ (déphasage)

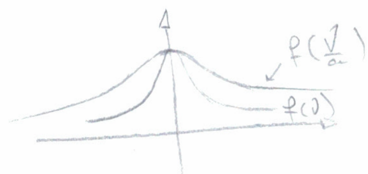
× Prop (dilatation) . $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R} : f_a(x) = f(ax)$

Alors : $\mathcal{F}(f_a)(\nu) = \frac{1}{|a|} \cdot \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$

démo : Exo 1 TD.





4) Prop. TF & dérivation

Th : $f \in L^1(\mathbb{R})$ (***)

1) Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a : $\forall \nu \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}(f')(\nu) = (2i\pi\nu)\hat{f}(\nu)$

2) Si $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ (ie f est ↘ en $+\infty$: c'est + fort que juste f ∫) alors $\hat{f}$ est der. sur $\mathbb{R}$

et $\frac{d}{d\nu}\hat{f}(\nu) = -2\pi i \, \mathcal{F}(x \mapsto x f(x))(\nu)$

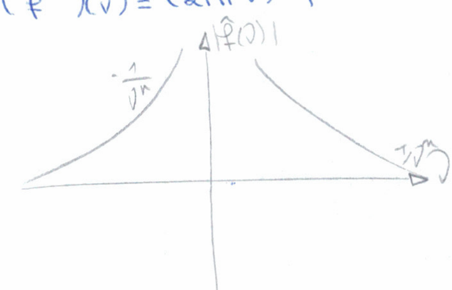
démo : exo 1 TD.

Rqe : • Plus f est dérivable, plus sa TF croit vite à l'∞.

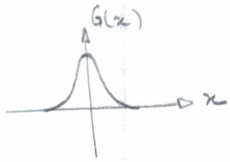
car si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $f, f', \dots f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, on a : $\mathcal{F}(f^{(n)})(\nu) = (2i\pi\nu)^n \hat{f}(\nu)$

D'après le th. de Riemann-Lebesgue, $\lim_{\pm\infty} \widehat{f^{(n)}}(\nu) = 0$

donc $\lim_{\pm\infty} \nu^n . \hat{f}(\nu) = 0$, $\hat{f}(\nu) \underset{\nu \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{\nu^n}\right)$



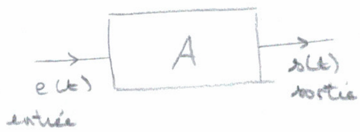
<u>Ex</u> : $G(x) = e^{-\pi x^2}$ Gaussienne.



$\boxed{\hat{G} = G}$ ♡ <u>démo</u> : ex 3 ou 4 TD.

II – Le produit de convolution.

<u>Motivation</u> :



$s = A(e)$

- A linéaire
- Inv. temporelle : $A(e(\underbrace{\cdot - \tau}_{t \mapsto t-\tau}))(t) = [A(e)](t-\tau)$

<u>Alors</u> A est nécessairement un opérateur de convolution.
$\exists h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $s = A(e) = e * h$.

1) <u>Produit de convolution de deux f^n L^1</u>.

<u>Def et prop</u> : $f, g \in L^1(\mathbb{R})$
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$: $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$
on a : $(f*g) \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$, donc $(f*g)$ est déf. p.p.

<u>Démo</u> : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f*g|(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) . g(x-y)\, dy \right| dx$

Mq : $(x,y) \mapsto f(y).g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\iint \underbrace{|f(y)\, g(x-y)|}_{\geq 0}\, dy dx \overset{\text{Th de Tonelli}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-y)|\, dx \right) dy \qquad u = x-y \quad du = dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, du}_{\|g\|_{L^1}} \right) dy$$
$$= \|g\|_{L^1} . \|f\|_{L^1} < +\infty$$

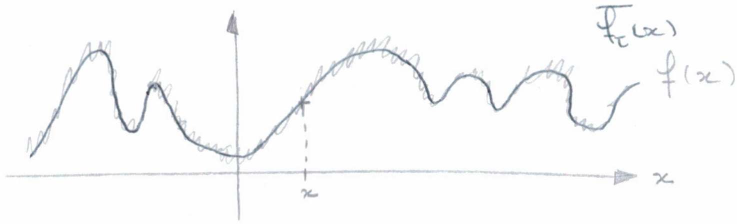
$I \leq \iint |f(y)\, g(x-y)|\, dy dx \leq \|f\|_{L^1} . \|g\|_{L^1}$ donc $f*g \in L^1(\mathbb{R})$

<u>Propriété algébrique</u> : $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

(i) $f*g = g*f$ (commutatif) (se dém. avec un cv $\begin{matrix} u = x-y \\ du = -dy \end{matrix}$)
(ii) $f*(g*h) = (f*g)*h$ (démo Fubini + cv)
(iii) $\underbrace{(f+g)*h = f*h + g*h}_{\text{distributivité}}$ (linéarité de l'$\int$)

<u>Rqe</u> : (cf TD) Il n'existe pas d'elt neutre $e \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ($\forall f \in L^1 : f*e = e*f = f$)

Exemple : méthode des moyennes glissantes.



Objectif : récupérer la "tendance" générale

Soit $\tau > 0$.

