TD-7-proba

December 3, 2020

- rédacteurs:
  - Blasiak Quentin
  - Youssef benhachem
  - Avare Thomas
- relecteurs:
  - Adnet Chloé

---

1 Questions de cours:

- Soit X une variable aléatoire, si X admet un moment d'ordre 2, Alors:

  $V(X) : E((X - E(X)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre μ (moyenne) et σ^2 (variance), noté $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Alors la densité de probabilité associé est:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En particulier,

$$\mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2 Exercice 1:

Solution proposé par Avare Thomas.

2.1 *Question 1:*

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
E(e^{tX}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-tx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\overbrace{2tx - x^2}^{-((x-t)^2+t^2}}{2}}\, dx \\
&= \frac{e^{t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-t)^2}\, dx \\
&= e^{t^2}
\end{aligned}
$$

Donc:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = E(e^{tX}) = e^{t^2}}$$

2.2 *Question 2:*

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\phi'(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{tx} e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{tx} e^{-x^2/2} dx
\end{aligned}
$$

Donc

$$\phi'(0) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = E(X)$$

De même pour $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\phi"(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(e^{tx} e^{-x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(e^{tx} e^{-x^2} \right) dx
\end{aligned}
$$

Donc

$$\phi"(0) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = E(X^2)$$

et d'autre part pour $t \in \mathbb{R},\ \phi'(t) = te^{\frac{t^2}{2}}$ et $\phi"(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 + 1)$

Donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \phi"(0) - (\phi'(0))^2 = 1$

$$\textit{Donc}\ \boxed{V(X) = 1}$$

2.3 *Question 3:*

Soit $t \in \mathbb{R}$, Alors le développement en série entière de l'exponentielle fournit:

$\phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \frac{t^{2n}}{2^n n!}$

Puis en dérivant 4 fois, on a: $E(X^4) = \phi^{(4)}(0)$

pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi^{(4)}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\frac{t^{2n-4}}{2^n n!}$

Puis $\phi^{(4)}(0) = \frac{4\times3\times2\times1}{2^2 2!} = 3$ (premier terme pour $n = 2$, les autres sont nuls)

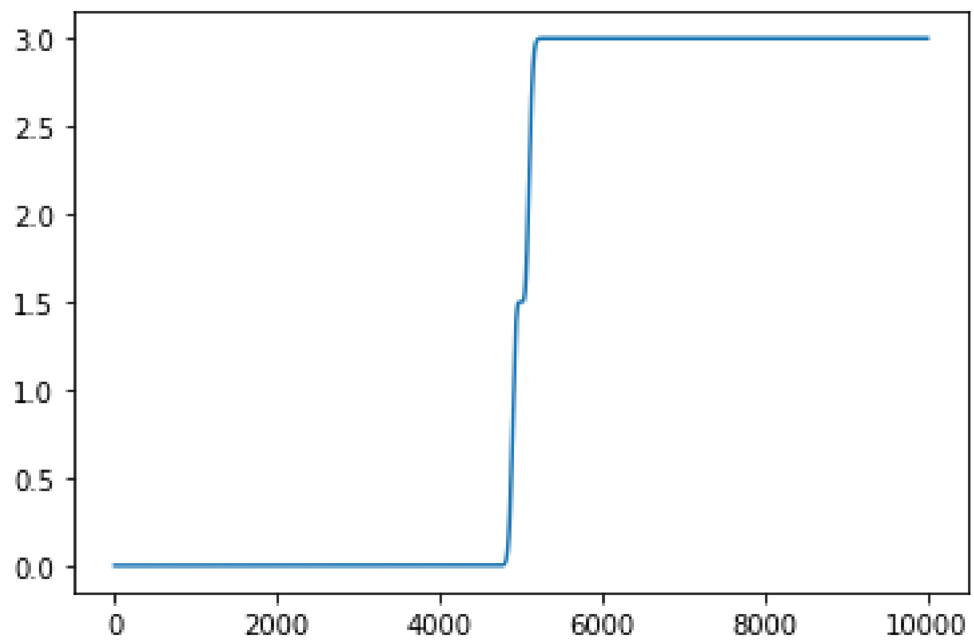
Finalement:

$$\boxed{E(X^4) = 3}$$

[8]:
```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return (1/math.sqrt(2*np.pi))*math.e**(-x**2/2)

def moment_n(n, borne):
    """simplement la méthode d'approximation de l'intégrale par la méthode des␣
 ↪réctangles"""
    x = np.linspace(-borne,borne, borne**2)
    mean_tab =[]
    mean = 0
    for i in x:
        mean += i**n*f(i)*2/borne
        mean_tab.append(mean)
    return(mean), mean_tab

print(moment_n(4, 100)[0])
plt.plot(moment_n(4, 100)[1])
```

```
2.9997000000000047
```

