MNBI TD 6

Ex 1

1) $Ax = b$ donc $A(x+\delta x) = b + \delta b$
$Ax + A\delta x = b + \delta b$
$b + A\delta x = b + \delta b$

Donc $\boxed{A\delta x = \delta b}$.

Ainsi :
$\|\delta x\| \, \|b\| = \|A^{-1}\delta b\| \, \|Ax\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \, \|\delta b\| \, \|x\|$

D'où $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

2) On a égalité ssi $\|A^{-1}\delta b\| = \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|$ et $\|A^{-1}b\| = \|A^{-1}\| \, \|b\|$.

Or, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

Donc en choisissant $\underline{\delta b \text{ tq } \|\delta b\| = 1}$
$\|A^{-1}\delta b\| = \|A^{-1}\| = \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|$
~~[illegible]~~

, on a alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\delta b\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\| \, \|A\| \frac{\|\delta b\|}{\|A\| \, \|x\|}$.

on choisit donc $\underline{b \text{ tq } \|b\| = \|A\| \, \|x\|}$. et c'est bon.

3) $K(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I_n\| = 1$.

4) $K(AB) = \|AB\| \, \|(AB)^{-1}\| = \|AB\| \, \|B^{-1}A^{-1}\|$

$\leq \|A\| \, \|B\| \, \|B^{-1}\| \, \|A^{-1}\| = \|A\| \, \|A^{-1}\| \, \|B\| \, \|B^{-1}\| = K(A)K(B)$.

Ex 2

1. $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ → symétrique

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $x^T A A^T x = (A^T x)^T A^T x = \|A^T x\|^2 \geq 0$ → positive
$= 0 \Leftrightarrow \|A^T x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car A inversible donc A^T inversible → définie

2. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^T)} = \sqrt{\sigma_{max}}$ (car les VP sont toutes ≥ 0)

$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((AA^T)^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{\sigma_{min}}}$ (VP de l'inverse = inverse des VP)

Donc $K(A) = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}$

~~3. Soit x un vecteur propre associé à σ_{max}.~~

$\cancel{AA^T x = A \lambda_{max} x}$

A est symétrique, donc $AA^T = A^2$, donc $\sigma_{\substack{max \\ min}} = \lambda^2_{\substack{max \\ min}}$

D'où $K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$