Grammaires : TD2

December 4, 2020

Feuille 2 – exercice 1

Question 1 : Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

1. $S \rightarrow aSaS \qquad S \rightarrow \varepsilon$
2. $S \rightarrow aSb \qquad S \rightarrow aS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $\{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

Feuille 2 – exercice 1

Question 1 : Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

1. $S \rightarrow aSaS \qquad S \rightarrow \varepsilon$
2. $S \rightarrow aSb \qquad S \rightarrow aS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $\{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

Rappels :

- pour montrer l'ambiguïté on montre 2 arbres de dérivation différents pour un même mot
- contrairement aux langages réguliers il n'y a pas d'algorithme d'élimination de l'ambiguïté (d'ailleurs certains langages sont intrinséquement ambigus)
- pour montrer la non-ambiguïté d'une grammaire on a vu des conditions suffisantes

$\Rightarrow$ Il faut donc re-exprimer le langage par une grammaire non ambiguë

Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

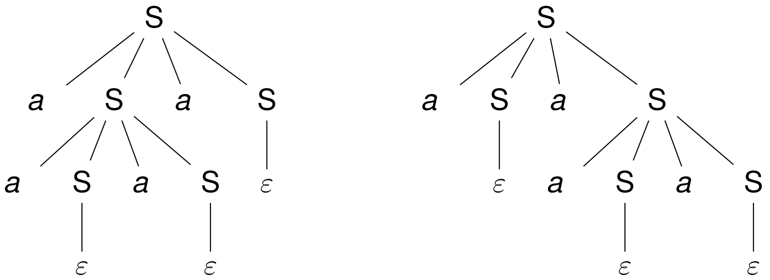
1. $S \rightarrow aSaS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

1. $S \rightarrow aSaS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

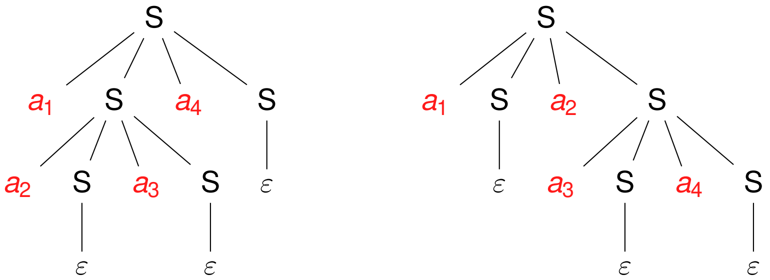
- Ambiguïté : un mot avec deux arbres de dérivation



Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

1. $S \rightarrow aSaS \qquad S \rightarrow \varepsilon$
   - Ambiguïté : un mot avec deux arbres de dérivation

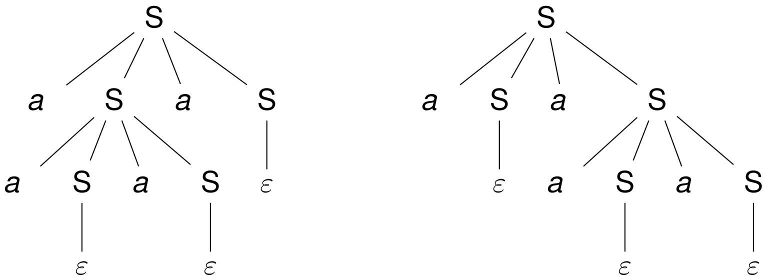


Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

1. $S \rightarrow aSaS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

   - Ambiguïté : un mot avec deux arbres de dérivation



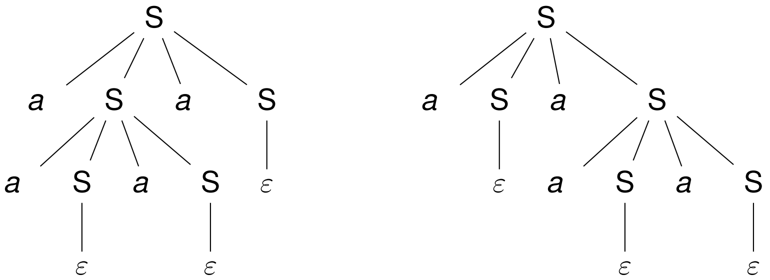
   - Grammaire équivalente non-ambiguë :
     C'est un langage régulier ($(aa)^*$) donc on y arrive

Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

1. $S \rightarrow aSaS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

   - Ambiguïté : un mot avec deux arbres de dérivation



   - Grammaire équivalente non-ambiguë :
     C'est un langage régulier ($(aa)^*$) donc on y arrive
     $S \rightarrow aX \mid \varepsilon \qquad X \rightarrow aS \qquad$ ou : $S \rightarrow aaS \mid \varepsilon$

Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

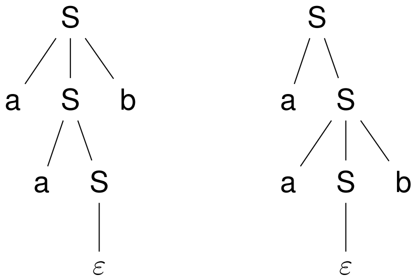
2. $S \rightarrow aSb \qquad S \rightarrow aS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

2. $S \rightarrow aSb \qquad S \rightarrow aS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

- Ambiguïté :

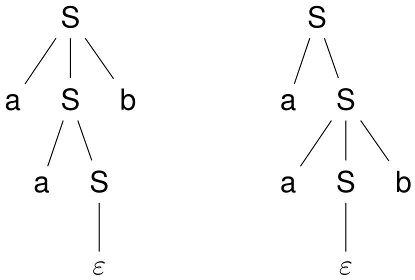


Correction – question 1

Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

2. $S \rightarrow aSb \qquad S \rightarrow aS \qquad S \rightarrow \varepsilon$

- Ambiguïté :



- Grammaire équivalente non-ambiguë :
  $S \rightarrow aS \mid A \qquad A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$
  ou bien : $S \rightarrow aSb \mid A \qquad A \rightarrow aA \mid \varepsilon$

Correction – question 2

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $L = \{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

Correction – question 2

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $L = \{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

- Grammaire ambiguë :

Correction – question 2

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $L = \{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

- Grammaire ambiguë :

$$S \rightarrow aaSb \mid aSb \mid \varepsilon$$

Correction – question 2

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $L = \{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

- Grammaire ambiguë :

$$S \rightarrow aaSb \mid aSb \mid \varepsilon$$

- Grammaire non ambiguë :

Correction – question 2

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $L = \{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

- Grammaire ambiguë :

$$S \rightarrow aaSb \mid aSb \mid \varepsilon$$

- Grammaire non ambiguë :
  Idée : $L = \{a^{2r} a^q b^q b^r \mid q \geq 0, r \geq 0\}$

$$S \rightarrow aaSb \mid X \qquad X \rightarrow aXb \mid \varepsilon$$

Correction – question 2

Question 2 : Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $L = \{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p \geq 0\}$.

- Grammaire ambiguë :

$$S \rightarrow aaSb \mid aSb \mid \varepsilon$$

- Grammaire non ambiguë :
  Idée : $L = \{a^{2r} a^q b^q b^r \mid q \geq 0, r \geq 0\}$

$$S \rightarrow aaSb \mid X \qquad X \rightarrow aXb \mid \varepsilon$$

  Idée : $L = \{a^r a^{2q} b^q b^r \mid q \geq 0, r \geq 0\}$

$$S \rightarrow aSb \mid X \qquad X \rightarrow aaXb \mid \varepsilon$$

Condition suffisante pour qu'une grammaire ne soit pas ambiguë

Une condition suffisante pour qu'une grammaire G ne soit pas ambiguë est que les deux propositions ci-dessous soient vérifiées :

Condition 1 :

pour tout couple de règles $(A \rightarrow \alpha, A \rightarrow \beta)$ de G tel que $\alpha \neq \beta$, $L(\alpha) \cap L(\beta) = \emptyset$;

Condition 2 :

pour toute règle de la forme $A \rightarrow X_1 X_2 ... X_n$, où $X_i \in V_T \cup V_N$, $\forall w \in V_T^*$ tel que $X_1 X_2 ... X_n \Longrightarrow^* w$, $\exists ! (w_1, w_2, ... w_n)$ tel que $w_i \in V_T^*$, $w = w_1 w_2 ... w_n$ et $\forall i$, $X_i \Longrightarrow^* w_i$.

