INTRODUCTION AUX PRODUITS DÉRIVÉS
PAGE DU COURS SUR CHAMILO

Hervé Guiol (IPS LJK)

Louis Bachelier
1870-1946

Fischer Black
1938-1995

Myron Scholes
1941 -

Robert C. Merton
1944 -

RÉSUMÉ

Marché sans friction

- Il n'y a pas de coûts de transaction ;
- Il n'y a pas d'écart entre prix d'achat et prix de vente (bid-ask) des titres ;
- Les titres négociables sont très liquides et infiniment fractionnables ;
- Il n'y a pas de restriction sur les ventes à découvert ;
- Il n'y a pas d'impôt ou de taxe ;
- Les transactions sont instantanées ;
- Les participants du marché sont preneurs de prix ;
- Les prix sont exprimés dans une unique monnaie de référence ;
- Il y a absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A.) ;
- Il y a unicité des prix.

AOA et unicité des prix

A.O.A.

Il y a absence d'opportunité d'arbitrage lorsqu'il est impossible de gagner de l'argent **de façon certaine** à partir d'un investissement nul.

Unicité des prix

Il y a unicité des prix si les valeurs de deux portefeuilles coïncident **de façon certaine** (i.e. avec probabilité 1) à une date donnée, alors ces deux portefeuilles ont la même valeur **à toute date intermédiaire**.

Exercice : Montrer que l'A.O.A. implique l'unicité des prix.

Dynamiques d'actif financier

On considère un marché financier contenant deux actifs

- Un actif sans risque de prix $(S_t^o)_{t\geq 0}$ évoluant suivant l'EDO

$$dS_t^o = rS_t^o\, dt \text{ avec } S_0^o = 1$$

  où $r > 0$ est le taux d'intérêt instantané appelé taux sans risque ;

- Un actif risqué de prix $(S_t)_{t\geq 0}$ évoluant suivant l'EDS

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t \text{ avec } S_0 = s_0.$$

  où $\mu > 0$ est le rendement instantané espéré, $\sigma > 0$ la volatilité du titre risqué et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S.

À tout instant $t > 0$ on a $S_t^o = e^{rt}$ et $S_t = s_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right]$

Stratégies et portefeuille

Un portefeuille dans le marché considéré est constitué d'un nombre de parts d'actif risqué et d'actif sans sans risque.

Définition 9.1

On appelle stratégie un processus $\varphi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté, càg-làd à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ où

$$\varphi_t = (H_t^o, H_t)$$

avec H_t (resp. H_t^o) représentant la quantité d'actif risqué (resp. sans risque) détenue en portefeuille au temps t.
La valeur du portefeuille associé à la stratégie φ au temps t est donnée par

$$V_t(\varphi) = H_t^o S_t^o + H_t S_t.$$

L'hypothèse (technique) càg-làd sur la trajectoire de la stratégie est à relier à la notion de processus **prévisible** des stratégies admissibles du cas discret qui a été étudié dans le cours de PSAF.

Stratégies autofinancées

Définition 9.2 Autofinancement

Une stratégie $\varphi = (\varphi_t)_{t\in[0,T]}$ est dite **autofinancée** si elle vérifie

1. $\mathbb{P}$-p.s. on a $\int_0^T (|H_t^0| + H_t^2)\, dt < +\infty$
2. Condition d'autofinancement : $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t \in [0, T]$

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0\, dS_u^0 + \int_0^t H_u\, dS_u$$

ou sous "forme différentielle" :

$$dV_t(\varphi) = H_t^0\, dS_t^0 + H_t\, dS_t \text{ avec } V_0(\varphi) = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0$$

Proposition 9.3 Dynamique d'autofinancement

Un portefeuille autofinançant de prix $V = (V_t)_{t\in[0,T]}$, dans le modèle de Black-Scholes et Merton suit la dynamique

$$dV_t = rV_t + H_t\,(dS_t - rS_t\, dt) \tag{1}$$

avec $V_0 = v_0$. En particulier le processus V est complètement déterminé par V_0 et $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$.

