TD8 Probas

Anthony Dard, Nathan Cerveau, Adrien Bouchet
Alexis Bruno, Gabriel Bréhault, Mouad Bouchnaf

December 2020

1 Exercice 1

1.1 Question 1

1.1.1 Déterminer la loi de la variable X_n

Pour déterminer la loi de X_n, on calcule $P(X_n = 1)$. On a

$$P(X_n = 1) = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1) \tag{1}$$

$$= \int_R P(U_n^2 + v^2 \leq 1 | V_n = v) f_{V_n}(v) dv \tag{2}$$

$$= \int_0^1 P(U_n \leq \sqrt{1 - v^2} dv) \tag{3}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 - v^2} dv \tag{4}$$

Calculons cette intégrale :

On pose le changement de variable $v = cos(\theta), \theta = arccos(v), dv = -sin(\theta)d\theta$

On a donc :

$$\int_0^1 \sqrt{1 - v^2} dv = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - cos^2(\theta)} sin(\theta) d\theta \tag{5}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(\theta) d\theta \tag{6}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - cos(2\theta)}{2} d\theta \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

$$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{\pi}{4}}$$

1.1.2 Calculer la variance de Z_n et montrer que la suite Z_n converge vers π

$$V(Z_n) = \frac{16}{n^2}V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{16}{n}V(X_1) \tag{9}$$

Or $V(X_1) = E(X_1^2) - E^2(X_1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16}$ car $X_1^2 = X_1$ D'où $V(Z_n) = \frac{\pi}{n}(4-\pi)$
Soit alors $\varepsilon > 0$.D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} \tag{10}$$

$$P(|Z_n - \pi| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n}(\frac{\pi}{\varepsilon^2}(4-\pi)) \rightarrow 0_{(n\rightarrow+\infty)} \tag{11}$$

$$P(|Z_n - \pi| < \varepsilon) \rightarrow 1_{(n\rightarrow\infty)} \tag{12}$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $(|Z_n - \pi|)$ est presque sûrement inférieure à ε. D'où Z_n tend vers π.

1.2 Question 2

1.2.1 A l'aide de l'inégalité de Chebishev, déterminer un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$,$P(|Z_n - \pi| > \varepsilon) \leq \alpha$

$$P(|Z_n - \pi| > \varepsilon) \leq \alpha \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}(\frac{\pi}{\varepsilon^2}(4-\pi)) \leq \alpha \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\pi}{\alpha\varepsilon^2}(4-\pi) \tag{15}$$

Comme n est un entier, on prend l'entier supérieur pour obtenir n_0. On a donc $n_0 = \lfloor \frac{\pi}{\alpha\varepsilon^2}(4-\pi) \rfloor + 1$.

1.2.2 Écrire un algorithme qui retourne une valeur approchée de π à 10^{-4} près, avec une probabilité de $0,95$

On veut $P(|Z_n - \pi| \leq 10^{-4}) \geq 0,95$, soit $1 - P(|Z_n - \pi| > 10^{-4}) \geq 0,95$, soit $P(|Z_n - \pi| > 10^{-4}) \leq 0,05$. D'après la question précédente, on en déduit n_0 : $n_0 = 5393532428$. (On a donc l'algorithme suivant (en Python) :

```
import random as rd

N=0
n=13483832
for i in range(n):
    (u,v)=(rd.uniforn(0,1),rd.uniform(0,1))
    if u**2+v**2<=1:
        N+=1
print(4*(N\n))
```

n=13483832 → n=5393532428 uniforn → uniform \ → /

1.3 Question 3

1.3.1 Calculer la variance de la variable $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$ Cette variance converge-t-elle vers 0 ? Vers une constante ?

Par propriété de la variance : $V(\sqrt{n}(Z_n - \pi)) = nV(Z_n) = \pi(4 - \pi)$. Cette variance est donc une constante, elle ne converge pas vers 0.

1.3.2 Quelle loi connue fournit une bonne approximation de la loi de $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$?

Z_n est, à une constante près, une somme de lois de Bernouilli indépendantes. On peut donc l'approximer par une loi binomiale de paramètre (n,π/4) (d'après la loi des X_n)

2 Exercice 2

2.1 Question 1

On a $(\phi(U_i))_i \in \mathbf{N}$ est une suite de variables aléatoires de même loi et indépendantes donc par la loi des grands nombres:

- $Y_n \to E[Y_1] = \int_0^1 \phi(u)du = \mathcal{I}$ grâce au théorème de transfert

