Marché obligataire

Le marché obligataire est le compartiment du marché boursier où s'échangent les obligations, c'est-à-dire des titres de créance à moyen ou long terme émis par des entreprises privées, des collectivités ou des Etats, comportant une date d'échéance (généralement la date à laquelle l'emprunt est remboursé). Selon les statistiques publiées par la Banque de France[1], l'encours de titres de dettes émis par les émetteurs résidents français s'élève fin mars 2021 à 4 485 milliards d'euros, répartis à peu près équitablement entre les administrations publiques (en particulier l'Etat) et les émetteurs privés (essentiellement les banques).

Tableau 1 : Emission de titres de dette par secteur (en Mds €)

	Encours brut Fin mars 2021	Emissions nettes T1 2021	Emissions nettes Cumul 4 trim.
Sociétés non financières	699	5	64
Administrations publiques *dont Etat*	2 400 *2 095*	90 *62*	295 *191*
Banques	1 184	-8	27
Institutions financières non monétaires	202	1	13
Total	**4 485**	**88**	**399**

1. Principales caractéristiques des emprunts obligataires

Les caractéristiques de l'obligation sont définies lors de l'émission dans un **prospectus d'émission** qui constitue un document contractuel visé par l'AMF. A titre d'illustration, cette note pédagogique renvoie le lecteur au prospectus d'émission du Crédit Agricole 2007-2018. On distingue notamment :

1.1. Valeur nominale[2] (*par value*)

Les emprunts obligataires sont divisés en un certain nombre d'obligations (*bonds*) conférant les mêmes droits de dette pour une même fraction d'emprunt. La valeur nominale ou pair (*par value*) d'une obligation est le montant de référence utilisé pour le calcul des intérêts versés (coupons). Il s'agit souvent d'un multiple de 1€. Dans les cas les plus simples, la valeur nominale correspond au montant que l'emprunteur reçoit et à ce qu'il rembourse à l'obligataire.

Dans le cas du Crédit Agricole, l'emprunt est constitué de 450 millions d'obligations d'une valeur de 1€ chacune, soit un montant de l'émission de 450 millions d'euros (hors surallocation).

1.2. Prix d'émission (issue price)

Le prix d'émission est le prix auquel l'emprunt est émis, c'est-à-dire le prix que les souscripteurs paient pour acheter une obligation. Il peut être supérieur à la valeur nominale (émission au-dessus du pair), inférieur (émission en-dessous du pair) ou encore égal à la valeur nominale (émission au pair). La différence entre le prix d'émission et la valeur nominale représente la prime d'émission.

Dans le cas du Crédit Agricole, le prix d'émission est de 100,262% de la valeur nominale, soit 1,00262 euro par obligation. On constate donc une prime d'émission en faveur de l'émetteur de 0,00262 € par titre qui a pour conséquence de réduire le rendement du titre.

[1] https://www.banque-france.fr/statistiques/credit/endettement-et-titres/emission-et-detention-de-titres-francais
[2] Valeur faciale ou pair

1.3. L'amortissement (Amortization, repayment)

Le remboursement du principal d'un emprunt obligataire peut soit intervenir en totalité à l'échéance de l'emprunt (amortissement de type in fine), ou être étalé sur la durée de l'emprunt. Dans ce dernier cas, l'étalement peut se faire soir par tranches égales (amortissement constant), soit par périodicité constante. Comme pour l'émission, le remboursement peut se faire soit à la valeur nominale (au pair), soit à un prix inférieur ou supérieur (avec une prime de remboursement).

A noter que l'emprunt peut également être remboursé par anticipation, soit par ramassage en bourse (les actions sont alors rachetées au cours observé sur le marché), soit par remboursement anticipé. Dans ce dernier cas, le contrat doit intégrer une clause de remboursement anticipé. Le remboursement anticipé au gré de l'émetteur est constitutif d'une option d'achat sur les obligations à des conditions fixées à l'avance (prix et maturité). Le remboursement au gré du souscripteur est constitutif d'une option de vente sur les obligations à des conditions fixées à l'avance.

Dans le cas du Crédit Agricole, les obligations sont amorties en totalité le 26 février 2018 par remboursement au pair. Il s'agit donc d'un amortissement de type in fine. A noter qu'une clause de remboursement anticipé au gré de l'émetteur existe. Celui-ci a la possibilité de rembourser tous les titres au pair dès le 26 février 2012, puis tous les trimestres de chaque année. Cette option d'achat sera exercée si les taux diminuent car dans ce cas le Crédit Agricole rachètera sa dette pour 100 alors qu'elle aura une valeur supérieure sur le marché. Par ailleurs, si les taux ont diminué, le Crédit Agricole pourra s'endetter à nouveau pour un coût moindre. En revanche, en cas de remboursement anticipé, le rendement des investisseurs sera réduit. L'existence d'une telle clause est donc un facteur de risque supplémentaire pour l'investisseur.

1.4. Maturité (Term to maturity)

La maturité de l'emprunt correspond à la période qui sépare son émission de son remboursement. Lorsque le remboursement est étalé dans le temps, on parle plutôt de **durée de vie moyenne** (*average life*) qui correspond à la moyenne des durées de vie de chacune des tranches de l'emprunt. Généralement, les obligations sont classées en fonction de leur maturité : court terme lorsque la maturité est inférieure à 5 ans, moyen terme pour des maturités comprises entre 5 et 12 ans, long terme au-delà de 12 ans. A noter enfin le cas particulier des **obligations perpétuelles**, dont la date de remboursement n'est pas déterminée.

Dans le cas du Crédit Agricole, la durée normale de l'emprunt est de 11 ans. Le remboursement anticipé pouvant intervenir à l'issue de la 5ème année, la durée minimale de l'emprunt est donc de 5 ans.

