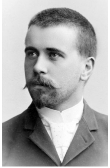
Introduction aux produits dérivés

Page du Cours sur Chamilo

Hervé Guiol (IPS LJK)

Emile Picard
1856-1941



Ernst Lindelöf
1870-1946

Leonard Ornstein
1880-1941

George Uhlenbeck
1900-1988

Plan du cours d'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. Premières propriétés du MBS.
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. Intégrale d'Itō : définitions et construction. Processus d'Itō. Variation quadratique.
8. Calcul d'Itō : formules d'Itō. Représentation des martingales Browniennes.
9. Formule de Cameron-Martin.
10. **Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itō.**
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

Résumé

Contexte : On se place en dimension 1, W un $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-M.B.S.
Objectif : Donner un sens à l'E.D.S.

$$dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dW_t$$

où $b(t, x)$ dérive et $\sigma(t, x)$ diffusion ou dispersion sont des fonctions.

Equations différentielles stochastiques au sens d'Itô

Définition 8.1 Solution forte

Étant donnés $B = (B_t)_{0\leq t\leq T}$ un M.B.S. de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, b et σ des fonctions mesurables, $x \in \mathbb{R}$. Le triplet $(X, B, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T})$ est appellé solution (forte) de l'EDS homogène

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s \tag{1}$$

respectivement de l'EDS non homogène

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \tag{2}$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(I) X est $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-adapté ;

(II) pour tout $t \in [0, T]$ on a $\mathbb{P}$-p.s. $\int_0^t \left(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\right)\, ds < \infty$; respectivement $\int_0^t \left(|b(s, X_s)| + \sigma^2(s, X_s)\right)\, ds < \infty$;

(III) X vérifie (1) ; respectivement (2).

DÉFINITION 8.2 UNICITÉ TRAJECTORIELLE

On dit qu'il y a unicité trajectorielle des solutions de (1) ou (2) si étant donné $(X, B, (\mathcal{F})_{t\in[0,T]})$ et $(X', B, (\mathcal{F})_{t\in[0,T]})$ deux solutions de (1) respectivement (2) avec $X_0 = X_0' = x$ pour le **même** $(\mathcal{F})_{t\in[0,T]}$**-M.B.S.** B alors avec $\mathbb{P}$ probabilité 1 on a $X_t = X_t'$ pour tout $t \geq 0$: i.e. X et X' sont indistingables.

THÉORÈME 8.3 D'UNICITÉ TRAJECTORIELLE (CAS HOMOGÈNE)

On suppose que les coefficients de (1) sont localement Lipchiziens : i.e. pour tout entier $n \geq 1$ il existe une constante $K_n < \infty$ telle que pour tous $|x| \leq n$ et $|y| \leq n$

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K_n|x - y| \tag{3}$$

alors on a unicité trajectorielle des solutions fortes de l'EDS (1) :

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t.$$

Eléments de preuve de l'unicité

X et Y soient deux solutions fortes avec $X_0 = Y_0$, $\forall n \geq 1$ on définit

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n\} \text{ et } \widetilde{\tau}_n = \inf\{t \geq 0 : |Y_t| \geq n\}$$

On pose $S_n = \tau_n \wedge \widetilde{\tau}_n$. On montre pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}[(X_{t\wedge S_n} - Y_{t\wedge S_n})^2] \leq 2(T+1)K_n^2 \int_0^t \mathbb{E}[(X_{u\wedge S_n} - Y_{u\wedge S_n})^2]\, du \qquad (4)$$

On utilise le

Lemme de Grönwall

Si g est une fonction continue vérifiant $0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)\, ds$ pour $0 \leq t \leq T$ où $\alpha(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et $\beta \geq 0$ alors :
$0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)}\, ds$ pour $0 \leq t \leq T$. En particulier, si $\alpha \equiv 0$ alors $g = 0$.

Donc en appliquant le Lemme de Grönwall à (4) avec $g(t) = \mathbb{E}[(X_{t\wedge S_n} - Y_{t\wedge S_n})^2]$, $\alpha \equiv 0$ et $\beta = 2(T+1)K_n^2$ on obtient que les processus arrêtés X^{S_n} et Y^{S_n} sont indistingables. En prenant la limite quand $n \to +\infty$ on obtient que X et Y sont indistingables.

