Séance de travaux dirigés 1 - Première partie

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM1.html)

- Rappeler la définition d'une mesure de probabilité.
- Rappeler la définition d'une suite croissante d'événements.
- Soit (A_n) une telle suite. Que peut-on dire de la suite des probabilités $P(A_n)$?

Exercice 1

Question 1

Soit X un nombre positif mesuré à l'issue d'une épreuve aléatoire. On suppose que

$$\forall 0 \leq s \leq t < \infty , \quad P(X \in [s,t)) = \int_s^t e^{-x} dx.$$

- Pour tout $t \geq 0$, montrer que $P(X \geq t) = e^{-t}$.
- Calculer $P(\sin X \geq 0)$.

Question 2

Soit U un nombre pris au hasard dans $[0, 1]$ tel que

$$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1 , \quad P(U \in [a,b)) = b - a.$$

- Pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$, calculer la probabilité $P(\ln(1/U) \in [s,t))$.
- En déduire une manière d'obtenir un nombre au hasard ayant les mêmes propriétés que X.

Question 3

Le langage R dispose de nombreux generateurs aléatoires, dont un générateur de variables aléatoires uniformément réparties sur (0,1).

- En utilisant le générateur aléatoire de loi uniforme **runif**, effectuer $n = 1000000$ simulations de la variable X.

```
n = 1000000
x <- -log(runif(n))
```

- Calculer la fréquence de l'événement $X > 1$ et comparer cette valeur empirique à la valeur théorique calculée dans la question 1. Idem pour la probabilité de l'événement $(\sin(X) > 0)$.

```
mean(x > 1)
```

```
## [1] 0.368104
```

```
exp(-1)
```

```
## [1] 0.3678794
```

```
mean(sin(x) > 0)
```

```
## [1] 0.958806
```

Séance de travaux dirigés 1 - Deuxième partie

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM1.html)

- Soit deux événements A et B de probabilité non-nulle. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B.
- Enoncer la *formule des probabilités totales* et les conditions sous lesquelles elle s'applique.
- Soit A un événement. On répète une épreuve jusqu'à ce que la condition C de probabilité non-nulle soit réalisée. Quelle est la probabilité de l'événement A à l'issue de cette expérience ?

Exercice 1

La fonction sample (https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/base/html/sample.html) permet de tirer des nombres au hasard (avec ou sans remise), dans un ensemble fini. Par exemple, pour simuler n lancers d'un dé à 6 faces, on pourra définir la fonction suivante

```
de6 <- function(n) sample(1:6, n, replace = T)
```

Deux lancers pourront donner le résultat suivant

```
de6(2)
```

```
## [1] 1 3
```

On considère la variable X définie par le programme suivant

```
n = 1
x <- sample(1:de6(1), 1, replace = T)
```

- Calculer la probabilité P$(X = 6)$.
- Calculer la probabilité P$(X = 1)$.
- Vérifier que le résultat de l'expérience précédente est proche de vos prédictions.

```
for (i in 1:99999) x <- c(x,sample(1:de6(1), 1, replace = T))
mean(x == 1)
```

```
## [1] 0.40921
```

Exercice 2

Dans le championnat de basketball de l'Uhgduzstan, il y a un tir sur trois à un point, un tir sur deux à deux points et un tir sur six à 3 points. Vlad Rabovitch est le meilleur joueur du pays. Lorsqu'il marque, sa probabilité de réussite à un point est de 1/2, à deux points de 1/3, à trois points de 1/4.

Question 1

- Quelle est la probabilité que Vlad marque lors d'un tir ?

Question 2

- Vlad vient de rater un tir. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré à trois points ?
- Vlad vient de réussir un tir. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré à trois points ?

Question 3

- Combien de tirs réussis doit-on attendre en moyenne avant de voir Vlad marquer à trois points ?

Exercice 3

Soient n un entier non-nul et $(p_i)_{i=1,\ldots,n}$ n nombres positifs dont la somme totale est égale à 1.

Question 1

- A partir d'un unique appel de la fonction runif (https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/Uniform.html), écrire un algorithme qui retourne l'entier i avec probabilité p_i.

Question 2

- Montrer que l'algorithme proposé est correct et évaluer le nombre moyen d'opérations effectuées.

Pierre ETORÉ
pierre.etore@univ-grenoble-alpes.fr

Proba appliquées TD1
Partie 1

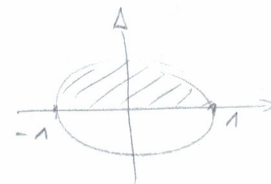
Q° cours :

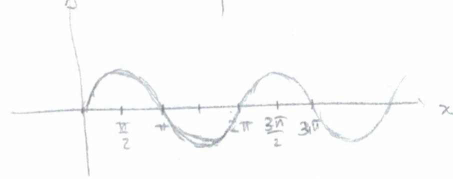
1) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un "ensemble fondamental muni d'une tribu"
Une "mesure de probas" $\mathbb{P}$ est une app $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$, $A \mapsto \mathbb{P}(A)$
tq $\forall (A_n)_{n\geq 0}$ suite d'elt disjoints de $\mathcal{A}$ on a $\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$
et tq $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (NB : cela implique $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$)

2) $(A_n)_{n\geq 0}$ suite $\nearrow$ d'evt $A_n \subset A_{n+1}$

3) Pour une telle suite on a $\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0} A_n)$ (tend en croissant)
(NB : se déduit du cas $\searrow$ par passage au complementaire)

Exercice 1 :





$x \in [0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi]$
$x \in \bigcup_{k\geq 0} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

Q1 : $\mathbb{P}(X \in [s,t)) = \int_s^t e^{-x}\,dx$

- $\mathbb{P}(X \geq t) = 1 - \mathbb{P}(X < t)$
$= 1 - \int_0^t e^{-x}\,dx$
$= e^{-t}$

- $\mathbb{P}(\sin X \geq 0) = \mathbb{P}(X \in [2p\pi, (2p+1)\pi]$ pour $p \geq 0)$
$= \mathbb{P}(\bigcup_{p\geq 0} \{X \in [2p\pi, (2p+1)\pi]\})$
$= \sum_{p\geq 0} \mathbb{P}(X \in [2p\pi, (2p+1)\pi]) = \sum_{p\geq 0} \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} e^{-x}\,dx$
$= \sum_{p\geq 0} (e^{-2p\pi} - e^{-(2p+1)\pi})$
$= \sum_{p\geq 0} (e^{-2\pi})^p - e^{-\pi} \sum_{p\geq 0} (e^{-2\pi})^p$
$= (1 - e^{-\pi}) \cdot \sum_{p\geq 0} (e^{-2\pi})^p$
$= 1 - e^{-\pi} \cdot \dfrac{1}{1 - e^{-2\pi}}$

$\mathbb{P}(\sin X \geq 0) \simeq 0{,}9585762$

Q2 :
- $\mathbb{P}(\ln \frac{1}{U} \in [s,t)) = \mathbb{P}(\frac{1}{U} \in [e^s, e^t)) = \mathbb{P}(U \in (e^{-t}, e^{-s}]) = \mathbb{P}(U \in [e^{-t}, e^{-s}))$ car U v.a.r de loi à densité.
$= e^{-s} - e^{-t} = [-e^{-x}]_s^t = \int_s^t e^{-x}\,dx = \mathbb{P}(X \in [s,t))$

- $\ln \frac{1}{U}$ a la m̂ loi que X.
D'où l'algo p. réaliser un "tirage" de X.
1) Tirer U
2) Renvoyer $\ln \frac{1}{U}$.

Q3 : La f^n runif tire n réalisations ind. de la va. U (de la Q2)
- La commande "x <-- log(runif(n))" crée le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) = (\log(\frac{1}{U_1}), \dots, \log(\frac{1}{U_n}))$
où les U_i sont ces réalisat° de U.
- La commande "mean(x>1)" renvoie $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i > 1}$ ← réalisat
Or $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X>1}] = \mathbb{P}(X > 1)$ (Loi des gds nbrs) ← va
Donc le resultat de "mean(x>1)" va ê très proche de $\mathbb{P}(X > 1) = e^{-1} \simeq 0.3678794$. ok. (2^e dec) ← a)
De même "mean(sin(x)>0)" $\to \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\sin x_i > 1}$ va ê proche de $\mathbb{P}(\sin X > 1) \simeq 0{,}9585762$ ok (3^e dec)

Partie 2 :

Q° cours :

- $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
- $\forall (B_i)_{i\geq 1}$ partition de Ω (ie les $B_i \in \mathcal{A}$ st disjoints et $\bigcup B_i = \Omega$)

  et $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\geq 1} P(A|B_i) P(B_i)$
- C'est $\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}(A|C)$ (algo de "rejet")

Exercice 1 :

- $\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}(X=6 | D=6) . \mathbb{P}(D=6)$

  $= \frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $\mathbb{P}(X=1) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X=1 | D=i) \mathbb{P}(D=i)$

  $= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i} \approx 0{,}408333...$

Exercice 2 :

- $P(X=1) = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = \frac{1}{2}$, $P(X=3) = \frac{1}{6}$
- $P(X=3 | \cap) = \frac{P(\{X=3\} \cap \cap)}{P(\cap)}$

Séance de travaux dirigés 2 - Première partie

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM2.html)

- Rappeler la définition de la loi geométrique (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_g%C3%A9om%C3%A9trique) et ses hypothèses de modélisation.
- Rappeler la définition de la loi binomiale (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_binomiale) et ses hypothèses de modélisation.
- Rappeler la valeur de l'espérance dans les deux cas.

Exercice 1

Dans un labyrinthe (http://www.agorat.org/articles/Rat_Behavior_and_Biology_:_Rats_et_labyrinthes), un rat se trouve face à 4 portes dont une seule le conduit à la sortie. Il choisit une porte au hasard. S'il ne sort pas, il est reconduit devant les 4 portes et peut faire un nouvel essai, éventuellement identique au précédent. On note X le nombre d'essais nécessaires au rat pour sortir du labyrinthe (https://fr.wikipedia.org/wiki/Labyrinthe_de_Morris).

Question 1

On observe que le rat n'a pas de mémoire. Il choisit l'une des quatre portes de façon équiprobable à chaque essai.

- Décrire la loi de la variable X.
- Donner l'espérance de la variable X.

Question 2

On observe que le rat a une mémoire parfaite. A chaque nouvel essai, il évite toutes les portes choisies précédemment et choisit au hasard de façon équiprobable parmi les restantes.

- Calculer les probabilités conditionnelles suivantes

$$\pi_i = \mathrm{P}(X = i + 1 | X > i), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

- Calculer la probabilité des événements $(X = i)$, pour tout $i = 1, \ldots, 4$, de manière itérative.
- Reconnaître la loi de la variable X et donner son espérance.

Question 3

On observe que le rat se souvient uniquement du résultat de la dernière expérience infructueuse et qu'il évite toujours la porte associée à cet essai infructueux.

- Montrer que la probabilité de l'événement $(X = 1)$ est égale à $1/4$.

- Pour tout $i \geq 1$, donner (sans calcul) la valeur de la probabilité conditionnelle suivante

$$\rho_i = \mathrm{P}(X > i + 1 | X > i).$$

- En déduire la probabilité de l'événement $(X = i)$ pour tout $i \geq 2$.

Question 4

Soit Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $3/4$ et G une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/3$, indépendante de Y. On pose

$$Z = 1 + YG .$$

- Montrer que la loi de la variable aléatoire Z est identique à celle de X.
- Calculer l'espérance de X.
- Vérifier votre calcul à l'aide d'une simulation en R (attention, la loi geométrique dans R est décalée en zéro).

```
n = 1000000
x <- 1 + rbinom(n,1,0.75)*(1 + rgeom(n, 1/3))
mean(x)
```

```
## [1] 3.250148
```

Exercice 2

Les shadoks (https://fr.wikipedia.org/wiki/Les_Shadoks) fabriquent des fusées qui décollent avec une probabilité égale à un sur un million. Le professeur Shadoko (https://fr.wikipedia.org/wiki/Professeur_Shadoko) prétend qu'il suffit de faire un million d'essais pour qu'une fusée décolle. On suppose que les lancements forment des épreuves identiques et indépendantes, dans lesquelles les fusées décollent ou ne décollent pas.

- Décrire la loi du rang d'apparition du premier décollage de fusée.
- Calculer la probabilité pour qu'aucune fusée ne décolle lors du premier million essais. Montrer que ce nombre est voisin de $1/e$.

