Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Justification de l'Étape 2 de l'algorithme du simplexe
Étape 1 de l'algorithme du simplexe

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Rappel de l'itération de l'algorithme du simplexe

l'itération du simplexe

1. Soit $s \in \overline{J}$ pour lequel $c_s = \max\{c_i : i \in \overline{J}\}$.
2. Si $c_s \leq 0$ `arrêter`. (La solution de base est optimale.)
3. Si $a^s \leq 0$ `arrêter`. $(z(\max) = \infty.)$
4. Sinon soit r tel que $\frac{b_r}{A_r^s} = \min\{\frac{b_i}{A_i^s} : A_i^s > 0\}$.
5. Soit $J' = J + s - J_r$ la nouvelle base réalisable, pivoter à A_r^s et `arrêter`/`recommencer`.

Pivot

- $(a'_r, b'_r) = (a_r, b_r)/A_r^s$,
- $(a'_i, b'_i) = (a_i, b_i) - A_i^s \cdot (a'_r, b'_r)$, pour tout $i \neq r$,
- $(c'^T, -z'_0) = (c^T, -z_0) - c_s \cdot (a'_r, b'_r)$.

Justification de l'Étape 2 de l'algorithme du simplexe

Théorème

Si $c_s \leq 0$ alors J est une base optimale.

Démonstration

1. $z(\max) = z_0 + 0 \cdot x_J + c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} \leq z_0$, puisque $c_{\overline{J}}^T \leq 0$ et $x_{\overline{J}} \geq 0$.
2. Pour $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix}$, la solution de base associée à J, $z = z_0$,
3. elle est donc optimale.

Justification de l'Étape 2 de l'algorithme du simplexe

Théorème

Si $c_s > 0$ et $a^s \leq 0$ alors $z(\max) = \infty$.

Démonstration

1. On augmente x_s en gardant les autres variables hors base fixées à 0, soient donc $\overline{x}'_s = t \geq 0$, $\overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = 0$.
2. $\begin{pmatrix} \overline{x}'_J \\ \overline{x}'_s \\ \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a^s \cdot t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution réalisable pour tout $t \geq 0$
   - $A \cdot \overline{x}' = I \cdot \overline{x}'_J + a^s \cdot \overline{x}'_s + A^{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = (b - a^s \cdot t) + a^s \cdot t + 0 = b$,
   - $\overline{x}'_J = b - a^s \cdot t \geq b \geq 0$, puisque $a^s \leq 0, t \geq 0$ et $b \geq 0$.
3. $z(\max) = \infty$: $z' - z_0 = c_J^T \cdot \overline{x}'_J + c_s \cdot \overline{x}'_s + c^T_{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = 0 \cdot \overline{x}'_J + c_s \cdot t + c^T_{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot 0 = c_s \cdot t$ tend vers ∞ si t tend vers ∞.

Justification de l'Étape 2 de l'algorithme du simplexe

Théorème

Nouvelle base J' est réalisable.

Démonstration

1. On a $\overline{x}_{J'} = b'$.
2. $b'_r = \frac{b_r}{A^s_r} \geq 0$, puisque $b_r \geq 0$ et $A^s_r > 0$,
3. $b'_i = b_i - A^s_i \cdot b'_r$ si $i \neq r$.
   1. Si $A^s_i \leq 0$ alors $b'_i = b_i - A^s_i \cdot b'_r \geq b_i \geq 0$, car $A^s_i \leq 0$, $b'_r \geq 0$ et $b_i \geq 0$.
   2. Si $A^s_i > 0$ alors $b'_i = b_i - A^s_i \cdot b'_r \geq 0$ si et seulement si $\frac{b_i}{A^s_i} \geq b'_r$, mais $\frac{b_i}{A^s_i} \geq \min\{\frac{b_j}{A^s_j} : A^s_j > 0\} = \frac{b_r}{A^s_r} = b'_r$.

Justification de l'Étape 2 de l'algorithme du simplexe

Théorème

L'algorithme s'arrête.

