# CM-2 Probabilités

Rédacteurs : LIOTTARD Julien, BRUNO Alexis
Relecteurs : BLASIAK Quentin, DUARTE Vincent

17/09/2020

**Définition : Probabilité Conditionnelle**

Soit C un événement de probabilité $\mathbb{P}(C) > 0$, alors la probabilité de A sachant C vaut :

$$\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

**Définition : Formules des Probabilités Totales**

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k|Y = n)\mathbb{P}(Y = n)$$

**Définition : Espérance de X sachant C**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et C un événement de probabilité $\mathbb{P}(C) > 0$, alors :

$$\mathbb{E}[X|C] = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n|C)$$

**Définition : Espérance Totale**

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X|Y = n]\mathbb{P}(Y = n)$$

**Algorithme de Rejet**

Répéter épreuve
Observer résultat
Jusqu'à (Condition C réalisée)
Retourner résultat

Il en vient que $\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$ implique une répétition d'épreuve alors que $\mathbb{P}(A \cap C)$ correspond à une seule épreuve.

**Définition : Loi Uniforme**

On dit qu'un nombre $U \in [0;1]$ suit la loi uniforme sur $[0;1]$ si :

$$\forall t \in [0;1],\, \mathbb{P}(U \leq t) = t$$

**Exercice 1 : Le dé**

Soit U un nombre suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note $N$ le numéro obtenu. Si $N$ est paire, on pose $X = U$, sinon $X = 2U$.

1. Calculer la valeur médiane de $X$
2. Calculer l'espérance de $X$

**<u>Corrections exercice 1</u>** :

**Question 1** :

D'après l'énoncé, $X \in [0;2]$.
Soit $m \in [0;2]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq m) &= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq m | Npair) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq m | Nimpair) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(U \leq m) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(2U \leq m) \\
&= \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}m & + & \frac{1}{4}m & si & 0 \leq m \leq 1 \\ \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4}m & si & 1 \leq m \leq 2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Il en vient $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{m = \frac{2}{3}}$

**Question 2** :

Calculons l'espérance de X :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[U] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[2U] \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[U] + \mathbb{E}[U] \\ &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4}}$

**Exercice 2 : La bonne porte**

On répète une épreuve de manière indépendante. On s'intéresse au rang d'apparition d'un événement de probabilité $p$ avec $0 < p < 1$. On le note $T$ (pour temps d'appartion) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = n) = (1-p)^{n-1}p \qquad \text{(T suit une loi géométrique)}$$

Un rat sans mémoire se trouve dans une salle 0. Il a le choix entre deux portes : l'une mène à la sortie (avec une probabilité de la choisir $p$) et l'autre le ramène dans la salle 0 (avec une probabilité d'être choisie $1 - p$).

On note $T_0$ le temps nécessaire (en nombre d'épreuves) pour sortir du labyrinthe.

Donner l'espérance de $T_0$.

**Corrections exercice 2** :

**Solution 1** : (Série Géométrique)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_0] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_0 = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p \\ &= p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

Or $\forall |x| < 1, \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Donc, en dérivant une fois, on a : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Ipso facto, $\boxed{\mathbb{E}[T_0] = \frac{1}{p}}$

**Solution 2** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_0] &= \mathbb{E}[T_0|T_0 > 1]\mathbb{P}(T_0 > 1) + \mathbb{E}[T_0|T_0 = 1]\mathbb{P}(T_0 = 1) \\
&= (1 + \mathbb{E}[T_0])(1-p) + 1 \times p
\end{aligned}$$

On retrouve bien $\boxed{\mathbb{E}[T_0] = \frac{1}{p}}$

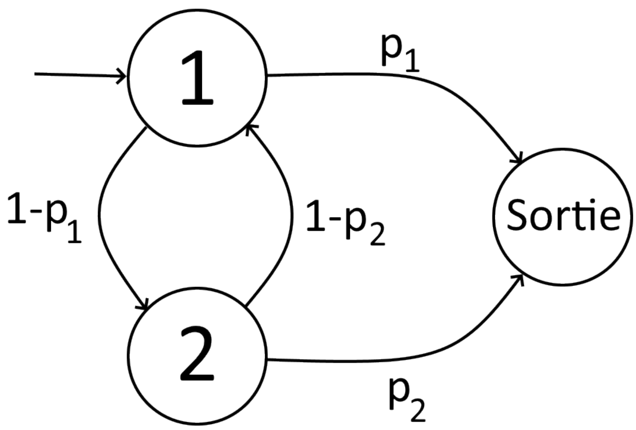
**Exercice 3 : Tous les chemins mènent à la Sortie**

Même contexte que l'exercice 2 avec une salle supplémentaire.

On pose :

- $T_1$ le temps de sortie en partant de la pièce 1
- $T_2$ le temps de sortie en partant de la pièce 2

Donner l'espérance de $T_1$



**<u>Corrections exercice 3</u>** :

On pose :

- $m_1 = \mathbb{E}[T_1]$
- $m_2 = \mathbb{E}[T_2]$
- $q_1 = 1 - p_1$
- $q_2 = 1 - p_2$

Il en vient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m_1 & = & \mathbb{E}[T_1|T_1 > 1]q_1 + \mathbb{E}[T_1|T_1 = 1]p_1 = (1 + m_2)q_1 + p_1 \\ \\ m_2 & = & \mathbb{E}[T_2|T_2 > 1]q_2 + \mathbb{E}[T_2|T_2 = 1]p_2 = (1 + m_1)q_2 + p_2 \end{array} \right.$$

Ainsi, on a $\boxed{\mathbb{E}[T_1] = \frac{1+q_1}{1-q_1 q_2}}$