Chapter 6

Calcul d'Itô

6.1 Formules d'Itô

Soit $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, nulle en 0. Le calcul intégral classique (Riemann-Stieljes ou Lebesgue-Stieljes) donne

$$\int_0^t \varphi(u)\varphi'(u)\ du = \int_0^t \varphi(u)\ d\varphi(u) = \frac{1}{2}\varphi^2(t)$$

Or en TD nous avons vu que si B est un M.B.S. (donc pour presque tout ω une fonction continue nulle en 0) on a pour l'intégrale d'Itô

$$\int_0^t B_u\ dB_u = \frac{1}{2}(B_t^2 - t) \tag{6.1}$$

il y a donc une "correction" à apporter au calcul classique (dans notre exemple $-t/2$). De plus comme $B \in \Pi_2^2([0,T])$ on doit avoir (par le cours précédent) que $(\int_0^t B_u\ dB_u)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale ce que nous avons bien trouvé par (6.1) (martingale du M.B.S.).

Les résultats qui suivent, étendent le calcul aux fonctionnelles du M.B.S. et sont à la base du calcul stochastique.

Théorème 6.1. *Formules d'Itô.*
Soit W un $(\mathcal{F}_t)$-M.B.S.

1. *Cas homogène : pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t \in \mathbb{R}$*

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\ dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\ ds$$

2. *Cas non homogène : pour tout $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ on a $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t \in \mathbb{R}$*

$$f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t f_t'(u, W_u)\ du + \int_0^t f_x'(u, W_u)\ dW_u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(u, W_u)\ du$$

Notation : *dans l'énoncé pour les dérivés partielles d'une fonction $f(t,x)$ on note $f_t' = \frac{\partial}{\partial t} f$ (dérivée temporelle), $f_x' = \frac{\partial}{\partial x} f$ (dérivée spatiale) et $f_{xx}'' = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} f$ (dérivée seconde spatiale).*

Nous allons montrer ici ce résultat. La preuve est intéressante car elle permet de comprendre où jouent les hypothèses et la forme de la formule. Même s'il n'est pas question de savoir reproduire à la demande cette démonstration il est indispensable de la lire avec calme et application pour en comprendre tous les aspects.

Preuve. On se limitera à traiter le cas homogène : l'autre cas ne présente aucune difficulté supplémentaire si ce n'est une écriture plus alourdie.
Le résultat repose sur une application de la célèbre formule de Taylor à l'ordre 2 pour f. Vu les hypothèses on a $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(x) + \frac{1}{2}(y - x)^2 f''(x) + (y - x)^2 h(x, y)$$

où $\lim_{y\to x} h(x,y) = 0$.
On va commencer par **supposer que f est à support compact** : i.e. il existe K un compact de $\mathbb{R}$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \subseteq K$.
En conséquence :

a. Les fonction f' et f'' sont également à supports compacts. Comme elles sont supposée continues : elles sont bornées sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction h intervenant dans la formule de Taylor est également uniformément continue. Il existe donc une fonction bornée $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$|h(x,y)| \leq \varepsilon(|y-x|)$$
avec $\lim_{h\searrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Soit $t > 0$ arbitraire, fixé on introduit alors la subdivision de $[0,t]$
$$\left\{t_k := t_k^n = \frac{k}{n}t,\ k = 0, 1, \cdots, n\right\}$$
et on écrit
$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{k=1}^{n} [f(W_{t_k}) - f(W_{k-1})]$$
et on applique la formule de Taylor sur chacun de ces termes
$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= \sum_{k=1}^{n} f'(W_{t_{k-1}}) \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right) && (6.2)\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f''(W_{t_{k-1}}) \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 && (6.3)\\ &+ \sum_{k=1}^{n} h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k}) \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 && (6.4)\end{aligned}$$
Nous allons traiter séparément chacun de ces termes.

