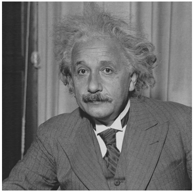
Introduction aux produits dérivés

Page du Cours sur Chamilo

Hervé Guiol (IPS LJK)

Louis Bachelier
1870-1946



Albert Einstein
1879-1955

Norbert Wiener
1894-1964

Plan du cours d'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. Premières propriétés du MBS.
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. Intégrale d'Itô 1 : définitions.
8. Intégrale d'Itô 2 : formule d'Itô. Processus d'Itô. Variations.
9. Représentation des martingales Browniennes. Formule d'Itô multi-*d*. Formule de Cameron-Martin.
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itô.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

OUTLINE

Loi Normale

Définition 1.1

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ deux paramètres. On appelle variable aléatoire de **loi normale**, ou **gaussienne**, de paramètres μ et σ toute v.a. X de densité : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

on note alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Propriété 1.2

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors

1. $\mathbb{E}(X) = \mu$, **Var**$(X) = \sigma^2$ et X admet des moments de tous ordres.
2. La v.a. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ qui est appelée **centrée réduite**, ou **standard**.
3. On pourra toujours écrire $X = \mu + \sigma Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Loi Normale

Proposition 1.3 Queue de distribution de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Lorsque t tend vers $+\infty$ on a l'équivalent

$$\mathbb{P}(Z \geq t) \sim \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

Exercice

1. Montrer que pour $t > 0$

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leq \int_t^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \leq \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

en déduire l'équivalent ci-dessus.

2. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ donner un équivalent à l'infini de $\mathbb{P}(X \geq t)$.

Fonction caractéristique

Proposition 1.4

1. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\Psi_Z(t) := \mathbb{E}[e^{itZ}] = e^{-t^2/2}$$

2. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sa fonction caractéristique est donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \Psi_X(u) := \mathbb{E}[e^{iuX}] = \exp\left(iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$$

Stabilité de la convergence en loi

Proposition 1.5

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ alors les 2 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La suite (X_n) converge en loi.
2. $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \mu \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$.

et dans ces cas la loi limite est $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exercice

Trouvez des contres exemples au résultat précédent lorsque la loi n'est pas gaussienne.

Notation : dans ce qui suit on supposera que si X est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ il s'agira d'un vecteur colonne. Le vecteur ligne s'écrira X^T.

DÉFINITION 1.6

Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un **vecteur gaussien** si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R}^d$ la v.a.

$$\langle a, X\rangle = a^T \cdot X = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$$

est de loi normale (éventuellement dégénérée).

PROPOSITION 1.7

Un vecteur aléatoire dont toutes les composantes sont gaussiennes **et indépendantes** est un vecteur gaussien.

Matrices de covariance

Définition 1.8

Etant donné un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on définit sa **matrice de covariance** comme la matrice $K_X = (k_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$, carré $d \times d$ telle que

$$k_{ij} = \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$$

Remarques

- Elle rassemble toutes les covariances des composantes du vecteur X et sur sa diagonale on a les variances des composantes.
- Il est bien entendu que pour que cette matrice existe il faut que toutes les composantes soient de carré intégrable. Sauf indication contraire on supposera cette hypothèse toujours satisfaite dans ce qui suit.
- Cette matrice est symétrique semi-définie positive (i.e. toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles ou de façon équivalente $\forall u \in \mathbb{R}^d$ on a $u^T K_X u \geq 0$).

