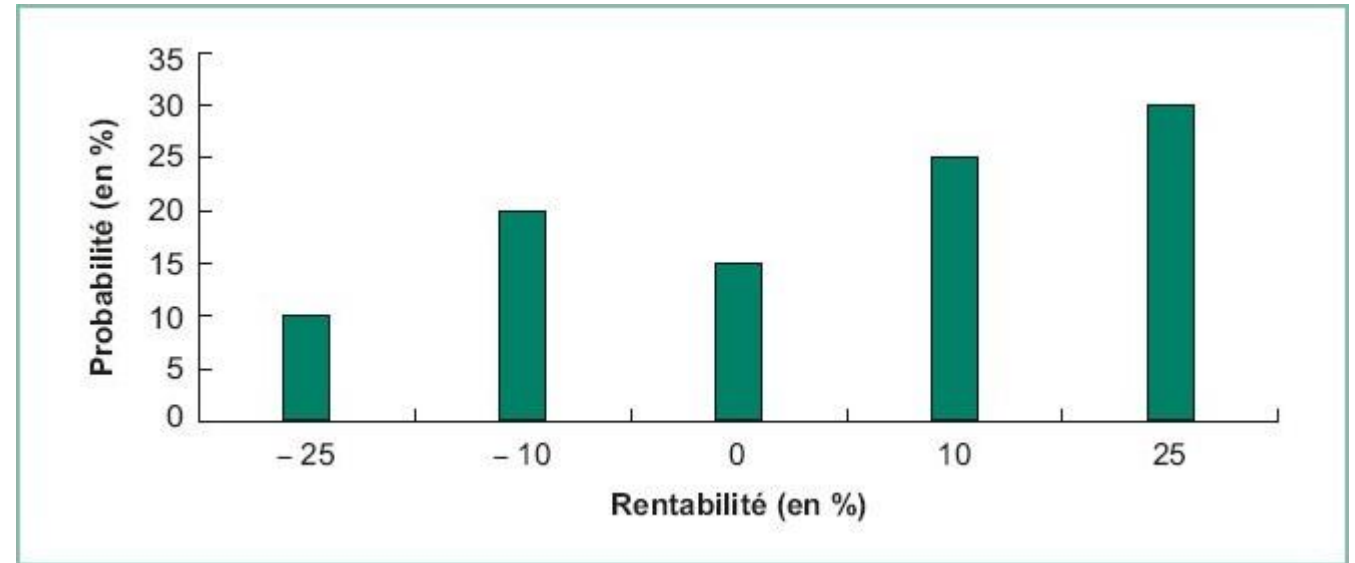


Connecting
talents

Exercices

- La figure représente la densité de probabilité des rentabilités annuelles de l'action Logre. Quelle est sa rentabilité espérée ? Quel est l'écart-type de ses rentabilités ?



- Espérance de rentabilité

$$E[R] = -0.25(0.1) - 0.1(0.2) + 0.1(0.25) + 0.25(0.3) = 5.5\%$$

- Variance des rentabilités

$$\begin{aligned}\text{Variance}[R] &= (-0.25 - 0.055)^2 \times 0.1 + (-0.1 - 0.055)^2 \times 0.2 \\ &\quad + (0.1 - 0.055)^2 \times 0.25 + (0.25 - 0.055)^2 \times 0.3 \\ &= 2.6\%\end{aligned}$$

- Volatilité

$$\sqrt{0.026} = 16.13\%$$

Le tableau donne la densité de probabilité des rentabilités annuelles de l'action Pousset. Quelle est sa rentabilité espérée ? Quel est l'écart-type de ses rentabilités ?

Probabilité	40 %	20 %	20 %	10 %	10 %
Rentabilité	- 100 %	- 75 %	- 50 %	- 25 %	1 000 %

- Espérance de rentabilité

$$E[R] = -1(0.4) - 0.75(0.2) - 0.5(0.2) - 0.25(0.1) + 10(0.1) = 32.5\%$$

- Variance des rentabilités

$$\begin{aligned}\text{Variance}[R] &= (-1 - 0.325)^2 0.4 + (-0.75 - 0.325)^2 0.2 + (-0.5 - 0.325)^2 0.2 \\ &\quad + (-0.25 - 0.325)^2 0.1 + (10 - 0.325)^2 0.1 \\ &= 10.46\end{aligned}$$

- Volatilité

$$\sqrt{10.46} = 3.235 = 323.5\%$$

Question

- En quoi la relation entre la rentabilité moyenne et la volatilité historique d'une action se différencie-t-elle de la même relation dans le cas d'un portefeuille diversifié ?

