Recherche Opérationnelle 1A
Premier cours
Début de la théorie des graphes

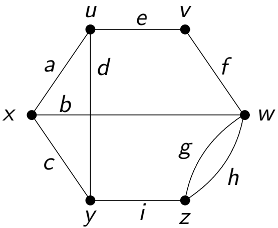
Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Définitions

Graphe $G = (V, E)$

- sommets : $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}, n \geq 1.$
- arêtes : $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$, une arête est une paire de sommets.
- extrémités : pour $e_i = v_j v_k$, v_j et v_k sont les extrémités de e_i.
- boucle : une arête dont les extrémités coïncident.
- arête multiple : s'il existe une autre arête avec les mêmes extrémités.
- simple : sans boucle et sans arête multiple.



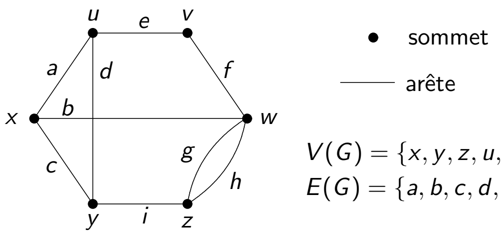
● sommet

—— arête

$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$
$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Définitions

1. incident : une arête e est incidente à chacune de ses extrémités.
2. sommets adjacents, voisins, connectés : u et v si $uv \in E(G)$.
3. arêtes adjacentes : deux arêtes ayant ≥ 1 extrémité en commun.
4. degré $d_G(v)$ d'un sommet v : le nombre d'arêtes incidentes à v.

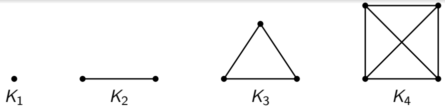


$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$
$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Définitions

Définitions

1. incident : une arête e est incidente à chacune des ses extrémités.
2. sommets adjacents, reliés, connectés : u et v si $uv \in E(G)$.
3. arêtes adjacentes : deux arêtes ayant ≥ 1 extrémité en commun.
4. degré $d_G(v)$ d'un sommet v : le nombre d'arêtes incidentes à v.
5. graphe complet K_n : graphe simple à n sommets ayant toutes les arêtes possibles.



Remarque

Pour tout sommet v d'un graphe simple à n sommets on a

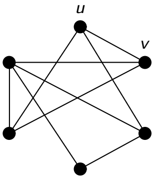
$$0 \leq d(v) \leq n - 1.$$

Premier résultat

Premier résultat

Théorème

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes,

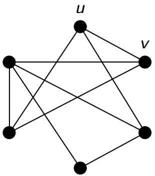


Premier résultat

Théorème

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \times |E|.$$

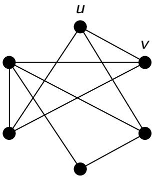


Premier résultat

Théorème

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \times |E|.$$



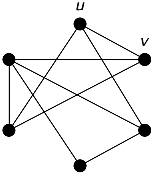
Démonstration

Premier résultat

Théorème

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \times |E|.$$



Démonstration

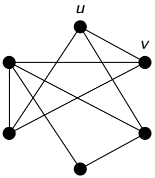
1. Calculer la somme des degrés des sommets de G revient à compter les arêtes incidentes à chaque sommet et puis à ajouter ces nombres.

Premier résultat

Théorème

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \times |E|.$$



Démonstration

1. Calculer la somme des degrés des sommets de G revient à compter les arêtes incidentes à chaque sommet et puis à ajouter ces nombres.
2. Chaque arête uv est comptée exactement deux fois dans la somme : une fois dans $d_G(u)$ et une autre fois dans $d_G(v)$.

Définition

Sous-graphe, graphe partiel

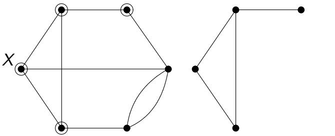
Soient $G = (V, E)$ un graphe, $X \subseteq V$ et $F \subseteq E$.

(a) Sous-graphe de G induit par X : $G[X] = (X, \{uv \in E : u, v \in X\})$.

(b) Graphe partiel de G induit par F : $G(F) = (V, F)$.

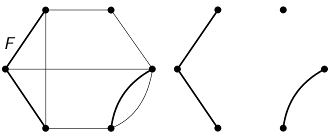
(c) Sous-graphe partiel de G induit par X et F : $G[X](F) = (X, F)$.

