Correction TD n.1 de IPD 2015-2016, Ensimag 2A IF

H. Guiol & J. Lelong

Semaine du 01 fev au 05 fev 2016

Exercice 1.1 Transformations classiques des variables gaussiennes

1) **Transformation de Box-Muller**
Soient R de loi exponentielle $(1/2)$ et Θ indépendante de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\sqrt{R}\sin(\Theta)$ et $\sqrt{R}\cos(\Theta)$ sont deux v.a. normales centrée réduites indépendantes.
Réponse. On suppose donc R de loi exponentielle $(1/2)$ et Θ indépendante de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ donc

$$f_{(R,\Theta)}(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} e^{-\rho/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}\times]0,2\pi[}(\rho, \theta)$$

On pose $X = \sqrt{R}\sin(\Theta)$ et $Y = \sqrt{R}\cos(\Theta)$ et on considère $\varphi : \mathbb{R}^{+,*}\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ qui $(\rho, \theta) \mapsto (\sqrt{\rho}\sin(\theta), \sqrt{\rho}\cos(\theta))$. Comme la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ nous allons prendre plus de soin en exprimant $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^{+,*}\times]0, 2\pi[$; ainsi

$$\varphi^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2, \arctan(x/y)) & \text{si} \quad x > 0, y > 0; \\ (x^2 + y^2, \arctan(x/y) + \pi) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* 0, y < 0; \\ (x^2 + y^2, \arctan(x/y) + 2\pi) & \text{si} \quad x < 0, y > 0; \end{cases}$$

En calculant les dérivées partielles on vérifie que φ est bien un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*}\times]0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Le module du Jacobien dont le calcul est laissé au lecteur donne $|J_{\varphi^{-1}}(x, y)| = 2$.
Donc par le théorème du changement de variable on a

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}\times\mathbb{R}^{+,*}}(x, y)$$

Où l'on reconnaît l'expression de la densité jointe de deux loi Normales centrée réduites indépendantes. □

2) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que X/Y est de loi de Cauchy c.à.d. de densité

$$\frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Réponse. Avec la représentation précédente on a que X/Y est de même loi que $\tan(\Theta)$ où Θ est de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Par suite

$$F_{X/Y}(x) = F_{\tan(\Theta)}(x) = \mathbb{P}(\tan(\Theta) \leq x)$$

or si $x < 0$, $\tan(\theta) \leq x \iff \theta \in]\frac{\pi}{2}, \arctan(x) + \pi[\cup]\frac{3\pi}{2}, \arctan(x) + 2\pi[$ et si $x > 0$ alors $\tan(\theta) \leq x \iff \theta \in]0, \arctan(x)[\cup]\frac{\pi}{2}, \arctan(x) + \pi[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. D'où

$$F_{X/Y}(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$

ce qui est la fonction de répartition correspondante à la densité cherchée. □

3*) Montrer que

$$Z = \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \text{ et } W = \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

sont aussi de loi Normale et indépendantes.

Réponse. D'après 2), X et Y sont réalisables par

$$Y = \sqrt{\rho}\sin(\theta), \qquad X = \sqrt{\rho}\cos(\theta).$$

Ainsi $Z = \frac{2XY}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \sqrt{\rho}\sin(2\theta)$ et $W = \frac{X^2-Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \sqrt{\rho}\cos(2\theta)$. Mais sin et cos sont des fonctions 2π-périodiques. Pour conclure, il suffit d'appliquer de nouveau 2) à condition de montrer que la loi jointe de (ρ, θ) est la même que $(\rho, 2\theta \text{ modulo } 2\pi)$. Pour justifier ce dernier point, comme ρ et θ sont indépendants, il suffit de prouver que

$$\theta \quad \text{et} \quad 2\theta \text{ modulo } 2\pi$$

ont même loi. Cette propriété est vraie car θ est de loi uniforme sur $[0,2\pi]$, donc 2θ de loi uniforme sur $[0,4\pi]$, donc 2θ modulo 2π de loi uniforme sur $[0,2\pi]$. On aurait aussi pu écrire

$$\mathbb{P}(2\theta \text{ modulo } 2\pi \leq x) = \mathbb{P}(2\theta \leq x) + \mathbb{P}(2\theta \in [2\pi, 2\pi + x]) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x = \mathbb{P}(\theta \leq x).$$

□

Exercice 1.2 Loi log-Normale
Soit $X = e^Y$ où Y est de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On dit que X est de loi Log-Normale.
1) Trouver :
a) la fonction de densité f de la v.a. X;

Réponse. On calcule $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(e^Y \leq t)$ et on identifie sous l'intégrale la densité

$$f(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) 1_{]0,+\infty[}(t).$$

□

b) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Réponse. On calcule $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(e^Y) = M_Y(-1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(e^{2Y}) = M_Y(-2)$ où $M_Y(t)$ est la fonction génératrice des moments (transformée de Laplace) de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$M_Y(t) = \exp\left(-t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-tY}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-(\mu-t\sigma^2))^2 - t^2\sigma^4 + 2\sigma^2 t\mu\right]\right) dx \\
&= \exp\left(-t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2) \text{ et } \mathbf{Var}(X) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) = 2\sinh(\sigma^2/2)\exp(2\mu + (3/2)\sigma^2)$$

□

2) Montrer que si $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes de loi Log-Normale alors leur produit est aussi de loi Log-Normale.

Réponse. En utilisant que la somme de v.a. indépendantes de loi Normale est encore de loi normale on obtient le résultat.
□

3*) Soit $|a| \leq 1$ on définit

$$f_a(x) = \left(1 + a\sin\left(2\pi\log(x)\right)\right) f(x)$$

où f est de loi log-normale avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
a) Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Réponse. On a bien sur $f_a(x) \geq 0$ et de plus

$$\int_0^{\infty} f_a(x)\ dx = \int_0^{\infty} f(x)\ dx + \int_0^{\infty} a\sin(2\pi\log(x)) f(x)\ dx$$

on pose $y = \log(x)$ donc $dy = dx/x$ et

$$\int_0^{\infty} f_a(x)\ dx = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a\sin(2\pi y) e^{-y^2/2}\ dy$$

Or la fonction à intégrer dans le membre de droite de l'égalité ci dessus est intégrable et impaire donc cette intégrale est nulle. D'où

$$\int_0^{\infty} f_a(x)\ dx = 1.$$

□

b) Montrer que f_a admet des moments de tout ordre qui ne dépendent pas de a. Qu'en concluez vous?

Réponse. Soit donc X de densité f_a. On pose

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f(x)\ dx + I_a(k)$$

où

$$
\begin{aligned}
I_a(k) &= \int_0^{+\infty} a\sin(2\pi\log(x))\frac{x^k}{\sqrt{2\pi}}\exp(-(\log(x))^2/2)\ \frac{dx}{x} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} a\sin(2\pi y)\frac{e^{ky}}{\sqrt{2\pi}}\exp(-y^2/2)\ dy \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{k^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi y)\exp(-(y-k)^2/2)\ dy \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{k^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi(z+k))\exp(-z^2/2)\ dz
\end{aligned}
$$

mais $\sin(2\pi(z+k)) = \sin(2\pi z)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc la fonction à intégrer ci dessus est impaire.

D'où $I_a(k) = 0$ et

$$\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(e^{kZ}) = M_Z(-k) = \exp(k^2/2)$$

pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc X admet des moments de tous ordres qui ne dépendent pas de a.
On conclut que la connaissance de tous les moments d'une v.a. n'est pas suffisante pour déterminer sa loi. $\square$