6.1 Coût d'un codage inapproprié

Soient X une v.a. à 5 états $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, deux distributions de probabilité $p(x)$ et $q(x)$ pour X et deux codes, l'un C_p adapté à la loi p, l'autre C_q à la loi q.

Etat	1	2	3	4	5
Loi p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
Code C_p	0	10	110	1110	1111
Loi q	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
Code C_q	0	100	101	110	111

1. Calculer $H(p)$, $H(q)$, $D(p||q)$ et $D(q||p)$.
2. Vérifier que la compacité de C_p sous la loi p est égale à l'entropie $H(p)$ et qu'ainsi C_p est optimal pour cette loi.

   Rappeler les deux conditions qui assurent qu'un code est absolument optimal (compacité égale à l'entropie).

   Interpréter sur la représentation en arbre du code le saturation de l'inégalité de Kraft et la caractère préfixé du code.
3. Même question pour le code C_q et la loi q.
4. Si le code C_q est utilisé alors que la distribution de la source est p, quelle est la longueur moyenne des mots de code. De combien dépasse t-on l'entropie de la loi p ?
5. Monter que cette perte est donnée par la divergence de Kullback entre les lois p et q et préciser les conditions particulières qui font qu'il en est ainsi.

6.2 Canal binaire symétrique

On écrit de l'information x binaire (deux symboles notés 0 et 1) sur un support non fiable. Lors de la relecture, on observe y qui n'est pas toujours égal à x. La probabilité pour qu'un 1 soit relu comme un 0 vaut p, on suppose que la probabilité pour qu'un 0 se transforme en 1 vaut également p. Un tel modèle aléatoire élémentaire de perturbation est appelé Canal Binaire Symétrique. [1]

On suppose que les probabilités *a priori* du 0 et du 1 dans le message (entrée du canal) sont connues, elles sont notées :

$$\begin{aligned} Pr(1) &= \pi \\ Pr(0) &= 1 - \pi \end{aligned}$$

1. Remarque : la perturbation des valeurs stockées peut s'écrire $y = x \oplus b$ où $\oplus$ désigne la somme modulo 2 (ou exclusif) et b la perturbation binaire (loi de Bernoulli).

1. Calculer la probabilité d'erreur binaire moyenne (P_e) en sortie du canal.
   Dire comment cette probabilité dépend de la loi d'entrée du canal ? (Pourquoi ?)
2. Exprimer la loi de probabilité de la sortie y en fonction de p et de π.
3. Probabilités *a posteriori*.
   (a) Quelle est la probabilité *a posteriori* $p(x = 1|y = 1)$?
   (b) En déduire $p(x = 0|y = 1)$
   (c) En déduire $p(x = 0|y = 0)$ et $p(x = 1|y = 0)$.
   (d) Pour quelle valeur de p cette probabilité *a posteriori* $p(x = 1|y = 1)$ est-elle identique à la probabilité *a priori* π ?
   Comment interprétez-vous ce résultat ?
   (e) Que valent les probabilités *a posteriori* $p(x = 1|y = 1)$ et $p(x = 0|y = 1)$ lorsque l'entrée est équidistribuée sur $\{0; 1\}$?
   (f) Quelle est la qualité d'un système de stockage pour lequel $p = 1$?
4. Calcul et maximisation de l'information mutuelle entre l'entrée et la sortie.
   (a) Exprimer l'entropie de la sortie en fonction de π et p et vérifier que cette entropie est maximale pour une loi d'entrée uniforme.
   (b) Exprimer l'entropie conditionnelle de la sortie sachant l'entrée en fonction de p.
   (c) En déduire l'information mutuelle maximale (par rapport à la loi de l'entrée) entre l'entrée et la sortie.
   (d) Comment interprétez-vous maintenant le résultat de la question 3.d. par rapport à l'information mutuelle entre l'entrée et la sortie du canal ?