Chapter 4

Martingales en temps continu

4.1 Filtrations et temps d'arrêt en temps continu

4.1.1 Filtrations et processus adaptés

Rappels : on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on considère l'ensemble d'indices $I = \mathbb{R}^+$ ou $I = [0, T]$ pour un $T > 0$ déterministe fixé.

Définition 4.1. *On appelle **filtration** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ croissante (au sens de l'inclusion) de sous tribus de $\mathcal{F}$.*
*L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace de probabilité filtré**.*

Définition 4.2. *Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, on dira qu'un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in I}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$**-adapté** si et seulement si $\forall t \in I$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque : par la propriété de croissance des filtrations si X est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté alors $\forall t \in I$, X_t est $\mathcal{F}_{t+s}$-mesurable $\forall s > 0$ t.q. $(s + t) \in I$.

Exemple Canonique : Pour tous processus $X = (X_t)_{t\in I}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on note

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t, s \in I)$$

la tribu engendrée par la trajectoire de X sur $[0, t] \cap I$.
La famille $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelée **filtration naturelle** du processus X.
Le processus X est bien évidemment $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$-adapté.

Nous allons ici faire quelques hypothèses techniques afin de nous affranchir de cas pathologiques. Ces conditions sont monnaies courantes dans la littérature elles portent le nom de conditions habituelles.

Définition 4.3. *Conditions habituelles sur les filtrations.*
Dans tout ce qui suit on supposera toujours les deux conditions suivantes vérifiées.

a. *Complétude : la sous tribu $\mathcal{F}_0$ contient tous les $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.*

b. *Continuité à droite : $\forall t \in I$ on définit la sous tribu de $\mathcal{F}$*

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0, (t+\varepsilon)\in I} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

on supposera que $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$.

Remarques :

- La condition (a) permet en particulier d'avoir que si X est une version de Y et si X est $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$-adapté alors Y est aussi $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$-adapté.

- On a très clairement que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_t^+$, la condition (b) traduit qu'il n'y a pas plus "d'information" dans $\mathcal{F}_t^+$ que dans $\mathcal{F}_t$.

- Une notion de continuité à gauche peut également être définie en prenant les tribu engendrée par les réunions des tribus $\mathcal{F}_{t-\varepsilon}$. Or celles ci sont toutes contenues dans $\mathcal{F}_t$ qui est la plus petite tribu les contenants toutes. D'où la continuité à gauche.
- Contre exemple : filtration non continue à droite. Considérons le processus X définit par $X_t = tU$ où U est une v.a. vérifiant $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(U = -1) = 1/2$. On note $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$ qui est la filtration naturelle du processus. Or on a $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\forall t > 0$ on a $\mathcal{F}_t = \sigma(U)$ la tribu engendrée par U. Clairement on a $\mathcal{F}_0^+ = \sigma(U) \neq \mathcal{F}_0$.

Définition 4.4. *Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré on appellera $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. sous $\mathbb{P}$ tout processus W vérifiant*

(a) W est un M.B.S. sous $\mathbb{P}$;

(b) W est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté;

(c) $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ les v.a. $(W_t - W_s)$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_s$.

Sous les conditions habituelles la filtration naturelle du M.B.S. notée $\mathcal{F}^W$ est continue à droite. On hérite alors de la propriété qui suit

Corollaire 4.5. *Loi $0-1$ de Blumenthal.*
La tribu $\mathcal{F}_0^{W^+}$ est triviale : i.e.

$$\forall A \in \mathcal{F}_0^{W^+} \text{ on a } \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Application : Considérons $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} W_s$. Alors l'événement $\{M_t > 0, \forall t > 0\} \in \mathcal{F}_0^{W^+}$ car $\forall t$ on a que M_t est $\mathcal{F}_t^W$-mesurable et

$$\{M_t > 0, \forall t > 0\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{M_\varepsilon > 0\} \in \mathcal{F}_0^{W^+}$$

donc par Blumenthal $\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 0$ ou 1. Or si on avait

$$\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 0$$

cela impliquerait $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $M_{\varepsilon_0} = 0$ avec probabilité 1 ce qui est impossible car

$$\mathbb{P}(M_{\varepsilon_0} > 0) \geq \mathbb{P}(W_{\varepsilon_0} > 0) = 1/2.$$

d'où

$$\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 1.$$

Enfin on admettra la proposition suivante qui nous sera bien utile lorsque l'on parlera d'intégration.

