Examen 2 Session 1

Mardi 24 janvier 2017 - 2h

Documents et calculatrices interdits, hormis une feuille A4 recto-verso manuscrite.
N.B. : *La rédaction sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est toutefois préférable de conserver l'ordre proposé (difficulté croissante)*

Exercice 1

1. *(Cours) Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E *et* $u \in E$. *Donner la définition de "la suite* u_n *converge vers* u *dans* E*".*

2. *Application :* $E = L^1([0, +\infty[)$ *muni de la norme* $\|u\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} |u(x)|dx$.
   Soit la suite (u_n) *définie par :*
   $$u_n(x) = e^{-x} \sin^n x \quad , \quad \forall x \in [0, +\infty[$$
   Trouver la limite dans $L^1([0, +\infty[)$ *de la suite* u_n.

Exercice 2

1. *(Cours)*

   (i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Rappeler la définition de la transformée de Fourier de* f, *notée* $\hat{f}$.
   On suppose que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. *Exprimer* $\hat{\hat{f}}$ *en fonction de* f *(en le justifiant).*

   (ii) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Rappeler la définition du produit de convolution* $f * g$.
   A quel espace appartient $f * g$ *?*
   Que peut-on dire de la transformée de Fourier de $f * g$ *?*

2. *Application : On cherche une fonction* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *solution de l'équation intégrale :*
   $$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1 + (x-t)^2} dt = \frac{1}{4 + x^2} \tag{1}$$

   (i) Exprimer l'équation (1) sous forme d'une équation de convolution, et déterminer $\hat{f}$.

   (ii) En déduire une solution f.

Exercice 3

1. *(Cours) Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *telle que* $x \to xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. *Donner la relation entre la transformée de Fourier de* $xf(x)$ *et celle de* f.
   On suppose de plus que $x \to x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. *Donner la relation entre la transformée de Fourier de* $x^2 f(x)$ *et celle de* f.

2. *Application : Soit la fonction* f *définie par :*
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si \quad x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$
   Montrer que la transformée de Fourier de f *vaut :*
   $$\hat{f}(\nu) = -\frac{\cos(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} + \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi^2\nu^3}$$

3. *En déduire l'intégrale*
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u \cos u - \sin u}{u^3} \right) \cos(ux) du$$

Exercice 4

On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} cos(tx)dt$

1. *Montrer que* f *est définie, continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *dérivable et calculer sa dérivée* f'.
3. *Montrer que* f *est solution d'une équation différentielle du premier ordre. En déduire* f.

Exercice 5

Soit $E = C^0([0,1])$ *l'espace des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continues sur* $[0,1]$, *muni de la norme*
$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$$
Soit $p \in E$ *fixée. On définit l'application* P *qui à tout* $f \in E$ *associe l'application* $P(f)$ *définie par*
$$P(f)(x) = \int_0^x f(t)p(t)dt$$

1. *Montrer que* P *est une application linéaire continue de* E *dans* E.
2. *On rappelle que pour l'application linéaire continue* P, *sa norme est définie par*
$$|||P||| = \sup_{f \in E, f \neq 0} \frac{\|P(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$
   (i) Montrer que $|||P||| \leq \int_0^1 |p(t)|dt$.
   (ii) On suppose dans cette question que p *est positive sur* $[0,1]$. *Montrer par un choix simple de* f *que* $|||P||| = \int_0^1 |p(t)|dt$.
   (iii) Pour p *de signe quelconque, on pose* $f_n(t) = \frac{np(t)}{\sqrt{1+n^2p(t)^2}}$. *Montrer que* $f_n \in E$. *Calculer* $P(f_n)$ *et en déduire que* $|||P||| = \int_0^1 |p(t)|dt$.

Exercice 6

Soit l'espace de Banach $E = (\mathcal{C}^1([0,1]), N)$ *où* $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. *On considère l'opérateur* T *défini sur* E *par*
$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)dt.$$

1. *Justifier que* T *est un opérateur de* E *dans* E.
2. *Calculer* $(T \circ T)f$ *et* $((T \circ T)f)'$.
3. *Montrer que* $T \circ T$ *est contractant dans* E. *On pourra étudier les variations de* $t \to t - t^2$ *sur* $[0,1]$.
4. *En déduire que* $T \circ T$, *puis que* T, *admettent un unique point fixe dans* E.
5. *Montrer qu'il existe une unique fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$ *telle que* $f'(x) = f(x-x^2)$ *et* $f(0) = 1$.