Chapter 5

Intégrale Stochastique

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ dans les conditions habituelles et on considère W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S.
L'application $t \mapsto W_t$ n'étant dérivable nulle part on ne peut donner un sens classique à $\int H_s \, dW_s$ car on ne peut écrire $dW_s = b(s) \, ds$.
Il va donc falloir construire un nouvel objet mathématique.

5.1 Intégrale de Wiener

5.1.1 Intégration des fonctions étagées

Définition 5.1. *Pour toute fonction constante par morceau $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ de représentation*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k[}(t)$$

*où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et $(a_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$, on définit le processus $X(f)$ **intégrale stochastique élémentaire** de f par W sur $[0,T]$ par*

$$X_t(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k (W_{t_k \wedge t} - W_{t_{k-1}\wedge t}), \ \forall t \geq 0.$$

Ainsi $\forall t \in [t_k, t_{k+1}[$ on a

$$X_t(f) = \sum_{j=1}^{k} a_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + a_{k+1}(W_t - W_{t_k})$$

Proposition 5.2. *Le processus $X(f)$ est un processus gaussien centré à trajectoires continues et de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (t \wedge s \wedge t_i - t \wedge s \wedge t_{i-1}) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u) \, du$$

de plus $\forall t \geq s \geq 0$ l'accroissement $X_t(f) - X_s(f)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Remarques :

(a) $X(f)$ est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -adapté;

(b) $\forall t \geq 0$ la loi de $X_t(f)$ est gaussienne centrée de variance

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 (t \wedge t_i - t \wedge t_{i-1}) = \int_0^t f^2(s) \, ds$$

Preuve. La continuité des trajectoires de $X(f)$ est une simple conséquence de la continuité des trajectoires de W. On montre à présent que $X(f)$ est à accroissements indépendants : soient $0 \leq s < t \leq T$ supposons que $s \in [t_k, t_{k+1}[$ alors

$$X_t(f) - X_s(f) = \sum_{j=k+2}^{n} a_j (W_{t\wedge t_j} - W_{t\wedge t_{j-1}}) + a_{k+1}(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_s)$$

qui par les propriétés de W est indépendant de $\mathcal{F}_s$.
A présent on va montrer par récurrence que $\forall p \geq 1$, $\forall 0 \leq s_1 < s_2, \cdots < s_p$ et $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ la v.a. $\alpha^T \cdot (X_{s_1}, ..., X_{s_p})$ est gaussienne.
Pour $p = 1$ c'est bien le cas par la remarque (b) précédente.
On suppose alors la propriété vraie pour $p \geq 1$, on va la montrer pour $p + 1$.
Soient $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $0 \leq s_1 < s_2, \cdots < s_{p+1}$. On a

$$\alpha^T \cdot (X_{s_1}, ..., X_{s_{p+1}}) = \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j X_{s_j} = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j X_{s_j} + (\alpha_p + \alpha_{p+1}) X_{s_p} + \alpha_{p+1}(X_{s_{p+1}} - X_{s_p})$$

par l'hypothèse de récurrence $\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j X_{s_j} + (\alpha_p + \alpha_{p+1}) X_{s_p}$ est de loi normale et est $\mathcal{F}_{s_p}$-mesurable. Par ailleurs l'accroissement $X_{s_{p+1}} - X_{s_p}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{s_p}$ et également de loi normale. La somme est donc bien gaussienne, ce qui conclut la récurrence.
Enfin $\forall t \geq s \geq 0$ on a

$$K(s,t) = \mathbf{Cov}(X_s(f), X_s(f)) + \mathbf{Cov}(X_s(f), X_t(f) - X_s(f)) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (s \wedge t_i - s \wedge t_{i-1}) + 0 = \int_0^{t\wedge s} f^2(x)\, dx$$

□

Définition 5.3. *On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions étagées et $\mathcal{C}$ l'ensemble des processus stochastiques sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ à trajectoires continues. Enfin on notera $I : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ l'application, appelée* ***intégrale stochastique*** *des fonctions étagées par W, définie par*

$$I_t(f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}),\ \forall t \geq 0$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ de représentation

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i[}(t)$$

Proposition 5.4. *Pour tout $f \in \mathcal{E}$ le processus $I(f) = (I_t(f))_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues, nulle en $t = 0$ et de carré intégrable. De plus le processus $(I_t(f)^2 - \int_0^t f^2(s)\, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.*

Preuve. Par la proposition précédente $I(f)$ est à trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, $I_t(f)$ est de loi normale donc de carré intégrable. Par construction $I_0(f) = 0$ et de plus $I(f)$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptée. Enfin on a $\forall 0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}[I_t(f) | \mathcal{F}_s] = I_s(f) + \mathbb{E}[I_t(f) - I_s(f) | \mathcal{F}_s] = I_s(f)$$

car on a que $I_t(f) - I_s(f)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et $\mathbb{E}[I_t(f)] - \mathbb{E}[I_s(f)] = 0$. De plus

$$\mathbb{E}[I_t(f)^2] = \mathbf{Var}[I_t(f)] = \int_0^t f^2(s)\, ds$$

Le processus $(I_t(f)^2 - \int_0^t f^2(s)\, ds)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté et intégrable et par orthogonalité des accroissements des martingales (cf. TD) on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_t(f)^2 - I_s(f)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(I_t(f) - I_s(f))^2 | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(I_t(f) - I_s(f))^2] \\
&= \int_0^t f^2(x)\, dx - \int_0^s f^2(x)\, dx
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[I_t(f)^2 - \int_0^t f^2(x)\, dx | \mathcal{F}_s \right] = I_s(f)^2 - \int_0^s f^2(x)\, dx$$

