Probabilités Appliquées – Correction TD4

Rédaction: Troy Fau, Antonin Genin, Garance Hauvette

15 Octobre 2020

Correction : Valentin Laclautre, Dillane Mahan, Mohamed Amine Mansour

Questions de cours

Variable étagée

Soit $\alpha_1, ..., \alpha_n, n$ coefficients positifs et $A_1, ..., A_n, n$ évènements. On appelle variable étagée, la variable

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où $\mathbb{1}_{A_i}$ est la variable indicatrice de A_i : égale à 1 si A_i se réalise, 0 sinon.

V.a. de carré intégrable et variance

Une variable aléatoire discrète X est intégrable si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \ \mathbb{P}(X = x) < \infty$$

Une variable aléatoire X à valeurs réelles et de densité f est intégrable si

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx < \infty$$

Une variable aléatoire intégrable possède un moment d'ordre un, son espérance. Plus généralement, une variable aléatoire X possède un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ si $|X|^n$ est intégrable. Dans ce cas, $\mathbb{E}[X^n]$ s'appelle le moment d'ordre n et $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n]$ le moment centré d'ordre n.

Une variable aléatoire X est de carré intégrable si $|X|^2$ est intégrable. On définit alors la **variance** de X comme le **moment centré d'ordre deux** :

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

<u>Commentaire correcteur :</u> on peut aussi écrire la variance :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Exercice 1

Question 1

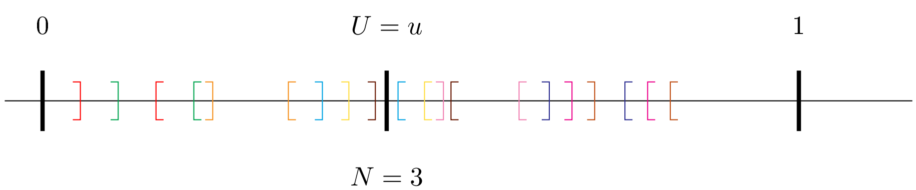

FIGURE 1 – Une représentation des intervalles I_k, d'une réalisation de U et d'une réalisation de N.

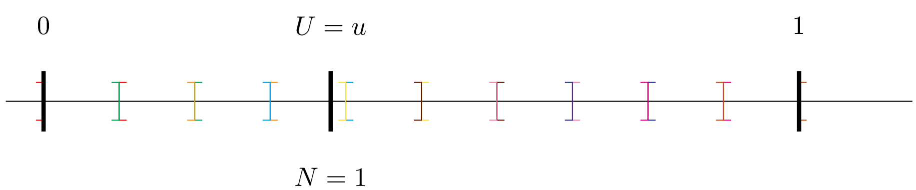

FIGURE 2 – Une représentation des I_k, où les 10 intervalles sont d'intersection vide.

commentaire correcteur :
Dans ce cas les I_k sont de la forme :$I_k =]\frac{k-1}{10}, \frac{k}{10}[$ avec k=1,2,...,10
$P(N = 1) = 1$
$P(N = 0) = 0$
$E(N) = 1$
$Var(X) = 0$

FIGURE 3 – Une représentation des I_k, où les 10 intervalles sont d'intersection complète.

commentaire correcteur :

Cette fois, les dix intervalles sont d'intersection complète.
Donc, $\exists \alpha \in [0, \frac{9}{10}[$ tel que $\forall k \in 1, 2, .., 10 \qquad I_k =]\alpha, \alpha + \frac{1}{10}[$

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= P(U \in [0, \alpha] \bigcup [\alpha + \frac{1}{10}, 1]) \\ &= P(U \in [0, \alpha]) + ([\alpha + \frac{1}{10}, 1]) \\ . &= \alpha + 1 - (\alpha + \frac{1}{10}) \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$P(N = 10) = \frac{1}{10}$
$\forall i \in 1, 2, ..., 9, P(N = 1) = 0$

$E(X) = 1$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 10 - 1 = 9$

Question 2

On note $(A_k)_{k=1,..,K}$ la famille d'événements tel que $A_k = (U \in I_k)$.

De ce fait, il est clair que :

$$N = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}$$

N est donc une répétition K fois d'épreuves de Bernoulli de paramètre $p = P(U \in I_k)$ qui ne sont pas indépendante, étant donné que les I_k peuvent se recouvrir. Donc N ne peut pas suivre une loi binomiale.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[N] &= \mathrm{E}[\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{K} P(A_k) = \sum_{k=1}^{K} P(U \in I_k) \\
&= \sum_{k=1}^{K} l_k = 10 \times \frac{1}{10} = 1
\end{aligned}$$

Question 3

On cherche $V(N) = \mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}[N]^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[N^2] &= \mathrm{E}[\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k} \times \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}] \\
&= \mathrm{E}[2 \sum_{j<k}^{K} \mathbb{1}_{A_k} \times \mathbb{1}_{A_j} + \sum_{k=1}^{K} (\mathbb{1}_{A_k})^2] && \textit{on somme sur un triangle} \\
&= 2\,\mathrm{E}[\sum_{j<k}^{K} \mathbb{1}_{A_k \cap A_j}] + \mathrm{E}[\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}] \\
&= 2 \sum_{j<k}^{K} \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_k \cap A_j}] + 1 && \textit{cf Q2} \\
&= 2 \sum_{j<k}^{K} P(U \in I_k \cap I_j) + 1 \\
&= 2 \sum_{j<k}^{K} \mathrm{longueur}(I_k \cap I_j) + 1
\end{aligned}$$