Feuille 2 – exercice 3 : Preuve sur les grammaires

On définit deux langages L_1 et L_2 sur le vocabulaire $V = \{a, b\}$.

Soit $P_1(w)$ la propriété $|w|_a = |w|_b$
et $P_2(w)$ la propriété $\forall u \in \mathit{Prefixe}(w)\ |u|_a \geq |u|_b$

Rappel : La notation $|w|_x$ représente le nombre d'occurrences du symbole x dans w et u est un préfixe de w si et seulement il existe un mot v dans V^* tel que $uv = w$.

- **Définition de L_1 par compréhension :**

$$L_1 = \{w \in V^* : P_1(w) \ \wedge \ P_2(w)\}$$

- **Définition de L_2 par grammaire :** $L_2 = L(S)$ avec

$$S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb$$

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \to \varepsilon \qquad S \to SS \qquad S \to aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \to \varepsilon \qquad S \to SS \qquad S \to aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- S

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \to \varepsilon \qquad S \to SS \qquad S \to aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- $S \underset{S \to SS}{\Longrightarrow} SS$

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w) \ \wedge \ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \to \varepsilon \qquad S \to SS \qquad S \to aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- $S \underset{S \to SS}{\Longrightarrow} SS \qquad \underset{S \to aSb}{\Longrightarrow} aSbS$

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- $$\begin{array}{lll} S & \underset{S \rightarrow SS}{\Longrightarrow} & SS \qquad \underset{S \rightarrow aSb}{\Longrightarrow} \quad aSbS \\ & \underset{S \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} & abS \end{array}$$

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- $$\begin{array}{llll} S \underset{S\rightarrow SS}{\Longrightarrow} & SS & \underset{S\rightarrow aSb}{\Longrightarrow} & aSbS \\ \underset{S\rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} & abS & \underset{S\rightarrow aSb}{\Longrightarrow} & abaSb \end{array}$$

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$
\begin{array}{rcl}
P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\
P_2(w) & : & \forall u \in \mathit{Prefixe}(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\
L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\
L_2 & = & L(S), \qquad S \ \rightarrow\ \varepsilon \qquad S\ \rightarrow\ SS \qquad S\ \rightarrow\ aSb
\end{array}
$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- $$
\begin{array}{llllll}
S & \underset{S\to SS}{\Longrightarrow} & SS & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & aSbS \\
 & \underset{S\to \varepsilon}{\Longrightarrow} & abS & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & abaSb \\
 & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & abaaSbb
\end{array}
$$

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w) \ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \to \varepsilon \qquad S \to SS \qquad S \to aSb \end{array}$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

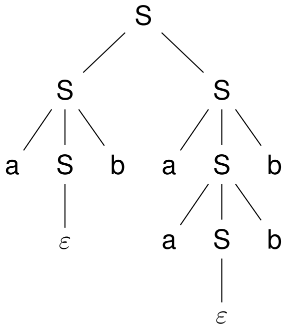
- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- $$\begin{array}{rlll} S \underset{S\to SS}{\Longrightarrow} & SS & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & aSbS \\ \underset{S\to\varepsilon}{\Longrightarrow} & abS & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & abaSb \\ \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & abaaSbb & \underset{S\to\varepsilon}{\Longrightarrow} & abaabb \end{array}$$

Feuille 2 – exercice 3 – question 1

$$
\begin{array}{rcl}
P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\
P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\
L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\
L_2 & = & L(S), \qquad S \to \varepsilon \qquad S \to SS \qquad S \to aSb
\end{array}
$$

Question 1 : Justifier en quoi le mot *abaabb* appartient à la fois à L_1 et L_2.

- (P_1) $|abaabb|_a = 3 = |abaabb|_b$.
  (P_2) Ses sept préfixes ont au moins autant de a que de b. Donc $abaabb \in L_1$.
- $$
\begin{array}{llllll}
S & \underset{S\to SS}{\Longrightarrow} & SS & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & aSbS \\
 & \underset{S\to \varepsilon}{\Longrightarrow} & abS & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & abaSb \\
 & \underset{S\to aSb}{\Longrightarrow} & abaaSbb & \underset{S\to \varepsilon}{\Longrightarrow} & abaabb
\end{array}
$$



Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$
\begin{array}{rcl}
P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\
P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\
L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\
L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb
\end{array}
$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq\ L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq\ L_1$.

Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$
\begin{array}{rcl}
P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\
P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\
L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\
L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb
\end{array}
$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

Correction :

1. Plusieurs possibilités :

Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w) \ \wedge \ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

Correction :

1. Plusieurs possibilités :
   - $S \rightarrow b$

Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

Correction :

1. Plusieurs possibilités :
   - $S \rightarrow b$ permet de produire b qui viole à la fois P_1 et P_2 ;

Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

Correction :

1. Plusieurs possibilités :
   - $S \rightarrow b$ permet de produire b qui viole à la fois P_1 et P_2 ;
   - $S \rightarrow ba$

Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$
\begin{array}{rcl}
P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\
P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\
L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\
L_2 & = & L(S), \qquad S \to \varepsilon \qquad S \to SS \qquad S \to aSb
\end{array}
$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

Correction :

1. Plusieurs possibilités :
   - $S \to b$ permet de produire b qui viole à la fois P_1 et P_2 ;
   - $S \to ba$ permet de produire ba qui satisfait P_1 mais pas P_2 ;

Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

Correction :

1. Plusieurs possibilités :
   - $S \rightarrow b$ permet de produire b qui viole à la fois P_1 et P_2 ;
   - $S \rightarrow ba$ permet de produire ba qui satisfait P_1 mais pas P_2 ;
   - $S \rightarrow a$

Feuille 2 – exercice 3 – question 2

$$\begin{array}{rcl} P_1(w) & : & |w|_a = |w|_b \\ P_2(w) & : & \forall u \in Prefixe(w)\ |u|_a \geq |u|_b \\ L_1 & = & \{w \in \{a,b\}^* : P_1(w)\ \wedge\ P_2(w)\} \\ L_2 & = & L(S), \qquad S \rightarrow \varepsilon \qquad S \rightarrow SS \qquad S \rightarrow aSb \end{array}$$

Question 2 : On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2.

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2.
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

Correction :

1. Plusieurs possibilités :
   - $S \rightarrow b$ permet de produire b qui viole à la fois P_1 et P_2 ;
   - $S \rightarrow ba$ permet de produire ba qui satisfait P_1 mais pas P_2 ;
   - $S \rightarrow a$ permet de produire a qui satisfait P_2 mais pas P_1.

Rappel : preuve de correction

$L(G) \subseteq L$: le but est de montrer que tout mot w produit par la grammaire ($S \Longrightarrow^* w$) vérifie P (est tel que $P(w)$ est vrai).

- La preuve se fait par induction sur la longueur des dérivations : $S \Longrightarrow^n w$
- Demande généralement de caractériser les langages intermédiaires $L(A)$ associés à chaque non-terminal :

$$L_A = \{w \mid w \in V_T^* \wedge P_A(w)\}$$

On va donc prouver pour tout $n > 0$:

$$\forall A \in V_N, \forall w \in V_T* : (A \Longrightarrow^n w) \Rightarrow P_A(w)$$

Avec l'hypothèse d'induction pour tout $k < n$:

$$\forall A \in V_N, \forall w \in V_T* : (A \Longrightarrow^k w) \Rightarrow P_A(w)$$

Preuve de la question 2

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ $(n > 0)$

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \to \alpha \in R$)

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \rightarrow \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité :

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \rightarrow \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ ($= w$)

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \rightarrow \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ ($= w$)
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ $(n > 0)$: $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ $(S \rightarrow \alpha \in R)$

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ $(= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \to \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ $(= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ $(n > 0)$: $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ $(S \to \alpha \in R)$

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ $(= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
   - $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1w_2$ $(= w)$
     avec $S \Longrightarrow^p w_1$ et $S \Longrightarrow^q w_2$ et $p + q = n - 1$

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ $(n > 0)$: $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ $(S \rightarrow \alpha \in R)$

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon\ (= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b\ (= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
   - $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1w_2\ (= w)$
     avec $S \Longrightarrow^p w_1$ et $S \Longrightarrow^q w_2$ et $p + q = n - 1$

