Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Dualité
Interprétation économique, Perturbation des données

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Dual

En général

Primal

$$\begin{array}{rcccccl}
A_{11} \cdot x_1 & + & A_{12} \cdot x_2 & + & A_{13} \cdot x_3 & \leq & b_1 \\
A_{21} \cdot x_1 & + & A_{22} \cdot x_2 & + & A_{23} \cdot x_3 & = & b_2 \\
A_{31} \cdot x_1 & + & A_{32} \cdot x_2 & + & A_{33} \cdot x_3 & \geq & b_3 \\
x_1 \geq 0 & & \mathbb{R} \ni x_2 & & x_3 & \leq & 0 \\
c_1^T \cdot x_1 & + & c_2^T \cdot x_2 & + & c_3^T \cdot x_3 & = & z(\max)
\end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{rcccccl}
y_1^T \cdot A_{11} & + & y_2^T \cdot A_{21} & + & y_3^T \cdot A_{31} & \geq & c_1^T \\
y_1^T \cdot A_{12} & + & y_2^T \cdot A_{22} & + & y_3^T \cdot A_{32} & = & c_2^T \\
y_1^T \cdot A_{13} & + & y_2^T \cdot A_{23} & + & y_3^T \cdot A_{33} & \leq & c_3^T \\
0 \leq y_1, & & y_2 \in \mathbb{R} & & 0 \geq y_3 & & \\
y_1^T \cdot b_1 & + & y_2^T \cdot b_2 & + & y_3^T \cdot b_3 & = & w(\min)
\end{array}$$

EXO 10.1.

Énoncé

Ecrire le dual du programme linéaire suivant:

$$
\begin{array}{lrl}
 & 3x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 4 \\
 & 1x_1 - 2x_2 + 1x_3 &\leq 1 \\
\text{Primal} & 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 &\geq 2 \\
 & 0 \leq x_1 \qquad x_2 \leq 0 & \\
 & -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= z(\max)
\end{array}
$$

EXO 10.1.

Solution

Primal

$$\begin{array}{rrrll}
3x_1 & +1x_2 & -2x_3 & = & 4 \\
1x_1 & -2x_2 & +1x_3 & \leq & 1 \\
2x_1 & +1x_2 & -1x_3 & \geq & 2 \\
x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \in \mathbb{R} & & \\
-3x_1 & -4x_2 & -2x_3 & = & z(\max)
\end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{rrrll}
3y_1 & +\ 1y_2 & +2y_3 & \geq & -3 \\
1y_1 & -\ 2y_2 & +1y_3 & \leq & -4 \\
-2y_1 & +\ 1y_2 & -1y_3 & = & -2 \\
\mathbb{R} \ni y_1 & 0 \leq y_2 & 0 \geq y_3 & & \\
4y_1 & +\ 1y_2 & +2y_3 & = & w(\min)
\end{array}$$

EXO 10.2.

Énoncé

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution optimale du programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\geq 4 \\ 1x_1 + 4x_2 &\geq 5 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ 1x_1 + 1x_2 &= w(\min) \end{aligned}$$

EXO 10.2.

Solution

Primal
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\geq 4 \\ 1x_1 + 4x_2 &\geq 5 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ 1x_1 + 1x_2 &= w(\min) \end{aligned}$$

Dual
$$\begin{aligned} 3y_1 + 1y_2 &\leq 1 \\ 1y_1 + 4y_2 &\leq 1 \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \\ 4y_1 + 5y_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix}$ sont des solutions optimales du primal et du dual $\Longleftrightarrow$

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix}$ sont des solutions réalisables du primal et du dual et
2. les conditions des écarts complémentaires sont satisfaites.

EXO 10.2.

1. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\overline{y}_1\\\overline{y}_2\end{pmatrix}$ sont des solutions réalisables du primal et du dual :
   - $\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est une solution réalisable du primal :
     - $3\overline{x}_1 + 1\overline{x}_2 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 \geq 4$ (satisfaite avec égalité)
     - $1\overline{x}_1 + 4\overline{x}_2 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 5 \geq 5$ (satisfaite avec égalité)
     - $\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \geq 0.$
2. Les conditions des écarts complémentaires sont satisfaites :
   - si $\overline{y}_i > 0$ alors $a_i \cdot \overline{x} = b_i$, on vient de vérifier.
   - si $\overline{x}_j > 0$ alors $\overline{y}^T \cdot a^j = c_j$,
     - $\overline{x}_1 = 1 > 0$ donc $3\overline{y}_1 + 1\overline{y}_2 = 1$
     - $\overline{x}_2 = 1 > 0$ donc $1\overline{y}_1 + 4\overline{y}_2 = 1.$

   dont la solution est $\begin{pmatrix}\overline{y}_1\\\overline{y}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{11}\\\frac{2}{11}\end{pmatrix} \geq 0$, donc
   - $\begin{pmatrix}\overline{y}_1\\\overline{y}_2\end{pmatrix}$ est une solution réalisable du dual.
3. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{3}{11}\\\frac{2}{11}\end{pmatrix}$ sont des solutions optimales du primal et du dual.

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et
  3. **19** cartes téléphoniques.
- Après une étude de marché, il sait très bien que, dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients deux coffrets qui vont lui rapporter des profits nets :
  1. Coffret 1 : **1** téléphone, **0** kit et **2** cartes, avec un profit net de **7**€.
  2. Coffret 2 : **1** téléphone, **1** kit et **3** cartes, avec un profit net de **9**€.
- Il est assuré de pouvoir vendre tranquillement n'importe quelle quantité de ses offres dans la limite du stock disponible.
- Quelle quantité de chaque offre notre vendeur doit-il préparer pour maximiser son profit net?
- Le PL était $\begin{array}{rrcr} 1x_1 & +1x_2 & \leq & 8 \\ & x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq & 19 \end{array}$ $\begin{array}{rrl} x_1, & x_2 & \geq 0 \\ 7x_1 & +9x_2 & = z(\max) \end{array}$

Perturbation des données (Problème de production)

$$(P)\quad \begin{array}{rrl} 1x_1 & +1x_2 & \leq 8 \\ & x_2 & \leq 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq 19 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \\ 7x_1 & +9x_2 & = z(\max) \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrrl} 1y_1 & & + & 2y_3 \geq 7 \\ 1y_1 & + & 1y_2 + & 3y_3 \geq 9 \\ y_1, & & y_2, & y_3 \geq 0 \\ 8y_1 & + & 4y_2 + & 19y_3 = w \ (\min) \end{array}$$

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{array}{rrl} 1x_1 & +1x_2 & \leq 8+\varepsilon_1 \\ & x_2 & \leq 4+\varepsilon_2 \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq 19+\varepsilon_3 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \\ 7x_1 & +9x_2 & = z_\varepsilon(\max) \end{array} \qquad (D_\varepsilon)\quad \begin{array}{rrrl} 1y_1 & & + & 2y_3 \geq 7 \\ 1y_1 & + & 1y_2 + & 3y_3 \geq 9 \\ y_1, & & y_2, & y_3 \geq 0 \\ (8+\varepsilon_1)y_1 & + & (4+\varepsilon_2)y_2 + & (19+\varepsilon_3)y_3 = w_\varepsilon(\min) \end{array}$$

- Qu'est-ce qui se passe si l'on perturbe un peu le vecteur b ?
- Peut-on dire quelque chose sur le changement de la fonction objectif ?
- Le polyèdre a changé, on ne voit pas comment calculer $z_\varepsilon(\max)$.
- Utilisons la dualité ! Le polyèdre du dual n'a pas changé.
- La solution optimale $\overline{y}$ du (D) ne change pas pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ petits.

Perturbation des données (Problème de production)

$$(P)\quad \begin{array}{rrcl} 1x_1 & +1x_2 & \leq & 8 \\ & x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq & 19 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 \\ 7x_1 & +9x_2 & = & z(\max) \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrrcl} 1y_1 & & + \;2y_3 & \geq & 7 \\ 1y_1 \;+ & 1y_2 \;+ & 3y_3 & \geq & 9 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0 \\ 8y_1 \;+ & 4y_2 \;+ & 19y_3 & = & w\ (\min) \end{array}$$

