Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue

Exercice 1

Montrer les égalités ensemblistes suivantes :

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right[\qquad \text{et} \qquad]a,b[=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$$

Correction ▼ [005933]

Exercice 2

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré et $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Montrer que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x)=\begin{cases}-A & \text{si} \quad f(x)<-A\\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)|\leqslant A\\ A & \text{si} \quad f(x)>A\end{cases}$$

est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Correction ▼ [005934]

Exercice 3

Soit $\Omega=\mathbb{N}$, $\Sigma=\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E)=\sharp E=\sum_{k\in E}1,$$

où $E\in\Sigma$. Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Montrer que f est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et que :

$$\int_\Omega f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}f(n).$$

Correction ▼ [005935]

Exercice 4

Soit (Ω,Σ) un espace mesurable. On dit que $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ est une *fonction simple* ou *étagée* si φ est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. si φ s'écrit :

$$\varphi=\sum_{j\in J}c_j\mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i\neq j$, $c_i\neq c_j$ et $E_i\cap E_j=\emptyset$. Soit φ une fonction simple positive. On rappelle que l'intégrale de φ par rapport à une mesure μ est définie par :

$$\int_\Omega\varphi\,d\mu=\int_0^{\infty}\mu\left(S_\varphi(t)\right)\,dt,$$

où $S_\varphi(t)=\{x\in\Omega,\varphi(x)>t\}$.

1. Montrer que

$$\int_\Omega\varphi\,d\mu=\sum_{j\in J}c_j\mu(E_j).$$

2. Montrer que pour toute fonction réelle mesurable positive, $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples positives telle que :
   (a) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Correction ▼ [005936]

Exercice 5

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$ (i.e f est une fonction réelle mesurable positive). Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A \cdot f\,d\mu.$$

Monter que λ définit une mesure sur (Ω, Σ).

Correction ▼ [005937]

Exercice 6

Soit $p > 0$. Soit $f\ :\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

Calculer l'intégrale de f par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ de deux manières différentes :

(i) En utilisant les coordonnées polaires et les méthodes standard de calcul d'intégrales ;

(ii) En calculant la mesure des ensembles $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$ et la définition de l'intégrale de Lebesgue.

Correction ▼ [005938]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Montrons que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a,b] \subset]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$. Donc $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$.
   — Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$
   Ainsi
   $$\lim_{n\to+\infty} (a-\frac{1}{n}) \leqslant x \leqslant \lim_{n\to+\infty} (b+\frac{1}{n}),$$
   c'est-à-dire $x \in [a,b]$. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[\subset [a,b]$ et on a démontré l'égalité entre ces deux ensembles.
2. Montrons que $]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset]a,b[$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset]a,b[$.
   — Soit $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$. Ainsi $x \in]a,b[$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset]a,b[$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Montrons que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si} \quad f(x) < -A \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leqslant A \\ A & \text{si} \quad f(x) > A \end{cases}$$

est mesurable. Notons

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < -A\} = f^{-1}\left(]-\infty, -A[\right), \\ E_2 &:= \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leqslant A\} = f^{-1}\left([-A, A]\right), \\ E_3 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > A\} = f^{-1}\left(]A, +\infty[\right). \end{aligned}$$

Comme $]-\infty, -A[$, $[-A, A]$, $]A, +\infty[$ appartiennent à la tribu borélienne et f est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, les ensembles E_1, E_2, et E_3 appartiennent à Σ. Alors $f_A = f \cdot \mathbf{1}_{E_2} - A \cdot \mathbf{1}_{E_1} + A \cdot \mathbf{1}_{E_3}$ est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E) = \sharp E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Pour tout borélien E, $f^{-1}(E)$ appartient à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, donc f est $(\Sigma\text{-}\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Par définition de l'intégrale,

$$\int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu\left(S_f(t)\right) dt,$$

où $S_f(t) = \{n \in \Sigma, f(n) > t\}$. Pour tout $y \in [0, +\infty[$, posons $A_y := \{n \in \mathbb{N}, f(n) = y\}$. Alors

$$S_f(t) = \cup_{y>t} A_y$$

où l'union est disjointe et où A_y est vide sauf pour un ensemble dénombrable $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de valeurs de y. Par σ-additivité de la mesure μ,

$$\mu\left(S_f(t)\right) = \mu\left(\cup_{y_i>t} A_{y_i}\right) = \sum_{y_i>t} \mu\left(A_{y_i}\right) = \sum_{y_i>t} \mu\left(\{f = y_i\}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu &= \int_0^\infty \sum_{y_i>t} \mu(\{f=y_i\})\,dt = \sum_{i=0}^\infty \int_{0\leqslant t<y_i} \mu(\{f=y_i\})\,dt \\ &= \sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\mu(\{f=y_i\}) = \sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\sharp\{n\in\mathbb{N}, f(n)=y_i\} = \sum_{n=0}^\infty f(n).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit φ une fonction simple positive :

$$\varphi = \sum_{j\in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i\neq j$, $c_i\neq c_j$ et $E_i\cap E_j=\emptyset$.