(a)



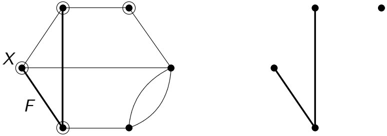
G sous-graphe $G[X]$

(b)



G graphe partiel $G(F)$

(c)



G sous-graphe partiel $G[X](F)$

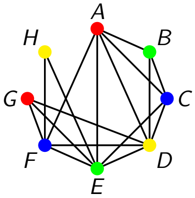
Coloration

Définitions

Coloration

Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

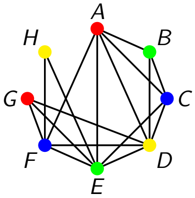


Coloration

Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

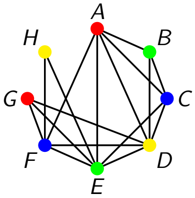
1. Une coloration est bonne si



Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

1. Une coloration est bonne si
   - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur,

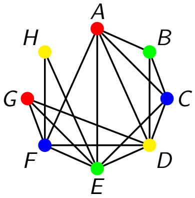


Coloration

Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

1. Une coloration est bonne si
   - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur, $\Longleftrightarrow$
   - les sommets de même couleur forment un stable : pas d'arêtes dedans.

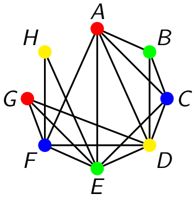


Coloration

Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

1. Une coloration est bonne si
   - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur, $\Longleftrightarrow$
   - les sommets de même couleur forment un stable : pas d'arêtes dedans.
2. $\chi(G)$ = nombre min. de couleurs dans une bonne coloration de G.

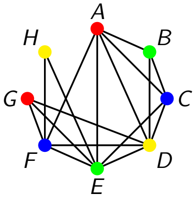


Coloration

Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

1. Une coloration est bonne si
   - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur, $\iff$
   - les sommets de même couleur forment un stable : pas d'arêtes dedans.
2. $\chi(G)$ = nombre min. de couleurs dans une bonne coloration de G.
   - $\chi(G)$ existe

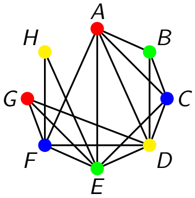


Coloration

Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

1. Une coloration est bonne si
   - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur, $\iff$
   - les sommets de même couleur forment un stable : pas d'arêtes dedans.
2. $\chi(G)$ = nombre min. de couleurs dans une bonne coloration de G.
   - $\chi(G)$ existe et $\leq n = |V(G)|$

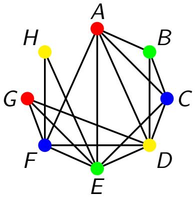


Coloration

Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

1. Une coloration est bonne si
   - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur, $\iff$
   - les sommets de même couleur forment un stable : pas d'arêtes dedans.
2. $\chi(G)$ = nombre min. de couleurs dans une bonne coloration de G.
   - $\chi(G)$ existe et $\leq n = |V(G)|$ car chaque sommet peut être colorié par une couleur différente.



Coloration

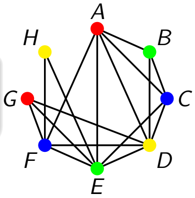
Définitions

On colore les sommets d'un graphe par des couleurs.

1. Une coloration est bonne si
   - deux sommets adjacents ne sont pas de la même couleur, $\iff$
   - les sommets de même couleur forment un stable : pas d'arêtes dedans.
2. $\chi(G)$ = nombre min. de couleurs dans une bonne coloration de G.
   - $\chi(G)$ existe et $\leq n = |V(G)|$ car chaque sommet peut être colorié par une couleur différente.

Remarque

Calculer $\chi(G)$ est un problème difficile.



Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration

1. Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration

1. Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.
2. Supposons que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n sommets.

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration

1. Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.
2. Supposons que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n sommets.
3. Soient G un graphe simple à $n + 1$ sommets et $v \in V(G)$.

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration

1. Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.
2. Supposons que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n sommets.
3. Soient G un graphe simple à $n + 1$ sommets et $v \in V(G)$.
4. $G - v$ est simple, $|V(G - v)| = n$ et $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$.

