

Analyse de la Variance à 2 Facteurs

Antoine GODICHON-BAGGIONI

INSA de Rouen – Génie Mathématique - 4^{ème} Année

1 Introduction

Dans ce chapitre, on généralise le cadre de l'analyse de la variance à un facteur à celui de deux facteurs pour étudier l'influence de deux variables qualitatives (prenant un nombre fini de valeurs ou modalités) sur une variable quantitative qu'on notera Y .

Comme dans le cadre de l'Anova 1, on supposera que :

- les facteurs influencent seulement la moyenne de la variable quantitative Y et non sa variance ;
- les effets des facteurs sont additifs ;
- les variations autres que celles provoquées par les facteurs sont gaussiennes et indépendantes.

Essayons d'illustrer la problématique de l'ANOVA à deux facteurs à l'aide des trois exemples suivants.

Exemple 1. On veut étudier l'effet de deux facteurs qualitatifs *Niveau de la fertilisation* et *Rotation de la culture* sur le poids des grains de colza. On compare $p = 2$ niveaux de fertilisation (1 pour faible et 2 pour fort) et $q = 3$ types de rotation maïs/blé/colza/blé (A sans enfouissement de paille, B avec enfouissement de paille, C avec 4 années de prairie temporaire entre chaque succession sans enfouissement de paille). On a donc $p \times q = 2 \times 3 = 6$ traitements possibles, un traitement étant une combinaison de niveaux des facteurs *Fertilisation***Rotation* ($1A, 1B, \dots, 2C$). On dispose de $n = 60$ parcelles. Chacune des 6 combinaisons (traitement) a été appliquée sur $r = 10$ parcelles. On note y_{ijk} , avec $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ et $k = 1, \dots, 10$, le poids des grains sur la $k^{\text{ème}}$ parcelle traitée avec le traitement (ij) (fertilisation i , rotation j). Les données se présentent de la manière suivante :

Parcelle	Fertilisation	Rotation	Poids des grains de colza
1	1	A	27,6
2	1	A	16,3
\vdots			
59	2	C	31,6
60	2	C	25,8

que l'on peut résumer en

Rotation \ Fertilisation	A ($j = 1$)	B ($j = 2$)	C ($j = 3$)	Total
$i = 1$	$\bar{y}_{11\bullet} = 24,11$ $n_{11} = 10$ $s_{11} = 8.61$	$\bar{y}_{12\bullet} = 24,00$ $n_{12} = 10$ $s_{12} = 7.37$	$\bar{y}_{13\bullet} = 28,64$ $n_{13} = 10$ $s_{13} = 5.86$	$\bar{y}_{1\bullet\bullet} = 25,58$ $n_{1\bullet} = 30$
$i = 2$	$\bar{y}_{21\bullet} = 15,81$ $n_{21} = 10$ $s_{21} = 7.44$	$\bar{y}_{22\bullet} = 19,84$ $n_{22} = 10$ $s_{22} = 8.27$	$\bar{y}_{23\bullet} = 31,75$ $n_{23} = 10$ $s_{23} = 7.25$	$\bar{y}_{2\bullet\bullet} = 22,47$ $n_{2\bullet} = 30$
Total	$\bar{y}_{\bullet 1\bullet} = 19,96$ $n_{\bullet 1} = 20$	$\bar{y}_{\bullet 2\bullet} = 21,92$ $n_{\bullet 2} = 20$	$\bar{y}_{\bullet 3\bullet} = 30,20$ $n_{\bullet 3} = 20$	$\bar{y} = 24,03$ $n = 60$

On observe des différences de moyennes assez fortes entre traitements (de 15,8 pour le traitement “2A” à 31.75 pour le traitement “2C”). La variabilité semble être la même dans les différents groupes ce qui conforte l’hypothèse d’homoscédasticité (égalité des variances) que nous ferons dans les différents modèles d’Anova 2 que nous présenterons. A partir de ces données, on cherchera donc à évaluer l’effet des deux facteurs *fertilisation* et *rotation* (et de leur interaction) sur le poids des grains de colza.

Exemple 2. Un agronome souhaite comparer l’influence sur la production laitière d’une même espèce de vaches, de $q = 3$ *Régimes alimentaires* et de $p = 2$ *Exploitations*. On note y_{ij} , avec $i = 1, 2$ et $j = 1, 2, 3$, la production laitière d’une vache traitée avec le traitement (ij) (exploitation i , régime j). Les résultats expérimentaux sont ceux du tableau suivant :

Exploitations	Régime Alim.			Total	Moyenne $\bar{y}_{i\bullet}$
	A	B	C		
1	7	36	2	45	15
2	13	44	18	75	25
Total	20	80	20	120	
Moyenne $\bar{y}_{\bullet j}$	10	40	10		$\bar{y}_{\bullet\bullet} = 20$

On peut remarquer, dans cet exemple, que chaque combinaison “*Exploitation, Régime*” n’est observée qu’une seule fois. On dit qu’il n’y a pas de répétition ce qui aura des conséquences sur la modélisation des données. On observe là encore des différences de moyennes dans les groupes. On veut donc, à partir de ces données, évaluer l’effet des deux facteurs *exploitation* et *régime alimentaire* sur la production laitière d’une vache.

Exemple 3. On veut comparer les couleurs de $p = 7$ champagnes (A,B,C,D,E,F,G). La couleur est mesurée par un indice compris entre 1 et 50 attribué par un juge (on suppose la mesure continue). La notation fait appel à une évaluation subjective fournie par un juge entraîné. L’évaluation des champagnes est confiée à $q = 14$ juges. Pour éviter que leurs facultés sensorielles ne s’émoussent, les 14 juges n’évaluent pas tous les champagnes : chaque juge évalue seulement $n_{\bullet j} = 3$ champagnes parmi les 7 et chaque champagne est noté par $n_{i\bullet} = 6$ juges. On a donc au total $n = p \times n_{i\bullet} = q \times n_{\bullet j} = 42$ observations. Les effectifs sont donnés dans le tableau suivant (répartition des 7 champagnes entre les 14 juges) :

Juge \ Champagne	A	B	C	D	E	F	G	Total
1	0	0	1	1	0	0	1	3
2	1	0	0	1	1	0	0	3
3	0	1	0	1	0	1	0	3
4	1	0	0	1	1	0	0	3
5	0	1	0	0	1	0	1	3
6	1	1	1	0	0	0	0	3
7	1	0	0	0	0	1	1	3
8	0	1	0	1	0	1	0	3
9	0	0	1	1	0	0	1	3
10	1	0	0	0	0	1	1	3
11	0	1	0	0	1	0	1	3
12	0	0	1	0	1	1	0	3
13	1	1	1	0	0	0	0	3
14	0	0	1	0	1	1	0	3
total	6	6	6	6	6	6	6	42

Ce dispositif est un dispositif en blocs. On peut considérer chaque juge comme un appareil de mesure : toutes les mesures ne sont pas faites avec le même appareil et il faut tenir compte de l'hétérogénéité de ce matériel expérimental. Chaque juge constitue ainsi un bloc, chaque juge ne notant qu'une partie des champagnes mais tous les juges en notant le même nombre. On parle de plan en blocs incomplets équilibrés.

