

Exercice 7.1. — Dans une raffinerie, quatre types de carburant brut sont mélangés pour produire trois qualités de carburant mélangé. Les données sont les suivantes :

carburant brut	taux d'octane	unités disponibles	prix d'achat /unité
1	68	4000	1,02
2	86	5050	1,15
3	91	7100	1,35
4	99	4300	2,75

carburant mélangé	taux min d'octane	demande	prix de vente /unité
1	95	≤ 10000	7,15
2	90	sans restr.	6,95
3	85	≥ 15000	4,99

La vente directe du carburant brut est possible à un prix de **2,95** si le taux d'octane dépasse **90** et **1,85** par unité s'il est inférieur. Il faut maximiser le profit total.

Exercice 7.2. — Un chantier naval qui fabrique de voiliers prévoit les ventes suivantes au cours des 4 trimestres à venir :

	printemps	été	automne	hiver	
11	4	6	10	12	11

Toutes les demandes doivent absolument être satisfaites.

Il y a un coût associé à la variation de production d'une période sur l'autre, composé principalement des coûts d'embauche (**6000€** par équipe qui construit un voilier) et des coûts de licenciement (**4000€** par équipe licenciée). On emploie seulement les équipes nécessaires pour la production, c'est-à-dire on embauche pour augmenter la cadence et on licencie les équipes en trop si la cadence diminue. Tout voilier en stock à la fin d'un trimestre coûte **9000€** en frais de magasinage et en immobilisation.

Avant printemps aucun voilier n'est stocké et la cadence de production est de **11** voiliers. On demande que ces deux niveaux soient retrouvés à la fin de l'hiver.

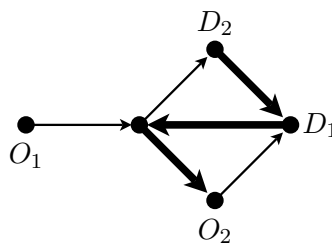
- Calculer le coût de la politique qui consiste à produire chaque trimestre exactement la demande et donc de ne jamais stocker. Vous paraît-elle optimale ? Argumentez.
- Ecrire un programme linéaire qui nous permet de trouver le plan de production qui minimise le coût total.

Exercice 7.3. — Mettre le programme linéaire suivant sous forme canonique puis sous forme standard.

$$\begin{aligned}
 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 2x_4 &= 1 \\
 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 &\geq 2 \\
 1x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 3 \\
 0 &\geq x_2, \quad x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\
 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 1x_4 &= z(\max)
 \end{aligned}$$

Exercice 7.4. — Dans le réseau ci-dessous on veut transporter une quantité maximale de courrier qui sera envoyé soit de l'origine O_1 vers la destination D_1 , soit de l'origine O_2 vers la destination D_2 , en empruntant tous les chemins possibles. Les arcs symbolisent les différents moyens de transport (trains, camions, avions ...) et les sommets sont les points de transfert. La quantité totale de courrier transporté sur chaque arc simple est limitée par 1 (une unité) et non limité sur chaque arc en gras. Déterminer la quantité maximale de courrier (la somme maximale des quantités envoyées de O_1 et O_2).

- Modéliser ce problème comme un programme linéaire. Trouver la solution optimale. Donner explicitement le plan de transport optimal sur chaque chemin et la quantité totale de courrier envoyé.
- Supposons que l'unité de courrier est indivisible (imaginons qu'il s'agit d'un paquet). On cherche une solution optimale en nombres entiers du programme précédent. Justifier qu'envoyer seulement une unité soit entre O_1 et D_1 soit entre O_2 et D_2 est une solution optimale.



Exercice 7.5. — (Problème du cuisinier chinois) A bord d'un bateau **17** pirates possèdent un trésor en pièces d'or. S'ils se le partagent en parties égales, il restera **3** pièces d'or pour le cuisinier chinois. Au cours d'une tempête, **6** d'entre eux périssent et ils font le nouveau équipartage, le cuisinier chinois reçoit **4** pièces d'or. Plus tard, une rixe éclate entre les pirates et il en reste **6**. Cette fois-ci, après l'équipartage, le cuisinier chinois recevra **5** pièces d'or.

Quel est le nombre minimum de pièces d'or de trésor que peut espérer acquérir le cuisinier chinois s'il empoisonne l'équipage restant ?

Exercice 7.6. — L'entreprise "Au pot de terre" utilise une partie de sa capacité de production pour produire des théières peintes à la main. Une théière nécessite une demi-heure du temps d'un peintre et **30** peintres de la région déclarent leur disponibilité permanente. On doit résoudre le problème d'emploi des peintres qui ne sont pas constamment embauchés mais seulement si la demande devient importante, ce qui arrive la semaine prochaine. Ils peuvent travailler seulement le jeudi, vendredi et samedi. Tout peintre nécessaire dans la production sera engagé pour **2** jours de **8** heures chacun (pas obligatoirement consécutifs) et sera payé pour ces **16** heures, même s'il travaille moins. Sans compter le prix de la main-d'oeuvre, le bénéfice retiré de la vente d'une théière est de **20€**. La demande non satisfaite le jour où elle se présente est perdue et, en plus, l'entreprise se voit infliger une pénalité de **6€** par pièce non fournie le jeudi, **18€** le vendredi et **30€** le samedi. La production d'une journée peut permettre de satisfaire la demande de ce jour et éventuellement des jours à venir et cela coûte **3€** de stocker une théière d'un jour sur l'autre. Cependant on ne peut rien stocker du samedi au dimanche et la surproduction éventuelle sera perdue. Les peintres sont payés **20€** de l'heure. Les demandes de théières sont de **100** le jeudi, **300** le vendredi et **600** le samedi.

Ecrire un programme linéaire dont la solution optimale donnerait la production qui maximiserait le bénéfice net, sans tenir compte du fait que vos variables doivent être entières.