Examen Session 2

Mardi 3 juillet 2012 - 2h

Documents manuscrits et polycopié de cours autorisés. Tout autre document et calculatrices interdits.
N.B. : *La rédaction sera prise en compte dans la notation. Toute affirmation devra être justifiée.*

Exercice 1

Soient α, $\beta \in]0,1[$. Pour $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n(t) = t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}(\sin\frac{1}{t})^n\,.$$

1. *Montrer que $u_n \in L^1(]0,1[)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Etudier la limite de la suite*

$$I_n = \int_0^1 u_n(t)\,dt\,.$$

Exercice 2

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$$

1. *Montrer que la fonction F est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$, et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.*
3. *Montrer que F est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :*

$$y'(x) - y(x) = -\frac{A}{\sqrt{x}}$$

   avec $A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

4. *Intégrer cette équation différentielle et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.*

Exercice 3

Pour $u \in C([0,1])$, on pose

$$\|u\| = \int_0^1 |u(t)|dt$$

Vérifier que $\|.\|$ est bien une norme sur $C([0,1])$ et montrer que $C([0,1])$ n'est pas complet pour cette norme.

Exercice 4

On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction $G(x) = e^{-\pi x^2}$ est égale à $\hat{G}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

1. *Pour* $a > 0$, *on pose :*
$$G_a = \frac{1}{\sqrt{a}}\ e^{-\frac{x^2}{2a}}$$
Calculer la transformée de Fourier $\hat{G}_a$ *de* G_a.

2. *Soit* $a, b > 0$ *deux réels.*
   (a) Calculer la transformée de Fourier du produit de convolution $G_a * G_b$.
   (b) En déduire que $G_a * G_b = \alpha G_c$, *où* α *et* c *sont des constantes à préciser.*

Exercice 5
Soit $(X; d)$ *un espace métrique et* a *un point de* X. *Pour tout* $x, y \in X$ *on pose* $d'(x, y) = 0$ *si* $x = y$ *et* $d(x, y) = \max(d(a, x), d(a, y))$ *si* $x \neq y$.

1. *Montrer que* d' *est une distance sur* X.

2. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* X.
   (a) *Montrer que* (x_n) *converge vers* a *relativement à* d *si et seulement si* (x_n) *converge vers* a *relativement à* d'.
   (b) *On suppose que* (x_n) *converge au sens de* d' *vers un point* $\ell \in X$ *différent de* a. *Montrer qu'on a* $x_n = \ell$ *à partir d'un certain rang.*

3. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une application quelconque. Montrer que* f *est continue relativement à* d' *en tout point* $x \in X$ *différent de* a.

4. *On suppose* $X = \mathbb{R}$, *muni de la distance usuelle* d. *La distance* d' *est-elle équivalente à* d *?*