En x. $f(x) \longrightarrow \bar{f}_\tau(x) = \frac{1}{\tau} \int_{x-\frac{\tau}{2}}^{x+\frac{\tau}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[x-\frac{\tau}{2}, x+\frac{\tau}{2}]}(t) \cdot f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \cdot \chi_{[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]}(t-x) \cdot f(t)\,dt$

moy. de f autour de x longueur τ

2) Relation entre $*$ et $\mathcal{F}$

Prop : $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

Alors $\widehat{(f*g)} = \hat{f}\,\hat{g}$ (la TF remplace la convolution par un pdt simple)

Démo : (th. de Fubini)

$f*g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{(f*g)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x) e^{-2i\pi\nu x}\,dx \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y)\,dy \right) e^{-2i\pi\nu x}\,dx$$

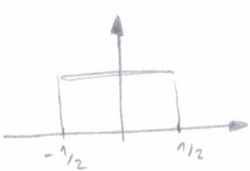
On a : $(x, y) \mapsto f(y).g(x-y) e^{-2i\pi\nu x} \in L^1(\mathbb{R}^2)$

Car $|f(y) g(x-y) e^{-2i\pi\nu x}| = |f(y) g(x-y)| \in L^1(\mathbb{R}^2)$ (cf preuve | def prop)

donc Fubini s'applique

$$\widehat{(f*g)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y). e^{-2i\pi\nu y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y). e^{-2i\pi\nu(x-y)}\,dx \right) dy$$

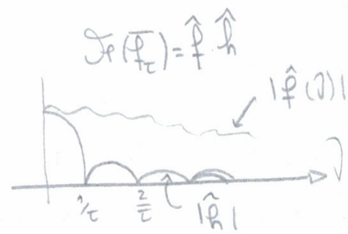
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y). e^{-2i\pi\nu y} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2i\pi\nu x}\,dx}_{\hat{g}(\nu)} \right) dy = \hat{g}(\nu).\hat{f}(\nu)$$



$\Pi(x) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(x)$. $\quad \hat{\Pi}(x) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$

Méthode des moy. glissantes : $\bar{f}_\tau = f * h$

$h(x) = \frac{1}{\tau} \chi_{[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]}(x) = \frac{1}{\tau} . \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) \Rightarrow \hat{h}(\nu) = \hat{\Pi}(\tau\nu) = \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\tau\nu}$



III - Transformée de Fourier.

Problème : $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$
$f \longmapsto \mathcal{F}(f) = \hat{f}$

$\mathcal{F}^{-1}$?

ex : $\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$ $\quad \hat{G} = G$

1) L'application $\overline{\mathcal{F}}$ (candidate à être $\mathcal{F}^{-1}$)

Def : $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On définit :

$\overline{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$
$f \longmapsto \overline{\mathcal{F}}(f)$ tq

$\forall u \in \mathbb{R} : \overline{\mathcal{F}}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2i\pi ux}\, dx$

Rqe : $f \in L^1(\mathbb{R})$

barre (notation)

(i) $\overline{\mathcal{F}}(f)(u) = \hat{f}(-u) \quad \forall u$ $\qquad$ conjugué dans $\mathbb{C}$

(ii) $\overline{\mathcal{F}}(f)(u) = \overline{\int \bar{f}(x)\, e^{-2i\pi ux}\, dx} = \overline{\mathcal{F}(\bar{f})}(u)$ $\qquad \left(\int f = \int Re(f) + i \int Im(f) \right.$
$\left. \overline{\int f} = \int \bar{f} \right)$

Si f est réelle, $f = \bar{f}$ et $\overline{\mathcal{F}}(f) = \overline{\mathcal{F}(f)}$

. $\overline{\mathcal{F}}$ vérifie des prop. analogues à $\mathcal{F}$.

2) Propriétés

Prop 1 : Formule de

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \overline{\hat{g}(u)}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}}(f)(u)\, \overline{g(u)}\, du$ $\quad *$

ou si on pose : $\langle f | h \rangle_{L^2} = \int f \bar{h}$

$* \iff \langle f | \mathcal{F}(g) \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}(f) | g \rangle$ $\quad$ ($\overline{\mathcal{F}}$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{F}$)

Démo : (Fubini) :

$|f(u) \cdot \hat{g}(u)| \le |f(u)|\, \|\hat{g}\|_{L^\infty} \le \underbrace{|f(u)|}_{\in L^1} \cdot \underbrace{\|g\|_{L^1}}_{C^{te}}$

donc $u \longmapsto f(u) \cdot \hat{g}(u) \in L^1(\mathbb{R})$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \overline{\hat{g}(u)}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot e^{-2i\pi ux}\, dx} \right) du$

$\left.\begin{array}{l} (u,x) \longmapsto f(u)\, g(x)\, e^{-2i\pi ux} \\ |f(u)\, g(x)\, e^{-2i\pi ux}| = |f(u)||g(x)| \in L^1(\mathbb{R}^2) \\ \iint |f(u)||g(x)|\, du\, dx = \underbrace{\left(\int |f(u)|\, du\right)}_{<+\infty} \underbrace{\left(\int |g(x)|\, dx\right)}_{<+\infty} \end{array}\right\}$ donc Fubini s'applique.

. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \overline{\hat{g}(u)}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x) \cdot \left(\int f(u) \cdot e^{2i\pi ux}\, du \right) dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x) \cdot \overline{\mathcal{F}}(f)(x)\, dx$

Prop (exercice) :

$G(x) = e^{-\pi x^2}$

$a > 0$: $G_a(x) = \frac{1}{a} \cdot G\left(\frac{x}{a}\right)$ Alors : $\forall a > 0$: $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(G_a) = G_a$

$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(G_a) = G_a$

Rqe : Si f est réelle paire alors $\hat{f}$ est réelle paire.

alors $\overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f)$

3) Th. d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ avec TF dans L^1

Théorème : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

alors $\begin{cases} \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f \\ \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f \end{cases}$ *

* s'écrit en $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) \cdot e^{2i\pi\nu x} d\nu$

Cette formule est vraie en tt x où f est continue.

ex : Calculer $\mathcal{F}(e^{-|x|})$ en déduire $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

Rappel : $\cdot\ \overline{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$

$f \mapsto \overline{\mathcal{F}}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi u x} dx$

Th1 : Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$, alors $f = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})$

ex : $\Pi = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \in L^1(\mathbb{R})$ $\hat{\Pi}(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \notin L^1(\mathbb{R})$

IV - Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

1) L'espace $L^2(\mathbb{R})$

$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, |f|^2 \in L^1(\mathbb{R})\}$ produit scalaire (hermitien) : $\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \bar{g}(x) dx$

norme : $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

Prop : (Cauchy - Schwarz)

$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$: $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \iff \left|\int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^2\right)$

En particulier : si $f, g \in L^2$: $\int |fg| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$ donc $(fg) \in L^1(\mathbb{R})$

Prop (admise) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ $(\cap L^\infty(\mathbb{R}))$ (stabilité de $L^2(\mathbb{R})$ par $\mathcal{F}$)

Th de Parseval : Soit $f, h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

(i) $\langle f | h \rangle = \langle \hat{f} | \hat{h} \rangle$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \bar{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} \cdot \overline{\hat{h}}\right.$

(ii) $f = h$: $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ ($\mathcal{F}$ conv la norme L^2)

Démo : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \bar{h}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \check{h}(0-t) dt$ où $\check{h}(t) = \overline{h(-t)}$ $\overline{\check{h}(0-t)} = h(t)$

$= (f * \check{h})(0)$

Soit $g = f * \check{h}$

$\cdot\ f, h \in L^1 \Rightarrow f, \check{h} \in L^1 \Rightarrow g \in L^1$

$\cdot\ \hat{g} = \mathcal{F}(f * \check{h}) = \hat{f} \cdot \mathcal{F}(\check{h})$ avec $\mathcal{F}(\check{h})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-t)} \cdot e^{-2i\pi\nu t} dt \overset{??}{=} \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-2i\pi\nu t} dt} = \overline{\hat{h}(\nu)}$

Donc $\hat{g} = \hat{f} . \overline{\hat{h}}$

g est tq $g \in L^1$ et $\hat{g} \in L^1$ donc $g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{g})$ (th. d'inv. 1)

$\left.\begin{array}{l} f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \hat{f} \in L^2 \\ h \in \quad " \quad \Rightarrow \hat{h} \in L^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$

donc $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu$ en $x = 0$: $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{h}(\nu)} d\nu$ CQFD.

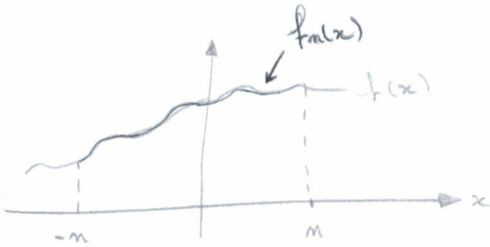
2) Extension de la TF à $L^2(\mathbb{R})$ par densité

Prop : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f . \chi_{[-n,n]}$

On a : (i) $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ p.p en x

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_{L^2} = 0$

Démo :



$|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ donc f est déf p.p sur $\mathbb{R}$.

$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ partout où $|f(x)| < +\infty$

$\| f - f_n \|_{L^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} | f(x) - f_n(x) |^2 dx$

or $\cdot$ $|f - f_n|^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ p.p. en x

$\cdot$ $|f - f_n|^2 \leq |f|^2 (\underbrace{1 - \chi_{[-n,n]}}_{\leq 1})^2 \leq |f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$

D'après le th. de convergence dominée : $\| f - f_n \|_{L^2}^2 \longrightarrow 0$

Def : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On définit $\hat{f}$ comme : $\hat{f}(\nu) = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$ $\left(= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\hat{f}_n(x)}_{\in L^2} \right)$

Rqe : Pour $f \in L^1$ on écrit $\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x) . e^{-2i\pi\nu x}}_{n \downarrow \notin L^1} dx$

Le th. suivant assure que la lim $\int_{-n}^{n}$ existe (ds la def)

Th : $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$ est bijectio, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$

De plus, c'est une isometrie : $\cdot$ $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$: $< f, g > = < \hat{f}, \hat{g} >$ (Perceval)

$\cdot$ $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$: $\| f \|_{L^2} = \| \hat{f} \|_{L^2}$

ex : $\Pi = \chi_{[-1/2, 1/2]}$, $\hat{\Pi}(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$