Les résultats de l'expérience se présentent comme suit : (mesures de l'indice de couleur des 7 champagnes par les 14 juges)

Observation	Juge	Champagne	Indice de couleur
1	1	C	36
2	1	D	16
3	1	G	19
4	2	A	22
⋮			
42	14	F	31

On cherche à analyser les sources de variabilité de la note en prenant en compte l'effet champagne (qui est l'effet d'intérêt) et l'effet juge (qui est un effet bloc), bien que la comparaison des juges entre eux ne nous intéressent pas directement.

2 Les données et le plan d'expérience

2.1 Les données

On cherche donc à étudier l'effet de deux facteurs qualitatifs A et B sur une variable quantitative Y . On suppose que le facteur A a p niveaux (modalités) et que le facteur B a q niveaux. Pour chaque couple (i, j) de niveau, on dispose de n_{ij} mesures de Y , notées y_{ijk} avec $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ et $k = 1, \dots, n_{ij}$. On note $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^q n_{ij}$, le nombre de mesures de Y pour la modalité i du facteur A , et $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^p n_{ij}$, le nombre de mesures de Y pour la modalité j du facteur B . Un **traitement** (ij) est une combinaison des niveaux des 2 facteurs, k est un indice de répétition du traitement (ij) .

Dans l'exemple 1, y_{ijk} désigne la $k^{\text{ème}}$ parcelle traitée avec la fertilisation i et la rotation j . Pour tout $i = 1, 2$ et $j = 1, 2, 3$, chaque traitement (ij) est répété $n_{ij} = 10 = r$ fois. Chaque fertilisation

i a été appliquée sur $n_{i\bullet} = r \times q = 10 \times 3 = 30$ parcelles et chaque rotation j a été appliquée sur $n_{\bullet j} = r \times p = 10 \times 2 = 20$ parcelles. On peut donc dans cet exemple croiser tous les niveaux des deux facteurs.

2.2 Le plan d'expérience

L'ensemble des (n_{ij}) définit le **plan d'expérience** qui est déterminant pour la suite de l'étude. Pour pouvoir étudier simplement l'effet de chacun des deux facteurs A et B , il faut un plan d'expérience dit orthogonal.

Définition 2.1 On dira que le plan d'expérience est :

- **complet** si $n_{ij} > 0$ pour tout traitement (i, j) ;
- **à répétition** si $n_{ij} > 1$ pour tout traitement (i, j) ;
- **équilibré** si $n_{ij} = r > 0$ pour tout traitement (i, j) ;
- **orthogonal** lorsque $n_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n_{\bullet\bullet}}$ pour tout traitement (i, j) .

Exercice E.1 Montrer qu'un plan complet équilibré est orthogonal. Montrer, en exhibant un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

Remarques. Dans l'exemple 1, on a un plan d'expérience complet équilibré avec répétition alors que dans l'exemple 2, on a un plan complet équilibré sans répétition. Dans chacun des cas, on a donc un plan d'expérience orthogonal. En revanche, dans l'exemple 3, on a un plan en blocs incomplets équilibrés. Le plan n'est pas orthogonal. En effet, puisque pour tous les champagnes i , $n_{i\bullet} = 6$ et pour tous les juges j , $n_{\bullet j} = 3$, on a donc $(n_{i\bullet} \times n_{\bullet j})/n = 18/42$ alors que $n_{ij} = 1$ ou 0.

Nous limiterons notre étude de l'Anova 2 au cas du plan d'expérience complet équilibré avec ou sans répétition ($r \geq 1$). Ce dispositif implique l'orthogonalité et permet d'étudier et de décomposer de façon unique les différents effets. Si le dispositif n'est pas orthogonal, la décomposition en sommes des carrés associés à chaque effet n'est pas unique, et on ne pourra jamais complètement séparer les effets des deux facteurs.

Les données seront donc de la forme y_{ijk} avec $k = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$. Lorsque r sera égal à 1, on pourra noter les données y_{ij} .

3 Le modèle complet d'Anova 2

3.1 Les hypothèses

On fait les hypothèses de normalité et d'indépendance suivantes :

on suppose que pour tout (i, j, k) , la donnée y_{ijk} est une réalisation d'une variable aléatoire Y_{ijk} de loi $\mathcal{N}(m_{ij}, \sigma^2)$, et que les (Y_{ijk}) sont globalement indépendantes.

On peut encore écrire ces hypothèses sous la forme :

$$Y_{ijk} = m_{ij} + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (1)$$

où la notation $(\varepsilon_i) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ signifie que les variables aléatoires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Cette modélisation du traitement décrit l'effet conjoint des deux facteurs en supposant une espérance spécifique m_{ij} pour chaque traitement (ij) et une variance intra-traitement σ^2 commune à tous les traitements.

3.2 Décomposition des effets

Pour faire apparaître les différents effets, on utilise la décomposition du modèle suivante

$$Y_{ijk} = \underbrace{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}}_{m_{ij}} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (2)$$

où

- μ représente un **effet global** inconnu (effet commun des 2 facteurs quelles que soient les modalités des deux facteurs) ;
- α_i représente l'**effet principal** (spécifique) inconnu du niveau i du facteur A ;
- β_j représente l'**effet principal** inconnu du niveau j du facteur B ;
- γ_{ij} est un terme d'**interaction** inconnu entre le niveau i de A et j de B . Il permet de prendre en compte l'effet spécifique du traitement (ij) au delà de la somme des effets principaux $\alpha_i + \beta_j$ (non additivité des effets principaux) ;
- σ^2 est la variance résiduelle inconnue.

Dans (2), on a décomposé l'effet conjoint général m_{ij} du traitement (ij) en faisant apparaître explicitement les effets des différents facteurs dans un **modèle additif avec interaction**. On qualifiera ce modèle avec interaction, de **modèle complet d'Anova 2**.

Cependant, la présence de l'effet d'interaction n'est pas systématique : lorsque $r = 1$ (absence de répétitions) on ne peut prendre en compte ce terme dans la modélisation car on n'aura pas assez de données pour l'estimer (ce qui ne signifie pas pour autant que l'interaction n'existe pas). Quand on ne peut pas ou qu'on ne souhaite pas modéliser cette interaction, on décompose l'effet traitement en

$$m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad (3)$$

ce qui conduit au modèle

$$Y_{ijk} = \underbrace{\mu + \alpha_i + \beta_j}_{m_{ij}} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ce modèle est un sous-modèle du modèle complet (2).

Nous étudierons dans la suite les deux situations suivantes :

- le plan complet équilibré avec interaction (donc $r > 1$) ;
- le plan complet équilibré sans interaction, avec $r = 1$ ou $r > 1$.

Remarque 3.1 Lorsque l'on dispose de répétitions comme dans l'exemple 1, on peut tracer le graphe d'interaction (lignes joignant les moyennes par traitement) pour savoir si l'on doit (de manière descriptive) prévoir un terme d'interaction dans la modélisation. En l'absence d'interaction, les lignes joignant les moyennes par traitement doivent être "parallèles".

