Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Arbres + arbre couvrant de coût minimum

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

EXO 3.1

Énoncé

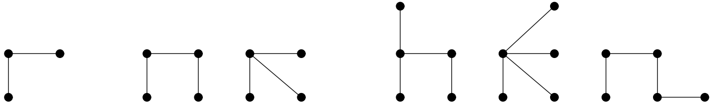
Donner tous les arbres à $3, 4, 5$ sommets.

Solution

(a) Il existe exactement 1 arbre non-isomorphe à 3 sommets.

(b) Il existe exactement 2 arbres non-isomorphes à 4 sommets.

(c) Il existe exactement 3 arbres non-isomorphes à 5 sommets.



(a) **(b)** **(c)**

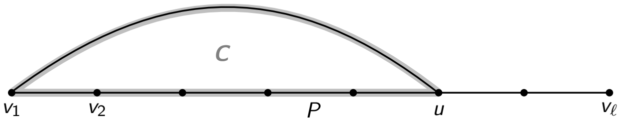
EXO 3.2

Énoncé

Si G est un arbre ayant au moins deux sommets, alors G admet au moins deux sommets de degré un.

Démonstration

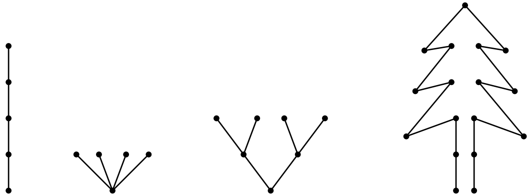
1. Soit P une plus longue chaîne élémentaire de G.
2. Les deux extrémités de P sont distinctes car G est connexe et $n \geq 2$.
3. Chacun d'eux est de degré 1 dans G, sinon, d'après l'Exo 2.6(a), il aurait au moins deux voisins dans P et appartiendrait donc à un cycle, ce qui contredirait le fait que G est un arbre.



EXO 3.4

Énoncé

Quel est le nombre m d'arêtes d'une forêt F ayant n sommets et k composantes connexes $F_1, ..., F_k$?



Démonstration

1. Soient $n_i = |V(F_i)|, m_i = |E(F_i)|$ $i = 1, ..., k$.
2. Chaque F_i est un arbre, donc par l'Exo 3.3, $m_i = n_i - 1$,
3. $m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$.

EXO 3.5

Énoncé

Est-il vrai qu'un graphe ayant n sommets et $m \geq n$ arêtes admet un cycle?

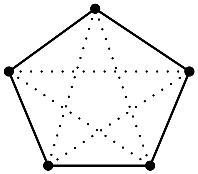
Démonstration

1. Sinon G est une forêt.
2. Soit $k \geq 1$ le nombre de composantes connexes de G.
3. D'après l'hypothèse et l'Exo 3.4, on a $n \leq m = n - k < n$, une contradiction.

EXO 3.6

Énoncé

Si un graphe G a $n \geq 5$ sommets alors G ou $\overline{G}$ admet un cycle.



Démonstration

1. Supposons que G et $\overline{G}$ ne contiennent pas de cycle.
2. Par l'Exo 1.1(c) et l'Exo 3.4,
   $\frac{n(n-1)}{2} = |E(K_n)| = |E(G)| + |E(\overline{G})| \leq 2(n-1).$
3. c'est-à-dire $n \leq 4$, ce qui contredit notre hypothèse sur n.

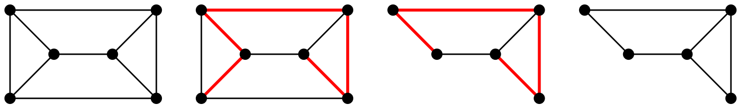
EXO 3.9

Énoncé

Tout graphe connexe G à $n \geq 2$ sommets admet un sommet v tel que $G - v$ soit connexe.

Démonstration

1. G est connexe, donc, par l'Exo 3.8, G contient un arbre couvrant F.
2. Par Lemme 2, F a un sommet v de degré 1 et $F - v$ est un arbre.
3. Or $F - v$ est un graphe partiel de $G - v$ et donc, par l'Exo 3.8, $G - v$ est connexe.



EXO 3.10

Énoncé

- Soient $G(F)$ un arbre, $e = uv \in E(G) \setminus F$ et f une arête de la (u, v)-chaîne P dans $G(F)$.
- Alors le graphe partiel $G(F + e - f)$ est un arbre.

