Théorie des Langages 1

Cours 1 : Vocabulaires, mots, langages, induction

L. Rieg (*thanks* M. Echenim)

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

Année 2020-2021

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \ldots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \ldots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \ldots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$
$\{0, \ldots, 9\}$	$[2, 0, 2, 0]$	2020

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \dots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$
$\{0, \dots, 9\}$	$[2, 0, 2, 0]$	2020, $(20)^2$

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \ldots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$
$\{0, \ldots, 9\}$	$[2, 0, 2, 0]$	2020, $(20)^2$
$\{a, b, ab\}$	$[ab]$, $[a, b]$	

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \ldots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$
$\{0, \ldots, 9\}$	$[2, 0, 2, 0]$	2020, $(20)^2$
$\{a, b, ab\}$	$[ab]$, $[a, b]$	ab

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \ldots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$
$\{0, \ldots, 9\}$	$[2, 0, 2, 0]$	2020, $(20)^2$
$\{a, b, ab\}$	$[ab]$, $[a, b]$	ab ?

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles.
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \dots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$
$\{0, \dots, 9\}$	$[2, 0, 2, 0]$	2020, $(20)^2$
$\{a, b, ab\}$	$[ab]$, $[a, b]$	ab ?

Définition

- On note ε le mot correspondant à la séquence vide (« *mot vide* »).

Définitions (suite)

Définition (longueur d'un mot)

Soit V un vocabulaire et soit $u = u_1 \cdots u_n$ un mot sur V.
La longueur de u est alors n, et on note $|u| = n$.

Remarque

En particulier, on a $|\varepsilon| = 0$.

Définitions (suite)

Définition (longueur d'un mot)

Soit V un vocabulaire et soit $u = u_1 \cdots u_n$ un mot sur V.
La longueur de u est alors n, et on note $|u| = n$.

Remarque

En particulier, on a $|\varepsilon| = 0$.

Définitions

- Pour $n \in \mathbb{N}$, V^n est l'ensemble des mots sur V de longueur n.

Définitions (suite)

Définition (longueur d'un mot)

Soit V un vocabulaire et soit $u = u_1 \cdots u_n$ un mot sur V.
La longueur de u est alors n, et on note $|u| = n$.

Remarque

En particulier, on a $|\varepsilon| = 0$.

Définitions

- Pour $n \in \mathbb{N}$, V^n est l'ensemble des mots sur V de longueur n.
  Par abus de notation, on identifie V et V^1.

Définitions (suite)

Définition (longueur d'un mot)

Soit V un vocabulaire et soit $u = u_1 \cdots u_n$ un mot sur V.
La longueur de u est alors n, et on note $|u| = n$.

Remarque

En particulier, on a $|\varepsilon| = 0$.

Définitions

- Pour $n \in \mathbb{N}$, V^n est l'ensemble des mots sur V de longueur n.
  Par abus de notation, on identifie V et V^1.
- V^+ est l'ensemble des mots sur V de longueur au moins 1.

Définitions (suite)

Définition (longueur d'un mot)

Soit V un vocabulaire et soit $u = u_1 \cdots u_n$ un mot sur V.
La longueur de u est alors n, et on note $|u| = n$.

Remarque

En particulier, on a $|\varepsilon| = 0$.

Définitions

- Pour $n \in \mathbb{N}$, V^n est l'ensemble des mots sur V de longueur n.
  Par abus de notation, on identifie V et V^1.
- V^+ est l'ensemble des mots sur V de longueur au moins 1.
- V^* est l'ensemble des mots sur V.

Définitions (suite)

Définition (longueur d'un mot)

Soit V un vocabulaire et soit $u = u_1 \cdots u_n$ un mot sur V.
La longueur de u est alors n, et on note $|u| = n$.

Remarque

En particulier, on a $|\varepsilon| = 0$.

Définitions

- Pour $n \in \mathbb{N}$, V^n est l'ensemble des mots sur V de longueur n.
  Par abus de notation, on identifie V et V^1.
- V^+ est l'ensemble des mots sur V de longueur au moins 1.
- V^* est l'ensemble des mots sur V.
- Pour $w \in V^*$ et $a \in V$, $|w|_a$ est le nombre d'occurrences de a dans w.