1. Termes (6.2)
On pose $H = (H_s)_{s\in[0,t]}$ avec $H_s = f'(W_s)$, par les hypothèses on a que $H \in \Pi_2^2([0,t])$: en effet $s \mapsto H_s$ est continue, H est $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,t]}$-adapté et
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\ ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[(f'(W_s))^2\right]\ ds \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(f'(x)\right)^2 \cdot t < +\infty$$
On définit alors le processus étagé H^n tel que $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et $\forall s \in [t_k, t_{k+1}[$ on a
$$H_s^n = H_{t_k}$$
on a $H^n \in \Pi_1^2([0,t])$ donc
$$\int_0^t H_s^n\ dW_s = \sum_{k=1}^{n} H_{t_{k-1}}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$
De plus comme $H - H^n$ est également dans $\Pi_2^2([0,t])$ on a par l'isométrie d'Itô que
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\ dW_s - \int_0^t H_s^n\ dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[(H_s - H_s^n)^2\right]\ ds$$
De part la continuité de $s \mapsto f'(W_s) = H_s$ on a que $\forall s \in [0,t]$
$$\lim_{n\to+\infty} H_s^n = H_s\ \mathbb{P} - p.s.$$
et par convergence dominée (cf. conséquences plus haut qui implique H borné) on a $\forall s \in [0,t]$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(H_s - H_s^n)^2\right] = 0$$
et à nouveau par convergence dominée on a
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathbb{E}\left[(H_s - H_s^n)^2\right]\ ds = 0$$
Ceci traduit que dans $L^2(\Omega)$
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f'(W_{t_{k-1}})(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = \int_0^t f'(W_s)\ dW_s.$$

2. Termes (6.3)
On remarque que
$$\sum_{k=1}^{n} f''(W_{t_{k-1}})\,(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f''(W_{t_{k-1}})\frac{t}{n} \to \int_0^t f''(W_s)\ ds$$

lorsque $n \to +\infty$. A présent posons pour tous $k \in \{1, ..., n\}$

$$N_{t_k} = f''(W_{t_{k-1}}) \left[(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \frac{t}{n} \right]$$

on remarque que N_{t_k} est $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable et

$$\mathbb{E}(N_{t_k}) = \mathbb{E}\left[f''(W_{t_{k-1}}) \mathbb{E}\left((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \frac{t}{n} | \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right) \right] = 0$$

de plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} N_{t_k} \right)^2 \right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} N_{t_k}^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} N_{t_i} N_{t_j} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[N_{t_k}^2 \right] + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{E}\left[N_{t_i} \mathbb{E}\left(N_{t_j} | \mathcal{F}_{t_i} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[N_{t_k}^2 \right] \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f''(W_{t_{k-1}}) \left[(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \frac{t}{n} \right] \right)^2 \right] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(f''(W_{t_{k-1}}))^2 \left((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \frac{t}{n} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(f''(W_{t_{k-1}}))^2 \mathbb{E}\left[\left((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \frac{t}{n} \right)^2 | \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right] \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(f''(W_{t_{k-1}}))^2 \mathbf{Var}\left(W_{\frac{t}{n}}^2 \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(f''(W_{t_{k-1}}))^2 \right] \frac{2t^2}{n^2} \\ &\le \frac{2t^2}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} (f''(x))^2 \to 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$. Nous venons d'obtenir que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f''(W_{t_{k-1}})(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 = \int_0^t f''(W_s)\, ds$$

dans $L^2(\Omega)$.

3. Termes (6.4)
   On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k})(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \right)^2 \right] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k}) \right)^2 (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^4 \right] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{E}\left[h(W_{t_{i-1}}, W_{t_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 h(W_{t_{j-1}}, W_{t_j})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 \right] \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\varepsilon(|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}|) \right)^2 (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^4 \right] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{E}\left[\varepsilon(|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \varepsilon(|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 \right] \end{aligned}$$

On utilise alors Cauchy-Scharz, que $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ est de même loi que $W_{\frac{t}{n}}$ et que les accroissement de W sont indépendants pour obtenir

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[\left(\varepsilon(|W_{\frac{t}{n}}|) \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[(W_{\frac{t}{n}})^8 \right] \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{E}\left[\left(\varepsilon\left(|W_{\frac{t}{n}}| \right) \right)^2 \right] \mathbb{E}\left[W_{\frac{t}{n}}^4 \right]$$