Dans l'exemple 1, elles ne le sont pas (voir Figure 1) : les 2 lignes (une pour chaque niveau de la fertilisation) se croisent entre les rotations 2 et 3. Ceci traduit que l'écart entre les deux niveaux de fertilisation n'est pas le même ($\gamma_{1j} - \gamma_{2j} \neq \text{constante}, \forall j$). Il semble donc raisonnable d'envisager dans la modélisation un terme d'interaction entre les deux facteurs.

3.3 Contraintes d'identifiabilité du modèle complet

Pour estimer les différents paramètres du modèle (2), il est nécessaire d'introduire des contraintes. Ces contraintes sont nécessaires pour rendre le modèle identifiable. Pour le modèle avec interaction (2),

Figure 1 – Graphe d'interaction associé à l'exemple 1

les contraintes naturelles sont :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^q \beta_j = 0, \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p \text{ et } \sum_{i=1}^p \gamma_{ij} = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, q \quad (4)$$

Il est à noter que les contraintes utilisées par le logiciel SAS sont différentes :

$$\alpha_p = 0, \beta_q = 0, \forall i = 1, \dots, p, \gamma_{iq} = 0, \forall j = 1, \dots, q, \gamma_{pj} = 0$$

Remarque 3.2 Dans (4), les contraintes d'identifiabilité

$$\sum_{j=1}^q \gamma_{ij} = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p \text{ et } \sum_{i=1}^p \gamma_{ij} = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, q$$

ne sont pas indépendantes. On peut en effet montrer que les $(p + q)$ équations définissant les contraintes peuvent en fait se ramener à $(p + q - 1)$ équations.

Exercice E.2 Montrer le, lorsque $p = 2$ et $q = 3$. On montrera que le système linéaire constitué des 5 contraintes se ramène en fait à un système linéaire à quatre équations.

3.4 Dimension du modèle complet d'Anova 2

Définition 3.3 On appellera **dimension du modèle** dans le contexte de l'ANOVA, la dimension de l'espace dans lequel vit l'espérance des variables aléatoires Y_{ijk} . Cette dimension est égale au nombre de paramètres d'espérance envisagés dans la modélisation moins le nombre de contraintes d'identifiabilité nécessaires à l'estimation des paramètres.

Pour le modèle complet, le nombre de paramètres d'espérance est $(1 + p + q + pq)$ et le nombre de contraintes (indépendantes) est $(1 + 1 + (p + q - 1)) = (p + q + 1)$. La dimension du modèle complet est donc égale à $(1 + p + q + pq) - (p + q + 1) = pq$ et nous désignerons ce modèle dans la suite par (M_{pq}) .

3.5 Les sous-modèles du modèle complet de l'Anova 2

Nous déclinons ici tous les sous-modèles du modèle complet de l'Anova 2 qui nous intéresseront par la suite. Nous préciserons pour chaque modèle les contraintes (indépendantes) d'identifiabilité et la dimension du modèle.

3.5.1 Modèle sans interaction

Le modèle sans interaction est défini par :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (5)$$

avec les contraintes d'identifiabilité $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ et $\sum_{j=1}^q \beta_j = 0$.

Ce sous-modèle du modèle (M_{pq}) est de dimension $(1 + p + q) - (1 + 1) = p + q - 1$ et nous le désignerons dans la suite par (M_{p+q-1}) .

3.5.2 Modèle sans effet du facteur A

Le modèle où l'on ne tient pas compte d'un effet possible du facteur A est défini par :

$$Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (6)$$

avec la contrainte d'identifiabilité $\sum_{j=1}^q \beta_j = 0$.

Ce sous-modèle du modèle (M_{pq}) est de dimension $(1 + q) - (1) = q$ et nous le désignerons dans la suite par (M_q) .

3.5.3 Modèle sans effet du facteur B

Le modèle où l'on ne tient pas compte d'un effet possible du facteur B est défini par :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (7)$$

avec la contrainte d'identifiabilité $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$.

Ce sous-modèle du modèle (M_{pq}) est de dimension $(1 + p) - (1) = p$ et nous le désignerons dans la suite par (M_p) .

3.5.4 Modèle sans effet du traitement

Le modèle où l'on ne tient pas compte des deux facteurs A et B est

$$Y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (8)$$

Ce sous-modèle du modèle (M_{pq}) est de dimension 1 (1 paramètre et 0 contrainte) et nous le désignerons dans la suite par (M_1) .

3.5.5 Deux autres sous-modèles

Deux autres sous-modèles peuvent être considérés.

D'une part, le modèle où $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$, c'est à dire

$$Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (9)$$

avec les contraintes d'identifiabilité

$$\sum_{j=1}^q \beta_j = 0, \quad \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \gamma_{ij} = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, q. \quad (10)$$

Ce sous-modèle du modèle (M_{pq}) est de dimension $(1 + q + pq) - (1 + p + q - 1) = pq - p + 1$ et nous le désignerons dans la suite par (M_{pq-p+1}) .

D'autre part, le modèle où $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$, c'est à dire

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (11)$$

avec les contraintes d'identifiabilité

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \gamma_{ij} = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, q. \quad (12)$$

Ce sous-modèle du modèle (M_{pq}) est de dimension $(1 + p + pq) - (1 + p + q - 1) = pq - q + 1$ et nous le désignerons dans la suite par (M_{pq-q+1}) .

4 Etude du plan complet équilibré avec interaction

Le cadre. Pour chaque traitement (i, j) , on dispose de $r > 1$ mesures de Y , notées y_{ijk} avec k compris entre 1 et r , i entre 1 et p et j entre 1 et q . Pour tout (i, j, k) , la donnée y_{ijk} est une réalisation d'une variable aléatoire Y_{ijk} de loi $\mathcal{N}(m_{ij}, \sigma)$, les variables aléatoires Y_{ijk} étant globalement indépendantes et on suppose que l'on a

$$m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

4.1 Définition des différents tests

On présente dans ce paragraphe les différents tests que l'on pourra effectuer dans le contexte du modèle complet de l'Anova 2.

4.1.1 Test de l'effet du traitement

On veut tester le caractère significatif de l'influence du traitement sur Y , c'est à dire tester l'influence de la combinaison des deux facteurs sur Y . Pour cela, on teste l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0, \forall j \in \{1, \dots, q\}, \beta_j = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists i \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \text{ ou } \exists j \text{ tq } \beta_j \neq 0 \text{ ou } \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à tester le modèle (M_1) contre le modèle (M_{pq}) , ie.

$$H_0 : \ll \text{Modèle } (M_1) : Y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \gg$$

contre

$$H_1 : \ll \text{Modèle } (M_{pq}) : Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \gg$$

On peut remarquer que ce test est équivalent à faire une Anova 1 à pq niveaux puisque les hypothèses s'écrivent également

$$H_0 : \ll m_{11} = m_{12} = \dots = m_{pq} \gg$$

$$H_1 : \ll \exists (i, j, i', j') \text{ tq } m_{ij} \neq m_{i'j'} \gg$$

4.1.2 Test de l'effet de l'interaction

Il s'agit de tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à tester le modèle (M_{p+q-1}) contre le modèle (M_{pq}) , ie.

$$H_0 : \ll \text{Modèle } (M_{p+q-1}) : Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \gg$$

contre

$$H_1 : \ll \text{Modèle } (M_{pq}) : Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \gg$$

4.1.3 Test de l'effet du facteur A

On veut tester le caractère significatif de l'influence du facteur A sur Y . Deux méthodes sont possibles.