Exemples

Exemples

- Soient $V = \{a, b\}$ et $w = ababbb$.

Exemples

Exemples

- Soient $V = \{a, b\}$ et $w = ababbb$. Alors $|w| = 6$ et $|w|_b = 4$.

Exemples

Exemples

- Soient $V = \{a, b\}$ et $w = ababbb$. Alors $|w| = 6$ et $|w|_b = 4$.
- Soient $V = \{cd, dc\}$ et $w = cdcddc$.

Exemples

Exemples

- Soient $V = \{a, b\}$ et $w = ababbb$. Alors $|w| = 6$ et $|w|_b = 4$.
- Soient $V = \{cd, dc\}$ et $w = cdcddc$. Alors $|w| = 3$ et $|w|_{dc} = 1$.

Exemples

Exemples

- Soient $V = \{a, b\}$ et $w = ababbb$. Alors $|w| = 6$ et $|w|_b = 4$.
- Soient $V = \{cd, dc\}$ et $w = cdcddc$. Alors $|w| = 3$ et $|w|_{dc} = 1$.

Proposition

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} V^* &= \bigcup_{n \geq 0} V^n \\ V^+ &= \bigcup_{n > 0} V^n \end{aligned}$$

Concaténation

Définition

Soit V un vocabulaire, $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ deux mots de V^*.
La concaténation de u et v, notée $u.v$, est le mot de V^* défini par

$$u.v = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$$

Concaténation

Définition

Soit V un vocabulaire, $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ deux mots de V^*.
La concaténation de u et v, notée $u.v$, est le mot de V^* défini par

$$u.v = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$$

Exemple

Soient $u = bac$ et $v = aacb$.

Concaténation

Définition

Soit V un vocabulaire, $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ deux mots de V^*.
La concaténation de u et v, notée $u.v$, est le mot de V^* défini par

$$u.v = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$$

Exemple

Soient $u = bac$ et $v = aacb$. Alors $u.v = bacaacb$.

Concaténation

Définition

Soit V un vocabulaire, $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ deux mots de V^*.
La concaténation de u et v, notée $u.v$, est le mot de V^* défini par

$$u.v = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$$

Exemple

Soient $u = bac$ et $v = aacb$. Alors $u.v = bacaacb$.

Théorème

$(V^*, ., \varepsilon)$ est un monoïde (. associative, ε élément neutre).

Concaténation

Définition

Soit V un vocabulaire, $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ deux mots de V^*.
La concaténation de u et v, notée $u.v$, est le mot de V^* défini par

$$u.v = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$$

Exemple

Soient $u = bac$ et $v = aacb$. Alors $u.v = bacaacb$.

Théorème

$(V^*, ., \varepsilon)$ *est un monoïde (. associative,* ε *élément neutre).*

Notation

On pourra noter uv *au lieu de* $u.v$*.*

Concaténation (suite)

Proposition

Si $|u| = i$ *et* $|v| = j$*, alors* $|uv| = i + j$*.*

Concaténation (suite)

Proposition

Si $|u| = i$ *et* $|v| = j$*, alors* $|uv| = i + j$.

Définitions

Soient $v, z \in V^*$. On dit que v est un :

- sous-mot de z ssi $\exists u, w \in V^*$ tels que $z = u.v.w$

Concaténation (suite)

Proposition

Si $|u| = i$ *et* $|v| = j$, *alors* $|uv| = i + j$.

Définitions

Soient $v, z \in V^*$. On dit que v est un :

- sous-mot de z ssi $\exists u, w \in V^*$ tels que $z = u.v.w$
- préfixe de z ssi $\exists w \in V^*$ tel que $z = v.w$

Concaténation (suite)

Proposition

Si $|u| = i$ *et* $|v| = j$*, alors* $|uv| = i + j$*.*

Définitions

Soient $v, z \in V^*$. On dit que v est un :

- sous-mot de z ssi $\exists u, w \in V^*$ tels que $z = u.v.w$
- préfixe de z ssi $\exists w \in V^*$ tel que $z = v.w$
- suffixe de z ssi $\exists u \in V^*$ tel que $z = u.v$

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}^*$

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a, b\}^* \subseteq \{a, b\}^*$

