Échantillonnage : le modèle mathématique

- le Dirac : $< \delta, \phi >= \phi(0)$
- le Dirac comme limite

$$\begin{aligned} \delta &= lim_{\varepsilon \to 0} \delta^{(\varepsilon)} \\ &= lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{1}_{\left[-\frac{\varepsilon}{2} ; \frac{\varepsilon}{2}\right]} \end{aligned}$$

$$< \delta^{(\varepsilon)}, \phi >= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \phi(t) dt$$

- Pour toute fonction $x \in L^1(\mathbb{R})$

$$x\delta = x(0)\delta$$

Autrement dit

$$< x\delta, \phi >= x(0)\phi(0)$$

- le Dirac : $< \delta_a, \phi >= \phi(a)$, notations δ_a ou $\delta(t-a)$
- Pour toute fonction $x \in L^1(\mathbb{R})$

$$x\delta_a = x(a)\delta$$

Autrement dit

$$< x\delta_a, \phi >= x(a)\phi(a)$$

- convolution avec un Dirac

$$f * \delta_a(t) = f(t-a)$$

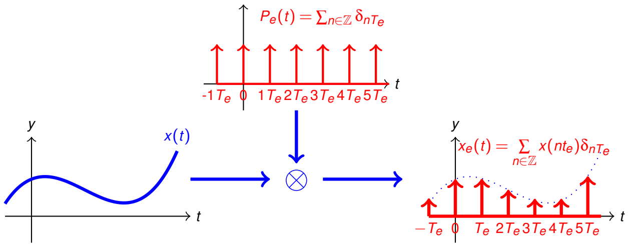
- le peigne de Dirac de largeur de dents T_e :

$$p_{T_e} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT_e}$$

Échantillonnage : le modèle mathématique

étant donné un signal $x \in L^2(\mathbb{R})$ le signal échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e est défini par

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \times P_e(t) \\ x_e(t) &= x(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT_e} \\ x_e(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta_{nT_e} \end{aligned}$$



Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

on pose $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage

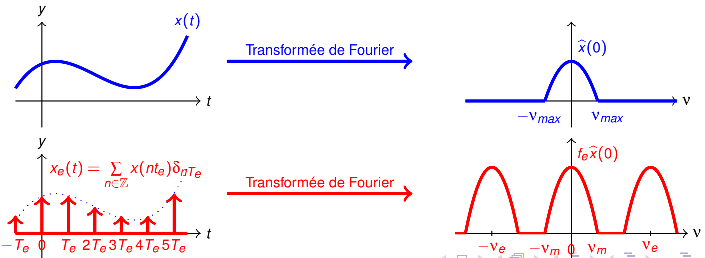
Formule de Poisson :

$$P_{T_e} = \sum_{n \in N} \delta_{nT_e} \xrightarrow{T.Fourier} \widehat{P_{T_e}} = \nu_e P_{\nu_e} = \nu_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n\nu_e}$$

$$x_e = xP_e \xrightarrow{T.Fourier} \widehat{x_e} = \widehat{x} * \nu_e P_{\nu_e}$$

$$\boxed{\widehat{x_e}(\nu) = \nu_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{x}(\nu - n\nu_e)}$$

Illustration : en supposant que $\nu_e > 2\nu_{max}$ les copies $\widehat{x}(\nu - n\nu_e)$ sont à supports disjoints.
Dans ce cas
échantillonage à période T_e en temps $\longrightarrow$ périodisation à $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ en fréquence



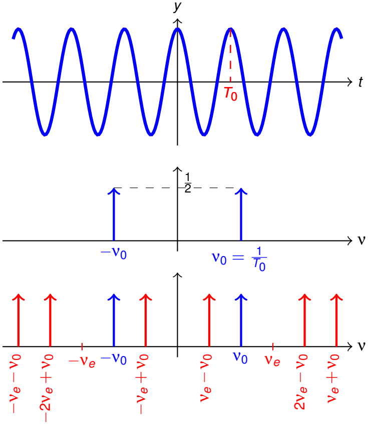
Repliement de spectre : Exemple

$x(t) = cos\left(2\pi\nu_0 t\right)$ échantillonné à la fréquence $\nu_e = 1.5\nu_0$

le signal
$x(t) = cos\left(2\pi\frac{1}{T_0}t\right)$

le spectre du signal
$\widehat{x}(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta_{-\nu_0} + \delta_{\nu_0}\right)$

le spectre du signal échantillonné à $\nu_e = 1.5\nu_0$
$\widehat{x_e}(\nu) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\delta_{-\nu_0 - n\nu_e} + \delta_{\nu_0 - n\nu_e}\right)$



