ENSIMAG 1ère année (2013-14) Méthodes Numériques

Examen du 28 Mai 2014

Durée : 3h.

Les seuls documents autorisés sont les notes du cours et des travaux dirigés de méthodes numériques et du soutien. Tout matérel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte pour l'évaluation des copies.

I. Normes et Conditionnement

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$.
$\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supposée de plus *sous-multiplicative*, c'est-à-dire:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.
On perturbe la matrice A en $(A + \Delta A)$. On désire alors savoir si la matrice perturbée $(A + \Delta A)$ est encore inversible et si oui, si $(A + \Delta A)^{-1}$ diffère beaucoup de A^{-1}.

1. Montrer que si $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\|S\| < 1$, alors la matrice $(I + S)$ est inversible et on a

$$(I + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k S^k = I - S + S^2 \ldots$$

2. En déduire que si $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ alors $(A + \Delta A)$ est inversible.

3. Sous l'hypothèse de la question précédente $\left(\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$ montrer que:

$$\frac{\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \Delta A)^{-1}\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

avec $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ le conditionnement de A.

4. Qu'en déduisez-vous quant au lien entre le conditionnement de A et le fait que $(A + \Delta A)^{-1}$ diffère peu ou beaucoup de A^{-1} ?

II. Méthode de Newton pour un système partiellement linéaire

Soit deux entiers k et n avec $0 < k < n$. On se donne A une matrice (k, k) inversible, un vecteur b de $\mathbb{R}^k$ et une application H de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$ non-linéaire.

Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sera décomposé en:

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{avec } u \in \mathbb{R}^k \text{ et } v \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

On considère alors l'application F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(x) = F(u, v) = \begin{pmatrix} Au - b \\ H(u, v) \end{pmatrix}$$

et on cherche à résoudre le système partiellement linéaire $F(x) = 0$.

1. Montrer que la matrice jacobienne $F'(x)$ de F s'écrit :

$$F'(x) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ H_1(x) & H_2(x) \end{pmatrix}.$$

On explicitera les matrice $B, H_1(x)$ et $H_2(x)$.

2. Expliciter l'itération de Newton dans $\mathbb{R}^n$ pour résoudre $F(x) = 0$:
pour $x^r = \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix}$ on explicitera le système linéaire à résoudre à chaque pas, ainsi que $x^{r+1} = \begin{pmatrix} u^{r+1} \\ v^{r+1} \end{pmatrix}$.

On envisage une autre façon de résoudre le système : dans un premier temps, on résout le système linéaire $Au = b$; on note u^* la solution. On réinjecte la solution dans le système et on obtient un nouveau système non-linéaire à résoudre :

$$G(v) = 0 \text{ où } G : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

3. Calculer la matrice jacobienne de G.

4. Expliciter l'itération de Newton dans $\mathbb{R}^{n-k}$ pour résoudre ce nouveau système, et montrer que l'on obtient le même algorithme que celui de la question 2.

III. Factorisation de Cholesky

1. Effectuer la factorisation de Cholesky LL^T de la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que l'algorithme de factorisation de Cholesky préserve la structure bande des matrices, i.e.:

$$\text{Si } a_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| \geq p \text{ alors } l_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| \geq p.$$

IV. Itérations linéaires

Soient L_1 et L_2 deux matrices (n,n) à éléments réels, et z un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On cherche à résoudre le système suivant: $(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 = L_1(z - x_2) \\ x_2 = L_2(z - x_1) \end{cases}$

où x_1 et x_2 sont deux vecteurs inconnus de $\mathbb{R}^n$, et L_1 et L_2 deux matrices telles que le rayon spectral de L_1L_2 est égal au rayon spectral de L_2L_1 (i.e. $\rho(L_1L_2) = \rho(L_2L_1)$).

