ch V : le MEDAF ou CAPM modèle d'equilibre des actifs financiers

Capital asset pricing model

① objectif et hypothese :

trouver les relations sur les rentabilites esperées de titres quand le marché est a l'equilibre.

hypothèse : (H1) l'hypothese des marchés parfaits pas de frais, taxe, impôts pas de restrictions sur les ventes a decouvert personne ne "pèse" sur les prix

(H2) les investisseurs sont insatiables, riscophobes, et maximisent leur esperance d'utilité pour leur richesse finale dans un espace esperance de rentabilité/risque

(H3) les marchés sont a l'equilibre (ie que les prix se sont ajustés pour que l'offre egale à la demande.

② Portefeuille de marché :

definition : le portefeuille du marché est un portefeuille qui comprend chaque titre aux proportion sa capitalisation boursière (valeur de marché de l'entreprise)

si la société i a N_i titres, prix d'un titre a la date t est $S_i(t)$ alors la capitalisation boursière est $N_i S_i(t)$

si on note $R_m(t)$ la rentabilité du portefeuille de marché à la date t, N = nombre d'entreprises

$$R_m(t) = \sum_{i=1}^{N} w_m(i,t) R_i(t) \qquad w_m(i,t) = \frac{N_i S_i(t)}{\sum_{j=1}^{N} N_j S_j(t)} \quad 2.1$$

théorème :

lorsque le marché est à l'equilibre le portefeuille de marché est une CL convexe des portefeuilles de l'ensemble des investisseurs

demo :

il y a $K \geq 1$ investisseurs(s) sur le marché chaque investisseur $k \in \{1..K\}$ a une richesse initiale $W_0(k)$ et on note $W_0 = \sum_{k=1}^{K} W_0(k)$

Comme le marché est à l'equilibre $W_0 = \sum_{i=1}^{N} N_i S_i(0)$ c-à-d tous les titres sont détenus

pour $k \in \{1...K\}$ pour $i \in \{1...N\}$

$w_i(k)$ = poids du titre i dans le portefeuille de l'investisseur k

Equilibre $\Rightarrow \forall i \in \{1...N\}$ $N_i S_i(0) = \sum_{k=1}^{K} w_i(k) W_0(k)$

$2.1 \Rightarrow N_i S_i(0) = \sum_{j=1}^{N} N_j S_j(0)\, w_m(i,0) = W_0\, w_m(i,0)$

$\Rightarrow w_m(i,0) = \sum_{k=1}^{K} \frac{W_0(k)}{W_0} w_i(k)$ $\quad w_m(i,0) = CL$ des $w_i(k)$ elle est convexe

car $\sum_{k=1}^{K} W_0(k) = W_0$

Théorème : le portefeuille de marché est moyenne – variance efficient (sur la frontière efficiente des actifs risqués) (si les hypothesis H_1, H_2, H_3 sont verifiés)

Théorème (MEDAF ou CAPM)

lorsqu'il existe un EC de taux actuariel r_f (taux sans risque) et que les hypothèses H_1 à H_3 sont verifiés on a $\forall i \in \{1..N\}$ $\mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i(\mathbb{E}(R_m) - r_f)$ avec $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$

R_i : rentabilité du titre , R_m = rentabilité du portefeuille de marché

proposition : si les hypothèses H_1 à H_3 sont vérifiés alors le portefeuille du marché est le portefeuille tangent

$\Rightarrow$ demo : chaque investissement k détient une "proportion" $\alpha(k)$ du portefeuille R_T et $(1-\alpha(k))$ EC et comme equilibre

$$\sum_{k=1}^{k} (1-\alpha(k))\, w_0(k) = 0 \Rightarrow w_0 - \sum_{k=1}^{k} \alpha(k)\, w_0(k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{k} w_0(k) R_p(\alpha(k)) = \sum_{k=1}^{k} w_0(k)\,\alpha(k) \quad R_T = w_0 R_T \Rightarrow R_T = \sum_{k=1}^{k} \frac{w_0(k)}{w_0} R_p(\alpha(k)) = R_m$$