$\Pi \in L^2(\mathbb{R})$

Donc $\Pi(x) \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} e^{2i\pi\nu x} dx$

égalité ds $L^2(\mathbb{R})$ donc pp en x

Parceval $\int_{\mathbb{R}} \Pi^2 = 1 = \int_{\mathbb{R}} (\hat{\Pi})^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 d\nu$

<u>Prop</u> : $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$

<u>Démo</u> : $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f, g \in L^1$ (on veut dem $fg = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f} * \hat{g})$)

On introduit $\varphi = \hat{f}$ $\psi = \hat{g}$

Par inversion de $\mathcal{F}$: $\overline{\mathcal{F}}(\varphi) = f$ et $\mathcal{F}(\psi) = g$

or $\overline{\mathcal{F}}(\varphi * \psi) = \overline{\mathcal{F}}(\varphi) . \overline{\mathcal{F}}(\psi)$ (prop de $\overline{\mathcal{F}}$ avec $*$)

$= f . g$

On applique $\mathcal{F}$:

$\varphi * \psi = \mathcal{F}(f . g)$ $\Rightarrow \mathcal{F}(f . g) = \hat{f} * \hat{g}$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie pour tout $\nu \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \tag{1}$$

On note F l'application qui à f associe sa transformée de Fourier $\hat{f}$: $F(f) = \hat{f}$.

Exercice 1 (Propriétés de F) *Démontrer les propriétés suivantes :*

1. $F(f + \lambda g) = \hat{f} + \lambda \hat{g}, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
2. $F[f(ax)](\nu) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{\nu}{a}), \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}^*.$
3. $F[f(x - \tau)](\nu) = e^{-2i\pi\nu\tau} \hat{f}(\nu), \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}), \forall \tau \in \mathbb{R}.$
4. $F[f'](\nu) = 2i\pi\nu \hat{f}(\nu), \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R})$ *et de classe* C^1, *telle que* $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
5. *Calculer* $F[xf(x)](\nu)$ *en fonction de* $\hat{f}(\nu)$ *(hypothèses sur* f*?).*

Illustrer graphiquement les propriétés 2 et 3.

Exercice 2 *Que peut-on dire de la parité de la transformée de Fourier d'une fonction réelle? Conséquence pratique sur le tracé du spectre? (module et phase?)*
Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est une fonction réelle paire.

Exercice 3 (Calculs de transformées de Fourier) 1. *Calculer la transformée de Fourier de* $f(x) = e^{-|x|}$. *Calculer celle de* $g(x) = U(x)f(x)$, U *étant l'échelon unité, valant 1 sur* $\mathbb{R}_+$ *et 0 sinon. En déduire que :*

$$F[x^n e^{-x} U(x)](\nu) = \frac{n!}{(1 + 2i\pi\nu)^{n+1}}$$

2. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction* $\rho_n(x) = n\Pi(nx)$ *(*Π *étant défini à l'équation (3). Tracer les graphes de* ρ_n *et* $\hat{\rho}_n$*. Que se passe-t-il quand* $n \to +\infty$*?*
3. *Modulation*

   Evaluer $F[\cos(2\pi\nu_0 x) f(x)]$. *Exemple :* $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$. *Illustration graphique.*

Exercice 4 *Le but de cet exercice est le calcul de la transformée de Fourier de* $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

1. *Vérifier que* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et tracer son graphe.*
2. *Montrer que* f *est solution de l'équation différentielle :*

$$y' + 2\pi x y = 0 \tag{2}$$

3. *Appliquer la transformée de Fourier à l'équation (2) et en déduire l'équation différentielle vérifiée par* $\hat{f}$.
4. *En déduire le calcul de* $\hat{f}$.

Exercice 5 (Fonction porte) *Soit* Π *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq 1/2 \\ 0 & si \quad |x| > 1/2 \end{cases} \tag{3}$$

1. *Calculer* $\hat{\Pi}$ *et tracer le spectre de* Π. *Vérifier le théorème du cours* $\lim_{\nu \to \infty} \hat{\Pi}(\nu) = 0$.
2. *Calculer* $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^2(x) dx$
3. *En déduire que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi$$

Exercice 6 (Fonction triangle) *Soit Λ la fonction, affine par morceaux, valant 0 sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$, et 1 au point $x=0$.*

1. *Donner l'expression de $\Lambda(x)$.*
2. *Montrer que Λ est dérivable par morceaux, et montrer que l'on peut écrire* $\Lambda'(x) = \Pi(x+1/2) - \Pi(x-1/2)$.
3. *Calculer la transformée de Fourier de Λ'. En déduire celle de Λ.*
4. *Montrer que Λ s'exprime en fonction de Π par le produit de convolution $\Lambda = \Pi * \Pi$.*

Exercice 7 (Fourier et convolution) *Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation intégrale ($a>0$) :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|} f(t)dt = e^{-x^2}$$

Exercice 8 (Fourier et convolution) *Soit a et b deux réels tels que $a,b>0$ et $a \neq b$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de $e^{-a|x|}$.*
2. *En déduire les valeurs des produits de convolution $\frac{1}{a^2+x^2} * \frac{1}{b^2+x^2}$ et $e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$.*

