Examen de “Processus Stochastiques et Applications Financières”

Durée: 3h00

ENSIMAG 2A/IF, 17 décembre 2020

La notation dépendra grandement de la qualité de la rédaction. Les questions étoilées sont plus longues ou plus difficiles.

Problème: modèle de taux d’intérêt stochastique, bis repetita.

Dans ce problème on se replace dans le modèle de taux stochastique à temps discret déjà étudié dans le DM. Mais on va explorer des questions différentes. Nous allons dans un premier temps redémontrer d’une façon différente la formule donnant le prix d’un swap à m périodes (questions 1) à 5)). Puis nous allons nous pencher sur la notion de contrat future (question 6) à 15)).

On rappelle les contours du modèle.

Un horizon temporel $N \in \mathbb{N}^*$ est donné. On a un processus de taux d’intérêt $R = (R_n)_{0\leq n\leq N-1}$ défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$. On suppose que $|\Omega| < \infty$, que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et que R est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. La mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ doit être vue comme une mesure de probabilité ”risque-neutre”. La signification du processus R est la suivante: 1 euro placé à la banque à un instant $0 \leq n \leq N-1$, vaudra $(1+R_n)$ euros à l’instant $n+1$. Ainsi 1 euro placé à la banque à l’instant $n = 0$ vaudra $(1 + R_0)\dots(1 + R_{n-1})$ euros en $1 \leq n \leq N$.

On suppose que $R_n > -1$ (p.s.) pour tout $0 \leq n \leq N-1$. On introduit le processus d’actualisation $D = (D_n)_{0\leq n\leq N}$ défini par

$$D_0 = 1 \quad \text{et} \quad D_n = \frac{1}{(1 + R_0)\dots(1 + R_{n-1})}, \ \ \forall 1 \leq n \leq N.$$

Ainsi pour toute v.a. X exprimée en euros, on appelle D_nX la valeur actualisée (en n) de X.

On admet qu’il n’y a pas de possibilité d’arbitrage dans ce modèle.

On appelle zéro-coupon de maturité $0 \leq m \leq N$ un titre émis par la banque et payant 1 euro à l’instant m. On note son prix à l’instant $0 \leq n \leq m$ par $B_{n,m}$.

On appelle ”actif” une entité financière dont le prix au cours du temps est donné par un processus $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ adapté. C’est en général un produit portant sur le taux d’intérêt R. Par analogie avec le chapitre 5 du cours on considère que le processus $(D_nS_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale sous $\tilde{\mathbb{P}}$.

On suppose qu’on a accès à la formule de pricing suivante: soit une variable aléatoire $\mathcal{F}_m$-mesurable, pour $0 \leq m \leq N$, le prix à l’instant $0 \leq n \leq m$ d’un produit dérivé payant h à la maturité m est donné par

$$\tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{D_m}{D_n} h \,|\, \mathcal{F}_n\Big].$$

On utilisera cette formule dans les questions 6) à 15) mais il est “interdit” de l’utiliser dans les questions 1) à 5).

Soit $0 \leq m \leq N-1$. On considère un contrat payant R_m à l’instant $m+1$. On note P_n son prix à l’instant n. On va dans un premier temps chercher à montrer que

$$P_n = B_{n,m} - B_{n,m+1}. \tag{1}$$

1) On suppose que $P_n > B_{n,m} - B_{n,m+1}$. Amorcer une stratégie d'arbitrage en prenant position en n sur trois entités financières différentes (à acheter ou vendre).

2) Faire le bilan de ce qu'on perçoit ou paye en m et mettre à jour la stratégie.

3) Faire le bilan en $m+1$ et conclure qu'il y a arbitrage.

4*) On suppose que $P_n < B_{n,m} - B_{n,m+1}$. Construire un arbitrage et conclure qu'on a (1).

On rappelle la notation

$$F_{n,m} = \frac{B_{n,m}}{B_{n,m+1}} - 1 = \frac{B_{n,m} - B_{n,m+1}}{B_{n,m+1}},$$

du DM (taux forward de maturité m en n).

5) Soit $1 \leq m \leq N$ et $r > 0$ une constante. Montrer que le prix du "swap de taux d'intérêt à m périodes", produit payant à tout instant $1 \leq n \leq m$ le flux

$$r - R_{n-1},$$

est donné à l'instant $n = 0$ par

$$\mathrm{Swap}_m = \sum_{n=1}^{m} B_{0,n}(r - F_{0,n-1}).$$

On se penche dans la suite du problème sur la notion de contrat future.

Soit $0 \leq m \leq N$. Un investisseur qui prend une position longue en $0 \leq n \leq m-1$ sur un contrat future d'échéance m reçoit à tout instant $k+1$, pour $n \leq k \leq m-1$, des flux $\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}$ (noter qu'on ne contrôle pas le signe de ces flux). En échange il promet d'acquérir un actif S à son prix de marché S_m à l'échéance m (sauf s'il sort du contrat avant son terme, cf question 9)).

