Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
TD : Couplages dans les graphes bipartis

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

EXO 4.1

Énoncé

- Cinq oeuvres $1, 2, 3, 4, 5$ de cinq cinéastes célèbres A, B, C, D, E ont été primées à un célèbre festival.
- Voici le schéma de la participation des cinéastes à la réalisation de chaque film:

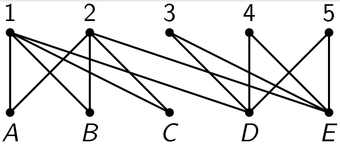
cinéastes	A	B	C	D	E
oeuvres	$3, 4, 5$	$3, 4, 5$	$3, 4, 5$	2	1

- Chacun des 5 cinéastes peut remettre une fois le prix à l'équipe d'un film-lauréat à condition qu'il ne soit pas l'un des réalisateurs.
- Est-il possible de réaliser ainsi la remise de prix ?

EXO 4.1

Solution

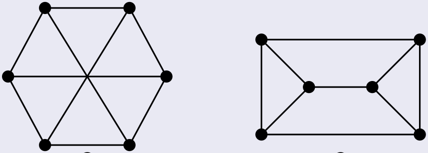
1. On introduit un graphe biparti G dont
   1. les deux classes de couleurs : $\{A, B, C, D, E\}$ et $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
   2. l'ensemble des arêtes : cinéaste X est relié à l'oeuvre Y si X n'est pas réalisateur de Y.
2. Il s'agit de trouver un ensemble M d'arêtes tel que chaque sommet est incident à exactement une arête de M :
   1. chaque oeuvre doit obtenir un prix et
   2. chaque cinéaste peut donner au plus un prix, il doit donc donner exactement un prix.
3. On ne peut pas réaliser la remise de prix car les trois cinéastes A, B, C peuvent donner le prix à seulement deux oeuvres $1, 2$.



EXO 4.3

Énoncé

Décider si les graphes de la figure sont bipartis.

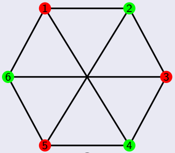


G_1 G_2

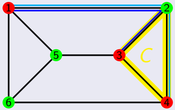
EXO 4.3

Solution

1. G_1 est biparti, l'algorithme a trouvé une bonne coloration avec deux couleurs.
2. G_2 n'est pas biparti, l'algorithme a trouvé un cycle élémentaire impair.



G_1



G_2

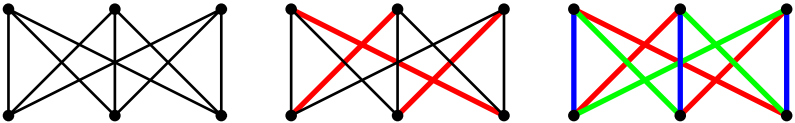
EXO 4.7

Énoncé

Soit $G = (A, B; E)$ un graphe biparti *k*-régulier ($k \geq 1$) :
$d(v) = k$ pour tout $v \in A \cup B$.

(a) Montrer que G admet un couplage parfait.

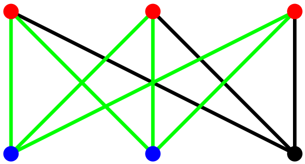
(b) Montrer que E se décompose en k couplages parfaits deux-à-deux arête-disjoints.



EXO 4.7

Solution de (a) :

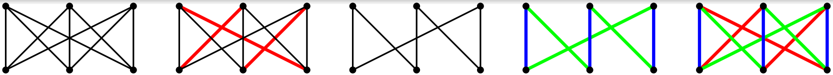
1. D'après l'EXO 4.6 il faut vérifier que les deux conditions (a) et (b) du Théorème de Hall sont satisfaites. Pour tout $X \subseteq A$,
2. $k|X| = \sum_{u \in X} d(u) = |E(G[X \cup \Gamma(X)])| \leq \sum_{v \in \Gamma(X)} d(v) = k|\Gamma(X)|$,
3. donc (b) est satisfaite. En particulier, $|A| \leq |B|$.
4. De même façon, $|B| \leq |A|$, donc (a) est satisfaite.



EXO 4.7

Solution de (b) :

1. Par récurrence sur k.
2. Si $k = 1$ alors E lui même est un couplage parfait.
3. On suppose que c'est vrai pour $k - 1$.
4. Soit G un graphe biparti k-régulier.
5. Par l'EXO 4.7(a), G admet un couplage parfait M_k.
6. $G' := G - M_k$ est un graphe biparti $(k-1)$-régulier.
7. En vertu de l'hypothèse de récurrence $E(G')$ se décompose en $k - 1$ couplages parfaits $M_1, \ldots, M_{k-1}$ deux-à-deux arête disjoints.
8. Alors E se décompose en k couplages parfaits deux-à-deux arête disjoints, $M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k$.



EXO 4.10

Énoncé

Une compagnie aérienne dispose de cinq avions A$_1$, A$_2$, ..., A$_5$.
Chaque avion peut effectuer des vols sur les routes indiquées ci-dessous.

R_1 : Londres-Francfort
R_2 : Milan-Barcelone
R_3 : Paris-Moscou
R_4 : Athènes-Madrid
R_5 : Rome-Sofia

Avion	Routes
A_1	R_1
A$_2$	R_1, R_2
A$_3$	R_1, R_3, R_4, R_5
A$_4$	R_3, R_4, R_5
A$_5$	R_1, R_2

(a) Dessiner un graphe biparti G dont les sommets représentent les avions et les routes, et dont les arêtes représentent les routes que l'avion peut prendre.