[8]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb17a298f10>]
```



3 Exercice 2:

solution propose par Quentin Blaziak.

3.1 *Question 1:*

$E[X] = E[1_{(U<1/3)}V + 1_{(U\geq 2/3)}(1+V)]$

Or comme U et V sont indépendants :

$E[X] = E[1_{(U<1/3)}]E[V] + E[1_{(U\geq 2/3)}](E[V]+1)$

Ainsi :

$$\boxed{E[X] = \frac{2}{3}} \tag{1}$$

De plus on a :

$E[X^2] = E[1_{(U<1/3)}(V^2) + 1_{(U\geq 2/3)}(1+V)^2 + 2\cdot 1_{(U<1/3)}1_{(U\geq 2/3)}V(1+V)]$

$E[X^2] = E[1_{(U<1/3)}]E[V^2] + E[1_{(U\geq 2/3)}](E[V^2]+2E[V]+1) = \frac{8}{9}$

Finalement :

$$\boxed{V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{4}{9}} \tag{2}$$

3.2 *Question 2:*

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(X \leq x) = \frac{1}{3}(P(V \leq x) + P(1 + V \leq x))$

Car U et V indépendants

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } X = 0 \\ \frac{1}{3}X + \frac{1}{3} & \text{si } X \in]0;1] \\ \frac{1}{3}(1 + X - 1) + \frac{1}{3} & \text{si } X \in [1;2] \\ 1 & \text{si } X > 2 \end{cases}$$

En regroupant, on obtient :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{1}{3}(X + 1) & \text{si } X \in [0;2] \\ 1 & \text{si } X > 2 \end{cases}} \tag{3}$$

3.3 *Question 3:*

[18]:
```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#N <- sample(1:3, n, replace = TRUE): génère n nombre entre 1 et 3 (inclu),␣
↪replace=TRUE
#indique qu'on peut avoir repetition
def N():
    return [random.randint(1,3) for _ in range(100000)]


#runif(n): génère aléatoirement des réels entre 0 et 1 de manière uniforme
def x(N):
    unif = [random.random() for _ in range(100000)]
    x_list = []
    for i in range(100000):
        x_list.append( (N[i]==3) + (N[i] != 1)*unif[i] )
    return x_list

#on définit le moment d'ordre n d'un ensemble de valeurs, ici représenté par␣
↪une liste
def moment_n(n, liste):
    """moment d'ordre n d'un ensemble de valeur"""
    taille_liste = len(liste)
    res = 0
```

```
    for i in range(taille_liste):
        res += liste[i] ** n
    return res / taille_liste


N = N()
x = x(N)
éspérance = moment_n(1, x)
variance = moment_n(2, x) - éspérance ** 2


print("l'éspérance approchée vaut: ", éspérance)
print("la variance approchée vaut: ", variance)
```