De plus comme $W_{\frac{t}{n}}$ est de même loi que $\sqrt{\frac{t}{n}} W_1$ on a

$$\le n \left(\mathbb{E}\left[\left(\varepsilon(|W_{\frac{t}{n}}|) \right)^4 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \mathbb{E}\left[\left(\varepsilon\left(|W_{\frac{t}{n}}| \right) \right)^2 \right] \frac{t^2}{n^2}$$

or $\lim_{n \to +\infty} W_{\frac{t}{n}} = 0$ p.s. ce qui entraine $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon(|W_{\frac{t}{n}}|) = 0$ p.s. et comme ε est bornée on a par convergence dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k}) \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \right)^2 = 0$$

dans $L^2(\Omega)$.

Donc pour tout $t \geq 0$ les convergences de (6.2), (6.3) et (6.4) ont bien lieu dans $L^2(\Omega)$ ce qui entraîne qu'elles ont lieu en probabilité et par conséquent on a convergence p.s. sur des sous suites. L'égalité finale des limites est donc valide $\mathbb{P}$-p.s. :

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)\ dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\ ds$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{t\in\mathbb{Q}^+}\left\{f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)\ dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\ ds\right\}\right) = 1$$

et par continuité l'égalité est valable sur tout $\mathbb{R}^+$.

A présent **si f n'est pas à support compact**, on introduit alors la suite croissante de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-T.A.

$$\tau_n = \inf\{t > 0 : |W_t| = n\}$$

et on introduit une suite de fonctions f_n à supports compacts qui coïncident avec f sur $[-(n+1), n+1]$. On a $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t \geq 0$

$$f_n(W_t) = f_n(W_0) + \int_0^t f_n'(W_s)\ dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(W_s)\ ds$$

de plus $\forall t \leq \tau_n$ on a $\mathbb{P}$-p.s.

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\ dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\ ds$$

et on conclut en remarquant que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ p.s. □

6.2 Processus d'Itô

Nous allons à présent définir une classe de processus centrale pour notre cours. On rappelle que W est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S.

Définition 6.2. *On appelle* ***processus d'Itô*** *tout processus stochastique $X = (X_t)_{t\in I}$ de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\ ds + \int_0^t H_s\ dW_s \tag{6.5}$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, K et H sont deux processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adaptés, vérifiant $\forall t \in I$

$$\int_0^t (|K_s| + H_s^2)\ ds < +\infty,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Remarque : Tout processus d'Itô est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté et est à trajectoires continues.
Le résultat qui suit établit l'unicité (p.s.) de la décomposition d'un processus d'Itô. Nous admettrons ce résultat.

Proposition 6.3. *La décomposition (ou représentation)* (6.5) *d'un processus d'Itô est $\mathbb{P}$-p.s. unique.*

Comme nous l'avons fait pour le M.B.S. on peut définir une intégrale stochastique de certains prcessus par un processus d'Itô.

Définition 6.4. *Si X est un processus d'Itô de représentation* (6.5) *et Y un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté, à trajectoires càd-làg tel que*

$$\int_0^T \left[(H_sY_s)^2 + |K_sY_s|\right] < +\infty,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Alors on peut définir ***l'intégrale stochastique de Y par rapport à X*** *par*

$$\int_0^t Y_s\ dX_s = \int_0^t Y_sK_s\ ds + \int_0^t Y_sH_s\ dW_s,\ \forall t \in [0, T].$$

6.3 Variations et variations quadratique

6.3.1 Variations

Définition 6.5. *Etant donné un processus càd-làg $X = (X_t)_{t\in I}$ on définit sa variation sur $[0,T]$ comme la limite*

$$\mathcal{V}(X)_T = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(T)} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|$$

le long des subdivisions $\Delta_n(T) = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k(n)} = T\}$ de $[0,T]$ pour lesquelles

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le i<k(n)} |t_{i+1} - t_i| = 0$$

*Lorsque $\mathcal{V}(X)_T < +\infty$, $\mathbb{P}$-p.s. on dit que X est à **variations finies** sur $[0,T]$. Lorsqu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathcal{V}(X)_T < K$, $\mathbb{P}$-p.s. on dit que X est à **variations bornées** sur $[0,T]$.*