   L'hypothèse d'induction (HI) à utiliser est donc :
   $\forall k < n : \quad S \Longrightarrow^k w \ \Rightarrow\ w \in L_1$

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \rightarrow \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon\ (= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b\ (= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
   - $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1w_2\ (= w)$
     avec $S \Longrightarrow^p w_1$ et $S \Longrightarrow^q w_2$ et $p + q = n - 1$

   L'hypothèse d'induction (HI) à utiliser est donc :
   $\forall k < n : \quad S \Longrightarrow^k w \ \Rightarrow \ w \in L_1$

- $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b\ (= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \to \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon\ (= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b\ (= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
   - $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1w_2\ (= w)$
     avec $S \Longrightarrow^p w_1$ et $S \Longrightarrow^q w_2$ et $p + q = n - 1$

   L'hypothèse d'induction (HI) à utiliser est donc :
   $\forall k < n : \quad S \Longrightarrow^k w \ \Rightarrow \ w \in L_1$

- $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b\ (= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
  Par HI, $w_1 \in L_1$

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \rightarrow \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ $(= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
   - $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1w_2$ $(= w)$
     avec $S \Longrightarrow^p w_1$ et $S \Longrightarrow^q w_2$ et $p + q = n - 1$

   L'hypothèse d'induction (HI) à utiliser est donc :
   $\forall k < n : \quad S \Longrightarrow^k w \;\Rightarrow\; w \in L_1$

- $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
  Par HI, $w_1 \in L_1$ et donc, pour $w = aw_1b$:
  1. $|w|_a = |w_1|_a + 1 = |w_1|_b + 1 = |w|_b$

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \to \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ $(= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
   - $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1w_2$ $(= w)$
     avec $S \Longrightarrow^p w_1$ et $S \Longrightarrow^q w_2$ et $p + q = n - 1$

   L'hypothèse d'induction (HI) à utiliser est donc :
   $\forall k < n : \quad S \Longrightarrow^k w \;\Rightarrow\; w \in L_1$

- $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
  Par HI, $w_1 \in L_1$ et donc, pour $w = aw_1b$:
  1. $|w|_a = |w_1|_a + 1 = |w_1|_b + 1 = |w|_b$
  2. u préfixe de w est, soit ε, soit aw_1b, soit au_1 avec u_1 préfixe de w_1...

Preuve de la question 2

Il faut montrer : si $S \Longrightarrow^* w$ alors w satisfait P_1 et P_2

$w \in V_T^*$, donc $S \Longrightarrow^n w$ ($n > 0$) : $S \Longrightarrow \alpha \Longrightarrow^{n-1} w$ ($S \to \alpha \in R$)

On procède donc par induction sur $n > 0$ (longueur de la dérivation)

1. $n = 1$ Une possibilité : $S \Longrightarrow \varepsilon$ $(= w)$
   ε satisfait P_1 et P_2 (il est son seul préfixe), OK
2. $n > 1$ Deux possibilités :
   - $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
   - $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1w_2$ $(= w)$
     avec $S \Longrightarrow^p w_1$ et $S \Longrightarrow^q w_2$ et $p + q = n - 1$

   L'hypothèse d'induction (HI) à utiliser est donc :
   $\forall k < n$: $S \Longrightarrow^k w \;\Rightarrow\; w \in L_1$

- $S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow^{n-1} aw_1b$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{n-1} w_1$
  Par HI, $w_1 \in L_1$ et donc, pour $w = aw_1b$:
  1. $|w|_a = |w_1|_a + 1 = |w_1|_b + 1 = |w|_b$
  2. u préfixe de w est, soit ε, soit aw_1b, soit au_1 avec u_1 préfixe de w_1...
     on conclut facilement

Preuve de la question 2, suite

- $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1 w_2 \ (= w)$ avec $S \Longrightarrow^{p} w_1$, $S \Longrightarrow^{q} w_2$, $p + q = n - 1$ donc $p < n$, $q < n$

Preuve de la question 2, suite

- $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1 w_2\ (= w)$ avec $S \Longrightarrow^{p} w_1$, $S \Longrightarrow^{q} w_2$, $p + q = n - 1$ donc $p < n$, $q < n$

