Feuille : 6

Exercice 6.1. — La construction traditionnelle d'une maison individuelle commence par l'établissement des fondations. Supposons que ce projet se décompose en cinq tâches élémentaires :

T - terrassement - durée 3 jours ;
G - mise en place de la grue - durée 1 jour ;
R - branchements aux réseaux d'eau et EDF - durée 2 jours ;
B - coulage d'une dalle de béton - durée 3 jours ;
S - installation de la fosse septique - durée 4 jours.

Les tâches T, G et R peuvent démarrer tout de suite, par contre on ne peut installer la fosse septique ni couler la dalle de béton qu'après avoir effectué les travaux de terrassement. Il est aussi évident que la pose d'une dalle de béton nécessite de l'eau et aussi la présence de la grue qui, pour fonctionner, a besoin de l'électricité. Le problème est de proposer un calendrier d'exécution des tâches respectant les contraintes d'antériorité et permettant de réaliser l'ensemble des tâches en un temps minimum.

Exercice 6.2. — Soit (G, c) le réseau potentiel-tâches d'un problème d'ordonnancement simple. Dénotons les sommets de G par $v_0, v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ où v_0 et v_{n+1} correspondent au début et à la fin du projet et $v_1, ..., v_n$ correspondent aux tâches $A_1, ..., A_n$. Soit $\boldsymbol{\pi_i}$ la date au plus tôt quand on peut commencer la tâche A_i. Soit $\boldsymbol{\eta_i}$ la date au plus tard quand il faut commencer la tâche A_i pour finir tout le projet en temps optimal. Soient $\boldsymbol{t_i}$ le coût maximum d'un chemin de v_0 à v_i dans (G, c) et $\boldsymbol{t'_i}$ le coût maximum d'un chemin de v_i à v_{n+1} dans (G, c). Montrer que

(a) G est sans circuit, v_0 est une racine de G et v_{n+1} est atteignable à partir de chaque sommet v_i.

(b) $\pi_i = t_i \ \forall i$.

(c) $\eta_i = t_{n+1} - t'_i \ \forall i$.

Exercice 6.3. — On considère un problème d'ordonnancement simple comportant 5 tâches A, B, C, D, E. Pour chacune des tâches on donne sa durée et la liste des tâches qui doivent la précéder.

Tâches	A	B	C	D	E
Durée	10	2	5	3	6
Prédécesseurs	–	–	A, B, D	–	A

(a) Donner la formulation potentiel-tâches de ce problème d'ordonnancement.
(b) Quelle est la durée minimale de réalisation de ce projet ?
(c) Donner la liste de tâches critiques et celle des chemins critiques.

Exercice 6.4. — On considère un problème d'ordonnancement simple comportant 9 tâches $A, B, \ldots,$ H et I. Pour chacune des tâches on donne sa durée et la liste des tâches qui doivent la précéder.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Durée	8	9	10	8	6	7	5	6	7
Prédécesseurs	–	–	–	A, B, C	B, C	C	D	D, E, F	F

Répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent ; et aussi

(d) Si on pouvait diminuer la durée d'une tâche, laquelle faudrait-il choisir pour diminuer la durée totale du projet ?

Exercice 6.5. — (W. Bienia) On a un projet complexe avec les tâches A, B, C, D et E. Pour certaines tâches, il est possible de réduire la durée normalement prévue en lui affectant des moyens supplémentaires.

tâche	durée normale	plus petite durée accélérée	coût unitaire de réduction	vient après
A	7	5	9	-
B	4	1	6	A
C	5	4	8	B, D
D	9	7	10	-
E	8	7	2	A

Le coût unitaire de réduction est le coût pour chaque unité de durée en moins par rapport à la durée normale. Ainsi, pour la tâche B, si on veut une durée de 2 (au lieu de 4), on paye 12.

(a) Quelle est la durée minimale d'exécution du projet avec les temps normalement prévus pour chaque tâche ?
(b) Quelle est la durée minimale d'exécution du projet avec les plus petites durées accélérées pour chaque tâche ? Quel est le coût total consacré à cette diminution ?
(c) Quel est le budget minimum nécessaire pour réduire la durée du projet d'un jour ?
(d) Est-ce que la méthode utilisée à la question précédente fonctionne pour diminuer de deux jours ?