Feuille 1
Normes matricielles

Dans cette feuille d'exercices on notera A une matrice carrée réelle de taille n et

$$|||A|||_p = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_p=1} \|A\,x\|_p = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|A\,x\|_p}{\|x\|_p}$$

la norme matricielle induite par la norme $\|\ \|_p$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer les égalités

$$|||A|||_1 = \operatorname*{Max}_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \tag{1}$$

$$|||A|||_\infty = \operatorname*{Max}_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \tag{2}$$

1- On définit

$$\|A\|_{\mathrm{C}} = \operatorname*{Max}_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$ (norme des colonnes)

Montrer que $|||A|||_1 \leqslant \|A\|_{\mathrm{C}}$.

2- Montrer que $|||A|||_1 \geqslant \|A\|_{\mathrm{C}}$. *Indication : on pourra considérer un entier j_0 tel que $\|A\|_{\mathrm{C}} = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$, introduire le vecteur x de composantes*

$$x_{j_0} = 1, \quad x_j = 0 \text{ si } j \neq j_0,$$

et calculer $\|Ax\|_1$.

3- En déduire l'égalité (1).

4- On définit

$$\|A\|_{\mathrm{L}} = \operatorname*{Max}_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$ (norme des lignes)

Montrer que $|||A|||_\infty \leqslant \|A\|_{\mathrm{L}}$.

5- Montrer que $|||A|||_\infty \geqslant \|A\|_{\mathrm{L}}$. *Indication : on pourra considérer un entier i_0 tel que $\|A\|_{\mathrm{L}} = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$, introduire le vecteur x de composantes*

$$x_j = 1 \textit{ si } a_{i_0 j} \geqslant 0, \quad x_j = -1 \textit{ si } a_{i_0 j} < 0,$$

et calculer $\|Ax\|_\infty$.

6- En déduire l'égalité (2).

Exercice 2
On définit

$$\|A\|_{\mathrm{S}} = \Big(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$$

(cette norme est appelée norme de Schur ou de Frobenius).

1- Vérifier que $\|A\|_{\mathrm{S}} = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\!A\, A)}$.

2- Calculer $\|I\|_{\mathrm{S}}$ dans $M_n(\mathbb{R})$. La norme de Schur est-elle induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$ lorsque $n \geqslant 2$?

3- Montrer que $\| \, \|_{\mathrm{S}}$ définit une norme matricielle sous-multiplicative, c'est à dire vérifie $\|A\,B\|_{\mathrm{S}} \leqslant \|A\|_{\mathrm{S}}\, \|B\|_{\mathrm{S}}$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 On appelle *rayon spectral* d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ et on note $\rho(M)$ le plus grand module des valeurs propres de M. Dans cet exercice nous allons montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\!AA)}. \tag{3}$$

1- Justifier que les valeurs propres de ${}^t\!AA$ sont réelles positives, et que cette matrice est diagonalisable dans une base orthonormée.

2- Montrer que $|||A|||_2 \leqslant \sqrt{\rho({}^t\!AA)}$.

3- Montrer que $|||A|||_2 \geqslant \sqrt{\rho({}^t\!AA)}$ et en déduire l'égalité (3). *Indication : on pourra considérer un vecteur propre x de ${}^t\!AA$ associé à la valeur propre de module maximal et calculer $\|Ax\|_2$.*

4- Montrer que $|||A|||_2 \leqslant \|A\|_{\mathrm{S}}$.

5- Simplifier (3) lorsque A est symétrique.

6- L'application $A \mapsto \rho(A)$ définit-elle une norme sur $M_n(\mathbb{R})$? Et sur le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques ?

7- Mq : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sup_{y \neq 0} \frac{|{}^t y x|}{\|y\|_2}$.

En déduire que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = |||{}^t A|||_2$.

TD. 1 : Normes matricielles.

Rappels :

Déf. soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
on appelle norme sur E une application
$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie

* $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
* $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda . x\| = |\lambda| . \|x\|$.
* $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemples. $x \in \mathbb{R}^n$.

* $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

(norme euclidienne). * $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ → produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

. si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t x . y$.

. si $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = {}^t x \, \overline{y}$.

