Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Modélisation

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Exo 7.1

Dans une raffinerie, quatre types de carburant brut sont mélangés pour produire trois qualités de carburant mélangé. Les données sont les suivantes :

carburant brut	taux d'octane	unités disponibles	prix d'achat /unité
1	68	4000	$1,02$
2	86	5050	$1,15$
3	91	7100	$1,35$
4	99	4300	$2,75$

carburant mélangé	taux min d'octane	demande	prix de vente /unité
1	95	≤ 10000	$7,15$
2	90	sans restr.	$6,95$
3	85	≥ 15000	$4,99$

La vente directe du carburant brut est possible à un prix de $\mathbf{2,95}$ si le taux d'octane dépasse $\mathbf{90}$ et $\mathbf{1,85}$ par unité s'il est inférieur. Il faut maximiser le profit total.

Exo 7.1

Solution

1. Variables : x_{ij} : unités de carburant brut numéro i dans le carburant mélangé numéro j.
2. Contraintes de disponibilité : On veut utiliser
   1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ unités de carburant brut numéro 1 mais il y en a 4000,
   2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ unités de carburant brut numéro 2 mais il y en a 5050,
   3. $x_{31} + x_{32} + x_{33}$ unités de carburant brut numéro 3 mais il y en a 7100,
   4. $x_{41} + x_{42} + x_{43}$ unités de carburant brut numéro 4 mais il y en a 4300,
3. Contraintes de demandes : On aura
   1. $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}$ unités de carburant mélangé numéro 1 mais il en faut au plus 10000,
   2. $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}$ unités de carburant mélangé numéro 3 mais il en faut au moins 15000,

Exo 7.1

Solution

1. Contraintes d'octane : Le taux d'octane de carburant mélangé
   1. numéro 1 : $\frac{0.68 \cdot x_{11} + 0.86 \cdot x_{21} + 0.91 \cdot x_{31} + 0.99 \cdot x_{41}}{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}}$ doit être au moins 0.95,
   2. numéro 2 : $\frac{0.68 \cdot x_{12} + 0.86 \cdot x_{22} + 0.91 \cdot x_{32} + 0.99 \cdot x_{42}}{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}}$ doit être au moins 0.90,
   3. numéro 3 : $\frac{0.68 \cdot x_{13} + 0.86 \cdot x_{23} + 0.91 \cdot x_{33} + 0.99 \cdot x_{43}}{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}}$ doit être au moins 0.85,
2. Contraintes de non-négativité : $x_{ij} \geq 0$.
3. Fonction Objectif : maximiser le bénéfice - la dépense :

Exo 7.1

Solution

Fonction Objectif : maximiser le bénéfice - la dépense :

1. la dépense $= 1.02 \cdot 4000 + 1.15 \cdot 5050 + 1.35 \cdot 7100 + 2.75 \cdot 4300$
   - on achète toutes les unités disponibles des carburants bruts car le prix de vente est plus que le prix d'achat.
2. le bénéfice sur la vente de carburant mélangé
   1. numéro 1 est $= 7.15 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$,
   2. numéro 2 est $= 6.95 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42})$,
   3. numéro 3 est $= 4.99 \cdot (x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43})$,
3. le bénéfice sur la vente de carburant brut
   1. numéro 1 est $= 1.85 \cdot (4000 - (x_{11} + x_{12} + x_{13}))$,
   2. numéro 2 est $= 1.85 \cdot (5050 - (x_{21} + x_{22} + x_{23}))$,
   3. numéro 3 est $= 2.95 \cdot (7100 - (x_{31} + x_{32} + x_{33}))$,
   4. numéro 4 est $= 2.95 \cdot (4300 - (x_{41} + x_{42} + x_{43}))$,

Exo 7.1

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rcl}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & \leq & 4000 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} & \leq & 5050 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} & \leq & 7100 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} & \leq & 4300 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} & \leq & 10000 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} & \geq & 15000 \\
-27x_{11} - 9x_{21} - 4x_{31} + 4x_{41} & \geq & 0 \\
-22x_{12} - 4x_{22} + 1x_{32} + 9x_{42} & \geq & 0 \\
-17x_{13} + 1x_{23} + 6x_{33} + 14x_{43} & \geq & 0 \\
x_{ij} & \geq & 0 \\
5.30x_{11} + 5.10x_{12} + 3.14x_{13} + 5.30x_{21} + 5.10x_{22} + 3.14x_{23} + & & \\
4.20x_{31} + 4.00x_{32} + 2.04x_{33} + 4.20x_{41} + 4.00x_{42} + 2.04x_{43} & = & z(\max)
\end{array}
$$

Exo 7.2.