Démonstration

1. Cas non-dégénéré : $b > 0$ toujours.
   1. La fonction objectif augmente toujours : $z_0' = z_0 + c_s \cdot b_{r'} > z_0$, puisque $c_s, b_{r'} > 0$.
   2. les bases sont donc toutes différentes pendant l'exécution,
   3. et puisque le nombre de bases est fini, $\leq C_n^m$,
   4. l'algorithme s'arrête.
2. Cas dégénéré : $b_i = 0$ peut arriver.
   1. la même base peut revenir, l'algorithme peut cycler.
   2. Pour l'éviter, on utilise la Règle de Brandt :
      Si on a le choix pour s ou r, il faut choisir le plus petit indice possible.

Étape 1 de l'algorithme du simplexe

Définition

1. On cherche une base réalisable d'un PL (P) sous forme standard où
2. on suppose que $b \geq 0$. (Si $a_i \cdot x = b_i < 0 \Longrightarrow (-a_i) \cdot x = -b_i > 0$.)

$$(P) \qquad \begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

3. On considère le PL auxiliaire suivant :

$$(P') \qquad \begin{aligned} A \cdot x + I \cdot y &= b \\ x, \quad y &\geq 0 \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x &= z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{aligned}$$

Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

Étape 1 de l'algorithme du simplexe

$$(P) \quad \begin{array}{rl} A \cdot x & = b \\ x & \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (P') \quad \begin{array}{rrl} A \cdot x + I \cdot y & & = b \\ x, & y & \geq 0 \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x & & = z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{array}$$

Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

Démonstration

1. $z'(\max) = (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x - \mathbf{1}^T \cdot b = \mathbf{1}^T \cdot (A \cdot x - b) = \mathbf{1}^T \cdot (-I \cdot y)$
   $= -\mathbf{1}^T \cdot y \leq 0.$
2. $z'(\max) = 0$ $\Longleftrightarrow$
   - il existe $\overline{x}, \overline{y}$ tels que $A \cdot \overline{x} + I \cdot \overline{y} = b, \overline{x}, \overline{y} \geq 0$, et $-\mathbf{1}^T \cdot \overline{y} = 0$ (mais $-\mathbf{1}^T \cdot \overline{y} =0$ si et seulement si $\overline{y} = 0$ puisque $\overline{y} \geq 0$) $\Longleftrightarrow$
   - il existe $\overline{x}$ tel que $A \cdot \overline{x} = b, \overline{x} \geq 0$ $\Longleftrightarrow$
   - il existe une solution réalisable $\overline{x}$ de (P).

Étape 1 de l'algorithme du simplexe

$$
(P') \quad \begin{array}{rcl} A \cdot x + I \cdot y & = & b \\ x, \quad y & \geq & 0 \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x & = & z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{array}
$$

Remarque

1. Les variables de y forment une base réalisable du (P'), puisque on a la matrice identité et $b \geq 0$,
2. (P') est sous forme standard par rapport aux variables de y.
3. On peut le résoudre avec l'Étape 2.

Exemple

Énoncé

Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre ce programme linéaire.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\geq 2 \\
1x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 4 \\
x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\
3x_1 - 1x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

Exemple

Solution

1. On ajoute les nouvelles variables $x_3,\ x_4,\ x_5$ qui sont non-négatives et on obtient le programme linéaire suivant (P_2) :

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 1x_2 & \geq & 2 \\
1x_1 + 3x_2 & \leq & 3 \\
x_2 & \leq & 4 \\
x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \\
3x_1 - 1x_2 & = & z(\max)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccl}
2x_1 & 1x_2 & -1x_3 & & & = 2 \\
1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & = 3 \\
 & x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\
3x_1 & -1x_2 & & & & = z(\max)
\end{array}
$$

2. (P_2) est sous forme standard mais on n'a pas une base réalisable. ($\{3, 4, 5\}$ est une base mais elle n'est pas réalisable.)
3. On a donc besoin de l'Étape 1.