1.5. Taux de coupon (coupon rate)

Le taux de coupon (taux facial ou nominal) permet de déterminer la valeur des coupons payables à des intervalles de temps réguliers, tous les ans, tous les semestres, voire tous les trimestres.

Certaines obligations ne donnent droit à aucun coupon : ce sont des **obligations zéro-coupon**. Ces obligations sont à intérêts précomptés et elles sont remboursées in fine. Autrement dit, l'obligataire reçoit un flux unique à l'échéance égal à la valeur nominale de l'obligation ; il n'y a aucun flux intermédiaire. C'est notamment le cas des bons du Trésor à taux fixe et à intérêts précomptés (BTF) émis par l'Agence France Trésor, en charge de la gestion de la dette publique : leur valeur nominale est de 1€. Par exemple, l'achat le 17 octobre 2018 en date de règlement le 19 octobre 2018 de 100 millions de valeur nominale du BTF 11 septembre 2019 (ISIN FR0125064891) à un taux de -0.570% coûtera 100 520 444,60 €.

$$P = 100\,000\,000 \times \left(1 - 0{,}570\% \times \frac{327}{360}\right)^{-1} = 100\,520\,444{,}60$$

Contrairement aux zéro-coupon, les **obligations couponnées** versent périodiquement un coupon. Ces obligations sont le plus souvent remboursables in fine. C'est, en France, le cas des obligations assimilables du Trésor (OAT) dont l'échéance initiale est comprise entre 2 et 50 ans[3].

Les **obligations à taux fixe** sont les plus classiques : le taux de coupon est fixé dans le prospectus d'émission et ne peut être modifié (sauf si cette modification est prévue dans le prospectus). Au contraire, les **obligations à taux variable** (*floating rate notes*) versent un coupon dont la valeur est indexée sur un taux de marché à court terme comme l'Euribor, auquel s'ajoute une marge fixe. Enfin, certaines obligations sont **indexées sur l'inflation**[4] : la structure de ces titres est celle d'une obligation à taux fixe dont les flux (coupons et principal) sont corrigés des effets de l'inflation, afin de garantir aux investisseurs (notamment les particuliers) le pouvoir d'achat de leur investissement.

Dans le cas du Crédit Agricole, les coupons sont payés trimestriellement, les 26 février, 26 mai, 26 août et 26 novembre de chaque année. Le taux annuel est de 4,40%, soit un taux trimestriel proportionnel de 1,10%. En l'absence de remboursement anticipé, le titre versera donc 44 coupons d'une valeur de 1,10% de la valeur nominale, soit 0,01100 € par titre.

1.6. Rang de la créance et garanties

Le rang de la créance désigne le niveau de priorité pour le paiement des intérêts et du remboursement du principal. A l'exception des émissions réalisées par les banques ou sociétés d'assurance, la plupart des emprunts obligataires bénéficient de garanties spécifiques permettant leur remboursement prioritaire par rapport aux autres créances. On parle alors de **dette senior** (*senior bonds*). Une **clause de subordination** peut réduire le rang de la créance. On parle alors de **dette subordonnée** (ou dette junior).

Les contrats d'émission obligataire comprennent souvent des clauses complémentaires. La **clause pari-passu** engage l'émetteur à placer la dette au même rang que les autres créances chirographaires existantes ou à venir. La **clause de nantissement négative** (*negative pledge*) engage l'émetteur vis-à-vis du souscripteur à ne pas nantir, hypothéquer ou consentir une quelconque autre sûreté sur ses actifs ou revenus sans le faire bénéficier au préalable de sûretés de même rang dont pourraient bénéficier ultérieurement d'autres prêteurs.

Dans certains cas, le remboursement et le paiement des coupons sont garantis. C'est notamment le cas lorsque les émissions sont réalisées par des filiales, la maison mère garantissant l'opération. Plus rarement, la garantie peut prendre la forme d'une hypothèse, d'un nantissement ou d'une caution. Dans ce cas, on parle d'**obligation collatéralisée** (*covered bond*).

2. Cotation et évaluation des obligations

Le prix d'un actif financier est égal à la valeur actuelle des flux futurs anticipés dégagés par ce titre. Par conséquent, l'évaluation nécessite l'estimation des flux futurs et l'estimation du taux d'actualisation (ou d'une courbe de taux). La détermination des flux futurs pour une obligation à taux fixe sans clause de remboursement anticipé (*noncallable bond*) est simple : coupons périodiques jusqu'à la maturité et valeur de remboursement

---

[3] Depuis le 1er janvier 2013 et dans un souci de simplification, les nouveaux titres de référence créés sur le moyen terme (de maturité à l'origine entre 2 et 5 ans), précédemment émis sous la forme de BTAN (Bons du Trésor à taux fixe et intérêts annuels) sont désormais émis sous forme d'OAT, comme pour les titres à long terme.

[4] C'est notamment le cas des OATi et OAT€i émises par l'Etat français et dont la valeur des coupons et du principal sont indexées sur l'inflation française et de la zone euro respectivement. Pour plus d'informations, consultez le site www.aft.gouv.fr/fr/oati-presentation

(*par value*). Le taux d'actualisation reflète le rendement de titres ayant un risque comparable, c'est-à-dire des titres ayant la même qualité de signature et la même maturité.