* $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
* $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$. $p \geq 1$.

$f \in \mathcal{C}^0([a;b])$ * $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

* $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$. $p \geq 1$.

Propriété * $\|.\|_a$ et $\|.\|_b$ sont équivalentes s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tq:
$\forall x \in E$, $c_1 . \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 . \|x\|_b$.

− passer d'une norme à une autre norme équivalente ne change pas l'ensemble des suites convergentes ni celui des applications continues.

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. et l'application linéaire : $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$.
$x \longmapsto Ax$.

(cette application linéaire est automatiquement $\boxed{\text{continue}}$ car on est en dimension finie)

On définit : $|||A||| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. subordonnée / induite par la norme vectorielle $\|.\|$.

Rq : $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \| A . \underbrace{\dfrac{x}{\|x\|}}_{\text{de norme } = 1} \|$.

$\longrightarrow$ on pose : $y = \dfrac{x}{\|x\|}$. $\|y\| = 1$.

$\Rightarrow |||A||| = \sup\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|$.

Propriété : * $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\| \leq |||A||| . \|x\|$. (car $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq |||A|||$).

* $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||AB||| \leq |||A||| . |||B|||$. (norme sous-multiplicative) / d'algèbre.

preuve : $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$.

$$\frac{\|AB.x\|}{\|x\|} = \frac{\|A.Bx\|}{\|x\|} \leq \frac{|||A|||.|||Bx|||}{\|x\|} \leq \frac{|||A|||.|||B|||.\|x\|}{\|x\|} = |||A|||.|||B|||.$$

$$\Rightarrow |||AB||| \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq |||A|||.|||B|||.$$

Notations : $|||A|||_p = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup\limits_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$.

$\hookrightarrow$ norme matricielle induite par la norme vectorielle $\|.\|_p$.

$|||.|||_1$ et $|||.|||_\infty$ $\rightsquigarrow$ expressions simples en fonction des coeff. de la matrice.

$|||.|||_2$ $\rightsquigarrow$ pas d'expression explicite en fonction des coeff. de la matrice.

Rappels :

Déf : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. est la trace de la matrice A.

Propriétés : * tr |

*

* $tr(AB) = tr(BA)$.

car : $\sum_i [AB]_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k} b_{ki} a_{ik} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik}$

$$= \sum_k [BA]_{kk} = tr(BA).$$

* $\forall P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$.

car : $tr(P^{-1}(AP)) = tr((AP)P^{-1}) = tr(A)$.

ie : la trace est invariable par changement de base.

* Lien entre trace d'une matrice et valeurs propres :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible,

tq : $P^{-1}AP = T$ $\quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$. (matrice triangulaire supérieure).

$\longrightarrow tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

or les valeurs propres de A sont les λ_i.

$\lambda \in \mathbb{C}$ est vp. de A ssi :

$\exists V \neq 0$ tq : $(\lambda I - A)V = 0$. (V est un vecteur propre)
$\in \mathbb{C}^n$

Rq : $\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$

ie : ssi : $\det(\lambda I - A) = 0$.

$= \det(\lambda I) - \det(A) = \det(\lambda I) - \det(PTP^{-1})$

$\boxed{\text{det est une forme n-linéaire}}$

$= \lambda \det(I) - \det(P)\det(T)\det(P^{-1}) = \lambda \det(I) - \det(P)\det(T)(\det(P))^{-1}$

$= \lambda \det(I) - \det(T) = \det(\lambda I - T)$

$\Leftrightarrow \det(\lambda I - T) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

ie : La trace de A est la somme des valeurs propres, λ_i, de A.

Rappels :

Def : transposée : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ${}^tA$ est tq : $[{}^tA]_{ij} = [A]_{ji}$.

Propriété : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Rappels :

Def : produit scalaire : $\underbrace{\text{application à valeurs ds. } \mathbb{R}}_{\text{= forme linéaire}}$, bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Rappels :

Def : matrice symétrique réelle : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq : ${}^tA = A$.