Actualisation des prix

Prix actualisé de l'actif risqué

Le prix de l'actif actualisé est définit par

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$$

Par Itô il est solution de l'EDS, de condition initiale $\widetilde{S}_0 = s_0$,

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= (\mu - r)\widetilde{S}_t\, dt + \sigma \widetilde{S}_t\, dB_t \\ &= \sigma \widetilde{S}_t\, dW_t \end{aligned}$$

où $W_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t$
Par le théorème de Cameron-Martin le processus $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$L_t = \exp\left[-\frac{\mu - r}{\sigma} B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t \right]$$

induit une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $L_T = \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}}$ sous laquelle le processus $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-MBS.

Probabilité risque neutre

On a donc $d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t$ et comme

$$\widetilde{S}_t = s_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right] \in \Pi_2^2(W)$$

on en déduit que $(\widetilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$.

Définition 9.4 Probabilité risque neutre

La probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ est appelée probabilité risque neutre (ou probabilité martingale) : sous cette probabilité le prix de l'actif risqué actualisé $\widetilde{S}$ est une martingale et

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t$$

De plus, sous la probabilité risque neutre, le prix de l'actif risqué S a pour dynamique

$$dS_t = rS_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

i.e. le rendement instantané moyen de l'actif risqué sous la probabilité risque neutre est égal à celui de l'actif sans risque : r.

STRATÉGIE ADMISSIBLE

DÉFINITION 9.5 STRATÉGIE ADMISSIBLE

Une stratégie φ est dite admissible si elle est autofinancée et si de plus

1. $$V_t(\varphi) \geq 0, \ \forall t \in [0, T]$$
2. $$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} V_t(\varphi)\right)^2\right] < +\infty$$

PROPOSITION 9.6 DYNAMIQUES SOUS $\widetilde{\mathbb{P}}_T$

1. le prix actualisé de l'actif $\widetilde{S}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale et on a

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t;$$

2. de plus si φ est une stratégie admissible le prix du portefeuille actualisé $\widetilde{V}(\varphi)$ est aussi une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale et on a

$$d\widetilde{V}_t(\varphi) = \sigma H_t \widetilde{S}_t \, dW_t$$

Option réplicable

Définition 9.6 Option réplicable

On dira qu'une option de payoff h, i.e. une v.a. h, $\mathcal{F}_T$-mesurable, est réplicable (ou simulable) s'il existe une stratégie admissible φ de portefeuille associé de valeur terminale égale au flux de l'option : i.e.

$$V_T(\varphi) = h,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Le portefeuille associé est appelé portefeuille de réplication de l'option de payoff h.

Théorème 9.8 de Pricing

Pour toute v.a. h positive, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$ il existe une stratégie φ admissible qui réplique h. De plus $\forall t \in [0, T]$

$$V_t(\varphi) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right],\ \widetilde{\mathbb{P}}_T - p.s.$$

Par unicité des prix on en déduit qu'à tout instant le prix de l'option est celui du portefeuille de réplication.

Résumé

Options Européennes

Définitions

1. Un call européen de maturité T de prix d'exercice (ou strike) K sur le titre risqué S permet à son détenteur de recevoir à maturité le payoff
$$h = (S_T - K)_+$$
il donne ainsi le droit (et non l'obligation) au détenteur de l'option d'acheter le titre S au prix K à la date T. Il s'agit donc d'une assurance contre la hausse du titre.
2. Un put européen de maturité T de strike K sur le titre risqué S permet à son détenteur de recevoir à maturité le payoff
$$h = (K - S_T)_+$$
il donne ainsi le droit au détenteur de l'option de vendre le titre S au prix K à la date T. Il s'agit donc d'une assurance contre la baisse du titre.

Prix d'un Call Européen

On note $C(t, T, K, x)$ le prix à l'instant t d'un call de strike K de maturité T sur un actif risque de prix x à l'instant t.

