Examen 2 Session 1

Lundi 10 janvier 2022 - 2h

Merci d'indiquer de manière bien lisible sur votre copie votre numéro de groupe d'analyse

Documents et calculatrices interdits, hormis une feuille A4 Recto-Verso manuscrite.
N.B. : *La rédaction sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est toutefois préférable de conserver l'ordre proposé (difficulté croissante)*

Exercice 1

1. *Soit* $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *et* $\widehat{f}$ *sa transformée de Fourier. Comparer, en le justifiant par le cours,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu$$

2. *En utilisant la relation précédente, calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

Exercice 2

Pour $\alpha > 0$, *on pose* $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.

1. *Calculer la transformée de Fourier de* f.
2. *En utilisant la formule d'inversion (bien justifier!), en déduire la transformée de Fourier de la fonction* $x \to \frac{1}{1+x^2}$.
3. *Montrer que le produit de convolution* $f * f$ *est égal à :*

$$f * f(x) = e^{-\alpha|x|}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)$$

   En déduire la transformée de Fourier de $x \to \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

4. *Déterminer la transformée de Fourier de* $x \to \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
   (Indication : calculer la dérivée de la fonction $x \to \frac{1}{1+x^2}$*)*

Exercice 3

Le but de cet exercice est de rechercher les fonctions u *intégrables telles que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\ u(s)\ ds \tag{1}$$

1. *On pose* $f(x) = e^{-|x|}$. *Calculer la transformée de Fourier de* f *(on pourra utiliser le résultat de la question 1 de l'exercice 2).*
2. *Ecrire l'équation (1) sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.*

3. *On suppose que l'équation (1) admet une solution u. Déterminer sa transformée de Fourier $\hat{u}$.*

4. *Démontrer que l'équation (1) admet une unique solution et la déterminer.*

Exercice 4

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

1. *Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont deux normes sur E.*

2. *Montrer que pour tout $f \in E$, on a :*

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

3. *En déduire que l'application $f \to f$ est continue de (E, N_1) dans (E, N_2) où l'on explicitera les normes N_1 et N_2.*

4. *Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.*
   (Indication : utiliser la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$)
   Que peut-on en déduire pour l'application $f \to f$ de (E, N_2) dans (E, N_1) ?

Exercices facultatifs. NB : ces exercices sont plus difficiles et il n'est pas conseillé de commencer par ceux-ci.

Exercice 5

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-\pi x^2}$. Pour tout réel $t > 0$, on considère la fonction g_t définie sur $\mathbb{R}$ par $g_t(x) = g(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Soient deux réels strictement positifs s et t.

1. *Calculer la transformée de Fourier de $g_s \star g_t$.*

2. *En déduire que $g_s \star g_t = K(s,t) g_{s+t}$, où $K(s,t)$ est une fonction que l'on explicitera.*

Exercice 6

On considère dans cet exercice l'espace de Wiener W défini par $W = L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ c'est à dire les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ qui sont des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que si $f \in W$ alors $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.*

2. *Montrer que si $f \in W$, alors $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p > 1$. On pourra remarquer que $|f(t)|^p = |f(t)|^{p-1}|f(t)|$.*

3. *Montrer que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in W$ si et seulement si $\widehat{f} \in W$.*

4. *Vérifier qu'en posant $\|f\| = \|f\|_1 + \|\widehat{f}\|_1$ on définit une norme sur W.*

5. *Soit (f_n) une suite de Cauchy sur $(W, \|\cdot\|)$. Montrer qu'il existe $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ telles que lorsque $n \to \infty$,*

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \qquad et \qquad \|\widehat{f_n} - g\|_1 \to 0$$

6. *Montrer que* $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$. *En déduire que* $g = \widehat{f}$ *presque partout sur* $\mathbb{R}$.

7. *Déduire de ce qui précède que* $(W, \|\cdot\|)$ *est un espace de Banach.*