De façon générale, la relation suivante peut être utilisée pour évaluer tout type d'obligation :

$$P = \sum_{t=1}^{n} F_t \times (1+r)^{-t}$$

avec F_t le flux reçu à la période t
r le taux d'actualisation
n le nombre de périodes

A noter que pour des obligations de type in fine, les coupons périodiques sont constants et le remboursement n'intervient qu'à maturité. Dans ce cas particulier, la relation suivante peut être utilisée :

$$\mathrm{P} = \mathrm{C} \times \frac{1-(1+\mathrm{r})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{r}} + \mathrm{VR} \times (1+\mathrm{r})^{-\mathrm{t}}$$

avec C le coupon périodique constant
VR la valeur de remboursement

<u>Exemple</u> : Considérons une obligation versant des coupons de 10% par an, remboursée au pair dans 20 ans. Sa valeur nominale est de 1 000 €.

Si le taux de rendement attendu pour des titres de même catégorie est 11%, le prix de l'obligation est inférieur à la valeur nominale et l'obligation est décotée par rapport au pair :

$$100 \times \frac{1-(1+11\%)^{-20}}{11\%} + 1000 \times (1+11\%)^{-20} = 920{,}37$$

Si le taux de rendement attendu pour des titres de même catégorie est 9%, le prix de l'obligation est supérieur à la valeur nominale et l'obligation est surcotée par rapport au pair :

$$100 \times \frac{1-(1+9\%)^{-20}}{9\%} + 1000 \times (1+9\%)^{-20} = 1091{,}29$$

Si le taux de rendement attendu pour des titres de même catégorie est 10%, le prix de l'obligation est égal à la valeur nominale et l'obligation cote le pair :

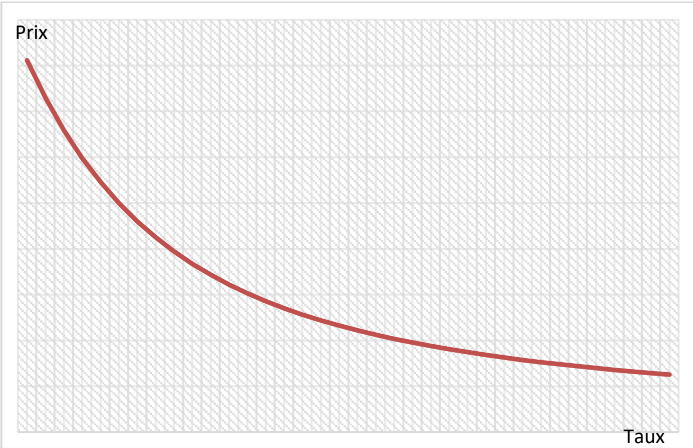
$$100 \times \frac{1-(1+10\%)^{-20}}{10\%} + 1000 \times (1+10\%)^{-20} = 1000{,}00$$

Relation entre le prix et le rendement attendu

Le prix de l'obligation étant égal à la valeur actuelle des flux futurs (coupons et valeur de remboursement), il existe une relation inverse entre ce prix et le taux d'actualisation. Mathématiquement, ceci peut être vérifié en dérivant la relation de prix par rapport au taux r. D'un point de vue économique, cela se justifie par le fait que si les obligations nouvellement émises offrent un rendement supérieur à celui de l'obligation, les investisseurs la délaisseront. Par le simple jeu de l'offre et de la demande, le prix de cette obligation s'ajustera pour offrir le même rendement que les autres obligations sur le marché.

La Figure 1 représente l'évolution du prix de l'obligation de l'exemple précédent (coupon de 10%, maturité 10 ans) selon différents taux d'actualisation. Si la forme de cette relation est strictement décroissante, elle est également **convexe**. Cette convexité de la relation entre le prix et le taux d'actualisation a d'importantes implications qui seront étudiées ultérieurement.

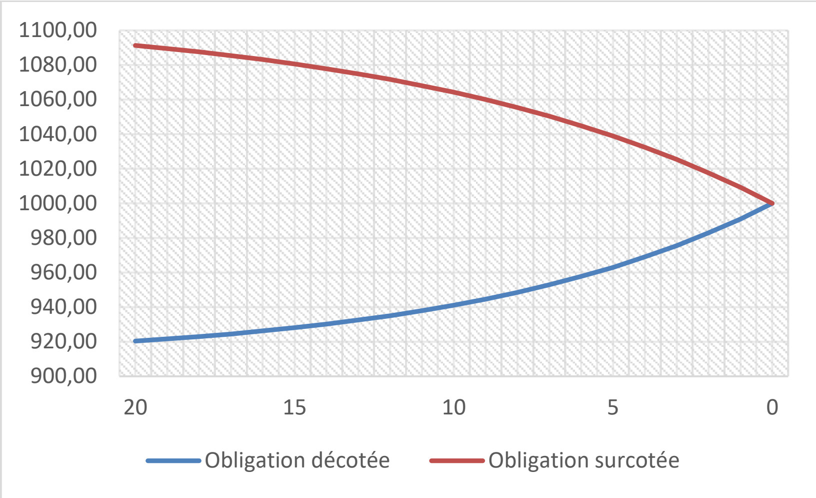
Figure 1 : Dynamique du prix en fonction du taux de rendement



Relation entre le prix et le temps

Toutes choses égales par ailleurs, c'est-à-dire si le taux de rendement attendu reste inchangé sur toute la durée de vie de l'obligation, le prix de l'obligation converge vers sa valeur de remboursement. Ainsi, une obligation cotée au pair aura un prix fixe durant toute sa durée de vie si les taux d'intérêt ne changent pas. La Figure 2 représente l'évolution du prix de l'obligation de l'exemple précédent (maturité 20 ans, coupon annuel de 10%) en fonction de la maturité résiduelle. Comme on peut l'observer, le prix des obligations décotées ou surcotées ne reste pas constant, même si le taux d'intérêt ne change pas. Plus on approche de la maturité de l'obligation, plus le prix d'une obligation décotée augmente et plus celui d'une obligation décotée va diminuer. Toutes choses égales par ailleurs, le temps joue donc défavorablement sur la valeur d'une obligation surcotée et favorablement sur une obligation décotée.

