ch 3 : Comportement face au risque

I - aversion pour le risque et fonction d'utilité :

Q : que va faire un individu qu'on place devant le choix :
1) Participer à une loterie h de gain moyen $E(h)$
2) Recevoir avec certitude $E(h)$

si l'individu préfère toujours 2 à 1, il y a donc l'aversion pour le risque
en terme d'utilité : (w_0 : la richesse initiale)
choix 1 : $w_0 \longrightarrow w_0 + h$ // $\mathbb{E}(U(w_0 + h))$
choix 2 : $w_0 \longrightarrow w_0 + \mathbb{E}(h)$ // $U(w_0 + \mathbb{E}(h))$
l'agent est riscophobe ssi $U(w_0 + \mathbb{E}(h)) > \mathbb{E}(u(w_0 + h))$
car l'agent choisit le gain certain

Thm : l'individu est riscophobe ssi sa fonction d'utilité u pour la est strictement concave (si U est 2 fois derivable et $U'' < 0$)

Demo :
$\Leftarrow$ si U est strictement concave, le resultat vient de l'inegalité de Jensen :
$\Rightarrow$ $\forall p \in]0, 1[$ $\forall$ $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$
on definit h pour $\mathbb{P}(h = h_1) = p$, $\mathbb{P}(h = h_2) = 1-p$
on a donc $U(w_0 + p h_1 + (1-p) h_2) > p\, U(h_1 + w_0) + (1-p)\, U(w_0 + h_2)$
U est strictement concave

Rmq : si l'individu est indifferent entre recevoir de manière certaine $\mathbb{E}(h)$ ou participer à la loterie alors l'agent est neutre vis à vis du risque (U est affine)
si l'individu préfère toujours participer à la loterie plutôt que de toucher $\mathbb{E}(h)$ de manière certaine alors qu'il aime le risque (u est strictement convexe)

II - Mesures d'aversion pour le risque au sens de Arrow - Pratt :

Def : Prime de risque :
C'est le montant π qu'un agent est prêt à payer pour se débarasser de la loterie h et la remplacer par un gain certain $\mathbb{E}(h)$,

Def : Prime Compensatoire :
C'est le montant π' qu'un agent peut accepter pour échanger un montant certain m par une loterie de gain moyen $\mathbb{E}(h) = m$

π et π' sont solutions de $\mathbb{E}(U(w_0 + h)) \leq U(w_0 + \mathbb{E}(h) - \pi)$
$u(w_0 + m) \leq \mathbb{E}(U(w_0 + h + \pi'))$

Thm : si l'agent est riscophobe alors π et $\pi' > 0$

Rmq : si l'agent est neutre vis-a-vis du risque $\pi' = \pi' = 0$

si l'agent est riscophile alors $\pi, \pi' < 0$

III - Mesure d'aversion absolue pour le risque :

objectif : Avoir une valeur approchée de la prime de risque quand le resultat de la loterie s'ajoute à la fortune initiale.

$\pi^p = \pi^p(w_0, h)$ est sol de $U(w_0 + \mathbb{E}(h) - \pi^p) = \mathbb{E}(U(w_0 + h))$

$U(w_0 + h) = U(w_0 + \mathbb{E}(h) + \underbrace{h - E(h)}_{\varepsilon \text{ trop petit}}) = U(w_0 + \mathbb{E}(h)) + (h - \mathbb{E}(h)) U'(w_0 + \mathbb{E}(h))$

$+ \frac{(h - E(h))^2}{2} U''(w_0 + E(h)) + o((h - \mathbb{E}(h))^2)$

donc : $\mathbb{E}(U(w_0 + h)) = U(w_0 + \mathbb{E}(h)) + 0 + \frac{1}{2} \text{Var}(h) U''(w_0 + \mathbb{E}(h))$

$+ \mathbb{E}(o(h - \mathbb{E}(h))^2$

et $U(w_0 + \mathbb{E}(h) - \pi) = U(w_0 + \mathbb{E}(h)) - \pi U'(w_0 + \mathbb{E}(h)) + o(\pi)$

$$\pi \simeq -\frac{1}{2} \text{Var}(h) \frac{U''(w_0 + \mathbb{E}(h))}{U'(w_0 + \mathbb{E}(h))}$$

si l'individu est insatiable et riscophobe $U' > 0$; $U'' < 0 \Rightarrow \pi' > 0$

on note $ARA(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}$ Absolute Risk adversion

$$\Rightarrow \pi^p \simeq \frac{1}{2} ARA(w_0 + \mathbb{E}(h))$$

IV - Aversion relative pour le risque :

l'agent investit sa fortune initiale dans la loterie dont le rendement est h $\quad w_0 \rightarrow w_0(1 + h)$