Réponse

Pour des portefeuilles, il existe une relation entre les rendements et la volatilité - les portefeuilles ayant des rendements plus élevés ont des volatilités plus élevées. Pour les actions, il n'existe pas de relation claire.

-
- Jean est un investisseur qui a une forte aversion au risque. Il a le choix entre deux portefeuilles. Les rentabilités espérées et les volatilités des deux portefeuilles sont identiques.
 - Le premier contient des titres qui fluctuent tous à l'identique : en cas de hausse d'un titre, tous augmentent et réciproquement en cas de baisse.
 - Le second portefeuille est composé de titres dont les rentabilités sont indépendantes : la variation du prix d'un titre n'a pas d'influence sur les prix des autres.
 - Quel portefeuille Jean doit-il choisir ? Pourquoi ?

Réponse

- Le second portefeuille présente une volatilité plus faible en raison de la diversification des risques. Donc il choisit le deuxième portefeuille.

-
- Il existe deux types d'actions : S et I. Les prix des actions de type S évoluent de manière coordonnée. Les prix des actions de type I varient de manière indépendante. Quelles que soient les actions, elles ont une probabilité de 60 % d'avoir une rentabilité de 15 % et une probabilité de 40 % d'avoir une rentabilité de – 10 %.
 - Quelle est la volatilité d'un portefeuille équi pondéré composé de 20 actions S ?
 - De 20 actions I ?

-
- Concernant le portefeuille équipondéré composé de 20 actions S, il n'y a pas de bénéfice lié à la diversification, donc sa volatilité est:

$$\sqrt{(0.15 - 0.05)^2 0.6 + (-0.1 - 0.05)^2 0.4} = 0.12247$$

- Le portefeuille équipondéré composé de 20 actions I bénéficie de la diversification, sa volatilité est:

$$\frac{0.12247}{\sqrt{20}} = 2.74\%.$$

-
- Pourquoi la prime de risque d'un actif ne dépend-elle pas de son risque diversifiable ?

Réponse

- Parce que le risque diversifiable peut être annulé en constituant un portefeuille suffisamment bien diversifié.

-
- Parmi les risques suivants, lesquels relèvent de risques systématiques et de risques diversifiables ?
 - Le P-DG disparaît dans un accident d'avion.
 - L'économie entre en récession, ce qui réduit la demande adressée à l'entreprise.
 - L'ingénieur le plus doué de la division R&D part chez la concurrence.
 - Les recherches en cours dans la division R&D n'aboutissent pas.

Réponses (dans l'ordre)

- Risque spécifique, donc diversifiable (il concerne uniquement le PDG)
- Risque systématique, non-diversifiable (la récession affecte l'ensemble des entreprises)
- Risque spécifique à l'entreprise, donc diversifiable
- Risque spécifique à l'entreprise, donc diversifiable

-
- Le taux d'intérêt sans risque est de 5 %. Le portefeuille de marché aura, chaque année, autant de probabilités d'augmenter de 40 % que de baisser de 20 %. Comparez les deux stratégies d'investissement suivantes : (i) investir la première année dans l'actif sans risque et la suivante dans le portefeuille de marché ; (ii) investir sur deux ans dans le portefeuille de marché.
 - Quelle stratégie aura la rentabilité espérée la plus importante ?
 - Quelle stratégie aura l'écart-type le plus grand ?
 - Détenir les actions sur une plus longue période réduit-il le risque ?

Solution

$$R(i) : (1.05)(1.40) - 1 = 47\% \quad \text{ou} \quad (1.05)(0.80) - 1 = -16\%$$

$$R(ii) : 1.4^2 - 1 = 96\%, 1.4 \times 0.8 - 1 = 12\%, 0.8 \times 1.4 - 1 = 12\%, .8 \times .8 - 1 = -36\%$$

$$a. \quad ER(i) = (47\% - 16\%)/2 = 15.5\%$$

$$ER(ii) = (96\% + 12\% + 12\% - 36\%)/4 = 21\%$$

$$b. \quad Vol(i) = \sqrt{1/2 (47\% - 15.5\%)^2 + 1/2 (-16\% - 15.5\%)^2} = 31.5\%$$

$$Vol(ii) = \sqrt{1/4 (96\% - 21\%)^2 + 1/2 (12\% - 21\%)^2 + 1/4 (-36\% - 21\%)^2} = 47.5\%$$

La deuxième stratégie est plus rentable mais aussi plus risquée. Détenir le portefeuille sur une période plus longue ne réduit pas le risque, autrement dit, il n'y a pas de « diversification temporelle ».