Proposition : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique alors les valeurs propres de M sont réelles.

preuve : $\lambda \in \mathbb{C}$ est v.p. de M ssi :

$\exists x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, tq : $Mx = \lambda x$. $(*)$

or : ${}^t\bar{y}x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y_i}$ (produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$).

d'où : ${}^t\bar{x}x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|_2^2$.

ainsi, $x\,{}^t\bar{x}$ donne : (on fait le produit scalaire de 1er membre de $(*)$ par le vecteur x).

$${}^t\bar{x}Mx = \lambda\,{}^t\bar{x}x = \lambda \|x\|_2^2.$$

$$\overset{\shortparallel}{{}^t(\overline{{}^tMx})}\,x.$$

or : M est réelle symétrique

$\Rightarrow {}^t\bar{M} = \bar{M} = M$.

d'où : ${}^t(\overline{Mx})x = \lambda \|x\|_2^2$.

$\Leftrightarrow \; {}^t(\overline{\lambda x})x = \lambda \|x\|_2^2$.

$\Leftrightarrow \; \bar{\lambda}\,{}^t\bar{x}x = \lambda \|x\|_2^2$.

$\Leftrightarrow \; \bar{\lambda}\|x\|_2^2 = \lambda \|x\|_2^2$ ie : $\bar{\lambda} = \lambda$. ie : $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$.

Théorème : si M est symétrique réelle, alors : il existe une base orthonormée $(v_i)_i$ de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de M.

De manière équivalente : (reformulation sous forme matricielle).

$\exists P = (v_1 | v_2 | \cdots | v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible.

et tq : ${}^tPP = I$ et $M = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

où : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est diagonale.

Rappels : base orthonormée : ${}^t v_i v_j = \delta_{ij}$.
base de vecteurs propres de M : $M v_i = \lambda_i v_i$

$P e_i = v_i \iff P^{-1} v_i = e_i$.
↳ i-ème vecteur de la base canonique.

Application : * si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ $\quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$.
alors : ${}^t x M y = \left(\sum \alpha_i {}^t v_i \right)\left(\sum \beta_i \lambda_i v_i \right)$ car v_i sont vp. de M.

$\Rightarrow {}^t x M y = \sum \lambda_i \alpha_i \beta_i$.

Rq : si $x = y$, $\quad {}^t x M x = \sum \lambda_i \alpha_i^2$.

* soit M, symétrique réelle.

Def : M est définie positive ssi : ${}^t x M x > 0$. $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.
(${}^t y M x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$).

Proposition : M est définie positive ssi :
ttes ses valeurs propres λ_i sont > 0.

Lemme : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \geq 2$.
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, les valeurs propres de A.
alors : $Sp(A^k) = \{ \lambda_1^k ; \dots ; \lambda_n^k \}$.

preuve : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible et tq :
$A = P T P^{-1}$ $\qquad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ st les valeurs propres de A.

car $\det(A - \lambda I) = \det(PTP^{-1} - \lambda P I P^{-1})$

$= \det(P(T-\lambda I)P^{-1}) . = \det(T - \lambda I).$

$= (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$

$$A^k = \underbrace{PTP^{-1} \times PTP^{-1} \times \dots \times PTP^{-1}}_{k \text{ fois}} = P . T^k . P^{-1}.$$

et $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow Sp(A^k) = \{ \lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k \}.$

Corollaire: $\rho(A^k) = \rho(A)^k.$

(car $|\lambda_i^k| = |\lambda_i|^k.$).

→ produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme: $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sup_{y \neq 0} \frac{|{}^t y x|}{\|y\|_2}$

preuve: $\forall y \neq 0,$ $\frac{|{}^t y x|}{\|y\|_2} \underset{C.S.}{\leq} \frac{\|y\|_2 . \|x\|_2}{\|y\|_2} = \|x\|_2.$

$\Rightarrow \sup_{y \neq 0} \frac{|{}^t y x|}{\|y\|_2} \leq \|x\|_2.$

si $y = x$, $\frac{|{}^t y x|}{\|y\|_2} = \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2} = \|x\|_2.$ → sup atteint

⇒ on a montré le lemme.

Ex. 1 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1- $\|A\|_c = \max_{j} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}_{\text{somme sur la colonne } j}$.

Mq : $|||A|||_1 \leq \|A\|_c$.

