TD n°7

Questions de cours

- Rappeler la définition de la variance d'une variable aléatoire.
- Rappeler la définition de la loi normale.

Exercice 1

On souhaite calculer la variance de la loi normale, $\mathcal{N}(0,1)$, et d'autres moments d'ordre supérieur.

Question 1

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

- À l'aide du théorème de transfert, montrer que la fonction génératrice des moments $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ est égale à

$$\phi(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Question 2

- Dériver la fonction $\phi(t)$ deux fois en $t = 0$. En déduire la variance de la loi normale

$$\mathrm{Var}[X] = 1$$

Question 3

- Utiliser le développement en série de la fonction $\phi(t)$ en $t = 0$ pour calculer $\mathbb{E}\left[X^4\right]$.
- Vérifier ce résultat à l'aide de simulations.

```r
x <- rnorm(1000000)
mean(x^4)
```

Exercice 2

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. On pose

$$X = \mathbb{1}_{(U<1/3)}V + \mathbb{1}_{(U\geq 2/3)}(1+V)$$

Question 1

- Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

Question 2

- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Question 3

- Prouver que les commandes suivantes simulent correctement la loi de X.

```
n <- 100000
N <- sample(1:3, n, replace = T)
x <- (N == 3) + (N != 1)*runif(n)
```

- Vérifier les calculs de l'espérance et de la variance.

```
mean(x)
var(x)
```

Exercice 3

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$. On pose $X = e^U$.

Question 1

- Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X vérifie

$$\forall t \in (1,e), \quad F(t) = \ln(t)$$

- Décrire cette fonction pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Montrer que la loi de la variable X admet une densité et donner la densité de cette loi.
- Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Question 2

Soit $s \in \mathbb{R}$, on pose

$$\phi(s) = \mathbb{E}\left[e^{sU}\right]$$

- Calculer $\phi(s)$, puis calculer la dérivée de cette fonction au point $s = \alpha$, $\alpha > 0$.
- Déduire de la question précédente la valeur de l'espérance de la variable aléatoire suivante

$$Y = X^{\alpha} \ln(X)$$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire de loi de densité

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f(z) = z\mathbb{1}_{(0,1)}(z) + \frac{1}{2}e^{1-z}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(z)$$

Question 1

- Montrer que la fonction de répartition de la loi de densité $f(z)$ vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad F(t) = \frac{1}{2}\min(1, t^2) + \frac{1}{2}\max(0, 1 - e^{1-t})$$

- Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la fonction de répartition, $F_1(t)$, de la variable aléatoire $Y_1 = \exp(-X/2)$.

Question 2

- Montrer qu'il existe $p \in (0, 1)$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = pF_1(t) + (1 - p)F_2(t)$$

où $F_2(t)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y_2 = 1 + X$.

Question 3

Soit p la valeur trouvée précédemment. On considère la variable aléatoire Y définie par

$$Y = V\sqrt{U} + (1 - V)(1 + X)$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur (0,1), V est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et U, V, X sont mutuellement indépendantes.

- Calculer l'espérance des variables aléatoires Y et Y^2.
- Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

Question 4

On dispose d'un générateur aléatoire retournant **uniquement** des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

- Déduire des questions précédentes un algorithme de simulation de la loi de densité $f(z)$.

On notera `rexp(n,rate = 1)` le générateur aléatoire de loi exponentielle.