□

5.1.2 Intégration des fonctions de carré intégrable

L'objectif est d'étendre la définition de l'intégrale stochastique précédente des fonctions étagées aux fonctions de carré intégrable sur $[0,T]$. On note

$$L^2([0,T]) = \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable telle que } \int_0^T f^2(s)\ ds < +\infty \right\}$$

L'espace vectoriel des fonctions mesurables de carré intégrable su $[0,T]$.

Approximaton

Soit $f \in L^2([0,T])$ on va construire une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\geq 1}$ qui convergent dans L^2 vers f. Ainsi $\forall n \geq 1$ on considère la partition de $[0,T]$: $t_k = (k/2^n)T$ pour tous $k \in \{0,1,...,2^n\}$ et on définit

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n}{T} \int_{\frac{(k-1)}{2^n}T}^{\frac{k}{2^n}T} f(s)\ ds \cdot \mathbf{1}_{]\frac{k}{2^n}T, \frac{(k+1)}{2^n}T]}(t) \tag{5.1}$$

Remarque : Le décalage entre l'intervalle d'intégration et l'intervalle de l'indicatrice est volontaire. Dans $L^2([0,T])$ (le carré de) la distance entre f et f_n est

$$\begin{aligned}
\int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2\ dt &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}T}^{\frac{(k+1)}{2^n}T} |f(t) - f_n(t)|^2\ dt \\
&= \int_0^{\frac{T}{2^n}} |f(t)|^2 + \sum_{k=1}^{2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}T}^{\frac{(k+1)}{2^n}T} \left| f(t) - \frac{2^n}{T} \int_{\frac{(k-1)}{2^n}T}^{\frac{k}{2^n}T} f(s)\ ds \right|^2\ dt
\end{aligned}$$

Si on suppose f continue sur $[0,T]$ alors elle y est uniformément continue donc

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } |s-t| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$$

Pour un n suffisament grand on aura $2T/2^n \leq \eta$ donc

$$\forall s \in \left[\frac{(k-1)}{2^n}T, \frac{k}{2^n}T \right],\ \forall t \in \left[\frac{k}{2^n}T, \frac{(k+1)}{2^n}T \right],\ \text{on aura } |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$$

d'où par l'inégalité triangulaire

$$\int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2\ dt \leq M_{T/2^n} \frac{T}{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}T}^{\frac{(k+1)}{2^n}T} \frac{2^n}{T} \int_{\frac{(k-1)}{2^n}T}^{\frac{k}{2^n}T} |f(t) - f(s)|^2\ ds\ dt$$

où $M_t = \max_{0\leq s\leq t} |f(t)|^2$ et $\lim_{t\searrow 0} M_t = |f(0)|^2$ par continuité. On en déduit qu'à partir d'un certain rang

$$M_{T/2^n} \frac{T}{2^n} \leq \varepsilon^2$$

d'où

$$\int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2\ dt \leq \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}T}^{\frac{(k+1)}{2^n}T} \varepsilon^2\ dt \leq (T+1)\varepsilon^2$$

En conclusion on a que si f est une fonction continue de carré intégrable sur $[0,T]$ alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^2([0,T])$ vers f.
Pour avoir la propriété générale on utilise la densité des fonctions continue dans $L^2([0,T])$ (que l'on admet ici) pour obtenir que $\forall f \in L^2([0,T])$ on a convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ (définie ci dessus) dans $L^2([0,T])$ vers f.

Extension de l'intégrale.

Théorème 5.5. *Il existe une unique application linéaire* $J : L^2([0,T]) \to \mathcal{C}$ *telle que*

(1) $\forall f \in \mathcal{E}$ *on a* $J(f) = I(f)$;

(2) $\forall f \in L^2([0,T])$ *le processus* $J(f)$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingale de carré intégrable à trajectoires continues. De plus le processus*

$$(J(f)^2 - \int_0^t f^2(u)\ du)_{t\geq 0}$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingale à trajectoires continues.*

(3) Le processus $J(f)$ *est gaussien centré de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)\ du$$