```
l'éspérance approchée vaut:  0.6661525803293472
la variance approchée vaut:  0.44458248911282655
```

---

4 Exercice 3:

Solution proposée par Thomas Avare.

4.1 *Question 1:*

$U \sim \mu(0,1) \implies X(\Omega) = [1, e]$

Donc pour $t \in [1, e]$, $F(t) = P(X \leq t) = P(e^U \leq t) = P(U \leq Ln(t)) = Ln(t)$

Donc

$$\boxed{F(t) = Ln(t)}$$

description de la fonction:

- Pour $t \in [-\infty, 0]$, cette fonction n'est pas définie.
- Pour $t \in]0, +\infty]$, la fonction est croissante, négative sur $]0, 1]$, positive sinon.
- F est dérivable sur $[1, e]$, donc X admet une densité de probabilité f, à savoir, $\forall t \in [1, e], f(t) = F'(t) = \frac{1}{t}$.
- $E(X) = \int_1^e tf(t)dt = \int_1^e dt = e - 1$
- $E(X^2) = \int_1^e t^2 f(t)dt = \int_1^e tdt = \frac{e^2-1}{2}$
- Donc $V(X) = \frac{e^2-1}{2} - (e-1)^2 = -\frac{e^2}{2} + 2e + \frac{1}{2}$

4.2 *Question 2:*

$U \sim \mu(0,1)$.

Soit $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \int_{\mathbb{R}} e^{sx} g(x)dx \text{ où g est la fonction de densité de U} \\ &= \int_1^e e^{sx}dx \\ &= \frac{e - e^s}{s} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\phi'(\alpha) = \frac{e^\alpha - \alpha e^\alpha - e}{\alpha^2}}$$

- $Y = X^\alpha L(X) = Ue^{\alpha U}$ et $\phi'(\alpha) = \left(E(e^{\alpha U})\right)' = E(Ue^{\alpha U}) = E(Y)$

Donc

$$\boxed{E(Y) = \frac{e^\alpha - \alpha e^\alpha - e}{\alpha^2}}$$

---

5 Exercice 4:

Solution proposé par Thomas Avare.

5.1 *Question 1:*

Soit $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F(t) = P(X \leq t) &= \int_{-\infty}^t f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^t \zeta \mathbb{1}_{[0,1]}(\zeta) + \frac{1}{2}e^{1-\zeta}\mathbb{1}_{[1,+\infty]}(\zeta)d\zeta \\ &= \int_0^t \zeta \mathbb{1}_{[0,1]}(\zeta) + \frac{1}{2}e^{1-\zeta}\mathbb{1}_{[1,+\infty]}(\zeta)d\zeta \\ &= \begin{cases} \int_0^t \zeta d\zeta \text{ si } t \leq 1 \\ \int_1^t \frac{1}{2}e^{1-\zeta}d\zeta \text{ si } t \geq 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}Min(1, t^2) + \frac{1}{2}(1 - e^{1-t})Max(0, sgn(t-1)) \\ &= \frac{1}{2}Min(1, t^2) + \frac{1}{2}Max(0, (1 - e^{1-t})) \text{ car } sgn(t-1) = sgn(1 - e^{1-t}) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \frac{1}{2}Min(1, t^2) + \frac{1}{2}Max(0, (1 - e^{1-t}))}$$

- pour X suivant une loi exponentielle, sa fonction de répartition est $t \longmapsto 1-e^{-t}$.

$Y_1 = e^{-X/2}$, soit $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq t) &= P(e^{-X/2} \leq t) \\ &= P(-\frac{X}{2} \leq Ln(t)) \\ &= P(X \geq -Ln(t^2)) \\ &= 1 - P(X \leq -Ln(t^2)) \\ &= 1 - F(-Ln(t^2)) \\ &= e^{L(nt^2)} = t^2 = F_1(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall t \in [0,1], F_1(t) = t^2}$$

5.2 *Question 2:*

$P(Y_2 \leq t) = P(1+X \leq t) = P(X \leq t-1) = 1 - e^{1-t} = F_2(t), \ \forall t \in [1, +\infty]$

- Déjà, pour $t \geq 0$, $\begin{cases} F_1(t) = Min(1, t^2) \\ F_2(t) = Max(0, 1-e^{1-t}) \end{cases}$ et pour $t < 0, F_1(t) = F_2(t) = 0$

En posant $p = \frac{1}{2}$, on retrouve, pour $t \geq 0$

$$pF_1(t) + (1-p)F_2(t) = \frac{1}{2}Min(1,t^2) + \frac{1}{2}Max(0, 1-e^{1-t}) = F(t)$$

et pour $t < 0$,

$$pF_1(t) + (1-p)F_2(t) = 0 = F(t)$$

Finalement

$$\boxed{\text{pour } p = \frac{1}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ pF_1(t) + (1-p)F_2(t) = F(t)}$$

5.3 *Question 3:*

- par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(V\sqrt{U}) + E((1-V)(1+X))$.
- comme V et $\sqrt{U}$ sont indépendantes et que $|V|$ et $|\sqrt{U}|$ sont d'éspérance finies, alors on a:

$$E(V\sqrt{U}) = E(V)E(\sqrt{U}) = p\int_0^1 \sqrt{(t)}dt = \frac{1}{3}$$

- D'après le lemme des coalitions $1-V$ et $1+X$ sont indépendantes et pour les mêmes raisons qu'avant:

$$
\begin{aligned}
E((1-V)(1+X)) &= E(1_V)E(1+X) \\
&= (E(1)-E(V))\,E(1+X) \\
&= (1-p)\int_0^{+\infty}(1+t)e^{-t}dt \\
&= (1-p)\left[\int_0^{+\infty}e^{-t}dt+\int_0^{+\infty}te^{-t}dt\right] \\
&\underset{IPP}{=} 2(1-p) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$\boxed{E(Y)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}}$$

- D'autre part:

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= E((V\sqrt{U}+(1-V)(1+X))^2) \\
&= E(V^2U+2V\sqrt{U}(1_V)(1+X)+(1-V)^2(1+X)^2) \\
&= E(V^2)E(U)+2E(V\sqrt{U})E((1-V)(1+X))+E((1-V)^2)E((1+X)^2) \\
&= \frac{1}{4}+2\frac{1}{3}+(1-p)\int_1^{+\infty}(1+x)^2e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{2} \\
&= \frac{41}{12}
\end{aligned}
$$

Soit $t\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
P(Y\leq t) &= P(V\sqrt{U}+(1-V)(1+X)\leq t) \\
&= P(V=1)P(V\sqrt{U}+(1-V)(1+X)\leq t|V=1)+P(V=0)P(V\sqrt{U}+(1-V)(1+X)\leq t|v=0) \\
&= pP(V\sqrt{U}\leq t)+(1-p)P(1+X\leq t) \\
&= \frac{1}{2}\begin{cases} t^2\ si\ 0<t<1 \\ 1\ si\ t\geq 1 \\ 0 sinon\end{cases} +\frac{1}{2}\begin{cases} 1-e^{t-1}\ si\ t\geq 1 \\ 0\ sinon\end{cases} \\
&= \left(\frac{1}{2}Min(1,t^2)+\frac{1}{2}Max(0,1-e^{1-t})\right)1\!\!1_{[0,+\infty]}(t) \\
&= F(t)1\!\!1_{[0,+\infty]}(t)
\end{aligned}
$$

Donc la fonction de répartition de Y est:

$$\boxed{F(t)=\frac{1}{2}Min(1,t^2)+\frac{1}{2}Max(0,(1-e^{1-t})),\ t\geq 0}$$