MNDI - TD 1

1. Notons e_i la i-ième composante de E. $\rightarrow \tilde{U}_i = u(x_i)$.

Posons $\tilde{U}_0 = \tilde{U}_{N+1} = 0 \rightarrow \tilde{U} = (0, u(x_1) \dots, u(x_N), 0)^T$.

$E = \frac{1}{h^2} A\tilde{U} - F$.

$$e_i = \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} + q(x_i)\tilde{u}_i - f(x_i)$$

Or
$$u_{i+1} = u(x_i) + h\, u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\theta_i^+)$$
$$u_{i-1} = u(x_i) - h\, u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\theta_i^-)$$

Donc $u_{i+1} + u_{i-1} = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{24}\left(u^{(4)}(\theta_i^-) + u^{(4)}(\theta_i^+)\right)$

D'où $e_i = -u''(x_i) - \frac{h^2}{24}\left(u^{(4)}(\theta_i^-) + u^{(4)}(\theta_i^+)\right) + q(x_i)u(x_i) - f(x_i)$

Or u est solution de (1), donc

$$e_i = -\frac{h^2}{24}\left(u^{(4)}(\theta_i^-) + u^{(4)}(\theta_i^+)\right)$$

Donc $|e_i| = \frac{h^2}{24}\left(u^{(4)}(\theta_i^-) + u^{(4)}(\theta_i^+)\right) \leq \frac{h^2}{24} \times 2\|u^{(4)}\|_\infty = \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\infty$.

2. Montrons que 0 n'est pas valeur propre de M (par l'absurde).

Supposons que 0 est VP de M. Soit X un vecteur propre unitaire associé.

$MX = 0$ donc $\forall i \in [\![0, N]\!]$, $\sum_{j=1}^{N} m_{ij}x_j = 0$, Donc :

$\sum_{j=1}^{N} m_{ij}x_j = m_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} m_{ij}x_j = 0$ donc $m_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} m_{ij}x_j$

$$|m_{ii}||x_i| = \left|\sum_{j\neq i} m_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j\neq i} |m_{ij}||x_j|$$

En choisissant i tel que $|x_i| = 1$ (X étant unitaire) :

$$|m_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |m_{ij}||x_j| \leq \sum_{j\neq i} |m_{ij}| \rightarrow \underline{\text{Absurde}}$$

Donc 0 n'est pas VP de M. M est donc inversible.

$\|M^{-1}\|_\infty = \sup_{\|X\|=1} \|M^{-1}X\|$.

Supposons que $\exists\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ tq $\|X\| = 1$ / $\|M^{-1}X\| > \delta^{-1}$

Posons $Y = M^{-1}X$.

$X = MY$ donc $\frac{X}{\|Y\|} = \frac{MY}{\|Y\|}$

$$\left\|\frac{MY}{\|Y\|}\right\| = \frac{\|X\|}{\|Y\|} = \frac{1}{\|Y\|} < \delta$$

Posons $Z = \frac{Y}{\|Y\|}$ et $U = MZ$. $\rightarrow \underline{\|U\| < \delta}$.

$$|u_i| = \left|\sum_{j=1}^{N} z_j m_{ij}\right| = \left|z_i m_{ii} + \sum_{i\neq j} z_j m_{ij}\right| \geq |m_{ii}| - \left|\sum_{j\neq i} m_{ij}z_j\right| \geq |m_{ij}| - \sum_{j\neq i}|m_{ij}| = \delta.$$

Donc $\|U\| \geq \delta \rightarrow$ contradiction.

Donc $\|M^{-1}\|_\infty \leq \delta^{-1}$.

3.

$\delta = \min(1+h^2 q(x_1), h^2 q(x_2) \dots h^2 q(x_{n-1}), 1+h^2 q(x_n)) \geq \min(1+h^2 m, h^2 m)$
$= h^2 m \quad , \quad m = \min\limits_{x \in [0,1]} q(x) > 0 .$

$\Rightarrow \delta^{-1} \leq \frac{1}{mh^2} \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{mh^2}$.

4. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{h^2} A\tilde{U} = F + E \\ \frac{1}{h^2} AU = F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A(\tilde{U} - U) = Eh^2 \\ \tilde{U} - U = A^{-1} E h^2 \end{array}$

$\Rightarrow \|\tilde{U} - U\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|E\|_\infty h^2 \leq \frac{1}{m} \frac{h^2}{12} \|U^{(4)}\|_\infty$.