Fiche 2 :

Exercice 2.1 : Propriétés du MBS

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un M.B.S

1) Symétrie du MB :

Mq $W = (W_t)_{t\geq 0}$ $W_t = -B_t$ $\forall t\geq 0$ est un M.B.S

i) W à trajectoire continue car $\forall t\geq 0$ $W_t = -B_t$ est $(B_t)_{t\geq 0}$ M.B.S

ii) $W_0 = -B_0$ or $B_0 = 0$ p.s donc $W_0 = 0$ p.s

iii) Mq $\forall t\geq 0$ $\forall s\geq 0$ tq $s<t$ $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Soient $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ tq $s<t$

$W_t - W_s = -B_t - (-B_s) = -(B_t - B_s)$

or $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

donc $-(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, (-1)^2(t-s))$

$\sim \mathcal{N}(0, t-s)$

donc $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

donc $W = (W_t)_{t\geq 0}$ a accroissements stationnaire gaussienne.

iv) Mq W à accroissements indépendantes

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ soient $t_0 = 0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$

Mq $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})_{i\in[0,n]}$ sont indépendantes

$\forall i \in [0,n]$ $W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = -B_{t_{i+1}} + B_{t_i}$

or $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ sont indépendants

donc $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sont indépendante

Donc : $(-B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S

2) Invariance par translation du temps :

Soit $s \geq 0$

$\forall t \geq 0 \quad W_t = B_{t+s} - B_s$

Mq $W = (W_t)_{t \geq 0}$ M.B.S)

i) W à trajectoire continue et $W_0 = B_s - B_s = 0$ p.s

ii) $\forall r < t$, $(r,t) \in \mathbb{R}_+^2$

$$W_t - W_r = B_{t+s} - \cancel{B_t} - B_{r+s} + \cancel{B_s}$$
$$= B_{t+s} - B_{r+s} \sim \mathcal{N}(0, t+s-r-s)$$
$$\sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

donc W à accroissements ~~indépendants~~ stationnaire gaussien

iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ soient $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = B_{t_{i+1}+s} - \cancel{B_s} - B_{t_i+s} + \cancel{B_s} = B_{t_{i+1}+s} - B_{t_i+s}$$

donc un accroissement de W entre t_i, t_{i+1} égale à un accroissement de B entre $t_i+s, t_{i+1}+s$

et comme B est un M.B.S

donc $(B_{t_{i+1}+s} - B_{t_i+s})_{d \leq i \leq n}$ sont indépendantes

donc $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})_{0 \leq i \leq n-1}$ sont indépendants

Donc W à accroissements indépendants

Donc $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ et un M.B.S

3) Renversement du temps :

Soit $T \in \mathbb{R}_+$

$\forall t \in [0,T]$ $\quad W_t := B_T - B_{T-t}$

Mq $\quad (W_t)_{t\in[0,T]}$ M.B.S

i) W à trajectoire continue et $W_0 = B_T - B_T = 0$

ii) Soient $(s,t) \in [0,T]^2$ tq $s<t$

$W_t - W_s = \cancel{B_T} - B_{T-t} - \cancel{B_T} + B_{T-s}$

$= B_{T-t} - B_{T-s}$ or $T-t < T-s$

$\sim \mathcal{N}(0, T-s-T+t)$

$\sim \mathcal{N}(0, t-s)$

donc W a accroissements stationnaire gaussienn.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < T$

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ $\quad W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = \cancel{B_T} - B_{T-t_{i+1}} - \cancel{B_T} + B_{T-t_i}$

$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = B_{T-t_i} - B_{T-t_{i+1}}$

or $T-t_n < T-t_{n-1} < \dots < T-t_i < T-t_{i+1} < \dots < T-t_0$

et $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un M.B.S

donc $(B_{T-t_i} - B_{T-t_{i+1}})_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ sont indépendantes

donc $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ sont indépendants

Donc W a accroissements indépendants

Donc $(B_T - B_{T-t})_{t\in[0,T]}$ est un M.B.S

4) changement d'échelle :

Soit $c \neq 0$

$\forall t \geq 0 \quad W_t = c\, B_{t/c^2}$

Mq $(W_t)_{t \geq 0}$ est un M.B.S

i) W a trajectoire continue et $W_0 = c\, B_0 = 0$ p.s

ii) Soient $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ tq $s < t$

$W_t - W_s = c\, B_{t/c^2} - c B_{s/c^2}$

$= c\left(B_{t/c^2} - B_{s/c^2}\right)$

or $B_{t/c^2} - B_{s/c^2} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}\right)$

donc $c\left(B_{t/c^2} - B_{s/c^2}\right) \sim \mathcal{N}\left(0, c^2\left(\frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}\right)\right)$

donc $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

donc

W à accroissements stationnaire gaussienne.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$

$\forall i \in [\![0,n-1]\!]$ $\quad W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = c\, B_{t_{i+1}/c^2} - c\, B_{t_i/c^2}$

