TD 9 de probabilités appliquées

Rédacteurs : Mohamed Amine Mansour, Amine El Bouzid, Dilan Mahan
Examinateurs : Troy Fau, Antonin Genin, Nathan Gicquel

20 décembre 2020

Questions de cours

— Définition de la loi d'un couple de variables aléatoires réelles admettant une densité de probabilité :
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant une densité de probabilité $p(x, y)$ alors :
$\boxed{\forall B \subset \mathbb{R}^2, P((X, Y) \in B) = \int\int_B p(x, y)dxdy}$

— Lois marginales d'un couple de v.a (X, Y) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y)dy}$ et $\boxed{p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y)dx}$

Loi conditionnelle de X sachant $Y = y$: $\forall x \in R$, $\boxed{p_X(x \mid Y = y) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}}$

— Pour simuler un couple (X, Y) de v.a.r, on commence par simuler X de densité $p_X(x)$ puis Y sachant $X = x$ de densité $p_Y(y \mid X = x)$.

Exercice1

Soit T_A le temps de charge d'Abdel qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{2.3}$ et T_H le temps de charge d'Hanneke qui suit la loi exponentielle de paramètre λ

Question 1

Calculons la probabilité pour que le portable d'Abdel se décharge avant celui d'Hanneke.

$P(T_A < T_H) = \int_0^\infty P(T_A < T_H | T_H = t) f_{T_H}(t)\, dt = \int_0^\infty P(T_A < t) f_{T_H}(t)\, dt = \int_0^\infty \lambda(1 - e^{\frac{-\lambda t}{2.3}})e^{-\lambda t}\, dt = \lambda(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt - \int_0^\infty e^{\frac{-3.3\lambda t}{2.3}}\, dt) = [-e^{-\lambda t}]_0^\infty + [\frac{2.3}{3.3}e^{\frac{-3.3\lambda t}{2.3}}]_0^\infty = 1 + \frac{2.3}{3.3} = 1.69$ Faux

$[\frac{2.3}{3.3}e^{\frac{-3.3\lambda t}{2.3}}]_0^\infty = -\frac{2.3}{3.3}$ et donc $P(T_A < T_H) = 1 - \frac{2.3}{3.3} = \frac{10}{33} \approx 0.303$

Question 2

Vérification à l'aide d'une simulation l'algo de simulation est :

$lambda = 1.0$
$x = -log(1 - runif(1000000, 0, 1))/lambda$
$y = -log(1 - runif(1000000, 0, 1))/(lambda/2.3)$
$mean(x > y)$

On remarque qu'on obtient le même de résultat de l'exemple avec cette simulation

Exercice 2

Question 1

Soient A_h et A_a deux variables aléatoires décrivant l'instant d'arrivé de Hanneke et Abdel.
Donc d'après l'énoncé elles suivent la loi uniforme sur $(0, 1)$.
Alors :
La probabilité que Hanneke et Abdel se rencontrent est la probabilité que l'un deux vient après l'arrivée de l'autre et avant son départ.

$P = P([A_h, A_h + \frac{1}{6}] \cap [A_a, A_a + \frac{1}{6}] \neq \emptyset)$

Si Hanneke arrive a l'instant t ($A_h = t$) , Abdel doit arriver dans l'intervalle $I = [max(0, t - \frac{1}{6}), min(1, t + \frac{1}{6})]$.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 (\int_I ds)dt \\ &= \int_0^1 (min(1, t + \frac{1}{6}) - max(0, t - \frac{1}{6})dt \\ &= \int_0^1 g(t)dt \end{aligned}$$

Avec :

$$g(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{6} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{6}] \\ \frac{1}{3} & \text{si } t \in [\frac{1}{6}, \frac{5}{6}] \\ \frac{7}{6} - t & \text{si } t \in [\frac{5}{6}, 1] \end{cases}$$

Donc ,

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{1}{6}} (t + \frac{1}{6})dt + \frac{1}{3}.\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} dt + \int_{\frac{5}{6}}^1 (\frac{7}{6} - t)dt \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Exercice3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs 1 et 2.

Question 1

Montrons que la loi du couple (X,Y) admet la densité de probabilité suivante : $\forall$(x,y) $\in \mathbb{R}^2$, f(x,y) = $2e^{-2x-y}1_{\mathbb{R}^2}$(x,y)

On a $f_X(\text{x}) = e^{-x}$, $\forall x \geq 0$ et $f_Y(\text{y}) = 2e^{-2y}$, $\forall y \geq 0$

X et Y étant indépendantes alors $f_{XY}(\text{x,y}) = f_X(\text{x}) \times f_Y(\text{y})$ donc on en déduit que

$f_{XY}(\text{x,y}) = f_X(\text{x}) \times f_Y(\text{y}) = 2e^{-2x-y}1_{\mathbb{R}^2}(\text{x,y})$.

de plus on a $\int_0^\infty \int_0^\infty f_{XY}(\text{x,y})\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty 2e^{-2x-y}\, dx\, dy = \int_0^\infty 2e^{-2x}\, dx \int_0^\infty e^{-y}\, dy = [-e^{-2x}]_0^\infty \times [-e^{-y}]_0^\infty = 1$

et on a $f_{XY}(\text{x,y}) \geq 0$. Donc f(x,y) est bien la densité de probabilité du couple (X,Y).