Exercice 9 (cf exercice précédent - ex indépendant) *Soit a et b deux réels tels que $a,b>0$ et $a \neq b$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de $e^{-a|x|}$.*
2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On admet l'existence d'une fonction $y \in L^2(\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle :*
$$-y'' + a^2 y = f \tag{4}$$
Donner l'expression de y sous forme intégrale.
3. *Montrer l'unicité de la solution y appartenant à $L^2(\mathbb{R})$.*
4. *Montrer que la fontion $e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$ satisfait l'équation différentielle :*
$$-y'' + a^2 y = 2a\ e^{-b|x|} \tag{5}$$
(on fera deux calculs distincts dans $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et on ajustera les constantes d'intégration en écrivant la continuité à l'origine de y et y').
5. *En déduire le calcul de $e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$.*

Exercice 10 (Fourier et convolution) *Montrer, en utilisant la régularité d'une transformée de Fourier, qu'il n'existe pas de fonction χ, intégrable sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $\chi * \chi = \chi$.*
En déduire que la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément neutre.

Exercice 11 (Suite ex 11 feuille intégration)

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{t}{2}} dt$$

1. *Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.*
2. *Calculer $\hat{f}$. En déduire que $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-|x|}$.*

Exercice 12 (Equation de la chaleur) *Soit l'équation aux dérivées partielles :*

$$\begin{cases} \partial_t f = \partial_{xx} f \\ f(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{6}$$

où φ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. On pose : $F(\nu,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\ e^{-2i\pi\nu x} dx$.

1. *On suppose que la solution f appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Vérifier que F vérifie :*
$$\frac{\partial F}{\partial t} + 4\pi^2 \nu^2 F = 0$$
2. *En déduire F, puis f.*

TD : Transformée de Fourier

Exercice 1 :

1. $F(f+\lambda g) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f+\lambda g)(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx + \lambda . \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \hat{f} + \lambda \hat{g}$.

2. $F[f(ax)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) . e^{-2i\pi\nu x} dx$

$u = ax$ $\qquad du = a\,dx$

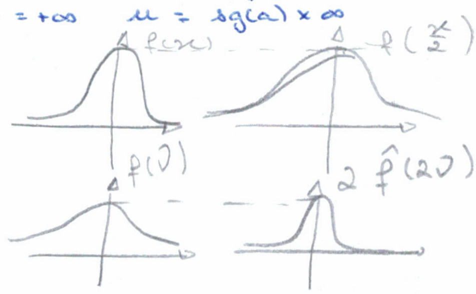
qd $x = -\infty$ $\quad u = -\,sg(a) \times \infty$

$x = +\infty$ $\quad u = sg(a) \times \infty$

$= \int_{-sg(a)\infty}^{sg(a)\infty} f(u) . e^{-2i\pi\frac{\nu}{a}u} \frac{du}{a}$

$= \frac{1}{|a|} . \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) . e^{-2i\pi\frac{\nu}{a}.u} du$

$= \frac{1}{|a|} . \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$



3. $F[f(x-\tau)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau) . e^{-2i\pi\nu x} dx$

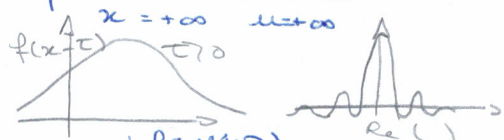
$u = x - \tau$ $\qquad du = dx$

qd $x = -\infty$ $\quad u = -\infty$

$x = +\infty$ $\quad u = +\infty$

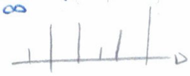
$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) . e^{-2i\pi\nu(u+\tau)} . du$

$= e^{-2i\pi\nu\tau} . \hat{f}(\nu)$



et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{C}^1 : f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

4. $F[f'](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) . e^{-2i\pi\nu x} dx$ $\quad$ ($f \in \mathcal{C}^1 \not\Rightarrow \lim_{\pm\infty} f = 0$ )

$= \left[f(x) e^{-2i\pi\nu x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times (-2i\pi\nu) . e^{-2i\pi\nu x} dx$

$= 2i\pi\nu . \hat{f}(\nu)$

~~Demo~~ : $\cdot\, f \in \mathcal{C}^1$: $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$

$\cdot\, f' \in \mathcal{L}^1$: $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f'(t)\, dt$ existe

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe

$\cdot\, f \in \mathcal{L}^1$: Cette limite est nécessairem^t 0, la seule constante intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$.

5. On utilise la der / param.

g

Exercice 2 :

. Une f^n réelle est invariante sous la transformation $f \to \overline{f}$
. Une f^n paire est invariante " $f(x) \to f(-x)$

$$\hat{f}(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi\nu x} dx$$

$$\overline{\hat{f}}(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \hat{\overline{f}}(\nu)$$

$\underline{f \text{ réelle}}$: $\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$. $|\hat{f}(-\nu)| = |\hat{f}(\nu)|$ le module est pair
argument $\hat{f}(-\nu) = \arg \hat{f}(\nu)$ phase impaire

$\underline{f \text{ paire}}$: $\hat{f}(\nu) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-y) e^{2i\pi\nu y} dy \overset{y=-x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{2i\pi\nu y} dy = \hat{f}(-\nu)$

f a valeur cplx : $\hat{f}$ est paire

f reelle et $\overline{\hat{f}(-\nu)} = \hat{f}(-\nu)$, $\hat{f}$ est reelle.