Proposition 4.6. *Soit X un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté à valeurs réelles et continu à droite, limité à gauche (càd-làg) alors le processus Y définit par $\forall t \in I$*

$$Y_t = \int_0^t X_s \, ds$$

est à trajectoires continues et est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté.

4.1.2 Temps d'arrêt

Contexte : On commence par supposer que $I = \mathbb{R}^+$; étant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré on note

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$$

la tribu engendrée par la réunion des élément de la filtration. On a en général que

$$\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}.$$

Définition 4.7. *Dans ce contexte, une variable aléatoire τ à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}+ = [0, +\infty]$ vérifiant*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0$$

*est appelé $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-**temps d'arrêt**.*

Remarque : Dans le cas ou $I = [0, T]$ on a bien entendu que $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$ et on supposera seulement que pour tout $t \geq T$ on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_T$.
En temps continu et dans les conditions habituelles sur la filtration on a

Proposition 4.8. *Une v.a. τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt si et seulement si*

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0$$

Preuve. Pour tous $t \geq 0$ on a

$$\{\tau < t\} \bigcup_{n\geq 1} \left\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t$$

pour la réciproque en utilisant la continuité à droite de la filtration :

$$\{\tau \leq t\} \bigcap_{n\geq 1} \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$$

□

Exemples : A titre d'exercice vous pourrez prouver que :

1. Toute constante positive est un temps d'arrêt;
2. Le maximum (resp. le minimim) de deux $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt.
3. La somme de deux $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt.

Etant donné un temps d'arrêt τ on s'intéresse à une sous tribu particulière, appelée tribu des événements antérieurs à τ. Sa définition formelle est la suivante.

Définition 4.9. *Soit τ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt on définit*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0\}$$

*qui est appelée **tribu des événements antérieurs à** τ.*

Remarque : Il s'agit bien d'une sous-tribu de $\mathcal{F}$: on a bien $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ de plus si $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors $\forall t \geq 0$ on a

$$\overline{A} \cap \{\tau \leq t\} = \overline{A \cap \{\tau \leq t\}} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et enfin $\forall A_k \in \mathcal{F}_\tau$, $\forall t \geq 0$ on a

$$\left(\bigcup_k A_k\right) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_k (A_k \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

La proposition qui suit condense un certain nombre de propriétés de cette tribu.

Proposition 4.10. *Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré alors*

1. *Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. alors la v.a. τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable;*
2. *Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. fini $\mathbb{P}$-p.s. et si X est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté à trajectoires continues alors la v.a. X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable;*
3. *Si τ' est un autre $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. tel que $\tau' \leq \tau$ $\mathbb{P}$-p.s. alors*

$$\mathcal{F}_{\tau'} \subseteq \mathcal{F}_\tau$$

ce qui entraine que pour tout σ $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A on a

$$\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau$$

4. *Pour tout processus X, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté, à trajectoires continues le* ***processus arrété***

$$X^\tau = (X_{t\wedge\tau})_{t\in I}$$

est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté. De plus X^τ est aussi $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\in I}$-adapté.

Preuve. Pour (1.) il faut m.q. $\forall u \in I$ on a $\{\tau \le u\} \in \mathcal{F}_\tau$ et pour cela il suffit de voir que pour tous $t \ge 0$ on a

$$\{\tau \le u\} \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t \wedge u\} \in \mathcal{F}_{t\wedge u} \subset \mathcal{F}_t$$

Pour (2.) il suffit de m.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{X_\tau < x\} \in \mathcal{F}_\tau$. Soit $t \ge 0$ on a

$$\{X_\tau < x\} \cap \{\tau \le t\} = \bigcap_{u\in\mathbb{R}^+} \{\{X_u < x\} \cap \{u = \tau\} \cap \{\tau \le t\}\}$$

où

$$\{u = \tau\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{|\tau - u| < \frac{1}{1+n}\right\}$$

et en utilisant la continuité de X il suffit de restreindre la réunion sur les $u \in \mathbb{Q}^+$:

$$\{X_\tau < x\} \cap \{\tau \le t\} = \bigcap_{0\le u\le t, u\in\mathbb{Q}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\{X_u < x\} \cap \left\{\tau > u - \frac{1}{1+n}\right\} \cap \left\{\tau \le \left(u + \frac{1}{1+n}\right) \wedge t\right\}\right\}$$

qui est une réunion dénombrable d'intersections dénombrables. Enfin on observe que $\{X_u < x\} \in \mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_t$ pour $u \le t$ et $\left\{\tau > u - \frac{1}{1+n}\right\} \in \mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_t$ et enfin

$$\left\{\tau \le \left(u + \frac{1}{1+n}\right) \wedge t\right\} \in \mathcal{F}_t$$

