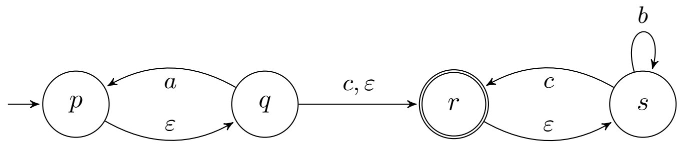
# TD Théorie des langages 1 — Feuille 2

Langages réguliers – Automates finis, epsilon-transitions

**Exercice 5** Construire un automate sans $\varepsilon$-transition équivalent à celui ci-dessous :



**Solution de l'Exercice 5.** On calcule les ensembles d'états $\varepsilon$-accessibles, soit directement, soit par itération :

| $\mathrm{Acc}_\varepsilon(\_)$ | $p$ | $q$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| $k=0$ | $p$ | $q$ | $r$ | $s$ |
| $k=1$ | $p,q$ | $q,r$ | $r,s$ | $s$ |
| $k=2$ | $p,q,r$ | $q,r,s$ | $r,s$ | $s$ |
| $k=3$ | $p,q,r,s$ | $q,r,s$ | $r,s$ | $s$ |
| $k=4$ | $p,q,r,s$ | $q,r,s$ | $r,s$ | $s$ |

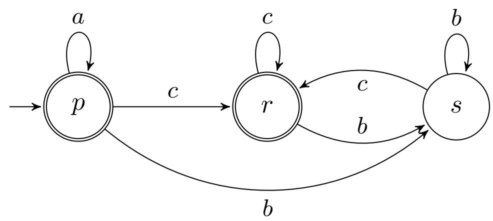
ce qui nous donne

| $Q$ | $\mathrm{Acc}_\varepsilon(q)$ |
|---|---|
| $p$ | $\{p,q,r,s\}$ |
| $q$ | $\{q,r,s\}$ |
| $r$ | $\{r,s\}$ |
| $s$ | $\{s\}$ |

On en déduit la relation de transition de l'automate :

| $\delta$ | $a$ | $b$ | $c$ | initial/final |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p$ | $s$ | $r$ | $F$ |
| $q$ | $p$ | $s$ | $r$ | $F$ |
| $r$ | $\times$ | $s$ | $r$ | $F$ |
| $s$ | $\times$ | $s$ | $r$ | |

On remarque que l'état $q$ n'est plus accessible donc peut être supprimé.

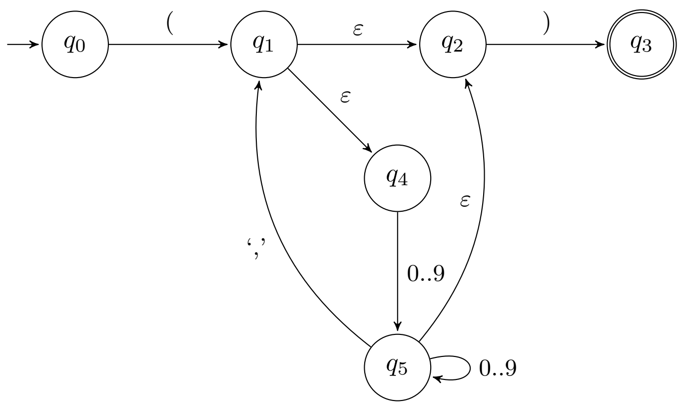


**Exercice 6** On s'intéresse à l'ensemble des tuples d'entiers (simples) en Python. Dans ce langage, il est possible d'écrire :

- Le tuple vide : ()
- Un tuple à un élément : $(42,)$
- Un couple : $(42,29)$ ou bien $(42,29,)$
- Un triplet : $(12,25,37)$ ou bien $(12,25,37,)$
- etc...

En particulier, $(123)$ ne représente **pas** un tuple : il s'agit de la valeur 123 entourée de parenthèses superflues. Les autres expressions telles que $(,)$ ou encore $(,42,29)$ sont interdites.