Figure 2 : Effet du temps sur le prix de l'obligation



Cotation des obligations et coupon couru

Par convention, afin de rendre les prix comparables lorsque les valeurs nominales sont différentes, les obligations sont cotées **en pourcentage de la valeur nominale au pied du coupon**. Le cours (*clean price*) est donc le prix de l'obligation (*full price* ou *dirty price*) duquel on soustrait le coupon couru (*accrued interest*), c'est-à-dire les coupons accumulés depuis la date du dernier détachement de coupon.

$$Prix = Cours + Coupon\ couru$$

$$Coupon\ couru = Coupon \times \frac{Nbre\ de\ jours\ depuis\ le\ dernier\ détachement\ de\ coupon}{Nbre\ de\ jours\ entre\ deux\ détachements\ de\ coupon}$$

<u>Exemple</u> : le 19 décembre 2017, l'OAT 3,50% 25APR26 (FR0010916924) se négociait au cours de 126,61 et avait un coupon couru de 2,301. Un investisseur achetant pour 100 000 € de valeur nominale de ce titre paye à sa contrepartie un prix totale de 128 911 €.

Nombre de jours calendaires entre le dernier détachement de coupon (25/04/17) et le jour de règlement livraison au comptant (21/12/2017) : 241

Nombre de jours entre le dernier détachement de coupon (25/04/2017) et le prochain détachement de coupon (25/04/2018) : 365

$$Coupon\ couru = 3{,}50 \times \frac{241}{365} = 2{,}301$$

$$Valeur = 100000 \times (126{,}61\% + 2{,}301\%) = 128911$$

3. Mesure du rendement

Plusieurs mesures ex-ante du rendement peuvent être utilisées mais la plus courante, et la plus pertinente, est le **taux de rendement à l'échéance** (*yield to maturity*). Ce taux correspond à la rentabilité espérée par les investisseurs s'ils achètent l'obligation à son prix de marché et la détiennent jusqu'à l'échéance. Mathématiquement, le taux de rendement à l'échéance est le taux d'actualisation qui égalise la valeur actuelle des flux futurs versés par l'obligation et son prix de marché :

$$P = \sum_{t=1}^{n} F_t \times (1+r)^{-t}$$

Avec	P	le prix de l'obligation observé sur le marché
	F_t	le flux versé à la période t
	n	la maturité du titre
	r	le taux de rendement à l'échéance

Exemple : Une obligation versant des coupons annuels au taux de 5,0% remboursable au pair in fine dans 10 ans se négocie au prix de 103,956. Son taux de rendement actuariel est la solution de l'équation suivante :

$$103{,}956 = 5{,}0 \times \frac{1-(1+r)^{-10}}{r} + 100 \times (1+r)^{-10}$$

L'utilisation d'une calculatrice possédant des fonctions financières ou un tableur tel qu'Excel permet aisément de trouver la solution de ce polynôme. Le taux de rendement à l'échéance de ce titre est 4,500%.

Comme indiqué précédemment, certains titres peuvent comporter des clauses de remboursement anticipé au gré de l'émetteur ou, plus rarement, du souscripteur. L'absence de cette clause interdit à l'émetteur (au souscripteur) de demander le remboursement de l'emprunt avant l'échéance ; si cet emprunt est remboursé in fine, l'utilisation du taux de rendement à l'échéance comme estimation de la rentabilité ne pose aucun problème puisque la date de remboursement est connue avec certitude. Par contre, en présence d'une telle clause, le taux de rendement à l'échéance n'est plus approprié ni forcément pertinent puisqu'en fonction de l'évolution des taux sur le marché cette clause sera ou non exercée. Comme on ne connaît pas avec certitude la date de remboursement, il est courant de calculer un taux de rendement pour chaque date possible de remboursement anticipé. Ces taux sont appelés taux à échéance intermédiaire (*yield to call*). Le plus faible des taux de rendement obtenus représente le pire rendement possible (yield to worst) pour l'émetteur.

Exemple : Si l'obligation précédente peur être remboursée au gré de l'émetteur au pair après 5 années, puis à la fin de chaque année, le taux de rendement pour la première échéance (*yield to first call*) est 4,109%, celui de la seconde échéance est 4,239%, celui de la troisième échéance est 4,333%, etc. Celui de la dernière échéance correspond au taux de rendement à l'échéance de 4,500% déterminé précédemment. Le pire rendement possible ici est donc le rendement obtenu en cas de remboursement dès la première date possible.

De l'exemple précédent peut conclure que l'existence d'une clause de remboursement anticipé au gré de l'émetteur génère un risque pour l'investisseur car la perte de rendement observée sur les 5 premières années ne pourra pas être récupérer sur les 5 années suivantes dans la mesure où les taux ont diminué. Supposons par exemple que le taux se stabilise à 4,000% sur les 5 dernières années, la valeur accumulée de l'investissement[5]

[5] Voir le fichier Excel (impact_remboursement_anticipé.xlsx) pour une simulation complète.

sera de 157,615 soit un rendement réel de 4,250%. On constate donc une perte de 25 points de base par rapport au taux de rendement à l'échéance.

Taux de rendement à l'échéance d'un portefeuille de titres

Le taux de rendement à l'échéance d'un portefeuille n'est pas égal à la moyenne pondérée des taux de rendement à l'échéance des titres qui le composent. Par principe, le taux de rendement à l'échéance d'un portefeuille est le taux d'actualisation qui égalise la valeur de marché du portefeuille et la valeur actuelle des flux qu'il générera.

