Ordre de consistance du schéma d'Euler implicite :

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad , \quad f \text{ de classe } C^1$$

Soit y une solution de $y' = f(t,y)$ sur $[t_0, T]$.

On définit $R(t) = \dfrac{y(t+h)-y(t)}{h} - f(t+h, y(t+h))$.

On montre d'abord l'estimation suivante :

$$\sup_{[t_0, T-h]} \|R(t)\| \leq c\, h \qquad (a)$$

avec $c = \dfrac{1}{2} \sup\limits_{[t_0,T]} \|y''\|$.

Puisque $y \in C^2$, on obtient par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$y(a-h) = y(a) - h\, y'(a) + h^2 \int_0^1 (1-\tau)\, y''(a-\tau h)\, d\tau$$

Avec $a = t+h$, cela donne :

$$y(t+h) - y(t) - h\, y'(t+h) = -h^2 \int_0^1 (1-\tau)\, y''(t+(1-\tau)h)\, d\tau$$

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} - f(t+h, y(t+h)) = -h \int_0^1 s\, y''(t+sh)\, ds$$

Donc $\forall t \in [t_0, T-h]$: $\|R(t)\| \leq h \displaystyle\int_0^1 s \times \sup_{[t_0,T]} \|y''\|\, ds = h \times c$. $\square$

Le schéma d'Euler implicite équivaut à :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h\, k_1 \\ k_1 = \phi(t_k, y_k, h) \end{cases}$$

où la fonction ϕ est définie implicitement comme solution de :

$$k_1 = f(t_k + h,\ y_k + h\, k_1) \qquad (b)$$

Pour f L-lipschitzienne en y et $\underline{\underline{h < \frac{1}{L}}}$, la solution k_1 est unique et la fonction ϕ bien définie.

Soit $\varepsilon(t) = \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} - \phi(t, y(t), h)$ l'erreur de consistance.

Par définition de ϕ (solution de (b)) on a :

$$\varepsilon(t) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - f(t+h,\ y(t) + h\phi(t, y(t), h))$$

En considérant $R(t) = \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} - f(t+h,\ y(t+h))$, on peut donc écrire :

$$\varepsilon(t) = R(t) + f(t+h,\ y(t+h)) - f(t+h,\ y(t) + h\phi(t, y(t), h))$$

$$= R(t) + f(t+h,\ y(t+h)) - f(t+h,\ y(t+h) - h\,\varepsilon(t))$$

par définition de $\varepsilon(t)$.

Avec l'inégalité triangulaire, et puisque f est L-lipschitzienne suivant y, on obtient $\forall t \in [t_0, T-h]$:

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \|R(t)\| + L h \|\varepsilon(t)\|$$

Donc $\displaystyle\sup_{t \in [t_0, T-h]} \|\varepsilon(t)\| \leq \frac{1}{1-Lh} \sup_{t \in [t_0, T-h]} \|R(t)\| \leq \frac{c}{1-Lh} \times h$

d'après l'estimation (a) obtenue précédemment.

On a donc vérifié $\displaystyle\sup_{t \in [t_0, T-h]} \|\varepsilon(t)\| = O(h)$ quand $h \to 0$.

Le schéma d'Euler implicite est donc consistant d'ordre 1.

Stabilité du schéma d'Euler implicite :

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = f(t_{k+1}, y_{k+1}) \iff \begin{cases} y_{k+1} = y_k + h k_1 \\ k_1 = f(t_k+h,\ y_k + h k_1) \end{cases} \quad (1)$$

$$\iff \begin{cases} y_{k+1} = y_k + h k_1 \\ k_1 = \phi(t_k, y_k, h) \end{cases}$$

si $\underline{\underline{h < \frac{1}{L}}}$, pour f L-lipschitzienne suivant y.

On applique le critère de stabilité vu en cours.

Soient $y, z \in \mathbb{R}^n$. Par définition de ϕ (solution de (1)) on a :

$$\begin{cases} \phi(t,y,h) = f(t+h,\ y + h\,\phi(t,y,h)) \\ \phi(t,z,h) = f(t+h,\ z + h\,\phi(t,z,h)) \end{cases}$$

En faisant la différence des deux égalités :

$$\|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)\| \leq L\, \| (y + h\,\phi(t,y,h)) - (z + h\,\phi(t,z,h)) \|$$

$$\leq L \left(\|y-z\| + h\, \|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)\| \right)$$

par inégalité triangulaire. On a donc pour $h \leq \frac{1}{2L}$:

$$\|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)\| \leq \frac{L}{1-Lh} \|y-z\| \leq 2L\, \|y-z\|.$$

ϕ est donc lipschitzienne par rapport à y, uniformément en $h \in [0, \frac{1}{2L}]$ et $t \in [0,T]$.

D'après le critère de stabilité, le schéma d'Euler implicite est donc stable par rapport aux erreurs.