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a, b\}^* \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{abab, ab, abba\} \subseteq \{a, b\}^*$

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a, b\}^* \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{abab, ab, abba\} \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a,b\}^*$
- $\{a,b\}^* \subseteq \{a,b\}^*$
- $\{abab, ab, abba\} \subseteq \{a,b\}^*$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a,b\}^* \qquad (\{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\})$

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a, b\}^* \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{abab, ab, abba\} \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^* \qquad (\{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\})$
- « Ensemble des programmes Python » $\subseteq$ Unicode*

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a, b\}^* \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{abab, ab, abba\} \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^* \qquad (\{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\})$
- « Ensemble des programmes Python » $\subseteq$ Unicode*

Remarque

On s'intéressera en TL à définir et reconnaître des sous-ensembles de V^*.

Comment définir un langage / un ensemble ?

Comment définir un langage / un ensemble ?

- Par extension
  - $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
  - $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

Comment définir un langage / un ensemble ?

- Par extension
  - $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
  - $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
- Par compréhension
  - On décrit les caractéristiques des éléments de l'ensemble
  - $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$

Comment définir un langage / un ensemble ?

- Par extension
  - $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
  - $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
- Par compréhension
  - On décrit les caractéristiques des éléments de l'ensemble
  - $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$
- Par induction structurelle
  - On explique comment construire les éléments de l'ensemble
  - Fréquemment utilisé en informatique
  - P est le **plus petit** ensemble (pour l'inclusion) tel que :
    - $0 \in P$, et
    - si $n \in P$ alors $n + 2 \in P$.

Définition par induction structurelle

Principe général : on définit un ensemble en spécifiant :

- Des cas de base : quels sont les éléments les « plus simples » de l'ensemble ?
- Des règles de construction : comment peut-on, en partant d'éléments de l'ensemble, en construire de nouveaux ?

Définition par induction structurelle

Principe général : on définit un ensemble en spécifiant :

- Des cas de base : quels sont les éléments les « plus simples » de l'ensemble ?
- Des règles de construction : comment peut-on, en partant d'éléments de l'ensemble, en construire de nouveaux ?

Exemples

Définitions inductives de V^* et $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

Définition par induction structurelle

Principe général : on définit un ensemble en spécifiant :

- Des cas de base : quels sont les éléments les « plus simples » de l'ensemble ?
- Des règles de construction : comment peut-on, en partant d'éléments de l'ensemble, en construire de nouveaux ?

Exemples

Définitions inductives de V^* et $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

V^* : **Base :** $\varepsilon \in V^*$
Induction : pour tout x de V, si $w \in V^*$ alors $xw \in V^*$

Définition par induction structurelle

Principe général : on définit un ensemble en spécifiant :

- Des cas de base : quels sont les éléments les « plus simples » de l'ensemble ?
- Des règles de construction : comment peut-on, en partant d'éléments de l'ensemble, en construire de nouveaux ?

Exemples

Définitions inductives de V^* et $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

V^* : **Base :** $\varepsilon \in V^*$
Induction : pour tout x de V, si $w \in V^*$ alors $xw \in V^*$

L : **Base :** $ab \in L$
Induction : si $w \in L$ alors $awb \in L$

Définition générale

Définition (Ensemble inductif)

Soit U un ensemble ; définir un ensemble $E \subseteq U$ par induction structurelle consiste à donner :

Définition générale

Définition (Ensemble inductif)

Soit U un ensemble ; définir un ensemble $E \subseteq U$ par induction structurelle consiste à donner :

- un ensemble non vide d'atomes $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq U$

Définition générale

Définition (Ensemble inductif)

Soit U un ensemble ; définir un ensemble $E \subseteq U$ par induction structurelle consiste à donner :

- un ensemble non vide d'atomes $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq U$
- un ensemble $K = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ de constructeurs inductifs, où $\kappa_i : U^{a_i} \to U$ et $a_i > 0$ pour tout i (a_i : arité de κ_i)

Définition générale

Définition (Ensemble inductif)

Soit U un ensemble ; définir un ensemble $E \subseteq U$ par induction structurelle consiste à donner :