Considérons un portefeuille composé de la façon suivante :

Titre	Taux de coupon	Maturité (années)	Valeur nominale (€)	Prix de marché (€)	TRA
A	7,0 %	5	10 000 000,00	9 222 069,75	9,0%
B	6,0 %	7	20 000 000,00	20 000 000,00	6,0%
C	5,0 %	3	30 000 000,00	28 425 410,37	7,0%

Pour simplifier les calculs, on considère que les trois titres versent des coupons annuels à la même date et sont remboursés au pair in fine. La valeur nominale du portefeuille est de 60 millions d'euros mais sa valeur de marché est de 57 647 480,12 euros. Les flux du portefeuille sont les suivants :

Période	A	B	C	Portefeuille
0	-9 222 069,75	-20 000 000,00	-28 425 410,37	-57 647 480,12
1	700 000,00	1 200 000,00	1 500 000,00	3 400 000,00
2	700 000,00	1 200 000,00	1 500 000,00	3 400 000,00
3	700 000,00	1 200 000,00	31 500 000,00	33 400 000,00
4	700 000,00	1 200 000,00		1 900 000,00
5	10 700 000,00	1 200 000,00		11 900 000,00
6		1 200 000,00		1 200 000,00
7		21 200 000,00		21 200 000,00

Le taux de rendement à l'échéance du portefeuille est 6,865%. Ce taux est bien inférieur au taux de rendement moyen pondéré du portefeuille[6] qui s'établit à 6,973%. A noter qu'il est cependant courant de donner une approximation du taux de rendement du portefeuille en utilisant la sensibilité[7] de chaque titre comme pondération. Dans ces conditions, une assez bonne approximation du taux de rendement du portefeuille est :

$$\widehat{TRA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \times S_i \times TRA_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i \times S_i}$$

Où V_i est la valeur de marché du titre i
S_i est la sensibilité du titre i
TRA_i est le taux de rendement actuariel du titre i
n est le nombre de titres dans le portefeuille

Dans cet exemple, le TRA appoximé est égal à 6,831%.

[6] Par les valeurs de marché
[7] La sensibilité mesure l'impact relatif d'une variation des taux d'intérêt sur la valeur de l'obligation (cf. chapitre suivant).

4. Mesure du risque

Comme indiqué dans les sections précédentes, le risque d'une obligation à taux fixe (sans option) est lié à la relation inverse entre le prix de l'obligation et les taux d'intérêt. Ceci est lié au fait que le prix de l'obligation est égal à la valeur actuelle des flux de liquidité générés par le titre. Une augmentation (diminution) du taux de rendement exigé réduit (augmente) la valeur actuelle des flux de liquidité et par conséquent réduit (augmente) le prix de l'obligation. Le Tableau 2 illustre cette propriété en considérant six obligations[8] dont les caractéristiques varient en fonction de leur taux de coupon et de leur maturité.

Tableau 2 : Dynamique du prix de six obligations à taux fixe

Taux	9%/5	9%/25	6%/5	6%/25	0%/5	0%/25
6,00%	112,64	138,35	100,00	100,00	74,73	23,30
7,00%	108,20	123,31	95,90	88,35	71,30	18,42
8,00%	103,99	110,67	92,01	78,65	68,06	14,60
8,50%	101,97	105,12	90,15	74,41	66,50	13,01
8,90%	100,39	100,99	88,69	71,28	65,29	11,87
8,99%	100,04	100,10	88,37	70,61	65,02	11,62
9,00%	100,00	100,00	88,33	70,53	64,99	11,60
9,01%	99,96	99,90	88,30	70,46	64,96	11,57
9,10%	99,61	99,03	87,97	69,80	64,70	11,33
9,50%	98,08	95,28	86,56	66,97	63,52	10,34
10,00%	96,21	90,92	84,84	63,69	62,09	9,23
11,50%	90,88	79,69	79,93	55,32	58,03	6,58
12,00%	89,19	76,47	78,37	52,94	56,74	5,88

Pour mieux visualiser l'impact de la variation des taux sur le prix de chaque obligation, le Tableau 3 synthétise l'impact relatif (en %) d'une variation d'ampleur donnée des taux d'intérêt sur le prix de l'obligation, en supposant un taux de rendement initial de 9%. Bien que le prix de toutes les obligations varie dans le sens opposé du taux d'intérêt, l'impact relatif n'est pas le même pour toutes les obligations : les obligations les plus sensibles sont celles qui ont la maturité la plus élevée et le taux de coupon le plus faible. Par ailleurs, pour des variations de taux d'intérêt de faible ampleur, on observe que l'impact relatif est relativement identique en cas de mouvement à la hausse ou à la baisse. Au contraire, pour des mouvements de taux de grande ampleur, les variations de prix observées ne sont pas symétriques : pour une variation donnée des taux d'intérêt, la variation à la hausse du prix est plus importante que la variation à la baisse.

[8] Les six obligations versent des coupons annuels, sont remboursées au pair in fine et ont une valeur nominale de 100.