Et pour finir une citation

"En essayant continuellement on finit par réussir. Donc : plus ça rate, plus on a de chance que ça marche."*

Professeur Shadocko

Séance de travaux dirigés 2 - Deuxième partie

Exercice 1

Un jeu nécessite le lancer d'un dé équilibré à 19 faces. Pour jouer à ce jeu, on dispose uniquement d'un dé à six faces que l'on peut lancer un nombre arbitraire de fois. On définit le coût du jeu comme le nombre moyen de lancers du dé à six faces permettant d'obtenir une réalisation de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, 19\}$.

Rappel : Théorème de la division euclidienne pour les entiers naturels (https://fr.wikipedia.org/wiki/Division_euclidienne). Soit a et b deux entiers naturels tels que b est non nul. Il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) satisfaisant $a = bq + r$ et $r < b$.

Question 1

Soit x un entier compris entre 1 et 36. Montrer qu'il existe un unique couple $(q^\star, r^\star) \in \{1, \ldots, 6\}^2$ satisfaisant

$$x = 6(q^\star - 1) + r^\star .$$

Indication : Diviser $(x - 1)$ par 6.

Question 2

On note N_1 et N_2 les résultats obtenus suivant deux lancers indépendants du dé à 6 faces.

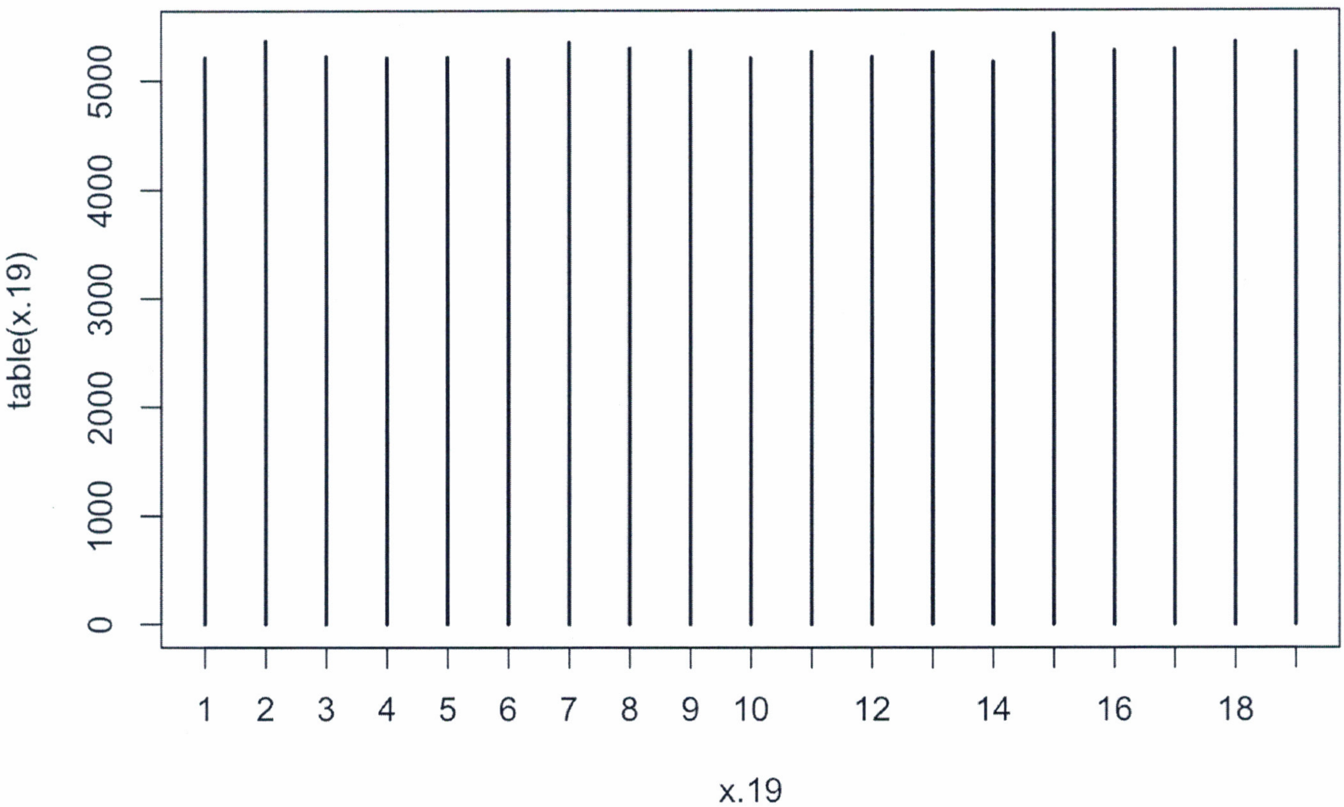
- Montrer que la variable $X = 6(N_1 - 1) + N_2$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, 36\}$.
- Proposer une procédure de rejet permettant de simuler le lancer d'un dé à 19 faces à partir du résultat précédent. Déterminer le coût du jeu ?

```r
de.6 <- function(n) sample(1:6, n, replace = T)
de.36 <- function(n) 6*(de.6(n)-1) + de.6(n)
de.19 <- function(n){
  d <- NULL
  for (i in 1:n){
    while ((x <- de.36(1)) > 19){}
    d <- c(x, d)
  }
  return(d)
}
n = 100000

# Temps de calcul
system.time(x.19 <- de.19(n))
```

```
##    user  system elapsed
##  28.852   1.027  29.972
```

```
# Histogramme des résultats
plot(table(x.19))
```



Question 3

- Proposer des fonctions permettant de simuler le lancer de dés à 4,5,10 ou 20 faces à partir du dé à six faces. Déterminer le nombre moyen de lancers du dé à six faces dans chacune de ces procédures.
- Proposer une procédure de rejet permettant de simuler le lancer d'un dé à 19 faces à partir d'un dé à 20 faces. Quel est le coût du jeu dans la procédure proposée ?
- Peut on trouver une procédure de coût moindre ?

P.A. TD2.

Partie 1:

· Question de cours :

- $N = \inf\{i \geq 1 ; X_i = 1\} \Rightarrow N \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

  On a $\mathbb{P}(N = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad \forall k \geq 1$

  On a $\mathbb{E}(N) = \frac{1}{p}$

- $\forall m \geq 1 \; : \; Y_m = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{X_i = 1} = \sum_{i=1}^{m} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ $\{0,1,\dots m\}$ X_i vaut déjà 0 ou 1

  Loi binom. donné par : $\mathbb{P}(X_m = k) = \binom{m}{k} \cdot p^k q^{m-k}$

  On a $\mathbb{E}(Y_m) = mp.$ $\left(Y_m = \sum_{i=1}^{m} X_i \Rightarrow \mathbb{E}(Y_m) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{= p} = \sum_{i=1}^{m} p = m \cdot p \right)$

Exercice 1:

Q1 : On note $Y_i = \mathbb{1}\{$le rat choisit la porte "sortie" à l'étape $i\}$
D'après les hypothèses les Y_i's sont i.i.d de loi $Ber(\frac{1}{4})$
Or $X = \inf\{i \geq 1 : Y_i = 1\}$ donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{4}) \rightarrow \mathbb{E}(X) = 4$

Q2 : Si $A \subset B$: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$

- $\pi_i = \mathbb{P}(X = i+1 \mid X > i) = \dfrac{1}{4-i}$ Si $i = 0$: $\frac{1}{4}$ Si $i = 1$: $\frac{1}{3}$ Si $i = 3$ on a déjà fait 3 essais : le dernier est le bon.

  $P(X=1) =$

- $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}$

  $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=2 \cap X>1) = \mathbb{P}(X=2 \mid X>1) \cdot \mathbb{P}(X>1) = \pi_1 \cdot (1 - \mathbb{P}(X=1)) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

  $\mathbb{P}(X=3) = \pi_2 (\cancel{1-}\mathbb{P}(X>2)) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

  $\mathbb{P}(X=4) = \pi_3 \cdot P(X>3) = 1 \, (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

- $X \hookrightarrow \mathcal{U}(4)$. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2}$

Q3 : Pas d'essai avant donc 1 chance sur 4.   ⚠ $X \in \mathbb{N}^*$ (il se rappelle que de la ~~3 porte~~ dernière) il lui reste

- $p_i = \mathbb{P}(X > i+1 \mid X > i) = \frac{2}{3}$ Il reste coincé avec la proba $1 - \frac{1}{3}$

- $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X \leq i \mid X > i-1) \cdot \mathbb{P}(X > i-1)$ (pour $i \geq 2$)

  $= (1 - \mathbb{P}(X > i \mid X > i-1)) \cdot \mathbb{P}(X > i-1)$

  $= \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X > i-1)$

  $= \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X > i-1 \mid X > i-2) \cdot \mathbb{P}(X > i-2)$

  $= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-2} \cdot \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X=1)$

  $= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-2} \cdot \frac{\cancel{3}}{4}$

Q4 :

- $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(YG = k-1) \quad \forall k \geq 1$

  $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(YG = 0) = \mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{4}$

$\forall k \geq 2$: $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(YG = k-1) = \mathbb{P}((Y=1) \cap (G = k-1)) \overset{Y \text{ et } G \text{ indep}}{=} \mathbb{P}(Y=1) \cdot \mathbb{P}(G = k-1) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{3}$

Donc Z a la m̂ loi que X (q. précédente) : $Z \overset{\mathcal{L}}{=} X$

• $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) = 1 + \mathbb{E}(YG) \overset{\text{ind}}{=} 1 + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(G) = 1 + \frac{3}{4} \times 3 = \frac{13}{4} = 3{,}25$

Partie 2 :

Exercice 1 :

Q1 : En utilisant l'indication et le T.D.E : $x-1 \in \mathbb{N}, 6 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists!(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tq $x-1 = 6q+r$ avec $r<6$

$x = 6q + \underbrace{r+1}_{\in\{1,\dots 6\}}$

$= 6(q+1-1) + r+1$

$= 6(q^*-1) + r^*$ avec $r^* = r+1$, $r^* \in \{1,\dots 6\}$

$q^* = q+1 \geq 1$ car $q \geq 0$

$q^* \leq 6$ car si $q^* = 7$ alors $q = 6$

et $x = 6\times 6 + r^* > 36$ car $r^* > 0$

Donc $\exists!(q^*,r^*) \in \{1,\dots 6\}^2$ tq $x = 6(q^*-1) + r^*$

Q2 :

• Soit $x \in \{1,\dots 36\}$ $\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(6(N_1-1)+N_2 = x) = \mathbb{P}(6(N_1-1)+N_2 = 6(q^*-1)+r^*) = \mathbb{P}(N_1 = q^* \cap N_2 = r^*)$

$= \mathbb{P}(N_1 = q^*) . \mathbb{P}(N_2 = r^*) = \frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

• Algo : . Repeter

$Y \leftarrow$ de36

jusqu'à ce que $(Y \leq 19)$ $\Leftrightarrow$

$Y = 0$

while $Y > 19$

Tirer $Y \leftarrow$ de36() ;

Renvoyer Y .

• Renvoyer Y

X va qui à la loi issue de de36 sous $\mathbb{P}$

à celle du 1er pt du 2

Soit $k \in \{1,\dots 19\}$: $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X = k \mid X \leq 19) = \frac{P(X=k \cap \cancel{X\leq 19})}{P(X\leq 19)} = \frac{P(X=k)}{P(X\leq 19)} = \frac{1/36}{19/36} = \frac{1}{19}$

sortie de l'algo

• Coût du jeu ?

N = nb de fois où on passe dans la boucle "while"

Coût moyen $\mathbb{E}(N)$

Or $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{19}{36}\right)$ $\Rightarrow \mathbb{E}(N) = \frac{36}{19}$

proba de sortir de la boucle while.

Séance de travaux dirigés 3 - Première partie

Exercice 1

Soit deux entiers (m, n) tels que $2 \leq 2m \leq n$. On lance un dé à $2m$ faces, puis un dé à n faces. On note M et N les numéros du premier et du second dé respectivement.

- Calculer la probabilité de l'événement $(\max\{M, N\} \leq m)$.
- Calculer la probabilité de l'événement $(M + N \leq m)$.