- un ensemble non vide d'atomes $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq U$
- un ensemble $K = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ de constructeurs inductifs, où $\kappa_i : U^{a_i} \to U$ et $a_i > 0$ pour tout i (a_i : arité de κ_i)

E est alors le plus petit ensemble tel que :

- $B \subseteq E$
- $\forall i \in [1, m]$, si $(e_1, \ldots, e_{a_i}) \in E^{a_i}$, alors $\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}) \in E$

Définition générale

Définition (Ensemble inductif)

Soit U un ensemble ; définir un ensemble $E \subseteq U$ par induction structurelle consiste à donner :

- un ensemble non vide d'atomes $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq U$
- un ensemble $K = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ de constructeurs inductifs, où $\kappa_i : U^{a_i} \to U$ et $a_i > 0$ pour tout i (a_i : arité de κ_i)

E est alors le plus petit ensemble tel que :

- $B \subseteq E$
- $\forall i \in [1, m]$, si $(e_1, \ldots, e_{a_i}) \in E^{a_i}$, alors $\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}) \in E$

Exemples

V^*, listes, arbres, formules logiques, ...

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,$$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,$$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,$$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,$$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,$$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

- $aabb$: 1 seule façon de construire :

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u,v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u,v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

- $aabb$: 1 seule façon de construire : $a\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0$ $\qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0$ $\qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0$ $\qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

- $aabb$: 1 seule façon de construire : $a\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon \ = \ \kappa_1(\kappa_1(b_1, b_1), b_1)$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

- $aabb$: 1 seule façon de construire : $a\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon \ = \ \kappa_1(\kappa_1(b_1, b_1), b_1)$
- $abab$: 2 façons :

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

- $aabb$: 1 seule façon de construire : $a\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon \;=\; \kappa_1(\kappa_1(b_1, b_1), b_1)$
- $abab$: 2 façons : $a\,(b\,\varepsilon\,a\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon$ et $a\,\varepsilon\,b\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)$

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

- $aabb$: 1 seule façon de construire : $a\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon \;=\; \kappa_1(\kappa_1(b_1, b_1), b_1)$
- $abab$: 2 façons : $a\,(b\,\varepsilon\,a\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon$ et $a\,\varepsilon\,b\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)$
- $bbaaaabb$:

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0 \qquad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0 \qquad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0 \qquad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

- $aabb$: 1 seule façon de construire : $a\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon \ = \ \kappa_1(\kappa_1(b_1, b_1), b_1)$
- $abab$: 2 façons : $a\,(b\,\varepsilon\,a\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon$ et $a\,\varepsilon\,b\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)$
- $bbaaaabb$: 1 seule façon : $b\,(b\,\varepsilon\,a\,\varepsilon)\,a\,(a\,(a\,\varepsilon\,b\,\varepsilon)\,b\,\varepsilon)$

Fonction définie inductivement

Définition

Soit E un ensemble défini inductivement par l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K, et soit U' un ensemble quelconque.
Pour définir une fonction $f : E \rightarrow U'$, il suffit d'expliciter :

- les images des atomes $f(b_1), \ldots, f(b_n)$;
- la façon dont la fonction « interagit » avec les constructeurs : comment exprimer $f(\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}))$ en fonction de $f(e_1), \ldots, f(e_{a_i})$.

Fonction définie inductivement

Définition

Soit E un ensemble défini inductivement par l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K, et soit U' un ensemble quelconque.
Pour définir une fonction $f : E \rightarrow U'$, il suffit d'expliciter :

- les images des atomes $f(b_1), \ldots, f(b_n)$;
- la façon dont la fonction « interagit » avec les constructeurs : comment exprimer $f(\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}))$ en fonction de $f(e_1), \ldots, f(e_{a_i})$.

