(I) 1) Dans une factorisation $PA = LU$, P est une matrice de permutation (obtenue par permutation des colonnes de I_n), L est triangulaire inférieure de diagonale unité, U est triangulaire supérieure inversible.

2) Si $PA = L_1U_1 = L_2U_2$ alors $U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$. L_1 et L_2 étant triangulaires inf de diagonale unité, c'est aussi le cas de L_1^{-1} et $L_1^{-1}L_2 = U_1U_2^{-1}$.
Or $U_1U_2^{-1}$ est aussi triangulaire sup, car U_1, U_2, et donc aussi U_2^{-1} sont triangulaires sup. Donc $U_1U_2^{-1} = I = L_1^{-1}L_2$, d'où $U_1 = U_2$ et $L_1 = L_2$.

(II) 1) Le calcul d'un coef. de A^2 représente $2n-1$ opérations élémentaires (produit scalaire de deux vecteurs) d'où un coût $\underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^3$ opérations pour calculer A^2.
La résolution par la méthode de Gauss du système de matrice A^2 coûte $\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^3$, donc le 1er algorithme coûte $\underset{+\infty}{\sim} \frac{8}{3}n^3$ opérations.

2) On reformule le problème en :

a) $PA = LU \rightarrow$ coût $\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^3$

b) $LUy = Pb \rightarrow$ coût calcul $y = O(n^2)$

c) $LUx = Py \rightarrow$ coût calcul $x = O(n^2)$ (connaissant y)

Le coût total du calcul de x est donc $\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^3$ (4 fois moins que le 1er algo.)

2) On reformule le problème en :

a) $PA = LU \rightarrow$ coût $\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^3$

b) $LUy = Pb \rightarrow$ coût calcul $y = O(n^2)$

c) $LUx = Py \rightarrow$ coût calcul $x = O(n^2)$ (connaissant y)

Le coût total du calcul de x est donc $\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^3$ (4 fois moins que le 1er algo.)

III 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ii} \neq 0$ $\forall i = 1 \dots n$ et $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

La méthode de Jacobi pour résoudre $Ax = b$ ($x, b \in \mathbb{R}^n$) s'écrit : $Dx_{k+1} = (D-A)x_k + b$.

On sait que cette méthode converge si A est à diagonale strictement dominante, ie $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\dots n\\ j\neq i}} |a_{ij}|$ $\forall i = 1 \dots n$.

2) $A = I - \lambda P$ est à diagonale strictement dominante (et donc inversible) si $|\lambda| < 1$.

En effet, $\forall i = 1 \dots n$, $|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\dots n\\ j\neq i}} |a_{ij}| = |1 - \lambda P_{ii}| - |\lambda| \sum_{\substack{j=1\dots n\\ j\neq i}} P_{ij} \geqslant 1 - |\lambda| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P_{ij}}_{=1}$

ie $|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\dots n\\ j\neq i}} |a_{ij}| \geqslant 1 - |\lambda| > 0$.

Par ailleurs, puisque A est à diagonale strict. dom, la méthode de Jacobi converge.

IV) 1) Notons $g(u) = \frac{2}{3} f(t+h, v+hu)$. Si $h < b-T$ (de sorte que $t+h \in]a,b[$ pour tout $t \in [0,T]$), on a quels que soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$:

$$|g(u_1) - g(u_2)| = \frac{2}{3} |f(t+h, v+hu_1) - f(t+h, v+hu_2)| \leq \frac{2}{3} L h |u_1 - u_2|$$

Donc g est une contraction sur $\mathbb{R}$ si $\frac{2}{3} L h < 1$, ie $h < \frac{3}{2L}$.

D'après le théorème du point fixe de Banach, g admet alors un unique point fixe qu'on note $u = \phi(t, v, h)$. On notera $h_0 = \min(b-T, \frac{3}{2L})$.

2) L'équation (5) équivaut à $\left(y_{k+1} - \frac{4}{3} y_k + \frac{1}{3} y_{k-1}\right) \times \frac{1}{h} = \frac{2}{3} f(t_k + h, y_{k+1})$.

En posant $u = \left(y_{k+1} - \frac{4}{3} y_k + \frac{1}{3} y_{k-1}\right) \times \frac{1}{h}$, cela équivaut à :

$u = \frac{2}{3} f\left(t_k + h, \frac{4}{3} y_k - \frac{1}{3} y_{k-1} + hu\right)$, qui a d'après 1) la solution unique $u = \phi\left(t_k, \frac{4}{3} y_k - \frac{1}{3} y_{k-1}, h\right)$ lorsque $h < h_0$. Donc (5) admet pour unique solution $y_{k+1} = \frac{4}{3} y_k - \frac{1}{3} y_{k-1} + h \phi\left(t_k, \frac{4}{3} y_k - \frac{1}{3} y_{k-1}, h\right)$.

3) On veut résoudre $N(y_{k+1}) = 0$, où $N(y_{k+1}) = \frac{3}{2} y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2} y_{k-1} - h f(t_{k+1}, y_{k+1})$.

Dans l'algo. de Newton, on considère la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ de condition initiale z_0 (on peut prendre p. ex. $z_0 = \frac{1}{3}\left[4y_k - y_{k-1} + 2h f\left(t_{k+1}, \frac{4}{3} y_k - \frac{1}{3} y_{k-1}\right)\right]$, mais un choix de condition initiale n'est pas demandé dans le sujet), et définie par la relation de récurrence

$$z_{n+1} = z_n - \frac{N(z_n)}{N'(z_n)} = z_n - \frac{(3/2) z_n - 2y_k + \frac{1}{2} y_{k-1} - h f(t_{k+1}, z_n)}{(3/2) - h \frac{\partial f}{\partial y}(t_{k+1}, z_n)}$$

4) $P(t) = y(t_{k+1}) + \delta^1 y(t_{k+1}, t_k)(t - t_{k+1}) + \delta^2 y(t_{k+1}, t_k, t_{k-1})(t - t_{k+1})(t - t_k)$ d'après la formule de Newton, avec $\delta^1 y(t_{k+1}, t_k) = \frac{y(t_k) - y(t_{k+1})}{t_k - t_{k+1}} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h}$ et

$$\delta^2 y(t_{k+1}, t_k, t_{k-1}) = \frac{\delta^1 y(t_k, t_{k-1}) - \delta^1 y(t_{k+1}, t_k)}{t_{k-1} - t_{k+1}} = \frac{1}{2h^2}\left(y(t_{k+1}) - 2y(t_k) + y(t_{k-1})\right).$$

5)
$$\begin{aligned} P'(t_{k+1}) &= \delta^1 y(t_{k+1}, t_k) + \delta^2 y(t_{k+1}, t_k, t_{k-1})(t_{k+1} - t_k) \\ &= \frac{1}{h}\left(y(t_{k+1}) - y(t_k)\right) + \frac{1}{2h}\left(y(t_{k+1}) - 2y(t_k) + y(t_{k-1})\right) \\ &= \frac{1}{2h}\left(3y(t_{k+1}) - 4y(t_k) + y(t_{k-1})\right) \end{aligned}$$

Le schéma (5) utilise $y'(t_{k+1}) = f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$ et approche $y'(t_{k+1})$ par $P'(t_{k+1})$.