1. On a
$$\int_\Omega \varphi\,d\mu = \int_0^\infty \mu\left(S_\varphi(t)\right)dt,$$
où $S_\varphi(t)=\{x\in\Omega, \varphi(x)>t\}=\cup_{c_j>t}E_j$ et où $\mu\left(S_\varphi(t)\right)=\sum_{c_j>t}\mu(E_j)$. Ainsi
$$\int_\Omega \varphi\,d\mu = \int_0^\infty \sum_{c_j>t}\mu(E_j)\,dt = \sum_{j\in J}\int_0^{c_j}\mu(E_j)\,dt = \sum_{j\in J} c_j\mu(E_j).$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons
$$\begin{aligned} E_{k,n} &:= \{x\in\Omega,\ k2^{-n}\leqslant f(x)<(k+1)2^{-n}\} \quad \text{pour} \quad k=0,\dots,n2^n-1,\\ E_{n,n} &:= \{x\in\Omega,\ f(x)\geqslant n\} \quad \text{pour} \quad k=n2^n.\end{aligned}$$
Puisque f est mesurable, les ensembles $E_{k,n}$ appartiennent à Σ. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, les ensembles $E_{k,n}$, $0\leqslant k\leqslant n2^n-1$ sont deux à deux disjoints et $\cup_k E_{k,n}=\Omega$. Posons
$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^{-n}-1} k2^{-n}\mathbf{1}_{E_{k,n}}.$$
Alors φ_n est une fonction simple positive vérifiant $\varphi_n\leqslant f$. En outre $0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x\in\Omega$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=f(x)$ pour tout $x\in\Omega$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré et $f\in\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Pour tout $E\in\Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A\cdot f\,d\mu.$$

Montrons que λ définit une mesure sur (Ω,Σ).

$1^{ère}$ *méthode :* On montre d'abord que l'affirmation est vraie pour les fonctions simples. D'après l'exercice 4, toute fonction $f\in\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ s'écrit $f=\sup_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$, où les φ_n sont des fonctions simples. Puisque le supremum d'une famille quelconque de mesure est une mesure, on conclut que λ est une mesure.

2^{de} *méthode :* On a clairement $\lambda(\emptyset)=0$. Il suffit donc de vérifier la σ-additivité de λ. Soit $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\Sigma$ une suite d'éléments deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i} f\,d\mu = \int_{\Omega}\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i} f\,d\mu \\
&= \int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{1}_{E_i}\right) f\,d\mu = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{1}_{E_i}f)\,d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Omega}(\mathbf{1}_{E_i}f)\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\,d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda(E_i).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x)=|x|^{-p}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

(i) On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-p}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x)\,dx = \int_{|x|<1}|x|^{-p}\,dx = \int_{r=0}^{1}\int_{\sigma\in\mathscr{S}_{n-1}} r^{n-p-1}dr d\sigma \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 r^{n-p-1}\,dr.
\end{aligned}$$

Pour $n\leqslant p$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \;=\; +\infty.$$

Pour $p<n$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \;=\; \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{r^{n-p}}{(n-p)}\right]_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

(ii) Pour $a\in[0,+\infty[$,

$$S_f(a)=\{x\in\mathbb{R}^n,|x|^{-p}\mathbf{1}_{|x|<1}>a\}=\{x\in\mathbb{R}^n,|x|^{-p}>a\}\cap\mathscr{B}(0,1),$$

où $\mathscr{B}(0,1)$ est la boule de centre 0 et de rayon 1. Ainsi

$$S_f(a)=\{x\in\mathbb{R}^n,a^{-\frac{1}{p}}>|x|\}\cap\mathscr{B}(0,1).$$

On en déduit que $S_f(a)=\mathscr{B}(0,1)$ si $a^{-\frac{1}{p}}>1$, i.e. si $a<1$ et que $S_f(a)$ est égale à la boule $\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})$ de centre 0 et de rayon $a^{-\frac{1}{p}}$ lorsque $a\geqslant 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}\mu\left(S_f(a)\right)da = \int_0^1\mu\left(\mathscr{B}(0,1)\right)da + \int_1^{+\infty}\mu\left(\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})\right)da \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_1^{+\infty}a^{-\frac{n}{p}}\,da.
\end{aligned}$$

Si $p\geqslant n$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx=+\infty$ et pour $p<n$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left[\frac{a^{-\frac{n}{p}+1}}{-\frac{n}{p}+1}\right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left(1+\frac{p}{n-p}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.
\end{aligned}$$