Exemple (Longueur d'un mot)

$|\_| : V^* \rightarrow \mathbb{N}$

- Cas de base : $|\varepsilon| = 0$
- Constructeurs inductifs : $|xw| = 1 + |w|$

Exemples

Soient les fonctions dl et $\mathrm{pa} : L_0 \to \mathbb{N}$ telles que $\forall w \in L_0$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{dl}(w) & = & |w|_a \\ \mathrm{pa}(w) & = & \max\{|x| \mid x \text{ préfixe de } w \wedge x \in \{a\}^*\} \end{array}$$

Exercice : définir les fonctions dl et pa par induction structurelle

Exemples

Soient les fonctions dl et $\mathrm{pa} : L_0 \to \mathbb{N}$ telles que $\forall w \in L_0$,

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{dl}(w) & = & |w|_a \\ \mathrm{pa}(w) & = & \max\left\{|x| \mid x \text{ préfixe de } w \wedge x \in \{a\}^*\right\}\end{array}$$

Exercice : définir les fonctions dl et pa par induction structurelle
L_0 est défini par 1 cas de base et 2 constructeurs donc 3 cas à considérer.

Exemples

Soient les fonctions dl et $\mathrm{pa} : L_0 \to \mathbb{N}$ telles que $\forall w \in L_0$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{dl}(w) & = & |w|_a \\ \mathrm{pa}(w) & = & \max\{|x| \mid x \text{ préfixe de } w \wedge x \in \{a\}^*\} \end{array}$$

Exercice : définir les fonctions dl et pa par induction structurelle
L_0 est défini par 1 cas de base et 2 constructeurs donc 3 cas à considérer.

dl

- $\mathrm{dl}(\varepsilon) = 0$
- $\forall u, v \in L_0,\ \mathrm{dl}(a\,u\,b\,v) = 1 + \mathrm{dl}(u) + \mathrm{dl}(v)$
- $\forall u, v \in L_0,\ \mathrm{dl}(b\,u\,a\,v) = 1 + \mathrm{dl}(u) + \mathrm{dl}(v)$

Exemples

Soient les fonctions dl et $\mathrm{pa} : L_0 \to \mathbb{N}$ telles que $\forall w \in L_0$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{dl}(w) & = & |w|_a \\ \mathrm{pa}(w) & = & \max\left\{|x| \mid x \text{ préfixe de } w \wedge x \in \{a\}^*\right\} \end{array}$$

Exercice : définir les fonctions dl et pa par induction structurelle
L_0 est défini par 1 cas de base et 2 constructeurs donc 3 cas à considérer.

dl

- $\mathrm{dl}(\varepsilon) = 0$
- $\forall u, v \in L_0,\ \mathrm{dl}(a\,u\,b\,v) = 1 + \mathrm{dl}(u) + \mathrm{dl}(v)$
- $\forall u, v \in L_0,\ \mathrm{dl}(b\,u\,a\,v) = 1 + \mathrm{dl}(u) + \mathrm{dl}(v)$

pa

- $\mathrm{pa}(\varepsilon) = 0$
- $\forall u, v \in L_0,\ \mathrm{pa}(a\,u\,b\,v) = 1 + \mathrm{pa}(u)$
- $\forall u, v \in L_0,\ \mathrm{pa}(b\,u\,a\,v) = 0$

Preuve par induction structurelle

Définition

Soit E un ensemble défini inductivement par l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K, et soit P une propriété sur E.
Pour montrer que $P(e)$ est vraie pour tout $e \in E$, on peut :

- montrer que $P(b_1), \ldots, P(b_n)$ sont vrais ;
- pour $i \in [1, m]$, montrer que si $P(e_1), \ldots, P(e_{a_i})$ sont tous vrais, alors $P(\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}))$ l'est également.

Preuve par induction structurelle

Définition

Soit E un ensemble défini inductivement par l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K, et soit P une propriété sur E.
Pour montrer que $P(e)$ est vraie pour tout $e \in E$, on peut :

- montrer que $P(b_1), \ldots, P(b_n)$ sont vrais ;
- pour $i \in [1, m]$, montrer que si $P(e_1), \ldots, P(e_{a_i})$ sont tous vrais, alors $P(\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}))$ l'est également.

Remarque

La preuve par induction structurelle est une généralisation de la preuve par récurrence :

- *Base :* 0
- *Constructeur : la fonction successeur* $s : n \mapsto n + 1$

Preuve par induction structurelle

Définition

Soit E un ensemble défini inductivement par l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K, et soit P une propriété sur E.
Pour montrer que $P(e)$ est vraie pour tout $e \in E$, on peut :

- montrer que $P(b_1), \ldots, P(b_n)$ sont vrais ;
- pour $i \in [1, m]$, montrer que si $P(e_1), \ldots, P(e_{a_i})$ sont tous vrais, alors $P(\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}))$ l'est également.