Exercice 2

Erwin a un chat (https://fr.wikipedia.org/wiki/Chat_de_Schr%C3%B6dinger) probabiliste. On suppose que le chat d'Erwin prend une et une seule décision par jour parmi les 4 possibilités suivantes : rester à l'intérieur de la maison, sortir à l'extérieur, rester à l'extérieur, rentrer à l'intérieur.

La décision quotidienne est prise à minuit (0h00). Lorsqu'il se trouve à l'intérieur, le chat d'Erwin sort avec la probabilité p. Lorsqu'il se trouve dehors, il rentre avec la probabilité q $(0 < p, q < 1)$. Le 31 d'ecembre 2015, considéré comme le jour zéro de l'année 2016, Erwin et son chat sont à l'intérieur de la maison.

Question 1

On note π_n la probabilité pour que le chat soit dehors le soir n, $n \geq 0$.

- Etablir la relation suivante

$$\forall n \geq 1, \quad \pi_n = (1 - p - q)\pi_{n-1} + p$$

Question 2

- Calculer π_n , ainsi que la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.

Séance de travaux dirigés 3 - Deuxième partie

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM3.html)

- Rappeler la définition d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire étagée. Quelle est l'espérance de ces variables aléatoires ?

Exercice 1

On joue à pile (P) ou face (F) avec une pièce équilibrée n fois de suite. On définit X_n comme le nombre de fois où l'on obtient le motif FF (http://www.lifl.fr/~jdelahay/pls/213.pdf) (compté avec les recouvrements). Par exemple, dans la réalisation suivante,

FFPFPFFFPFFPF

nous avons $n = 13$ et $X_n = 4$. En effet, le motif FFF contribue deux fois au nombre total. Pour $i = 1, \dots, n$, on note FF$_i$ l'événement "le motif FF apparaît à l'issue du lancer i".

Question 1

- Montrer que les événements (FF$_i$) ne sont pas indépendants.

Question 2

- Décrire X_n comme une variable étagée.
- En déduire la valeur de l'espérance E[X_n].
- Justifier que la loi de X_n n'est pas la loi binomiale.

Question 3

Soit (f_n) la suite de Fibonacci (https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci) définie par $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 4$, et initialisée par $f_2 = 3$ et $f_3 = 5$

- En raisonnant par récurrence, démontrer que

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = f_n/2^n, \quad n \geq 2$$

Indication : On appliquera la formule des probabilités totales (https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_des_probabilit%C3%A9s_totales) deux fois de suite (en prenant pour mesure de référence une mesure de probabilité conditionnelle).

Séance de travaux dirigés 4

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM3.html)

- Rappeler la définition d'une variable aléatoire étagée.
- Rappeler la définition d'une variable aléatoire de carré intégrable et de la variance (https://fr.wikipedia.org/wiki/Variance_(statistiques_et_probabilit%C3%A9s)) d'une telle variable aléatoire.

Exercice 1

On considère K intervalles ouverts $(I_k)_{k=1,\ldots,K}$ inclus dans l'ensemble $(0, 1)$, susceptibles de se recouvrir de manière arbitraire. Pour tout $k = 1, \ldots, K$, on note ℓ_k la longueur de l'intervalle I_k.

Soit U un point de l'intervalle $(0, 1)$ tiré au hasard suivant la loi uniforme et N le nombre d'intervalles contenant le point U.

On suppose dans les premières questions que $K = 10$ et que $\ell_k = 1/10$ pour tout $k = 1, \ldots, 10$.

Question 1

- Donner une représentation graphique des 10 intervalles, ainsi qu'une réalisation de la variable U et de la variable N correspondante.
- Représenter 2 situations extrêmes dans lesquelles les 10 intervalles sont soit d'intersection vide, soit d'intersection compl?te. Dans chacun des 2 cas, décrire la loi de la variable N. Donner son espérance et sa variance.

Question 2

Montrer que l'on peut écrire N comme une variable étagée

$$N = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k} ,$$

où l'on précisera la définition des événements (A_k) intervenant dans la somme.

- La loi de la variable N est-elle une loi binomiale ?
- Calculer l'espérance de la variable N.

Question 3

- Montrer que la variance de la variable N correspond au double de la somme des longueurs des intersections entre paire d'intervalles

$$\mathrm{Var}(N) = 2 \sum_{j<k} \mathrm{longueur}(I_j \cap I_k).$$

- En déduire que Var$(N) \leq 9$ et que la borne est optimale (elle est atteinte pour une configuration particulière des 10 intervalles).

Question 4

On suppose maintenant que K est quelconque et que les longueurs ℓ_k sont identiques.

- Calculer $\mathbb{E}[N]$ et donner une borne supérieure optimale pour la variance de N.
- Généraliser l'exercice à la dimension 2, où l'intervalle $(0, 1)$ est remplacé par le disque unité, et les intervalles (I_k) sont remplacés par des disques de rayons (r_k).

PA. TD3.

1ère partie :

Exercice 1.

- $\mathbb{P}(\max\{M,N\} \leq m) = \mathbb{P}(M \leq m \cap N \leq m) = \mathbb{P}(M \leq m) . \mathbb{P}(N \leq m) = \frac{m}{2m} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{2n}$

- $\mathbb{P}(M+N \leq m) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} (M = k \cap N \leq m-k)\right)$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}(M=k) . \mathbb{P}(N \leq m-k)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2m}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2m} . \frac{m-k}{n}$$

$$= \frac{1}{2mn}\left(\sum_{k=1}^{m-1} m - \sum_{k=1}^{m-1} k\right)$$

$$= \frac{1}{2mn}\left(m.(m-1) - \frac{(m-1).m}{2}\right)$$

$$= \frac{m-1}{4n}$$

Exercice 2.

- $\mathbb{P}(X_n = E) = \mathbb{P}(X_n = E \mid X_{n-1} = I) . \mathbb{P}(X_{n-1} = I) + \mathbb{P}(X_n = E \mid X_{n-1} = E) . \mathbb{P}(X_{n-1} = E)$

$$= p(1 - \pi_{n-1}) + (1-q) . \pi_{n-1}$$

$$= (1 - q - p)\pi_{n-1} + p$$

- ~~On cherche le pt fixe.~~

C'est une equa diff : on résoud !

$\lambda^n = (1-p-q)\lambda^{n-1} \Rightarrow \lambda = (1-p-q) \Rightarrow (1-p-q)^n$ sol° de l'eq. homogène.

Sol° part : $v_n = \frac{p}{p+q}$

Verif : $(1-p-q)v_n + p = \frac{p}{p+q} - p + p = \frac{p}{p+q} = v_{n+1}$

Donc $A(1-p-q)^n + \frac{p}{p+q}$ sol° générale

On utilise $\pi_0 = 0$ pour trouver. $A + \frac{p}{p+q} = 0 \Leftrightarrow A = \frac{-p}{p+q}$

$$\pi_n = \frac{-p}{p+q}(1-p-q)^n + \frac{p}{p+q} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{p}{p+q}$$

2e partie :

Question de cours : X étagée. $X = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ $\quad \mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{P}(A_i)$

Exercice 1 :

Q1. $P(FF_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$P(FF_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(FF_2) . P(FF_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Et $P(FF_3 \cap FF_2) = \mathbb{P}(FFF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{16}$.

$$X_n = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{1}_{FF_i}$$

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum \mathbb{P}(FF_i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times (n-1)$$

Pas de succession d'épreuves indep.

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 4$ $\quad f_2 = 3$ et $f_3 = 5$.

(I) $P(X_2 = 0) = \cancel{0} \; 1 - 1/4 = \frac{3}{4}$ $\quad (X_2 = 0)$: on a eu FP ou PF ou PP

$\frac{f_2}{2^2} = \frac{3}{4}$ ok $\quad P(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$

(H) Soit $n \geq 2$. Supposons que $P(X_n = 0) = \frac{f_n}{2^n}$ et mq $P(X_{n+1} = 0$

?

TD 4

Questions de cours :

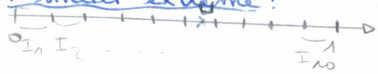
- $X \in \mathcal{L}^2$, si $E|X|^2 < +\infty$

$Var(X) = \mathbb{E}(|X - E(X)|^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Exercice 1 :

Q1 :

- 1e situat° extrême :



$N \in \{0, 1\}$ (à priori, $N = 0$ correspond à U tombe sur l'un des $\overline{I_i} \cap \overline{I_j}$

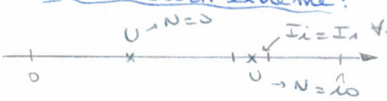
$\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(U \in \{0, \frac{1}{10}, \dots \frac{9}{10}, 1\}) = 0$ car U de loi à densité sur $[0,1)$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(N = 1) = 1$.

$\mathbb{E}(N) = 1$

$Var(N) = 1^2 - 1^2 = 0$

2e situation extrême :



$N \in \{0, 10\}$ $\quad \mathbb{P}(N = 0) = \frac{9}{10}$

$P(N = 10) = \mathbb{P}(N \in I_1) = \frac{1}{10}$

$\mathbb{E}(N) = \sum x_k P(N = x_k)$ $\quad 1/10$ $\quad \mathbb{E}(N) = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$ $\quad V(N) = \frac{100}{10} - 1 = 9$.

$= 0 \cdot P(N = 0) + 10 \times P(N = 10)$

$E(N^2) = \sum x_k^2 P(N = x_k) = 0 \cdot P(N = 0) + 10^2 \cdot P(N = 10) = \frac{100}{10}$

Q2 :

- $N = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{U \in I_k}$. Les $\mathbb{1}_{U \in I_k}$ sont indep. et identiquem^t distribués de loi $Ber(\frac{1}{10})$ $(1 \leq k \leq 10)$

$I_1 \cap I_2 = \emptyset$; $\mathbb{P}(U \in I_1 ; U \in I_2) = 0 \neq \mathbb{P}(U \in I_1) \cdot \mathbb{P}(U \in I_2)$

Donc on voit N a des chances de ne pas être binomiale $B(10, \frac{1}{10})$

Contre ex : Cas extrême n°1 : $\mathbb{P}(N = 1) = 1$

Si $Z \hookrightarrow B(10, \frac{1}{10})$, $\mathbb{P}(Z = 1) = 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^9 \neq 1$

- $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(U \in I_k)$

$= 10 \times \frac{1}{10}$ car $\mathbb{P}(U \in I_k) = \frac{1}{10}$ $\forall 1 \leq k \leq 10 = K$

Q3 : $V(N) = E(N^2) - E(N)^2$

$= \sum_{x_k \in [0,10]} x_k^2 P(N = x_k) - \left(\sum x_k P(N = x_k)\right)^2$

Séance de travaux dirigés 5

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM4.html)

- Rappeler la définition de la loi de Poisson (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Poisson) de paramètre $\lambda > 0$.
- Rappeler l'espérance de la loi de Poisson.
- Rappeler le théorème de transfert pour une loi discrète.
- Rappeler la formule de conditionnement pour une loi discrète.

Exercice 1

Au football (https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_du_jeu), on peut normalement marquer des buts de la tête ou du pied. On suppose que le nombre de buts marqués lors d'une partie est un nombre aléatoire K tiré suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

La probabilité pour qu'un but soit marqué de la tête est p, $0 < p < 1$, et on suppose que les buts sont marqués indépendamment les uns des autres.

