Feuille 9 : minimisation au sens des moindre carrés

Exercice

On considère une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m > n$. On suppose $\operatorname{Ker} M = \{0\}$ (ou de manière équivalente $\dim(\operatorname{Im} M) = n$).

Etant donné un vecteur $g \in \mathbb{R}^m$, le problème $M\,x = g$ n'admet généralement pas de solution $x \in \mathbb{R}^n$ car le nombre d'inconnues n du système linéaire correspondant est strictement inférieur au nombre d'équations m. Cependant, nous allons montrer qu'il existe une unique solution *au sens des moindre carrés*, définie comme la solution du problème de minimisation suivant :

$$\text{trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \; \|M\,x - g\|_2^2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|M\,y - g\|_2^2. \tag{1}$$

1. Montrer que les *équations normales*

$$M^T\,M\,x = M^T\,g \tag{2}$$

admettent une solution unique $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$\|M\,y - g\|_2^2 = (y-x)^T\,M^T\,M\,(y-x) - x^T\,M^T\,M\,x + \|g\|_2^2,$$

où x désigne la solution de (2).

3. En déduire que le problème de minimisation (1) admet x comme unique solution.

4. Application : on considère quatre points du plan dont les abscisses α_i et ordonnées β_i sont données par :

$$(\alpha_1, \beta_1) = (-1, -1), \quad (\alpha_2, \beta_2) = (-2, 2), \quad (\alpha_3, \beta_3) = (2, 1), \quad (\alpha_4, \beta_4) = (-2, 4).$$

On souhaite déterminer la droite $\beta = x_2\,\alpha + x_1$ qui constitue la meilleure approximation linéaire des données (α_i, β_i) au sens des moindres carrés. Pour cela, on cherche $x = (x_1, x_2)^T$ qui minimise

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\, \beta_i - (x_2\,\alpha_i + x_1)\, \right)^2.$$

Ecrire le problème sous la forme (1) en explicitant la matrice $M \in M_{4,2}(\mathbb{R})$ et le vecteur $g \in \mathbb{R}^4$. Calculer la solution x en résolvant les équations normales (2).

5. Déterminer en fonction de m et n le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires nécessaires au calcul de la matrice et du second membre des équations normales (2). Lorsque n et m tendent vers l'infini, donner un équivalent du coût de la résolution de (1) en résolvant les équations normales par la méthode de Cholesky.