Examen à mi-parcours d'Analyse pour l'ingénieur

Mardi 6 novembre 2012 - 1h30

Documents de cours manuscrits et polycopié autorisés.

La rédaction sera prise en compte dans la notation. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1 *Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. On pose $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.*

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que d soit une distance.*
2. *On pose $E = \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \to e^x \in \mathbb{R}$. Montrer que d est une distance et expliciter les boules ouvertes.*

Exercice 2 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on note $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ la distance de x à A. Nous avons vu en TD que*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d_A(x) = 0.$$

1. *Pour $\varepsilon > 0$, on pose :*
$$V_\varepsilon(A) = \{x \in E,\ d_A(x) < \varepsilon\}.$$
Montrer que
$$\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A).$$
2. *Montrer que*
$$d_A = d_B \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}.$$

Exercice 3 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)|$$

Soit F l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit soit de la norme N_2 :

$$N_2(f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

soit de la norme N_∞ :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

Soit $L : E \to F$ l'application définie par $L(f)(t) = f(cos(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que L est bien définie, est linéaire et injective.*
2. *Montrer que L est continue pour chacune des normes N_2 et N_∞ de F, et calculer pour chacune de ces normes la norme de l'opérateur L, que l'on notera $|||L|||_2$ et $|||L|||_\infty$.*

Exercice 4 *Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques et $f : E \to F$ une application. On appelle graphe de f :*

$$G_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\} \subset E \times F.$$

1. *Montrer que si f est continue alors le graphe G_f est fermé.*
2. *Montrer que si F est compact, la réciproque est vraie.*