aussi : f réelle et impaire $\to \hat{f}$

Exercice 3 :

1. $f : x \mapsto e^{-|x|}$

$$* \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-2i\pi\nu x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-2i\pi\nu x} dx = \left[\frac{1}{1-2i\pi\nu} e^{(1-2i\pi\nu)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-1}{1+2i\pi\nu} e^{-(1+2i\pi\nu)x}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1+2i\pi\nu} + \frac{1}{1-2i\pi\nu} = \frac{2}{(1+2i\pi\nu)(1-2i\pi\nu)} = \frac{2}{1-(2i\pi\nu)^2} = \frac{2}{1+(2\pi\nu)^2}$$

$$\underline{\hat{f}(\nu) = \frac{2}{1+(2\pi\nu)^2}}$$

$$* \hat{g}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) . f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{0}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \left[\frac{-1}{2i\pi\nu+1} e^{-x(1+2i\pi\nu x)}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2i\pi\nu+1}$$

$$\underline{\hat{g}(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}}$$

$*$ Montrons par récurrence que $F[x^n e^{-x} U(x)](\nu) = \dfrac{n!}{(1+2i\pi\nu)^{n+1}}$

(I) $n=0$ $F[x^0 e^{-x} U(x)](\nu) = F[g(x)](\nu) = \dfrac{1}{1+2i\pi\nu} = \dfrac{0!}{(1+2i\pi\nu)^{0+1}}$ ✓

(H) Soit $n \geq 0$. On suppose que $F[x^n e^{-x} U(x)](\nu) = \dfrac{n!}{(1+2i\pi\nu)^{n+1}}$. Mq vrai pour $n+1$.

$$F[x^{n+1} e^{-x} U(x)](\nu) = \int_{0}^{+\infty} x^{n+1} . e^{-x} e^{-2i\pi\nu x} dx$$

$u' : e^{-(2i\pi\nu+1)x}$ $u : \dfrac{-1}{2i\pi\nu+1} e^{-(2i\pi\nu+1)x}$

$v : x^{n+1}$ $v' : (n+1)x^n$

$$\overset{IPP}{=} \left[\frac{-x^{n+1}}{2i\pi\nu+1} \cancel{e^{-(2i\pi\nu+1)x}}\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2i\pi\nu+1} x^n e^{-(2i\pi\nu+1)x} dx$$

car $|e^{-x(1+2i\pi\nu)}| \leq |e^{-x}| \underset{x\to+\infty}{\to} 0$
parce que $|e^{-2i\pi\nu x}| \leq 1$

$$= \frac{(n+1)}{2i\pi\nu+1} . F[x^n e^{-x} U(x)](\nu)$$

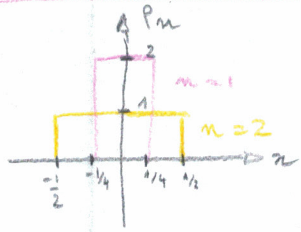
$$= \frac{(n+1)!}{(2i\pi\nu+1)^{n+2}}$$

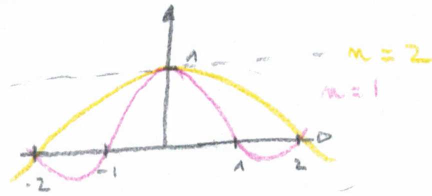
TD : Transformée de Fourier

2. $x \mapsto p_n(x) = n\Pi(nx) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \le \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2n} \end{cases}$

$$F[p_n(x)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} n\Pi(nx)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n e^{-2i\pi\nu x}\, dx = n\left[\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} = \frac{n}{2i\pi\nu}\left(e^{\frac{i\pi\nu}{n}} - e^{-\frac{i\pi\nu}{n}}\right)$$

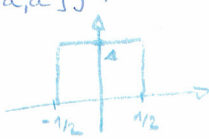
$$F[p_n(x)](\nu) = \frac{n}{\pi\nu}\sin\left(\frac{\pi\nu}{n}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\pi\nu}{n}\right)$$





3. $$F[\cos(2\pi\nu_0 x).f(x)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu_0 x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \frac{e^{2i\pi\nu_0 x} + e^{-2i\pi\nu_0 x}}{2}\, \cancel{dx}\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).e^{-2i\pi(\nu-\nu_0)x}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi(\nu+\nu_0)x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}.F[f(x)](\nu-\nu_0) + \frac{1}{2}F[f(x)](\nu+\nu_0)$$

Pour $F[\chi_{[-a,a]}(x)\cos(2\pi\nu_0 x)](\nu) = 2a\left(\text{sinc}(2\pi a(\nu-\nu_0)) + \text{sinc}(2\pi a(\nu+\nu_0))\right)$



Exercice 5 :

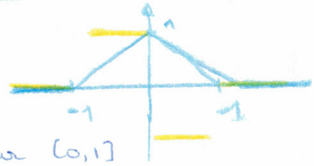
1. $$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x)\, e^{-2i\pi x\nu}\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \left[\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu x}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi\nu}\sin(\pi\nu) = \text{sinc}(\pi\nu)$$

$$\lim_{\nu\to+\infty} \hat{\Pi}(\nu) = 0$$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^2(x)\, dx = 1$$

3. Plancherel :
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}^2(\nu)\, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2 d\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt \implies \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi$$

Exercice 6 :

1. 