Remarque

La preuve par induction structurelle est une généralisation de la preuve par récurrence :

- *Base :* 0
- *Constructeur : la fonction successeur* $s : n \mapsto n + 1$

Mini-démo : Coq

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Propriété $P(w)$ sur L_0 : $w \in M_0$.
Par induction structurelle :

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Propriété $P(w)$ sur L_0 : $w \in M_0$.
Par induction structurelle :

- Base : $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b$. Ok

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Propriété $P(w)$ sur L_0 : $w \in M_0$.
Par induction structurelle :

- Base : $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b$. Ok
- Induction : 2 constructeurs κ_1 et κ_2

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Propriété $P(w)$ sur L_0 : $w \in M_0$.
Par induction structurelle :

- Base : $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b$. Ok
- Induction : 2 constructeurs κ_1 et κ_2
  - $\kappa_1(\_,\_)$:
    Soient u et v deux mots de L_0. Supposons $P(u)$ et $P(v)$, c.-à-d. $|u|_a = |u|_b$ et $|v|_a = |v|_b$.
    Alors : $|a\,u\,b\,v|_a \;=\; 1 + |u|_a + |v|_a \;=\; 1 + |u|_b + |v|_b \;=\; |a\,u\,b\,v|_b$

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Propriété $P(w)$ sur L_0 : $w \in M_0$.
Par induction structurelle :

- Base : $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b$. Ok
- Induction : 2 constructeurs κ_1 et κ_2
  - $\kappa_1(\_,\_)$:
    Soient u et v deux mots de L_0. Supposons $P(u)$ et $P(v)$, c.-à-d. $|u|_a = |u|_b$ et $|v|_a = |v|_b$.
    Alors : $|a\,u\,b\,v|_a \;=\; 1 + |u|_a + |v|_a \;=\; 1 + |u|_b + |v|_b \;=\; |a\,u\,b\,v|_b$
  - $\kappa_2(\_,\_)$:
    De la même façon :
    $|b\,u\,a\,v|_a \;=\; 1 + |u|_a + |v|_a \;=\; 1 + |u|_b + |v|_b \;=\; |b\,u\,a\,v|_b$

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Propriété $P(w)$ sur L_0 : $w \in M_0$.
Par induction structurelle :

- Base : $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b$. Ok
- Induction : 2 constructeurs κ_1 et κ_2
  - $\kappa_1(\_,\_)$:
    Soient u et v deux mots de L_0. Supposons $P(u)$ et $P(v)$, c.-à-d. $|u|_a = |u|_b$ et $|v|_a = |v|_b$.
    Alors : $|a\,u\,b\,v|_a \;=\; 1 + |u|_a + |v|_a \;=\; 1 + |u|_b + |v|_b \;=\; |a\,u\,b\,v|_b$
  - $\kappa_2(\_,\_)$:
    De la même façon :
    $|b\,u\,a\,v|_a \;=\; 1 + |u|_a + |v|_a \;=\; 1 + |u|_b + |v|_b \;=\; |b\,u\,a\,v|_b$

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Propriété $P(w)$ sur L_0 : $w \in M_0$.
Par induction structurelle :

- Base : $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b$. Ok
- Induction : 2 constructeurs κ_1 et κ_2
  - $\kappa_1(\_,\_)$:
    Soient u et v deux mots de L_0. Supposons $P(u)$ et $P(v)$, c.-à-d. $|u|_a = |u|_b$ et $|v|_a = |v|_b$.
    Alors : $|a\,u\,b\,v|_a \;=\; 1 + |u|_a + |v|_a \;=\; 1 + |u|_b + |v|_b \;=\; |a\,u\,b\,v|_b$
  - $\kappa_2(\_,\_)$:
    De la même façon :
    $|b\,u\,a\,v|_a \;=\; 1 + |u|_a + |v|_a \;=\; 1 + |u|_b + |v|_b \;=\; |b\,u\,a\,v|_b$

Exercice($\star$) Montrer que $M_0 \subseteq L_0$.