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

on a : $|||A|||_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$

$[Ax]_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \longrightarrow \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$

$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$

$\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |x_k|}_{= \|x\|_1}$

$\Rightarrow |||A|||_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|x\|_1 \times \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \times \frac{1}{\|x\|_1} = \max \sum |a_{ij}| = \|A\|_c$

2- Mq : $|||A|||_1 \geq \|A\|_c$.

on considère : $j_0 \in \mathbb{N}$, tq : $\|A\|_c = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|$

x tq : $x_{j_0} = 1$ et $x_j = 0$ si $j \neq j_0$. $\rightarrow [Ax]_i = a_{ij_0}$

$|||A|||_1 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1$ $\qquad \|A\|_c = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ $\qquad \|Ax\|_1 = \sum |a_{ij_0}| = \|A\|_c$

$\Rightarrow \|A\|_c = \|Ax\|_1$

avec x défini comme ci-dessus. (et $\|x\|_1 = 1$)

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i_0 1} & & a_{i_0 j_0} & & a_{i_0 n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j_0} \\ \vdots \\ a_{ij_0} \\ \vdots \\ a_{nj_0} \end{pmatrix}$$

$\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}| \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|$

on considère que le max est atteint en j_0.

car max atteint car max sur un ensemble fini.

3- en déduire : (1).

on a : $|||A|||_1 \leq \|A\|_c$ $\qquad$ $|||A|||_1 \geq \|A\|_c$

donc : $|||A|||_1 = \|A\|_c = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ $\qquad$ (1)

4- $\|A\|_L = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Mq: $|||A|||_\infty \leq \|A\|_L$.

$$|||A|||_\infty = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

$\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$\|Ax\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right|$

or : $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik} x_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}| \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|_\infty} \leq \|x\|_\infty \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$

d'où : $\|Ax\|_\infty \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|x\|_\infty \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}| = \|x\|_\infty \cdot \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|x\|_\infty \|A\|_L$

$$\Rightarrow |||A|||_\infty = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\|x\|_\infty \|A\|_L}{\|x\|_\infty} = \|A\|_L$$

5- Mq: $|||A|||_\infty \geq \|A\|_L$.

on considère : $i_0 \in \mathbb{N}$, tq: $\|A\|_L = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$.

x tq: $x_j = 1$ si $a_{i_0 j} \geq 0$.
$\qquad\quad -1$ si $a_{i_0 j} < 0$.

$$Ax \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0i_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow = \|A\|_L$$

on considère que le max est atteint en i_0.

$[Ax]_i \leq [Ax]_{i_0}$
$i \neq i_0$

$\rightarrow \|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |[Ax]_i| = \|A\|_L.$

$\text{or}: \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| = 1.$

$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|Ax\|_\infty \le \sup \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

donc : $|||A|||_\infty = \sup \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \|Ax\|_\infty = \|A\|_L.$

6- en déduire (2) :

on a : $|||A|||_\infty \le \|A\|_L$ $\qquad |||A|||_\infty \geq \|A\|_L.$

donc : $|||A|||_\infty = \|A\|_L = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (2).

Ex. 2 :

$\|A\|_S = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Mq : $\|A\|_S = \sqrt{tr({}^tAA)}$.

ie : mq : $tr({}^tAA) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.

$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ $\longrightarrow [{}^tAA]_{ij} = \sum_{k=1}^n [{}^tA]_{ik} [A]_{kj}$

or : $[{}^tA]_{ij} = [A]_{ji}$

$\Rightarrow [{}^tAA]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$

de plus : $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ $\longrightarrow tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki} = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$

ie : $\|A\|_S = \sqrt{tr({}^tAA)}$!

2- $\|I\|_S \overset{?}{=} \sqrt{tr({}^tII)} = \sqrt{tr(I^2)} = \sqrt{tr(I)} = \sqrt{n}$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

$\|.\|_S$ induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$? $(n \geq 2)$.

pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ et $\|A\|_S = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

$\|Ax\|_2 = \left(\sum_{i,j} |a_{ij} x_j|^2\right)^{1/2}$ $\longrightarrow$ pas induite ~~S~~ $\Leftarrow$

$\rightarrow$ norme matricielle induite par une norme vectorielle : $\|A\|_S \overset{?}{=} \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

on a : $\|I\|_S = \sqrt{n}$.

