Correction TD-3 Probabilités

Rédacteurs : BOUCHNAF Mouad, BREHAULT Gabriel, BRUNO Alexis
Relecteurs : EL BOUZID Amine, CERVEAU Nathan, DARD Anthony

08/10/2020

Exercice 1 :

- On a : $(max\{M,N\} \leq m) = (M \leq m) \cap (N \leq m)$.

Les deux variables aléatoires M et N sont indépendantes, alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(max\{M,N\} \leq m) &= \mathbb{P}((M \leq m) \cap (N \leq m)) \\
&= \mathbb{P}(M \leq m)\mathbb{P}(N \leq m) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(M = k) \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(N = k) \\
&= \tfrac{m}{2m} \tfrac{m}{n} \\
&= \tfrac{m}{2n}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(max\{M,N\} \leq m) = \frac{m}{2n}}$

- On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M + N \leq m) &= \mathbb{P}(M \leq m - N) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(M \leq m - k)\mathbb{P}(N = k)
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{P}(M \leq m - k) = \begin{cases} \frac{m-k}{2m} & si \quad j \leq m - 1 \\ 0 & si \quad j \geq m \end{cases}$$

Il en vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M+N\leq m) &= \sum_{k=1}^{m-1}\mathbb{P}(M\leq m-k)\mathbb{P}(N=k)\\ &= \sum_{k=1}^{m-1}\tfrac{m-j}{2m}\tfrac{1}{n}\\ &= \tfrac{1}{2n}(m-1)-\tfrac{1}{2mn}\tfrac{(m-1)(m-1+1)}{2}\\ &= \tfrac{m-1}{4n}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{\mathbb{P}(M+N\leq m)=\frac{m-1}{4n}}$

Exercice 2 :

- Question 1 :

Soit X_n une variable aléatoire telle que :
  $*$ $(X_n=0)$: le chat est dehors le soir n
  $*$ $(X_n=1)$: le chat est à l'intérieur le soir n

Soit $n\geq 1$,
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\Pi_n &= \mathbb{P}(X_n=0)\\ &= \mathbb{P}(X_n=0\,|\,X_{n-1}=1)\mathbb{P}(X_{n-1}=1)+\mathbb{P}(X_n=0\,|\,X_{n-1}=0)\mathbb{P}(X_{n-1}=0)\\ &= p(1-\Pi_{n-1})+(1-q)\Pi_{n-1}\\ &= (1-p-q)\Pi_{n-1}+p\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Pi_n=(1-p-q)\Pi_{n-1}+p}$

- Question 2 :

Π_n est une suite arithmético-géométrique.

Donc, pour tout $n\geq 1$, Π_n est de la forme : $\Pi_n=C+vect(r^{n-1})$ où C est une constante et r la raison.

- Calcul de C :

$$C = (1-p-q)C + p \text{ donc } (1+p+q-1)C = p \text{ donc } \boxed{C = \frac{p}{p+q}}$$

- Calcul de r :

On pose $q_n = (1-p-q)q_{n-1}$. Donc $\boxed{r = (1-p-q)}$

Il en vient : $\Pi_n = \frac{p}{p+q} + \alpha(1-p-q)^{n-1}$

Puis, on détermine α avec Π_1.
On sait que $\Pi_0 = 0$ donc $\Pi_1 = p$ et, avec la formule, $\Pi_1 = \frac{p}{p+q} + \alpha$
Donc $\boxed{\alpha = \frac{p}{p+q}(p+q-1)}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Pi_n = \frac{p}{p+q}(1-(1-p-q)^n)$

On remarque que la formule reste vraie pour $n = 0$.

Ainsi, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \Pi_n = \frac{p}{p+q}(1-(1-p-q)^n)}$

- Déterminons la limite de la suite (Π_n) :

D'après l'énonce, on a : $|1-p-q| < 1$ car $0 < p, q < 1$
Donc $(1-p-q)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, on a : $\boxed{\Pi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{p+q}}$

Exercice 3 :

- Question 1 :