Question 2

Soit la variable aléatoire $Z = X + Y$.

$\forall t \geq 0$, on a $P(Z \leq t) = P(X+Y \leq t) = P(X \leq t - Y) = P(X \leq t - Y | Y = y) P_Y(y)$
$= \int_0^t 2(1 - e^{-t+y}) e^{-2y} \, dy \ = 2(\int_0^t e^{-2y} \, dy \ - \int_0^t e^{-t-y} \, dy \,)$
$= 2([-\frac{1}{2} e^{-2y}]_0^t - [-e^{-t-y}]_0^t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} = (1 - e^{-t})^2$

Calculons l'epérance de Z
$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[X+Y] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Question 3

Calculons l'espérance de T où $T = XY$
$\mathrm{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^\infty xy f_{XY}(x,y) \ \, dx \, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty 2xye^{-2y-x} \, dx \, dy = 2 \int_0^\infty xe^{-x} \, dx \int_0^\infty ye^{-2y} \, dy.$

On a $\int_0^\infty xe^{-x} \, dx \ = [-xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \, dx \ = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$
et $\int_0^\infty ye^{-2y} \, dy \ = [-\frac{1}{2} ye^{-2y}]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-2y} \, dy \ = [-\frac{1}{4} e^{-2y}]_0^\infty = \frac{1}{4}$
D'où $\mathrm{E}[XY] = 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
ou par indépendance de X et Y, $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X] \, \mathrm{E}[Y] = \frac{1}{2}$

Exercice 4

Question 1

- *Soit* $t \in (0,1)$

$P(Y \leq t \mid X = x) \ = \ P(UV \leq t \mid U = x) \ = \ P(V \leq \frac{t}{x})$

$$P(V \leq \frac{t}{x}) = \begin{cases} \frac{t}{x} & \text{si } t < x \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'autre part on a :

$P(Y \leq t \mid X = x) \ = \ \int_0^t f_Y(s|X=x) ds$
Donc en dérivant on obtient :

$$f_Y(y|X=x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } y < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y|X=x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{0<y<x<1}(x,y)$$

- On a d'après le cours $f_Y(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

Et puisque X$\sim$ $U(0,1)$ | alors $f_X(x) = 1$
Et par suite $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{0<y<x<1}(x,y)$

- $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0<y<x<1}(x,y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln(y)$

Question 2

- $P(Y \leq t) = \int_{\mathbb{R}} P(Y \leq t \mid X = x) f_X(x)dx = \int_0^1 P(Y \leq t \mid X = x)dx$

Car $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$
Alors :
$P(Y \leq t) = \int_0^1 P(V \leq \frac{t}{x})dx = \int_0^t dx + \int_t^1 \frac{t}{x}dx = t - t\ln(t)$

• La fonction de répartition de Y est :
$F(t) = P(Y \leq t) = t - t\ln(t)$ Donc après dérivation on obtient :

$f_Y(y) = -\ln(y) \quad \forall y \in (0,1)$

Exercice 5

Question 1

On a $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$

De plus : $E(X) = \int_0^1 P(X \geq x)dx$ et $E(Y) = \int_0^1 P(Y \geq y)dy$

D'un autre côté : $P(X \geq x) = P(U \geq x, V \geq x) = P(U \geq x).P(V \geq x) = (1-x)^2$
et $P(Y < y) = P(U < y, V < y) = P(U < y).P(V < y) = y^2$ (Indépendance de U et V et lois uniformes)

Donc $P(X \geq x) = (1-x)^2$ et $P(Y \geq y) = 1 - y^2$

Ainsi : $E(X) = \frac{1}{3}$ et $E(Y) = \frac{2}{3}$

Aussi : $E(XY) = \int_0^1 E(XY \mid X = x).p_X(x)dx$

Donc $E(XY) = \int_0^1 E(xY).p_X(x)dx$

Or $\forall t \in (0,1), P(X \leq t) = 1 - (1-t)^2$, et donc $p_X(t) = 2.(1-t)$

Donc $E(XY) = \int_0^1 x.E(Y).2.(1-x)dx$

Donc $E(XY) = \frac{4}{3}\int_0^1 x.(1-x)dx$

Donc $E(XY) = \frac{2}{9} = E(X).E(Y)$

D'où $\boxed{Cov(X,Y) = 0}$

Pourtant, $\boxed{\textit{les variables } X \textit{ et } Y \textit{ ne sont pas independantes}}$. En effet :

Pour $a \in (0,1), P(Y \in (0,a) \mid X = a) = 0$ alors que $P(Y \in (0,a)) \neq 0$

Question 2

On a : $P((X,Y) \in B) = P((X,Y) \in B \mid U < V).P(U < V) + P((X,Y) \in B \mid U \geq V).P(U \geq V)$