Repliement de spectre : Exemple

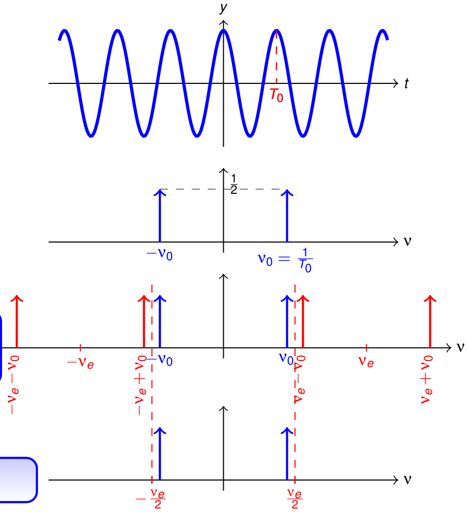
$x(t) = cos\left(2\pi\nu_0 t\right)$ échantillonné à la fréquence $\nu_e = 2.25\nu_0$

le signal
$x(t) = cos\left(2\pi\frac{1}{T_0}t\right)$

le spectre du signal
$\widehat{x}(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta_{-\nu_0} + \delta_{\nu_0}\right)$

le spectre du signal échantillonné à $\nu_e = 2.5\nu_0$
$\widehat{x_e}(\nu) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\delta_{-\nu_0 - n\nu_e} + \delta_{\nu_0 - n\nu_e}\right)$

le spectre du signal échantillonné à $\nu_e = 2.25\nu_0$ après filtrage passe bas $\left[-\frac{\nu_e}{2}\,;\,\frac{\nu_e}{2}\right]$



Repliement de spectre

pour éviter le repliement de spectre
il est nécessaire et suffisant que
$$\nu_e > 2\nu_{max}$$

Théorème de l'échantillonnage

Formule d'interpolation de Shannon :
si un signal à bande limitée $2\nu_max$ est échantillonné à une fréquence $\nu_e = \frac{1}{Te}$ telle que $\nu_e > \mathbf{2\nu_m ax}$ on peut le restituer à partir de ses échantillons $x(nT_e)$:

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) sinc\left(\frac{\pi(t-nT_e)}{Te}\right)$$

si $2\nu_{max} < \nu_e$ les copies du spectre $\widehat{x}(\nu - n\nu_e)$ sont à supports disjoints

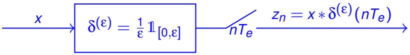
$$\begin{aligned}
\widehat{x}(\nu) &= T_e \Pi_{\left[-\frac{\nu_e}{2},\frac{\nu_e}{2}\right]}(\nu)\widehat{x_e}(\nu) \\
x(t) &= T_e \frac{sin\left(\frac{\pi t}{Te}\right)}{\pi t} * x_e(t) \\
&= \frac{sin\left(\frac{\pi t}{Te}\right)}{\frac{\pi t}{Te}} * \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta_{nT_e} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) sinc\left(\frac{\pi}{Te}(t-nT_e)\right)
\end{aligned}$$

Théorème de l'échantillonnage : commentaires

- En pratique les signaux sont de durée limitée, sa transformée de Fourier n'est pas à support borné
- On le filtre par un passe-bas de telle sorte que le signal ne comporte aucune fréquence dans l'intervalle $\left[-\frac{\nu_e}{2} ; \frac{\nu_e}{2}\right]$. Ce filtre évite tout repliement de spectre : filtre antirepliement
  Pour un signal échantillonné à $30Kz$ le filtre bas doit supprimer les fréquences supérieures à $15kz$

Échantillonneur réalisable

Une mesure requière de l'énergie, d'autant plus que la précision des des appareils de mesure est limitée et le bruit présent.
On prend la moyenne du signal sur un intervalle suffisamment grand.



$$z_n = \frac{1}{\varepsilon}\int_{nT_e-\varepsilon}^{nT_e} x(u)du$$

Impact dans le domaine fréquentiel : $z(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} x(u)du$ (version lissée de x)

$$\begin{aligned} |\widehat{z}(\nu)| &= |\widehat{\delta^{(\varepsilon)}}||\widehat{x}(\nu)| \\ &= |e^{-i\pi\nu\varepsilon} sinc(\pi\nu\varepsilon)||\widehat{x}(\nu)| \\ &= |sinc(\pi\nu\varepsilon)||\widehat{x}(\nu)| \end{aligned}$$

Les fréquences sont pondérées par un sinus cardinal, les hautes fréquences sont atténuées .

