Examen du 23 Mai 2013

Durée : 3h.

Les seuls documents autorisés sont les notes du cours et des travaux dirigés de méthodes numériques. Les calculatrices sont interdites.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte pour l'évaluation des copies.

I. Généralisation de l'algorithme du gradient conjugué

Soit A une matrice (n, n) symétrique définie positive, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non nul. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$ dont on note x^* l'unique solution. Pour résoudre ce système, on va chercher à mininiser la fonctionnelle usuelle: $J(x) =< Ax, x > -2 < b, x >$, avec $< \cdot, \cdot >$ qui désigne le produit scalaire euclidien, $(x, y) = y^T x$.
On suppose **connu** n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, non nuls, notés $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$, deux-à-deux A-conjugués i.e.

$$< Ad_i, d_j >= 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq j, \qquad 0 \leq i, j \leq (n-1)$$

et on écrit **l'algorithme de descente à pas optimal** selon les directions $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$: étant donné un point initial quelconque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on effectue les iterations suivantes:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \ , \qquad k = 0, 1, \dots$$

où α_k est donc le pas de descente optimal.
On notera le résidu $r_k = Ax_k - b$.

1. Rappeler l'expression de α_k et la récurrence sur r_k.

On note $\mathcal{E}(d_0, \dots, d_{k-1})$ le sous-espace (de dimension k) engendré par $d_0, \dots, d_{k-1}$ et $\mathcal{E}(Ad_0, \dots, Ad_{k-1})$ le sous-espace engendr par $Ad_0, \dots, Ad_{k-1}$. On note également P_k l'opérateur de projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{E}(d_0, \dots, d_{k-1})$ **au sens du produit scalaire défini par** A. C'est à dire, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $P_k u$ est l'unique élément de $\mathcal{E}(d_0, \dots, d_{k-1})$ tel que:

$$< u - P_k u,\ Ad_i >= 0 \qquad i = 0, 1, \dots, (k-1).$$

2. Vérifier que $(x_k - x_0) \in \mathcal{E}(d_0, \dots, d_{k-1})$ et $(r_k - r_0) \in \mathcal{E}(Ad_0, \dots, Ad_{k-1})$.

3. Montrer que: $\quad < r_k, d_k > = < r_0, d_k >, \qquad k = 0, 1, \dots (n-1).$

4. En déduire qu'à partir d'un même point initial x_0, on atteint le même point x_k en descendant selon les directions $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$ pris **dans un ordre quelconque**.

5. Montrer que: $\quad x_k - x_0 = P_k\,(x^* - x_0),$

6. a. Que se passe t'il si $(x^* - x_0) \in \mathcal{E}(d_0, \dots, d_{k-1})$ avec $k < n$?
b. En déduire la convergence de la méthode en au plus n pas.

Nous allons montrer à présent quelques propriétés supplémentaires qui vont nous permettre de retrouver la convergence de la méthode.

7. Monter que: $\quad < r_k, d_i > = 0 \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$

8. Montrer que: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$

$$J(x) = J(x_k) + 2 < r_k, x - x_k > + < A(x - x_k), (x - x_k) > .$$

9. En déduire que x_k minimise la fonctionnelle $J(x)$ dans le sous-espace affine $x_0 + \mathcal{E}(d_0, \dots, d_{k-1})$. Retrouver ainsi la convergence en au plus n pas.

Remarque: Cette méthode, dite des directions conjuguées, généralise celle du gradient conjugué. En effet, le choix des d_{k-1} peut être différent de celui de l'algorithme du G.C.

II. Méthode à pas séparés

On désire résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y(a)=y_0 \\ y'(t)=f(t,y(t)) \end{cases}$ pour $t \in [a, b]$ par une méthode à pas séparés (on dit aussi méthode à un pas).
On note α, β, γ trois paramètres réels à déterminer. On pose $R_0(h) = y_k$ et $R_1(h) = y_k + \alpha f(t_x, y_k)$ et on considère la méthode à pas séparés suivante:

$$y_{k+1} = y_k + h\,(\beta f(t_k, y_k) + \gamma f(t_k + \alpha_k,\ R_1(h)))\,.$$

On supposera f Lipschitz par rapport à la deuxième variable et suffisamment dérivable par rapport à ces deux variables.

1. Donner une interprétation géométrique de la méthode entre t_k et t_{k+1}.

2. Etudier la convergence et l'ordre maximum de la méthode en fonction de α, β, γ.

3. Déterminer la méthode correspondant à $\beta = 0$. Que retrouvez-vous ?

III. Exercice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On cherche à résoudre le système linéaire

$$A^2 x = b, \tag{1}$$

avec $b, x \in \mathbb{R}^n$.

1. On considère une première méthode qui consiste à calculer A^2 puis résoudre (1) par la méthode de Cholesky. Donner un équivalent du coût du nombre d'opérations arithmétiques réalisées avec cet algorithme lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer qu'on peut résoudre (1) sans calculer A^2, en utilisant la factorisation de Cholesky de A. Donner un équivalent du coût de cet algorithme lorsque $n \to +\infty$, et comparer son efficacité par rapport à la méthode précédente lorsque n est grand.