Question 1

- Sachant que $K = k$ buts ont été marqués lors d'une partie, montrer que la probabilité conditionnelle pour que $L = \ell$ buts soient marqués de la tête est

$$\mathrm{P}(L = \ell \mid K = k) = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} p^{\ell}(1-p)^{k-\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, k$$

Question 2

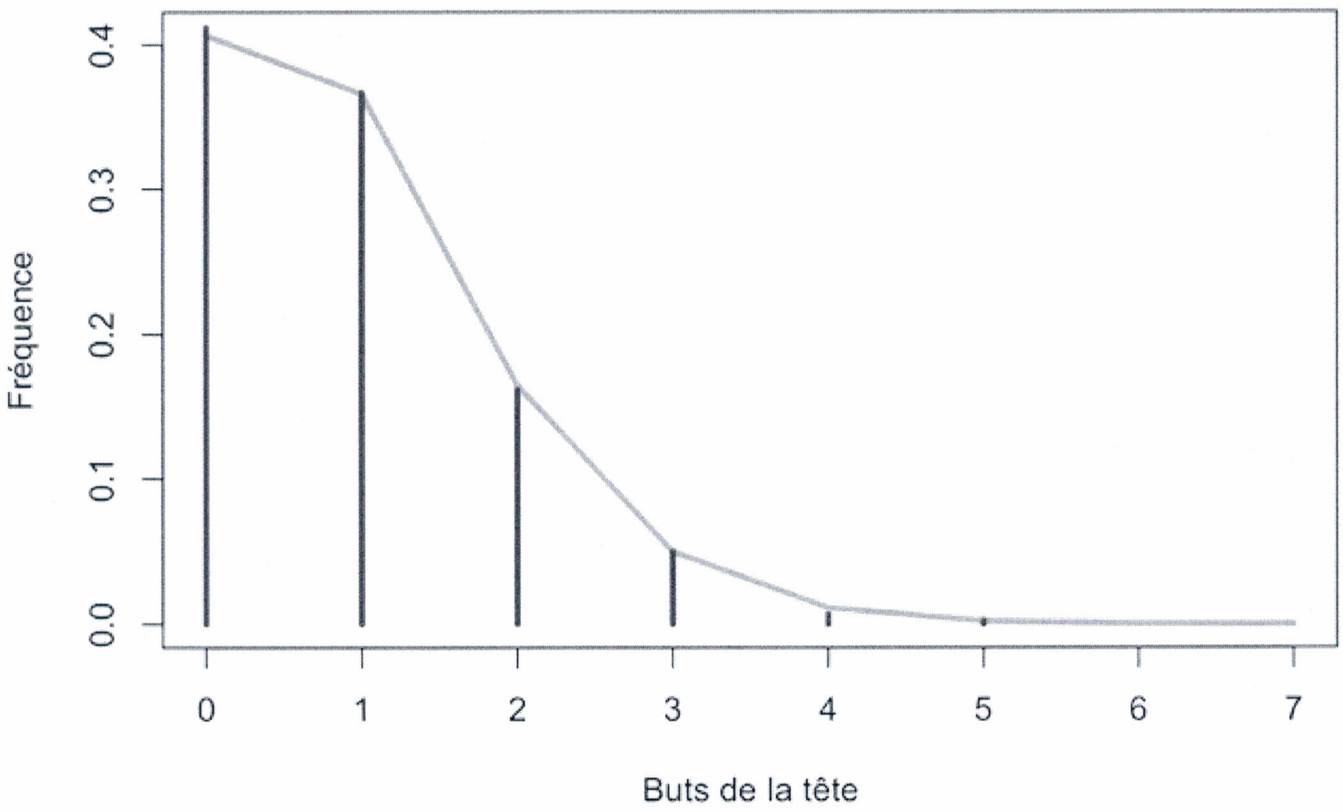
- En déduire la probabilité que l'on observe $L = \ell$ buts marqués de la tête lors d'une partie.
- Calculer l'espérance de la variable aléatoire L.

Les stats de la loose (http://www.lequipe.fr/Football/Actualites/Les-stats-de-la-lose/534110)

On suppose que le nombre moyen de but marqués (https://fr.wikipedia.org/wiki/Statistiques_et_records_du_championnat_de_France_de_football) par match de football est $\lambda = 2.37$. La probabilité de marquer de la tête est $p = .38$.

- Vérifier que la loi de L correspond au modèle calculé dans la question précédente

```
# Il y a 760 matches dans une saison régulière de ligue 1
K <- rpois(760, lambda = 2.37)
L <- rbinom(760, K, p = 0.38)
plot(0:7, dpois(0:7, lambda = 0.38*2.37), xlab = "Buts de la tête", ylab = "Fréquen
ce", col = "orange", lwd = 3, type = "l")
points(table(L)/sum(table(L)), type = "h", col = "blue", lwd = 3)
```



Question 3

En fait, le modèle est imparfait et il existe une probabilité $\epsilon > 0$ pour qu'un but soit marqué de la main (https://es.wikipedia.org/wiki/La_mano_de_Dios).

- Quelle est la probabilité d'observer au moins un but marqué de la main lors d'une partie ?

Exercice 2

Un rat (https://fr.wikipedia.org/wiki/Rat) se trouve dans un labyrinthe face à deux portes. Il choisit la première de ces deux portes avec probabilité 1/3 et la deuxième porte avec probabilité 2/3. Quand il choisit la première porte, il revient à son point de départ en une minute. Quand il choisit la deuxième porte, il effectue un trajet d'une minute jusqu'à un point intermédiaire, puis il rebrousse chemin avec la probabilité 1/2 (le retour lui prend alors une minute) ou il sort du labyrinthe en une minute avec la probabilité 1/2. Tous les choix du rat se font indépendamment les uns des autres.

Soit T le temps passé par le rat dans le labyrinthe. On cherche à déterminer l'espérance de T, puis la loi de T.

Question 1

Soit N le numéro de la porte choisie au départ du rat.

- Etablir une relation simple reliant $\mathrm{E}[T|N = 1]$ et $\mathrm{E}[T]$.
- Etablir une relation similaire reliant $\mathrm{E}[T|N = 2]$ et $\mathrm{E}[T]$.
- Appliquer la formule de conditionnement et en déduire la valeur de $\mathrm{E}[T]$.

Question 2

On note d, i et s les points de départ, intermédiaire et de sortie du rat, et on note X_n la suite aléatoire des points visités par le rat.

- Trouver la relation entre la loi de T et les probabilités conditionnelles suivantes

$$p_{ds}^n = \mathrm{P}(X_n = s|X_0 = d), \qquad n \geq 0.$$

- Montrer par récurrence que l'on a la relation suivante

$$p_{ds}^{n+1} = \frac{1}{3}(p_{ds}^n + p_{ds}^{n-1} + 1).$$

- Résoudre cette équation et en déduire la loi de T. Retrouver l'espérance de T par le calcul direct.

Q3. $Var(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2$

$$= -1 + \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}^2_{\{U\in I_k\}} + \sum_{\substack{j\neq k \\ 1\le j,k\le N}} \mathbb{1}_{U\in I_j}\cdot \mathbb{1}_{U\in I_i}\Big)$$

$$= -1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(U\in I_k)}_{=1} + 2\sum_{j<k} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{U\in I_j\}\cap\{U\in I_i\}})$$

$$= 2 \cdot \sum_{j<k} \mathbb{P}(U \in I_i \cap I_j)$$

$$= 2 \cdot \sum_{j<k} \ell(I_i \cap I_j)$$

$$\le 2 \cdot \sum_{k=2}^{10}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{10} \quad \text{car } \ell(I_i\cap I_j) \le \frac{1}{10}$$

$$= \frac{2}{10}(1+2+\dots+9) = \frac{2}{10}\cdot\frac{9\times 10}{2} = 9.$$

TD5

- Question de cours :

- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$: $\forall k\in\mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$
- $\mathbb{E}[X] = \lambda$.
- X v.a.d. (à val ds E dén. tq $\mathbb{P}(X=k)>0$)

$\varphi : E \to \mathbb{R}$ tq $E|\varphi(x)| < +\infty$

$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X\in B)$

. $\mathbb{E}(\varphi(x)) = \sum_{k\in E} \varphi(k)\cdot\mathbb{P}(X=k)$ $\left(= \int_E \varphi(x)\cdot \mathbb{P}_X(dx) = \int_\Omega \varphi(\lambda)\,d\mathbb{P}\right)$

loi de X : mesure de proba sur E

- $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \sum_{k\in E} \underbrace{\mathbb{E}(Y|X=k)}_{\frac{\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{\{X=k\}}]}{\mathbb{P}(X=k)}}\cdot\mathbb{P}(X=k)$

Exo 1 :

Q1. $\mathbb{P}(L=\ell \mid K=k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = \ell\right)$ où X_i sont iid de loi $\mathcal{B}(p)$

$= \binom{k}{\ell}\cdot p^\ell(1-p)^{k-\ell}$ pour $\ell = 0,\dots k)$

car $\sum X_p \hookrightarrow \mathcal{B}(k,p)$

(car, sachant $\{K=k\}$ tout se passe comme si on tirait k va $\hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ind dep, où $\{X_i = 1\}$ s'interprète en "le but est marqué de la tête,
$\{X_i = 0\}$ " pied

Q2. $\mathbb{P}(L=\ell) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} \mathbb{P}(L=\ell|K=k)\cdot\mathbb{P}(K=k)$

$$= \sum_{k=\ell}^{+\infty} \frac{\cancel{k!}}{\ell!(k-\ell)!}\, p^\ell\cdot(1-p)^{k-\ell}\, e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{\cancel{k!}}$$

$$= \frac{p^\ell\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^\ell}{\ell!}\cdot\underbrace{\sum_{k=\ell}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-\ell}(1-p)^{k-\ell}}{(k-\ell)!}}_{e^{\lambda(1-p)}}$$

$$\mathbb{P}(L=\ell) = \frac{(p\cdot\lambda)^\ell}{\ell!}\cdot e^{-p\lambda}$$

- $L \hookrightarrow \mathcal{P}(p\lambda)$ donc $\mathbb{E}(L) = p\lambda$

- La courbe en "gris clair" donne les valeurs $\mathbb{P}(X=k)$, $k\in[\![0,7]\!]$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(0{,}38\times 2{,}37)$

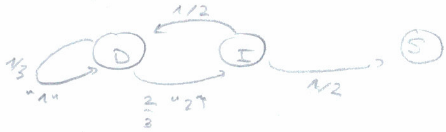
Le diag. en baton rep. un histogramme des val. de L qui on été tirées en :

1) On tire $K \hookrightarrow \mathcal{P}(2{,}37)$
2) On tire selon $\mathcal{B}(k, 0.38)$

Q3. $N_m \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda.\varepsilon)$; $\mathbb{P}(N_m \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(N_m = 0) = 1 - e^{-\varepsilon\lambda} = (\cancel{1} - \cancel{1} + \varepsilon\lambda - \frac{(\varepsilon\lambda)^2}{2} + \dots) = \Theta(\varepsilon)$

nbr de but marqué de la main

Exo 2 :



Q1 :

- $\mathbb{E}[T \mid N=1] = 1 + \mathbb{E}[T]$
- $\mathbb{E}[T \mid N=2] = 1 + 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[T])$

  $= 2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[T]$

  aller au pt inter. — sortie pondérée par la proba qu'il sorte

- $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T \mid N=1] . \mathbb{P}(N=1) + \mathbb{E}[T \mid N=2] . \mathbb{P}(N=2)$

  $= (1 + \mathbb{E}[T]) . \frac{1}{3} + (2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[T]) . \frac{2}{3}$

  $= \dots$

  $\mathbb{E}[T] = 5$

Séance de travaux dirigés 6

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM5.html)

- Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle
- Rappeler le théorème de transfert pour une loi continue.
- Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 1

Dans un jeu, on commence un tirage à pile ou face. Si on obtient pile, le gain, noté X, est une variable aléatoire U de loi uniforme sur (0,1), indépendante du tirage précédent. Sinon, le gain est $2U$. La probabilité d'obtenir pile est $p = 2/3$. Pour calibrer le prix du ticket, on souhaite calculer le gain moyen et le gain médian d'un joueur donné.

Question 1

- Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
- Justifier que la loi de X admet une densité de probabilité et décrire cette densité (sans calcul).

Question 2

- Calculer la valeur mediane de la variable X.
- Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Question 3

Soit Y une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $q = 1 - p$, indépendante de U.

- Montrer que X peut se représenter de la manière suivante

$$X = (1 + Y)U.$$

- En déduire la valeur de l'espérance de X.
- Vérifier les résultats par simulation d'un grand nombre, n, de joueurs.

```
n = 1000000
y <- rbinom(n, 1, p = 1/3)
x <- (1+y)*runif(n)
median(x)
```

```
## [1] 0.599924
```

```
mean(x)
```

```
## [1] 0.6665573
```

Exercice 2

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance de la variable X définie par

$$X = \sqrt{U}.$$

Question 1

- Calculer la fonction de répartition de X et en déduire la densité de la loi.
- En utilisant la densité de X, calculer l'espérance de X.
- Vérifier le résultat à l'aide d'une simulation

```
mean(sqrt(runif(1000000)))
```

```
## [1] 0.6667738
```

Question 2

- En utilisant la densité de la loi uniforme et le théorème de transfert, calculer l'espérance de X.
- En utilisant le fait que X est une variable aléatoire positive, calculer l'espérance de X d'une nouvelle manière.

