Correction_TD2_BENOIT_Adam_BORGET_Antoine_Groupe3

2022-10-02

1. **PARTIE I**
2. **EXERCICE 1**
3. **Question 1.**
4. 1) On répète une expérience de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$ de manière indépendante, donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p = \frac{3^{k-1}}{4^k}$ $X \sim G(\frac{1}{4})$ la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$
5. 2) Donc $E(X) = \frac{1}{p} = 4$
6.
7. **Question 2.**
8. Pour $i \in 0, ..., 3$ $\pi_i = \frac{1}{4-i}$ (le nombre deportes restantes) Or pour $i \in 0, ..., 3$ $\pi_i = \frac{P(X=i+1 \bigcap X>i)}{P(X>i)} = \frac{P(X=i+1)}{P(X>i)}$
9. Et donc pour $i \in 1, ..., 4$:
$$P(X = i) = \pi_{i-1} P(X > i-1)$$
On a :
$$P(X = 1) = \frac{1}{4}$$
Puis :
$$P(X = 2) = P(X > 1)\pi_1 = (1 - P(X = 1))\pi_1 = \frac{1}{4}$$
Et:
$$P(X = 3) = P(X > 2)\pi_2 = (1 - P(X = 1) - P(X = 2))\pi_2 = \frac{1}{4}$$
Et finalement :
$$P(X = 4) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = \frac{1}{4}$$
Donc $X \sim U(1, ..., 4)$

Question 3.

$P(X = 1) = \frac{1}{4}$ car cette expérience suit une loi uniforme sur {1,2,3,4} : au premier essai, le rat choisit au hasard. p_i c'est la probabilité qu'il n'y arrive pas au $(i+1)_{ème}$ essai sachant qu'il n'a pas réussi jusqu'au $i_{ème}$ Donc $\forall i \geq 1$
$$p_i = \frac{2}{3}$$
* Soit $i \geq 1$
$$(1) : P(X = i+1 | X > i) = P(X \leq i+1 | X > i) = 1 - p_i = \frac{1}{3}$$
Or on a aussi :
$$(2) : P(X = i+1 | X > i) = \frac{P(X = i+1 \bigcap X > i)}{P(X > i)} = \frac{P(X = i+1)}{P(X > i)}$$
D'après (1) et (2) :
$$P(X = i+1) = \frac{P(X > i)}{3}$$

i.e

$$P(X=i+1)=\frac{1-P(X\leq i)}{3}=\frac{1-\sum_{k=0}^{i}P(X=k)}{3}$$

$$P(X=i+1)=\frac{1-\sum_{k=0}^{i-1}P(X=k)}{3}-\frac{P(X=i)}{3}$$

$$P(X=i+1)=\frac{2}{3}P(X=i)$$

Donc par une récurrence immédiate, pour $i\geq 2$:

$$P(X=i)=(\frac{2}{3})^{i-2}\frac{1}{4}$$

Question 3.

Soit $k\geq 2$: $P(YG=k-1)$ Par indépendance :

$$=P(Y=1)\times P(G=k-1)=\frac{3}{4}\times(\frac{2}{3})^{k-1}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{4}\times(\frac{2}{3})^{k-1}=P(X=k)$$

Et

$$P(Z=1)=P(Y=0)=\frac{1}{4}=P(X=1)$$

Donc Z et X ont bien la même loi

D'où l'espérance de X :

$$E(X)=E(Z)=1+E(YG)$$

Or par idépendance de Y et G :

$$=1+E(Y)E(G)=1+\frac{3}{4}\times 3=\frac{13}{4}$$

Avec la simulation en R on obtient $E(X)=3,250763$ ce qui est très proche de $\frac{13}{4}=3,25$

EXERCICE 2 :

On associe l'évènement "Les shadoks réussissent à lancer leur fusée pour la première fois" à la variable aléatoire X, la loi géométrique de paramètre 10^{-6} La probabilité que les shadoks n'arrivent pas à lancer de fusée en moins de 1 millions d'essais s'écrit :

$$P(X\geq 10^6)=1-P(X<10^6)=1-\sum_{k=1}^{10^6-1}P(X=k)=1-\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{(10^6-1)^{k-1}}{10^{6k}}$$

$$=1-10^{-6}\sum_{k=0}^{10^6-2}(\frac{10^6-1}{10^6})^k$$

Pour simplifer l'écriture posons $x_p=10^6=\frac{1}{p}$:

$$P(X\geq x_p)=1-\frac{1}{x_p}(\frac{1-(\frac{x_p-1}{x_p})^{x_p-1}}{1-\frac{x_p-1}{x_p}})$$

$$=(\frac{x_p-1}{x_p})^{x_p-1}=e^{(x_p-1)ln(1-\frac{1}{x_p})}$$

or $\frac{1}{x_p}$ est très petit donc si on approxime ln on obtient :

$$P(x \geq x_p) \sim e^{-\frac{x_p - 1}{x_p}}$$

Or x_p étant une très grande valeur la différence relative entre $x_p - 1$ et x_p est très faible donc $P(X \geq x_p)$ est très proche de e^{-1}

PARTIE II

EXERCICE 1

Question 1.

On a $x \in [\![0, 35]\!]$ donc la division euclidienne de $x - 1$ par 6 s'écrit:

$$x - 1 = -q + r$$

avec (q,r) $\in ([\![0, 5]\!])^2$

$$x = 6q + r + 1$$

Donc avec $q^* = q + 1$ et $r^* = r + 1$ on a

$$(q^*, r^*) \in 1, 6$$

tq

$$x = 6(q^* - 1) + r^*$$

Question 2.

Soit $x \in [\![1, 36]\!]$ et $(q^*, r^*) \in [\![1, 6]\!]$ tq $x = 6(q^* - 1) + r^*$ donc

$$P(X = x) = P(N_1 = q^* \cap N_2 = r^*)$$

car les cuples (q^*, r^*) sont uniques

$$= (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}$$

Donc X suit la loi uniforme sur $[\![1, 36]\!]$

Algo: 1. On lance les deux dés et on note leurs résultats d_1 et d_2

2) Si $x = 6(d_1 - 1) + d_2 > 19$, retour à 1) sinon on revoie x

L'étape 1 coûte 2 Posons Y : " Le nombre de fois que l'on passe par l'étape 1)" Pour $k \in N^*, P(X = k) = P(X > 19)^{k-1} \times P(X \leq 19) = (1 - p)^{k-1}p$ avec $p = \frac{19}{36}$ Le coût total est donc :

$$2E(Y) = \frac{72}{19}$$

Preuve de l'algorythme : En notant G l'évènement : $6(d1 - 1) + d2 \leq 19$ et pour $k \in [\![1, 19]\!], A_k =$ "$6(d1 - 1) + d2 = k$"

Alors en répétant de manière aléatoire l'épreuve "lancer les deux dés" jusqu'à ce que C soit réalisée, la probabilité d'obtenir A_k à l'issu de l'épreuve où C s'est réalisé est :

$$P(A_k|C) = \frac{P(A_k \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A_k)}{P(C)}$$

Car $A_k \subset C$ d'où :

$$P(A_k|C) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{19}{36}} = \frac{1}{19}$$