Tableau 3 : Impact relatif d'une variation donnée des taux d'intérêt

Taux	dr en bps[9]	9%/5	9%/25	6%/5	6%/25	0%/5	0%/25
6,00%	-300	12,64%	38,35%	13,21%	41,78%	14,97%	100,92%
7,00%	-200	8,20%	23,31%	8,57%	25,26%	9,70%	58,88%
8,00%	-100	3,99%	10,67%	4,17%	11,51%	4,72%	25,91%
8,50%	-50	1,97%	5,12%	2,06%	5,50%	2,33%	12,18%
8,90%	-10	0,39%	0,99%	0,41%	1,06%	0,46%	2,32%
8,99%	-1	0,04%	0,10%	0,04%	0,11%	0,05%	0,23%
9,01%	1	-0,04%	-0,10%	-0,04%	-0,11%	-0,05%	-0,23%
9,10%	10	-0,39%	-0,97%	-0,41%	-1,05%	-0,46%	-2,27%
9,50%	50	-1,92%	-4,72%	-2,00%	-5,05%	-2,26%	-10,81%
10,00%	100	-3,79%	-9,08%	-3,96%	-9,70%	-4,46%	-20,41%
11,00%	200	-7,39%	-16,84%	-7,71%	-17,92%	-8,69%	-36,53%
12,00%	300	-10,81%	-23,53%	-11,28%	-24,94%	-12,69%	-49,28%

- **Valeur d'un point de base (*Value of a basis point*)**

La valeur d'un point de base représente l'impact monétaire d'une variation des taux d'intérêt d'un point de base sur la valeur de l'obligation. Elle est en général exprimée en valeur absolue. Comme indiqué précédemment, la sensibilité aux mouvements de taux est relativement identique pour une augmentation ou une diminution des taux d'intérêt d'un point de base. Pour illustrer cette mesure du risque, prenons l'exemple de l'obligation 9%/5 du Tableau 2. Pour un taux initial de 9%, cette obligation a un prix de 100. Si le taux exigé augmente d'un point de base (à 9,01%), le prix de l'obligation s'établit à 99,96 soit une diminution du prix de 0,04. De façon identique, pour une baisse du rendement exigé d'un point de base (à 8,99%), le prix de l'obligation augmente à 100,04 soit une augmentation du prix de 0,04. Pour cette obligation (et compte tenu du rendement initial de 9%), la valeur d'un point de base est de 0,04.

- **Duration de Macaulay (*Macaulay Duration*)**

La duration de Macaulay[10] représente l'impact relatif sur le prix d'une obligation d'une variation relative des taux d'intérêt. Il s'agit d'une mesure d'élasticité telle que définie par Hicks (1939)[11]. Elle s'obtient comme suit :

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} tF_t(1+r)^{-t}}{P}$$

Prenons l'exemple de l'obligation 9%/5 du Tableau 2. Il s'agit d'une obligation versant des coupons annuels de 9% et remboursable au pair in fine dans 5 ans. Si le taux de rendement du marché est de

[9] 1 bps = 0,01%
[10] Macaulay (1938), Some theoretical problems suggested by the movement of interest rates, bond yields, and stock prices in the US since 1856, New York: National Bureau of Economic Research.
[11] Value and capital, Oxford: Clarendon Press.

9%, cette obligation se négocie au pair, soit à un prix de 100. Le Tableau 4 détaille le calcul de la duration de cette obligation.

Tableau 4 : Calcul de la duration de l'obligation 9%/5

t	F_t	$F_t \times (1+r)^{-t}$	$t \times F_t \times (1+r)^{-t}$
1	9	8,2569	8,2569
2	9	7,5751	15,1502
3	9	6,9497	20,8490
4	9	6,3758	25,5033
5	109	70,8425	354,2126
		100,0000	423,9720

La duration de cette obligation est de 4,2397.

- **Sensibilité (*Modified Duration*)**

Une mesure de risque peut être tirée des résultats précédents. Le risque peut être mesuré par la variation relative du prix de l'obligation induite par une variation d'ampleur donnée des taux d'intérêt. Pour des mouvements de taux infinitésimaux, la sensibilité peut être approximée par la relation suivante :

$$S = \frac{1}{P} \times \frac{dP}{dr} = -\frac{\sum_{t=1}^{n} tF_t(1+r)^{-t-1}}{P}$$

Comme on peut le remarquer dans cette équation, la sensibilité et la duration sont liées par un facteur (1 + r). La sensibilité peut être déterminée de la façon suivante :

$$S = -D \times (1+r)^{-1}$$

L'application à l'exemple précédent donne une sensibilité de -3,8897. A noter que la sensibilité étant toujours négative, il est courant de la communiquer en valeur absolue. Il ne faut donc pas oublier de tenir compte de ce signe négatif.

La sensibilité peut être utilisée pour estimer l'impact d'une variation d'ampleur donnée du taux de rendement sur la valeur de l'obligation. De la définition de la sensibilité, il vient :

$$dP = S \times P \times dr$$

Pour illustrer cette relation, prenons une nouvelle fois l'exemple de l'obligation 9%/5 du Tableau 2. Au taux de 9%, cette obligation cote le pair. Comme nous venons de le voir, sa sensibilité est -3,8897. Si le taux de rendement exigé augmente instantanément de 9% à 9,10% (soit une hausse de 10 bps), la valeur de l'obligation devrait diminuer de 0,38897. Suite à la variation du taux, le prix de l'obligation devrait donc être de 99,61103. Or, par calcul actuariel, le prix de l'obligation s'établit à 99,6120. On observe donc un écart entre le prix approximé et le prix actuariel. Cet écart s'explique par la relation convexe entre le prix de l'obligation et le taux de rendement et est d'autant plus important que l'ampleur de la variation des taux est grande.