Remarques : Tout processus croissant sur $\mathbb{R}^+$ est à variations finie sur $[0,T]$.
On peut montrer que tout processus à variations finies est différence de deux processus croissants.
Si les trajectoires $t \to X_t(\omega)$ sont dérivables $\mathbb{P}$-p.s. alors X_t est à variations finies.
Exemple : Le processus de Poisson d'intensité λ.
Il s'agit d'un processus $N = (N_t)_{t\ge0}$ càd-làg, tel que $N_0 = 0$, à accroissements indépendants et stationnaires tel que pour tous $0 \le s < t$ l'accroissement $N_t - N_s$ est de loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$.
Comme la loi de Poisson est à support dans $\mathbb{N}$ on en déduit que N est croissant et donc il est à variations finies.
Exercice : Montrer que le processus $X = (X_t)_{t\ge0}$ définit par $X_t = N_t - \lambda t$ est une martingale càd-làg de carré intégrable à variations finies.

Proposition 6.6. *Toute martingale $(M_t)_{t\ge0}$ à trajectoires continues et à variations finies est constante.*

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer $M_0 = 0$. On note $\mathcal{V}(M)_t$ sa variation sur $[0,t]$:

$$\mathcal{V}(M)_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| < +\infty \text{ p.s.}$$

On définit les T.A. $\tau_k = \inf\{t > 0 : \mathcal{V}(M)_t \ge k\}$ on a bien $\tau_k \nearrow +\infty$ quand $k \to +\infty$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M^2_{t\wedge\tau_k}) &= \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} \mathbb{E}(M^2_{t_i\wedge\tau_k} - M^2_{t_{i-1}\wedge\tau_k}) = \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} \mathbb{E}(M_{t_i\wedge\tau_k} - M_{t_{i-1}\wedge\tau_k})^2 \\
&\le \mathbb{E}\left(\sup_{t_i\in\Delta_n(t)} |M_{t_i\wedge\tau_k} - M_{t_{i-1}\wedge\tau_k}|\mathcal{V}(M)_{t\wedge\tau_k}\right) \\
&\le k\,\mathbb{E}\left(\sup_{t_i\in\Delta_n(t)} |M_{t_i\wedge\tau_k} - M_{t_{i-1}\wedge\tau_k}|\right) \to 0 \text{ quand } n\to\infty
\end{aligned}$$

Ce qui entraine $M_{t\wedge\tau_k} = 0$ pour tous k. □

Remarque : En conséquence le M.B.S. est à variation infinie.

6.3.2 Variations quadratique

Définition 6.7. *On définit la **variation quadratique** d'un processus X comme le processus $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_t)_{t\in I}$ défini par $\forall t \in I$*

$$\langle X\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

le long des subdivision $\Delta_n(t) = \{t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ de l'intervalle $[0,t]$ où

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t_i\in\Delta_n(t)} (t_i - t_{i-1}) = 0.$$

Nous admettrons les deux propositions qui suivent.

Proposition 6.8. *On a les propriétés suivantes.*

1. *Si X est à trajectoires continues alors $\langle X\rangle$ l'est aussi.*
2. *Si $X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$ est un processus d'Itô alors $\langle X\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds$.*
3. *Si M est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale de carré intégrable, à trajectoires continues, alors $\langle M\rangle$ est l'unique processus croissant, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté, à trajectoires continues, valant 0 en $t = 0$ tel que $M^2 - \langle M\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.*

Remarques :

a. La propriété 3. s'appelle décomposition de Doob.

b. Pour 2. Il est simple de remarquer que $\langle X\rangle_t = \langle \int_0^t H_s\, dW_s\rangle_t$ et on peut, en utilisant 3, obtenir le résultat lorsque H est dans $\Pi_2^2([0,t])$.

c. Paradoxalement 1. n'est pas si simple à montrer.

Exemple : Si W est un M.B.S. on a pour tout $t \geq 0$, $\langle W\rangle_t = t$.

