Feuille : 11

Exercice 11.1. — Deux géants de la presse quotidienne : *LE FIGARO* et *LIBERATION* se partagent le marché de quelques millions de lecteurs. Supposons que les directeurs de chaque journal doivent choisir un titre à la "une" parmi les trois qui font l'actualité :

$\boldsymbol{T_1}$ "Présidentielle 2022 : Le duel Macron-Le Pen s'annonce serré" ;
$\boldsymbol{T_2}$ "Guerre en Ukraine : Société générale cesse ses activité en Russie" ;
$\boldsymbol{T_3}$ "Covid-19 : L'effet papillon des restrictions en Chine prêt à souffler sur l'économie mondiale" ;

Grâce aux sondages fréquents de l'opinion publique on peut estimer le comportement du marché. En fonction des titres à la "une" le partage du marché est donné par le tableau suivant :

		LE FIGARO $\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{T_3}$
	$\boldsymbol{T_1}$	40% : 60%	70% : 30%	60% : 40%
LIBERATION	$\boldsymbol{T_2}$	60% : 40%	60% : 40%	70% : 30%
	$\boldsymbol{T_3}$	50% : 50%	50% : 50%	40% : 60%

Exercice 11.2. — Xavier et Yann décident de jouer au jeu suivant : ils indiquent simultanément à l'aide des doigts d'une main un nombre. Si les deux nombres sont tous les deux pairs ou impairs, Xavier donne **6€** à Yann. Si le nombre choisi par Xavier est pair et celui de Yann impair, ce dernier donne **9€** à Xavier. Enfin si le nombre de Xavier est impair et celui de Yann pair, ce dernier donne **4€** à Xavier.

		Yann pair	impair
Xavier	pair	$\mathbf{-6}$	$\mathbf{+9}$
	impair	$\mathbf{+4}$	$\mathbf{-6}$

Exercice 11.3. — Montrer que $\max_i \min_j a_{i,j} = \min_j \max_i a_{i,j}$ si et seulement s'il existe un couple $\boldsymbol{(i^*, j^*)}$ vérifiant : $a_{i,j^*} \leq a_{i^*,j^*} \leq a_{i^*,j}$ quels que soient i et j ; que l'on appelle un **point d'équilibre** ; $\boldsymbol{a_{i^*,j^*}}$ est la **valeur** du jeu.

Exercice 11.4. — Considérons maintenant le jeu suivant :

		$\boldsymbol{Y}$ **1**	**2**	**3**
	1	$+3$	0	-1
$\boldsymbol{X}$	**2**	-2	-1	$+2$
	3	$+2$	$+1$	$+1$

Montrer qu'il existe un point d'équilibre. Donner la valeur du jeu.

Exercice 11.5. — Le vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ vérifiant $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$ et $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0$ est appelé **stratégie mixte** du joueur X et le vecteur $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vérifiant $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$ et $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0$ est appelé **stratégie mixte** du joueur Y.

(a) Montrer que le gain moyen par jeu qui résulte de l'application d'une stratégie mixte x par le joueur X et une stratégie mixte y par le joueur Y peut être exprimé par : $x^T Ay$.

(b) En adoptant une stratégie mixte x le joueur X se garantit au moins le gain : $\min_y x^T Ay$, où le minimum est pris sur tous les $y \geq 0$ vérifiant $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$.

(c) Montrer que ce minimum est atteint pour une stratégie pure du joueur $Y, y^* = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, c'est-à-dire : $\min_y x^T Ay = \min_j \{a_{1,j}x_1 + \ldots + a_{m,j}x_m\}$.

Exercice 11.6. — (Théorème minimax de **von Neumann**) : Pour toute matrice A de la taille $m \times n$, il existe deux vecteurs x^* et y^* tels que : $\min_y (x^*)^T Ay = \max_x x^T Ay^*$ où le minimum est pris sur tous les $y \geq 0$ vérifiant $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$, et le maximum sur tous les $x \geq 0$ vérifiant $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$.

Exercice 11.7. — Etudions le jeu donné par la matrice des gains suivante :

4	**1**	**2**	**−1**
−2	**2**	**−1**	**5**

Montrer que la stratégie mixte $x = (x_1, x_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ est optimale pour X.

Exercice 11.8. — Montrer que dans l'Exercice 11.2 la stratégie mixte optimale pour Xavier est $x = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ et pour Yann $y = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$.

Exercice 11.9. — Chacun des deux joueurs doit miser un nombre : 1 ou 3, et parallèlement deviner la mise de son adversaire. On doit donc proposer une paire $(m; p)$ où m est le nombre misé et p est le pari sur la mise de l'adversaire. Si les joueurs se sont trompés ou ont bien deviné tous les deux les mises de leurs adversaires, alors le résultat du jeu est nul. Dans le cas où un seul joueur a bien deviné la mise de son adversaire il reçoit de ce dernier la paie égale à la somme des deux nombres misés. Le problème de nature psychologique dans ce jeu est qu'en misant 3 vous aller augmenter la valeur de la paie sans pourtant être sûr de gagner cette valeur élevée - vous risquez bien de la perdre. Les quatre stratégies pures de chaque joueur sont **(1; 1), (1; 3), (3; 1), (3; 3)** et la matrice des gains de ce jeu s'écrit :

	(1; 1)	**(1; 3)**	**(3; 1)**	**(3; 3)**
(1; 1)	0	2	−4	0
(1; 3)	−2	0	0	4
(3; 1)	4	0	0	−6
(3; 3)	0	−4	6	0

(a) Ecrire les programmes linéaires duaux correspondants.
(b) Montrer que $x = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ et $y = (0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0)$ sont des solutions optimales.