On considère les deux itérations suivantes:

$$(J) \quad \begin{cases} x_1^{(0)} \text{ et } x_2^{(0)} \text{ donnés dans } \mathbb{R}^n \\ x_1^{(r+1)} = L_1(z - x_2^{(r)}) \\ x_2^{(r+1)} = L_2(z - x_1^{(r)}) \end{cases} \qquad (G) \quad \begin{cases} y_1^{(0)} \text{ et } y_2^{(0)} \text{ donnés dans } \mathbb{R}^n \\ y_1^{(r+1)} = L_1(z - y_2^{(r)}) \\ y_2^{(r+1)} = L_2(z - y_1^{(r+1)}) \end{cases}$$

1. Mettre respectivement (J) et (G) sous forme d'itérations linéaires dans $\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{cases} u^{(r+1)} = T_J\, u^{(r)} + h_J & \text{pour } (J) \\ v^{(r+1)} = T_G\, v^{(r)} + h_G & \text{pour } (G) \end{cases}$$

On explicitera soigneusement les matrices $(2n, 2n)$ T_J et T_G, ainsi que les vecteurs h_J et h_G.

2. Montrer que (J) et (G) convergent ou divergent simultanément, selon la valeur de $\rho(L_1L_2)$.

3. Montrer que si (J) et (G) convergent, alors (G) converge deux fois plus vite que (J) vers l'unique solution du problème (Σ).

I ① Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\|S\| < 1$.

On a $(I+S)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k = I\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k + S\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k$.

par continuité du produit matricielle, le critère séquentielle rend légitime l'écriture suivante :

$$(I+S)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^{k+1}}_{-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k S^k}$$

par convergence, $(I+S)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k = (-1)^0 S^0 = I$.

En dimension finie, un coté de l'inversibilité suffit, on a $(I+S) \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $(I+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k$

② A étant inversible, $(A+\Delta A) = A(I+A^{-1}\Delta A)$

Ainsi, pour que $(A+\Delta A)$ soit inversible, il suffit que $\|A^{-1}\Delta A\| \leqslant 1$ d'après ① ;

Ainsi si $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, $\|A^{-1}\Delta A\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$.

③ On a $\|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\| = \|[A(I+A^{-1}\Delta A)]^{-1} - A^{-1}\| = \|[(I+A^{-1}\Delta A)^{-1} - I]A^{-1}\|$

$$\leqslant \|A^{-1}\|\,\|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1} - I\|$$

On $\|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1} - I\| = \|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\Delta A)^k\| = \|\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\Delta A)^k\right)A^{-1}\Delta A\|$

$$= \|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}\Delta A\| \leqslant \|\Delta A\|\,\|(A+\Delta A)^{-1}\|$$

Dès lors $\dfrac{\|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\Delta A)^{-1}\|} \leqslant \|A^{-1}\| \times \|\Delta A\| = \kappa(A) \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

④ Cette inégalité nous montre que plus le conditionnement est faible, plus A^{-1} est proche de $(A+\Delta A)^{-1}$ relativement.

II) ① $F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au - b \\ H(u,v) \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow k \\ \updownarrow n \end{matrix}$

On a $F'(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\right) \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial F_2}{\partial v}\right) \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} \end{pmatrix}(x)$ on identifie

$B = A$

$H_1 = \frac{\partial H}{\partial u}$; $H_2 = \frac{\partial H}{\partial v}$

② méthode de Newton : $\begin{cases} x^{k+1} = x^k - (F'(x^k))^{-1} F(x^k) \\ x_0 \text{ proche de } a \text{ tq } f(a) = 0 \end{cases}$

On a $(F'(x^k))^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$ tq $F'(x^k)(F'(x^k))^{-1} = I \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = A^{-1} \\ \beta = \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^{-1} \\ \gamma \text{ tq } \frac{\partial H}{\partial u} A^{-1} + \frac{\partial H}{\partial v}\gamma = 0 \end{cases}$

③ Le système $F(u^*, v) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ H(u^*, v) \end{pmatrix}$ devient donc

$$G(v) = \left(H(u^*, v)\right) \updownarrow n-k = 0$$

Clairement $G'(v) = \left(\frac{dH}{dv}(u^*, v)\right)$, u^* étant fixé

④ méthode de Newton $v^{k+1} = v^k - \left(\frac{\partial H}{\partial v}(u^*, v^k)\right)^{-1} H(u^*, v^k)$