Première méthode. On teste l'hypothèse

$$H_0 : \ll \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists i \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \text{ ou } \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à tester le modèle (M_q) contre le modèle (M_{pq}) , ie.

$$H_0 : \ll \text{Modèle } (M_q) : Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \gg$$

contre

$$H_1 : \ll \text{Modèle } (M_{pq}) : Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \gg$$

Deuxième méthode On commence par tester l'absence d'interaction c'est à dire tester

$$H_0 : \ll \text{Modèle } (M_{p+q-1}) \gg \text{ versus } H_1 : \ll \text{Modèle } (M_{pq}) \gg,$$

puis si ce test conduit à conclure à un effet non significatif de l'interaction, on se place dans le cadre du modèle sans interaction (M_{p+q-1}) , et on teste alors le caractère significatif de l'influence du facteur A , c'est à dire

$$H_0 : \ll \text{Modèle } (M_q) \gg \text{ versus } H_1 : \ll \text{Modèle } (M_{p+q-1}) \gg$$

Remarque 4.1 Attention, l'hypothèse $H_0 : \ll \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \gg$ dans le modèle complet, c'est à dire

$$H_0 : \ll \text{Modèle } (M_{pq-p+1}) : Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \gg$$

ne s'interprète pas facilement et ne signifie pas que l'on teste l'absence d'effet du facteur A puisque subsiste le terme d'interaction qui dépend de A . On ne peut pas supprimer l'effet principal d'un facteur quand subsiste le terme d'interaction.

4.1.4 Test de l'effet du facteur B

Puisque les rôles joués par A et B sont inter-changeables, la mise en œuvre du test de l'effet du facteur B sur Y est identique à celle du facteur A : il suffit donc d'échanger dans le paragraphe 4.1.3, les notations A , α et p avec B , β et q respectivement. Mentionnons seulement qu'on testera

$$H_0 : \ll \forall j \in \{1, \dots, q\}, \beta_j = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists j \text{ tq } \beta_j \neq 0 \text{ ou } \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à tester le modèle (M_p) contre le modèle (M_{pq}) .

4.2 Estimation des effets, de la variance et prévision

On introduit les notations suivantes. Pour tout $i = 1, \dots, p$ et tout $j = 1, \dots, q$, on note :

$$\begin{aligned} \bullet \bar{Y}_{...} &= \frac{1}{pqr} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r Y_{ijk}, & \bullet \bar{Y}_{i..} &= \frac{1}{qr} \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r Y_{ijk} \\ \bullet \bar{Y}_{.j.} &= \frac{1}{pr} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r Y_{ijk}, & \bullet \bar{Y}_{ij.} &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r Y_{ijk} \end{aligned}$$

4.2.1 Estimation des effets et prévision dans le modèle complet (M_{pq})

Estimation. Dans le modèle (M_{pq}), on peut montrer qu'avec les contraintes (4), les estimateurs des moindres carrés des paramètres μ , (α_i) , (β_j) et (γ_{ij}) , obtenus en minimisant

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(Y_{ijk} - (\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}) \right)^2$$

sont donnés par :

- $\hat{\mu} = \bar{Y}_{...}$;
- $\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$ pour $i = 1, \dots, p$;
- $\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$ pour $j = 1, \dots, q$;
- $\hat{\gamma}_{ij} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...} = \bar{Y}_{ij.} - (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$ pour $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$.

Exercice E.3 Vérifier que $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$ et $\hat{\gamma}_{ij}$ sont bien des estimateurs sans biais.

Prévision. La prévision d'un y_{ijk} dans ce modèle est donc donnée par

$$\hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij} = \bar{Y}_{ij.}$$

Ce qui signifie, pour les données de l'exemple 1, que le poids des grains prédit pour toute parcelle traitée avec la fertilisation i et la rotation j est le poids moyen observé pour le traitement (ij) .

4.2.2 Estimation des paramètres et prévision dans les sous-modèles

Estimation. Puisque le plan d'expérience est orthogonal, pour tous les sous-modèles du modèle complet (M_{pq}), l'estimation des paramètres μ , (α_i) et (β_j) est inchangée. Quel que soit le sous-modèle considéré, on a :

- $\hat{\mu} = \bar{Y}_{...}$;
- $\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$ pour $i = 1, \dots, p$;
- $\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$ pour $j = 1, \dots, q$;

Prévision. En utilisant les estimateurs des différents paramètres, on obtient, pour chaque sous-modèle, les prévisions suivantes :

Modèle	Prévision			
(M_{pq})	$\hat{Y}_{ijk}(M_{pq})$	$=$	$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij}$	$= \bar{Y}_{ij.}$
(M_{p+q-1})	$\hat{Y}_{ijk}(M_{p+q-1})$	$=$	$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$	$= \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$
(M_q)	$\hat{Y}_{ijk}(M_q)$	$=$	$\hat{\mu} + \hat{\beta}_j$	$= \bar{Y}_{.j.}$
(M_p)	$\hat{Y}_{ijk}(M_p)$	$=$	$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i$	$= \bar{Y}_{i..}$
(M_1)	$\hat{Y}_{ijk}(M_1)$	$=$	$\hat{\mu}$	$= \bar{Y}_{...}$

4.2.3 Sommes des carrés résiduelles dans les sous-modèles et estimation de la variance

On peut maintenant déduire les sommes des carrés résiduelles pour chaque modèle ainsi qu'un estimateur (sans biais) de la variance σ^2 .

Pour $m \in \{1, p, q, p+q-1, pq\}$, le résidu associé au modèle (M_m) vaut $Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk}(M_m)$. Les sommes des carrés résiduelles sont définies dans le tableau suivant.

Modèle	Somme des Carrés des Résidus SCR	Estimateur de σ^2
(M_{pq})	$SCR(M_{pq}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet})^2$	$S^2 = \frac{SCR(M_{pq})}{pqr - pq}$
(M_{p+q-1})	$SCR(M_{p+q-1}) = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j\bullet} + \bar{Y}_{...})^2$	
(M_q)	$SCR(M_q) = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{.j\bullet})^2$	
(M_p)	$SCR(M_p) = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..})^2$	
(M_1)	$SCR(M_1) = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$	

On a le théorème suivant.