- Un chantier naval qui fabrique de voiliers prévoit les ventes suivantes au cours des 4 trimestres à venir:

	printemps	été	automne	hiver	
11	4	6	10	12	11

- Toutes les demandes doivent absolument être satisfaites.
- Il y a un coût associé à la variation de production d'une période sur l'autre, composé principalement
  1. des coûts d'embauche (**6000**€ par équipe qui construit un voilier) et
  2. des coûts de licenciement (**4000**€ par équipe licenciée).
- On emploie seulement les équipes nécessaires pour la production, c'est-à-dire on embauche pour augmenter la cadence et on licencie les équipes en trop si la cadence diminue.
- Tout voilier en stock à la fin d'un trimestre coûte **9000**€ en frais de magasinage et en immobilisation.
- Avant printemps aucun voilier n'est stocké et la cadence de production est de **11** voiliers. On demande que ces deux niveaux soient retrouvés à la fin de l'hiver.

Exo 7.2.

(a) Calculer le coût de la politique qui consiste à produire chaque trimestre exactement la demande et donc de ne jamais stocker. Vous paraît-elle optimale? Argumentez.

(b) Ecrire un programme linéaire qui nous permet de trouver le plan de production qui minimise le coût total.

Exo 7.2.

Solution (a)

période	licenciement	embauche	stock	coût
printemps	$11-4=7$			$7 \cdot 4000 = 28000€$
été		$6-4=2$		$2 \cdot 6000 = 12000€$
automne		$10-6=4$		$4 \cdot 6000 = 24000€$
hiver		$12-10=2$		$2 \cdot 6000 = 12000€$
fin d'hiver	$12-11=1$			$1 \cdot 4000 = 4000€$
coût total				$80000€$

	printemps	été	automne	hiver	
11	4	6	10	12	11

Meilleure solution

- Si on licencie 1 équipe de moins ($-4000€$) alors
- on doit stocker un voilier ($+9000€$) et
- on doit embaucher 1 équipe de moins ($-6000€$).

Exo 7.2.

Meilleure solution

période	licenciement	embauche	stock	coût
printemps	$11-5=6$		1	$6 \cdot 4000 + 1 \cdot 9000€$ $= 33000€$
été				$0€$
automne		$10-5=5$		$5 \cdot 6000 = 30000€$
hiver		$12-10=2$		$2 \cdot 6000 = 12000€$
fin d'hiver	$12-11=1$			$1 \cdot 4000 = 4000€$
coût total				$79000€$

	printemps	été	automne	hiver	
11	4	6	10	12	11

Exo 7.2.

Solution (b)

1. On a 5 périodes :
   1. début de printemps,
   2. début d'été,
   3. début d'automne,
   4. début d'hiver,
   5. fin d'hiver.
2. Variables : pour tout $1 \leq i \leq 5$
   1. c_i : cadence,
   2. e_i : embauche,
   3. l_i : licenciement,
   4. s_i : stockage,
3. Contraintes de non-négativité : $c_i, e_i, l_i, s_i \geq 0$.

Exo 7.2.

Solution (b)

1. Contraintes de conservation du flux de production :
   disponible + fabriqué - reste à stocker = besoin
   1. On aura au printemps $0 + c_1 - s_2$ unités de voilier mais il en faut 4,
   2. On aura en été $s_2 + c_2 - s_3$ unités de voilier mais il en faut 6,
   3. On aura en automne $s_3 + c_3 - s_4$ unités de voilier mais il en faut 10,
   4. On aura en hiver $s_4 + c_4 - 0$ unités de voilier mais il en faut 12.
2. Contraintes de fluctuation de la main-d'oeuvre :
   disponible + embauché - licencié = cadence
   1. On aura au printemps $11 + e_1 - l_1$ de cadence mais il en faut c_1,
   2. On aura en été $c_1 + e_2 - l_2$ de cadence mais il en faut c_2,
   3. On aura en automne $c_2 + e_3 - l_3$ de cadence mais il en faut c_3,
   4. On aura en hiver $c_3 + e_4 - l_4$ de cadence mais il en faut c_4,
   5. On aura à la fin $c_4 + e_5 - l_5$ de cadence mais il en faut 11.
3. Fonction Objectif : minimiser le coût :
   $1000(6(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) + 4(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5) + 9(s_2 + s_3 + s_4)) = w(\min)$.

Exo 7.2.