(b) L'avion A_3 sert sur la route R_1, A_4 sur la route R_5, et A_5 sur la route R_2. Cette affectation est-elle un couplage maximum de G ?

(c) L'avion A_3 doit être retiré du service pour passer en maintenance. Trouver un couplage maximum du graphe modifié.

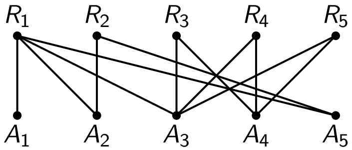
EXO 4.10

Solution de (a)

On introduit un graphe biparti $G = (A, R; E)$ tel que

1. $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$,
2. $E = \{A_i R_j$ si l'avion A_i peut prendre la route $R_j\}$.

Avion	Routes
A_1	R_1
A_2	R_1, R_2
A_3	R_1, R_3, R_4, R_5
A_4	R_3, R_4, R_5
A_5	R_1, R_2

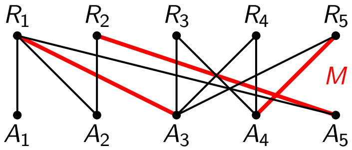


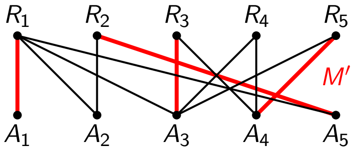
EXO 4.10

Solution de (b)

Le couplage $M = \{A_3R_1, A_4R_5, A_5R_2\}$ n'est pas de cardinal maximum :

- dans le graphe orienté auxiliaire D_M on trouve le (s,t)-chemin $P = \{s, A_1, R_1, A_3, R_3, t\}$ et ainsi
- on peut augmenter le couplage M en utilisant P et
- on obtient le couplage $M' = \{A_1R_1, A_3R_3, A_4R_5, A_5R_2\}$ et $|M'| > |M|$.



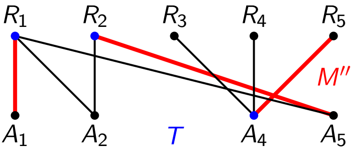


EXO 4.10

Solution de (c)

Le couplage $M'' = \{A_1R_1, A_4R_5, A_5R_2\}$ est de cardinal maximum :

- dans le graphe orienté auxiliaire D_M on trouve l'ensemble $S = \{s, A_2, R_1, R_2, A_1, A_5\}$ des sommets atteignables de s,
- on obtient le transversal $T = (A - S) \cup (R \cap S) = \{A_4, R_1, R_2\}$ et
- puisque $|M''| = 3 = |T|$, M'' est de cardinal maximum.



EXO 4.9

Algorithme glouton

ENTRÉE: Un graphe $G = (V, E)$.
SORTIE : Un couplage M de G tel que $|M| \geq \nu(G)/2$.

Etape 1: *Initialisation.*
$M := \emptyset$.

Etape 2: *Construction du couplage.*
Tant qu'il existe $e \in E - M$ telle que $M + e$ est un couplage faire
$M := M + e$.

Etape 3: *Fin de l'algorithme.*
Arrêter avec M.

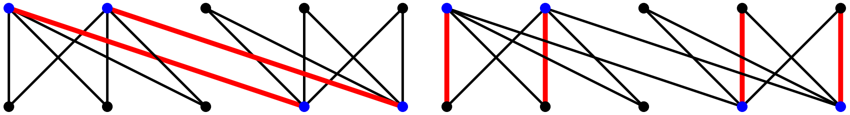
Énoncé

Montrer que l'algorithme glouton s'arrête avec un couplage M de G de taille au moins $\nu(G)/2$.

EXO 4.9

Solution

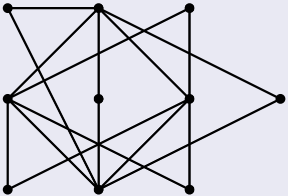
1. Soit T l'ensemble des sommets M-saturés. Alors $|T| = 2|M|$.
2. S'il y avait $e \in E(G - T)$ alors $M + e$ serait un couplage de G, l'algorithme aurait pu ajouter e, contradiction.
3. T est donc un transversal de G, d'où $\tau(G) \leq |T|$.
4. Par l'EXO 4.4(a), $\nu(G) \leq \tau(G)$.
5. Les inégalités impliquent $\nu(G) \leq 2|M|$.



EXO 4.8

Énoncé

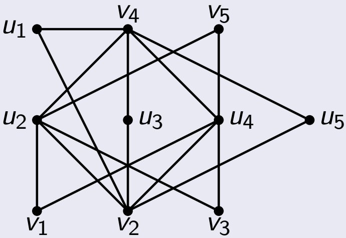
Trouver un couplage de cardinal maximum et un transversal de cardinal minimum dans le graphe biparti suivant :

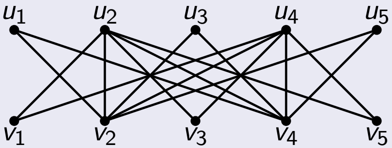


EXO 4.8

Solution

On voit que ces deux graphes sont isomorphes :





EXO 4.8

Solution

1. Soit M le couplage suivant.
2. $S =$ l'ensemble de sommets atteignables de s dans D_M.
3. Puisque $t \notin S$, le couplage M est de cardinal maximum.
4. $T := (V - S) \cup (U \cap S)$ est un transversal de cardinal minimum.