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration

1. Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.
2. Supposons que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n sommets.
3. Soient G un graphe simple à $n + 1$ sommets et $v \in V(G)$.
4. $G - v$ est simple, $|V(G - v)| = n$ et $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$.
5. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une bonne coloration de $G - v$ avec $\leq \Delta(G - v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ couleurs.

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration

1. Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.
2. Supposons que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n sommets.
3. Soient G un graphe simple à $n + 1$ sommets et $v \in V(G)$.
4. $G - v$ est simple, $|V(G - v)| = n$ et $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$.
5. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une bonne coloration de $G - v$ avec $\leq \Delta(G - v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ couleurs.
6. Puisque $d_G(v) \leq \Delta(G)$, cette coloration utilise $\leq \Delta(G)$ couleurs pour les voisins de v, il reste donc au moins une couleur disponible pour v.

Coloration : une borne supérieure

Théorème

Pour tout graphe simple G, de degré maximum $\Delta(G)$, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

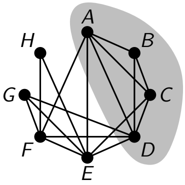
Démonstration

1. Récurrence sur $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.
2. Supposons que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n sommets.
3. Soient G un graphe simple à $n + 1$ sommets et $v \in V(G)$.
4. $G - v$ est simple, $|V(G - v)| = n$ et $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$.
5. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une bonne coloration de $G - v$ avec $\leq \Delta(G - v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ couleurs.
6. Puisque $d_G(v) \leq \Delta(G)$, cette coloration utilise $\leq \Delta(G)$ couleurs pour les voisins de v, il reste donc au moins une couleur disponible pour v.
7. En coloriant v avec cette couleur on obtient une bonne coloration de G avec $\leq \Delta(G) + 1$ couleurs.

Coloration : une borne inférieure

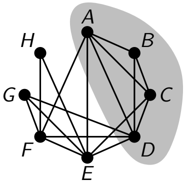
Définitions

1. Clique : sous-graphe qui est complet.



Définitions

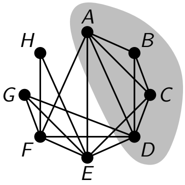
1. Clique : sous-graphe qui est complet.
2. $\omega(G)$ = le nombre maximum de sommets dans une clique de G.



Coloration : une borne inférieure

Définitions

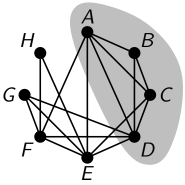
1. Clique : sous-graphe qui est complet.
2. $\omega(G)$ = le nombre maximum de sommets dans une clique de G.
   - $\omega(G)$ existe et ≥ 1, car un sommet est une clique,



Coloration : une borne inférieure

Définitions

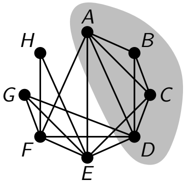
1. Clique : sous-graphe qui est complet.
2. $\omega(G)$ = le nombre maximum de sommets dans une clique de G.
   - $\omega(G)$ existe et ≥ 1, car un sommet est une clique,
   - $\omega(G) \geq 2$; s'il existe une arête car elle est une clique.



Coloration : une borne inférieure

Définitions

1. Clique : sous-graphe qui est complet.
2. $\omega(G)$ = le nombre maximum de sommets dans une clique de G.
   - $\omega(G)$ existe et ≥ 1, car un sommet est une clique,
   - $\omega(G) \geq 2$; s'il existe une arête car elle est une clique.



Remarque

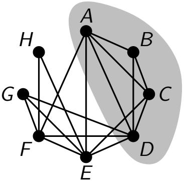
Dans une bonne coloration, chaque sommet d'une clique doit être colorié par une couleur différente, donc on a :

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Coloration : une borne inférieure

Définitions

1. Clique : sous-graphe qui est complet.
2. $\omega(G)$ = le nombre maximum de sommets dans une clique de G.
   - $\omega(G)$ existe et ≥ 1, car un sommet est une clique,
   - $\omega(G) \geq 2$; s'il existe une arête car elle est une clique.



Remarque

Dans une bonne coloration, chaque sommet d'une clique doit être colorié par une couleur différente, donc on a :

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Exemple

$$\chi(C_5) = 3 > 2 = \omega(C_5).$$