Pour (3.) on suppose donc que $\tau' \le \tau$ $\mathbb{P}$-p.s. et on prend $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$ on va m.q. $A \in \mathcal{F}_\tau$. Pour tout $t \ge 0$ on a

$$A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\tau \le t\} \cap \{\tau' \le t\} = (A \cap \{\tau' \le t\}) \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$$

Enfin pour (4.) il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ l'événement $\{X_{\tau\wedge t} < x\} \in \mathcal{F}_t$ pour tous $t \ge 0$. On a (par continuité des trajectoirres)

$$\{X_{\tau\wedge t} < x\} = \bigcup_{u\in\mathbb{Q}^+} \{X_{t\wedge u} < x\} \cap \{\tau = u\} = \left\{\bigcup_{u\le t, u\in\mathbb{Q}^+} \{X_u < x\} \cap \{\tau = u\}\right\} \cup \{\{X_t < x\} \cap \{\tau > t\}\}$$

en observant que

$$\bigcup_{u\in\mathbb{Q}^+} \{\tau = u\} = \bigcup u \in \mathbb{Q}^+ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{u - \frac{1}{n+1} < \tau \le \left(u + \frac{1}{n+1}\right) \wedge t\right\}$$

on conclut que l'on a bien affaire à des réunions dénombrables d'intersection dénombrables d'événements de $\mathcal{F}_t$. □

4.2 Rappels sur l'espérance conditionnelle

Les résultats qui suivent sont toutes à connaitre parfaitement.

Définition 4.11. *Etant donnés X une v.a. intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ l'unique $\mathbb{P}$-p.s. v.a. $\mathcal{G}$-mesurable notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ vérifiant*

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X\right], \ \forall A \in \mathcal{G} \tag{4.1}$$

Proposition 4.12. *On suppose X v.a. intégrable, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle vérifie les propriétés qui suivent :*

a. *la propriété* (4.1) *est équivalente à*

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}\left[ZX\right], \ \forall Z \ v.a. \ \mathcal{G} - mesurable \ et \ t.q. \ ZX \ intégrable; \tag{4.2}$$

b. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$;

c. $\mathbb{E}(1|\mathcal{G}) = 1$, $\mathbb{P}$-*p.s.*;

d. *L'espérance conditionnelle est $\mathbb{P}$-p.s. linéaire;*

e. *Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable vérifiant que XY est intégrable alors*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}), \ \mathbb{P} - p.s.;$$

f. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X),\ \mathbb{P} - p.s.;$$

g. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ est une sous tribu alors

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}),\ \mathbb{P} - p.s.;$$

h. inégalité de Jensen : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\varphi(X)$ est intégrable alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})),\ \mathbb{P} - p.s.$$

On rappelle brièvement que l'espérance conditionnelle satisfait $\mathbb{P}$-p.s. aux théorèmes limites classiques : convergence monotone, convergence dominé, lemme de Fatou, qui doivent également être connus et que nous ne détaillerons pas ici.

4.3 Martingales à temps continu

Il s'agit principalement d'extensions de la théorie à temps discret.

4.3.1 Définitions

Définition 4.13. *Etant donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ on dira qu'un processus X à valeurs réelles sur cet espace, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté et intégrable (c.à.d. $\forall t \in I$ $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$) est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-*

- *sous-martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$

- *sur-martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$

- *martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Exemples : à titre d'exercice montrer que :

- Toute martingale est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.
- Pour toute v.a. Z intégrable le processus X définit par $X_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$, $\forall t \in I$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale.
- Soient X une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale (resp. sous-martingale) et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante) telle que $\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t\in I}$ est intégrable alors $\varphi(X)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-sous-martingale.

4.3.2 Martingales du MBS

Ces exemples sont à connaitre car fondamentaux pour le calcul stochastique.

Proposition 4.14. *Soit W un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. alors les processus qui suivent sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingales*

a. $W = (W_t)_{t\in I}$;

b. $(W_t^2 - t)_{t\in I}$;

c. $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)\right)_{t\in I}$.

La preuve est laissée en exercice.

