INTRODUCTION AUX PRODUITS DÉRIVÉS

PAGE DU COURS SUR CHAMILO

Hervé Guiol (IPS-LJK),

Norbert Wiener 1894-1964

PLAN DU COURS D'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. Premières propriétés du MBS.
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. **Intégrale de Wiener.**
7. Intégrale d'Itô 1 : définitions.
8. Intégrale d'Itô 2 : formule d'Itô. Processus d'Itô. Variations.
9. Représentation des martingales Browniennes. Formule d'Itô multi-*d*. Formule de Cameron-Martin.
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itô.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

OUTLINE

1. INTÉGRALE DE WIENER
   - Objectifs
   - Intégration des fonctions étagées
   - Intégration des fonctions de carré intégrable

Objectifs du chapitre

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ dans les conditions habituelles et on considère W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable (déterministe). On souhaite donner un sens à

$$\int_0^T f(s)\, dW_s$$

pour $T > 0$.

Rappel/Complément

si F est une fonction à variations finies et f une fonction bornée sur $[0, T]$ alors on peut définir l'intégrale de Steiltjes de f par F sur $[0, T]$ comme

$$\int_0^T f(s)\, dF(s) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{k(n)-1} f(s_i)[F(t_{i+1}^n) - F(t_i^n)]$$

où $0 \leq t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k(n)}^n = T$ est une partition de $[0, T]$ avec $\lim_{n\to+\infty} \sup_i |t_{i+1}^n - t_i^n| = 0$ et $s_i \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$

Toutefois l'application $t \mapsto W_t$ n'étant dérivable nulle part elle n'est pas à variations finies. Il va donc falloir procéder avec soin.

5.1 Intégration des fonctions étagées

On va commencer par prendre $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ étagée :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k[}(t) + a_n \cdot \mathbf{1}_{[t_{n-1}, T]}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$ et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. On définit le processus $X(f) = (X_t(f))_{t\in\mathbb{R}}$ par, $\forall t \geq 0$

$$X_t(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k (W_{t\wedge t_k} - W_{t\wedge t_{k-1}})$$

On observe que $X_0(f) = 0$ et $\forall t \geq T$ on a $X_t(f) = X_T(f)$. De plus $t \mapsto X_t(f)$ est continu p.s. en effet si $t \in [t_i, t_{i+1}[$ alors $X_t(f) = \sum_{k=1}^{i} a_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) + a_{i+1}(W_t - W_{t_i})$. De plus on montre sans difficulté que $X(f)$ est un processus gaussien centré. Et si $t \in [t_i, t_{i+1}[$ et $s \in [t_j, t_{j+1}[$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \sum_{k=1}^{i\wedge j} a_k^2 (t_k - t_{k-1}) + a^2_{(i+1)\wedge(j+1)}(t \wedge s - t_{i\wedge j}) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)\, du$$

5.1.1 Intégration des fonctions étagées

Proposition 5.2

Le processus $X(f)$ est un processus gaussien, continu, centré de fonction de covariance $K(t,s) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)\,du$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté. De plus $\forall t > s$, $(X_t(f) - X_s(f))$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

On note $\mathcal{E}([0,T])$ l'espace vectoriel des fonctions étagées de $[0,T] \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{G}$ l'espace des processus gaussiens à trajectoires continues.
On appelle intégrale stochastique élémentaire de Wiener l'application linéaire $I : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ qui à tout $f \in \mathcal{E}([0,T])$ de représentation $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k[}(t)$ fait correspondre le processus $I(f) = (I_t(f))_{t\geq 0}$ tel que $\forall t \geq 0$

$$I_t(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (W_{t\wedge t_k} - W_{t\wedge t_{k-1}})$$

D'après ce qui précède le processus $I(f)$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté et de carré intégrable de plus $\forall 0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}(I_t(f) - I_s(f) | \mathcal{F}_s) = 0$$

5.1.1 INTÉGRATION DES FONCTIONS ÉTAGÉES

PROPOSITION 5.4

Pour tout $f \in \mathcal{E}$ le processus $I(f)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale continue de carré intégrable nulle en $t = 0$.
De plus le processus

$$\left(I_t(f)^2 - \int_0^t f^2(u)\, du \right)_{t\geq 0}$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale continue.

5.1.2 Intégration des fonctions de carré intégrable

L'objectif est d'étendre la construction de l'application I des fonctions de $\mathcal{E}([0,T])$ aux fonctions de $L^2([0,T])$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables de carré intégrable sur $[0,T]$.
On note $L^2_c([0,T])$ le sous espace des fonctions continues de $L^2([0,T])$.

Remarque

$L^2_c([0,T])$ est un sous espace dense de $L^2([0,T])$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Pour $f \in L^2_c([0,T])$ l'idée est de construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}$ qui convergent vers f pour la norme $\|\cdot\|_2$.
Pour tout $n \geq 1$ on considère la partition de $[0,T]$ définie à partir de $t_k = kT/2^n$ pour $k = 0, 1, ..., 2^n$. Pour tout $t \in [0,T]$ on définit

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n}{T} \int_{\frac{(k-1)T}{2^n}}^{\frac{kT}{2^n}} f(s)\, ds \cdot \mathbf{1}_{]\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}]}(t)$$

On a $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

5.1.2 Intégration des fonctions de carré intégrable

Théorème 5.5

Il existe une unique application linéaire $J : L^2([0,T]) \to \mathcal{G}$ telle que

1) $\forall f \in \mathcal{E}([0,T])$ on a $J(f) = I(f)$;
2) $\forall f \in L^2([0,t])$ le processus $J(f)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale continue, de carré intégrable et le processus $(J_t(f)^2 - \int_0^t f^2(s)\, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale continue.
3) Le processus $J(f)$ est gaussien centré de fonction de covariance $K(s,t) = \int_0^{s\wedge t} f(u)^2\, du$

Définition 5.6

Pour tout $f \in L^2([0,T])$ le processus $J(f)$ est appelé **intégrale de Wiener** de f et pour tout $t \in [0,T]$ on note

$$\int_0^t f(s)\, dW_s = J_t(f)$$

5.1.2 EXEMPLES

Les intégrales qui suivent sont de Wiener

1. $\left(\int_0^t dW_s\right)_t = (W_t)_t$ qui est bien un processus gaussien centré, continu. C'est une martingale et de plus

$$\left(\int_0^t dW_s\right)^2 - \int_0^t 1^2\, ds = W_t^2 - t$$

est une martingale continue.

2. $\left(\int_0^t s\, dW_s\right)_t$ est un processus gaussien centrée de fonction de covariance

$$K(s,t) = \int_0^{s\wedge t} u^2\, du = \frac{(s\wedge t)^3}{3}$$

et

$$\left(\int_0^t s\, dW_s\right)^2 - \int_0^t s^2\, ds = \left(\int_0^t s\, dW_s\right)^2 - \frac{t^3}{3}$$

est une martingale.