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{array}{rrcl} 1x_1 & +1x_2 & \leq & 8+\varepsilon_1 \\ & x_2 & \leq & 4+\varepsilon_2 \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq & 19+\varepsilon_3 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 \\ 7x_1 & +9x_2 & = & z_\varepsilon(\max) \end{array} \qquad (D_\varepsilon)\quad \begin{array}{rrrcl} 1y_1 & & + \;2y_3 & \geq & 7 \\ 1y_1 \;+ & 1y_2 \;+ & 3y_3 & \geq & 9 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0 \\ (8+\varepsilon_1)y_1 & +(4+\varepsilon_2)y_2 & +(19+\varepsilon_3)y_3 & = & w_\varepsilon(\min) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} z_\varepsilon(\max) & = & w_\varepsilon(\min) \\ & = & (8+\varepsilon_1)\overline{y}_1 + (4+\varepsilon_2)\overline{y}_2 + (19+\varepsilon_3)\overline{y}_3 \\ & = & (8\overline{y}_1 + 4\overline{y}_2 + 19\overline{y}_3) + (\varepsilon_1\overline{y}_1 + \varepsilon_2\overline{y}_2 + \varepsilon_3\overline{y}_3) \\ & = & w(\min) + \varepsilon_1\overline{y}_1 + \varepsilon_2\overline{y}_2 + \varepsilon_3\overline{y}_3 \\ & = & z(\max) + \varepsilon_1\overline{y}_1 + \varepsilon_2\overline{y}_2 + \varepsilon_3\overline{y}_3. \end{array}$$

Problème de production : Continuation; EXO 10.3.

Énoncé

1. Le vendeur constate que la solution optimale $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (5, 3)$ prévoit l'utilisation totale des appareils (et des cartes).
2. Le problème est de savoir à quel prix unitaire a-t-on intérêt à acheter des appareils supplémentaires.
3. Il est évident qu'un prix trop élevé risque d'anéantir le profit supplémentaire.

Solution

- $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.$
- Profit supplémentaire $=$ Gain suppl. - Dépense suppl.
  $= (z_{\varepsilon_1}(\max) - z(\max)) - \varepsilon_1 prix = \varepsilon_1 \overline{y}_1 - \varepsilon_1 prix = \varepsilon_1(\overline{y}_1 - prix).$
- On a intérêt à acheter des appareils supplémentaires si $prix < \overline{y}_1 = 3.$
- En économie : les variables du dual s'appellent coût marginal.
- On peut calculer une solution optimale du (D) : $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (3, 0, 2).$

EXO. 10.4.

1. Un artisan confiturier doit prendre une décision importante, lui permettant de maximiser son futur profit net dans la situation suivante : il dispose d'une réserve
   - de **8** tonnes de sucre et
   - d'un capital de **40000€**.
2. Il peut acheter des fraises,
   - cela lui coûtera immédiatement **2€** par kg de fraises traité et
   - lui rapportera plus tard **4€50** par kg de confiture vendu.
3. Une autre solution consiste à acheter des roses.
   - Il devra alors débourser **15€** par kg de roses traité,
   - mais aura un revenu ultérieur de **12€60** par kg de confiture vendu.
4. Ici on admet que la production
   - de confitures de fraises consiste à mélanger **50%** de fruits et de **50%** de sucre et
   - pour obtenir la confiture de roses on mélange **40%** de fruits et de **60%** de sucre.
5. Comment doit-il faire pour maximiser son bénéfice net?

EXO. 10.4.

Solution

1. Tableau de données :

	Sucre	Fruit	Conf.	Dépense	Gain	Profit
Fraise	x_1	x_1	$2x_1$	$2 \cdot x_1$	$4.5 \cdot 2x_1$	$9x_1 - 2x_1 = 7x_1$
Rose	x_2	$\frac{2}{3}x_2$	$\frac{5}{3}x_2$	$15 \cdot \frac{2}{3}x_2$	$12.6 \cdot \frac{5}{3}x_2$	$21x_2 - 10x_2 = 11x_2$
Dispo.	8000			40000		$7x_1 + 11x_2$

2. (P) $$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 1x_2 & \leq & 8000 \\ 2x_1 + 10x_2 & \leq & 40000 \\ x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \\ 7x_1 + 11x_2 & = & z(\max) \end{array}$$ (D) $$\begin{array}{rcl} 1y_1 + 2y_2 & \geq & 7 \\ 1y_1 + 10y_2 & \geq & 11 \\ y_1, \quad y_2 & \geq & 0 \\ 8000y_1 + 40000y_2 & = & w(\min) \end{array}$$

3. Forme standard du primal $$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 & = & 8000 \\ 2x_1 + 10x_2 + 1x_4 & = & 40000 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0 \\ 7x_1 + 11x_2 & = & z(\max) \end{array}$$

EXO. 10.4.