Preuve. On commence par l'
Unicité : Si J existe alors $\forall f \in L^2([0,T])$ par continuité de J on a

$$J_t(f) = \lim_{n\to+\infty} J_t(f_n) = \lim_{n\to+\infty} I_t(f_n)$$

où $(f_n)_{n\geq 1}$ est la suite de fonction de $\mathcal{E}$ définie par (5.1). La propriété (2) du théorème implique

$$\mathbb{E}(J_t(f)^2) < +\infty$$

donc les limite ci-dessus sont à prendre dans L^2.
A présent si on suppose $\exists J'$ vérifiant les mêmes propriétés alors

$$\mathbb{E}\left[(J'_t(f) - J_t(f))^2\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[(I_t(f_n) - I_t(f_n))^2\right] = 0$$

donc $J'_t(f) = J_t(f)$, $\mathbb{P}$-p.s. pour tous $t \geq 0$. Donc $J'(f)$ est une version de $J(f)$ et par continuité ces processus sont indistingables. D'où l'unicité.
Existence : On considère $f \in L^2([0,T])$ et la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonction de $\mathcal{E}$ définie par (5.1). La suite $(I(f_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^2([0,T])$: en effet

$$\mathbb{E}\left[I_t(f_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f_n^2(s)\ ds\right]$$

car $(I_t(f_n)^2 - \int_0^t f_n^2(s)\ ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale. Par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(f_n)^2\right] &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{2^n}{T}\int_{\frac{k-1}{2^n}T}^{\frac{k}{2^n}T} f(s)\ ds\right)^2 \int_{\frac{k}{2^n}T}^{\frac{k+1}{2^n}T} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\ ds \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n-1} \int_{\frac{k-1}{2^n}T}^{\frac{k}{2^n}T} f^2(s)\ ds \\
&\leq \int_0^t f^2(s)\ ds
\end{aligned}$$

De plus $\forall n, p \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}\left[|I_t(f_n) - I_t(f_p)|^2\right] = \mathbb{E}\left[|(I_t(f_n - f_p))^2\right] = \int_0^t (f_n(u) - f_p(u))^2\ du$$

comme la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est convergente elle est de Cauchy, ce qui implique par l'égalité ci-dessus que $(I_t(f_n))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Or l'espace $L^2(\Omega)$ est complet ce qui implique que $(I_t(f_n))_{n\geq 1}$ est convergente dans $L^2(\Omega)$. Ce qui implique qu'il exite M_t une v.a. de carré intégrable telle que

$$M_t = \lim_{n\to+\infty} I_t(f_n)$$

dans $L^2(\Omega)$. On pose alors $J_t(f) = M_t$. Ce qui conclut l'existence.
Martingale : On a déjà montré l'intégrabilité, $J(f)$ est bien $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptée et on vérifie que $\forall t \geq s \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}[I_t(f_n)|\mathcal{F}_s] = I_s(f_n)$$

qui par passage aux limites quand $n \to +\infty$ donne

$$\mathbb{E}[J_t(f)|\mathcal{F}_s] = J_s(f)$$

$J(f)$ est donc bien une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.
Continuité : Par Doob

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |J_s(f_n) - J_s(f)|^2\right] \leq C \sup_{0\leq s\leq T} \mathbb{E}\left[|J_s(f_n) - J_s(f)|^2\right] \leq C\int_0^T (f_n(u) - f(u))^2\ du$$

On peut trouver une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que

$$C\int_0^T (f_{\varphi(n)}(u)-f(u))^2\ du \leq \frac{1}{n^2}$$

ce qui entraine

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T}|J_s(f_{\varphi(n)})-J_s(f)|^2\right] < +\infty$$

ce qui implique par Borel-Cantelli on a $\mathbb{P}$-p.s.

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\leq s\leq T}|J_s(f_{\varphi(n)})-J_s(f)|^2 = 0$$

donc la continuité de $J(f)$ est induite de celle de $J(f_n) = I(f_n)$. On vient de montrer que $J(f)$ est une martingale à trajectoires continues telle que $I(f) = J(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$.
Compensateur : soient $0 \leq s < t$ on a

$$\mathbb{E}\left[I_t(f_n)^2 - \int_0^t f_n^2(u)\ du|\mathcal{F}_s\right] = I_s(f_n)^2 - \int_0^t f_n^2(u)\ du$$

qui par passage à la limite quand $n \to +\infty$ donne

$$\mathbb{E}\left[J_t(f)^2 - \int_0^t f^2(u)\ du|\mathcal{F}_s\right] = J_s(f)^2 - \int_0^t f^2(u)\ du$$

Caractère Gaussien : Enfin en tant que limite de processus gaussien $((I_t(f_n))_{t\geq 0})_{n\geq 1}$ le processus $(J_t(f))_{t\geq 0}$ est gaussien centré et $\forall t > s \geq 0$

$$\begin{aligned}
K(s,t) &= \mathbb{E}[J_t(f)J_s(f)] \\
&= \mathbb{E}[J_t(f)^2] + \mathbb{E}[(J_t(f)-J_s(f))J_s(f)] \\
&= \mathbb{E}[J_t(f)^2] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[(J_t(f)-J_s(f))|\mathcal{F}_s]J_s(f)] \\
&= \int_0^s f^2(u)\ du
\end{aligned}$$

□

Définition 5.6. *Pour tout $f \in L^2([0,T])$ le processus $J(f)$ est appelé intégrale de Wiener de f. On la note*

$$J_t(f) = \int_0^t f(u)\ dW_u$$