Le processus $(\mathrm{Fut}_{n,m})_{0 \leq n \leq m}$ est supposé adapté et vérifie les deux points suivants:

i) $\mathrm{Fut}_{m,m} = S_m$

ii) Pour tout $0 \leq n \leq m-1$ on a

$$\sum_{k=n}^{m-1} \tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{D_{k+1}}{D_n}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}) \,|\, \mathcal{F}_n\Big] = 0. \tag{2}$$

On se penche en premier lieu sur la signification financière d'un tel contrat. On fixe jusqu'à nouvel ordre $0 \leq n < m \leq N$.

6) Supposons qu'un investisseur prenne une position longue en n sur un contrat future d'échéance m et aille jusqu'au bout du contrat. Quelle somme d'argent reçoit-il juste avant d'acquérir l'actif au prix S_m ? Finalement il acquiert l'actif mais a déboursé une certaine somme. Laquelle ?

7) Combien lui a coûté de prendre cette position longue dans le contrat future ?

8) Synthétiser les réponses aux questions 6) et 7) par une phrase du type:
" En prenant une position longue en n sur un contrat future d'échéance m, l'investisseur se garantit en n, au coût [à compléter], un prix d'achat [à compléter] de l'actif S en m."

9*) Ainsi il est naturel de comparer le contrat future au contrat forward de prix d'exercice $\mathrm{For}_{n,m}$ étudié dans le DM. Quelle est la valeur à tout instant $n \leq n' \leq m-1$ du contrat future considéré ?

Comparer à la valeur en n' du contrat forward d'échéance m et de prix d'exercice $\mathrm{For}_{n,m}$ (on rappelle qu'en $n' = n$ cette valeur est nulle).

Expliquer alors pourquoi il est plus facile de sortir à tout moment d'un contrat future (de quitter sa position).

Pour la fin du problème $0 \leq m \leq N$ est toujours fixé mais n varie. On va chercher à montrer que le processus $(\mathrm{Fut}_{n,m})_{0\leq n\leq m}$ existe et qu'on a

$$\mathrm{Fut}_{n,m} = \tilde{\mathbb{E}}[S_m \,|\, \mathcal{F}_n], \quad \forall 0 \leq n \leq m \tag{3}$$

(ce qui implique son unicité).

10) Soit $0 \leq n \leq m$ et soit $n \leq k \leq m-1$. Montrer que

$$\tilde{\mathbb{E}}\big[D_{k+1}\{\tilde{\mathbb{E}}(S_m|\mathcal{F}_{k+1}) - \tilde{\mathbb{E}}(S_m|\mathcal{F}_k)\} \;\big|\; \mathcal{F}_n\big] = 0.$$

11) En déduire que le processus $(\tilde{\mathbb{E}}[S_m \,|\, \mathcal{F}_n])_{0\leq n\leq m}$ satisfait les points i) et ii) de la définition de $(\mathrm{Fut}_{n,m})_{0\leq n\leq m}$ (et préciser pourquoi il est en outre adapté).

On a donc prouvé l'existence de $(\mathrm{Fut}_{n,m})_{0\leq n\leq m}$ satisfaisant les points i) et ii). Maintenant on va prouver que si un processus $(\mathrm{Fut}_{n,m})_{0\leq n\leq m}$ satisfait les points i) et ii), cela ne peut être rien d'autre que $(\tilde{\mathbb{E}}[S_m \,|\, \mathcal{F}_n])_{0\leq n\leq m}$.

12) Soit $(\mathrm{Fut}_{n,m})_{0\leq n\leq m}$ adapté satisfaisant les points i) et ii) et soit $0 \leq n \leq m-2$. Montrer que

$$\sum_{k=n}^{m-1} \tilde{\mathbb{E}}\big[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}) \,|\, \mathcal{F}_n\big] - \sum_{k=n+1}^{m-1} \tilde{\mathbb{E}}\big[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}) \,|\, \mathcal{F}_{n+1}\big] = 0. \tag{4}$$

13) En déduire que

$$\tilde{\mathbb{E}}\big[D_{n+1}(\mathrm{Fut}_{n+1,m} - \mathrm{Fut}_{n,m}) \,|\, \mathcal{F}_n\big] = 0, \quad \forall 0 \leq n \leq m-2.$$

Indication: On pourra prendre l'espérance conditionnellement à $\mathcal{H}$ de (4), avec $\mathcal{H}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$ à choisir de façon adéquate.

14) En déduire que $\tilde{\mathbb{E}}\big[\mathrm{Fut}_{n+1,m} \,|\, \mathcal{F}_n\big] = \mathrm{Fut}_{n,m}$ pour tout $0 \leq n \leq m-2$. Montrer que c'est aussi vrai pour $n = m-1$.

15) En déduire la nature du processus $(\mathrm{Fut}_{n,m})_{0\leq n\leq m}$ et conclure qu'on a (3).