MATRICES DE COVARIANCE

DÉFINITION 1.9

Etant donnés X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ et Y un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ on définit la **matrice de covariance** des vecteurs X et Y comme la matrice $\mathbf{COV}(X, Y) \in \mathcal{M}_{d\times n}$ telle que $\forall 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq n$

$$\mathbf{COV}(X, Y)_{ij} = \mathbf{Cov}(X_i, Y_j)$$

que l'on note matriciellement

$$\mathbf{COV}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))^T\right] = \mathbb{E}(X \cdot Y^T) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)^T$$

LEMME 1.10

Si X est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance $\Sigma^2 \in \mathcal{M}_{d\times d}$ et si A est une matrice réelle de $\mathcal{M}_{m\times d}$ alors le vecteur aléatoire $A \cdot X$ de $\mathbb{R}^m$ a pour moyenne $A \cdot \mu \in \mathbb{R}^m$ et pour matrice de covariance

$$K_{AX} = A \cdot \Sigma^2 \cdot A^T \in \mathcal{M}_{m\times m}.$$

Fonction caractéristique d'un vecteur gaussien

Proposition 1.11. FC d'un vecteur gaussien

Un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma^2 \in \mathcal{M}_{d\times d}$ symétrique semi-définie positive tels que $\forall u \in \mathbb{R}^d$

$$\Psi_X(u) := \mathbb{E}\left(e^{iu^T\cdot X}\right) = \exp\left(iu^T\cdot\mu - \frac{u^T\cdot\Sigma^2\cdot u}{2}\right) \in \mathbb{C}$$

Remarques :

- On déduit de ce résultat que si X et Y sont gaussiens tels que $\mu = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\Sigma^2 = K_X = K_Y$ alors $X = Y$.
- Cette proposition peut également servir de définition d'un vecteur gaussien.
- L'hypothèse Σ^2 symétrique semi-definie positive autorise le cas dégénéré (i.e. $\det(\Sigma^2) = 0$.).

INDÉPENDANCE

PROPOSITION 1.12

Soit (X^T, Y^T) un vecteur gaussien. Il y a équivalence entre :

1. $\mathbf{COV}(X, Y) = 0$ (matrice nulle)
2. Les vecteurs aléatoires X et Y sont indépendants.

REMARQUE :

On retiendra donc que **si on sait qu'un vecteur est gaussien alors :** ses composantes sont indépendantes **si et seulement si** leurs covariances sont nulles.

Transformation affine d'un vecteur gaussien

Proposition 1.13

Soient X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ de paramètres $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma^2 \in \mathcal{M}_{d\times d}$. On considère M une matrice $\mathcal{M}_{n\times d}$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$M \cdot X + b$$

est gaussien de paramètres $M \cdot \mu + b \in \mathbb{R}^n$ et $M \cdot \Sigma^2 \cdot M^T \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Remarque :

On retiendra que **toute transformation affine d'un vecteur gaussien est un vecteur gaussien**.

DENSITÉ D'UN VECTEUR GAUSSIEN

THÉOREME 1.14 CONSÉQUENCE DU THÉORÈME DE SCHUR.

1. Soit Σ^2 une matrice symétrique semi-définie positive. Alors il existe une matrice symétrique Σ vérifiant $\Sigma \cdot \Sigma = \Sigma^2$.
2. Lorsque Σ^2 est non dégénérée alors Σ est inversible d'inverse $[(\Sigma^2)^{-1}]^{1/2}$.

PROPOSITION 1.15. DENSITÉ D'UN VECTEUR GAUSSIEN NON DÉGÉNÉRÉ.

Soient X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ de paramètres $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma^2 \in \mathcal{M}_{d\times d}$. On suppose $\det \Sigma^2 \neq 0$ (cas non dégénéré). Alors X possède une densité de probabilité f_X sur $\mathbb{R}^d$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det(\Sigma^2))^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^T \cdot (\Sigma^2)^{-1} \cdot (x-\mu)}{2}\right]$$

Outline

Simulation des lois Multinormales

- Nous venons de voir que **les lois gaussiennes $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ sont caractérisées par leur vecteur moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et leur matrice de covariance $\Sigma^2 \in \mathcal{M}_{d\times d}$** (symétrique semi-définie positive).
- On a vu également que si $Z \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d)$ alors le vecteur

$$X = A \cdot Z + \mu$$

est de loi $\mathcal{N}_d(\mu, A \cdot A^T)$.
- Par ailleurs on peut facilement simuler des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes $Z_1, ..., Z_d$. Le vecteur $Z = (Z_1, ..., Z_d)^T$ est alors gaussien de loi $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d)$.