Solution

1. On trouve une solution optimale du (P) avec l'algorithme du simplexe

1	1	1	0	8000	ℓ_1
2	$\boxed{10}$	0	1	40000	ℓ_2
7	11	0	0	0	ℓ_3

$\boxed{0.8}$	0	1	-0.1	4000	$\ell'_1 = \ell_1 - 1\ell'_2$
0.2	1	0	0.1	4000	$\ell'_2 = \ell_2/10$
4.8	0	0	-1.1	-44000	$\ell'_3 = \ell_3 - 11\ell'_2$

1	0	1.25	-0.125	5000	$\ell''_1 = \ell'_1/0.8$
0	1	-0.25	0.125	3000	$\ell''_2 = \ell'_2 - 0.2\ell''_1$
0	0	-6	-0.5	-68000	$\ell''_3 = \ell'_3 - 4.8\ell''_1$

2. On s'arrête avec $c_4 = -0.5 < 0$, la solution optimale du (P) est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (5000, 3000)$.

EXO. 10.4.

Solution

1. Peut-on trouver une solution optimale du dual après l'exécution du simplexe sur le primal ?
2. On a vu dans la démonstration du théorème fort de la dualité que si J est une base optimale du primal alors $\pi^T = c_J^T \cdot (A^J)^{-1}$ est une solution optimale du dual.
3. Peut-on trouver π dans le dernier tableau ?
4. On sait que $\hat{c}^T = c^T - \pi^T \cdot A$, donc
   $\hat{c}_{J_1}^T = c_{J_1}^T - \pi^T \cdot A^{J_1} = 0 - \pi^T \cdot I = -\pi^T$.

$A^{\bar{J}_1}$	I	b
$c_{\bar{J}_1}$	0	

	$-\pi^T$	

EXO. 10.4.

Solution

1. Le dernier tableau était :

1	0	1.25	-0.125	5000
0	1	-0.25	0.125	3000
0	0	-6	-0.5	-68000

2. Une solution optimale du (D) est $(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = (\pi_1, \pi_2) = (6, 0.5)$.

$$
(D) \quad \begin{array}{rcrcl}
1y_1 & + & 2y_2 & \geq & 7 \\
1y_1 & + & 10y_2 & \geq & 11 \\
y_1, & & y_2 & \geq & 0 \\
8000y_1 & + & 40000y_2 & = & w(\min)
\end{array}
$$

EXO. 10.4.

Peut-on faire mieux ?

On pourrait acheter du sucre :

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{array}{rcl} 1x_1 + \ 1x_2 & \leq & 8000 + \varepsilon \\ 2x_1 + 10x_2 & \leq & 40000 \\ x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \\ 7x_1 + 11x_2 & = & z_\varepsilon(\max) + \varepsilon prix \end{array} \qquad (D_\varepsilon)\quad \begin{array}{rcl} 1y_1 + \quad 2y_2 & \geq & 7 \\ 1y_1 + \quad 10y_2 & \geq & 11 \\ y_1, \quad y_2 & \geq & 0 \\ (8000+\varepsilon)y_1 + 40000y_2 & = & w_\varepsilon(\min) \end{array}$$

Si ε est petit tel que la solution optimale du dual ne change pas alors
Profit supplémentaire : $z_\varepsilon(\max) - z(\max) = \varepsilon(\overline{y}_1 - prix) = \varepsilon(6 - prix)$.
Profit supplémentaire > 0 :

1. Si $prix < 6$ on achète du sucre (12000 kg),
2. Si $prix > 6$ on vend du sucre (4000 kg).

On peut aussi calculer il faut acheter ou vendre combien de kg de sucre.
Il faut que la solution optimale du dual ne change pas :
$-\frac{1}{10} \geq -\frac{8000+\varepsilon}{40000} \geq -\frac{1}{2}$, c-à-d. $-4000 \leq \varepsilon \leq 12000$.