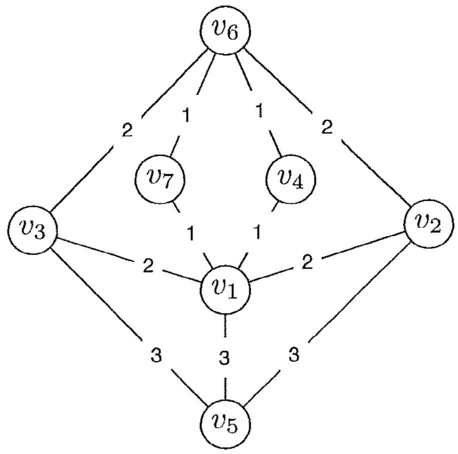
EXAMEN du 22 mai 2013. Durée: 3h. 2 pages numérotées.
Documents manuscrits ou polycopiés autorisés. Aucun livre.

Il est important de bien expliquer ce que vous faites. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une bonne note, par contre il sera enlevé des points pour une rédaction trop succincte.

Veuillez noter sur votre copie le nom de votre enseignant : BIENIA ou STAUFFER ou SZIGETI

EXERCICE 1:

Déterminer un arbre de coût minimum dans le graphe ci-dessous :



NB : les données sur les arêtes représentent les coûts.

a) Appliquer soit l'algorithme de Kruskal soit l'algorithme de Prim en partant du sommet v_1. Préciser la structure courante pour chaque itération de l'algorithme.

b) Combien y-a-t'il d'arbres couvrants de coût minimum.

EXERCICE 2 :

Considérons le projet simple ci-contre:

a) Quelle est la durée minimum du projet ? Donner la date de début au plus tôt et au plus tard pour chaque tâche qui permet de terminer dans cette durée minimum. Donner la liste des tâches critiques et la marge des autres.

b) Supposons que l'on peut diminuer la durée d'une seule tâche. Quelle tâche doit-on choisir pour diminuer le plus fortement la durée minimum du projet? (Justifier la réponse.) Donner la nouvelle durée de la tâche choisie et la nouvelle durée minimum du projet.

tâche	durée	tâches précédentes
A	3	–
B	6	–
C	6	
D	4	A
E	4	A, C
F	2	B, C, D

On utilisera au choix une des méthodes de chemin critique à savoir la méthode *potentiels-tâches* (*graphe des tâches*) ou *PERT* (*graphe des événements*).

EXAMEN du 22 mai 2013. Durée: 3h. 2 pages numérotées.
Documents manuscrits ou polycopiés autorisés. Aucun livre.

EXERCICE 3:

Une entreprise disposant de 10 000 m^2 de carton en réserve fabrique et commercialise 2 types de boîtes en carton. La fabrication d'une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m^2 de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 3 et 5 €.

a) Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire canonique.

b) Déterminer un plan de production optimal à l'aide de l'algorithme du **simplexe**.

c) Ecrire le programme **dual**. Donner la solution optimale du dual. Confirmer l'optimalité des deux solutions en utilisant le théorème des écarts complémentaires.

d) Un étudiant se propose de venir assembler des boîtes pendant quelques heures (à la même cadence que les employés réguliers de l'entreprise) mais demande à être payé 60 € de l'heure. Que conseillez-vous au chef du personnel et pourquoi?

e) En téléphonant à son fournisseur, l'entreprise apprend qu'il lui est possible de se faire livrer immédiatement du carton au prix de 2 centimes le m^2. Que conseillez-vous au responsable des réapprovisionnements et pourquoi?

EXERCICE 4 :

Trouver par une méthode vue en cours, que vous expliquerez soigneusement, une base réalisable du programme linéaire suivant (on ne demande pas de trouver la solution optimale du programme linéaire) :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
\textit{maximiser :} & z = -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \\
\textit{sous :} & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = 3 \\
 & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0
\end{array}$$

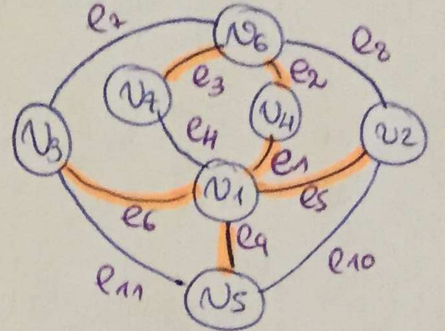
EXERCICE 5 :

Soit G un graphe biparti. Soit M un couplage de G tel qu'on ne peut pas ajouter d'arête de G à M pour obtenir un couplage. Montrer qu'un couplage de cardinalité maximum de G contient au plus 2|M| arêtes.

Indication : On montrera que l'ensemble des sommets de M est un ensemble transversal de G.

Exercice 1 a) Algorithme de Kruskal

(1) On ordonne les arêtes par coût croissant
(2) On applique l'algorithme



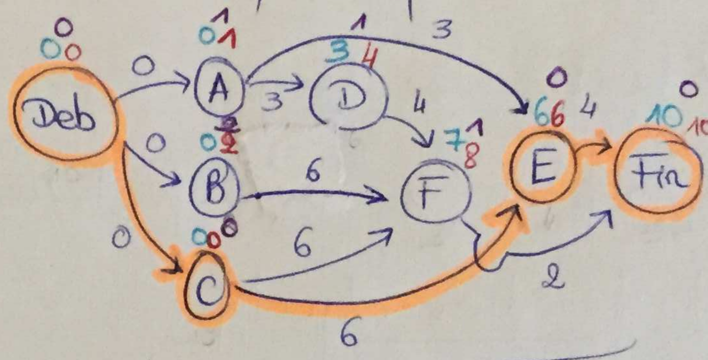
arbre couvrant de coût minimum (10) du graphe

b) On a $\binom{3}{4}$ choix à faire pour les arêtes $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ puis $\binom{2}{4}$ choix pour les arêtes $\{e_5, e_6, e_7, e_8\}$ et finalement $\binom{1}{3}$ choix pour les arêtes $\{e_9, e_{10}, e_{11}\}$ soit $4 \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times 3 = 72$ choix possibles

---

Exercice 2 a) C'est un problème d'ordonnancement

Voici le graphe associé :
(méthode potentiel-tâche)



Algorithme de Bellman car graphe sans circuit (en effet, ∃ ordre topologique)

π : Date au plus tôt
η : Date au plus tard
m : marge
: tache et chemin critique

b) Une tache à diminuer serait E, mais dans il faudrait attendre que F se termine → On a une durée de 9 au lieu de 10

Exercice 3

a) Tableau récapitulatif

	Espace	Tps Assembl	Agraphe	Prix
Carton type 1	$1 m^2$	2 min	1	3€
type 2	$2 m^2$	3 min	4	5€
Disponible	$10\,000 m^2$	200 heures	15000	?

a₂) Variables

x_1 = # de carton de type 1
x_2 = # de carton de type 2 $\in \mathbb{N}$!

a_3) Contraintes de Disponibilités

- On stock $x_1 + 2x_2$ m^2 de carton mais on a que $10\,000 m^2$
- Le temps d'assemblage est $2x_1 + 3x_2$ min mais on a que 200h
- On use $x_1 + 4x_2$ unités d'agraphe mais on en a que 15 000

a_4) Contraintes de non-négativité

- x_1 et x_2 sont positives

a_5) fonction objectif

On cherche à maximiser le profit

a_6) Programme linéaire

$$
P) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10\,000 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12\,000 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 15\,000 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = z(\max) \end{cases}
$$

A finir