Correction TD n°8 Probas IMAG

Mohamed Ahmed Mohamed lemine, Marion Henri et Mourier Alexis

November 2022

1 Exercice 1

1. • Loi de X_n :
X_n est a valeurs dans $\{0,1\}$ et on a :
$$P(X_n = 1) = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1)$$
Or, $U_n, V_n \in [0,1]^2$,
donc $P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1)$ est la probabilité que le point (U_n, V_n) appartienne au quart supérieur droit du cercle trigonométrique.
Notons le D, et C le carré dans lequel il est inscrit.
Alors, après simplification on a :
$$P(X_n = 1) = \frac{Aire(D)}{Aire(C)}$$
Donc :
$$P(X_n = 1) = \frac{\pi}{4}$$
Donc $\boxed{X_n \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{\pi}{4}}$

• Variance de Z_n :
$$var(Z_n) = var(\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$$
Or les $(X_i)_{i\in[1,n]}$ sont i.i.d
Donc :
$$var(Z_n) = \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$
d'où :
$$var(Z_n) = \frac{16}{n} var(X_1)$$
$$\boxed{var(Z_n) = \frac{\pi(4-\pi)}{n}}$$

• Convergence de Z_n :
D'après l'expression de Z_n et la loi fortes des grands nombres, on en déduit que
$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 4.\mathbb{E}(X_1)$$
Or, les X_i suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\pi}{4}$ donc $\mathbb{E}(X_1) = \frac{\pi}{4}$ Ainsi :
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} Z_n = \pi}$$

2. • D'après l'inégalité de Bien-aymé Tchebychev appliquée à ce problème on a :

$$\mathbb{P}(|Z_n - \frac{\pi}{4}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\pi(4-\pi)}{n.\varepsilon^2} = \alpha \quad \text{pour} \quad n > n_0.$$

Donc :

$$\boxed{n_0 = \lfloor \frac{\pi(4-\pi)}{\varepsilon^2 \alpha} \rfloor + 1 \simeq 284 \times 10^6 \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 10^{-4} \, et \, \alpha = 0.95}$$

3. • Cas de la variable aléatoire $\sqrt{n}(Z_n - \pi)$

$$var(\sqrt{n}(Z_n - \pi)) = n.var(Z_n) = \pi(4-\pi) = cte$$

Par le calcul, on trouve rapidement que $\mathbb{E}(\sqrt{n}(Z_n - \pi)) = 0$
Aux vues de ces résultats on peut donc dire que cette nouvelle variable aléatoire suit une loi Normale de paramètres $(\mu = 0, \, \sigma = \sqrt{\pi(4-\pi)})$:

$$\boxed{\sqrt{n}(Z_n - \pi) \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu = 0, \, \sigma = \sqrt{\pi(4-\pi)})}.$$

2 Exercice 2

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(U_i).$$

- (U_n) est une suite de variables aléatoires i.i.d d'après l'énoncé. On peut donc utiliser la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(U_i) = Y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\varphi(U_1)) = \mathbb{E}(\sqrt{(1-u)u^3})).$$

Or, $U_1 \rightsquigarrow U(0,1) \Rightarrow f_{U_i}(x) = 1 \quad \forall i \in (0,1)$:

$$\mathbb{E}(\sqrt{(1-u)u^3})) \underset{Th.transfert}{=} \int_0^1 \varphi(U) f_{U_1}(u) du = \boxed{\int_0^1 \varphi(U) du = I = \frac{\pi}{16}}.$$

2. $Var(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(\varphi(U_i)) \quad$ avec $\quad Var(\varphi(U_i)) = \mathbb{E}(\varphi(U_i)^2) - \mathbb{E}(\varphi(U_i)^2)^2.$

- $\mathbb{E}(\varphi(U_i)^2) = \int_0^1 \varphi(U)^2 f_{U_1}(u) du = \int_0^1 (1-u) u^3 du = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \qquad (*).$
- $\mathbb{E}(\varphi(U_i))^2 = (\int_0^1 \varphi(U) f_{U_1}(u) du)^2 = I^2 = (\frac{\pi}{16})^2 \qquad (**).$

$$(*) + (**) \Rightarrow Var(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{20} - (\frac{\pi}{16})^2) = \boxed{\frac{1}{n}(\frac{1}{20} - (\frac{\pi}{16})^2)}.$$

- D'après Tchebychev :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|Y_n - I| \geqslant \varepsilon) < \frac{1}{n\varepsilon^2}(\frac{1}{20} - (\frac{\pi}{16})^2).$$

$$\begin{array}{lrcl} \Longleftrightarrow & 1 - \mathbb{P}(|Y_n - I| < \varepsilon) & \leqslant & \frac{1}{n\varepsilon^2}(\frac{1}{20} - (\frac{\pi}{16})^2) \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(|Y_n - I| < \varepsilon) & \geqslant & 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}(\frac{1}{20} - (\frac{\pi}{16})^2) = 0.95 \end{array}$$

$$\boxed{\Longleftrightarrow \quad n = \frac{1}{(1-0.95) \times \varepsilon^2}(\frac{1}{20} - (\frac{\pi}{16})^2) \simeq 38553.}$$