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses du modèle complet équilibré avec interaction, S^2 est un estimateur sans biais de σ^2 et on a*

$$\frac{(pqr - pq)S^2}{\sigma^2} = \frac{SCR(M_{pq})}{\sigma^2} \sim \chi^2(pqr - pq)$$

Preuve. On commence par montrer la décomposition en somme de carrés suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \varepsilon_{ijk}^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{ij\bullet} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_{ij})^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet})^2 \\ &= r \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (\bar{Y}_{ij\bullet} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_{ij})^2 + SCR(M_{pq}) \end{aligned}$$

Ensuite, puisque les variables aléatoires (ε_{ijk}) sont *iid* de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on déduit que

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\frac{\varepsilon_{ijk}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(pqr)$$

De la même manière, puisque les variables aléatoires $\bar{Y}_{ij\bullet}$ sont indépendantes, de loi $\mathcal{N}(\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}; \sigma^2/r)$, on déduit que les variables $\sqrt{r}(\bar{Y}_{ij\bullet} - (\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}))/\sigma$ sont *iid* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et par conséquent

$$r \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(\frac{\bar{Y}_{ij\bullet} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_{ij}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(pq)$$

et on conclut en utilisant le théorème de Cochran. \square

4.3 Test des différents effets : analyse de la variance du modèle complet

4.3.1 Préliminaires

Comme on l'a vu dans les paragraphes 4.1.1 à 4.1.4, les tests des différents effets sont en fait équivalents à comparer un sous-modèle (M_m) , où $m \in \{1, p, q, p + q - 1\}$, avec le modèle complet de l'Anova 2 (M_{pq}) . Avant de passer en revue les différents tests, nous présentons dans ce paragraphe le résultat qui permettra de construire un test de l'hypothèse nulle $H_0 : \ll \text{Modèle } (M_m) \gg$ contre l'alternative $H_1 : \ll \text{Modèle } (M_{pq}) \gg$. La construction d'un tel test repose sur le théorème suivant.

Théorème 4.3 *Sous les hypothèses du modèle complet équilibré avec interaction, on a, pour tout $m \in \{1, p, q, (p + q - 1)\}$, la décomposition en somme de carrés*

$$SCR(M_m) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{Y}(M_{pq}) - \hat{Y}(M_m) \right)^2 + SCR(M_{pq}) \quad (13)$$

et sous H_0 ,

$$Z_m = \frac{(SCR(M_m) - SCR(M_{pq})) / (pq - m)}{SCR(M_{pq}) / (pqr - pq)} \sim F(pq - m; pqr - pq) \quad (14)$$

Remarque 4.4

- Le résultat (14) est bien évidemment faux sous H_1 , ce qui fait de Z_m une statistique de test.
- Dans (13), la quantité $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (\hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_m))^2$ représente la réduction d'erreur quand on passe du modèle (M_m) au modèle (M_{pq}) . Lorsque cette réduction d'erreur ne sera pas "significative", on préconisera de modéliser les données à l'aide du modèle (M_m) .

Preuve. Pour établir (13), on commence par décomposer $SCR(M_m)$ en

$$SCR(M_m) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_m) \right)^2 + SCR(M_{pq}) \quad (15)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_m) \right) \left(Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) \right) \quad (16)$$

Ensuite, après avoir remplacé $\hat{Y}_{ijk}(M_{pq})$ par $\bar{Y}_{ij\cdot}$, on montre que le double produit est nul, en utilisant le fait que pour tout m , $(\bar{Y}_{ij\cdot} - \hat{Y}_{ijk}(M_m))$ ne dépend pas de k et que $\sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot}) = 0$. La décomposition en somme de carrés est ainsi établie.

D'après le théorème 4.2, on sait que $SCR(M_{pq}) / \sigma^2 \sim \chi^2(pqr - pq)$. De plus sous H_0 , le modèle (M_{pq}) coïncide avec le modèle (M_m) , et dans ce cas, l'estimateur sans biais de σ^2 est $SCR(M_m) / (pqr - m)$ et on a

$$SCR(M_m) / \sigma^2 \sim \chi^2(pqr - m).$$

Le théorème de Cochran nous dit alors que sous H_0 ,

- $\frac{(SCR(M_m) - SCR(M_{pq}))}{\sigma^2} \sim \chi^2((pqr - m) - pq(r - 1))$
- Les variables aléatoires $(SCR(M_m) - SCR(M_{pq}))$ et $SCR(M_{pq})$ sont indépendantes,

ce qui nous permet de déduire (14) en utilisant le procédé de construction de la loi de Fisher. \square

Nous sommes maintenant en mesure de bâtir les tests des différents effets.

4.3.2 Test de l'effet traitement

Le premier test que l'on peut faire dans le cadre du plan complet équilibré avec interaction est celui de l'absence d'effet du traitement. Comme on l'a vu dans le paragraphe 4.1.1, on cherche à tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, q\}, \beta_j = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists i \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \text{ ou } \exists j \text{ tq } \beta_j \neq 0 \text{ ou } \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à comparer les modèles (M_1) et (M_{pq}) .

Construction du test : elle repose sur le théorème 4.3 utilisé avec $m = 1$, qui donne d'une part, la décomposition de la variance

$$SCR(M_1) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_1) \right)^2 + SCR(M_{pq}) \quad (17)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij} \right)^2}_{SCM} + SCR(M_{pq}) \quad (18)$$

et qui fournit d'autre part, la statistique de test, puisque

$$Z = \frac{SCM / (pq - 1)}{SCR(M_{pq}) / (pqr - pq)} \underset{H_0}{\sim} F(pq - 1; pqr - pq) \quad (19)$$

Mise en œuvre du test. Pour tester H_0 contre H_1 au risque δ , on utilise la statistique de test

$$Z = \frac{SCM / (pq - 1)}{SCR(M_{pq}) / (pqr - pq)} = \frac{(SCR(M_1) - SCR(M_{pq})) / (dim(M_{pq}) - dim(M_1))}{SCR(M_{pq}) / (pqr - dim(M_{pq}))}$$

qui sous les hypothèses du modèle complet d'Anova 2 et sous H_0 suit une loi $F(pq - 1; pqr - pq)$. La zone de rejet de H_0 au risque δ est $\{Z > f_\delta\}$ avec f_δ tel que

$$\text{Proba} \left[F(pq - 1; pqr - pq) \leq f_\delta \right] = 1 - \delta.$$

Ensuite, on calcule la valeur z de Z sur les données et on adopte alors la règle de décision suivante :

- si $z \leq f_\delta$ alors on accepte H_0 au risque δ et on considère qu'il n'y a pas d'effet significatif du traitement sur Y ;
- si $z > f_\delta$ alors on rejette H_0 au risque δ et on considère que le traitement a un effet significatif sur Y .

Interprétation. 1. Tester l'effet traitement, c'est donc comparer l'estimateur de la variance résiduelle σ^2 dans le modèle (M_1) , donné par $SCR(M_1)/(pqr - 1)$ (qui n'est bon que sous H_0 : "Modèle (M_1) "), à celui obtenu dans le modèle (M_{pq}) , donné par $SCR(M_{pq})/(pqr - pq)$. La somme des carrés du modèle $SCM = SCR(M_1) - SCR(M_{pq})$ mesure alors la réduction d'erreur, notée $R(\alpha, \beta, \gamma | \mu)$, quand on ajoute les effets du premier facteur A , du deuxième facteur B et de leur interaction à la constante μ (pas d'effet traitement).