Démonstration

1. $C = P + uv$ est un cycle dans $G(F + e)$.
2. Par Lemme 1, $G(F')$ est connexe où $F' = F + e - f$.
3. Par l'Exo 3.8, $G(F')$ contient un arbre couvrant $G(F'')$. Puisque $n - 1 = |F| = |F'| \geq |F''| \geq n - 1$, on a $F' = F''$.
4. Par conséquent, $G(F')$ est un arbre.

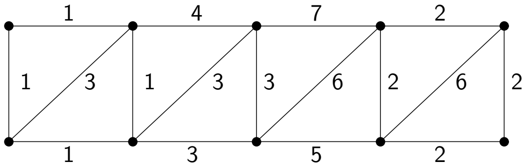
EXO 3.11

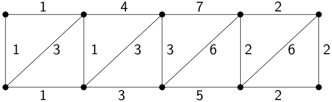
Énoncé: **l'algorithme de Kruskal**

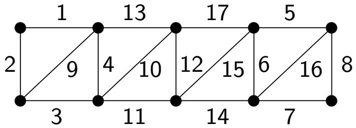
On suppose que le graphe $G = (V, E)$ est connexe.

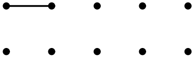
- Soit $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ l'ordre de E tel que $c(e_1) \leq c(e_2) \leq ... \leq c(e_m)$.
- Au début soit $H_0 = (V, F_0)$ où $F_0 = \emptyset$.
- Pour $1 \leq i \leq m$ soit $H_i = (V, F_i)$ où $F_i = F_{i-1} + e_i$ si $H_{i-1} + e_i$ est une forêt, et $F_i = F_{i-1}$ sinon.

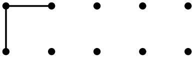
(b) Exécuter l'algorithme de Kruskal sur le graphe suivant:

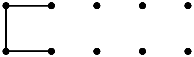


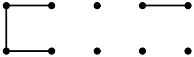


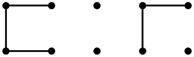


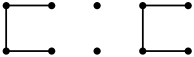

(1)

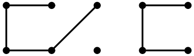

(2)

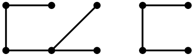

(3)

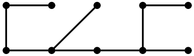

(4)


(5)


(6)


(7)


(8)


(9)

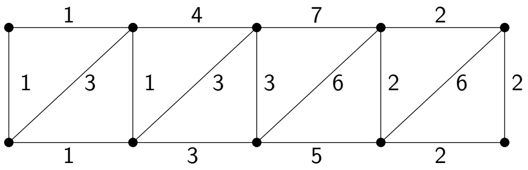
EXO 3.12

Énoncé: **l'algorithme de Prim**

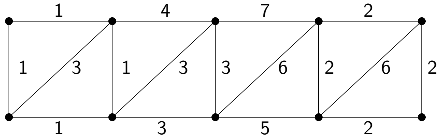
On suppose que le graphe $G = (V, E)$ est connexe.

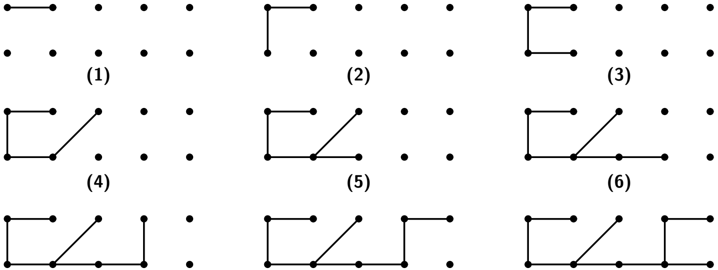
- Au début soit $H_0 := (V_0, F_0)$ où $V_0 := r \in V$ et $F_0 := \emptyset$.
- Si $V_i \neq V(G)$ alors soit $uv \in \delta_G(V_i)$ tel que $u \in V_i$ de coût minimum et soit $V_{i+1} := V_i + v$ et $F_{i+1} := F_i + uv$.

(b) Exécuter l'algorithme de Prim sur le graphe suivant:



EXO 3.12





(1) (2) (3)

(4) (5) (6)

(7) (8) (9)