Examen à mi-parcours d'Analyse pour l'ingénieur

Vendredi 28 novembre 2011 - 1h30

Documents manuscrits et polycopié de cours autorisés.

La rédaction sera prise en compte dans la notation. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1 *Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on rappelle la définition de la boule unité :*

$$B(0,1) = \{u \in E \ ; \ \|u\| < 1\}$$

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ muni des trois normes suivantes : pour $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|X\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

1. *Représenter graphiquement les boules unités de chacune des 3 normes. Peut-on comparer ces 3 normes?*
2. *Ecrire les définitions des distances d_1, d_2, d_∞ associées à chacune d'entre elles.*

Exercice 2 *Soit E un espace vectoriel normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b, \ a \in A \text{ et } b \in B\}$.*

1. *On se place dans cette question dans le cas $E = \mathbb{R}^2$. Soit $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\big\}$ et $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ y \leq 0 \text{ et } x \geq 0\big\}$. Calculer $A + B$.*
2. *Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.*
3. *Ce résultat demeure-t-il vrai si A et B sont supposés seulement fermés ? Justifiez votre réponse.*

Exercice 3 *Equation intégrale de Fredholm*

Soit $E = C([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|.\|_\infty$:

$$\|u\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|, \quad \forall u \in C([a, b]),$$

Soit $K \in C([a, b] \times [a, b])$, $\Phi \in C([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que l'application*

$$u \to L(u), \quad \text{avec} \quad L(u)(x) = \Phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad \forall x \in [a, b]$$

   est une application continue de E dans E.

2. *Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\lambda| < R$, il existe un unique $u \in C([a, b])$ solution de l'équation :*

$$u(x) = \Phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

Exercice 4 *Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$