Soit F_i l'évenement "le lancé i donne face". Deux lancés étant indépendants on a :

$$\begin{aligned} \forall i \geq 2, \qquad \mathbb{P}(FF_i) &= \mathbb{P}(F_{i-1} \cap F_i) \\ &= \mathbb{P}(F_{i-1})\mathbb{P}(F_i) \\ &= \tfrac{1}{2} * \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Et donc on a aussi :

$$\begin{aligned} \forall i \geq 2, \qquad \mathbb{P}(FF_i)\mathbb{P}(FF_{i+1}) &= \tfrac{1}{4} * \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{1}{16} \end{aligned}$$

Or si on pose FFF_i l'évenement "le motif FFF apparaît à l'issue du lancé i", on a que :

$$\begin{aligned} \forall i \geq 2, \qquad \mathbb{P}(FF_i \cap FF_{i+1}) &= \mathbb{P}(FFF_{i+1}) \\ &= \mathbb{P}(F_{i-1} \cap F_i \cap F_{i+1}) \\ &= \mathbb{P}(F_{i-1})\mathbb{P}(F_i)\mathbb{P}(F_{i+1}) \\ &= \tfrac{1}{2} * \tfrac{1}{2} * \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\forall i \geq 2,\ \mathbb{P}(FF_i)\mathbb{P}(FF_{i+1}) \neq \mathbb{P}(FF_i \cap FF_{i+1})}$
Donc les évenements (FF_i) ne sont pas indépendants.

- Question 2 :

- $X_n = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{1}_{FF_i} \quad avec \quad \mathbb{1}_{FF} = \begin{cases} 1 \text{ si FF se réalise} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

- Calcul de $\mathbb{E}[X_n]$:

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(FF_i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{4} = \frac{n-1}{4}$$

• Une loi binomiale s'écrit comme la somme de lois de Bernouilli mutuellement indépendantes. Ici les évenenments FF_i suivent des lois de Bernouilli mais ne sont pas indépendantes, cf Question 1. Donc X_n n'est pas la loi binomiale.

- Question 3 :

Montrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{f_n}{2^n}$$

• Initialisation :

Pour n = 2 on a :

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = 1 - \mathbb{P}(FF_2) = \frac{3}{4}$$

Et on a :

$$\frac{f_2}{2^2} = \frac{3}{4}$$

Donc on a : $\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{f_2}{2^2}}$

Pour n = 3 on a :

$$\mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}(PPP \cup FPP \cup PFP \cup PPF \cup FPF) = \frac{5}{8}$$

Et on a :

$$\frac{f_3}{2^3} = \frac{5}{8}$$

Donc on a : $\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 0) = \frac{f_3}{2^3}}$

La propriété est donc initialisé aux rangs n=2 et n=3.

• Récurrence :

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n, avec $n \geq 2$, et on montre qu'elle aussi vraie au rang n+1 :

D'après la formule des probabilités totales, et en posant $\overline{F_i}$ l'évenement "le lancé i donne pile", on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | F_{n+1})\mathbb{P}(F_{n+1}) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | \overline{F_{n+1}})\mathbb{P}(\overline{F_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}(F_{n+1})(\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | F_{n+1}) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | \overline{F_{n+1}})) \end{aligned}$$

Avec :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | \overline{F_{n+1}}) = \mathbb{P}(X_n = 0)$$

Et, à nouveau d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | F_{n+1}) &= \mathbb{P}((X_{n+1} = 0 | F_{n+1}) | F_n)\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}((X_{n+1} = 0 | F_{n+1}) | \overline{F_n})\mathbb{P}(\overline{F_n}) \\ &= \mathbb{P}((X_{n+1} = 0 | F_{n+1}) | \overline{F_n})\mathbb{P}(\overline{F_n}) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 0 | \overline{F_n})\mathbb{P}(\overline{F_n}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(\overline{F_n}) \end{aligned}$$

Donc finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \mathbb{P}(F_{n+1})(\mathbb{P}(X_{n+1}=0|F_{n+1})+\mathbb{P}(X_{n+1}=0|\overline{F_{n+1}})) \\
&= \mathbb{P}(F_{n+1})(\mathbb{P}(X_{n-1}=0)\mathbb{P}(\overline{F_n})+\mathbb{P}(X_n=0)) \\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{f_{n-1}}{2^{n-1}}\tfrac{1}{2}+\tfrac{f_n}{2^n}) \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{f_{n-1}+f_n}{2^n} \\
&= \tfrac{f_{n+1}}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(X_n=0)=\frac{f_n}{2^n}}$.