Question 3

- Déterminer la variance de X sans calcul intégral.
- Vérifier le résultat à l'aide d'une simulation.

```
var(sqrt(runif(1000000)))
```

```
## [1] 0.05553382
```

Exercice 3

Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire

$$X = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Question 1

- Calculer la probabilité que la variable aléatoire X soit supérieure à t, pour tout t réel positif.

Question 2

- En déduire la fonction de répartition, puis la densité de la loi de X. Reconnaître cette loi.
- En déduire l'espérance de la variable aléatoire X.

Exercice 4

Soient $U_1, U_2, \ldots, U_N$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$ et N une variable aléatoire de loi géométrique de paramàtre p indépendante de la suite (U_i). On pose

$$X = \max_{1 \leq i \leq N} U_i \ .$$

Question 1

- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Question 2

- Calculer l'espérance de X.

Question 3

- Vérifier le résultat par une simulation pour $p = 1/3$.

```
n <- 100000
# La loi géometrique est décalée
x <- sapply(1 + rgeom(n, p = 1/3), FUN = function(i) max(runif(i))) # ?sapply : trè
s utile
mean(x)
```

```
## [1] 0.675929
```

PA

TD6

Question de cours :

- X v.a.r, la f.d.r. de X est $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$
- X var de densité $f(x)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\varphi(x)$ est pos. ou $\int$.

Th. de transfert : $E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z). \mathbb{P}_X(dz)$

- loi exp. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda . e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$

Exercice 1 :

$. Z \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$; $p = \frac{2}{3}$

gain $\to$ $X = U. \mathbb{1}_{Z=1} + 2U. \mathbb{1}_{Z=0}$ $\qquad$ $\underline{U \perp\!\!\!\perp Z}$?

Q1. $\cdot X \in (0,2)$ $\Rightarrow$ $F_X(t) = 0$ $\forall t \leq 0$

$F_X(t) = 1$ $\forall t \geq 2$

Soit $t \in (0,2)$:

$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, Z = 1) + \mathbb{P}(X \leq t, Z = 0)$

$= \mathbb{P}(U \leq t, Z = 1) + \mathbb{P}(2U \leq t, Z = 0)$

$= \mathbb{P}(U \leq t) \mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(2U \leq t). \mathbb{P}(Z = 0)$

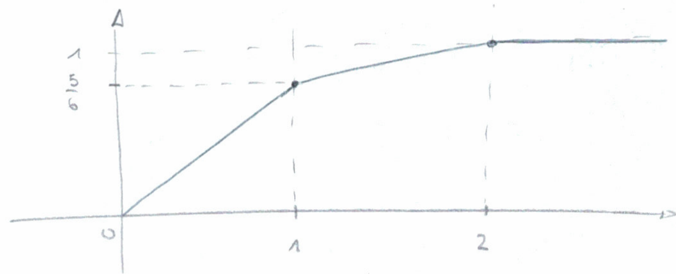
t si $t<1$, 1 sinon (car c'est certain : $U \leq t$ si $t \geq 1$)

$= \frac{2}{3}(t. \mathbb{1}_{t<1} + \mathbb{1}_{1<t<2}) + \frac{1}{3}. \underbrace{\mathbb{P}(U \leq \frac{t}{2})}_{t/2}$

$= \frac{2}{3}(t. \mathbb{1}_{t<1} + \mathbb{1}_{1<t<2}) + \frac{t}{6}(\mathbb{1}_{t<1} + \mathbb{1}_{1<t<2})$

$= \left(\frac{2}{3}t + \frac{t}{6}\right). \mathbb{1}_{t<1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{t}{6}\right). \mathbb{1}_{1<t<2}$

$= \frac{5}{6}t. \mathbb{1}_{t<1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{t}{6}\right) \mathbb{1}_{1<t<2}$



- F_X a une densité de probabilité car F_X est continue.

$f_X(t) = \frac{5}{6}. \mathbb{1}_{(0,1)}(t) + \frac{1}{6}. \mathbb{1}_{(1,2)}(t)$

Q2. • Médiane m de X tq $F_X(m) = \frac{1}{2}$. Ici on a $F_X(m) = \frac{5}{6}m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$

- $\mathbb{E}[X] = \int_0^2 x. f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{5}{6} x\, dx + \int_1^2 \frac{1}{6} x\, dx = \frac{5}{6}. \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Q3. $\cdot Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$, $q = 1 - p = \frac{1}{3}$

$X = U. \mathbb{1}_{Z=1} + 2U \mathbb{1}_{Z=0}$

$= U(\mathbb{1}_{Z=1} + 2. \mathbb{1}_{Z=0})$ $\qquad$ Or $\mathbb{1}_{Z=1} + 2 \mathbb{1}_{Z=0} \overset{\mathcal{L}}{=} (1 + Y)$

La loi étant donné par :

$\mathbb{P}(1 + Y = 1) = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(1 + Y = 2) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow X = U(\mathbb{1}_{Z=1} + 2. \mathbb{1}_{Z=0}) \overset{\mathcal{L}}{=} U(1+Y)$

- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(U(1+Y)) \overset{ind}{=} \mathbb{E}(U). \mathbb{E}(1+Y) = \mathbb{E}(U)(1 + \mathbb{E}(Y))$

$= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}).$

$= \frac{2}{3}$

Exercice 2 :

Q1. $\cdot F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\sqrt{U} \leq t) \overset{\text{par biject}}{=} \mathbb{P}(U \leq t^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t^2 & \text{si } t \in (0,1) \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

$f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = 2t. \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 t. 2t. dt = \frac{2}{3}$

Q2. • $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sqrt{U}) = \int_0^1 \sqrt{u}\, du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ densité de la loi uniforme : $\mathbb{1}_{[0,1]}$

th de transfert + densité de U

• $\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt$ (X positive) Or $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ 1-t^2 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

$1 - \mathbb{P}(X \leq t)$

$= \int_0^1 (1-t^2)\, dt$

$= [t]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$

$= 1 - \frac{1}{3}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}$ ok

Q3. $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$= \mathbb{E}(U) - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= \frac{1}{2} - \frac{4}{9}$

$\Rightarrow V(X) = \frac{1}{18} = 0.0555\ldots$

Exercice 3 :

Q1. $\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(\min(X_1, \ldots X_n) > t) = \mathbb{P}(X_1 > t, \ldots X_n > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) = (\mathbb{P}(X_1 > t))^n = e^{-\lambda n t}$

$(\mathbb{P}(X_1 > t) = \int_t^{+\infty} \lambda . e^{-\lambda x} dx = - \int_t^{+\infty} -\lambda . e^{-\lambda x} dx = -\left[e^{-\lambda x}\right]_t^{+\infty} = e^{-\lambda t}$

Q2. $F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X > t) = 1 - e^{-\lambda n t}$ $f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = \lambda n . e^{-\lambda n t}, t > 0$

ie $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda n) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda n}$

Séance de travaux dirigés 7

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM6.html)

- Rappeler la définition de la variance d'une variable aléatoire.
- Rappeler la définition de la loi normale.

Exercice 1

On souhaite calculer la variance de la loi normale (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale), $N(0, 1)$, et d'autres moments d'ordre supérieur.

Question 1

Soit X une variable aléatoire de loi $N(0, 1)$.

- A l'aide du théorème de transfert, montrer que la fonction génératrice des moments (https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_g%C3%A9n%C3%A9ratrice_des_moments) $\phi(t) = \mathrm{E}[e^{tX}]$ est égale à

$$\phi(t) = \exp(\frac{t^2}{2}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Question 2

- Dériver la fonction $\phi(t)$ deux fois en $t = 0$. En déduire la variance de la loi normale

$$\mathrm{Var}[X] = 1.$$

Question 3

- Utiliser le développement en série de la fonction $\phi(t)$ en $t = 0$ pour calculer $\mathrm{E}[X^4]$.
- Vérifier ce résultat à l'aide de simulations.

```
x <- rnorm(1000000)
mean(x^4)
```

```
## [1] 2.993564
```

Exercice 2

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. On pose

$$X = \mathbb{1}_{(U<1/3)}V + \mathbb{1}_{(U\geq 2/3)}(1+V).$$

Question 1

- Calculer $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

Question 2

- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Question 3

- Prouver que les commandes suivantes simulent correctement la loi de X.

```
n <- 100000
N <- sample(1:3, n, replace = T)
x <- (N == 3) + (N != 1)*runif(n)
```

- Vérifier les calculs de l'espérance et de la variance.

```
mean(x)
```

```
## [1] 0.6691272
```

```
var(x)
```

```
## [1] 0.4456573
```

Exercice 3

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. On pose $X = e^U$.

Question 1

- Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X vérifie

$$\forall t \in (1, e), \quad F(t) = \ln(t).$$

- Décrire cette fonction pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Montrer que la loi de la variable X admet une densité et donner la densité de cette loi.
- Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Question 2

Soit $s \in \mathbb{R}$, on pose

$$\phi(s) = \mathrm{E}[e^{sU}].$$

- Calculer $\phi(s)$, puis calculer la dérivée de cette fonction au point $s = \alpha$, $\alpha > 0$.
- Déduire de la question précédente la valeur de l'espérance de la variable aléatoire suivante

$$Y = X^{\alpha} \ln(X).$$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire de loi de densité

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad f(z) = z\mathbb{1}_{(0,1)}(z) + \frac{1}{2}e^{1-z}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(z)$$

Question 1

- Montrer que la fonction de répartition de la loi de densité $f(z)$ vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad F(t) = \frac{1}{2}\min(1, t^2) + \frac{1}{2}\max(0, 1 - e^{1-t}).$$

- Soit X une variable al?atoire de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la fonction de répartition, $F_1(t)$, de la variable aléatoire $Y_1 = \exp(-X/2)$.

Question 2

- Montrer qu'il existe $p \in (0, 1)$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = pF_1(t) + (1-p)F_2(t)$$

où $F_2(t)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y_2 = 1 + X$.

Question 3

Soit p la valeur trouvée précédemment. On considère la variable aléatoire Y définie par

$$Y = V\sqrt{U} + (1-V)(1+X)$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur (0,1), V est une variable aléatoire de Bernoulli de param?tre p et U, V, X sont mutuellement indépendantes.

- Calculer l'espérance des variables aléatoires Y et Y^2.
- Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

Question 4

On dispose d'un générateur aléatoire retournant **uniquement** des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

- Déduire des questions précédentes un algorithme de simulation de la loi de densité $f(z)$.

On notera **rexp(n,rate = 1)** le générateur aléatoire de loi exponentielle.

TD n°7

Question de cours

• Loi normale : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|x-m|^2}{2\sigma^2}\right)$

Exercice 1 :

Question 1 : Th de transfert : $E(f(X)) = \sum_x f(x) P(X=x)$

$$E[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \cdot f_X(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)}\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}((z-t)^2 - t^2)}\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dz$$

densité de la $\mathcal{N}(t,1)$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}\,dz}_{=1}$$
$$= e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Question 2 : $\phi'(t) = t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} = t \cdot \phi(t)$ $\qquad \phi'(0) = 0$

$\phi''(t) = t\phi'(t) + \phi(t)$ $\qquad \phi''(0) = 1$

$= t^2\phi(t) + \phi(t)$

Or (cours ?) : $E(e^{tX}) = E[1 + tX + t^2\frac{X^2}{2} + \dots] = 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2}E[X^2]$

De l'autre côté : $\phi(t) = 1 + t\cdot\phi'(0) + \frac{t^2}{2}\phi''(0)$

Par unicité du DL : $E(X) = \phi'(0)$
$E(X^2) = \phi''(0)$

Et + gal : $E(X^k) = \phi^{(k)}(0)$

Ici $\operatorname{var}(X) = E(X^2) = \phi''(0) = 1$.