Programme Linéaire

$$
\begin{aligned}
c_1 - s_2 &= 4\\
s_2 + c_2 - s_3 &= 6\\
s_3 + c_3 - s_4 &= 10\\
s_4 + c_4 &= 12\\
e_1 - l_1 - c_1 &= -11\\
c_1 + e_2 - l_2 - c_2 &= 0\\
c_2 + e_3 - l_3 - c_3 &= 0\\
c_3 + e_4 - l_4 - c_4 &= 0\\
c_4 + e_5 - l_5 &= 11\\
c_i,\quad e_i,\quad l_i,\quad s_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$1000(6(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) + 4(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5) + 9(s_2 + s_3 + s_4)) = w(\min).$$

Exo 7.3

Énoncé

Mettre le programme linéaire
$$\begin{array}{rrrrl} 1x_1 & +2x_2 & -1x_3 & +2x_4 & = 1 \\ 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & -1x_4 & \geq 2 \\ 1x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +2x_4 & \leq 3 \\ & 0 \geq x_2, & & x_3 \geq 0, x_4 & \geq 0 \\ 1x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +1x_4 & = z(\max) \end{array}$$

1. sous forme canonique puis
2. sous forme standard.

Définition

Forme canonique

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$c^T x = z(\max)$$

Forme standard

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$c^T x = z(\max)$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$a_i \cdot x \geq b_i \quad \Longrightarrow \quad (-a_i) \cdot x \leq (-b_i).$$

$$a_i \cdot x = b_i \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} a_i \cdot x \leq b_i, \\ (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \end{array}$$

$$x_i \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x_i = -x_i', \\ x_i' \geq 0. \end{array}$$

$$x_i \text{ sans contrainte} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x_i = x_i' - x_i'', \\ x_i' \geq 0, \ x_i'' \geq 0. \end{array}$$

$$c^T \cdot x = w(\min) \quad \Longrightarrow \quad (-c)^T \cdot x = z(\max).$$

Démonstration (pour la forme standard)

$$a_i \cdot x \leq b_i \quad \Longrightarrow \quad a_i \cdot x + y_i = b_i, \quad y_i \geq 0.$$

Exo 7.3

PL

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 - 1x_3 \quad + 2x_4 &= 1 \\
1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad - 1x_4 &\geq 2 \\
1x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad + 2x_4 &\leq 3 \\
0 \geq x_2, \qquad x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0 \\
1x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad + 1x_4 &= z(\max)
\end{aligned}$$

Forme canonique

$x_1 \Longrightarrow x_1' - x_1'',\ x_1' \geq 0,\ x_1'' \geq 0$ et
$x_2 \Longrightarrow -x_2',\ x_2' \geq 0.$

$$\begin{array}{rcr}
1x_1' - 1x_1'' - 2x_2' - 1x_3 + 2x_4 & \leq & 1 \\
-1x_1' + 1x_1'' + 2x_2' + 1x_3 - 2x_4 & \leq & -1 \\
-1x_1' + 1x_1'' + 1x_2' - 1x_3 + 1x_4 & \leq & -2 \\
1x_1' - 1x_1'' + 3x_2' + 2x_3 + 2x_4 & \leq & 3 \\
x_1', \quad x_1'', \quad x_2', \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0 \\
1x_1' - 1x_1'' - 2x_2' - 3x_3 + 1x_4 & = & z(\max)
\end{array}$$

Forme standard

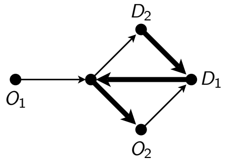
Il faut encore introduire deux nouvelles variables $x_5 \geq 0$ et $x_6 \geq 0$.

$$\begin{array}{rcr}
1x_1' - 1x_1'' - 2x_2' - 1x_3 + 2x_4 \qquad\qquad & = & 1 \\
-1x_1' + 1x_1'' + 1x_2' - 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 \qquad & = & -2 \\
1x_1' - 1x_1'' + 3x_2' + 2x_3 + 2x_4 \qquad + 1x_6 & = & 3 \\
x_1', \quad x_1'', \quad x_2', \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 & \geq & 0 \\
1x_1' - 1x_1'' - 2x_2' - 3x_3 + 1x_4 \qquad\qquad & = & z(\max)
\end{array}$$

Exo 7.4

- Dans le réseau ci-dessous on veut transporter une quantité maximale de courrier qui sera envoyé
  - soit de l'origine O_1 vers la destination D_1,
  - soit de l'origine O_2 vers la destination D_2,

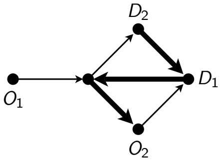
  en empruntant tous les chemins possibles.
- Les arcs symbolisent les différents moyens de transport (trains, camions, avions ...) et les sommets sont les points de transfert.
- La quantité totale de courrier transporté sur chaque arc simple est limitée par 1 (une unité) et non limitée sur chaque arc en gras.
- Déterminer la quantité maximale de courrier (la somme maximale des quantités envoyées de O_1 et O_2).