2. Puisque $\hat{Y}_{ijk}(M_1) = \bar{Y} \dots$, alors $SCR(M_1)$ représente aussi la variabilité totale de Y que l'on note habituellement SCT . On alors $SCT = SCM + SCR(M_{pq})$ et par conséquent, SCM représente la variabilité expliquée par le modèle (M_{pq}) alors que $SCR(M_{pq})$ représente la variabilité inexpliquée par le modèle. De plus puisque le plan est orthogonal, les effets estimés sont orthogonaux et on a la décomposition de variance

$$SCM = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij} \right)^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_{AB}^2$$

où

$$\begin{aligned} S_A^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \hat{\alpha}_i^2 = qr \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i^2 \\ S_B^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \hat{\beta}_j^2 = pr \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j^2 \\ S_{AB}^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \hat{\gamma}_{ij}^2 = r \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \hat{\gamma}_{ij}^2 \end{aligned}$$

La variance SCM se décompose donc en une part de variance due à l'effet du facteur A, une part due à l'effet du facteur B et une part due à leur interaction.

Exercice E.4 Démontrer la décomposition

$$SCM = S_A^2 + S_B^2 + S_{AB}^2$$

4.3.3 Test de l'effet de l'interaction

On veut donc tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à comparer (voir paragraphe 4.1.2), les modèles (M_{p+q-1}) et (M_{pq}) .

Construction du test. Comme dans le paragraphe précédent, elle repose sur le théorème 4.3 utilisé ici avec $m = p + q - 1$, qui donne d'une part, la décomposition de la variance

$$\begin{aligned} SCR(M_{p+q-1}) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_{p+q-1}) \right)^2 + SCR(M_{pq}) \\ &= S_{AB}^2 + SCR(M_{pq}) \text{ puisque } \hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_{p+q-1}) = \hat{\gamma}_{ij} \end{aligned} \quad (20)$$

et qui fournit d'autre part, la statistique de test

$$Z_{AB} = \frac{S_{AB}^2 / (pq - p - q + 1)}{SCR(M_{pq}) / (pqr - pq)} \underset{H_0}{\sim} F(pq - p - q + 1; pqr - pq) \quad (21)$$

Mise en œuvre du test. Pour tester H_0 contre H_1 au risque δ , on utilise la statistique de test

$$Z_{AB} = \frac{S_{AB}^2 / (pq - p - q + 1)}{SCR(M_{pq}) / (pqr - pq)} = \frac{(SCR(M_{p+q-1}) - SCR(M_{pq})) / (dim(M_{pq}) - dim(M_{p+q-1}))}{SCR(M_{pq}) / (pqr - dim(M_{pq}))}$$

qui sous les hypothèses du modèle complet d'Anova 2 et sous H_0 suit une loi $F(pq - p - q + 1; pqr - pq)$. La zone de rejet de H_0 au risque δ est $\{Z_{AB} > f_\delta\}$ avec f_δ tel que

$$\text{Proba} \left[F(pq - p - q + 1, pqr - pq) \leq f_\delta \right] = 1 - \delta.$$

Ensuite, on calcule la valeur z de Z_{AB} sur les données et on adopte alors la règle de décision suivante :

- si $z \leq f_\delta$ alors on accepte H_0 au risque δ et on considère qu'il n'y a pas d'effet d'interaction significatif sur Y ;
- si $z > f_\delta$ alors on rejette H_0 au risque δ et on considère que l'interaction est significative.

Interprétation. On vient donc de montrer que tester l'effet de l'interaction des facteurs A et B , c'est comparer l'estimateur σ^2 dans le modèle (M_{p+q-1}) , donné par $SCR(M_{p+q-1})/(pq - p - q + 1)$ (qui n'est bon que sous H_0 : "Modèle (M_{p+q-1}) "), à celui obtenu dans le modèle (M_{pq}) , donné par $SCR(M_{pq})/(pqr - pq)$. La somme des carrés $S_{AB}^2 = SCR(M_{p+q-1}) - SCR(M_{pq})$ mesure alors la réduction d'erreur, notée $R(\gamma | \alpha, \beta, \mu)$, quand on ajoute le terme d'interaction à la constante μ et aux effets du premier facteur A , du deuxième facteur B .

4.3.4 Test de l'effet du Facteur A

On veut donc tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists i \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \text{ ou } \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à comparer les modèles (M_q) et (M_{pq}) .

Construction du test. Comme dans le paragraphe précédent, elle repose sur le théorème 4.3 utilisé ici avec $m = q$, qui donne d'une part, la décomposition de la variance

$$\begin{aligned} SCR(M_q) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_q) \right)^2 + SCR(M_{pq}) \\ &= (S_A^2 + S_{AB}^2) + SCR(M_{pq}) \text{ puisque } \hat{Y}_{ijk}(M_{pq}) - \hat{Y}_{ijk}(M_q) = \hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_{ij} \end{aligned} \quad (22)$$

et qui fournit d'autre part, la statistique de test

$$Z_A = \frac{(S_A^2 + S_{AB}^2) / (pq - q)}{SCR(M_{pq}) / (pqr - pq)} \underset{H_0}{\sim} F(pq - q; pqr - pq) \quad (23)$$

Bien évidemment ce résultat est faux sous H_1 , ce qui fait de Z_A une statistique de test.

Mise en œuvre du test. Pour tester H_0 contre H_1 au risque δ , on utilise la statistique de test

$$Z_A = \frac{(S_A^2 + S_{AB}^2) / (pq - q)}{SCR(M_{pq}) / (pqr - pq)} = \frac{(SCR(M_q) - SCR(M_{pq})) / (dim(M_{pq}) - dim(M_q))}{SCR(M_{pq}) / (pqr - dim(M_{pq}))}$$

qui sous les hypothèses du modèle complet d'Anova 2 et sous H_0 suit une loi $F(pq - q; pqr - pq)$.

La zone de rejet de H_0 au risque δ est $\{Z_A > f_\delta\}$ avec f_δ tel que

$$\text{Proba} \left[F(pq - q; pqr - pq) \leq f_\delta \right] = 1 - \delta.$$

Ensuite, on calcule la valeur z de Z_A sur les données et on adopte alors la règle de décision suivante :

- si $z \leq f_\delta$ alors on accepte H_0 au risque δ et on considère qu'il n'y a pas d'effet significatif du facteur A sur Y ;
- si $z > f_\delta$ alors on rejette H_0 au risque δ et on considère que le facteur A influe de manière significative sur Y .

Interprétation. On vient donc de montrer que tester l'effet du facteur A , c'est comparer l'estimateur de la variance résiduelle σ^2 dans le modèle (M_q) , donné par $SCR(M_q)/(pq - q)$ (qui n'est bon que sous H_0 : "Modèle (M_q) "), à celui obtenu dans le modèle (M_{pq}) , donné par $SCR(M_{pq})/(pqr - pq)$. La somme des carrés $S_A^2 + S_{AB}^2 = SCR(M_q) - SCR(M_{pq})$ mesure alors la réduction d'erreur, notée $R(\alpha, \gamma | \beta, \mu)$, quand on ajoute l'effet du facteur A et du terme d'interaction à la constante μ et à l'effet du deuxième facteur B .