  Par HI, w_1 et w_2 sont dans L_1

Preuve de la question 2, suite

- $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1 w_2$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{p} w_1$, $S \Longrightarrow^{q} w_2$, $p + q = n - 1$ donc $p < n$, $q < n$

  Par HI, w_1 et w_2 sont dans L_1 et donc, pour $w = w_1 w_2$:

Preuve de la question 2, suite

- $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1 w_2$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{p} w_1$, $S \Longrightarrow^{q} w_2$, $p + q = n - 1$ donc $p < n$, $q < n$

  Par HI, w_1 et w_2 sont dans L_1 et donc, pour $w = w_1 w_2$:

  1. $|w|_a = |w_1|_a + |w_2|_a = |w_1|_b + |w_2|_b = |w|_b$

Preuve de la question 2, suite

- $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1 w_2$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^{p} w_1$, $S \Longrightarrow^{q} w_2$, $p + q = n - 1$ donc $p < n$, $q < n$

  Par HI, w_1 et w_2 sont dans L_1 et donc, pour $w = w_1 w_2$:

  1. $|w|_a = |w_1|_a + |w_2|_a = |w_1|_b + |w_2|_b = |w|_b$
  2. pour u préfixe de w :

Preuve de la question 2, suite

- $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1 w_2$ ($= w$) avec $S \Longrightarrow^{p} w_1$, $S \Longrightarrow^{q} w_2$, $p + q = n - 1$ donc $p < n$, $q < n$

  Par HI, w_1 et w_2 sont dans L_1 et donc, pour $w = w_1 w_2$:

  1. $|w|_a = |w_1|_a + |w_2|_a = |w_1|_b + |w_2|_b = |w|_b$
  2. pour u préfixe de w :

     – si u préfixe de w_1 : OK

Preuve de la question 2, suite

- $S \Longrightarrow SS \Longrightarrow^{n-1} w_1 w_2$ $(= w)$ avec $S \Longrightarrow^p w_1$, $S \Longrightarrow^q w_2$, $p + q = n - 1$ donc $p < n$, $q < n$

  Par HI, w_1 et w_2 sont dans L_1 et donc, pour $w = w_1 w_2$:

  1. $|w|_a = |w_1|_a + |w_2|_a = |w_1|_b + |w_2|_b = |w|_b$
  2. pour u préfixe de w :
     – si u préfixe de w_1 : OK
     – si $u = w_1 u_2$ avec u_2 préfixe de w_2 : OK

Feuille 2– exercice 3 – question 3

Question 3 : On veut maintenant montrer que $L_1 \subseteq L_2$. Pour cela on doit montrer que tout mot vérifiant les propriétés P_1 et P_2 peut être dérivé de l'axiome.

1. On vous propose de faire l'analyse par cas suivante :
   (1) $w = \varepsilon$, (2) $w = abu$, (3) $w = uab$ (4) $w = aub$.
   Justifier en quoi cette décomposition n'est pas complète, i.e. qu'il existe des mots de L_1 qui ne peuvent être produits comme une combinaison de ces différents cas.
2. Prouvez $L_1 \subseteq L_2$.

Feuille 2– exercice 3 – question 3

Question 3 : On veut maintenant montrer que $L_1 \subseteq L_2$. Pour cela on doit montrer que tout mot vérifiant les propriétés P_1 et P_2 peut être dérivé de l'axiome.

1. On vous propose de faire l'analyse par cas suivante :
   (1) $w = \varepsilon$, (2) $w = abu$, (3) $w = uab$ (4) $w = aub$.
   Justifier en quoi cette décomposition n'est pas complète, i.e. qu'il existe des mots de L_1 qui ne peuvent être produits comme une combinaison de ces différents cas.
2. Prouvez $L_1 \subseteq L_2$.

Correction :

1. Un exemple de mot dans L_1 qui ne serait pas couvert par la décomposition proposée : *aabbaabb*.

Rappel : preuve de complétude

$L \subseteq L(G)$: le but est de montrer que tout mot vérifiant P (tout mot w tel que $P(w)$ est vrai) peut être produit par la grammaire ($S \Longrightarrow^* w$).

