Examen de “Processus Stochastiques et Applications Financières”

Documents autorisés: notes de cours et exercices corrigés-
autres documents et calculatrices interdits -

Durée: 3h00

ENSIMAG 2A/IF, 20 décembre 2017

Barême prévisionnel: Exercice1 7 points, Exercice2 3 points, Problème 10 points.

La notation dépendra grandement de la qualité de la rédaction. Les questions étoilées sont plus longues ou plus difficiles.

Exercice 1: Ruine du joueur via les théorèmes d'arrêt.

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si il fait "pile" (resp. "face"), il gagne 1 euro (resp. perd 1 euro). Il s'arrête de jouer lorsque son gain vaut 0 ou $m \geq 1$. Sa fortune avant de commencer le jeu est $0 \leq k \leq m$. On se propose de calculer la loi du gain lorsque la partie est terminée.

1) Montrer qu'une martingale bornée est uniformément intégrable (U.I.).

(On rappelle qu'une famille (X_n) de v.a. est dite U.I. si $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|>a}] \xrightarrow{a\uparrow\infty} 0$).

2) Montrer que le gain à l'instant $n \geq 0$ du joueur est donné par

$$S_n^T$$

où $(S_n)_{n\geq 0}$ est un processus à définir, et $T = T_0 \wedge T_m$ avec $T_i = \inf\{n \geq 0 : S_n = i\}$ pour $i = 0, m$ (en outre on rappelle qu'on note $S_n^T = S_{n\wedge T}$ pour tout $n \geq 0$). Que vaut le gain en fin de partie (à exprimer à l'aide de S et T) ?

3) Que pouvez-vous dire de (S_n) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k,\, k \leq n)$ pour $n \geq 1$? Est-ce une chaîne de Markov ? Une martingale ?

4) Que pouvez-vous dire de T ?

Pour la suite on note Y le processus défini par $Y_n = S_n^T$ pour tout $n \geq 0$.

5) Montrer qu'il existe $Y_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $Y_n = \mathbb{E}(Y_\infty|\mathcal{F}_n)$ pour tout $n \geq 0$, en invoquant précisément le résultat du cours utilisé.

6) Expliquer brièvement pourquoi $T < \infty$ p.s. (on pourra se référer à un exercice fait en TD, sans refaire la démonstration qu'il contient...).

7*) Calculer alors $\mathbb{E}(Y_0)$ de deux façons différentes -l'une des deux fait intervenir les questions précédentes- pour montrer que

$$\mathbb{P}(S_T = m) = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S_T = 0) = 1 - \frac{k}{m}.$$

***

Exercice 2: Relation de calendar spread.

Dans cet exercice $C_t(T,K)$ désigne le prix à l'instant t d'une option Call de maturité T et de strike K ($t \leq T$). On suppose que $T \mapsto C_t(T,K)$ est de classe C^1 et on se propose de montrer qu'en AOA on a

$$\frac{\partial C_t(T,K)}{\partial T} \geq 0$$

(relation de *calendar spread*). On rappelle en outre qu'on note $B(t,T)$ le prix à l'instant t du zéro-coupon d'échéance T, et qu'on a $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$.

1) Soit $t < T$. Montrer que

$$C_t(T,K) \geq (S_t - KB(t,T))_+$$

sans passer par une relation d'arbitrage.

Indication: On pourra utiliser le fait que le prix d'une option Call ou Put est toujours positif ou nul, et s'aider d'une relation vue en cours.

2*) Soient $t < T_1 < T_2$. Supposons que $C_t(T_1,K) > C_t(T_2,K)$. Construire un arbitrage, mettant en jeu des opérations à faire en t et T_1, et conclure.

Indication: Quand on est rentré dans une position longue vis à vis d'un Call en l'achetant en t, on peut toujours dénouer cette position en un instant $s > t$ antérieur à l'échéance, en revendant le Call à son prix en s.

***

Problème: Valorisation d'une option asiatique dans le modèle CRR.

Nous allons considérer le modèle discret CRR vu en cours, dont on rappelle certaines notations.

