Théorèmes de croissance comparée

La comparaison des croissances respectives des fonctions e^x, x^n et $\ln x$ peuvent permettre de levercertaines indéterminations se présentant lors du calcul des limites de fonctions.

Nous avons (pour n$\in \mathbb{N}^*$) :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Exemple d'application 1

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \times e^x}{x^6 \ln x}$

• Nous allons nous ramener à une formule du cours :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \times e^x}{x^6 \ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3 \times e^x}{x^7} \dfrac{x}{\ln x} \right)$

• Appliquons les théorèmes de croissance comparée :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \times e^x}{x^7} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

• Conclusion :

Nous avons donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \times e^x}{x^6 \ln x} = +\infty$

Exemple d'application 2

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - x^4 \ln x) = +\infty$

• Nous pouvons nous ramener à une formule du cours, afin d'appliquer les théorèmes de croissance comparée.

Pour cela, mettons en facteur le terme dominant :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - x^4 \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^5 \left(1 - \dfrac{\ln x}{x} \right) \right]$

Nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$.

Et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x} \right) = 1$

• Conclusion :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 (1 - \dfrac{\ln x}{x}) = +\infty$.

On a bien : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - x^4 \ln x) = +\infty$

Exemple d'application 3

Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2} \right)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} (x - 2) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} (\dfrac{1}{x-2}) = -\infty$

Posons $X = \frac{1}{x-2}$. Ce changement de variable nous permet d'utiliser le fait que :

$\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ pour déduire que :

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2} \right) = 0$$