

Fiche d'exercices n°4

Exercice 1. Suite de l'exercice 2 de la fiche 3, en R.

1. On considère l'exemple de référence des durées de vie d'ampoules :

91.6 35.7 251.3 24.3 5.4 67.3 170.9 9.5 118.4 57.1

On admet que ces données sont issues d'une loi exponentielle $\exp(\lambda)$. Calculer l'estimation de maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{x}_n$ et l'estimation optimale $\hat{\lambda}'_n = (n-1)/\sum_{i=1}^n x_i$. Calculer l'intervalle de confiance bilatéral de seuil α pour λ , en prenant comme seuils 50%, 10%, 5% et 1%. Que remarquez-vous ?

2. Simuler $m = 1000$ échantillons de taille $n = 50$ d'une loi $\exp(\lambda)$, avec $\lambda = 10$. Calculer le pourcentage de fois où l'intervalle de confiance bilatéral de seuil α pour λ contient la vraie valeur du paramètre λ , en prenant comme seuils 50%, 10%, 5% et 1%.
3. Simuler $m = 100$ échantillons de taille $n = 5$ d'une loi $\exp(\lambda)$, avec $\lambda = 10$. Pour chaque échantillon, calculer les valeurs de $\hat{\lambda}_n$. On obtient ainsi un échantillon de m valeurs de $\hat{\lambda}_n$, notées $\hat{\lambda}_n^{(1)}, \dots, \hat{\lambda}_n^{(m)}$. Représenter un histogramme de cet échantillon, en mettant en évidence la vraie valeur de λ et la moyenne des valeurs de $\hat{\lambda}_n$ obtenues. Calculer une évaluation du biais de l'estimateur $\hat{\lambda}_n$, donnée par $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\lambda}_n^{(j)} - \lambda)$. En augmentant progressivement n , vérifier que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement sans biais.

De la même manière, évaluer l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\lambda}_n$.

De la même manière, évaluer le biais et l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\lambda}'_n$.

Exercice 2. Un conflit oppose un aéroport à une association de riverains au sujet des nuisances sonores causées par les avions. La législation prévoit que l'aéroport doit indemniser les riverains si le niveau de bruit moyen perçu dépasse la limite tolérée de 80 décibels. Des experts ont été chargés de mettre en place une procédure permettant de déterminer si le niveau limite est dépassé ou non.

1. Montrer que le problème peut se poser sous la forme d'un test d'hypothèses. Expliquer pourquoi le choix des hypothèses nulle et alternative peut varier suivant que les experts sont mandatés par l'aéroport ou par les riverains.
2. Les experts ont relevé les niveaux de bruit perçus dans la zone pour le passage de $n = 100$ avions. On admet que ces niveaux sont distribués selon une loi normale. Le niveau moyen observé est $\bar{x}_n = 81.6$ db et l'écart-type observé est $s'_n = 7$ db. Au vu de ces mesures, les riverains demandent une indemnisation, mais l'aéroport prétend que le niveau moyen observé n'est pas suffisamment supérieur à 80 db pour pouvoir conclure avec une confiance de 95 % que le niveau limite toléré est dépassé. Qu'en pensez-vous ?