4.3.5 Test de l'effet du Facteur B

Puisque les rôles joués par A et B sont échangeables la construction du test et son interprétation sont analogues au paragraphe précédent. On se contentera donc de mentionner les points suivants. Pour tester le caractère significatif de l'effet du facteur B sur Y , on teste donc

$$H_0 : \ll \forall j \in \{1, \dots, q\}, \beta_j = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \gamma_{ij} = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists j \text{ tq } \beta_j \neq 0 \text{ ou } \exists (i, j) \text{ tq } \gamma_{ij} \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à comparer les modèles (M_p) et (M_{pq}) .

Pour tester H_0 contre H_1 au risque δ , on utilise la statistique de test

$$Z_B = \frac{(S_B^2 + S_{AB}^2)/(pq - p)}{SCR(M_{pq})/(pqr - pq)} = \frac{(SCR(M_p) - SCR(M_{pq})) / (dim(M_{pq}) - dim(M_p))}{SCR(M_{pq}) / (pqr - dim(M_{pq}))}$$

qui sous les hypothèses du modèle complet d'Anova 2 et sous H_0 suit une loi $F(pq - p; pqr - pq)$. La zone de rejet de H_0 au risque δ est $\{Z_B > f_\delta\}$ avec f_δ tel que

$$\text{Proba}\left[F(pq - p; pqr - pq) \leq f_\delta\right] = 1 - \delta.$$

Ensuite, on calcule la valeur z de Z_B sur les données et on adopte alors la règle de décision suivante :

- si $z \leq f_\delta$ alors on accepte H_0 au risque δ et on considère qu'il n'y a pas d'effet significatif du facteur B sur Y ;
- si $z > f_\delta$ alors on rejette H_0 au risque δ et on considère que le facteur B influe de manière significative sur Y .

Interprétation. On vient donc de montrer que tester l'effet du facteur B , c'est comparer l'estimateur de la variance résiduelle σ^2 dans le modèle (M_p) , donné par $SCR(M_p)/(pq - q)$ (qui n'est bon que sous H_0), à celui obtenu dans le modèle (M_{pq}) , donné par $SCR(M_{pq})/(pqr - pq)$. La somme des carrés $S_B^2 + S_{AB}^2 = SCR(M_p) - SCR(M_{pq})$ mesure alors la réduction d'erreur, notée $R(\beta, \gamma | \alpha, \mu)$, quand on ajoute l'effet du facteur B et du terme d'interaction à la constante μ et à l'effet du deuxième facteur A .

4.3.6 Table de l'Anova 2

On présente usuellement les résultats sous la forme du tableau suivant :

Source de variation	Somme de carrés	Degrés de liberté (ddl)	Statistique de test
A	S_A^2	$p - 1$	$Z_A = \frac{(S_A^2 + S_{AB}^2) / (pq - q)}{S_R^2 / (pqr - pq)}$
B	S_B^2	$q - 1$	$Z_B = \frac{(S_B^2 + S_{AB}^2) / (pq - p)}{S_R^2 / (pqr - pq)}$
Interaction	S_{AB}^2	$pq - p - q + 1$	$Z_{AB} = \frac{S_{AB}^2 / pq - p - q + 1}{S_R^2 / (pqr - pq)}$
Traitement	$SCM = S_A^2 + S_B^2 + S_{AB}^2$	$pq - 1$	$Z_M = \frac{SCM / (pq - 1)}{S_R^2 / (pqr - pq)}$
Résiduelle	$S_R^2 = SCR(M_{pq})$	$pqr - pq$	
Totale	S_T^2	$pqr - 1$	

5 Plan complet équilibré sans modélisation de l'interaction

Les données. Pour chaque traitement (i, j) , on dispose donc de $r \geq 1$ mesures de Y , notées y_{ijk} avec k compris entre 1 et r (r pouvant être égal à 1), i entre 1 et p et j entre 1 et q . Lorsque $r = 1$, on omettra l'indice k .

Le modèle. Pour tout triplet (i, j, k) , on suppose que la donnée y_{ijk} est une réalisation d'une variable aléatoire Y_{ijk} de loi $\mathcal{N}(m_{ij}, \sigma)$, les variables aléatoires Y_{ijk} étant globalement indépendantes. Ici, on ne souhaite pas ou on ne peut pas modéliser l'interaction. Par conséquent, on suppose que l'on a

$$m_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad (24)$$

5.1 Ce qui va changer avec la situation du plan équilibré avec modélisation de l'interaction

On peut le résumer ainsi :

1. Le modèle de référence, c'est à dire le "gros modèle", devient le modèle (M_{p+q-1}) (au lieu du modèle (M_{pq})) :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } (\varepsilon_{ijk}) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (25)$$

avec les contraintes d'identifiabilité $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ et $\sum_{j=1}^q \beta_j = 0$.

2. L'estimateur de la variance σ^2 devient

$$S^2 = \frac{SCR(M_{p+q-1})}{pqr - p - q + 1} = \frac{1}{pqr - p - q + 1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk}(M_{p+q-1}) \right)^2$$

et puisqu'on est dans le cadre d'un plan orthogonal, les estimateurs des moindres carrés des paramètres μ , (α_i) et (β_j) sont les mêmes que dans le cadre du modèle complet d'Anova 2.

Par conséquent,

$$\hat{Y}_{ijk}(M_{p+q-1}) = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j = \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}...$$

et on obtient

$$S^2 = \frac{1}{pqr - p - q + 1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}... \right)^2$$

et on aura

$$\frac{(pqr - p - q + 1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(pqr - p - q + 1)$$

5.2 "Ce qui ne va pas changer"

Les sous-modèles Les sous-modèles du modèle (M_{p+q-1}) sont les modèles (M_1) , (M_q) et (M_p) qui correspondent respectivement au modèle sans effet du traitement, au modèle sans effet du facteur A et au modèle sans effet du facteur B .

Estimation des effets Puisque le plan est orthogonal, les paramètres μ , (α_i) et (β_j) sont estimés de la même manière dans les modèles (M_{p+q-1}) , (M_q) , (M_p) et (M_1) . Les effets μ , (α_i) et (β_j) sont estimés sous les hypothèses d'identifiabilité

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^q \beta_j = 0$$

et les estimateurs des moindres carrés qui leurs sont associés, sont obtenus en minimisant

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(Y_{ijk} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) \right)^2$$

sont donnés par :

- $\hat{\mu} = \bar{Y}_{...}$;
- $\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$ pour $i = 1, \dots, p$;
- $\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$ pour $j = 1, \dots, q$;

Les prévisions et les sommes des carrés résiduelles associées aux différents sous-modèles sont celles définies dans les paragraphes 4.2.2 et 4.2.3

5.3 Test des différents effets

Comme dans le cadre du plan complet d'Anova 2, tester l'absence d'un effet (effet traitement ou effet du facteur A ou effet du facteur B), reviendra à tester un sous-modèle (modèle (M_1) ou (M_q) ou (M_p)) contre le modèle (M_{p+q-1}) .