Question 3 : $E(X^4) = \phi^{(4)}(0)$

$\phi^{(3)}(t) = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + 2t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} + t^3 e^{\frac{t^2}{2}}$

$\phi^{(4)}(t) = \phi(t) + t^2\phi(t) + 2t^2\phi(t) + 2t^2\phi(t) + t^4\phi(t) + 2\phi(t)$

$= \phi(t)(3 + 5t^2 + t^4)$

$\Rightarrow \phi^{(4)}(0) = 3$

$E(X^4) = 3$

Exercice 2 :

$U \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$ $\quad V \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$ $\qquad X = \mathbb{1}_{(U<1/3)} V + \mathbb{1}_{(U \geq 2/3)}(1+V)$

Question 1 : $E(X) = E[\mathbb{1}_{(U \leq 1/3)} V] + E[\mathbb{1}_{(U \geq \frac{2}{3})}(1+V)]$ $\quad$ U et V indep

$= P(U < 1/3) . E(V) + P(U \geq \frac{2}{3})(1 + E(V))$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}})$

$= \frac{2}{3}$

$$\left(E[\mathbb{1}_{U \leq \frac{1}{3}}] = \int_{x=0}^{1} \underbrace{\mathbb{1}_{x \leq \frac{1}{3}}}(x) . 1 \, dx = \int_{x=0}^{1/3} 1 \, dx = \frac{1}{3} \right)$$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= -\frac{4}{9} + E\left(\mathbb{1}_{(U<\frac{1}{3})} V^2 + \mathbb{1}_{(U \geq \frac{2}{3})}(1+V)^2 \right) + E(2 \underbrace{\mathbb{1}_{(U<\frac{1}{3})} \times \mathbb{1}_{(U \geq \frac{2}{3})}}_{0} V(1+V))$

$= -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} E(V^2) + \frac{1}{3} E(1 + 2V + V^2)$ $\qquad E(V^2) = \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$= -\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(1 + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

$= -\frac{3}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ $\qquad -\frac{2}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$

$= \frac{4}{9}$

Question 2 : $F_X(t) = P(X \leq t)$

$F_X(t) = 0$ si $t < 0$

$F_X(t) = 1$ si $t > 2$

Soit $t \in [0,2]$: $F_X(t) = P(X \leq t)$

$= P(X \leq t ; U < \frac{1}{3}) + P(X \leq t ; U \geq \frac{1}{3})$

$= P(V \leq t ; U < \frac{1}{3}) + P(\mathbb{1}_{U \geq \frac{2}{3}}(1+V) \leq t ; U \geq 1/3)$

$P(V \leq t ; U < \frac{1}{3}) \overset{\text{indep U et V}}{=} \frac{1}{3} . P(V \leq t) = \frac{1}{3} \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \in]1,2] \end{cases}$

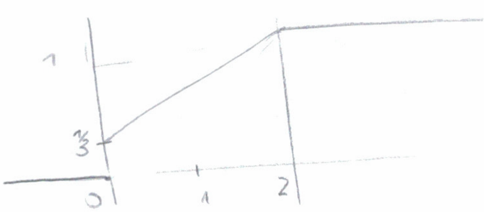
$P(\mathbb{1}_{U \geq \frac{2}{3}}(1+V) \leq t ; U \geq \frac{1}{3}) = \underbrace{P(\mathbb{1}_{U \geq \frac{2}{3}}(1+V) \leq t ; \frac{1}{3} \leq U < \frac{2}{3})}_{(*)} + \underbrace{P(\mathbb{1}_{U \geq \frac{2}{3}}(1+V) \leq t ; U \geq \frac{2}{3})}_{(**)}$

$(**) = P(1 + V \leq t ; U \geq \frac{2}{3}) = \frac{1}{3} P(1 + V \leq t) = \frac{1}{3} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1] \\ t-1 & \text{si } t \in]1,2] \end{cases}$

$(*) = P(0 \leq t ; \frac{1}{3} \leq U < \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$

Finalemt : $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 2 \\ \frac{t}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(t+1) & \text{si } t \in [0,1] \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(t+1) & \text{si } t \in]1,2] \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{3}(t+1) & \text{si } t \in [0,2] \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$



Séance de travaux dirigés 8

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM7.html)

- Rappeler le principe d'une méthode de Monte-Carlo (https://fr.wikipedia.org/wiki/Casino_de_Monte-Carlo).

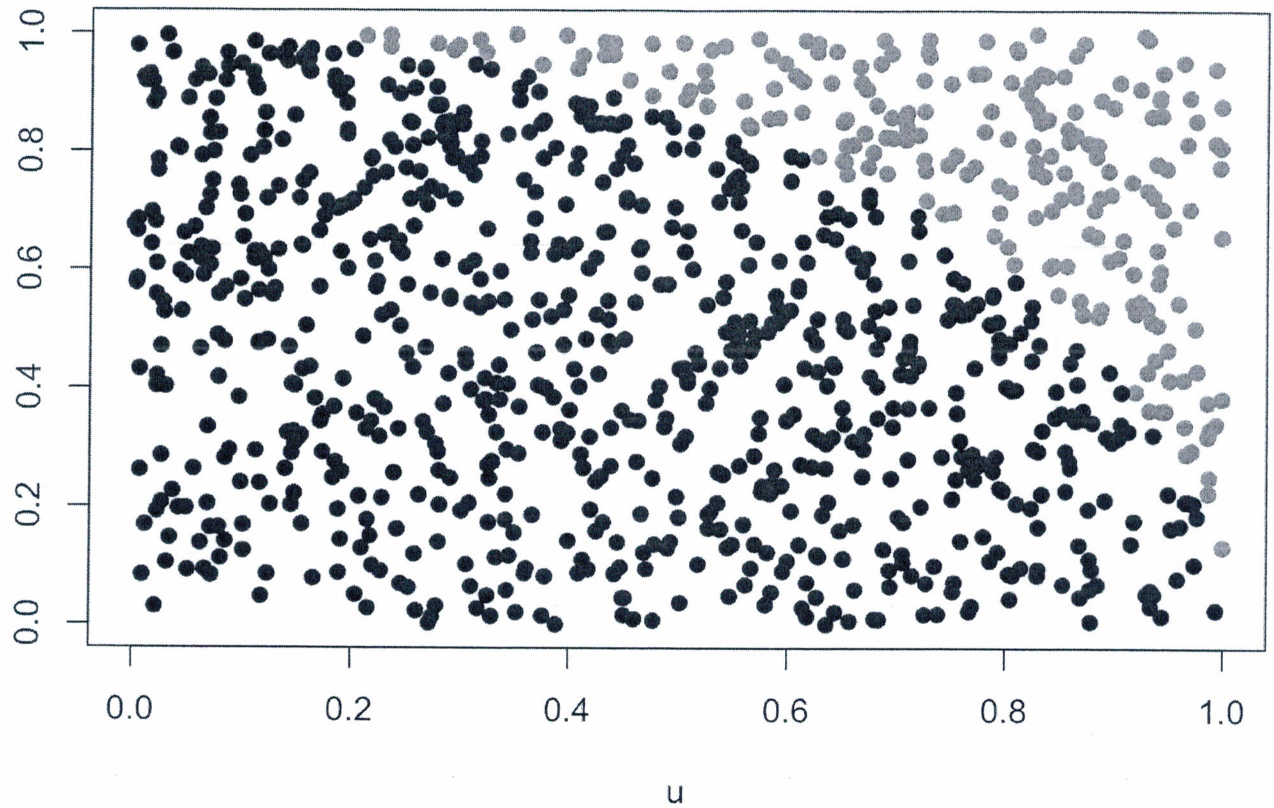
Exercice 1

Soient (U_n) et (V_n) deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes dans leur ensemble. On pose

$$\forall n \geq 1 \, , \quad \begin{cases} X_n & = & 1 & \text{si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \\ & & 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $Z_n = 4(X_1 + \cdots + X_n)/n$.

```
n <- 1000
u <- runif(n)
v <- runif(n)
plot(u, v, col = 1 +  (u^2 + v^2 > 1), pch = 19)
```



Question 1

- Déterminer la loi de la variable X_n.
- Calculer la variance de Z_n et montrer que la suite (Z_n) converge vers π.

Question 2

Soit $ (0,1)$ et $\epsilon > 0$.

- A l'aide de l'inégalité de Chebishev, déterminer un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \quad \mathrm{P}(|Z_n - \pi| > \epsilon) \leq \alpha \ .$$

- Ecrire un algorithme qui retourne une valeur approchée de π à 10^{-4} près, avec une probabilité supérieure à 0.95.

```
n <- 100000 #n'est pas la valeur demandée
u <- runif(n)
v <- runif(n)
4*mean(u^2 + v^2 < 1)
```

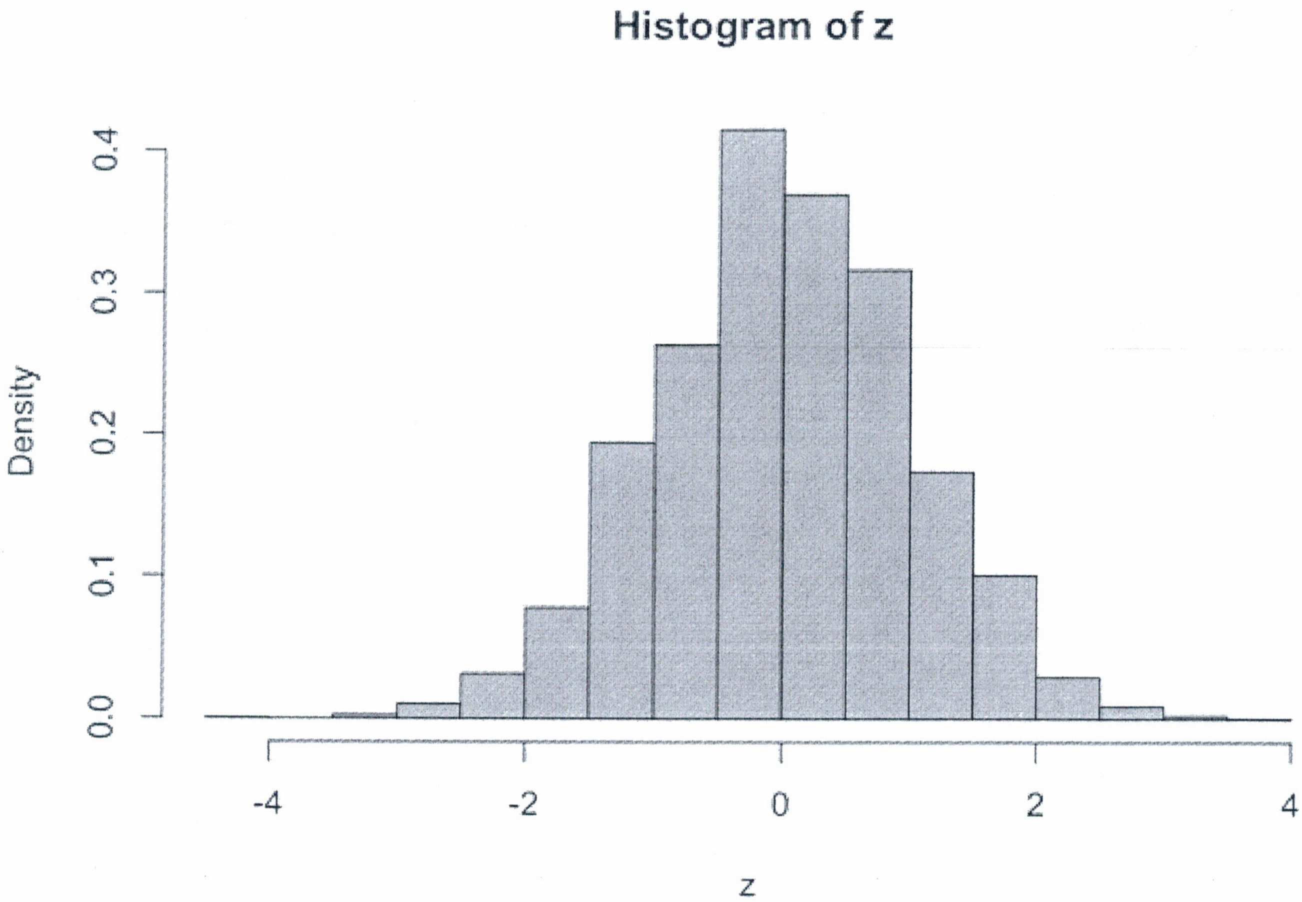
```
## [1] 3.14084
```

Question 3

On multiplie la variable Z_n par $\sqrt{n}$.