Propriété de Markov du prix

Pour tous $t \in [0, T]$

$$C(t, T, K, S_t) = C(0, T - t, K, S_t) \tag{2}$$

il suffit donc de savoir calculer le prix en $t = 0$ pour le déduire à tout temps t. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ on a

$$\begin{aligned}
C(0, \theta, K, x) &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r\theta}(S_\theta - K)_+ | S_0 = x\right] \\
&= e^{-r\theta}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(x \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W_\theta\right] - K\right)_+\right] \\
&= x\widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma W_\theta\right] \mathbf{1}_{\left\{x \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W_\theta\right] \geq K\right\}}\right] \qquad (3) \\
&\quad - Ke^{-r\theta}\, \widetilde{\mathbb{P}}_T\left(x \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W_\theta\right] \geq K\right) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Prix d'un Call Européen

On calcule ces termes séparément : pour (4)

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\mathbb{P}}_T \left(x \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \theta + \sigma W_\theta \right] \geq K \right) \\
= \; & \widetilde{\mathbb{P}}_T \left(\sigma W_\theta \geq \ln\left(\frac{K}{x} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \theta \right) \\
= \; & \widetilde{\mathbb{P}}_T \left(W_1 \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}} \left[\ln\left(\frac{K}{x} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \theta \right] \right) \\
= \; & \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}} \left[\ln\left(\frac{x}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \theta \right] \right) \\
:= \; & d_1(\theta, K, x)
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{N}$ est la FDR d'une v.a. de loi normale centrée réduite. Rappel : $\mathcal{N}(-x) = 1 - \mathcal{N}(x)$

Pour (3) Observons que le facteur

$$L_\theta := \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma W_\theta\right]$$

correspond à un changement de probabilité : ainsi sous la probabilité $\mathbb{P}_\theta$ définie par

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\widetilde{\mathbb{P}}_T} = L_\theta$$

donc par Cameron-Martin le processus $W^\theta = (W_t^\theta)_{t\in[0,T]}$ définit par

$$W_t^\theta = W_t - \sigma t$$

est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-M.B.S. et

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[L_\theta \mathbf{1}_{\left\{x\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta+\sigma W_\theta\right]\geq K\right\}}\right] = \mathbb{P}_\theta\left(x\exp\left[\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W_\theta^\theta\right] \geq K\right)$$

qui par un calcul similaire au calcul précédent donne

$$= \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left[\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right]\right) := d_2(\theta, K, x)$$

Prix d'un Call Européen

Prix du Call

On a

$$C(0,\theta,K,x) = xd_2(\theta,K,x) - Ke^{-r\theta}d_1(\theta,K,x)$$

où

$$d_1(\theta,K,x) = \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)$$

$$d_2(\theta,K,x) = \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)$$

Ainsi le prix d'un call Européen au temps t de strike K, de maturité T et dont le sous jacent vaut x au temps t est donc

$$C(t,T,K,x) = xd_2(T-t,K,x) - Ke^{-r(T-t)}d_1(T-t,K,x)$$

COUVERTURE EN DELTA

Le prix du call vu comme fonction de t et de S_t est donc

$$c(t, S_t) = C(t, T, K, S_t)$$

On va essayer de construire le portefeuille admissible de réplication. Notons $V_t(\varphi)$ ce portefeuille. Par ce qui précède, son prix actualisé à tout temps $t \in [0, T]$ doit être

$$\widetilde{V}_t = e^{-rt} c(t, S_t).$$

On applique Itô à la fonction $e^{-rt} c(t, x)$ et au processus d'Itô S on a :

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t(\varphi) &= \left(-re^{-rt} c(t, S_t) + e^{-rt} c'_t(t, S_t)\right) dt + e^{-rt} c'_x(t, S_t)\, dS_t \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-rt} c''_{xx}(t, S_t)\, d\langle S \rangle_t \end{aligned}$$

