CM5 : Fonction de répartition et lois à densité

Définition 1 : Fonction de répartition

La loi d'une variable aléatoire X est caractérisée par sa fonction de répartition F, définie par :

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ F(t) = P(X \leq t)$$

Proposition 1

Soit F, la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. On a :

- $\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) \in [0, 1]$
- $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$
- $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$
- F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
- $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2,\ s < t \Rightarrow P(X \in [s, t]) = F(t) - F(s)$

Remarque :

- Il est fortement conseillé de représenter le graphe de la fonction de répartition lors de la résolution des exercices pour s'assurer que celle-ci est bien croissante.
- La croissance de la fonction de répartition nous assure que la cinquième propriété ne donne pas de probabilités négatives !

Définition 2 : Densité de probabilité

On appelle densité de probabilité une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie:

- f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Définition 3

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. On dit que la loi de X admet la fonction f pour densité si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Autrement dit, F doit être la primitive de f qui s'annule en $-\infty$.

Conséquence :

- Dans le cas où X admet une densité, F est continue sur $\mathbb{R}$.
- Par contraposée, si F n'est pas continue, alors X n'admet pas de densité.
- Si F est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la densité de X est la dérivée de la fonction F.

Théorème 1 : Théorème de transfert

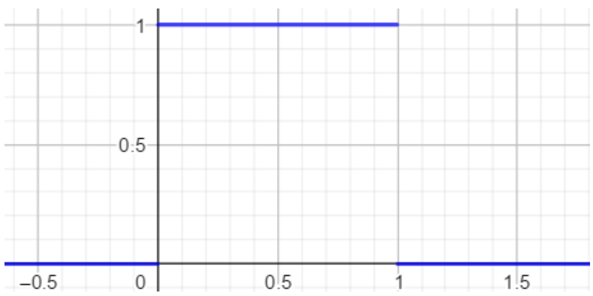
Soit φ une fonction positive ou intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

Définition 4 : Loi uniforme sur (0,1)

On la note $\mathcal{U}(0,1)$. La variable aléatoire correspondante admet une densité donnée par :

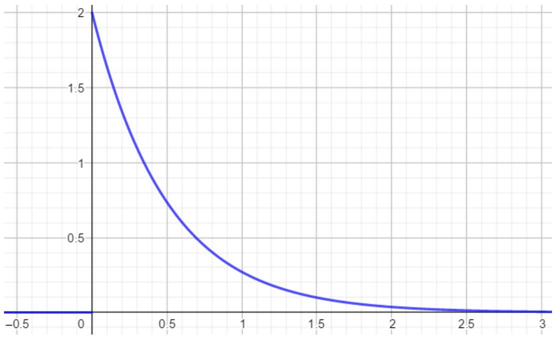
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Définition 5 : Loi exponentielle sur $\mathbb{R}_+$

Nécessite une paramètre $\lambda > 0$. On la note $\mathcal{E}(\lambda)$. La variable aléatoire correspondante admet une densité donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{sinon.} \end{cases}$$



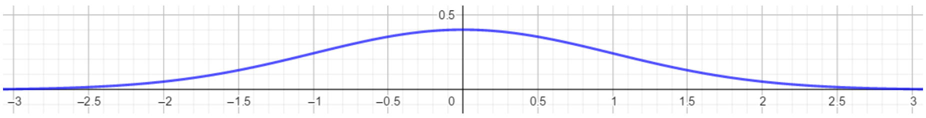
Pour $\lambda = 2$

Il s'agit de la loi continue analogue à la loi géométrique !

Définition 6 : Loi normale

On l'appelle aussi loi de Gauss et on la note $\mathcal{N}(0,1)$ La variable aléatoire correspondante admet une densité donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Comme son nom et ses paramètres le suggèrent, il s'agit d'une loi normalisée, c'est à dire, une loi d'espérance nulle et de variance 1.

Exercices

Exercice 1 : Loi continue sans fonction de densité

Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur (0,1) et A un évènement de probabilité $\frac{1}{2}$ tel que U et A soient indépendantes. On définit la variable aléatoire X par :

$$X = \begin{cases} \text{U} & \text{si A se réalise} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la fonction de répartition de U
2. Calculer la fonction de répartition de X puis son espérance.

1. Soit t $\in \mathbb{R}$. En utilisant les définitions 3 et 4, on obtient :

$$F(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0 \,\mathrm{d}x & \text{si } t < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{t} 1 \,\mathrm{d}x & \text{si } t \in [0,1] \\ \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1 \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{t} 0 \,\mathrm{d}x & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Soit :

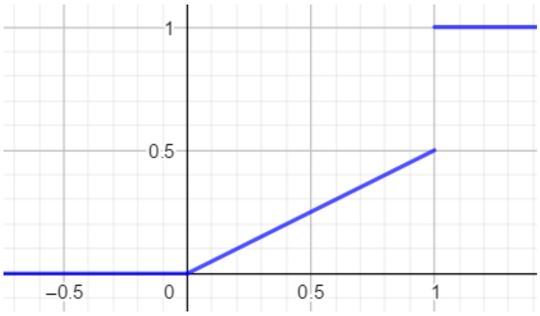
$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \text{t} & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

2. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A, $\overline{A}$) on obtient :

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= P(X \leq t|A)p(A) + P(X \leq t|\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= P(U \leq t)p(A) + P(1 \leq t|\overline{A})P(\overline{A}) \quad \text{car U et A sont indépendantes} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que 1 est la variable aléatoire qui vaut tout le temps 1 indépendamment de toutes les autres variables aléatoires, on en déduit que :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$



Nous constatons que la fonction de répartition est discontinue en 1. Donc X n'admet pas de fonction de densité. Ainsi, il ne sera pas possible d'utiliser le théorème de transfert pour calculer l'espérance de X. Mais en utilisant la formule des espérances totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|A]P(A) + \mathbb{E}[X|\overline{A}]P(\overline{A}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[U] + 1) \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Exercice 2 : Autour de la loi normale

Soit X $\hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer l'espérance de X
2. Calculer l'espérance de X^2.

Indication pour la question 2 : On considère la fonction génératrice g définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Montrer que :

- $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$
- $\mathbb{E}[X^2] = g''(0)$

1. En utilisant le théorème de transfert et la définition 6 on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\dfrac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. On a d'après le théorème de transfert avec $\varphi = e^{tx}$, positive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Comme on a $tx - \frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2} + tx = \frac{t^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}$, on a :

$$g(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

En effectuant le changement de variable $u = x - t$, on a :

$$g(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Et on remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}]' \\
&= \mathbb{E}[(e^{tX})'] \\
&= \mathbb{E}[Xe^{tX}]
\end{aligned}
$$

Puis :

$$g''(t) = \mathbb{E}[X^2 e^{tX}]$$

Finalement, en dérivant deux fois l'expression de g calculée précédemment, on obtient:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= g''(0) \\
&= 1
\end{aligned}
$$