Proposition 6.9. *On a également.*

1. *Tout processus à trajectoires continue et à variation finie est à variation quadratique nulle.*
2. *Soit X un processus de variation quadratique $\langle X\rangle$ alors pour toute fonction continue f on a avec probabilité 1*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} f(t_{i-1})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = \int_0^t f(s)\, d\langle X\rangle_s$$

Remarques :

a. On peut à titre d'exercice montrer 1. Bien observer que l'hypothèse à trajectoires continues est nécessaire : on peut montrer que pour le Processus de Poisson d'intensité λ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} (N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2 = \lambda t \neq 0$$

dans $L^2(\Omega)$, bien que ce soit un processus à variations finies...

b La propriété 2. est bien plus laborieuse à montrer, elle est néanmoins d'une importance capitale pour ce qui suit.

6.4 Formules d'Itô pour les processus d'Itô.

Théorème 6.10. *Soit X un processus d'Itô de décomposition*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$$

1. *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ on a presque sûrement $\forall t \geq 0$*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) H_s\, dW_s + \int_0^t \left(f'(X_s)K_s + \frac{1}{2} f''(X_s) H_s^2\right) ds \end{aligned}$$

2. *Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ on a presque sûrement $\forall t \geq 0$*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) H_s\, dW_s \\ &\quad + \int_0^t \left(f'_t(s, X_s) + f'_x(s, X_s) K_s + \frac{1}{2} f''_{xx}(s, X_s) H_s^2\right) ds \end{aligned}$$

6.5 Représentation des Martingales Browniennes

On se place comme précédemment sous les conditions habituelles et on suppose que $(\mathcal{F})_{t\in[0,T]}$ est la filtration naturelle du M.B.S. $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose de plus que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
On admettra le résultat qui suit.

Théorème 6.11. *Pour toute $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$-martingale $M = (M_t)_{0\le t\le T}$ à trajectoires continues, il existe un processus $H \in \Pi_3^2([0,T])$ tel que $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t \in [0,T]$*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \ dB_s = \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_0) + \int_0^t H_s \ dB_s$$

Si de plus M est de carré intégrable alors $H \in \Pi_2^2([0,T])$.

Toute martingale brownienne (i.e. adaptée à la filtration du M.B.S.) a une représentation comme intégrale stochastique.
Exemple d'application : Pour toute variable aléatoire Z, $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable il existe H, $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$-adapté, vérifiant $\int_0^T \mathbb{E}(H_s^2)\ ds < +\infty$ tel que

$$\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(Z) + \int_0^t H_s \ dW_s.$$

Remarque : Nous verrons que ce résultat joue un rôle clé pour prouver l'existence de stratégies de couvertures. Malheureusement le résultat n'est pas "constructif" : on a l'existence du processus H mais pas le moyen de le construire.

6.6 Cas multidimensionnel

On peut étendre le calcul d'Itô au cas vectoriel.

6.6.1 Covariation quadratique

Définition 6.12. *Soit $X = (X^1, X^2, ..., X^d)$ un processus à trajectoires continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour tous $i, j \in \{1, ..., d\}$ on définit la covariation quadratique de X^i et X^j comme le processus $\langle X^i, X^j\rangle = (\langle X^i, Y^j\rangle_t)_{t\in I}$ défini pour tout $t \in I$ par la limite, lorsqu'elle existe :*

$$\langle X^i, X^j\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_k\in\Delta_n(t)} (X^i_{t_k} - X^i_{t_{k-1}})(X^j_{t_k} - X^j_{t_{k-1}})$$

le long des subdivisions $\Delta_n(t) = \{t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t_k\in\Delta_n(t)} (t_k - t_{k-1}) = 0$.