- La preuve se fait généralement par induction sur une mesure associée à w (sa longueur, le nombre d'occurrences d'un certain symbole...), l'ordre choisi dépendant du prédicat P.
- On sera généralement amené à montrer qu'on sait produire les éléments des langages intermédiaires $L(A)$, pour tout $A \in V_N$.

On va donc prouver, pour tout $A \in V_N$ et tout $w \in V_T*$:

$$(P_A(w) \wedge \; |w| = n) \Rightarrow (A \Longrightarrow^* w)$$

Avec l'hypothèse d'induction, pour tout $A \in V_N$:

$$\forall \alpha \, . \, (P_A(\alpha) \wedge |\alpha| < n) \Rightarrow (A \Longrightarrow^* \alpha)$$

Preuve de complétude

Complétude : Soit $w \in L_1$. Notons $n = |w|$ et supposons que pour tout mot $x \in L_1$ de longueur $< n$, on a $x \in L_2$.

Preuve de complétude

Complétude : Soit $w \in L_1$. Notons $n = |w|$ et supposons que pour tout mot $x \in L_1$ de longueur $< n$, on a $x \in L_2$.
Montrons que $w \in L_2$ (i.e. $S \Longrightarrow^* w$).

Preuve de complétude

Complétude : Soit $w \in L_1$. Notons $n = |w|$ et supposons que pour tout mot $x \in L_1$ de longueur $< n$, on a $x \in L_2$.
Montrons que $w \in L_2$ (i.e. $S \Longrightarrow^* w$).
Pour cela distinguons trois cas :

1. $w = \varepsilon$ (qui $\in L_1$) ;

Preuve de complétude

Complétude : Soit $w \in L_1$. Notons $n = |w|$ et supposons que pour tout mot $x \in L_1$ de longueur $< n$, on a $x \in L_2$.
Montrons que $w \in L_2$ (i.e. $S \Longrightarrow^* w$).
Pour cela distinguons trois cas :

1. $w = \varepsilon$ (qui $\in L_1$) ; La règle $S \to \varepsilon$ assure que $w \in L_2$.
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1 x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$.

Preuve de complétude

Complétude : Soit $w \in L_1$. Notons $n = |w|$ et supposons que pour tout mot $x \in L_1$ de longueur $< n$, on a $x \in L_2$.
Montrons que $w \in L_2$ (i.e. $S \Longrightarrow^* w$).
Pour cela distinguons trois cas :

1. $w = \varepsilon$ (qui $\in L_1$) ; La règle $S \to \varepsilon$ assure que $w \in L_2$.
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1 x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$.
   On a $|x_1| < n$ et $|x_2| < n$ donc
   par HI $S \Longrightarrow^* x_1$ et $S \Longrightarrow^* x_2$.

Preuve de complétude

Complétude : Soit $w \in L_1$. Notons $n = |w|$ et supposons que pour tout mot $x \in L_1$ de longueur $< n$, on a $x \in L_2$.
Montrons que $w \in L_2$ (i.e. $S \Longrightarrow^* w$).
Pour cela distinguons trois cas :

1. $w = \varepsilon$ (qui $\in L_1$) ; La règle $S \to \varepsilon$ assure que $w \in L_2$.
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$.
   On a $|x_1| < n$ et $|x_2| < n$ donc
   par HI $S \Longrightarrow^* x_1$ et $S \Longrightarrow^* x_2$.
   La règle $S \to SS$ finit de démontrer que $w \in L_2$.

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1 x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1 x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon : on n'est dans aucun des deux cas précédents, on a donc forcément $\forall x_1 \in Prefixe(w) \setminus \{\varepsilon, w\}, |x_1|_a > |x_1|_b$

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1 x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon : on n'est dans aucun des deux cas précédents, on a donc forcément $\forall x_1 \in Prefixe(w) \setminus \{\varepsilon, w\}, |x_1|_a > |x_1|_b$
   sinon un tel x_1 (avec donc $|x_1|_a = |x_1|_b$) donnerait la décomposition $w = x_1 x_2$ du second cas.

