Feuille 6
Conditionnement des matrices

Exercice 1 :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la solution x du système $Ax = b$, et la solution $x + \delta x$ du système $A(x + \delta x) = b + \delta b$ dont le second membre est perturbé par un vecteur $\delta b \in \mathbb{R}^n$. On se donne une norme sur $\mathbb{R}^n$ et on munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite associée.

1- Montrer que
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \tag{1}$$
où
$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \tag{2}$$
est appelé *conditionnement de la matrice* A pour la norme considérée.

2- Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $\delta b \in \mathbb{R}^n$ tels que (1) soit remplacé par une égalité.

3- Montrer que $\kappa(A) \geq 1$.

4- Montrer que $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$.

Exercice 2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite associée. On note $\kappa_2(A)$ le conditionnement de la matrice A pour la norme euclidienne.

1- Montrer que la matrice $A^{\mathrm{T}}A$ est sym´etrique d´efinie positive.

2- On note σ_{max}, σ_{min} respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de $A^{\mathrm{T}}A$. Montrer que
$$\kappa_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}. \tag{3}$$

Indication : on pourra utiliser la propriété $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^{\mathrm{T}}A)}$.

3- Montrer que si A est symétrique définie positive alors

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \tag{4}$$

où λ_{max}, λ_{min} désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de A.

4- Calculer $\kappa_2(A)$ pour la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$