$\|Ix\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 \implies \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} 1 = 1 \neq \sqrt{n}$

pour $n \geq 2$.

donc

3- Mq : $\|AB\|_S \leq \|A\|_S \cdot \|B\|_S$.

on a : $\|AB\|_S = \left(tr({}^t(AB)AB)\right)^{1/2} = \left(tr({}^tB{}^tAAB)\right)^{1/2} = \left(tr({}^tAAB{}^tB)\right)^{1/2}$

$\|A\|_S \times \|B\|_S = \left(tr({}^tAA)\right)^{1/2} \times \left(tr({}^tBB)\right)^{1/2} = \left(tr({}^tAA)\,tr({}^tBB)\right)^{1/2}$.

Mq : $tr({}^tAAB{}^tB) \leq tr({}^tAA)\,tr({}^tBB)$.

$[{}^tBB]_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} b_{kj}$.

$[B{}^tB]_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk}$.

${}^t({}^tBB) = {}^tBB$

$tr({}^tA) = tr(A)$.

$tr({}^tBB) = \sum_{i=1}^n [{}^tBB]_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ki} b_{ki} = \sum_{i,k} |b_{ki}|^2$.

$tr(B{}^tB) = \sum_{i=1}^n [B{}^tB]_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{ik} = \sum_{i,k} |b_{ik}|^2$.

$=$ ie : $tr({}^tBB) = tr(B{}^tB)$.

$tr(A \times B) \leq tr(A) \times tr(B)$?

3- on pose : $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle = tr({}^tAB)$.

est un produit scalaire, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ainsi : $\|A\|_S^2 = \sqrt{tr({}^tAA)} = \sqrt{\langle A, A \rangle}$. $\longrightarrow$ la norme de Schur dérive de ce produit scalaire.

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

on obtient : $|\langle A, B \rangle| \leq \|A\|_S \cdot \|B\|_S$.

on note : $C = AB \Rightarrow c_{ij}^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)^2$

$= (A_{i,\cdot} \cdot B_{\cdot,j})^2 \leq \|A_{i,\cdot}\|_S^2 \|B_{\cdot,j}\|_S^2$

(inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$).

d'où : $\|C\|_S^2 = \sum_{i,j} |c_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j} \|A_{i,\cdot}\|_S^2 \|B_{\cdot,j}\|_S^2$

$\|AB\|_S^2$

$= \left(\sum_i \|A_{i,\cdot}\|_S^2\right)\left(\sum_j \|B_{\cdot,j}\|_S^2\right)$

$= \left(\sum_i \sum_k a_{ik}^2\right)\left(\sum_j \sum_k b_{kj}^2\right) = \|A\|_S^2 \|B\|_S^2$.

soit : $\|AB\|_S^2 \leq \|A\|_S^2 \|B\|_S^2$.

ie : $\|AB\|_S \leq \|A\|_S \|B\|_S$.

Ex. 3 :

rayon spectral : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|.$$

Mq : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$. $= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$.

1- Mq : $\lambda \in Sp({}^tAA) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^+$.

A, diagonalisable dans une base orthonormée.

$Sp({}^tAA) = ?$

soit $\lambda \in Sp({}^tAA)$ ie : $\exists x \neq 0$, ${}^tAAx = \lambda x$.

Remarques : $M = {}^tAA$.

- ${}^tM = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = M$. $\longrightarrow$ M est symétrique.
- M est réelle.