Pour simuler un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma^2)$ il suffit donc de trouver explicitement une matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le d}$ telle que $AA^T = \Sigma^2$.

Factorisation de Cholesky

Parmi l'ensemble de telles matrices, celles qui sont triangulaires inférieures sont plus pratiques. En effet le calcul de $A \cdot Z + \mu$ donne

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}Z_1 + \mu_1 \\ X_2 &= a_{21}Z_1 + a_{22}Z_2 + \mu_2 \\ &\vdots \\ X_d &= a_{d1}Z_1 + a_{d2}Z_2 + \cdots + a_{dd}Z_d + \mu_d \end{aligned}$$

Définition 1.16. Factorisation de Cholesky

Une représentation de Σ^2 en $A \cdot A^T$ avec A triangulaire inférieure est appelée factorisation de Cholesky.

Propriérté 1.17

Si Σ^2 est définie positive alors Σ^2 admet une factorisation de Cholesky A. De plus A est unique au changement de signe près.

Factorisation de Cholesky

Exemple

Soient $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $|\rho| \leq 1$ des paramètres constants et soit

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

alors on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_2 \end{pmatrix}$$

et on peut représenter $X \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma^2)$ par $X = A \cdot Z + \mu$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_1 Z_1 + \mu_1 \\ X_2 &= \rho\sigma_2 Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_2 Z_2 + \mu_2 \end{aligned}$$

où $Z = (Z_1, Z_2)^T \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathrm{I}_2)$.

FACTORISATION DE CHOLESKY

En dimension d en résolvant $A \cdot A^T = \Sigma^2 = (\sigma_{ij}^2)_{1 \leq i,j \leq d}$ il vient

$$\begin{array}{cccc} a_{11}^2 = \sigma_{11}^2 & a_{11}a_{21} = \sigma_{12}^2 & \cdots & a_{11}a_{d1} = \sigma_{1d}^2 \\ a_{21}a_{11} = \sigma_{21}^2 & a_{21}^2 + a_{22}^2 = \sigma_{22}^2 & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_{d1}a_{11} = \sigma_{d1}^2 & & \cdots & a_{d1}^2 + \cdots + a_{dd}^2 = \sigma_{dd}^2 \end{array}$$

Formellement : pour tout $1 \leq i, j \leq d$

$$\sigma_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{j} a_{ik} a_{jk}$$

On obtient ainsi pour $1 \leq j < i$

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2 - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{a_{jj}}$$

et

$$a_{ii} = \sqrt{\sigma_{ii}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2}$$

FACTORISATION EN COMPOSANTES PRINCIPALES

- Lorsque Σ^2 est une matrice symétrique semi-définie positive alors Σ^2 est diagonalisable et a d valeurs propres $\lambda_i \geq 0$ et admet un ensemble de vecteurs propres associés v_i orthonormés vérifiants

$$v_i^T \cdot v_i = 1, \; v_i^T \cdot v_j = 0, \forall i \neq j \in \{1, ..., d\}$$

et

$$\Sigma v_i = \lambda_i v_i$$

On note V la matrice orthonormale dont les colonnes sont $v_1, ..., v_d$ et on note Λ la matrice diagonale des valeurs propres associées.
Alors en choisissant $A = V \cdot \Lambda^{1/2}$ on obtient bien $A \cdot A^T = V \cdot \Lambda \cdot V^T = \Sigma^2$.

- Si de plus on suppose Σ^2 définie positive alors $\forall i$ on a $\lambda_i > 0$ et on a $A^{-1} = \Lambda^{-1/2} \cdot V^T$.