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1 x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon : on n'est dans aucun des deux cas précédents, on a donc forcément $\forall x_1 \in Prefixe(w) \setminus \{\varepsilon, w\}, |x_1|_a > |x_1|_b$
   sinon un tel x_1 (avec donc $|x_1|_a = |x_1|_b$) donnerait la décomposition $w = x_1 x_2$ du second cas.
   Du coup, on a forcément $w = axb$, avec $|x|_a = |x|_b$ (car $|w|_a = |w|_b$)

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon : on n'est dans aucun des deux cas précédents, on a donc forcément $\forall x_1 \in Prefixe(w) \setminus \{\varepsilon, w\}, |x_1|_a > |x_1|_b$
   sinon un tel x_1 (avec donc $|x_1|_a = |x_1|_b$) donnerait la décomposition $w = x_1x_2$ du second cas.
   Du coup, on a forcément $w = axb$, avec $|x|_a = |x|_b$ (car $|w|_a = |w|_b$) et par ailleurs
   $\forall u \in Prefixe(x), au \in Prefixe(w) \setminus \{\varepsilon, w\}$, donc $|au|_a > |au|_b$ et donc $|u|_a \geq |u|_b$.

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon : on n'est dans aucun des deux cas précédents, on a donc forcément $\forall x_1 \in \mathit{Prefixe}(w) \setminus \{\varepsilon, w\}, |x_1|_a > |x_1|_b$
   sinon un tel x_1 (avec donc $|x_1|_a = |x_1|_b$) donnerait la décomposition $w = x_1x_2$ du second cas.
   Du coup, on a forcément $w = axb$, avec $|x|_a = |x|_b$ (car $|w|_a = |w|_b$) et par ailleurs $\forall u \in \mathit{Prefixe}(x), au \in \mathit{Prefixe}(w) \setminus \{\varepsilon, w\}$, donc $|au|_a > |au|_b$ et donc $|u|_a \geq |u|_b$.
   Par conséquent $x \in L_1$, et donc, par HI, $S \Rightarrow^* x$.

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1 x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon : on n'est dans aucun des deux cas précédents, on a donc forcément $\forall x_1 \in \mathit{Prefixe}(w) \setminus \{\varepsilon, w\}, |x_1|_a > |x_1|_b$
   sinon un tel x_1 (avec donc $|x_1|_a = |x_1|_b$) donnerait la décomposition $w = x_1 x_2$ du second cas.
   Du coup, on a forcément $w = axb$, avec $|x|_a = |x|_b$ (car $|w|_a = |w|_b$) et par ailleurs
   $\forall u \in \mathit{Prefixe}(x), au \in \mathit{Prefixe}(w) \setminus \{\varepsilon, w\}$, donc $|au|_a > |au|_b$ et donc $|u|_a \geq |u|_b$.
   Par conséquent $x \in L_1$, et donc, par HI, $S \Rightarrow^* x$.
   La règle $S \to aSb$ finit de démontrer que $w \in L_2$.

Preuve de complétude, suite

1. $w = \varepsilon$ OK
2. Il existe $(x_1, x_2) \in {L_1}^2$ tel que $w = x_1x_2$, $x_1 \neq \varepsilon$ et $x_2 \neq \varepsilon$ OK
3. Sinon : on n'est dans aucun des deux cas précédents, on a donc forcément $\forall x_1 \in \mathit{Prefixe}(w) \setminus \{\varepsilon, w\}, |x_1|_a > |x_1|_b$
   sinon un tel x_1 (avec donc $|x_1|_a = |x_1|_b$) donnerait la décomposition $w = x_1x_2$ du second cas.
   Du coup, on a forcément $w = axb$, avec $|x|_a = |x|_b$ (car $|w|_a = |w|_b$) et par ailleurs
   $\forall u \in \mathit{Prefixe}(x), au \in \mathit{Prefixe}(w) \setminus \{\varepsilon, w\}$, donc $|au|_a > |au|_b$ et donc $|u|_a \geq |u|_b$.
   Par conséquent $x \in L_1$, et donc, par HI, $S \Rightarrow^* x$.
   La règle $S \rightarrow aSb$ finit de démontrer que $w \in L_2$.

On a ainsi prouvé que $L_1 \subseteq L_2$.
On a finalement $L_1 = L_2$.