

Feuille de TD n.2 de IPD 2022-2023, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 2.1 Propriétés du MBS

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Montrer les résultats suivants.

1. Symétrie du mouvement brownien :

Le processus $(-B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

2. Invariance par translation du temps :

Pour tout $s \geq 0$ fixé, le processus $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

3. Renversement du temps :

Soit $T \in \mathbb{R}^+$ fixé: le processus défini par $W_t := B_T - B_{T-t}$, est un MBS sur $[0; T]$

4. Changement d'échelle :

Pour tout $c \neq 0$, le processus $(cB_{t/c^2})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

5. Inversion du temps :

Le processus X défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1/t}$ pour tout $t > 0$ est un mouvement brownien standard (on établira plus tard dans le cours que $\lim_{t \rightarrow +\infty} B_t/t = 0$ p.s., on pourra utiliser librement ce résultat ici).

Exercice 2.2 Comparaison de convergences.

1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a., montrer que si $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$$

alors X_n converge presque sûrement vers 0.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{Exp}(\log(n))$.

[2.1] Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.

[2.2] Montrer que $\mathbb{P}(|X_n| > 1) = 1/n$ et en déduire que X_n ne converge pas p.s.

Exercice 2.3 Tribus asymptotiques.

Soient A_1, A_2, \dots une collection d'événements et $\mathcal{A} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$ la tribu engendrée par ces événements. Un résultat standard de la théorie de la mesure montre que si $A \in \mathcal{A}$ alors il existe une suite d'événements C_1, C_2, \dots tels que

$$\forall n \geq 1, C_n \in \mathcal{A}_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A \Delta C_n) = 0$$

où $\mathcal{A}_n = \sigma(A_1, \dots, A_n)$ la tribu engendrée par A_1, \dots, A_n .

1. Montrer que si $A \in \mathcal{A}$ est indépendant de \mathcal{A}_n pour tout n alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. Soient X_1, X_2, \dots une suite de v.a. on note

$$\mathcal{H}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$$

la tribu engendrée par la suite à partir de X_{n+1} et on pose $\mathcal{H}_\infty = \bigcap_n \mathcal{H}_n$ que l'on appelle la tribu queue.

Montrer que si X_1, X_2, \dots sont indépendants alors pour tout $H \in \mathcal{H}_\infty$ on a $\mathbb{P}(H) = 0$ ou $\mathbb{P}(H) = 1$.

Exercice 2.4 Comportement trajectorien du mouvement brownien.

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ on considère la v.a. quotient décalé en temps

$$R_k = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_{n+k} - B_k}{\sqrt{n}}.$$

Montrer qu'elle est indépendante de $\mathcal{A}_k = \sigma(B_u, u \leq k)$.

2. Soit $R = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}}$, montrer que pour tous k on a $R = R_k$ en loi et en déduire qu'en loi $R = R_\infty$ la limite des R_k qui existe et est indépendante de \mathcal{A}_k pour tous k .

3. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(R = +\infty) = 1$.

4. Montrer que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty$.