Analyse pour l'ingénieur - Une correction partielle de l'examen 2015/2016

Exercice 5

On pose le changement de variable $y = nx$. On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{y}{n}\right)}{1+y^2}\mathrm{d}y \tag{1}$$

On remarque que

(i) $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \frac{f(y/n)}{1+y^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(0)}{1+y^2}$ car f est continue

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ \left|\frac{f(y/n)}{1+y^2}\right| \leq \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x)|}{1+y^2}$ où on sait que le sup est constant et fini, car f est supposée bornée. Cette fonction dominatrice est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée.

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{y}{n}\right)}{1+y^2}\mathrm{d}y \\ & \underset{\text{TCD}}{=} & \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f\left(\frac{y}{n}\right)}{1+y^2}\mathrm{d}y \\ & = & \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+y^2}\mathrm{d}y, \\ & = & f(0)[\mathrm{Arctan}(x)]_0^{+\infty} \\ & = & \frac{\pi}{2}f(0) \end{array} \tag{2}$$

Exercice 6

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :
$$\forall n \geq \lfloor x \rfloor + 1,\ f_n(x) = 0 \text{ car } x < n \tag{3}$$
où $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z}/n \leq x\}$ est la partie entière de x. D'où $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall x \geq 0.$

2. Supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction g. Alors, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall I \subset \mathbb{R}_+,\ \int_I |f_n| \leq \int_I g \tag{4}$$
On a aussi :
$$\begin{array}{rcl} \int_1^{n+1} g & = & \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} g \\ & \geq & \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |f_k| \quad \text{d'après (4)} \\ & \geq & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{array} \tag{5}$$
Or on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. D'où $\int_1^{n+1} g(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Cela entre en contradiction avec le caractère intégrable de g. On a ainsi montré qu'il ne peut pas exister de telle fonction g.

3. $\int_{\mathbb{R}_+} f_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

4. Même si l'on ne vérifie pas les hypothèses du TCD, et que ce théorème ne peut pas s'appliquer, il est *possible*, dans certains cas, d'obtenir les mêmes conlusions. En terme logique, si l'on appelle A la proposition « les hypothèses du TCD sont vérifiées », et B la proposition « on peut inverser limite et intégrale », le TCD peut se formaliser ainsi :
$$A \Rightarrow B \tag{6}$$
On vient de trouver un cas où on a $\overline{A}$ et B. Cela n'entre pas en contradiction avec le TCD, puisque son contraire logique serait A et $\overline{B}$. Autrement dit : le TCD n'admet pas de réciproque, c'est-à-dire que si la permutation limite-intégrale est invariante, cela ne veut pas pour autant dire que les hypothèses du TCD sont vérifiées.