TD n°4

ⓘ **Info**

script R: td_4.R

Questions de cours

- Rappeler la définition d'une variable aléatoire étagée.
- Rappeler la définition d'une variable aléatoire de carré intégrable et de la variance d'une telle variable aléatoire.

Exercice 1

On considère K intervalles ouverts $(I_k)_{k=1,...,K}$ inclus dans l'ensemble $(0,1)$, susceptibles de se recouvrir de manière arbitraire. Pour tout $k = 1, \ldots, K$, on note ℓ_k la longueur de l'intervalle I_k.

Soit U un point de l'intervalle $(0,1)$ tiré au hasard suivant la loi uniforme et N le nombre d'intervalles contenant le point U.

On suppose dans les premières questions que $K = 10$ et que $\ell_k = 1/10$ pour tout $k = 1, \ldots, 10$.

Question 1

- Donner une représentation graphique des 10 intervalles, ainsi qu'une réalisation de la variable U et de la variable N correspondante.
- Représenter 2 situations extrêmes dans lesquelles les 10 intervalles sont soit d'intersection vide, soit d'intersection complète. Dans chacun des 2 cas, décrire la loi de la variable N. Donner son espérance et sa variance.

Question 2

Montrer que l'on peut écrire N comme une variable étagée

$$N = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{A_k}$$

où l'on précisera la définition des événements (A_k) intervenant dans la somme.

- La loi de la variable N est-elle une loi binomiale ?
- Calculer l'espérance de la variable N.

Question 3

- Montrer que la variance de la variable N correspond au double de la somme des longueurs des intersections entre paire d'intervalles

$$\mathrm{Var}[N] = 2 \sum_{j<k} \mathrm{longueur}(I_j \cap I_k).$$

- En déduire que $\mathrm{Var}[N] \leq 9$ et que la borne est optimale (elle est atteinte pour une configuration particulière des 10 intervalles).

Question 4

On suppose maintenant que K est quelconque et que les longueurs ℓ_k sont identiques.

- Calculer $\mathbb{E}[N]$ et donner une borne supérieure optimale pour la variance de N.
- Généraliser l'exercice à la dimension 2, où l'intervalle $(0, 1)$ est remplacé par le disque unité, et les intervalles (I_k) sont remplacés par des disques de rayons (r_k).