Méthodes de Runge-Kutta (RK)

1) Méthodes RK explicites d'ordre 2 :

f est supposée C^2.

La fonction ϕ de cette classe de schémas sera déterminée en utilisant une formulation intégrale de l'équation différentielle puis en approchant l'intégrale par une formule de quadrature. On obtient ainsi des schémas qui généralisent la méthode du point milieu vue précédemment.

Soit y solution de $y' = f(t,y)$. On a $y \in C^3$ et

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} y'(\tau)\,d\tau = y(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau))\,d\tau$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

Pour approcher l'intégrale, on approche (chaque composante de) $F(t) = f(t, y(t))$ par son polynôme d'interpolation $P(t)$ aux abscisses t_k, $t_{k+\alpha} = t_k + \alpha h$, où $\alpha \in]0,1]$ est un paramètre qui détermine la méthode :

$$F(t) = P(t) + O(h^2) \quad \text{pour } t \in [t_k, t_k+h]$$

(formule d'erreur d'interpolation : $\forall i = 1, \dots, n$:

$$F_i(t) - P_i(t) = \frac{F_i''(\xi_i)}{2}(t-t_k)(t-t_{k+\alpha})$$

avec $\xi_i \in]t_k, t_{k+1}[$)

On a alors

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t)\,dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} P(t)\,dt + O(h^3)$$

avec $P(t) = F(t_k) + \dfrac{F(t_{k+\alpha}) - F(t_k)}{\alpha h}(t - t_k)$

On obtient donc

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t)\,dt = h\left[F(t_k)\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) + \frac{1}{2\alpha} F(t_{k+\alpha}) \right] + O(h^3)$$

remarques : • $\alpha = \frac{1}{2}$ correspond à la formule de quadrature du point milieu (d'où découle le schéma du point milieu explicite pour l'équation différentielle).

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t)\,dt = h\,F(t_{k+1/2}) + O(h^3), \quad t_{k+1/2} = t_k + \frac{h}{2}$$

• $\alpha = 1$ correspond à la formule de quadrature des trapèzes (qui conduira à la méthode de Heun d'ordre 2 pour l'équation différentielle)

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t)\,dt = \frac{h}{2}\left[F(t_k) + F(t_{k+1}) \right] + O(h^3)$$

Pour avoir un schéma explicite, on effectue le développement :

$$hF(t_{k+\alpha}) := hF(t_k + \alpha h, y(t_k + \alpha h)) = h f(t_k + \alpha h, y(t_k) + \alpha h y'(t_k) + O(h^2))$$

$$= h f(t_k + \alpha h, y(t_k) + \alpha h f(t_k, y(t_k))) + O(h^3)$$

(f étant L-lipschitzienne en y).

On a donc pour toute solution y de l'équation différentielle :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt = h\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_k, y(t_k)) + h \times \frac{1}{2\alpha} f\big(t_k + \alpha h, y(t_k) + \alpha h f(t_k, y(t_k))\big) + O(h^3),$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt.$$

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_k, y(t_k)) + \frac{1}{2\alpha} f\big(t_k + \alpha h, y(t_k) + \alpha h f(t_k, y(t_k))\big) + O(h^2)$$

Le schéma numérique s'écrit en négligeant le reste $O(h^2)$.
Le schéma est alors <u>consistant à l'ordre 2.</u>

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_k, y_k) + \frac{1}{2\alpha} f\big(t_k + \alpha h, y_k + \alpha h f(t_k, y_k)\big).$$

Les méthodes RK explicites d'ordre 2 se formulent donc de la manière suivante ; pour calculer y_{k+1} en fonction de y_k :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + \alpha h, y_k + \alpha h k_1) \\ y_{k+1} = y_k + h\left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) k_1 + \frac{1}{2\alpha} k_2\right]. \end{cases}$$

On vérifie que ces schémas sont stables par rapport aux erreurs en utilisant le critère de stabilité vu en cours. Ils sont donc <u>convergents d'ordre 2</u>.

2) généralisation

On appelle méthode RK à s étages (s entier ≥ 1) un schéma de la forme :

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

$$\begin{cases} k_i = f\left(t_k + c_i h,\ y_k + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \\ \forall i = 1, \dots, s \end{cases}$$

b_i, c_i, a_{ij} ($1 \leq i, j \leq s$) sont des paramètres qui définissent le schéma.

Les schémas RK explicite d'ordre 2 étudiés précédemment correspondent à $s = 2$, $b_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$, $b_2 = \frac{1}{2\alpha}$, $c_1 = 0$, $c_2 = \alpha$, $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, $a_{21} = \alpha$.

On représente souvent ces schémas en donnant leurs paramètres dans un "tableau de Butcher" :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

Les schémas explicites sont représentés par une matrice $A = (a_{ij})$ triangulaire inférieure stricte ($a_{ij} = 0 \ \forall j \geq i$) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{s1} & \cdots & a_{s,s-1} & 0 \end{pmatrix},$$ où on calcule à partir de y_k :

$$y_k \to k_1 \to k_2 \to \cdots\ k_s \to y_{k+1}.$$

<u>Remarque</u> Lorsque $h=0$, on a $k_i = f(t_k, y_k)$ et donc

$$\sum_{i=1}^{s} b_i k_i = f(t_k, y_k) \times \sum_{i=1}^{s} b_i .$$

Il faut donc que $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ pour que le schéma soit consistant.

exemples de schémas

méthodes explicites à 2 étages d'ordre 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}$$

$\alpha = 1/2 \longrightarrow$
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$
méthode du point milieu explicite

$\alpha = 1 \longrightarrow$
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$
méthode de Heun d'ordre 2

Euler explicite : ordre 1

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{cases} y_{k+1} = y_k + h k_1 \\ k_1 = f(t_k, y_k) \end{cases}$$

Euler implicite : ordre 1

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{cases} y_{k+1} = y_k + h k_1 \\ k_1 = f(t_k + h, y_k + h k_1) \end{cases}$$

Point milieu implicite : ordre 2

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$y_{k+1} = y_k + h k_1$$
$$k_1 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1\right)$$
$$= f\left(t_k + \frac{h}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right)$$

Crank-Nicolson : ordre 2
(ou Règle du trapèze implicite)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{k_1 + k_2}{2}$$
$$k_1 = f(t_k, y_k)$$
$$k_2 = f\left(t_k + h, y_k + h \frac{k_1 + k_2}{2}\right)$$
$$= f(t_k + h, y_{k+1})$$

Gauss-Legendre : ordre 4 (implicite)

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Méthode RK 4 ordre 4, explicite, à 4 étages

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$
$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_k + h,\ y_k + h\, k_3)$$
$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right)$$
$$= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dans le cas particulier où f est indépendant de y, ce schéma correspond à la formule de quadrature de Simpson :

$$y' = f(t) \implies y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\,dt$$
$$= y(t_k) + \frac{h}{6}\left(f(t_k) + 4f\left(t_k + \frac{h}{2}\right) + f(t_{k+1})\right)$$
$$+ O(h^5)$$

En négligeant le reste $O(h^5)$, on obtient le schéma RK4 (ici $k_1 = f(t_k)$, $k_2 = k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}\right)$, $k_4 = f(t_k + h)$) :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$