En appliquant les relations de sensibilité et duration aux six obligations précédentes, on obtient les résultats suivants :

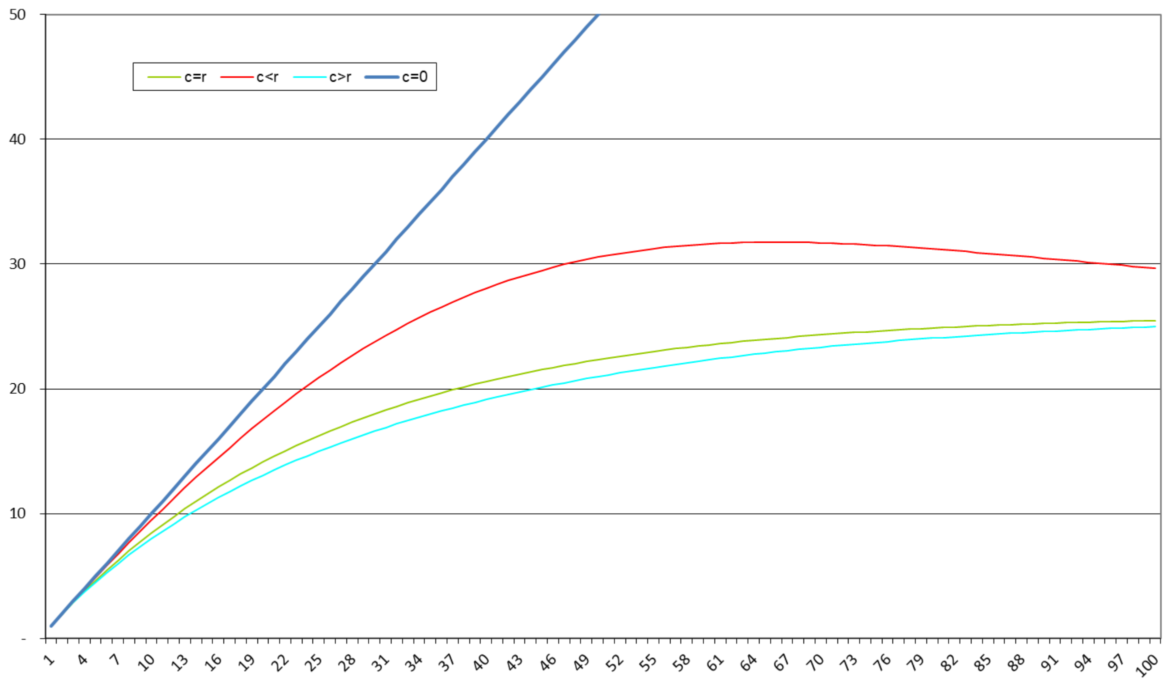
	9%/5	9%/25	6%/5	6%/25	0%/5	0%/25
Duration	4,2397	10,7066	4,4262	11,4900	5,0000	25,0000
Sensibilité	3,8897	9,8226	4,0607	10,5413	4,5872	22,9358

De ces résultats, on peut remarquer que la duration d'une obligation couponnée est toujours inférieure à sa maturité et que la duration d'une obligation zéro-coupon est égale à sa maturité. La duration est une fonction décroissante du taux de coupon. En conséquence, la duration est d'autant plus forte que le taux de coupon est faible. Pour une obligation se négociant au pair, la duration peut se réduire à :

$$D = \frac{1+r}{r} \times [1-(1+r)^{-n}]$$

La duration admet donc une limite finie, même si l'obligation s'assimile à une rente perpétuelle (n tend vers l'infini). Ainsi, une obligation perpétuelle versant des coupons annuels de 4% et se négociant au pair (taux de coupon = taux de rendement à l'échéance) a une duration de 26. Si le taux de rendement à l'échéance est de 5% (obligation se négociant en-dessous du pair), sa duration ne dépassera pas 21. De telles valeurs signifient que la duration dépend des caractéristiques de l'obligation (taux de coupon et maturité). Comme le montre la Figure 3, une obligation se négociant au-dessus du pair (taux de coupon supérieur au taux de rendement à l'échéance) admet une duration qui est une fonction croissante de sa maturité. Toutefois, elle tend vers une valeur finie lorsque la maturité croît indéfiniment. Une obligation se négociant en-dessous du pair (taux de coupon inférieur au taux de rendement à l'échéance) admet une duration qui passe par un maximum unique.

Figure 3 : Evolution de la duration en fonction de la maturité et du taux de coupon



- **Convexité (*Convexity*)**

La sensibilité et la duration ne donnent une bonne approximation du niveau de risque d'un portefeuille obligataire que si l'on considère des mouvements de taux parallèles et de faible ampleur. Pour des mouvements de forte ampleur, le biais de convexité doit être corrigé par un développement de Taylor à l'ordre deux :

$$dP(r) \cong \frac{dP(r)}{dr}dr + \frac{1}{2}\frac{d^2P(r)}{d^2r}dr^2$$

La variation relative du prix de l'obligation induite par un mouvement d'ampleur donnée (dr) du taux d'intérêt est donc :

$$\frac{dP(r)}{P(r)} \cong \frac{1}{P(r)}\frac{dP(r)}{dr}dr + \frac{1}{2P(r)}\frac{d^2P(r)}{d^2r}dr^2 \cong -Sdr + \frac{C}{2}dr^2$$

Avec S la sensibilité de l'obligation et C, sa convexité déterminée par :

$$C = \frac{1}{P(1+r)^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)F_t}{(1+r)^t} = \left[D + \frac{\sum_{t=1}^{n} t^2F_t(1+r)^{-t}}{P}\right](1+r)^{-2}$$

Le Tableau 5 donne le détail du calcul de la convexité pour l'obligation 9%/5 du Tableau 2.