Un horizon temporel $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On note r le rendement sans risque sur une période de temps et $S_n^0 = (1+r)^n$ le prix à l'instant n de l'actif sans risque.

Le prix à l'instant n de l'actif risqué est noté S_n. La dynamique du processus $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$ est construite de la façon suivante.

On a $-1 < a < b$. On suppose $a < r < b$. On définit $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sur $(\Omega, \mathcal{F})$ on a une probabilité historique $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. On a une suite i.i.d. $(T_n)_{n=1}^N$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$ (on a $T_n(\omega) = \omega_n$ pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$). On note $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et

$$\forall 1 \leq n \leq N, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(T_i,\, 1 \leq i \leq n).$$

La valeur initiale S_0 est déterministe et supposée connue. Puis on a

$$\forall 0 \leq n < N, \quad S_{n+1} = S_n T_{n+1}.$$

On va chercher à construire un algorithme de programmation dynamique pour la valorisation d'options *asiatiques* portant sur l'actif risqué décrit par ce modèle. Plus précisément on veut calculer A_0, le prix de vente à l'instant $n = 0$ d'une option payant

$$\Big(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k - K\Big)_+$$

à l'échéance $n = N$ ($K > 0$ est le *strike* de cette option asiatique). Plus généralement on notera A_n le prix de l'option à l'instant $0 \leq n \leq N$.

1) Justifier que

$$A_n = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}^*\Big[\Big(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k - K\Big)_+ \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big],$$

où $\mathbb{P}^*$ est une mesure de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à préciser. En particulier on précisera bien la loi de la suite $(T_n)_{n=1}^N$ sous $\mathbb{P}^*$.

On note $Y_n = \sum_{i=0}^n S_i$ pour tout $0 \leq n \leq N$. Dans les questions 2) à 5) on cherche à montrer que le processus bidimensionnel $((S_n, Y_n))_{0\leq n\leq N}$ est de Markov.

2) Justifier que $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle de $((S_n, Y_n))_{0\leq n\leq N}$.

3*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable et à valeurs positives. Soient $0 \leq k < n \leq N$. Montrer que

$$\mathbb{E}^*[f(S_n, Y_n) \,|\, \mathcal{F}_k] = F_{k,n}(S_k, Y_k)$$

où $F_{k,n}$ est une fonction mesurable à préciser.

4) Montrer alors que

$$\mathbb{E}^*[f(S_n, Y_n) \,|\, (S_k, Y_k)] = F_{k,n}(S_k, Y_k).$$

5) Conclure quant au caractère Markov de $((S_n, Y_n))_{0\leq n\leq N}$.

On se tourne dans les questions suivantes vers la construction de l'algorithme.

6) Montrer que pour tout $0 \leq n \leq N$ on a $A_n = v_n(S_n, Y_n)$ avec v_n fonction mesurable à valeurs positives.

Indication: On admettra que dans la Définition 3.1.5 du cours la fonction $\mathbf{1}_{x\in\Gamma}$ peut être remplacée de façon équivalente par $f(x)$ fonction positive mesurable.

7) Montrer que pour tout $0 \leq n < N$

$$v_n(S_n, Y_n) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[v_{n+1}(S_{n+1}, Y_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n],$$

puis que

$$v_n(s, y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[v_{n+1}(S_{n+1}, Y_{n+1}) \,|\, S_n = s \,,\, Y_n = y].$$

8) Montrer alors que la suite de fonctions $(v_n)_{0\leq n\leq N}$ satisfait

$$\begin{cases} v_N(s,y) &= (\dfrac{y}{N+1} - K)_+ \\[2ex] v_n(s,y) &= \dfrac{1}{1+r}\Big[\dfrac{b-r}{b-a}\, v_{n+1}(s(1+a), y + s(1+a)) + \dfrac{r-a}{b-a}\, v_{n+1}(s(1+b), y + s(1+b))\Big] \quad \forall 0 \leq n < N. \end{cases}$$

9*) Proposer alors un algorithme de calcul du prix de vente A_0.