5.3.1 Préliminaires

On peut établir, comme dans le paragraphe 4.3.1, un résultat général pour le test de l'hypothèse nulle $H_0 : \ll \text{Modèle } (M_m) \gg$ contre l'alternative $H_1 : \ll \text{Modèle } (M_{p+q-1}) \gg$, où $m \in \{1, p, q\}$. La construction d'un tel test repose sur le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Sous les hypothèses du modèle complet équilibré sans interaction, on a, pour tout $m \in \{1, p, q\}$, la décomposition en somme de carrés*

$$SCR(M_m) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \left(\hat{Y}(M_{p+q-1}) - \hat{Y}(M_m) \right)^2 + SCR(M_{p+q-1}) \quad (26)$$

et sous H_0 ,

$$Z_m = \frac{(SCR(M_m) - SCR(M_{p+q-1})) / (p + q - 1 - m)}{SCR(M_{p+q-1}) / (pqr - p - q + 1)} \sim F(p + q - 1 - m; pqr - p - q + 1) \quad (27)$$

Remarque 5.2 Le résultat (27) est faux sous H_1 , ce qui fait de Z_m une statistique de test.

Dans (26), la quantité $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (\hat{Y}_{ijk}(M_{p+q-1}) - \hat{Y}_{ijk}(M_m))^2$ représente la réduction d'erreur quand on passe du modèle (M_m) au modèle (M_{p+q-1}) . Lorsque cette réduction d'erreur ne sera pas "significative", on préconisera de modéliser les données à l'aide du modèle (M_m) .

Preuve. Elle est analogue à celle du Théorème 4.3.

5.3.2 Test de l'effet traitement

Le premier test que l'on peut faire dans le cadre du plan complet équilibré sans interaction est celui de l'absence d'effet du traitement. On cherche à tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, q\}, \beta_j = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists i \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \text{ ou } \exists j \text{ tq } \beta_j \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à comparer les modèles (M_1) et (M_{p+q-1}) .

Mise en œuvre du test. Pour tester H_0 contre H_1 au risque δ , on utilise la statistique de test

$$\begin{aligned} Z_M &= \frac{SCM/(p+q-2)}{SCR(M_{p+q-1})/(pqr-p-q+1)} \\ &= \frac{(SCR(M_1) - SCR(M_{p+q-1})) / (dim(M_{p+q-1}) - dim(M_1))}{SCR(M_{p+q-1}) / (pqr - dim(M_{p+q-1}))} \end{aligned}$$

qui sous H_0 suit une loi $F(p+q-2; pqr-p-q+1)$.

La zone de rejet de H_0 au risque δ est $\{Z_M > f_\delta\}$ avec f_δ tel que

$$\text{Proba}\left[F(p+q-2; pqr-p-q+1) \leq f_\delta\right] = 1 - \delta.$$

Ensuite, on calcule la valeur z de Z_M sur les données et on adopte alors la règle de décision suivante :

- si $z \leq f_\delta$ alors on accepte H_0 au risque δ et on considère qu'il n'y a pas d'effet significatif du traitement sur Y ;
- si $z > f_\delta$ alors on rejette H_0 au risque δ et on considère que le traitement a un effet significatif sur Y .

5.3.3 Test de l'effet du Facteur A

On veut donc tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists i \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à comparer les modèles (M_q) et (M_{p+q-1}) .

Mise en œuvre du test. Pour tester H_0 contre H_1 au risque δ , on utilise la statistique de test

$$Z_A = \frac{S_A^2/(p-1)}{SCR(M_{p+q-1})/(pqr-p-q+1)} = \frac{(SCR(M_q) - SCR(M_{p+q-1})) / (dim(M_{p+q-1}) - dim(M_q))}{SCR(M_{p+q-1}) / (pqr - dim(M_{p+q-1}))}$$

qui sous H_0 suit une loi $F(p-1; pqr-p-q+1)$.

La zone de rejet de H_0 au risque δ est $\{Z_A > f_\delta\}$ avec f_δ tel que

$$\text{Proba}\left[F(p-1; pqr-p-q+1) \leq f_\delta\right] = 1 - \delta.$$

Ensuite, on calcule la valeur z de Z_A sur les données et on adopte alors la règle de décision suivante :

- si $z \leq f_\delta$ alors on accepte H_0 au risque δ et on considère qu'il n'y a pas d'effet significatif du facteur A sur Y ;
- si $z > f_\delta$ alors on rejette H_0 au risque δ et on considère que le facteur A influe de manière significative sur Y .

5.3.4 Test de l'effet du Facteur B

On veut donc tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \forall j \in \{1, \dots, q\}, \beta_j = 0 \gg$$

contre l'alternative

$$H_1 : \ll \exists j \text{ tq } \beta_j \neq 0 \gg,$$

ce qui revient à comparer les modèles (M_p) et (M_{p+q-1}) .

Mise en œuvre du test. Pour tester H_0 contre H_1 au risque δ , on utilise la statistique de test

$$Z_B = \frac{S_B^2 / (q - 1)}{SCR(M_{p+q-1}) / (pqr - p - q + 1)} = \frac{(SCR(M_p) - SCR(M_{p+q-1})) / (dim(M_{p+q-1}) - dim(M_p))}{SCR(M_{p+q-1}) / (pqr - dim(M_{p+q-1}))}$$

qui sous H_0 suit une loi $F(q - 1; pqr - p - q + 1)$.

La zone de rejet de H_0 au risque δ est $\{Z_B > f_\delta\}$ avec f_δ tel que

$$\text{Proba}\left[F(q - 1; pqr - p - q + 1) \leq f_\delta\right] = 1 - \delta.$$

Ensuite, on calcule la valeur z de Z_B sur les données et on adopte alors la règle de décision suivante :

- si $z \leq f_\delta$ alors on accepte H_0 au risque δ et on considère qu'il n'y a pas d'effet significatif du facteur B sur Y ;
- si $z > f_\delta$ alors on rejette H_0 au risque δ et on considère que le facteur B influe de manière significative sur Y .

5.3.5 Table de l'Anova 2

On présente usuellement les résultats sous la forme du tableau suivant :

Source de variation	Somme de carrés	Degrés de liberté (ddl)	Carré moyen	Statistique de test
A	S_A^2	$p - 1$	$S_A^2 / (p - 1)$	$Z_A = \frac{S_A^2 / (p - 1)}{S_R^2 / (pqr - p - q + 1)}$
B	S_B^2	$q - 1$	$S_B^2 / (q - 1)$	$Z_B = \frac{S_B^2 / (q - 1)}{S_R^2 / (pqr - p - q + 1)}$
Traitement	$SCM = S_A^2 + S_B^2$	$p + q - 2$	$SCM / (p + q - 2)$	$Z_M = \frac{SCM / (p + q - 2)}{S_R^2 / (pqr - p - q + 1)}$
Résiduelle	S_R^2	$pqr - p - q + 1$	$S_R^2 / ((pqr - p - q + 1))$	
Totale	S_T^2	$pqr - 1$		

avec

$$\begin{aligned}
S_T^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y} \dots)^2 \\
S_A^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \hat{\alpha}_i^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y} \dots)^2 \\
S_B^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \hat{\beta}_j^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y} \dots)^2 \\
S_R^2 &= S_T^2 - S_A^2 - S_B^2 = S_T^2 - SCM
\end{aligned}$$