

Cours 1 : RO :

1) Définitions :

* Graphes : un graphe $G = (V, E)$ avec : V : sommets, E : arêtes

→ Sommets : $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 1$

→ arêtes : $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$; une arête est une paire de sommets

* Extrémités : pour $e_i = v_j v_k$, v_j et v_k sont les extrémités de e_i

* boucle : une arête dont les extrémités coïncident

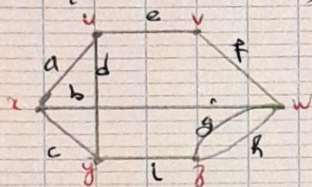
* arête multiple : s'il existe une autre arête avec les mêmes extrémités

* Simple : sans boucle et sans arête multiple.

Ex

$$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$



* Incident : une arête e est incidente à chacune de ses extrémités

* Sommets adjacents, voisins, connectés : u et v sont adj si $uv \in E(G)$

* Arêtes adjacentes : deux arêtes ayant ≥ 1 extrémité en commun

* Degré $d_G(v)$ d'un sommet v : le nombre d'arêtes incidentes à v

* graphe complet K_n : graphe simple à n sommets ayant toutes les arêtes possibles

Prop

• $\forall v \in V(G)$ d'un graphe Simple à n sommets on a :

$$0 \leq d(v) \leq n-1.$$

2) Th.

- * La Somme des degrés des Sommets d'un graphe $G=(V,E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, cf.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \times |E|$$

3) Sub-graphe, graphe partiel:

* Def.

Soient $G=(V,E)$ un graphe, $X \subseteq V$ et $F \subseteq E$

- i) Sub-graphe de G induit par X : $G[X] = (X, \{uv \in E; u,v \in X\})$
- ii) Graphe partiel de G induit par F : $G(F) = (V, F)$

iii) Sub-graphe partiel de G induit par X et F : $G[X](F) = (X, F)$

4) Coloration:

* Def.

* On colore les Sommets d'un graphe par des couleurs

i) Une coloration est bonne si:

→ deux Sommets adjacents ne sont pas de même couleur

(\Rightarrow) Les Sommets de même couleur forment un stable: "pas d'arêtes dedans"

* $\chi(G)$: nombre min de couleurs dans une bonne coloration de G .

$$\chi(G) \leq n = |V(G)|$$

* Th.: une borne supérieure de $\chi(G)$:

• Pour tout graphe simple G , de degré maximum $\Delta(G)$ on a:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

* Def. Clique:

• clique: Sous-graphe qui est Complet

• $\omega(G)$: le nombre maximum de sommets dans une clique de G .

Prop:

• $\omega(G) \geq 2$: s'il existe une arête car elle est une clique

• $\omega(G) \geq 1$

• $\chi(G) \geq \omega(G)$: Dans une bonne coloration, chaque sommet d'une clique doit être colorié par une couleur différente

Ex:

$$\chi(C_5) = 3 > 2 = \omega(C_5)$$

"cycles"