Dans la pratique, pour une application donnée, il faut que la durée d'intégration soit suffisament petite par rapport à la période d'échantillonnage et aux taux de distorsion acceptable.

Représentation des nombres signés en virgule fixe Grandeur et Signe (GS)

exemple : $x = -25.625$ on peut écrire

$$x = -\left(2^4 + 2^3 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3}\right)$$

représentation de x, pas de quantification 2^{-3}

	bit de signe	Partie entière					Partie fractionnaire		
décomposition	-	2^4	2^3	0	0	2^0	2^{-1}	0	2^{-3}
représentation	1	1	1	0	0	1	1	0	1

De manière générale

	bit de signe	Partie entière			Partie fractionnaire		
représentation	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0	a_{-1}	$\cdots$	a_{-b}

$$x = (-1)^{a_n}\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j}_{\text{patie entire}} + \underbrace{\sum_{j=-1}^{-b} aj2^j}_{\text{partie fractionnaire}}\right)$$

Le pas de quantification est $q = 2^{-b}$ .Les valeurs représentables sont symétriquement réparties autour de 0

$$-2^n + 2^b < -2^n + 2^{-b+1} < \cdots < 2^n - 2^{-b+1} < 2^n - 2^{-b}$$

La position de la virgule est conventionnelle. cas particuliers : nombre entiers $b = 0$, nombres décimaux normalisés à 1 : $n = 0$

Représentation des nombres signés (GS) commentaires

1. $x = 0$ a deux représentations $00\cdots0$ et $100\cdots0$
2. dans ma représentation des nombres entiers (b=0 et n=4) 3 est représenté par 0011 et -4 par 1100. Si on opère la somme en base deux on obtient $0011 + 1100 = 1111$ qui est la représentation de -7 ! ! !

Représentation des nombres signés (C2) complément à 2

Dans la représentation $a_n a_{n-1} \cdots a_0 a_{-1} \cdots a_{-b}$ d'un nombre signé x

- les nombres positifs sont codés comme dans le codage GS $x = \sum_{-b}^{n-1} a_j 2^j$

bit de signe	Partie entière			Partie fractionnaire		
0	a_{n-1}	$\cdots$	a_0	a_{-1}	$\cdots$	a_{-b}
+	$x = \sum_{-b}^{n-1} a_j 2^j$					

- les nombres négatifs x le bit de signe vaut 1 et la zone de représentation est celle de $2^n - |x|$

bit de signe	Partie entière			Partie fractionnaire		
1	a_{n-1}	$\cdots$	a_0	a_{-1}	$\cdots$	a_{-b}
-	$2^n - |x| = \sum_{-b}^{n-1} a_j 2^j$					

-

bit de signe	Partie entière			Partie fractionnaire		
a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0	a_{-1}	$\cdots$	a_{-b}

$$x = -a_n 2^n + \sum_{-b}^{n-1} a_j 2^j$$

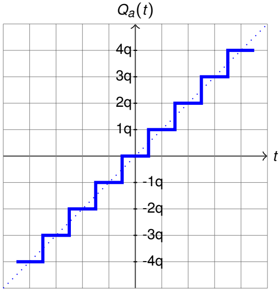
Représentation des nombres signés (C2) complément à 2

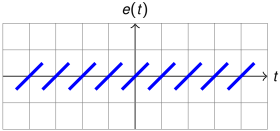
exemples pour des nombres entiers b=0 , et n = 6. 7 est représenté par 00111. -7 est représenté par le complément à 2^n : 11001
1 est représenté par 000001, -1 est représenté par 111111

- opposé (changement de signe) : la représentation en C2 de l'opposé d'un nombre s'obtient en changeant tous les bits puis en ajoutant 1
  Cela revient à garder tous les 0 de droite jusqu'au premier 1 ainsi que ce 1 puis à complémenter tous les autres bits
- pour la somme les débordements temporaires sont autorisés tant que le résultat final ne déborde pas. (les opérations se font modulo 2^{n+1}
  - lors de l'addition de deux termes de même signe le débordement est indiqué par le changement du bit de signe
  - pas de débordement lorqu'on ajoute deux nombres de signes différents
- le produit de deux nombre nécessite une re-quantification

Quantification par arrondi C2

On associe à la valeur à quantifier la valeur discrète la plus proche.





Bruit de quantification : $e(T) \sim \mathcal{U}\left(-\frac{q}{2};\frac{q}{2}\right)$

Quantification par troncature du complément à deux