Or comme d'après Q2, $\mathrm{E}[N] = 1$ on a $\mathrm{E}[N]^2 = 1$ et donc :

$$\boxed{V(N) = 2 \sum_{j<k}^{K} \mathrm{longueur}(I_k \cap I_j)}$$

$\forall\ k, j \in \{1, .., K\}^2$,

$$\begin{aligned}
\text{longueur}(I_k \cap I_j) &\leq l_k \\
\sum_{j<k}^{K} \text{longueur}(I_k \cap I_j) &\leq \sum_{j<k}^{K} l_k \\
2\sum_{j<k}^{10} \text{longueur}(I_k \cap I_j) &\leq 2 * \frac{1}{10} \sum_{j<k}^{10} 1 \\
2\sum_{j<k}^{10} \text{longueur}(I_k \cap I_j) &\leq \frac{2}{10} \times \frac{10 * 9}{2} \\
V(N) &\leq 9
\end{aligned}$$

Question 4

On suppose que les l_k sont tous égaux, c'est-à-dire indépendant de k.

D'après Q2,

$$\mathrm{E}[N] = \sum_{k=1}^{K} l_k$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E[N]}^2 &= 2\sum_{j<k}^{K} \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_k \cap A_j}] + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_k}] - (\sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_k}])^2 \\
&= 2\sum_{j<k}^{K} \mathrm{longueur}(I_k \cap I_j) + \sum_{k=1}^{K} l_k - (\sum_{k=1}^{K} l_k)^2 \\
&\leq 2\sum_{j<k}^{K} l_k + \sum_{k=1}^{K} l_k - (\sum_{k=1}^{K} l_k)^2 \\
&\leq 2 l_k \sum_{j<k}^{K} 1 + l_k \sum_{k=1}^{K} 1 - (l_k \sum_{k=1}^{K} 1)^2 \qquad \textit{comme } l_k \textit{ indep de } k \\
&\leq 2 l_k * \frac{K(K-1)}{2} + l_k * K - (l_k * K)^2 \\
&\leq K l_k (K - 1 + 1 - K l_k) \\
\mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}[N]^2 &\leq K^2 l_k (1 - l_k)
\end{aligned}
$$

Donc

$$\boxed{V(N) \leq K^2 l_k (1 - l_k)}$$

Généralisation en dimension 2

On se place maintenant sur le disque unité D(0,1) et on remplace les $(I_k)_{k=0,\ldots,K}$ par des disques de rayons $(r_k)_{k=1,\ldots,K}$.

Soit U un point de D et N le nombre de disques de rayons r_k contenant U.

On note $(B_k)_{k=1,\ldots,K}$ la famille d'événements tel que $B_k = (U \in D(c, r_k))$ avec $c \in [0,1]/D(c, r_k) \subset D(O, 1)$

Comme auparavant, on suppose que les r_k sont identiques.

On a donc :

$$N = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{B_k}$$

et,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[N] = \mathrm{E}[\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{B_k}] &= \sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}[\mathbb{1}_{B_k}] = \sum_{k=1}^{K} P(U \in D(c, r_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{\pi} \qquad \text{avec } a_k \text{ l'aire du disque } D(c, r_k)
\end{aligned}
$$

Par avant,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[N^2]-\mathrm{E}[N]^2 &= 2\sum_{j<k}^{K}\mathrm{E}[\mathbb{1}_{B_k\cap B_j}]+\sum_{k=1}^{K}\mathrm{E}[\mathbb{1}_{B_k}]-(\sum_{k=1}^{K}\mathrm{E}[\mathbb{1}_{B_k}])^2\\
&= 2\sum_{j<k}^{K}P(B_k\cap B_j)+\sum_{k=1}^{K}a_k-(\sum_{k=1}^{K}a_k)^2\\
&\leq 2\sum_{j<k}^{K}\frac{a_k}{\pi}+\sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{\pi}-(\sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{\pi})^2\\
&\leq 2\frac{a_k}{\pi}\sum_{j<k}^{K}1+\frac{a_k}{\pi}\sum_{k=1}^{K}1-(\frac{a_k}{\pi}\sum_{k=1}^{K}1)^2\\
&\leq \frac{a_k}{\pi}*\frac{K(K-1)}{2}+\frac{a_k}{\pi}*K-(\frac{a_k}{\pi}*K)^2\\
\mathrm{E}[N^2]-\mathrm{E}[N]^2 &\leq K^2\frac{a_k}{\pi}(1-\frac{a_k}{\pi})
\end{aligned}
$$

Donc

$$\boxed{V(N)\leq K^2\frac{a_k}{\pi}(1-\frac{a_k}{\pi})}$$

$$\boxed{V(N)\leq K^2.r_k^2.(1-r_k^2)}$$