-
- Qu'appelle-t-on un portefeuille efficient ?
 - Réponse:
 - *Il s'agit d'un portefeuille situé sur la frontière efficiente, c'est-à-dire un portefeuille qui présente le niveau de rentabilité maximum pour un niveau de risque donnée, ou, de manière équivalente, un niveau de risque minimum pour une rentabilités donnée.*

-
- Que mesure le bêta d'un actif ?
 - Réponse: *Le beta mesure le niveau de risque systématique, quantifié par la sensibilité de l'actif au portefeuille de marché.*

-
- Quel actif subira la perte la plus importante en cas de chute de 10 % du marché :
 - 1 000 € investis dans un titre avec un bêta de 1,23 ?
 - 5 000 € investis dans un titre avec un bêta de 0,53 ?
 - 2 500 € investis dans un titre avec un bêta de 0,90 ?
 - Réponse:
 - En termes relatifs, la perte la plus élevée correspond au premier actif, car il a le beta le plus élevé (1,23). En cas de chute du marché, on perd $10\% \times 1,23 = 12,3\%$ avec le.
 - En termes absolus, la perte la plus élevée correspond au deuxième actif, $10\% \times 5000 \times 0,53 = 265\text{€}$.

-
- On suppose que le portefeuille de marché a autant de probabilités d'augmenter de 30 % que de baisser de 10 % :
 - Quel est le bêta du titre PIR dont le cours augmente de 43 % en moyenne lorsque le marché est haussier et diminue de 17 % lorsque le marché est baissier ?
 - Quel est le bêta du titre POL dont le cours augmente de 18 % en moyenne lorsque le marché est baissier et diminue de 22 % lorsque le marché est haussier ?
 - Quel est le bêta du titre JAK dont le cours augmente de 4 %, alors que le marché est stable ?

Solution

$$\text{Beta} = \frac{\Delta \text{ Stock}}{\Delta \text{ Market}} = \frac{43 - (-17)}{30 - (-10)} = \frac{60}{40} = 1.5$$

$$\text{Beta} = \frac{\Delta \text{ Stock}}{\Delta \text{ Market}} = \frac{-18 - 22}{30 - (-10)} = \frac{-40}{40} = -1$$

Le troisième titre a un beta de zéro car il n'est pas sensible au marché

-
- Si la prime de risque du marché et le taux sans risque sont, respectivement, de 6,5 % et 5 %, quel est le coût du capital d'un projet dont le bêta est de 1,2 ?
 - **Solution :**

$$r_f + \beta (E[R_m] - r_f) = 5 + 1.2(6.5) = 12.8\%$$

-
- Un portefeuille est composé de 1 000 actions Cap Gemini (CAP), 10 000 actions Ubisoft (UBI) et 5 000 actions BNP Paribas (BNP). Les prix de marché et les rentabilités espérées sont respectivement 40 €, 8 €, 50 € et 12 %, 10 %, 10,5 %.
 - Quelles sont les pondérations de ces trois actions dans le portefeuille ?
 - Quelle est la rentabilité espérée du portefeuille ?
 - On suppose que les actions Cap Gemini et Ubisoft s'apprécient de 5 € alors que celles de BNP Paribas se déprécient de 10 €. Quelles sont les nouvelles pondérations de ces trois actions dans le portefeuille ?
 - On suppose que les rentabilités espérées des actions restent inchangées. Quelle est la rentabilité espérée du portefeuille compte tenu des nouveaux prix des actions ?

Solution

	Nb actions	Prix	E(r)	Capi	Pondérations	E(r)*Capi	Prix_nouv	Capi_nouv	Pond_nouv
CAP	1 000	40	12.0%	40 000	10.81%	4 800	45	45 000	12.00%
UBI	10 000	8	10.0%	80 000	21.62%	8 000	13	130 000	34.67%
BNP	5 000	50	10.5%	250 000	67.57%	26 250	40	200 000	53.33%
E(R_port)	10.55%								



On suppose que le marché est composé seulement des trois actions suivantes :

Action	Nombre total d'actions en circulation	Prix de marché (en euros)	Rentabilité espérée
A	100 millions	100	18 %
B	50 millions	120	12 %
C	200 millions	30	15 %

- Quelle est la capitalisation boursière de ce marché ?
- Quel est le poids représenté par chaque action dans cette capitalisation boursière ?
- Un investisseur détient le portefeuille de marché, c'est-à-dire un portefeuille dont les pondérations correspondent exactement à celles des trois actions telles que déterminées en *b*. Quelle est la rentabilité espérée d'un tel portefeuille ?

