

Examen du cours "Introduction aux produits dérivés"
Lundi 11 mai 2015 — 2 heures

Seule une feuille A4 recto verso de résumé du cours est autorisée.

Tous les mouvements browniens considérés ici sont standards.

Exercice 1 (Evaluation et couverture). Un portefeuille financier consiste en la détention de deux actifs :

- Un **actif sans risque**, dont le prix à l'instant t est noté S_t^0 , obtenu en résolvant l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

La constante $r > 0$ est le taux d'intérêt instantané.

- Un **actif risqué**, dont le prix à l'instant t est noté S_t , obtenu en résolvant l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ S_0 = z \end{cases} \quad (2)$$

sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}, \mathbb{P})$ où \mathbb{F} est la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t)_{t \leq T}$, $T > 0$ est l'horizon de temps jusqu'auquel le marché évolue et $z > 0$ est la valeur initiale du sous-jacent.

On rappelle qu'une **stratégie autofinancée** est une paire de processus continus (H_t^0, H_t) adaptés à la filtration \mathbb{F} telle que :

- H_t^0 représente la quantité d'actifs sans risque détenus par l'investisseur à l'instant t et H_t représente la quantité d'actifs risqués détenus par l'investisseur à l'instant t .
- Les processus H^0 et H vérifient

$$\int_0^T |H_t^0|^2 + |H_t|^2 dt < +\infty \quad p.s.$$

La valeur du portefeuille à l'instant t est donnée par le processus (V_t) défini par

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

On supposera enfin que la stratégie satisfait la condition d'autofinancement :

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$