4.3.3 Caractérisations du MBS

Théorème 4.15. *Soit $X = (X_t)_{t\in I}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté, à trajectoires continues et tel que $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. Alors X est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-MBS si et seulement si $\forall u \in \mathbb{R}$ le processus $(M_t^u)_{t\in I}$ défini par*

$$M_t^u = \exp\left(iuX_t + \frac{u^2 t}{2}\right), \ \forall t \in I$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale.

Preuve. Le sens direct est une application de la proposition 4.14 pour $\lambda = iu$. Pour la réciproque on suppose donc que les M^u sont des martingales $\forall u \in \mathbb{R}$. Alors $\forall 0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}\left[e^{iu(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\frac{M_t^u}{M_s^u}e^{-u^2(t-s)/2}|\mathcal{F}_s\right] = e^{-u^2(t-s)/2}\frac{1}{M_s^u}\mathbb{E}\left[M_t^u|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left(-\frac{u^2(t-s)}{2}\right)$$

En prenant l'espérance on obtient que la FC de $(X_t - X_s)$ est

$$\Psi_{X_t - X_s}(u) = \exp\left(-\frac{u^2(t-s)}{2}\right)$$

d'où $(X_t - X_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
Pour l'indépendance nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 4.16. *Soient Z une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors Z est indépendante de $\mathcal{G}$ si et seulement si $\forall u \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{P} - p.s.$*

$$\mathbb{E}[e^{iuZ}|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[e^{iuZ}]$$

Preuve. du Lemme : si Z est indépendante de $\mathcal{G}$ alors e^{iuZ} l'est aussi et le résultat est vérifié par les propriétés de l'espérance conditionnelle. Pour la réciproque il suffit de montrer que pour toute v.a. Y, $\mathcal{G}$-mesurable la fonction caractéristique du couple (Y, Z) est égale au produit des FC de Y et de Z. Ainsi on calcule $\forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Psi_{(Z,Y)}(u, v) &= \mathbb{E}[e^{i(uZ+vY)}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{i(uZ+vY)}|\mathcal{G})] \\
&= \mathbb{E}[e^{ivY}\mathbb{E}(e^{iuZ}|\mathcal{G})] \\
&= \mathbb{E}[e^{ivY}\mathbb{E}(e^{iuZ})] \\
&= \mathbb{E}(e^{iuZ})\mathbb{E}[e^{ivY}] \\
&= \Psi_Z(u)\Psi_Y(v)
\end{aligned}$$

ce qui montre le Lemme. □

Le lemme nous permet de conclure que $(X_t - X_s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, qui à son tour permet de conclure que X est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. □

Nous établirons plus tard un autre résultat fameux de caractérisation :

Théorème 4.17. *de Lévy.*
Soit X une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale à trajectoires continue telle que $X_0 = 0$ p.s. Alors X est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. si et seulement si le processus $(X_t^2 - t)_{t\in I}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale.

4.4 Inégalités maximales des martingales

Il s'agit d'extensions des résultats obtenus en temps discret (voir cours de PSAF) en posant

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_t| = \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq k\leq 2^n} |X_{kT/2^n}|$$

on obtient les résultats :

Proposition 4.18. *Premières inégalités maximales.*

a. Pour toute $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-sous-martingale X à trajectoires continues positives on a : $\forall a > 0$ et $\forall T > 0$

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq T} X_t \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(X_T).$$

b. *Pour toute* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-sur-martingale* Y *à trajectoires continues positives on a :* $\forall a > 0$ *et* $\forall T > 0$

$$\mathbb{P}(\max_{0\le t\le T} Y_t \ge a) \le \frac{1}{a}\mathbb{E}(Y_0).$$

Ainsi que les fameuses inégalités L^p de Doob.

Proposition 4.19. *Inégalités maximales* L^p *de Doob.*
Soit X *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-martingale (ou sous-martingale positive) à trajectoires continues. Alors* $\forall p > 1$ *on a*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\ge 0}|X_t|\right)^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\ge 0}\mathbb{E}\left(|X_t|^p\right)$$

Par ailleurs si pour $T > 0$ *on a* $\mathbb{E}\left(|X_T|^p\right) < +\infty$ *alors*

a. *la v.a.* $\max_{0\le t\le T}|X_t|$ *est dans* L^p*;*

b. *on a*

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{0\le t\le T}|X_t|\right)^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left(|X_T|^p\right)$$