Action	Nombre total d'actions existantes	Prix par action	Espérance de rentabilité	Valeur	b.	
A	100.00	\$100	18%	\$10,000.00	0.454545455	8.18%
B	50.00	\$120	12%	\$6,000.00	0.272727273	3.27%
C	200.00	\$30	15%	\$6,000.00	0.272727273	4.09%

a. (en millions) \$22,000.00

c. 15.55%

-
- Il existe deux façons de calculer l'espérance de rentabilité d'un portefeuille : à partir de la valeur globale du portefeuille et des dividendes totaux ou à partir de la moyenne pondérée des espérances de rentabilité des titres qui le composent.
 - Quelle méthode donne la rentabilité espérée la plus élevée ?
 - **Solution:**
 - Les deux calculs donnent le même résultat.

-
- On suppose que les rentabilités de deux actifs affichent une corrélation de $+1$. Si la rentabilité du premier actif est au-dessus de la moyenne cette année, quelle est la probabilité que la rentabilité du deuxième actif soit au-dessus de la moyenne ?
 - **Solution:**
 - Comme la corrélation est parfaite, ils évoluent ensemble (toujours), la probabilité est donc de 1.

-
- Les actions AA et BB ont une volatilité égale à 40 %. Quelle est la volatilité d'un portefeuille investi à 50 % dans chacune des deux actions si leur corrélation est (a) + 1 ; (b) 0,50 ; (c) 0 ; (d) - 0,50 ; (e) - 1 ? Dans quels cas la volatilité du portefeuille est-elle inférieure à celle des deux actions ?

stock vol	40%
corr	50-50 Port
1	40.0%
0.5	34.6%
0	28.3%
-0.5	20.0%
-1	0.0%

La volatilité du portefeuille est moindre si la corrélation est < 1 .

-
- On suppose que la volatilité de l'action Alpha Éditeurs (AE) est égale à 60 % et celle de l'action Bêta Imprimeur (BI) à 30 %. Si la corrélation entre les actions est de 25 %, quelle est la volatilité des portefeuilles investis dans les deux actifs de la manière suivante : (a) 100 % BI ; (b) 75 % BI et 25 % AE ; (c) 50 % AE et 50 % BI ?

-
- Alpha Éditeurs: Volatilité=60%
 - Bêta Imprimeur: Volatilité=30%
 - Corr = 25%
 - Portefeuille (x_{AE} , x_{BI} , Volatilité):

100%	0%	30.00%
75%	25%	30.00%
50%	50%	36.74%

-
- On suppose que les volatilités des actions Avon et Nova sont égales à, respectivement, 50 % et 25 % et que ces deux titres sont parfaitement négativement corrélés. Quelle doit être la composition du portefeuille de risque nul investi dans ces deux titres ?

-
- Avon présente deux fois plus de risque, le portefeuille doit donc être deux fois plus pondéré sur Nova => $\frac{2}{3}$ Avon, $\frac{1}{3}$ Nova.

-
- On suppose que la volatilité de l'action Tex est égale à 40 % et que celle de l'action Mex est de 20 %. Si les deux actions sont non corrélées :
 - a) Quelle est la composition du portefeuille dont la volatilité est égale à celle de l'action Mex ?
 - b) Quelle est la composition du portefeuille de volatilité minimale ?

Solution

	Vol	Corr
Tex	40%	0%
Mex	20%	
Portfolio		
x_tex	x_mex	Vol
0%	100%	20.00%
10%	90%	18.44%
20%	80%	17.89%
30%	70%	18.44%
40%	60%	20.00%
50%	50%	22.36%
60%	40%	25.30%
70%	30%	28.64%
80%	20%	32.25%
90%	10%	36.06%
100%	0%	40.00%

a) 40% Tex et 60% Mex

b) 20% Tex et 80% Mex

-
- On suppose que les volatilités des titres d'un même secteur d'activité sont égales à 50 % et que les corrélations entre paires d'actions sont de 20 %. Quelle est la volatilité d'un portefeuille équipondéré composé de : (a) 1 titre ; (b) 30 titres ; (c) 1 000 titres ?

Solution

Vol	50%
Var	0.25
Corr	20%
Covar	0.05
N	Vol
1	50.0%
30	23.8%
1000	22.4%

-
- Quelle est la volatilité d'un portefeuille équipondéré composé de nombreux titres d'un même secteur d'activité dans lequel les volatilités sont égales à 50 % et dont les corrélations entre paires d'actions sont de 40 % ?
 - Solution

$$(0.5 \times 0.5 \times 0.4)^{0.5} = 31.62\%$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[R_p] &= \frac{1}{N} (\text{Variance moyenne des titres}) \\ &+ \left(1 - \frac{1}{N}\right) (\text{Covariance moyenne entre paires de titres}) \end{aligned}$$

- Dans un portefeuille équi pondéré, les volatilités des titres sont égales à 40 % et les corrélations entre paires d'actions sont de 20 %.
- a) Quelle est la volatilité du portefeuille si le nombre de titres devient très grand ?
- b) Quelle est la corrélation moyenne entre chaque titre et le portefeuille ?