$\Rightarrow$ M est symétrique réelle donc ses valeurs propres s^t réelles.
et est diagonalisable dans une base orthonormée.

on doit encore mq : les vp. de M sont positives.

on a :

λ, vp de M ie : $MX = \lambda X$.
$\exists X \neq 0$. ${}^tAAX = \lambda X$.

$${}^tX{}^tAAX = \lambda {}^tXX.$$

$${}^t(AX)AX = \lambda {}^tXX = \lambda \cdot \|X\|_2^2.$$

$$= \|AX\|_2^2.$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}\right)^2 \geq 0.$$

2. Rq : $|||A|||_2 \leq \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

$$|||A|||_2 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\rho({}^tAA) = \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} |\lambda| = \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} \lambda$$

$$\|Ax\|_2^2 = ({}^t(Ax) \times Ax) = \sum_{i=1}^n [Ax]_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$[Ax]_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

${}^tAA$ diag. ie : $\exists D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et P, inv. tq : ${}^tAA = PDP^{-1}$.

si $x = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n$. avec (V_i) vecteurs propres de ${}^tAA$.

alors : ${}^tx({}^tAA)x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$

$$= {}^t(Ax)Ax = \|Ax\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2\right)^{1/2}.$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right)^{1/2}.$$

$$\Rightarrow \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}\right)^{1/2}$$

$\lambda_i \leq \max \lambda$.

$$\leq \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} \lambda \times \frac{\sum \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2} = \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} \lambda.$$

ie : $|||A|||_2 \leq \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

3- Mq : $|||A|||_2 \geq \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

soit x, Vp de ${}^tAA$. associé à μ, vp. de module max.

$\longrightarrow$ calculer $\|Ax\|_2$.

$${}^tAAx = \mu x. \qquad \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} |\lambda| = |\mu| = \mu. \qquad (\geq 0).$$

$$\|Ax\|_2^2 = ({}^tAx)(Ax) = {}^tx\,{}^tAAx = {}^tx\mu x = \mu\,{}^txx = \mu\|x\|_2^2.$$

$$= \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} \lambda \cdot \|x\|_2^2 \geq \lambda\|x\|_2^2. \quad \lambda \in Sp({}^tAA).$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} \lambda. \quad \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = (\rho({}^tAA))^{1/2}.$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\lambda_i = \frac{\|Ax_i\|_2^2}{\|x_i\|_2^2}. \qquad \lambda_{i_0} = \rho({}^tAA) = \sup \lambda_i = \frac{\|Ax_i\|_2^2}{\|x_i\|_2^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} := |||A|||_2.$$

$$\overset{\shortparallel}{\sqrt{\rho({}^tAA)}}.$$

ie : $|||A|||_2 \geq \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Donc : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

4- Rq: $|||A|||_2 \leq \|A\|_S$.

On a:

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$$

$$\|A\|_S = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{tr({}^tAA)}.$$

$\rho({}^tAA) \leq tr({}^tAA) \Rightarrow |||A|||_2 \leq \|A\|_S$.

car vp. de ${}^tAA$ s^t ≥ 0 et les $tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$..

+ démonstration avec Cauchy-Schwarz. ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On veut mq: $|||A|||_2 \leq \|A\|_S$.

Cela revient à mq: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_S$.

ie $\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\|_2^2 \leq \|A\|_S^2 \cdot \|x\|_2^2}_{\text{à montrer}}$.

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j)^2}_{\substack{\text{prod. scalaire} \\ \text{canonique de } \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \\ \text{et } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^2 \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}_{= \|x\|_2^2}}_{= \|x\|_2^2 \times \sum (a_{ij})^2}$$

$= \|x\|_2^2 \cdot \|A\|_S^2$.

5- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique,

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A).$$

6- $|||.|||_2$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

donc, en particulier, définit une norme sur le sev des matrices symétriques

Or $|||.|||_2 = \rho$ sur le sev des matrices symétriques

donc ρ définit une norme sur ce sev.

MAIS: ρ ne définit pas une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

ex: $\rho\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

ex: $\rho\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

↳ vp $= \pm 1$.

$1 = \rho(A+B) > \rho(A) + \rho(B)$

→ inégalité triangulaire non vérifiée

7. Rq: $|||A|||_2 = |||{}^tA|||_2$.

on applique le lemme: $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sup\limits_{y \neq 0} \dfrac{|{}^tyx|}{\|y\|_2}$. ${}^tx({}^tAy)$.

$$|||A|||_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|{}^tyAx|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|{}^t({}^tAy)x|}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2}$$

$$= \sup_{y \neq 0} \frac{|{}^tAy|}{\|y\|_2}$$

$= |||{}^tA|||_2$.