4.5 Théorèmes d'arrêt

On dira qu'un T.A. τ est $\mathbb{P}$-p.s. borné si il existe une constante c déterministe telle que

$$\mathbb{P}(\tau < c) = 1$$

Bien entendu τ $\mathbb{P}$-p.s. borné implique $\mathbb{P}$-p.s. fini : $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ attention réciproque fausse.
On admettra sans preuve le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.20. *Théorème d'arrêt.*
Soit X *une une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-martingale à trajectoires continues. Pour tout* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-T.A. borné (p.s.) la v.a.* X_τ *est intégrable et si* σ *est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-T.A vérifiant* $\sigma \le \tau$*,* $\mathbb{P}$*-p.s. alors*

$$\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Remarques : On en déduit que

a. si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. borné alors $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$.

b. si de plus si σ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. alors on a $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_{\tau\wedge\sigma}$, $\mathbb{P}$-p.s. : en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] &= \mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\le\sigma\}}|\mathcal{F}_\sigma] + \mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>\sigma\}}|\mathcal{F}_\sigma] \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau\le\sigma\}}\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] + \mathbf{1}_{\{\tau>\sigma\}}\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau\le\sigma\}}X_\tau + \mathbf{1}_{\{\tau>\sigma\}}X_\sigma \\
&= X_{\tau\wedge\sigma}
\end{aligned}$$

Une conséquence de ces résultats est

Proposition 4.21. *Martingale arrêtée.*
Soit X *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-martingale à trajectoires continues alors pour tout* τ $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-T.A. le* ***processus arrêté*** $X^\tau = (X_{\tau\wedge t})_{t\in I}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$*-martingale.*

Preuve. A tout temps $s \in I$ fixé, la v.a. $\tau\wedge s$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A borné (par s) donc par le théorème d'arrêt $X_{\tau\wedge s}$ est intégrable et est $\mathcal{F}_s$-mesurable, le processus X^τ est donc intégrable et $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté. Enfin par la remarque précédente on a $\mathbb{P} - p.s.$ $\forall 0 \le s \le t$

$$\mathbb{E}[X_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_s] = X_{\tau\wedge t\wedge s} = X_{\tau\wedge s}$$

□

Remarque : Ces résultats sont transposables aux sous-martingales et sur-martingales avec les conclusions respectives correspondantes.

Corollaire 4.22. *Caractérisation des martingales.*
Soit X un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté à trajectoires continues. Alors X est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale si et seulement si $\forall \tau$ $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. borné la v.a. X_τ est intégrable et

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

Preuve. Le sens direct est une simple conséquence du théorème d'arrêt. Pour la réciproque pour tous $0 \leq s \leq t$ et $A \in \mathcal{F}_s$ on pose

$$\tau = s\mathbf{1}_A + t\mathbf{1}_{\overline{A}}$$

On remarque que τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. borné donc par hypothèse

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

et de plus comme t est aussi un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. borné on a

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0).$$

D'où

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_t).$$

Or $X_\tau = X_s\mathbf{1}_A + X_t\mathbf{1}_{\overline{A}}$ ce qui entraine que $\forall A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}(X_s\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_A)$$

qui à son tour implique

$$X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s).$$

Le processus X étant adapté et intégrable on a donc la propriété de martingale. □

4.6 Applications au M.B.S.

4.6.1 Propriété de Markov forte du M.B.S.

On suppose $I = \mathbb{R}^+$.
Une propriété remarquable du mouvement Brownien est que la propriété d'invariance par translation temporelle est conservée pour les temps d'arrêt (finis).

Théorème 4.23. *Propriété de Markov forte.*
Soit W un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. et τ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. fini $\mathbb{P}$-p.s. Alors le processus B définit par $\forall t \geq 0$

$$B_t = W_{\tau+t} - W_\tau$$

est un $(\mathcal{F}_{\tau+t})_{t\in I}$-M.B.S. indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

Preuve. Voir T.D. □

4.6.2 Principe de réflexion du M.B.S.

Le résultat qui suit est une application de la propriété de Markov forte.

Théorème 4.24. *Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. et $y \geq 0$. Alors $\forall t > 0$ et $\forall x \leq y$ on a*

(a)
$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq y,\ W_t \leq x\right) = \mathbb{P}(W_t \geq 2y - x)$$

(b)
$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq y | W_t = x\right) = \exp\left(-2\frac{y(y-x)}{t}\right)$$

(c)
$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq y\right) = \mathbb{P}(|W_t| \geq y)$$

ce qui implique que les v.a. $\max_{0\leq s\leq t} W_s$ et $|W_t|$ ont même loi.