. u étant fixé, $F'(x^k) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \frac{\partial H}{\partial v} \end{pmatrix}(x^k)$ et $F(x^k) = \begin{pmatrix} 0 \\ H(x^k) \end{pmatrix}$, d'où

facilement $(F'(u^*, v^k))^{-1} F(x^k) = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H}{\partial v}^{-1}(x^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ H(x^k) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial H}{\partial v}(x^k)\right)^{-1} H(x^k)$

avec $x^k = (u^*, v^k)$

Ainsi, l'algorithme est bien le même. ③

III) ① Algorithme de calcul de L colonne par colonne

- Colonne 1 $L_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$; $\underset{i>1}{L_{i1}} = \frac{a_{i1}}{L_{11}} \Rightarrow L_{i1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

- Colonne 2 $L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{21}^2} = 1$; $\underset{i>2}{L_{i2}} = \frac{1}{L_{22}}\left(a_{i,2} - L_{i1}L_{21}\right) \Rightarrow L_{i2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Colonne 3 $L_{33} = \sqrt{a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} = 1$; $\underset{i>3}{L_{i3}} = \frac{1}{L_{33}}\left(a_{i,3} - L_{i1}L_{31} - L_{i2}L_{32}\right)$

$\Rightarrow L_{i3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Colonne 4 $L_{44} = \sqrt{a_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2 - L_{43}^2} = \sqrt{16} = 4$

D'où finalement $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

② /

IV) ① * Pour (J) $\omega^{(n+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 z - L_1 x_2^{(n)} \\ L_2 z - L_2 x_1^{(n)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -L_1 \\ -L_2 & 0 \end{pmatrix}}_{T_J} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix}}_{\upsilon^{(n)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} L_1 z \\ L_2 z \end{pmatrix}}_{R_J}$

* Pour (G) $v^{(n+1)} = \begin{pmatrix} y_1^{(n+1)} \\ y_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 z - L_1 y_2^{(n)} \\ L_2 z - L_2\left(L_1 z - L_1 y_2^{(n)}\right) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -L_1 \\ 0 & L_2 L_1 \end{pmatrix}}_{T_G} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \end{pmatrix}}_{v^{(n)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} L_1 z \\ L_2(z - L_1 z) \end{pmatrix}}_{R_G}$

② Les méthodes convergent $\iff \begin{cases} \rho(T_J) < 1 \\ \rho(T_G) < 1 \end{cases}$ (ε)

* Soit λ une vap de T_J et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un $\overrightarrow{vap}$ associé

On a $T_J X = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} -L_1 X_2 \\ -L_2 X_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 L_2 X_1 = -\lambda L_1 X_2 = \lambda^2 X_1$

Et donc clairement $\rho(L_1 L_2) = \rho(T_J)^2$. (1)

* Soit λ une vap de T_G et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un $\overrightarrow{vap}$ associé

On a $T_G X = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} -L_1 X_2 \\ L_2 L_1 X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 L_1 X_2 = \lambda X_2$

Et donc clairement $\rho(L_2 L_1) = \rho(L_1 L_2) = \rho(T_G)$ (2)

De (ε), (1) et (2) on tire que si $\rho(L_1 L_2) < 1$

Alors (J) et (G) converge

et si $\rho(L_1 L_2) > 1$

Alors (J) et (G) diverge

---

③ Il est clair que tout d'abord que s'ils convergent, alors ils convergent dans la solution unique de (Σ) par construction.

Maintenant d'après ②, on a

$$\rho(T_J)^2 = \rho(L_1 L_2) = \rho(T_G)$$

Vitesse de convergence $R'(J) = -\frac{1}{2} \ln(\rho(L_1 L_2))$

$R'(G) = -\ln(\rho(L_1 L_2)) = 2R'(J)$

On a bien (G) convergent deux fois plus rapidement que J