$= c\left(B_{t_{i+1}/c^2} - B_{t_i/c^2}\right)$

or $t_0/c^2 < t_1/c^2 < \dots\ t_i/c^2 < t_{i+1}/c^2 < \dots < t_n/c^2$

et B est un M.B.S

donc $\left(B_{t_{i+1}/c^2} - B_{t_i/c^2}\right)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ ~~est~~ ~~une~~ V.A. sont indépendantes

donc $\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ sont indépendantes

donc W à accroissements indépendants

Donc : $\left(c B_{t/c^2}\right)_{t \geq 0}$ est un M.B.S

5) Inversion du temps:

- $X_0 = 0$, $\forall t > 0 \quad X_t = t B_{1/t}$

Mq $\quad X$ un M.B.S

i) X un processus gaussien ?:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soient $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tq $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $t_i < t_{i+1}$

Mq $\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien

$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad X_{t_i} = t_i B_{1/t_i}$

donc $$\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \cdots & 0 \\ & (0) & \ddots & (0) \\ & & & t_n \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} B_{1/t_1} \\ B_{1/t_2} \\ \vdots \\ B_{1/t_n} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

donc $\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = A\,B$

avec $A = \begin{pmatrix} t_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1/t_1} \\ \vdots \\ B_{1/t_n} \end{pmatrix}$

or B est un M.B.S donc B est gaussien et

$1/t_n < \dots < 1/t_1$

donc $\begin{pmatrix} B_{1/t_n} \\ \vdots \\ B_{1/t_n} \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

donc $\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien

Donc $\boxed{X \text{ est un processus gaussien}}$.

ii) $m_X = 0$ et $\Gamma_X(s,t) = \min(s,t)$:

* $\forall t \geq 0 \quad m_X(t) = \mathbb{E}(X_t)$

pour $t = 0 \quad m_X(0) = 0$

pour $t \neq 0 \quad m_X(t) = \mathbb{E}(t B_{1/t}) = t\,\mathbb{E}(B_{1/t}) = t\, m_B\left(\frac{1}{t}\right)$

or B est un M.B.S donc $m_B\left(\frac{1}{t}\right) = 0$

donc $\boxed{\forall t \geq 0 \quad m_X(t) = 0}$

* Γ_X ?

$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_X(s,t) &= \operatorname{cov}(X_s, X_t) \\
&= \operatorname{cov}(s B_{1/s}, t B_{1/t}) \\
&= st \operatorname{cov}(B_{1/s}, B_{1/t}) \quad \text{(car cov est une forme bilinéaire)} \\
&= st\, \Gamma_B\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) \\
&= st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) \\
&= \min(s,t)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\Gamma_X(s,t) = \min(s,t) \quad \forall s \geq 0, \forall t \geq 0}$

iii) Mq X à trajectoire continue :

~~$\forall t > 0 \quad X_t = t B_{1/t}$ continue~~

X à trajectoire continue $\iff \forall \omega \in \Omega \quad t \mapsto X_t(\omega)$ est continue

Soit $\omega \in \Omega \quad \varphi_\omega(t) = X_t(\omega)$

$$\varphi_\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t B_{\frac{1}{t}}(\omega) & \text{si non.} \end{cases}$$

Sur $]0, +\infty[$ on a φ_ω est continue.

pour * continuité en 0 :

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi_\omega(t) = \lim_{t \to 0^+} t B_{\frac{1}{t}}(\omega) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} B_t(\omega)$$

or on a si B est un M.B.S on a $\lim_{t \to +\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ p.s

donc $\lim_{t \to 0^+} \varphi_\omega(t) = 0 = \varphi_\omega(0)$ donc φ est continue en 0 donc $\forall \omega \in \Omega \quad t \longmapsto X_t(\omega)$ est Continue

donc X à trajectoire Continue

Donc $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_t = t B_{1/t} & t > 0 \end{cases}$ est un M.B.S

Exercice 2.2 : Comparaison de convergences :

1) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ suite de v.a

Mq $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$

On suppose que $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$ est cov

On a

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{ps} X$ ssi $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, \ X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} X(\omega)\}\right) = 1$

ssi $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, \ X_n(\omega) \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} X(\omega)\}\right) = 0$

or

$X_n(\omega) \not\xrightarrow[n \to \infty]{} X(\omega) \iff \exists \varepsilon > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$

donc

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{PS} X$ ssi $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right)$

ssi $\mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \{\omega \in \Omega, \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right)$

ssi $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \{\omega \in \Omega, \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right)$

donc

$X_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{p.s} X \iff \forall \varepsilon>0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} \{\omega\in\Omega,\ |X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\}\right)=0$

soit $\varepsilon>0$:

$\forall n\in\mathbb{N} \quad A_n = \{\omega\in\Omega,\ |X_n(\omega)|>\varepsilon\}$

On a

$X_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{p.s} 0 \iff \forall\varepsilon>0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty}\bigcup_{n\geq N} A_n\right)=0. \quad (*)$