Donc $P((X,Y) \in B) = P((U,V) \in B).P(U < V) + P((V,U) \in B).P(U \geq V)$

Or $P((U,V) \in B) = \int\int_B p(u,v)dudv = \int\int_B p_U(u).p_V(v)dudv = \int\int_B 1_{(0,1)^2}dudv = P((V,U) \in B)$

Sachant que $P(U < V) + P(U \geq V) = 1$ alors :

$P((X,Y) \in B) = \int\int_B 1_{(0,1)^2}dudv$

Donc $P((X,Y) \in B) = \int\int_B 1_{0<u<v<1}dudv + \int\int_B 1_{0<v\leq u<1}dudv$

De plus $P(U < V) = \int_0^1 P(U < V \mid V = v).p_V(v)dv$

Donc $P(U < V) = \int_0^1 P(U < v)dv$

Donc $P(U < V) = \int_0^1 vdv = \frac{1}{2} = P(U \geq V)$

On a donc équiprobabilité, ce qui fait que : $\boxed{P((X,Y) \in B) = 2 \int \int_B 1_{0<u<v<1} dudv}$

On a montré que $P((X,Y) \in B) = 2 \int \int_B 1_D(u,v)dudv$

Or, par définition : $P((X,Y) \in B) = \int \int_B f(x,y)dxdy$

Donc : $\boxed{f(x,y) = 2.1_D(x,y)}$

Question 3

- Densité de la loi de Y :

Soit $y \in (0,1)$: $p_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$

Donc $p_Y(y) = \int_0^1 2.1_D(x,y)dx$

Donc $p_Y(y) = \int_0^y 2dx$

D'où : $\boxed{p_Y(y) = 2.y}$

- Soit $t \in (0,y)$: $P(X \leq t \mid Y = y) = \int_0^t p_X(x \mid Y = y)dx$ (En effet : $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$)

Donc $P(X \leq t \mid Y = y) = \int_0^t p_X(x \mid Y = y)dx$

Donc $P(X \leq t \mid Y = y) = \int_0^t \frac{f(x,y)}{p_Y(y)}dx$

Donc $P(X \leq t \mid Y = y) = \int_0^t \frac{2.1_D(x,y)}{2.y}dx$

Donc $P(X \leq t \mid Y = y) = \int_0^t \frac{1}{y}dx$ (car $x \leq t < y$)

Donc $P(X \leq t \mid Y = y) = \frac{t}{y}$

La fonction de répartition est ainsi dérivable et donc : $\forall x \in (0,y), p_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{y}$

$\boxed{\textit{Ce qui prouve que la loi conditionnelle de } X \textit{ sachant } Y = y \textit{ est uniforme sur } (0,y)}$

- Soit $t \in (0,1)$: $P(U.\sqrt{V} \leq t) = \int_0^1 P(U.\sqrt{V} \leq t \mid V = v).p_V(v)dv$

Donc $P(U.\sqrt{V} \leq t) = \int_0^1 P(U.\sqrt{v} \leq t)dv$ ($p_V(v) = 1$, loi uniforme sur (0,1))

Donc $P(U.\sqrt{V} \leq t) = \int_0^1 P(U \leq \frac{t}{\sqrt{v}})dv$

Donc $P(U.\sqrt{V} \leq t) = \int_0^{t^2} P(U \leq \frac{t}{\sqrt{v}})dv + \int_{t^2}^1 P(U \leq \frac{t}{\sqrt{v}})dv$

On distingue ainsi les cas où $\frac{t}{\sqrt{v}} \geq 1$ et $\frac{t}{\sqrt{v}} \leq 1$

Donc $P(U.\sqrt{V} \leq t) = \int_0^{t^2} 1dv + \int_{t^2}^1 \frac{t}{\sqrt{v}}dv$

D'où $P(U.\sqrt{V} \leq t) = 2.t - t^2$, et ainsi la fonction de répartition est dérivable

Ce qui fait que $\forall t \in (0,1)$: $\boxed{p_{U\sqrt{V}}(t) = 2.(1-t) = p_X(t)}$

Pour $t \in (0,1)$: $P(\sqrt{V} \leq t) = P(V \leq t^2) = t^2$

La fonction de répartition est là aussi dérivable et : $\forall t \in (0,1)$: $\boxed{p_{\sqrt{V}}(t) = 2.t = p_Y(t)}$

$\boxed{\textit{On en conclut donc que } (X,Y) \textit{ et } (U.\sqrt{V}, \sqrt{V}) \textit{ ont la meme loi}}$

Question 4

D'après la questions précédente, (X,Y) a la même loi que $(U.\sqrt{V}, \sqrt{V})$ donc $X+Y$ a la même loi que $U.\sqrt{V} + \sqrt{V}$

Or $X = min(U,V)$ et $Y = max(U,V)$ donc la loi de $X+Y$ est celle de $U+V$

$\boxed{\textit{Ce qui fait que } U+V \textit{ et } (U+1)\sqrt{V} \textit{ ont la meme loi}}$