Sous la probabilité risque neutre $\widetilde{\mathbb{P}}_T$

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \text{ et donc } d\langle S \rangle_t = \sigma^2 S_t^2\, dt$$

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t &= e^{-rt} \left(-rc(t, S_t) + c'_t(t, S_t) + rS_t c'_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c''_{xx}(t, S_t)\right) dt \\ &\quad + e^{-rt} c'_x(t, S_t) \sigma S_t\, dW_t \end{aligned}$$

Couverture en delta

Or nous savons par la proposition 9.6 que $\widetilde{V}(\varphi)$ est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}_T$. Ceci implique que le terme en *dt* dans la décomposition ci-dessus doit être nul.
On obtient donc

$$d\widetilde{V}_t(\varphi) = \sigma c'_x(t, S_t)\widetilde{S}_t \, dW_t$$

Or dans la proposition 9.6 nous avions vu que

$$d\widetilde{V}_t(\varphi) = \sigma H_t \widetilde{S}_t \, dW_t$$

On en déduit par identification que

$$H_t = c'_x(t, S_t) \tag{5}$$

qui est donc le nombre de parts de l'actif risqué à détenir au temps t.
Cette dérivée exprimant la sensibilité du prix de l'option dans le prix du titre est appelé le delta de l'option.

Couverture en delta

On peut calculer cette dérivée, soit directement à partir de la formule trouvée pour $c(t,x)$ soit en repartant de l'égalité (2) et en posant $\theta = T - t$

$$c(t,x) = C(0,\theta,K,x) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r\theta}\left(x\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W_\theta\right] - K\right)_+\right]$$

La fonction

$$x \mapsto e^{-r\theta}\left(x\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W_\theta\right] - K\right)_+$$

est presque partout dérivable de dérivée

$$e^{-r\theta}\left(\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W_\theta\right]\right)\mathbf{1}_{\{\widetilde{S}_\theta > K\}} = \left(\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma W_\theta\right]\right)\mathbf{1}_{\{\widetilde{S}_\theta > K\}}$$

Par le théorème de Lebesgue (dérivation) et le résultat des calculs de la section précédente on obtient

$$H_t = c'_x(t,x) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma W_\theta\right]\right)\mathbf{1}_{\{\widetilde{S}_\theta > K\}}\right] = d_2(\theta,K,x)$$

FORMULE DE BLACK-SCHOLES ET MERTON

On en déduit que la part d'actif non risqué à détenir au temps t est : $H_t^0 = e^{-rt}(V_t - H_t S_t)$. Ainsi en rebalançant notre portefeuille suivant la stratégie obtenue de façon continue on peut sans risque produire le flux à maturité.

THÉORÈME 9.9 FORMULE DE BLACK-SCHOLES-MERTON

La fonction du prix d'un Call européen de strike K de maturité T dans le modèle de BSM est donné à tout temps $t \in [0, T]$ par

$$c(t, x) = x d_2(T - t, K, x) - K e^{-r(T-t)} d_1(T - t, K, x)$$

où $d_1 = \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left[\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right]\right)$ et
$d_2 = \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left[\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right]\right)$.
De plus cette option est couverte par un portefeuille autofinaçant contenant

$$\delta(t) = c'_x(t, S_t) = d_2(\theta, K, S_t)$$

parts du titre S à l'instant $t \in [0, T]$.

EQUATION DE BLACK-SCHOLES ET MERTON

On observera avec soin que, dans notre analyse, lorsque nous avons utilisé que $\widetilde{V}$ était une martingale et que, par conséquent, le terme en dt de sa décomposition était nul nous obtenons en fait que la fonction de $c(t,x)$ vérifie (sur la trajectoire de S_t) l'EDP de valorisation de Black-Scholes-Merton

$$rc(t,x) = c'_t(t,x) + rxc'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 c''_{xx}(t,x)$$

de condition terminale $c(T,x) = (x-K)_+$.

Une résolution numérique de cette EDP de valorisation conduirait bien entendu à la même solution que celle trouvée par le calcul probabiliste dans la section précédente.