PSAF- Feuille d'exercices 4

Exercice 1.

On considère que l'ensemble des indices Θ vaut $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$.

On considère une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\Theta}$ et un processus $(X_t)_{t\in\Theta}$ qui lui est adapté (on suppose X à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$).

1) Montrer que pour tout $t \in \Theta$ on a $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ (on rappelle que $(\mathcal{F}_t^X)$ est la filtration naturelle définie en cours).

2) Montrer que si pour toute fonction mesurable et bornée $f : E \to \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)\,|\,X_s], \quad \forall t > s \geq 0,$$

alors on a

$$\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[f(X_t)\,|\,X_s], \quad \forall t > s \geq 0.$$

A l'issue des questions 1) et 2) on a en fait résolu l'exercice 3.1.1 du poly.

On se tourne maintenant vers l'étude du caractère Markov de X. On admet le résultat suivant:

Théorème 1 *Si X est à accroissements indépendants alors pour tous $0 \leq s < t$ on a que $X_t - X_s$ est indépendant de la sous-tribu $\mathcal{F}_s^X$.*

3) Montrer qu'un processus à accroissements indépendants est $(\mathcal{F}_t^X)$-Markov.

4) Que dire si les accroissements sont de surcroît stationnaires ?

Exercice 2.

1) On a indifféremment $\Theta = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{N}$. Montrer que tout processus $X = (X_t)_{t\in\Theta}$ à accroissements indépendants, à valeurs dans E au plus dénombrable, et avec X_0 indépendant des accroissements de X, est de Markov.

2) Que se passe-t-il si X est à accroissements indépendants et stationnaires ?

3) Soit (Y_n) une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S_0 = 0.$$

Que peut-on dire du processus $S = (S_n)_{n\geq 0}$?

4) Tout processus de Markov est-il à accroissements indépendants ?

Exercice 3.

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
(i) Pour tous $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$ et $x_1, ..., x_{n+1} \in E$

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n);$$

que l'on abrégera en

$$P(x_{n+1}|x_1, ..., x_n) = P(x_{n+1}|x_n).$$

(ii) Pour tous $t_1 < ... < t_p < ... < t_m$ et $x_1, ..., x_m \in E$

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{p-1}} = x_{p-1}, X_{t_{p+1}} = x_{p+1}, ..., X_{t_m} = x_m | X_{t_p} = x_p)$$
$$= \mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{p-1}} = x_{p-1} | X_{t_p} = x_p)\mathbb{P}(X_{t_{p+1}} = x_{p+1}, ..., X_{t_m} = x_m | X_{t_p} = x_p);$$

que l'on abrégera en

$$P(x_1, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, ..., x_m|x_p) = P(x_1, ..., x_{p-1}|x_p)P(x_{p+1}, ..., x_m|x_p).$$

Exercice 4.

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. On définit le processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_n = Z_n + 2Z_{n+1} + 3Z_{n+2}.$$

(a) Déterminer l'espace d'état E du processus X_n.
(b) Calculer $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2)$.
(c) Calculer $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 1, X_1 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 3)$. En déduire que X_n n'est pas une chaîne de Markov sur E.
On appelle chaîne de Markov (homogène) d'ordre k un processus stochastique $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur E au plus dénombrable vérifiant pour tout choix $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = y|X_{n+k-1} = x_{n+k-1}, ..., X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+k} = y|X_{n+k-1} = x_{n+k-1}, ..., X_n = x_n)$$

(d) La chaîne (X_n) ci dessus est elle une chaîne de Markov d'ordre k? Dans l'affirmative pour quel(s) k?
(e) Montrer que si Y_n est une chaîne de Markov d'ordre 2 sur E alors $W_n = (Y_{n+1}, Y_n)$, $n \geq 0$ est une chaîne de Markov sur $E \times E$. Généralisez.