Exo 7.4

(a) Modéliser ce problème comme un programme linéaire.
- Trouver la solution optimale.
- Donner explicitement le plan de transport optimal sur chaque chemin et la quantité totale de courrier envoyé.

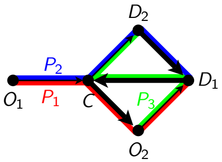
(b) Supposons que l'unité de courrier est indivisible (imaginons qu'il s'agit d'un paquet). On cherche une solution optimale en nombres entiers du programme précédent.
- Justifier qu'envoyer seulement une unité soit entre O_1 et D_1 soit entre O_2 et D_2 est une solution optimale.



Exo 7.4

Solution

1. Variables : x_i quantité de courriers envoyés par le chemin P_i.
2. Contraintes de capacité : on veut envoyer
   1. $x_1 + x_2$ sur l'arc O_1C mais on en peut seulement 1,
   2. $x_1 + x_3$ sur l'arc O_2D_1 mais on en peut seulement 1,
   3. $x_2 + x_3$ sur l'arc CD_2 mais on en peut seulement 1.
3. Contraintes de non-négativité : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
4. Fonction Objectif : maximiser la quantité de courriers envoyés par les chemins : $x_1 + x_2 + x_3 = z(\max)$.



Exo 7.4

Programme linéaire

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad\quad\;\; &\leq 1\\
x_1 + \quad\quad\; x_3 &\leq 1\\
x_2 + x_3 &\leq 1\\
x_1,\quad x_2,\quad x_3 &\geq 0\\
x_1 + x_2 + x_3 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

(a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est une solution optimale :

- c'est une solution,
- c'est réalisable,
- qui donne $\frac{3}{2}$,
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{3}{2}$ (par la somme des trois inégalités).

(b) Des solutions réalisables $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ sont optimales :

- qui donnent 1,
- $z(\max) \leq 1$ en nombres entiers (puisque l'optimum du PL est $\frac{3}{2}$).

Exo 7.5

Problème du cuisinier chinois :

- A bord d'un bateau **17** pirates possèdent un trésor en pièces d'or. S'ils se le partagent en parties égales, il restera **3** pièces d'or pour le cuisinier chinois.
- Au cours d'une tempête, **6** d'entre eux périssent et ils font le nouveau équipartage, le cuisinier chinois reçoit **4** pièces d'or.
- Plus tard, une rixe éclate entre les pirates et il en reste **6**. Cette fois-ci, après l'équipartage, le cuisinier chinois recevra **5** pièces d'or.
- Quel est le nombre minimum de pièces d'or de trésor que peut espérer acquérir le cuisinier chinois s'il empoisonne l'équipage restant?

Exo 7.5

Solution

1. Variables :
   1. t : nombre de pièces d'or,
   2. x_i : nombre de pièces que chaque pirate obtient dans i-ème équipartage.
2. Contraintes de partage : le reste de t divisé par
   1. 17 est 3, $t = 17x_1 + 3$,
   2. 11 est 4, $t = 11x_2 + 4$,
   3. 6 est 5, $t = 6x_3 + 5$,
3. Contraintes de non-négativité : $t, x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
4. Fonction Objectif : minimiser t : $t = w(\min)$.

Exo 7.5

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rcl}
t - 17x_1 & = & 3 \\
t \qquad - 11x_2 & = & 4 \\
t \qquad\qquad - 6x_3 & = & 5 \\
t, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0 \\
t & = & w(\min)
\end{array}
$$

Remarque

1. Solution optimale du PL est $(t, x_1, x_2, x_3) = (5, \frac{2}{17}, \frac{1}{11}, 0)$.
2. Solution optimale du PL en nombres entiers est $(785, 46, 71, 130)$
   - en utilisant le théorème de restes chinois.

Exo 7.6.