proposition : un individu qui investit sa fortune initiale w_0 dans une loterie de rendement h, il a une prime de risque egale (au voisinage de $0(1 + \mathbb{E}(h))$ à

$$\pi(w_0, h) = -\frac{1}{2} \text{Var}(h) \frac{U''(w_0(1 + \mathbb{E}(h)))}{U'(w_0(1 + \mathbb{E}(h)))} (w_0(1 + \mathbb{E}(h))$$

on note $RRA = -\frac{U''(w) w}{U'(w)}$ Relative - Risk - Adversion

⚠ **Rmq :**

$$RRA(w) = w\, ARA(w) \Rightarrow \frac{d\, RRA(w)}{dw} = ARA(w) + w \frac{d\, ARA(w)}{dw}$$

V - Applications :

1 - Allocation de la richesse en presence d'une seule source de risque :

Agent : richesse initiale w_0 qui peut investir toute ou partie de sa richesse dans une loterie de rendement x

•) si l'agent "place" $\alpha \in [0,1]$ de sa richesse w_0 dans la loterie :
sa richesse finale est $w_f(\alpha) = \alpha w_0 (1+x) + (1-\alpha) w_0 = w_0 + \alpha w_0 x$

l'agent cherche α^* tq $\alpha^* = \underset{\alpha \in [0,1]}{\mathrm{Argmax}}\ \mathbb{E}(U(w_f(\alpha)))$

sol : Condition du 1er ordre : $\frac{d}{d\alpha} \mathbb{E}(w_f(\alpha))\Big|_{\alpha=\alpha^*} = 0$

Condition du 2ème ordre : $\frac{d^2}{d\alpha^2} \mathbb{E}(U(w_f(\alpha)))\Big|_{\alpha=\alpha^*} < 0$

$\frac{d}{d\alpha} \mathbb{E}(U(w_f(\alpha^*))) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left(\frac{d}{d\alpha} U(w_f\ \alpha^*)\right) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\frac{d}{d\alpha} U(w_0(1+\alpha x))\right) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(w_0 x\, U'(w_f(\alpha^*))) = 0$ (1)

et $\mathbb{E}(w_0^2 x^2 \underbrace{U''(w_f(\alpha^*))}_{<0}) < 0$ (2)

pour (1) :

Cas (1) : x ne prend que des valeurs positives : $w_f(\alpha) = w_0(1+\alpha x) < w_0(1+x)$

$\Rightarrow U(w_f(\alpha)) < U(w_f(1))$

$\Rightarrow \mathbb{E}(U(w_f(\alpha))) < \mathbb{E}(U(w_f(1))) \Rightarrow \alpha^* = 1$

Cas 2 : si x ne prend que des valeurs ≤ 0

$w_f(\alpha) < w_f(0)$

$U(w_f(\alpha)) < U(w_f(0))$ $\quad \alpha^* = 0$

si x prend des valeurs >0 et <0 :

$\frac{d}{d\alpha} \mathbb{E}(U(w_f(\alpha)))\Big|_{\alpha=0} = \mathbb{E}(w_0 x\, U'(w_f(0))) = w_0\, U'(w_f(0))\, \mathbb{E}(x)$

si $\mathbb{E}(x) < 0$: $\mathbb{E}(U(w_f(\alpha)))\searrow \Rightarrow \alpha^* = 0$

si $\mathbb{E}(x) > 0$ si $\frac{d\mathbb{E}}{d\alpha}(U(w_f(\alpha)))\Big|_{\alpha=1} > 0 \Rightarrow \alpha^* = 1$

si $\frac{d\mathbb{E}}{d\alpha}(U(w_f(\alpha)))\Big|_{\alpha=1} < 0 \Rightarrow \exists\, \alpha^* \in]0,1[$ et $\frac{d}{d\alpha}\mathbb{E}(U(w_f(\alpha^*)))\Big|_{\alpha=\alpha^*} = 0$

Allocation en présence des sources de risque :

L'agent place sa richesse dans deux loteries de rendement x et y
on note β la partie investie dans la loterie de rendement y

$w_f(\beta) = \beta w_0(1+y) + (1-\beta) w_0(1+x)$

$= \cancel{\beta w_0} + \beta w_0 y + w_0 + w_0 x - \cancel{\beta w_0} - \beta w_0 x$

$= w_0(1 + \beta y + x - \beta x)$ $\quad z = y - x$

$= w_0(1 + (1-\beta)x + \beta y) = w_0(1 + (1-\beta)x + \beta(x+z))$

$w_f(\beta) = w_0(1 + x + \beta z)$ $\quad z = y - x$

suivant la nature de la dépendance entre x et y, on ne peut pas éliminer complètement un des risques.