- Calculer la variance de la variable $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$. Cette variance converge-t-elle vers 0 ? Vers une constante ?
- Quelle loi connue fournit une bonne approximation de la loi de $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$?

```
rzn <- function(m=1,n=1000){
  zn <- NULL
  for (i in 1:m){
    u <- runif(n)
    v <- runif(n)
    zn <- c(zn, 4*mean(u^2 + v^2 < 1) )
  }
  return(zn)
}
z  <- sqrt(1000)*(rzn(10000) - pi)/sqrt(pi*(4-pi))
hist(z, prob = TRUE, col = "orange")
```



Exercice 2

On considère une suite (U_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$ et la fonction

$$\forall u \in (0,1), \quad \varphi(u) = \sqrt{(1-u)u^3}.$$

Question 1

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(U_i).$$

- Montrer que la suite Y_n converge, au sens de la loi des grands nombres, vers la limite $\mathcal{I}$ définie ci-dessous

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \varphi(u) du \,.$$

On admettra que $\mathcal{I} = \pi/16$.

Question 2

- Calculer la variance de la variable aléatoire Y_n.
- Soit $\epsilon = 10^{-3}$. A l'aide du théorème de Chebyshev, donner une estimation du rang n à partir duquel on peut considérer que

$$P(|Y_n - \mathcal{I}| < \epsilon) \geq 0.95\,.$$

Question 2 bis

On considère la loi de densité $f(v)$ définie sur l'intervalle $(0, 1)$ de la manière suivante

$$\forall v \in (0,1), \quad f(v) = 6v(1-v).$$

Soit (V_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi de densité $f(v)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(V_i)}{f(V_i)}.$$

- Montrer que la suite Z_n converge vers $\mathcal{I}$.
- Comparer la variance de la variable aléatoire Z_n à celle de la variable Y_n.

Question 3

- Proposer deux algorithmes de calcul de l'intégrale $\mathcal{I}$ s'appuyant sur les questions précédentes.
- Lequel vous semble le plus précis des deux pour n appels du générateur aléatoire ? Justifier.

```
phi <- function(u){ sqrt((1-u)*u^3)}
# Algorithme 1
n <- 1000000
mean(y <- phi(runif(n)))
```

```
## [1] 0.1965205
```

```
pi/16
```

```
## [1] 0.1963495
```

```
var(y)
```

```
## [1] 0.0114485
```

```
# Algorithme 2
n <- 1000000
f <- function(v){dbeta(v,2,2)}
u <- rbeta(n, 2, 2)
mean(z <- phi(u)/f(u))
```

```
## [1] 0.1961783
```

```
pi/16
```

```
## [1] 0.1963495
```

```
var(z)
```

```
## [1] 0.01670584
```

Question 4

Soit $1 \leq \alpha \leq 3$. On considère désormais que $f(v)$ appartient à la famille de densités $f_\alpha(v)$ définies sur l'intervalle $(0, 1)$ de la manière suivante

$$\forall v \in (0,1), \quad f_\alpha(v) = c_\alpha v^\alpha (1-v).$$

(loi beta(α+1,2))

- Montrer (ou admettre) que la constante c_α est égale à $(\alpha+2)(\alpha+1)$.
- A quel choix de α correspond l'algorithme de calcul de $\mathcal{I}$ le plus précis ?
- La précision est-elle supérieure à celle de l'algorithme s'appuyant sur la question 1) ?

TD n° 8

Questions de cours

Méthode de Monte-Carlo :

Soit X v.a. et f tq $f(X) \in L^1$.

$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) \xrightarrow{N\to+\infty} E(f(X))$ (Loi des Grands Nombre)

X_i iid de loi celle de X

Th. centré limite
$\sigma^2 = var(f(X))$

TCL : $\sqrt{N}\,(\hat{S}_N - E(f(X))) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

Pour N grand :

$\mathcal{L}(\hat{S}_N - E(f(X))$ est proche de $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{N})$

Exercice 2 :

Question 1 :

$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(U_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{par LGN forte}} E[\varphi(U_1)] = \int \varphi(u) f_{U_1}(u)\,du$
$= \int_0^1 \varphi(u)\,du = I = \frac{\pi}{16}$

iid de loi $\mathcal{U}(0,1)$

(au sens de la cv "presque sure") ie $X_n \xrightarrow{p.s} X$ ssi $\mathbb{P}(\{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X\}) = 1$

Question 2 :

- $var(Y_n) = \frac{1}{n^2} Var(\sum_{i=1}^{n}\varphi(U_i))$ } car indep
$= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} var(\varphi(U_i))$ } car $\varphi(U_i)$ iid.
$= \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot var\,\varphi(U_1)$
$= \frac{1}{n}\cdot var\,\varphi(U_1)$
$= \frac{1}{n}(\frac{1}{20} - I^2) = \frac{0.0114}{n}$

$var\,\varphi(U_1) = E(\varphi^2(U_1)) - (E\,\varphi(U_1))^2$

$E(\varphi^2(U_1)) = \int_0^1 (1-u)u^3\,du = \int_0^1 u^3\,du - \int_0^1 u^4\,du$
$= [\frac{u^4}{4}]_0^1 - [\frac{u^5}{5}]_0^1 = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$

$var\,\varphi(U_1) = \frac{1}{20} - I^2$

- On applique Tchebichev avec $E(Y_n) = I$ $\quad (P|X-E(X)|\geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2})$

$P(|Y_n - I| < \varepsilon) = 1 - P(|Y_n - I| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{var(Y_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}0114}{n\varepsilon^2}$

Si on choisit n tq $1 - \frac{0{,}0114}{n\varepsilon^2} \geq 0{,}95$ on aura bien $P(|Y_n - I| < \varepsilon) \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}95 \geq \frac{0{,}0114}{n\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow n \geq \frac{0{,}0114}{0{,}05 \times 10^{-6}} \simeq 2{,}28 \cdot 10^{-5}$

Question 2bis :

- $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\frac{\varphi(V)}{f(V)}] = \int_0^1 \frac{\varphi(v)}{f(v)}\cdot f(v)\,dv = \int_0^1 \varphi(v)\,dv = I$

- $var(Z_n) = \frac{1}{n}\, var[\frac{\varphi(V)}{f(V)}]$
$= \frac{1}{n}(\frac{1}{18} - I^2) > var(Y_n)$

$var(\frac{\varphi(V)}{f(V)}) = -I^2 + E[\frac{\varphi(V)^2}{f(V)^2}]$

$E[\frac{\varphi(V)^2}{f(V)^2}] = \int_0^1 \frac{\varphi^2(v)}{f^2(v)} f(v)\,dv = \int_0^1 \frac{\varphi^2(v)}{f(v)}\,dv = \int_0^1 \frac{\cancel{(1-v)}\cdot v^{3/2}}{6\sqrt{v}\cdot\cancel{(1-v)}}$
$= \frac{1}{6}\cdot[\frac{v^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{18} > \frac{1}{20}$

Question 3 :

De la m manière qu'à la fin de la Q2 :

$P(|Z_n - I| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1/18 - I^2}{n\varepsilon^2}$

(à comparer à $P(|Y_n - I| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1/20 - I^2}{n\varepsilon^2}$)

→ on aura "plus vite" $P(|Y_n - I| < \varepsilon) \geq 0{,}95$ que $\mathbb{P}(|Z_n - I| < \varepsilon) \geq 0{,}95$

→ Y_n est meilleur que Z_n.

Question 4 :

- On veut avoir $\int_0^1 f_\alpha(v)\,dv = 1$

Or $\int_0^1 v^\alpha(1-v)\,dv = \int_0^1 v^\alpha\,dv - \int_0^1 v^{\alpha+1}\,dv = \left[\frac{v^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 - \left[\frac{v^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}$

Donc $\underline{c_\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+2)-(\alpha+1)} = \underline{(\alpha+1)(\alpha+2)}$

- Posons $Z_n^\alpha = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(V_i)}{f_\alpha(V_i)}$ où les V_i sont iid de loi $f_\alpha(x)\,dx$

On a $Z_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} E\left[\frac{\varphi(V_1)}{f_\alpha(V_1)}\right] = \int \frac{\varphi(v)}{f_\alpha(v)} \cdot f_\alpha(v)\,dv = I$

$\mathrm{var}(Z_n^\alpha) = \frac{1}{n}\left(-I^2 + E\left[\left(\frac{\varphi(V)}{f_\alpha(V)}\right)^2\right]\right)$ où $V \sim f_\alpha(x)\,dx$

La q. est donc de trouver $\alpha^* = \underset{1\le\alpha\le3}{\mathrm{argmin}}\ E\left[\left(\frac{\varphi(V)}{f_\alpha(V)}\right)^2\right]$

On a $\mathbb{E}\left[\left(\frac{\varphi(V)}{f_\alpha(V)}\right)^2\right] = \int_0^1 \frac{\varphi^2(v)}{f_\alpha(v)}\,dv = \int_0^1 \frac{(1-v)v^3}{c_\alpha v^\alpha(1-v)}\,dv = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha-1)} \underbrace{\int_0^1 v^{3-\alpha}\,dv}_{\left[\frac{v^{4-\alpha}}{4-\alpha}\right]_0^1} = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha-1)(4-\alpha)}$

$\rightsquigarrow \alpha^* = \mathrm{argmax} \underbrace{\{(\alpha+1)(\alpha-1)(4-\alpha)\}}_{f(\alpha)}$

$f(\alpha) = -\alpha^3 + \alpha^2 + 10\alpha + 8$

$f'(\alpha) = -3\alpha^2 + 2\alpha + 10$

$\Delta = 124$

$\alpha_1 \simeq -1,52 \notin [1,3]$

$\alpha_2 \simeq 2,189 \in [1,3]$

Donc

α	1		α_2		3
f'		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc $\alpha^* = \alpha_2 \simeq 2,189$

Avec ce α^* on a $-I^2 + \mathbb{E}\left[\left(\frac{\varphi(V)}{f_{\alpha^*}(V)}\right)^2\right] = -I^2 + \frac{1}{(\alpha^*+1)(\alpha^*+2)(4-\alpha^*)}$

$\simeq 0,0028 < 0,0114 \leftarrow$ correspond à Y_n

Cl : $Z_n^{\alpha^*}$ est meilleur que Y_n
(P. obtenir la m̂ précision, on a besoin de moins de tirages)

Séance de travaux dirigés 9

Questions de cours (http://francoio.github.io/html/CM8.html)

- Rappeler la définition de la loi d'un couple de variable aléatoires réelles admettant une densité de probabilité.
- Rappeler la définition des lois marginales et conditionnelles d'un couple de variables aléatoires réelles.
- Rappeler le principe de simulation d'un couple de variables aléatoires réelles.

Exercice 1

La durée d'autonomie de la batterie du portable d'Abdel est en moyenne 2.3 fois plus élevée que celle du portable de Hanneke. On suppose que les deux durées suivent une loi exponentielle et sont mutuellement indépendantes.

Question 1

- Calculer la probabilité pour que le portable d'Abdel se décharge avant celui d'Hanneke.

Question 2

- Vérifier ce résultat à l'aide d'une simulation.

```
lambda = 1.0
mean(rexp(1000000, rate = lambda) > rexp(1000000, rate = lambda/2.3))
```

```
## [1] 0.302659
```

Exercice 2

Hanneke et Abdel se sont donnés rendez-vous (https://www.ted.com/talks/hannah_fry_the_mathematics_of_love?language=fr) entre 19h et 20h. Leurs instants respectifs d'arrivée au point de rencontre sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$ (unité h). Hanneke et Abdel n'aiment pas attendre, et ils quitteront le lieu de rencontre après 10 minutes d'attente infructueuse, ou après 20h.

Question 1

- Calculer la probabilité pour que Hanneke et Abdel se rencontrent effectivement entre 19h et 20h.
- Vérifier ce résultat à l'aide d'une simulation.

```
mean(abs(runif(100000) - runif(100000)) < 1/6)
```

```
## [1] 0.30739
```

Question 2

- Même question lorsque la loi des instants d'arrivée est la loi beta (https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_b%C3%AAta)(n,n), ($n = 4, 10, 20, \ldots$).
- Tracer un graphe de décrivant la probabilité de rencontre en fonction de la variance de cette loi.

Exercice 4

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs 1 et 2.

Question 1

- Montrer que la loi du couple (X, Y) admet la densité de probabilité suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2e^{-2y-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y).$$

Question 2

On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$. Soit $t \geq 0$.

- Montrer que

$$\mathrm{P}(Z \leq t) = (1 - e^{-t})^2.$$

- Calculer l'espérance de Z.

Question 3

- Calculer l'espérance de $T = XY$.

Exercice 4

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Le but de ce problème est de déterminer la loi de la variable aléatoire $X = UV$.