Preuve. Voir T.D. □

Remarque :
Bien observer que lorsque l'on dit que $M_t = \max_{0\leq s\leq t} W_s$ et $|W_t|$ ont même loi pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ il n'en n'est rien des processus $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(|W_t|)_{t\geq 0}$: en effet le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est évidement croissant (en t) ce qui n'est pas le cas de $(|W_t|)_{t\geq 0}$.

4.6.3 Temps d'atteinte d'un niveau par le M.B.S.

Théorème 4.25. *Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. et $a \in \mathbb{R}$ on définit $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$. Alors τ_a est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. $\mathbb{P}$-p.s.-fini. Sa loi est caractérisée par $\forall u \in \mathbb{R}^+$*

$$M_{\tau_a}(u) := \mathbb{E}[e^{-u\tau_a}] = e^{-|a|\sqrt{2u}}.$$

Remarque :
Ce résultat donne la fonction génératrice des moments M_{τ_a} de la v.a. τ_a. Or

$$M'_{\tau_a}(\lambda) = -\frac{|a|}{2\lambda} e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}$$

qui (pour $a \neq 0$) diverge vers $+\infty$ lorsque $\lambda \searrow 0$. Donc $\mathbb{E}(\tau_a) = +\infty$ pour $a \neq 0$. Le temps d'atteinte τ_a est fin $\mathbb{P}$-p.s. mais d'espérance infini pour $a \neq 0$.

Preuve. En T.D. on montre que τ_a est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. $\mathbb{P}$-p.s.-fini.
Si $a = 0$ on a $\tau_0 = 0$ et le résultat est immédiat.
Supposons donc $a \neq 0$, de part la symétrie du M.B.S. τ_a et τ_{-a} ont même loi. On supposera donc sans perte de généralité que $a > 0$. On considère la martingale exponentielle

$$N_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

où $\sigma > 0$. On lui applique le théorème d'arrêt au temps $\tau_a \wedge t$:

$$\mathbb{E}(N_{\tau_a\wedge t}) = \mathbb{E}(N_0) = 1$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{\tau_a\wedge t}) &= \mathbb{E}(N_{\tau_a\wedge t}\mathbf{1}_{\{\tau_a<t\}}) + \mathbb{E}(N_{\tau_a\wedge t}\mathbf{1}_{\{\tau_a\geq t\}}) \\ &= \mathbb{E}(N_{\tau_a}\mathbf{1}_{\{\tau_a<t\}}) + \mathbb{E}(N_t\mathbf{1}_{\{\tau_a\geq t\}}) \end{aligned}$$

On a

$$N_{\tau_a} = \exp\left(\sigma a - \frac{\sigma^2\tau_a}{2}\right) \geq 0$$

et par convergence monotone

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[N_{\tau_a}\mathbf{1}_{\{\tau_a<t\}}] = \mathbb{E}[N_{\tau_a}\mathbf{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}]$$

Sur $\{\tau_a \geq t\}$ on a $W_t \leq a$ donc $N_t \leq \exp(\sigma a - \sigma^2 t/2)$ donc par convergence dominée

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(N_t\mathbf{1}_{\{\tau_a\geq t\}}) = 0$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}[N_{\tau_a}\mathbf{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}] = 1$$

ou

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2\tau_a}{2}\right)\mathbf{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}\right] = e^{-\sigma a}$$

En prenant $\sigma = \sqrt{2u}$ avec $u > 0$ on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-u\tau_a\right)\mathbf{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}\right] = e^{-a\sqrt{2u}}$$

En prenant la limite $u \searrow 0$ on retrouve par convergence monotone que

$$\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1$$

d'où le résultat final

$$\mathbb{E}[e^{-u\tau_a}] = e^{-a\sqrt{2u}}$$

□

Remarques :

1. On constate que l'hypothèse τ bornée dans le théorème d'arrêt est importante : on a $W_{\tau_a} = a$ et par suite
$$\mathbb{E}(W_{\tau_a}) = a \neq \mathbb{E}(W_0)$$
lorsque $a \neq 0$.
2. En revanche on verra en TD que si $a < 0 < b$ alors $\tau := \tau_a \wedge \tau_b$ est un temps d'arrêt d'espérance finie.