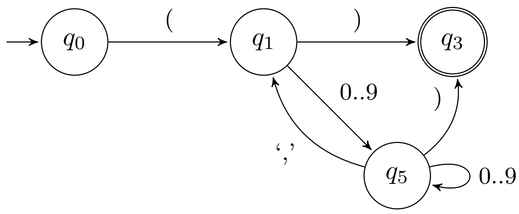
On propose l'automate suivant pour reconnaître les tuples d'entiers.




Construire un automate sans $\varepsilon$-transition équivalent à celui proposé. L'automate proposé répond-il bien aux spécifications ? Justifier.

**Solution de l'Exercice 6.**

| $q$ | $\mathrm{Acc}_\varepsilon(q)$ |
|---|---|
| $q_0$ | $q_0$ |
| $q_1$ | $q_1, q_2, q_4$ |
| $q_2$ | $q_2$ |
| $q_3$ | $q_3$ |
| $q_4$ | $q_4$ |
| $q_5$ | $q_2, q_5$ |




L'automate ne répond pas à la spécification : on reconnaît par exemple (1) en trop.

**Exercice 7** On considère un vocabulaire $V$ et une relation $R \subseteq V \times V$. On définit

$$H_R \;=\; \{w_1 \cdots w_k \,|\, k \geq 2,\, \forall 1 \leq i < k,\, (w_i, w_{i+1}) \in R\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $H_R$ est régulier.

On pose $V_0 = \{a, b, c, d, e\}$ et $R_0 = \{(a, b), (b, e), (d, d), (a, c), (d, c), (e, d)\}$.

▷ Question 1 Enumérer les mots de $H_{R_0}$ de longueur inférieure ou égale à 3.

▷ Question 2 Construire un automate qui reconnaît $H_{R_0}$.

▷ Question 3 **[Avancé]** En supposant $V$ et $R$ **quelconques**, démontrer que le langage $H_R$ est reconnu par un automate fini.

**Solution de l'Exercice 7.**

▷ Question 1 Les mots de longueur inférieure ou égale à 3 dans $H_{R_0}$ sont :

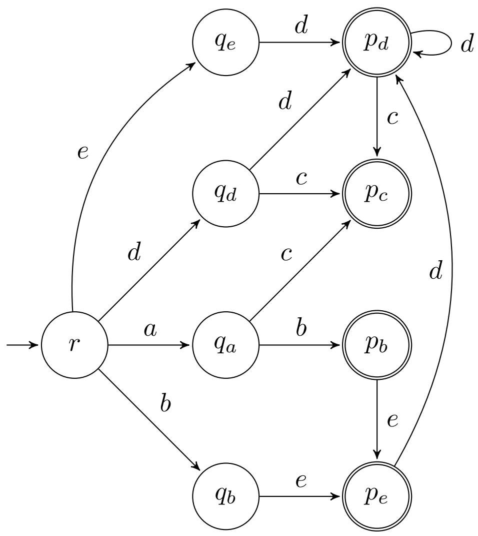
$$ab,\ be,\ dd,\ ac,\ dc,\ ed,\ abe,\ bed,\ ddc, edc, edd, ddd.$$

▷ Question 2 L'automate reconnaissant $H_{R_0}$ est défini de la façon suivante :

— L'état $r$ est l'état initial, dans lequel aucune lettre n'a été lue.
— Pour $x \in V_0$, l'état $q_x$ est l'état dans lequel on se trouve après avoir lu $x$ comme première lettre.
— Pour $y \in V_0$, l'état $p_y$ est l'état dans lequel on se trouve après avoir lu $y$, $y$ étant au moins la deuxième lettre.