Tableau 5 : Calcul de la duration de l'obligation 9%/5

t	F_t	$F_t \times (1+r)^{-t}$	$t \times F_t \times (1+r)^{-t}$	$t^2 \times F_t \times (1+r)^{-t}$
1	9	8,2569	8,2569	8,2569
2	9	7,5751	15,1502	30,3005
3	9	6,9497	20,8490	62,5469
4	9	6,3758	25,5033	102,0132
5	109	70,8425	354,2126	1 771,0630
		100,0000	423,9720	1 974,1805

La convexité est de cette obligation est égale à :

$$C = \left[4{,}2397 + \frac{1\,974{,}1805}{100{,}0000}\right](1+9\%)^{-2} = 20{,}1848$$

La convexité permet de corriger l'estimation de l'impact d'une variation d'ampleur importante des taux d'intérêt. Par exemple, lors de l'utilisation de la sensibilité dans le cas de l'obligation 9%/5, nous avons calculé l'impact d'une hausse de 10 bps des taux sur la valeur de l'obligation et avons observé un écart avec le prix actuariel. En corrigeant le biais de convexité, une augmentation de 10 bps des taux entraînerait une diminution du prix de 0,3880. Comme on peut l'observer, la correction du biais de convexité permet d'obtenir un prix estimé de 99,6120 identique à celui obtenu par calcul actuariel.

$$dP = P \times \left[S \times dr + \frac{C}{2} \times (dr)^2\right] = 100 \times \left[-3{,}8897 \times 0{,}10\% + \frac{20{,}1848}{2} \times (0{,}10\%)^2\right] = \text{-}0{,}3880$$

Duration, sensibilité et convexité d'un portefeuille de titres

Pour des déformations parallèles de la structure par terme des taux d'intérêt, la sensibilité, la duration et la convexité d'un portefeuille peuvent être déterminées par la moyenne pondérée des sensibilités, durations ou des convexités des titres qui le composent. Par exemple, le portefeuille ci-après a une duration de 5,4. Par conséquent, si les taux de rendement des quatre obligations qui le composent varient de 100 bps, la valeur du portefeuille devrait varier d'approximativement 5,4 %. Les gestionnaires de fonds obligataires considèrent souvent leur exposition au risque de taux en termes de contribution d'un titre à la sensibilité du portefeuille (dernière colonne).

Tableau 6 : Duration d'un portefeuille

Obligation	Valeur de marché (€)	Poids	Duration	Contribution à la duration
A	10 millions	10 %	4	0,40
B	40 millions	40 %	7	2,80
C	30 millions	30 %	6	1,80
D	20 millions	20 %	2	0,40
Portefeuille	100 millions	100 %		5,40

Duration et sensibilité en cas de mouvements non parallèles

Pour des déformations non parallèles de la courbe des taux, la façon la plus simple de généraliser la notion de duration est de considérer la structure par termes des taux d'intérêts définie par un vecteur taux zéro-coupon, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$. Dans ces conditions, le prix de l'obligation est égal à la valeur actuelle des flux de liquidité qu'elle génère compte tenu de cette suite de taux zéro-coupon :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} F_t (1 + r_t)^{-t}$$

La duration partielle[12] (*key rate durations*) indique l'impact qu'aurait une variation d'un point de base de l'un des point de la courbe de taux sur la valeur de l'obligation. Elle est définie par :

$$S_t = -\frac{tF_t(1 + r_t)^{-t-1}}{P_0}$$

A titre d'exemple, considérons une obligation de maturité 5 sans et versant des coupons annuels de 5,5%. La courbe des taux zéro-coupon est actuellement la suivante pour les cinq prochaines années :

1	2	3	4	5
3,00%	3,50%	4,00%	4,50%	5,00%

Compte tenu de la structure par termes des taux, le prix d'équilibre de l'obligation est :

$$P = \frac{5{,}5}{1{,}030} + \frac{5{,}5}{(1{,}035)^2} + \frac{5{,}5}{(1{,}040)^3} + \frac{5{,}5}{(1{,}045)^4} + \frac{105{,}5}{(1{,}050)^5} = 102{,}6377$$

[12] Reinato (1992). Une autre approche similaire est celle développée par Ho (1992).

Les durations partielles aux différents points de la courbe sont les suivantes :

Maturité	Flux	Spot (Base)	Duration partielle
1,0	5,5	3,0%	0,0505
2,0	5,5	3,5%	0,0967
3,0	5,5	4,0%	0,1374
4,0	5,5	4,5%	0,1720
5,0	105,5	5,0%	3,8351
		Sensibilité	**4,2917**

Par exemple, la duration partielle pour la maturité un an est donnée par :

$$S_1 = \frac{5{,}5 \times (1 + 3{,}0\%)^{-2}}{102{,}6377} = 0{,}0505$$

Elle indique que si le taux à maturité un an augmente de 100 bps (et que les autres maturités restent inchangées), le prix de l'obligation diminuera de 0,0505%. A noter que la somme des durations partielles est égale à la sensibilité de l'obligation.

L'intérêt de la duration partielle est de pouvoir simuler l'impact de différentes modifications de la courbe des taux sur la valeur de l'obligation (ou d'un portefeuille obligataire). Par exemple, si l'on considère un mouvement de hausse homogène de 100 bps (déformation parallèle), le prix de l'obligation s'établit à 98,3515, soit une baisse de 4,176%. Une approximation à l'ordre en utilisant la sensibilité (somme des durations partielles) donne un impact négatif de 4,292%. Les deux valeurs sont très proches mais non égales du fait du biais de convexité.

Au contraire, si l'on considère un mouvement de pentification dans lequel les taux se modifient de la façon suivante {-1,00% ; -0,50% ; 0,00% ; 0,50% ; 1,00%}, le prix de l'obligation s'établit à 98,8265, soit une baisse de valeur de 3,713%. L'utilisation des durations partielles donnent une approximation très proche :

$$(-0.0505 \times -1{,}00\%) + (-0{,}0967 \times -0{,}50\%) + \cdots + (-3{,}8351 \times 1{,}00\%) = -3{,}822\%$$

Le fichier Key rate durations.xlsx contient l'ensemble des détails des calculs et permet de simuler d'autres déformations de la courbe des taux (aplatissement, courbure).