Question 1

On considère le couple de variables aléatoires $(X, Y) = (U, UV)$.

- Soit $x \in (0, 1)$. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
- Montrer que la loi du couple (X, Y) admet la densité de probabilité suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{0<y<x<1}(x, y)$$

- En déduire la loi marginale de la variable $Y = UV$.

Question 2

On souhaite montrer le résultat plus directement, à l'aide d'une formule de conditionnement. Soit $t \in (0, 1)$.

- Montrer que

$$\mathrm{P}(Y \leq t) = \int_0^1 \mathrm{P}(V \leq t/x)dx = t - t \ln t.$$

- En déduire que

$$\forall y \in (0, 1), \quad f_Y(y) = -\ln(y).$$

Exercice 6

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Le but de ce problème est de montrer que les variables aléatoires $(1 + U)\sqrt{V}$ et $U + V$ ont même loi, sans toutefois calculer cette loi.

Question 1

On considère les variables aléatoires $X = \min(U, V)$ et $Y = \max(U, V)$.

- Calculer la covariance du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? (Justifier)

Question 2

Soit B un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$. On considère l'événement $A = (U < V)$ et son complémentaire, $\bar{A}$.

- Montrer que

$$\mathrm{P}((X, Y) \in B) = 2 \iint_B \mathbb{1}_{\{0<u<v<1\}} du dv.$$

- En déduire que la densité jointe du couple (X, Y) est égale à

$$f(x,y) = 2\mathbb{1}_D(x,y)\,, \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ 0<x<y<1\}.$$

Question 3

Soit $y \in (0,1)$.

- Calculer la densité de la loi de Y.
- Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est uniforme sur $(0, y)$.
- Montrer que le couple (X, Y) admet la même loi que le couple $(U\sqrt{V}, \sqrt{V})$.

Question 4

Soit $y \in (0,1)$.

- Déduire de la question précédente que les variables aléatoires $(1+U)\sqrt{V}$ et $U+V$ ont même loi.

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \int 2\,\mathbb{1}_{0<x<y<1}\,dx$$

$$= 2\int_0^y dx = \underline{2y}$$

$$f(X|Y=y)(\cancel{x}) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2\,\mathbb{1}_{0<x<y<1}}{2y} = \frac{\mathbb{1}_{0<x<y<1}(x)}{y}$$

TD n° 9

Question de cours :

- (X,Y) admet une densité $f(x,y)$ si $\forall B \subset \mathbb{R}^2 : \mathbb{P}((X,Y)\in B) = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy$
- Ds le contexte precedent, la loi marginale de X est donnée par la densité $f_X(x) = \int f(x,y)\,dy$ (analogue p. Y)

La loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est donnée par la loi conditionnelle :

$$\underset{f_Y^{X=x}(y)}{f(Y|X=x)(y)} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

- Pour simuler (X,Y) de densité $f(x,y)$ on peut :
  a) Tirer X selon $f_X(x)\,dx$ → cela donne un nombre $\hat{x}$
  b) Tirer Y selon $f_Y^{X=\hat{x}}(y)\,dy$ → " $\hat{y}$

  → $(\hat{x},\hat{y})$ sera distribuée selon $f(x,y)\,dx\,dy$.

Exo 1 :

1) A : durée de vie du portable d'Abel $A \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_A)$ A indep. de H.
H : " Hanneke $H \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_H)$

λ_A et λ_H sont inconnus.

$E(A) = 2{,}3\, E(H)$

$\frac{1}{\lambda_A} = 2{,}3 . \frac{1}{\lambda_H} \Rightarrow \underline{\lambda_H = 2{,}3 . \lambda_A}$

On veut calculer $\mathbb{P}(A \leq H) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} 1\!\!1_{x<y} . f_{(A,H)}(x,y)\,dx\,dy$

$\left(\mathbb{P}((A,H)\in B) = \iint_B f_{(A,H)}(x,y)\,dx\,dy\right)$ $\{x,y,\ x<y\}$ $= \iint_{\mathbb{R}_+^2} 1\!\!1_{x<y} . \underbrace{\lambda_A e^{-\lambda_A x}}_{f_A} . \underbrace{(2{,}3\lambda_A) . e^{-(2{,}3.\lambda_A)y}}_{f_H}\,dx\,dy$) on note $\lambda_A = \lambda$

$= 2{,}3 . \lambda^2 . \iint 1\!\!1_{x<y} . e^{-\lambda x} . e^{-2{,}3\lambda y}\,dx\,dy$

$= 2{,}3\lambda^2 . \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} 1\!\!1_{x<y}\, e^{-\lambda x}\,dx\right) e^{-2{,}3\lambda y}\,dy$

$\int_{\mathbb{R}_+} 1\!\!1_{x<y}\, e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^y e^{-\lambda x}\,dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^y = \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \leq H) = 2{,}3\lambda^{\cancel{2}} . \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{-\lambda y}) . e^{-2{,}3\lambda y}\,dy$

$= \underbrace{2{,}3\lambda . \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2{,}3\lambda y}\,dy}_{=1 \text{ car c'est l'} \int \text{ de la densité de la } \mathcal{E}(2{,}3\lambda)} - 2{,}3\lambda . \int_{\mathbb{R}_+} e^{-3{,}3\lambda y}\,dy$

1 : densité $\mathcal{E}(3{,}3\lambda)$

$= 1 - \frac{2{,}3\lambda}{3{,}3\lambda} . \left(\cancel{3{,}3\lambda . \int_{\mathbb{R}_+} e^{-3{,}3\lambda y}\,dy}\right)$

$\underline{\mathbb{P}(A \leq H) = 1 - \frac{2{,}3}{3{,}3} \simeq 0{,}303}$

2) Le progm calcule $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1\!\!1_{X_i<Y_i} \to \mathbb{E}[1\!\!1_{X<Y}] = \mathbb{P}(X<Y)$

Exercice 6 : $X = U \wedge V \quad Y = U \vee V$

1) $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

On a $XY = UV$ soit $X=U$ et alors $Y=V$, soit $X=V$, $Y=U$ $\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

· Loi de Y ?

$\mathbb{P}(Y\le t) = \mathbb{P}(U\le t ; V\le t)$ } indep

$= \mathbb{P}(U\le t).\mathbb{P}(V\le t)$

$= t^2 \quad t\in[0,1]$

$\Rightarrow$ densité de Y : (on dérive) $2t.1\!\!1_{[0,1]}(t)$

· Loi de X ?

$\mathbb{P}(X\le t) = 1 - \mathbb{P}(X>t)$

$= 1 - \mathbb{P}(U>t).\mathbb{P}(V>t)$

$= 1 - (1-t)^2$

$= 2t - t^2 \quad t\in[0,1]$

(en 1 ça vaut 1)

densité de X $\Rightarrow (2-2t).1\!\!1_{[0,1]}(t) = 2.(1-t).1\!\!1_{[0,1]}(t)$

Donc $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y.2y\,dy = 2.\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$\mathbb{E}(X) = 2.\int_0^1 (1-x).x\,dx = 2.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Donc $\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{36}$

Donc $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$ donc X et Y non indépendantes.

2) $\mathbb{P}((X,Y)\in B) = \mathbb{P}((X,Y)\in B ; U<V) + \mathbb{P}((X,Y)\in B ; V\le U)$ ← car U,V à une loi à densité sur $\mathbb{R}^2$.

$= \mathbb{P}((U,V)\in B ; U<V) + \mathbb{P}((V,U)\in B ; V\le U)$

$= 2.\mathbb{P}((U,V)\in B ; U<V)$ ← U, V iid.

P(couple ∈ espace) = $\iint 1\!\!1_{\text{couple}\in\text{espace}} \times f_{\text{couple}}$

$= 2.\iint_{\mathbb{R}^2} 1\!\!1_{(u,v)\in B}.1\!\!1_{u<v}\underbrace{1\!\!1_{(0,1)}(u).1\!\!1_{(0,1)}(v)}_{f_{u,v}(u,v)}\,du\,dv$

$= 2.\iint_B 1\!\!1_{\{0<u<v<1\}}\,du\,dv$

$= \cancel{2}.\iint_B 2.1\!\!1_D(x,y)\,dx\,dy \quad \forall B\in\mathbb{R}^2$ où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 0<x<y<1\}$

Donc $f_{(X,Y)}(x,y) = 2.1\!\!1_D(x,y)$

3) • Si $y\notin(0,1)$ $f_Y(y) = 0$

Soit $y\in(0,1)$: $f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \int 2.1\!\!1_D(x,y)\,dx = 2.\int_0^y dx = 2y$

$f_Y(y) = 2y.1\!\!1_{(0,1)}(y)$

• $f_X^{Y=y}(x) = 0$ si $(x,y)\notin D$

Si $(x,y)\in D$: $f_X^{Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2.1\!\!1_D(x,y)}{2y} = \frac{1}{y}.1\!\!1_{(0,y)}(x)$ → densité d'une uniforme sur $(0,y)$ ← car on est à y fixé.

• $(X,Y) \overset{\mathcal{L}}{\underset{?}{=}} (U\sqrt{V}, \sqrt{V})$

TD n°9

• Loi de $\sqrt{V}$? $\mathbb{P}(\sqrt{V}\leq t)$ $(t\in (0,1))$
$= \mathbb{P}(V\leq t^2) = t^2$
$\Rightarrow f_{\sqrt{V}}(t) = 2t \cdot 1\!\!1_{(0,1)}(t)$
$\Rightarrow \sqrt{V} \overset{\mathcal{L}}{=} Y$

A-t-on $U\sqrt{V} \mid \sqrt{V} = y \overset{\mathcal{L}}{\underset{?}{=}} X \mid Y = y \overset{\mathcal{L}}{\underset{?}{=}} \mathcal{U}(0,y)$

Oui, car $U \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$ donc $Uy \overset{\mathcal{L}}{=} U\sqrt{V} \mid \sqrt{V} = y \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{U}(0,y)$

Cela est suffisant p. conclure $\underline{(X,Y) \overset{\mathcal{L}}{=} (U\sqrt{V} \mid \sqrt{V})}$

4) $(1+U)\sqrt{V} = \sqrt{V} + U\sqrt{V} \overset{\mathcal{L}}{=} X+Y = U+V$ car (X,Y) et $(U\sqrt{V} \mid V)$ m̂ loi
↳ pcq $X = U$ ou V et $Y = U$ ou V.

$H < A$

Exo 2 :

1) $U \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$ tps d'arrivée d'Hanneke
$V \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$ " d'Abel $\qquad U \perp\!\!\!\perp V$

Proba qu'ils se rencontrent : $\mathbb{P}(|U-V| \leq \frac{1}{6}) = \mathbb{P}(U-V \leq \frac{1}{6}, \overset{U>V}{}) + \mathbb{P}(V-U \leq \frac{1}{6}, V>U)$
$= 2 \cdot \mathbb{P}(V < U < V + \frac{1}{6})$
$= 2 \cdot \mathbb{E}[1\!\!1_{V<U<V+\frac{1}{6}}]$ $\qquad$ Rappel : $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}(X)$
$= 2 \cdot \mathbb{E}[\mathbb{E}(1\!\!1_{V<U<V+\frac{1}{6}} | V)]$

(Rappel : $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ et $g(y) = \mathbb{E}(X | Y=y)$

Or $\mathbb{E}[1\!\!1_{V<U<V+\frac{1}{6}} | V = v] = \begin{cases} 1/6 & \text{si } 0 < v \leq \frac{5}{6} \\ 1-v & \text{si } \frac{5}{6} < v < 1 \end{cases}$

$\mathbb{E}[1\!\!1_{v<U<v+\frac{1}{6}} | V = v] \overset{U \perp\!\!\!\perp V}{=} \mathbb{E}[1\!\!1_{v<U<v+\frac{1}{6}}] = 2 \cdot \left(\int_0^{5/6} \frac{1}{6} \, dv + \int_{5/6}^{1} (1-v) \, dv \right)$

$\left(= 2\, \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}(1\!\!1_{V<U<V+\frac{1}{6}} | V)}_{\varphi(V)}] = 2 \cdot \int \varphi(v) 1\!\!1_{(0,1)}(v) \, dv \right)$

$= 2 \cdot \left(\frac{5}{36} + \frac{1}{6} - \left[\frac{v^2}{2} \right]_{5/6}^{1} \right) = \ldots = \frac{11}{36}$