La relation de transition est la suivante (les états inatteignables ne sont pas montrés) :

| $Q$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | initial/final |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | $q_a$ | $q_b$ | $\times$ | $q_d$ | $q_e$ | $I$ |
| $q_a$ | $\times$ | $p_b$ | $p_c$ | $\times$ | $\times$ | |
| $q_b$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $p_e$ | |
| $q_d$ | $\times$ | $\times$ | $p_c$ | $p_d$ | $\times$ | |
| $q_e$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $p_d$ | $\times$ | |
| $p_b$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $p_e$ | $F$ |
| $p_c$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $F$ |
| $p_d$ | $\times$ | $\times$ | $p_c$ | $p_d$ | $\times$ | $F$ |
| $p_e$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $p_d$ | $\times$ | $F$ |




▷ Question 3 Posons $A_R = \langle Q, V, \delta, I, F\rangle$, où :
— $Q = \{q_a \mid a \in V\} \uplus \{p_a \mid a \in V\} \uplus \{r\}$ (où $\uplus$ représente l'union disjointe),
— $I = \{r\}$,
— $F = \{p_a \mid a \in V\}$,
— La relation de transition est définie par

$$\begin{array}{rcl} \delta & = & \{(r, a, q_a) \mid a \in V\} \quad \cup \quad \{(q_a, b, p_b) \mid (a, b) \in R\} \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad \cup \quad \{(p_a, b, p_b) \mid (a, b) \in R\} \end{array}$$

Montrons que $\mathcal{L}(A) = H_R$. On montre, par induction sur $k$, que pour tout mot $w$ de longueur $k$, on a l'équivalence : $w \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow w \in H_R$. On remarque que si $k \in \{0, 1\}$ la propriété est immédiate, puisqu'il est clair que $\mathcal{L}(A)$ et $H_R$ ne contiennent aucun mot de longueur 0 ou 1 (les chemins de $r$ à un état final sont de longueur 2 au minimum dans $A$).

— Pour $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
w_1 w_2 \in H_R &\Leftrightarrow w_1 \in V \text{ et } (w_1, w_2) \in R \\
&\Leftrightarrow (r, w_1, q_{w_1}) \in \delta \text{ et } (q_{w_1}, w_2, p_{w_2}) \in \delta \\
&\Leftrightarrow \exists \text{ un chemin de } r \text{ à } p_{w_2} \text{ dans } A_R \text{ de trace } w_1 w_2 \\
&\Leftrightarrow w_1 w_2 \in \mathcal{L}(A_R)
\end{aligned}$$

— Pour $k \geq 3$ :

$$\begin{aligned}
w_1 \cdots w_k \in H_R &\Leftrightarrow w_1 \cdots w_{k-1} \in H_R \text{ et } (w_{k-1}, w_k) \in R \\
&\Leftrightarrow w_1 \cdots w_{k-1} \in \mathcal{L}(A_R) \text{ et } (w_{k-1}, w_k) \in R \text{ (hyp. ind.)} \\
&\Leftrightarrow \exists \text{ un chemin de } r \text{ à } p_{w_{k-1}} \text{ de trace } w_1 \cdots w_{k-1} \\
&\phantom{\Leftrightarrow}\ \text{ et } (p_{w_{k-1}}, w_k, p_{w_k}) \in \delta \\
&\Leftrightarrow \exists \text{ un chemin de } r \text{ à } p_{w_k} \text{ de trace } w_1 \cdots w_k \\
&\Leftrightarrow w_1 \cdots w_k \in \mathcal{L}(A_R)
\end{aligned}$$

**Remarque :** Les équivalences sont à manipuler avec précaution. Ainsi, dans le cas où $k \geq 3$, pour justifier formellement les dernières équivalences, il faudrait démontrer (par induction) que tout chemin d'origine $r$ et d'extrémité $p_a$ (pour $a \in V$) a une trace de la forme $wa$ et que si $w_1 \cdots w_k \in H_R$, alors $w_1 \cdots w_{k-1} \in H_R$ et $(w_{k-1}, w_k) \in R$.