• Solution

a. Covar = 40% × 40% × 20% = 0.032

Volatilité = $(.032)^{0.5} = 17.89\%$

b. Corrélation moyenne = $SD(R_p)/SD(R_i) = 17.89\%/40\% = 44.72\%$

$$Var[R_p] = \frac{1}{N} (\text{Variance moyenne des titres}) + \left(1 - \frac{1}{N}\right) (\text{Covariance moyenne entre paires de titres})$$

$$Var[R_p] = \sum_{i=1}^N x_i Cov(R_i, R_p) = \sum_{i=1}^N x_i \sigma_{R_i} \sigma_{R_p} Corr(R_i, R_p)$$

Contribution du titre i à la volatilité du portefeuille

$$\sigma_{R_p} = \sum_{i=1}^N \underbrace{x_i \times \sigma_{R_i} \times Corr(R_i, R_p)}_{\substack{\text{Poids du titre } i \\ \text{Risque total du titre } i \\ \text{Part du risque du titre } i \text{ commune avec } P}}$$

$$\sigma_{R_p} = \sum_{i=1}^N x_i \sigma_{R_i} Corr(R_i, R_p) < \sum_{i=1}^N x_i \sigma_{R_i}$$

-
- Un portefeuille est composé des actions A et B. La volatilité de l'action A est égale à 65 % et sa corrélation avec le portefeuille est de 10 %. La volatilité de l'action B est égale à 30 % et sa corrélation avec le portefeuille est de 25 %.
 - La volatilité du portefeuille augmentera-t-elle si on vend une faible quantité d'actions B et qu'on investit le montant récupéré dans les actions A ? Et si on fait le contraire ?
 - **Solution:** La contribution marginale est $SD(R_i) \times \text{Corr}(R_i, R_p)$.
Pour A: $65\% \times 10\% = 6,5\%$; Pour B: $30\% \times 25\% = 7,5\%$. Donc, la volatilité augmente si on vend A et on ajoute B.

-
- Un portefeuille est composé de trois actifs, Delta, Gamma et Oméga dont les volatilités sont égales à, respectivement, 60 %, 30 % et 20 %. Le portefeuille est investi à 50 % dans Delta, 25 % dans Gamma et 25 % dans Oméga.
 - a) Quelle est la volatilité maximale du portefeuille ?
 - b) Si la volatilité du portefeuille est celle calculée en a, quelle est la corrélation entre Delta et Oméga ?

Solution:

- a. $\text{Max vol} = 0.5(60\%) + 0.25(30\%) + 0.25(20\%) = 42.5\%$
- b. $\text{Correlation} = 1$ (sinon il y aurait une certaine diversification)

-
- L'espérance de rentabilité de l'action Renault est de 20 % et sa volatilité est égale à 40 %. L'espérance de rentabilité de l'action Pernod Ricard est de 10 % et sa volatilité est égale à 30 %. Les deux actions ne sont pas corrélées.
 - Quelles sont l'espérance de rentabilité et la volatilité d'un portefeuille équipondéré composé de ces deux titres ?
 - Un portefeuille uniquement constitué d'actions Pernod Ricard est-il efficient ?
 - Et s'il est uniquement constitué d'actions Renault ?

	A	B	Corr
ER	20%	10%	
Vol	40%	30%	0%
XA	XB	Vol	ER
50%	50%	25.0%	15.0%

- b. Non, dominé par le portefeuille 50-50.
 C. Oui, non dominé.

-
- On suppose que les actions Kering ont une rentabilité espérée de 26 % et une volatilité de 50 %, alors que celles de Danone sont respectivement de 6 % et 25 %. On suppose que les deux actions sont parfaitement négativement corrélées.
 - Quelle est la composition du portefeuille de risque nul ?
 - S'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage, quel est le taux d'intérêt sans risque de l'économie ?

-
- A. Si les deux actions sont parfaitement corrélées négativement, elles fluctuent en raison des mêmes risques, mais dans des directions opposées. Comme Danone est deux fois plus volatile que Kering, nous devons détenir deux fois plus d'actions de Kering que de Danone afin de compenser le risque de Kering. Autrement dit, notre portefeuille devrait être composé de 2/3 de Kering et de 1/3 Danone.
 - B.
$$= (2/3)6\% + (1/3)26\%$$
$$= 12.67\%.$$