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1-x & \text{sur } [0,1] \\ 1+x & \text{sur } [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \max(0, 1-|x|)$$

2. $$\Lambda'(x) = \begin{cases} -1 & \text{sur } [0,1] \\ 1 & \text{sur } [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Pi\left(x+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [-1,0] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \Pi\left(x-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Lambda'(x) = \Pi\left(x+\frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

3. $$\begin{aligned} \widehat{\Lambda'}(\nu) &= F\left(\Pi\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right) - F\left(\Pi\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &= e^{i\pi\nu}\,\hat{\Pi}(\nu) - e^{-i\pi\nu}\,\hat{\Pi}(\nu) \\ &= 2i\sin(\pi\nu)\,.\,\hat{\Pi}(\nu) \\ &= 2i\,\mathrm{sin}_c(\pi\nu)\,.\,\sin(\pi\nu) \end{aligned}$$

exo 1 q3

exo 1 q4 $\quad \widehat{\Lambda'}(\nu) = 2i\pi\nu\,\hat{\Lambda}(\nu) \quad \Rightarrow \quad \hat{\Lambda}(\nu) = \mathrm{sin}_c^2(\pi\nu)$

4. $\hat{\Lambda}(\nu) = \hat{\Pi}(\nu)\,.\,\hat{\Pi}(\nu)$

$\hat{\Lambda}(\nu) = \widehat{(\Pi * \Pi)}(\nu) \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \Pi * \Pi$

Exercice 7.

Rqe : $f(x) = e^{-\pi x^2} \quad \hat{f} = f$

Analyse pour l'ingénieur
Espaces vectoriels normés

I - Définition

$(E, +, \cdot)$ espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) Définition de la norme

$\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur E si : $\forall x, y \in E : \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$ (homogenéité)

(ii) $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ (inég. tri)

(iii) $\mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (séparation)

Ex :
- $E = \mathbb{R}$ $\mathcal{N}(x) = |x|$
- $E = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1 \dots x_n)$: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, $\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$ ♡
- $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ (app. continue $[0,1] \to \mathbb{R}$). $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

  norme ? $\|f\|_\infty$ est bien def car $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ donc f est bornée | donc norme ok

  - prop. de la valeur absolue impliquant (i) et (ii)

  (iii) : si $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1] : |f(x)| = 0 \Rightarrow f = \tilde{0}$
- $E = L^1(\mathbb{R})$: $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f|$

  (iii) $\|f\|_{L^1} = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p

  $\Rightarrow f = 0$ dans L^1
- $E = L^2(\mathbb{R})$: $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int |f|^2}$

2) Notion de topologie $(E, \|.\|)$ evn.

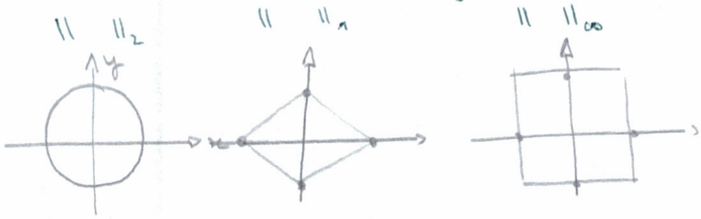
Boule : $a \in E$, $r \geq 0$

Boule ouverte $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$

Boule fermée : $B'(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$

Sphère : $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$

Ex : $\mathbb{R}^2$ Boule de centre 0, rayon 1 pour les normes :



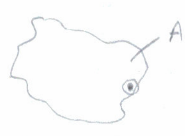
$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$

$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 1\}$ $\Rightarrow x + y < 1$, $y < 1 - x$

$B_\infty = \{(x,y) \mid \max |x|, |y| < 1\}$

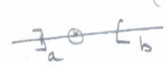
Def (ouvert) : $A \subset E$

A est ouvert, si $\forall a \in A : \exists r > 0$ tq $B(a, r) \subset A$.



A sans sa frontière est ouvert.

ex :
- $B(0, r_0)$ est ouvert dans E
- Tout intervalle $]a, b[$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.



Def (fermé) : $F \subset E$

F est fermé si son complementaire $F^c = \{x \in E, x \notin F\}$ est ouvert.
$(E \setminus F)$

ex : $B'(0, r_0)$ boule fermée est un fermé

Prop : distance : Soit $(E, \|.\|)$ evn.

Alors l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une distance
$(x,y) \mapsto d(x,y) = \|y - x\|$

ie verifie : (i) $d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

(iii) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Démo : (i) $d(x,y) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |(-1)| \cdot \|x-y\| = \|x-y\| = d(y,x)$

(ii) $d(x,z) = \|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z-y\| + \|y-x\|$
$\leq d(y,z) + d(x,y)$

(iii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|y-x\| = 0 \Leftrightarrow y - x = 0$ (prop iii de $\|\cdot\|$)

3) Cas particulier de norme : norme dérivant d'un produit scalaire.

Soit E un ev. sur $\mathbb{R}$.