2.2 Question 2

- Par indépendance,

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(\phi(U_i)) \\ &= \frac{1}{n}V(\phi(U_1)) = \frac{1}{n}(E[(1-U_1)U_1^3] - \mathcal{I}^2) \\ &= \frac{1}{n}(E[U_1^3] - E[U_1^4] - \mathcal{I}^2) \\ &= \frac{1}{n}(\frac{1}{20} - \mathcal{I}^2) \end{aligned} \tag{16}$$

  Ainsi,

$$\boxed{V(Y_n) = \frac{1}{n}(\frac{1}{20} - \mathcal{I}^2)} \tag{17}$$

- Par le théorème de Chebyshev: $\forall\epsilon, P(|Y_n - \mathcal{I}| > \epsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\epsilon^2}$
  Ainsi, par passage à l'événement complémentaire:
  $\forall\epsilon, P(|Y_n - \mathcal{I}| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{V(Y_n)}{\epsilon^2}$
  On veut alors $\frac{V(Y_n)}{\epsilon^2} = 0.05$ soit $n = \frac{\frac{1}{20} - \frac{\pi^2}{16^2}}{0.05\epsilon^2}$
  Comme n doit être entier, on prend l'entier superieur qui vérifie donc la condition:

$$\boxed{n = 228938} \tag{18}$$

2.3 Question 3

2.3.1 Montrer que la suite Z_n converge vers $\mathcal{I}$.

On pose $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{f(x)}$

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(V_i) \tag{19}$$

D'après la loi des grands nombres, les $\psi(Vi)$ étant indépendants et de carrés intégrables:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = E[\psi(V_1)] \tag{20}$$

Or, $E[\psi(V_1)] = \int_0^1 \psi(x)f(x)dx = \int_0^1 \phi(x)dx = \mathcal{I}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} Z_n = \mathcal{I}} \tag{21}$$

2.3.2 Comparer la variance de la variable aléatoire Z_n à celle de la variable Y_n.

D'après la question 2, $Var(Y_n) = \frac{1}{n}(\frac{1}{20} - \mathcal{I}^2)$

$Var(Z_n) = \frac{Var(\psi(V_1))}{n} = \frac{E[\psi(V_1)^2] - E[\psi(V_1)]^2}{n} = \frac{E[\psi(V_1)^2] - \mathcal{I}^2}{n}$

$E(\psi(V_1)^2) = \int_0^1 \psi(x)^2 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\phi(x)^2}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{(1-x)x^3}{6x(1-x)}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{6}dx = \frac{1}{18}$

D'où $Var(Z_n) = \frac{1}{n}(\frac{1}{18} - \mathcal{I}^2)$

$$\boxed{Var(Y_n) < Var(Z_n)} \tag{22}$$

2.4 Question 4

Le deuxième algorithme est moins efficace car $Var(Y_n) = 0.01144177 < Var(Z_n) = 0.01699085$

2.5 Question 5

2.5.1 c_α

$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(v)dv = \int_0^1 c_\alpha v^\alpha(1-v)dv = c_\alpha(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}) = c_\alpha\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} = 1$

D'où :

$$\boxed{c_\alpha = (\alpha+1)(\alpha+2)} \tag{23}$$

2.5.2 A quel choix de α correspond l'algorithme de calcul de $\mathcal{I}$ le plus précis ?

$Var(Z_n^\alpha) = \frac{1}{n}[(E(\frac{\phi(V_1)}{f_\alpha(V_1)})^2) - E(\frac{\phi(V_1)}{f_\alpha(V_1)})^2]$

$E((\frac{\phi(V_1)}{f_\alpha(V_1)})^2) = \int_0^1 \frac{\phi(x)^2}{f_\alpha(x)}dx = \frac{1}{c_\alpha}\int_0^1 x^{3-\alpha}dx = \frac{1}{c_\alpha}\frac{1}{3-\alpha+1}$

$E(\frac{\phi(V_1)}{f_\alpha(V_1)}) = \mathcal{I}$

$$\boxed{Var(Z_n^\alpha) = \frac{1}{n}(\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(3-\alpha+1)} - \mathcal{I}^2)} \tag{24}$$

L'algorithme est le plus précis lorsque $Var(Z_n^\alpha)$ est minimale. La valeur minimale est atteinte en $\alpha = 2$.

$$\boxed{Var(Z_n^2) = \frac{1}{n}(\frac{1}{24} - \mathcal{I}^2)} \tag{25}$$

2.5.3 La précision est-elle supérieure à celle de l'algorithme s'appuyant sur la question 1 ?

Pour la question 1, le facteur multiplicatif de la variance était

$$\frac{1}{20} - (\frac{\pi}{16})^2 = 0.011$$

alors que celui de la question 5 est

$$\frac{1}{24} - (\frac{\pi}{16})^2 = 0.0031$$

La variance de la question 5 est inférieure à celle de la question 1 donc l'algorithme de la question 5 sera plus précis.