CH2 : HNB : Interpolation polynomiale :

1] Problématique générale :

i) Interpolation :

(Pb) : $\begin{cases} \text{. on donne } n+1 \text{ pts de } \mathbb{R}^2 : (x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) \\ \quad \text{tq : } \forall i, j \in [\![0, n]\!] \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j \text{ (distincts)} \\ \text{On cherche } P \text{ tq } \forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(x_i) = y_i \end{cases}$

ii) Interpolation polynomiale :

→ * Consiste à trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ solution du (Pb) :

→ On cherche $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ tq $a_n \neq 0$

tq : $\forall i \in [\![0, n]\!] \quad P(x_i) = y_i$

→ Théorème :

* Il existe unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ solution du (Pb)

2] Forme de Lagrange du Polynôme d'interpolation :

i) * Polynômes de Lagranges :

- Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux

Alors La familles de polynômes de Lagrange $(\ell_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ définie par :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ell_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

* Prop.

- $(\ell_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ Sont des polynômes de degré tq :

$$\ell_j(x_i) = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in [\![0, n]\!]$$

ii) Th.

- Le polynôme d'interpolation de $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ s'écrit :

$$\boxed{P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \, \ell_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

3] Forme de Newton du polynôme d'interpolation :

a) Base de Newton :

- Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts
- On pose :

$$P_0 = 1, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad P_i = \prod_{j=0}^{i-1} x - x_j$$

Alors

$$\beta = (P_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]$$

b) Th

* Le polynome d'interpolation des pts : $(x_0, y_0), \dots (x_n, y_n)$ s'écrit :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

- $$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \delta^i P_i(x).$$

avec, $\delta = (\delta^0, \dots, \delta^n)^T$ solution du système $L\delta = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

tq
$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) & \\ 1 & x_1 - x_0 & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & \dots & \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) \end{pmatrix}$$

Rq

- $L = (P_j(x_i))_{1 \le i, j \le n}$
- Le calcul du P au f. Newton $O(n^2)$ (comme Lagrange)
- on note $\delta^i = \delta^i f(x_0, \dots, x_i)$
- Rajouter un pt d'interpolation (x_{n+1}, y_{n+1}) ne change pas les vecteurs précédents de la base de Newton (contrairement à la forme de Lagrange) et les δ^k calculés précédemment

c] Prop

$$\delta^n f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k)}$$

d] Th : Différences divisées :

* le polynome d'interpolation d'une fonction f aux $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$:

$$P(x) = \delta^0 f(x_0) + \delta^1 f(x_0, x_1)(x-x_0) + \cdots\cdots + \delta^n f(x_0, \ldots, x_n) \prod_{i=0}^{n-1} (x-x_i)$$

avec

i) $\delta^0 f(x_0) = f(x_0)$

ii) $\delta^{k+1} f(x_0, \ldots, x_{k+1}) = \dfrac{1}{x_{k+1} - x_0} \left[\delta^k f(x_1, \ldots, x_{k+1}) - \delta^k f(x_0, \ldots, x_k) \right]$.

Rec

formule d'Aitken-Neville :

- Notons $P_{x_0, \ldots, x_k}$ le polynome d'interpolat de f en $x_0, \ldots, x_k$

Alors

$$P_{x_0, \ldots, x_k}(x) = \frac{1}{x_k - x_0} \left[(x-x_0) P_{x_1, \ldots, x_k}(x) - (x-x_k) P_{x_0, \ldots, x_{k-1}}(x) \right]$$

4] Erreure d'interpolation :

a) Th : d'Erreur d'interpolation :

- $f \in C^{n+1}([a,b])$
- $P_{x_0, \ldots, x_n}$ le polynome d'interpolat de f en $(x_i)_i \in [a,b]^{n}$

Alors

$\forall x \in [a,b], \quad \exists \xi \in]\min((x_i), x), \max((x_i), x)[$

tq

$$f(x) - P_{x_0, \ldots, x_n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Rcc :

- $\sup_{[a,b]} |f - P_{x_0,\dots,x_n}| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

- si $\sup_{[a,b]} |f^{(n)}|$ est borné indép de n Alors $\sup_{[a,b]} |f - P_{x_0,\dots,x_n}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

* Prop :

- $f \in C^n [a,b]$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$

Alors : $\exists \xi \in] \min(x_i), \max(x_i) [$ tq : $\delta^n f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

b] Phénomène de Runge :

* $\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = \frac{1}{1+(5x)^2}$

- $\forall i \in [\![0,n]\!] \quad x_i = -1 + \frac{2i}{n}$
- P_n le polynôme d'interpolation de f aux $x_0, \dots, x_n$

Alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty$

* Conséquences :

- Pour adapter l'interpolation polynomiale à l'approximation de la fonction il faut assurer deux choses :

→ Segmentation : approcher la fonction par des polynômes par morceaux ⟹ Splines

→ choisir les pts x_i d'interpolation afin de minimiser l'erreur ⟹ pts de Tchebychev.

5] Abscisses de Tchebychev :

a) Déf

- Les fonctions de Tchebychev (T_K) sont définis :
$\forall K \geq 0,\ \forall x \in [-1,1] \quad T_K(x) = \cos(K \arccos(x))$

b) Th

- (T_K) sont des fonctions polynomiales et les racines de T_{K+1} sont :
$\forall i \in [\![0,K]\!] \quad x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2K+2}\pi\right)$.
- Les $(x_i)_{i\in[\![0,K]\!]}$ racines du T_{K+1} sont appelés : les abscisses de Tchebychev.

c) Minimisation :

- Soient $f \in C^{n+1}([a,b])$ et $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$
- Soit $P_{x_0,\ldots,x_n}$ le polynôme d'interpolation de f en $x_0, \ldots, x_n$

On a $\|f - P_{x_0,\ldots,x_n}\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} C_{a,b}(x_0,\ldots,x_n)$

où $C_{a,b}(x_0,\ldots,x_n) = \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$

* Prop : $[a,b] = [-1,1]$

* $\min_{(x_i)\in[-1,1]} \left(\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)\ldots(x-x_n)|\right) = \frac{1}{2^n}$ est atteint

pour les abscisses de Tchebychev : $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad i \in [\![0,n]\!]$

d) Th.

* Soit f lipschitzienne sur $[-1,1]$ ie $\exists \lambda, \forall x,y \in [-1,1] \quad |f(x)-f(y)| \leq \lambda |x-y|$
* P_n son polynôme d'interpolation aux abscisses de Tchebychev $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$

Alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_n(x)| = 0}$