TD n°5

Questions de cours

- Rappeler la définition de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- Rappeler l'espérance de la loi de Poisson.
- Rappeler le théorème de transfert pour une loi discrète.
- Rappeler la formule de conditionnement pour une loi discrète.

Exercice 1

Au football, on peut normalement marquer des buts de la tête ou du pied. On suppose que le nombre de buts marqués lors d'une partie est un nombre aléatoire K tiré suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

La probabilité pour qu'un but soit marqué de la tête est p, $0 < p < 1$, et on suppose que les buts sont marqués indépendamment les uns des autres.

Question 1

- Sachant que $K = k$ buts ont été marqués lors d'une partie, montrer que la probabilité conditionnelle pour que $L = \ell$ buts soient marqués de la tête est

$$\mathrm{P}(L = \ell \mid K = k) = \binom{k}{l} p^{\ell}(1-p)^{k-\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, k$$

où $\binom{k}{l} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}$

Question 2

- En déduire la probabilité que l'on observe $L = \ell$ buts marqués de la tête lors d'une partie.
- Calculer l'espérance de la variable aléatoire L.

Les stats de la loose

On suppose que le nombre moyen de but marqués par match de football est $\lambda = 2.37$. La probabilité de marquer de la tête est $p = 0.38$.

- Vérifier que la loi de L correspond au modèle calculé dans la question précédente

```r
# Il y a 760 matches dans une saison régulière de ligue 1
K <- rpois(760, lambda = 2.37)
L <- rbinom(760, K, p = 0.38)
plot(0:7, dpois(0:7, lambda = 0.38*2.37), xlab = "Buts de la tête", ylab = "Fréquence", col = "orange", lwd = 3, type = "l")
points(table(L)/sum(table(L)), type = "h", col = "blue", lwd = 3)
```

Question 3

En fait, le modèle est imparfait et il existe une probabilité $\epsilon > 0$ pour qu'un but soit marqué de la main.

- Quelle est la probabilité d'observer au moins un but marqué de la main lors d'une partie ?

Exercice 2

Un rat se trouve dans un labyrinthe face à deux portes. Il choisit la première de ces deux portes avec probabilité $1/3$ et la deuxième porte avec probabilité $2/3$. Quand il choisit la première porte, il revient à son point de départ en une minute. Quand il choisit la deuxième porte, il effectue un trajet d'une minute jusqu'à un point intermédiaire, puis il rebrousse chemin avec la probabilité $1/2$ (le retour lui prend alors une minute) ou il sort du labyrinthe en une minute avec la probabilité $1/2$.

Tous les choix du rat se font indépendamment les uns des autres.

Soit T le temps passé par le rat dans le labyrinthe. On cherche à déterminer l'espérance de T, puis la loi de T.

Question 1

Soit N le numéro de la porte choisie au départ du rat.

- Etablir une relation simple reliant $\mathbb{E}[T \mid N=1]$ et $\mathbb{E}[T]$.
- Etablir une relation similaire reliant $\mathbb{E}[T \mid N=2]$ et $\mathbb{E}[T]$.
- Appliquer la formule de conditionnement et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[T]$.

Question 2

On note d, i et s les points de départ, intermédiaire et de sortie du rat, et on note X_n la suite aléatoire des points visités par le rat.

- Trouver la relation entre la loi de T et les probabilités conditionnelles suivantes

$$p_{nds} = \mathrm{P}\left(X_n = s \mid X_0 = d\right), \quad n \geq 0.$$

- Montrer par récurrence que l'on a la relation suivante

$$p_{n+1ds} = \frac{1}{3}\big(p_{nds} + p_{n-1ds} + 1\big).$$

- Résoudre cette équation et en déduire la loi de T. Retrouver l'espérance de T par le calcul direct.