Def : Produit scalaire : (forme bilin, sym, def, ≥ 0)

$\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est un ps si on a :
$(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$

(i) $\langle , \rangle$ bilinéaire : . $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto \langle x | y \rangle$ est lineaire :

. $\forall y_1, y_2 \in E : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle x | y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x | y_1 \rangle + \lambda \langle x | y_2 \rangle$

. $\forall y \in E$, $x \mapsto \langle x | y \rangle$ est linéaire

(ii) $\langle , \rangle$ symétrique : $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$

(iii) positif : $\langle x | x \rangle \geq 0$

(iv) défini : $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$

ex : . $\mathbb{R}^n$ $x = x_1 \dots x_n$ $y = y_1 \dots y_n$ $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

. dans $L^2(\mathbb{R})$: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$: $\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$

Prop : E ev, $\langle , \rangle$ ps. Alors :

$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme sur E.

Demo : à faire en exo

Prop : Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in E$ $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Démo : Soit x, y fixé dans E.

Soit $t \in \mathbb{R}$: On pose $P(t) = \|x + ty\|^2$ Rqe : $P(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Calcul : $P(t) = \langle x + ty | x + ty \rangle$

$= \langle x | x + ty \rangle + t \langle y | x + ty \rangle$

$= \langle x | x \rangle + t \langle x | y \rangle + t \langle y | x \rangle + t^2 \langle y | y \rangle$

$= \langle x | x \rangle + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \langle y | y \rangle$

$P(t) = \|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \|y\|^2$

P est un polynome du second degré qui est toujours positif.

Donc $\Delta \leq 0$ avec $\Delta = (\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$

donc $(\langle x | y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ d'où le résultat.

Def : Produit hermitien.
- Si E est un ev sur $\mathbb{C}$.

On definit un pdt hermitien
$\langle\,,\,\rangle : E\times E \to \mathbb{C}$
$(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle$ tq $\langle\,,\,\rangle$ vérifie :

(ii) sym. hermitienne : $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$
(i) $y \mapsto \langle x|y\rangle$ vérifie : $\langle x|y_1+\lambda y_2\rangle = \langle x|y_1\rangle + \bar{\lambda}\langle x|y_2\rangle$
$x \mapsto \langle x|y\rangle$ linéaire. λx
(iii) et (iv) identique. $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$

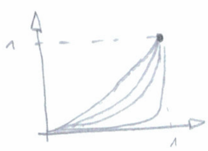
ex : $\mathbb{C}^n$: $x=(x_1\dots x_n)$ $y=(y_1\dots y_n)$ $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$
$L^1(\mathbb{R})$ à valeurs cplx : $\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f.\bar{g}$

4) Convergence dans un evn.

$(E, \|.\|)$ evn.

Def : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élt de E et $x\in E$.
On dit que (x_n) converge vers x dans E si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ et on écrit $x_n \xrightarrow{E} x$

Ex : $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. $\|.\|_\infty$
$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$



$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc $f_n \xrightarrow{E} \tilde{0}$

Def : (f^n continues)
$(E_1, \|.\|_1)$ $(E_2, \|.\|_2)$ evn.
$f : E_1 \to E_2$ est continue si : $\forall (x_n)$ suite de E_1 tq $x_n \xrightarrow{E_1} x$ alors $f(x_n) \xrightarrow{E_2} f(x)$
$\Updownarrow$
$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_1 = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \|f(x_n) - f(x)\|_2 = 0$

Cas particulier des applications linéaires continues.
$L : E_1 \to E_2$ est linéaire si $\forall x,y\in E_1, \forall\lambda\in\mathbb{K}$, $L(x+\lambda y) = L(x) + \lambda L(y)$

Théorème : Soit $L : E_1 \to E_2$ une app. linéaire. Alors L est continue sur E_1 ssi
(1) L est continue en 0
(2) $\exists c>0, \forall x\in E_1 : \|L(x)\|_{E_2} \leq C.\|x\|_{E_1}$

Démo : (0) L est continue sur E_1.
- On a (0) $\Rightarrow$ (1) car $0\in E_1$ (E_1 vérifie : $\forall x\in E_1 : \lambda x\in E_1$)
- (1) $\Rightarrow$ (2) ? voir poly.

Ex : $E_1 = \mathcal{C}^1([0,1])$, $E_2 = \mathcal{C}^0([0,1])$ norme $\|.\|_\infty$
$\varphi : E \to E$
$f \mapsto f'$

Mq φ est linéaire, non continue.

$\forall f\in\mathcal{C}^1([0,1]) : \forall\lambda\in\mathbb{R} : (f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$ donc φ linéaire.
$f_n(x) = x^n$: $\varphi(f_n) = f_n'$ avec $f_n'(x) = nx^{n-1}$
A-t-on $\|\varphi(f_n)\|_\infty \leq C.\|f_n\|_\infty$ (*) $\forall n$?
- $\|f_n\|_\infty = \sup|x^n| = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$
- $\|\varphi(f_n)\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = \sup|nx^{n-1}| = n$

donc $\nexists c$ tq (*) est vérifiée, donc φ n'est pas continue.

$* \ \varphi : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$

- $E_1 = C^1([0,1])$
  $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$
- $E_2 = \mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty$

Mq φ est continue.