thibaut.metivet@inria.fr

Transformation de Fourier-Plancherel

1 Rappel

Par densité de la classe de Schwartz dans L^2, on peut étendre la transformation de Fourier à L^2.

Théorème 1. *Théorème de Plancherel*
La transformation de Fourier $F : L^1 \to L^\infty$ se prolonge de façon unique comme une application $F : L^2 \to L^2$, continue, linéaire et unitaire, i.e. $\forall f, g \in L^2$,

$$\langle F(f), F(g) \rangle = \langle f, g \rangle \quad et \quad \|F(f)\|_2 = \|f\|_2.$$

De plus, elle est inversible et

$$F^{-1} = \bar{F} : f \mapsto \bar{F}(f)(x) = \int f(\nu)\, e^{+2i\pi\nu x}\, dx.$$

2 Exercices

Exercice 1.

a) Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

b) Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$$

Exercice 2.

a) Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto xe^{-ax}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto |x|e^{-a|x|}$.
c) Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx.$$

Indication : on pourra également calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-a|x|}$.