Proposition 6.13. *On a $\mathbb{P}$-p.s.*

1. *Lien avec la variation quadratique : $\langle X^i, X^i\rangle = \langle X^i\rangle$ la variation quadratique du processus X^i;*
2. *Identité de polarisation : $\langle X^i, X^j\rangle = \frac{1}{4}(\langle X^i + X^j\rangle - \langle X^i - X^j\rangle)$;*
3. *L'opérateur $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique;*
4. *Les trajectoires $t \mapsto \langle X^i, X^j\rangle_t$ sont continues;*
5. *Le processus $\langle X, Y\rangle_t$ est à variations finies.*

Preuve. 1. et 2. sont immédiats par définition. Pour 3. il suffit de voir que

$$\sum_{t_k\in\Delta_n(t)} ((\alpha X^i_{t_k} + \beta X^\ell_{t_k}) - (\alpha X^i_{t_{k-1}} + \beta X^\ell_{t_k}))(X^j_{t_k} - X^j_{t_{k-1}}) = \alpha \sum_{t_k\in\Delta_n(t)} (X^i_{t_k} - X^i_{t_{k-1}})(X^j_{t_k} - X^j_{t_{k-1}}) + \beta \sum_{t_k\in\Delta_n(t)} (X^\ell_{t_k} - X^\ell_{t_{k-1}})(X^j_{t_k} - X^j_{t_{k-1}})$$

et que $\langle X^i, X^j\rangle = \langle X^j, X^i\rangle$.
Les propriétés 4. et 5. s'héritent par les propriétés de la variation quadratique via l'identité de polarisation. $\square$

La proposition qui suit que nous admettrons fait le lien avec les cas où les processus sont des martingales (de carré intégrable) et/ou des processus d'Itô.

Proposition 6.14. *On a $\mathbb{P}$-p.s.*

1. *Décomposition de Doob : Si M et N sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingales de carrés intégrables, à trajectoires continues, alors $\langle M, N\rangle$ est l'unique processus à variations finies, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté, à trajectoires continues, valant 0 en $t = 0$ tel que $MN - \langle M, N\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.*

2. *Si X est un processus à variation finie et Y arbitraire (à trajectoires continues) alors $\langle X, Y\rangle = 0$;*

3. *Si X et Y sont deux processus indépendants alors $\langle X, Y\rangle = 0$.*

4. *Si X et Y sont deux processus d'Itô de représentation $X_t = X_0 + \int_0^t K_s\ ds + \int_0^t H_s\ dW_s$ et $Y_t = Y_0 + \int_0^t L_s\ ds + \int_0^t R_s\ dW_s$ alors*
$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s R_s\ ds$$

Enfin on admettra également le

Théorème 6.15. *Soient X et Y deux processus de covariation quadratique $\langle X, Y\rangle$ alors pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue on a $\mathbb{P}$-p.s.*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{t_k\in\Delta_n(t)} f(t_{k-1})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) = \int_0^t f(s)\ d\langle X, Y\rangle_s$$

6.6.2 Formules d'Itô

On peut à présent énoncer la formule d'Itô généralisée au cas vectoriel.

Théorème 6.16. *Formule d'Itô multidimensionnelle.*
Soient $\mathbf{X} = (X^1, ..., X^d)$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, à trajectoires continues et à (co)variations quadratiques finies. Alors

1. *pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ on a $\mathbb{P}$-presque sûrement $\forall t \geq 0$*
$$f(\mathbf{X}_t) = f(\mathbf{X}_0) + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f'_{x_k}(\mathbf{X}_s)\ dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{1\leq k,\ell\leq d} \int_0^t f''_{x_k x_\ell}(\mathbf{X}_s)\ d\langle X^k, X^\ell\rangle_s$$

2. *pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ on a $\mathbb{P}$-presque sûrement $\forall t \geq 0$*
$$\begin{aligned} f(t, \mathbf{X}_t) &= f(0, \mathbf{X}_0) + \int_0^t f'_t(s, \mathbf{X}_s)\ ds + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f'_{x_k}(s, \mathbf{X}_s)\ dX_s^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1\leq k,\ell\leq d} \int_0^t f''_{x_k x_\ell}(s, \mathbf{X}_s)\ d\langle X^k, X^\ell\rangle_s \end{aligned}$$

On en déduit une formule de calcul bien pratique :

Corollaire 6.17. *Formule d'**intégration par partie (IPP)**.*
Soient X et Y deux processus à trajectoires continues et à variations quadratiques finies. On a $\mathbb{P}$-p.s.

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s\ dX_s + \int_0^t X_s\ dY_s + \langle X, Y\rangle_t$$