Exemple

Solution

1. Pour avoir la matrice identité il faut ajouter une nouvelle variable y_1 qui est non-négative et on veut minimizer $y_1 \Longleftrightarrow$ maximiser $-y_1$.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & & & & & + & 1y_1 & = & 2 \\ 1x_1 & + & 3x_2 & & & + & 1x_4 & & & & & = & 3 \\ & & 1x_2 & & & & & + & 1x_5 & & & = & 4 \\ x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & y_1 & \geq & 0 \\ & & & & & & & & & - & 1y_1 & = & z'(\max) \end{array}$$
2. Maintenant la base $J' = \{6,\ 4,\ 5\}$ est réalisable mais $c'_{J'} \neq 0$.
3. En ajoutant la première ligne, on obtient (P^*) :
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & & & & & + & 1y_1 & = & 2 \\ 1x_1 & + & 3x_2 & & & + & 1x_4 & & & & & = & 3 \\ & & 1x_2 & & & & & + & 1x_5 & & & = & 4 \\ x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & y_1 & \geq & 0 \\ 2x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & & & & & & & = & z'(\max) + 2 \end{array}$$

Exemple

Solution

1. Maintenant on peut utiliser l'Étape 2 pour résoudre (P^*).

$$\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
\boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

2. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive,
3. la base $J'' := \{1,\ 4,\ 5\}$ est donc optimale et
4. la valeur de la fonction objectif pour la solution de base associée est 0.
5. J'' est donc une base réalisable de (P_2).

Exemple

1	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-$\frac{1}{2}$	2
0	1	0	0	1	0	4
0	0	0	0	0	-1	0

Solution

1. En utilisant le dernier tableau et la fonction objectif originale on a un PL (P_2') qui est équivalent à (P_2) et pour qui on a $A''_{J''} = I$.
2. Il faut encore changer la fonction objectif car $c_{J''} \neq 0$ $(c_1 \neq 0)$.
3. Il faut soustraire 3 fois la première ligne de la fonction objectif.

$$\begin{array}{lllllll}
2x_1 & 1x_2 & -1x_3 & & & = 2 \\
1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & = 3 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\
3x_1 & -1x_2 & & & & = z(\max)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
1x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & & & = 1 \\
 & +\frac{5}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +1x_4 & & = 2 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\
 & -\frac{5}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & & & = z(\max) - 3
\end{array}$$

Exemple

Solution

1. On a finalement le PL sous forme standard par rapport à J''.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & = 1 \\
+ \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 & & = 2 \\
1x_2 & + x_5 & = 4 \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, & x_5 & \geq 0 \\
- \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & = z(\max) - 3
\end{array}
$$

2. Maintenant on peut utiliser l'Étape 2.

$$
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\
0 & \frac{5}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} & 1 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -3 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 5 & 1 & 2 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & -10 & 0 & -3 & 0 & -9 \\
\hline
\end{array}
$$

3. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive,
4. une solution optimale est donc $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (3, 0)$ de valeur 9.

Algorithme du simplexe révisé

Étant donnés un PL sous forme standard, une base réalisable J,
et sa forme standard par rapport à J :

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \hat{A} \cdot x &= \hat{b} \\ x &\geq 0 \\ \hat{c}^T \cdot x &= z(\max) - \hat{z}_0 \end{aligned}$$

1. $\hat{A} = (A^J)^{-1} \cdot A$,
2. $\hat{b} = (A^J)^{-1} \cdot b$,
3. $\pi^T = c_J^T \cdot (A^J)^{-1}$,
4. $\hat{c}^T = c^T - c_J^T \cdot \hat{A} = c^T - c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot A = c^T - \pi^T \cdot A$,
5. $\hat{a}^s = (A^J)^{-1} \cdot a^s$,
6. $\hat{z}_0 = c_J^T \cdot \hat{b} = c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot b = \pi^T \cdot b$.

On peut calculer seulement ces vecteurs et pas tout le tableau.