R_m moyenne variance efficient $\Rightarrow \forall i \in \{1 \dots, N\}$ $\operatorname{cor}(R_i, R_m) = \beta_m \mathbb{E}(R_i) + \alpha_m$

$$\mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i (\mathbb{E}(R_m) - r_f) = \frac{\operatorname{cor}(R_i, R_m)}{\operatorname{Var}(R_m)} (\mathbb{E}(R_m) - r_f)$$

$$\frac{\operatorname{Cor}(R_i, R_m)}{\operatorname{Var}(R_m)} (\mathbb{E}(R_m) - r_f) = \frac{\operatorname{Cor}(R_i, R_m)}{\sigma(R_m)} \lambda_T = \frac{\beta_m \mathbb{E}(R_i) + \alpha_m}{\sigma(R_m)} \lambda_T$$

$$\frac{\operatorname{Cor}(R_m, R_m)}{\operatorname{Var}(R_m)} = 1 = \frac{\beta_m \mathbb{E}(R_m) + \alpha_m}{\sigma(R_m)} \quad \frac{\mathbb{E}(R_m) - r_f}{\sigma(R_m)} = 1$$

$$\beta_m \mathbb{E}(R_m) + \alpha_m = \mathbb{E}(R_m) - r_f$$

Le portefeuille du marché est le portefeuille tangent :

$$R_m = \sum_{i=1}^{N} w_m(i) R_i \qquad R_m - r_f = \sum_{i=1}^{N} w_m(i)(R_i - r_f)$$

$$\mathbb{E}(R_m - r_f) = \sum_{i=1}^{N} w_m(i)\, \mathbb{E}(R_i - r_f) = \sum_{i=1}^{N} w_m(i)$$

$$\operatorname{Var}(R_m - r_f) = {}^t w_m \Lambda w_m = \sum_{j=1}^{N} w_m(i)\, w_m(j) \operatorname{cor}(R_i, R_j)$$

pour $i \in \{1 \dots, N\}$ $\dfrac{\partial \mathbb{E}(R_m - r_f)}{\partial w_m(i)} = \mathbb{E}(R_i - r_f)$

$$\frac{\partial \operatorname{Var}(R_m)}{\partial w_m(i)} = 2\, {}^t u_i \Lambda w_m = 2 \operatorname{cor}(R_i, R_m)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}(R_m - r_f)}{\partial \sigma(R_m)} = \frac{\partial \mathbb{E}(R_m - r_f)}{\partial \operatorname{Var}(R_m)} \frac{\partial \operatorname{Var}(R_m)}{\partial \sigma(R_m)} = 2\sigma(R_m) \frac{\partial \mathbb{E}(R_m - r_f)}{\partial \sigma(R_m)}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial \mathbb{E}(R_m - r_f)}{\partial w_m(i)}}{\dfrac{\partial \operatorname{Var}(R_m)}{\partial w_m(i)}} \times 2\sigma(R_m) = \frac{\mathbb{E}(R_i - r_f)}{2 \operatorname{Cor}(R_m, R_i)} \times 2\sigma(R_m)$$

$$= \frac{\mathbb{E}(R_i - r_f)}{\operatorname{Cor}(R_m, R_i)} \times \sigma(R_m)$$

comme il est le portefeuille tangent :

$$\frac{\partial \mathbb{E}(R_m - r_f)}{\partial \sigma(R_m)} = \frac{\mathbb{E}(R_m) - r_f}{\sigma(R_m)} = \frac{\mathbb{E}(R_i - r_f)}{\operatorname{Cor}(R_i, R_m)} \sigma(R_m)$$

$$\rightarrow \mathbb{E}(R_i - r_f) = \underbrace{\frac{\operatorname{Cor}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}}_{\beta_i} (\mathbb{E}(R_m) - r_f)$$

Remarque : r_f doit être $< m_{min}$ = esperance de gain du portefeuille de variance minimale

V - modèle de marché :

MEDAF ou CAPM $\mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i (\mathbb{E}(R_m) - r_f)$ du coup on peut écrire

$R_i - r_f = \beta_i (R_m - r_f) + \varepsilon_i$ avec $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ sans perte de généralité $Cor(R_m, \varepsilon_i) = 0$

$R_i = \beta_i R_m + \alpha_i + \varepsilon_i$ avec $\alpha_i = (1-\beta_i) r_f$

$$\underbrace{Var(R_i)}_{\text{risque totale}} = \underbrace{\beta_i^2 \, Var(R_m)}_{\text{risque de marché}} + \underbrace{Var(\varepsilon_i)}_{\text{risque spécifique au titre}}$$

on prend le titre : on gagne ce prime

$$\underbrace{\mathbb{E}(R_i) - r_f}_{\text{prime de risque}} = \beta_i \underbrace{(\mathbb{E}(R_m) - r_f)}_{\text{prime de risque du marché}}$$

pour un Portefeuille P $R_p = \sum_{i=1}^{N} w_p(i) R_i$ avec $\sum_{i=1}^{N} w_p(i) = 1$

$R_p = \beta_p R_m + \alpha_p + \varepsilon_p$ avec $\beta_p = \sum_{i=1}^{N} w_p(i) \beta_i$ $\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{N} w_p(i) \varepsilon_i$