- L'entreprise "Au pot de terre" utilise une partie de sa capacité de production pour produire des théières peintes à la main.
- Une théière nécessite **une demi-heure** du temps d'un peintre et **30** peintres de la région déclarent leur *disponibilité* permanente.
- On doit résoudre le problème d'emploi des peintres qui ne sont pas constamment embauchés mais seulement si la demande devient importante, ce qui arrive la semaine prochaine.
- Ils peuvent travailler seulement le **jeudi**, **vendredi** et **samedi**.
- Tout peintre nécessaire dans la *production* sera engagé pour **2** jours de **8** heures chacun (pas obligatoirement consécutifs) et sera payé pour ces **16** heures, même s'il travaille moins.
- Sans compter le prix de la main-d'oeuvre, le *bénéfice* retiré de la vente d'une théière est de **20€**.

Exo 7.6.

- La demande non satisfaite le jour où elle se présente est perdue et, en plus, l'entreprise se voit infliger une *pénalité* de
  1. **6**€ par pièce non fournie le jeudi,
  2. **18**€ le vendredi et
  3. **30**€ le samedi.
- La production d'une journée peut permettre de satisfaire la demande de ce jour et éventuellement des jours à venir et cela coûte **3**€ de *stocker* une théière d'un jour sur l'autre.
- Cependant on ne peut rien stocker du samedi au dimanche et la surproduction éventuelle sera perdue.
- Les peintres sont *payés* **20**€ de l'heure.
- Les *demandes* de théières sont de
  1. **100** le jeudi,
  2. **300** le vendredi et
  3. **600** le samedi.
- Ecrire un programme linéaire dont la solution optimale donnerait la production qui maximiserait le bénéfice net, sans tenir compte du fait que vos variables doivent être entières.

Exo 7.6.

Solution

1. On a une période de 3 jours :
   1. jeudi,
   2. vendredi,
   3. samedi.
2. Variables : pour tout $1 \leq i \leq 3$
   1. x_i : nombre de théières à produire le jour i,
   2. f_i : nombre de théières fournies le jour i,
   3. p_i : nombre de pénalités au jour i,
   4. s_i : nombre de théières stockées à la fin du jour i,
   5. n_{ij} : nombre d'ouvriers à engager pour les jours i et j.
3. Contraintes de non-négativité : $x_i, f_i, p_i, s_i, n_{ij} \geq 0$.
4. Fonction Objectif : maximiser le profit =
   bénéfice - pénalité - stockage - salaire
   $20(f_1+f_2+f_3)-(6p_1+18p_2+30p_3)-3(s_1+s_2)-2\cdot 8\cdot 20(n_{12}+n_{13}+n_{23}) = z(\max)$.

Exo 7.6.

Solution

1. Contraintes de disponibilité de ressources : 30 peintres disponibles
   1. $n_{12} + n_{13} + n_{23} \leq 30$,
2. Contraintes de limitation de production : les peintres peuvent peindre
   1. $16(n_{12} + n_{13})$ théières le jeudi mais on en veut x_1,
   2. $16(n_{12} + n_{23})$ théières le vendredi mais on en veut x_2,
   3. $16(n_{13} + n_{23})$ théières le samedi mais on en veut x_3,
3. Contraintes de conservation du flux de production :
   disponible + peint - reste à stocker = fourni
   1. On aura $0 + x_1 - s_1$ unités de théière mais il en faut f_1,
   2. On aura $s_1 + x_2 - s_2$ unités de théière mais il en faut f_2,
   3. On aura $s_2 + x_3 - 0$ unités de théière mais il en faut f_3,
4. Contraintes de demande : demande - fourni = pénalité
   1. $100 - f_1 = p_1$,
   2. $300 - f_2 = p_2$,
   3. $600 - f_3 = p_3$,

Exo 7.6.

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rcl}
n_{12} + n_{13} + n_{23} & \leq & 30 \\
16n_{12} + 16n_{13} - x_1 & \geq & 0 \\
16n_{12} + 16n_{23} - x_2 & \geq & 0 \\
16n_{13} + 16n_{23} - x_3 & \geq & 0 \\
x_1 - s_1 - f_1 & = & 0 \\
s_1 + x_2 - s_2 - f_2 & = & 0 \\
s_2 + x_3 - f_3 & = & 0 \\
f_1 + p_1 & = & 100 \\
f_2 + p_2 & = & 300 \\
f_3 + p_3 & = & 600 \\
x_i, \quad f_i, \quad p_i, \quad s_i, \quad n_{ij} & \geq & 0
\end{array}
$$

$$20(f_1 + f_2 + f_3) - (6p_1 + 18p_2 + 30p_3) - 3(s_1 + s_2) - 320(n_{12} + n_{13} + n_{23}) = z(\max).$$