Chapitre 4 : Espérance d'une variable aléatoire

Définition 0.0.1 (Fonction indicatrice)**.** On note $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire dite "indicatrice" de A.
Aussi nommée variable de Bernoulli [a], elle est définie par : $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 \textit{ si } A \textit{ est réalisé} \\ 0 \textit{ sinon} \end{cases}$

a. attention : un seul "i"

Définition 0.0.2 (Variable étagée)**.** Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.
$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ est une variable aléatoire étagée.

Définition 0.0.3 (Espérance d'une variable aléatoire étagée)**.** Soit X la variable étagée précédemment décrite. On pose $\mathbb{E}[X] \overset{déf.}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{P}(A_i)$.

Propriété-Définition 0.0.4 (Espérance d'une variable aléatoire positive)**.** Soit X une variable aléatoire positive et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoires étagées. [a]
On suppose également que cette suite de fonctions converge simplement vers X presque surement.
Dans ce cas, on note par définition,

$$\mathbb{E}[X] \overset{déf.}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

a. On a $X_0 \leq X_1 \leq \ldots \leq X_n$

Remarque : Cette espérance peut éventuellement être infinie.

Définition 0.0.5 (Généralisation à une variable aléatoire réelle)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$. [a]
On a :

$$\mathbb{E}[X] \overset{déf.}{=} \mathbb{E}[\max(0, X)] - \mathbb{E}[-\min(0, X)].$$

a. on dit de X qu'elle est "intégrable"

Propriété 0.0.6 (Linéarité)**.** Si X et Y sont intégrables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha\mathbb{E}[X] + \beta\mathbb{E}[Y]$$

.

Theorème 0.0.7 (Convergence monotone)**.** Soit $X \geq 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoires telle que $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$. On a :

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Exercice 0.0.8. *On tire au hasard un entier entre* 1 *et* 100*. On considère alors les trois événements suivants :*

- A_1 *: "obtenir un nombre pair"*
- A_2 *: "obtenir un multiple de 5"*
- A_3 *: "obtenir un multiple de 10"*

On note N le nombre d'événements réalisés. Par construction, $N(\Omega) \subset \{0; 1; 2; 3\}$.

Solution : La technique est de reconnaître que N est étagée. De fait, $N = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$. D'où, adiabatiquement : $\mathbb{E}[N] = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{5}$.

Exercice 0.0.9. *Soit X une variable aléatoire à valeurs entières. Démontrer que $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$.*

Solution : Il faut remarquer ici que "X est le nombre d'entiers qui précède X". Formellement,

$$X = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(k<X)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(k<X)}$$

Remarque : on pourra brièvement noter que le terme dans lequel on passe à la limite est égal à $\min(n, X)$.

Or $\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(k<X)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une suite croissante de variables aléatoires étagées qui converge vers X.

D'après la propriété-définition, il vient que :

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(X>k)}\right]$$

L'application de la linéarité suivi du passage à la limite permet alors de trouver le résultat : $\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)}$.

Encore une fois, cette limite est éventuellement égale à $+\infty$.

Application : Cette formule permet de calculer plus facilement l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

De fait, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ que l'on utilise dans la formule précédente : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$.

Exercice 0.0.10. *Soit $X \geq 0$ et $\forall t \geq 0, S(t) = \mathbb{P}(X > t)$* [1]*. Prouver que $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.*

Remarque : Cette formule fait le lien entre une intégrale de Lebesgue à gauche et une intégrale de Riemann à droite.

Solution : Il faut déjà remarquer les égalités suivantes.

$$X = \text{longueur}([0,X]) = \int_0^X 1\,\mathrm{d}t + \int_X^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(X>t)}\,\mathrm{d}t.$$

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \overset{déf.}{=} \int_0^n \mathbb{1}_{(X>t)}\,\mathrm{d}t$. $(X_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ définit alors une suite de variables aléatoires positives qui converge vers X en croissant.

Le théorème de convergence monotone permet alors d'avancer la première égalité du calcul :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(X>t)}\,\mathrm{d}t\right] \overset{/!\backslash}{=} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X>t)}]\,\mathrm{d}t$$

Ce qui donne le résultat final : $\boxed{\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.}$

Suite de l'exercice

Soit T = temps d'apparition de la première occurrence dans le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On a vu dans un chapitre précédent que $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$. [2]

Pour un match de "pied-ballon" classique, on a $\lambda t = 2,4$,
d'où $\mathbb{P}(\text{"match 0-0"}) = e^{-2,4}$.

Aussi, $\mathbb{E}[T] = \int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$.

on retiendra donc que $\boxed{\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}}$. Ainsi, en interprétant $\mathbb{E}[T]$ comme le temps moyen séparant deux occurences, λ est le nombre d'occurences par unité de temps, d'où le lien "le temps est l'inverse de la fréquence".

1. communément appelée "fonction de survie"
2. loi exponentielle