On a

$\forall \varepsilon>0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)<+\infty$ car $\{|X_n|>\varepsilon\} = \{\omega\in\Omega,\ |X_n(\omega)|>\varepsilon\}$

et comme $(A_n)_{n\geq0}$ est une suite d'érements donc

D'apres Lemme Borel-Cantelli

on a $\mathbb{P}(\limsup A_n)=0$

or $\limsup A_n = \bigcap_{N=0}^{+\infty}\bigcup_{n\geq N} A_n$

don on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geq0}^{+\infty}\bigcup_{n\geq N} A_n\right)=0$

donc

on a $\forall\varepsilon>0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geq0}^{+\infty}\bigcup_{n\geq N}\{\omega\in\Omega,\ |X_n(\omega)|>\varepsilon\}\right)=0$

donc D'apres la caractérisation $(*)$ on a

$X_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{p.s} 0$

2] $(X_n)_{n\geq 0}$ indépendants et $\forall n\geq 0$ $X_n \sim \exp(\log(n))$.

2.1]

Mq $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ en proba

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0 \iff \forall \varepsilon>0 \quad \mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit $\varepsilon>0$

$$\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X_n|\leq\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(-\varepsilon\leq X_n\leq\varepsilon)$$
$$= 1 - \left[\mathbb{P}(X_n\leq\varepsilon) - \mathbb{P}(X_n\leq -\varepsilon)\right]$$
$$= 1 - F_{X_n}(\varepsilon) + \underset{0}{\underbrace{F_{X_n}(-\varepsilon)}}$$

or $X_n \sim \exp(\log(n))$ $\quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\log(n)x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

donc

$$\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = 1 - \left(1 - e^{-\log(n)\varepsilon}\right)$$
$$= e^{-\log(n)\varepsilon}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\log(n)\varepsilon} = 0$

donc X_n cv vers 0 en probabilité

2.2]

* $\mathbb{P}(|X_n|>1) = e^{-\log(n)\times 1}$ (D'après le calcul dans 2.1])

$$= e^{-\log(n)}$$
$$= e^{\log(\frac{1}{n})}$$
$$= \frac{1}{n}$$

donc $\mathbb{P}(|X_n|>1) = \frac{1}{n}$

Exercice 2.4 : Comportement trajectoriel du MB :

soit $(B_t)_{t\geq 0}$ M.B.S

1)

Mq $R_k = \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{B_{n+k}-B_k}{\sqrt{n}}\right) \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}_k = \sigma(B_u \mid u \leq k)$

Soit $k\in\mathbb{N}$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $Y_n = \frac{B_{n+k}-B_k}{\sqrt{n}}$

Comme B est M.B.S donc B a accroissements indépendants

donc $\forall u\leq k$ B_u et $B_{n+k} - B_k$ sont indépendants

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $B_{n+k}-B_k$ est indépendant à la tribu $\mathcal{A}_k$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{B_{n+k}-B_k}{\sqrt{n}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}_k$

donc par passage à la limite $\limsup_{n\to+\infty} \frac{B_{n+k}-B_k}{\sqrt{n}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}_k$

donc

R_k est indépendant $\mathcal{A}_k$.

2) soit $R = \limsup_{n\to+\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}}$

* Mq $R_k = R$ ~~ed~~ $\forall k\in\mathbb{N}$

Soit $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$:

On a $\frac{B_{n+k}-B_k}{\sqrt{n}} = \frac{B_{n+k}-B_k+B_n-B_n}{\sqrt{n}}$

$= \frac{B_{n+k}-B_n}{\sqrt{n}} + \frac{B_n}{\sqrt{n}} - \frac{B_k}{\sqrt{n}}$

or $B_{n+k} - B_n \sim \mathcal{N}(0, k)$ car B M.B.S)

donc $B_{n+k} - B_n$ est indépendant de n

donc $\underset{n \to +\infty}{\text{Lim sup}} \dfrac{B_{n+k} - B_n}{\sqrt{n}} = 0$

donc

$$\underset{n \to +\infty}{\text{Lim sup}} \frac{B_{n+k} - B_k}{\sqrt{n}} = \underset{n \to +\infty}{\text{Lim sup}} \left(\frac{B_{n+k} - B_n}{\sqrt{n}} + \frac{B_n}{\sqrt{n}} - \frac{B_k}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \underset{n \to +\infty}{\text{Lim sup}} \frac{B_n}{\sqrt{n}}$$

donc $R_k = \underset{n \to +\infty}{\text{Lim sup}} \dfrac{B_n}{\sqrt{n}}$

donc $R_k = R$

* On a $\forall k \in \mathbb{N}$ R_k est indépendant à $\mathcal{A}_k$
et Comme $\forall k \in \mathbb{N}$ $R = R_k$
donc $\forall k \in \mathbb{N}$ R est indépendant à $\mathcal{A}_k$