Théorème 8.5 d'Unicité trajectorielle (cas non homogène)

On suppose que les coefficients de (2) sont localement Lipchiziens : i.e. pour tout entier $n \geq 1$ il existe une constante $K_n < \infty$ pour tous $t \in \mathbb{R}^+$, $|x| \leq n$ et $|y| \leq n$

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_n|x-y| \tag{5}$$

alors on a unicité trajectorielle des solutions fortes de l'EDS (2) :

$$dX_t = b(t,X_t)\, dt + \sigma(t,X_t)\, dB_t$$

Théorème d'Itô 8.6

On suppose que les coefficients b et σ satisfont les hypothèses : $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et $x, y \in \mathbb{R}$ il existe $K > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq K|x-y|, \text{(Lipchitz)}; && (6)\\ |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 &\leq K^2(1+|x|^2), \text{(linéaires)}. && (7) \end{aligned}$$

Alors il existe une solution forte, unique trajectoriellement, à (2).

ETAPES DE LA PREUVE DU THÉORÈME D'ITÔ : MÉTHODE DE PICARD-LINDELÖF

Pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$X_t^{(0)} = X_0;\; X_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dW_s \qquad (8)$$

Les processus $X^{(n)}$ sont à trajectoires continues et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adaptés.
On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left[\left(X_t^{(n)}\right)^2\right] \leq C(1 + \mathbb{E}(X_0^2))e^{Ct} \qquad (9)$$

Et donc pour tous $T \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[\left(X_t^{(n)}\right)^2\right] < +\infty.$$

Le reste de la preuve consiste à montrer que les processus $X^{(n)}$ convergent (dans L^2) vers une solution X de (2). De par les théorèmes précédents, la solution trouvée est nécessairement unique au sens trajectoriel.

Propriété des solutions

Proposition 8.7

Sous les hypothèses d'existence et d'unicité la solution X de (2) vérifie : $\forall T > 0$, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall m \in \mathbb{N}$ il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, C_3 ne dépendant que de T, K et m telles que

(I) $\mathbb{E}\left[|X_t|^{2m}\right] \leq C_1 \left(1 + \mathbb{E}(X_0^{2m})\right) e^{C_1 t} \quad \forall 0 \leq t \leq T$;

(II) $\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^{2m}\right] \leq C_2 \left(1 + \mathbb{E}(X_0^{2m})\right) (t - s)^m \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$;

(III) $\mathbb{E}\left[\max_{0 \leq s \leq T} |X_s|^{2m}\right] \leq C_3 \left(1 + \mathbb{E}(X_0^{2m})\right) e^{C_3 T}$.

Remarque

Dans la proposition (II) nous donne des informations sur la continuité de la trajectoire de la solution. L'item (I) donne un contrôle sur les moments pairs et (III) sur le maximum de la trajectoire entre 0 et T.

Mouvement Brownien Géométrique

L'EDS du Mouvement Brownien Géométrique est donnée par

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t.$$

avec $S_0 = s_0$ où $\mu \in \mathbb{R}, , \sigma \in \mathbb{R}^{*,+}$. On a $b(x) = \mu x$ et $\sigma(x) = \sigma x$. Sa solution est donnée par

$$S_t = s_0 \, \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right]$$

qui est de loi Log-Normale : $\ln(S_t) \sim \mathcal{N}(\ln(s_0) + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2)$.
Sa moyenne est $\mathbb{E}(S_t) = s_0 e^{\mu t}$: le paramètre μ est appelée **tendance** (ou **rendement**) de S. Le paramètre σ est appelé **volatilité** de S.
Une propriété remarquable de ce processus est que $\forall t > s \geq 0$ on a

$$S_t = S_s \, \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\right]$$

et donc que S_t/S_s est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et de même loi que S_{t-s}/s_0.
Si on note à $s > 0$ fixé $\forall t$, $\overline{S}_t := S_{s+t}/S_s$ on a

$$\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_s] = S_s \mathbb{E}[\overline{S}_{t-s}] = S_s \mathbb{E}\left[\frac{S_{t-s}}{s_0}\right]$$

qui s'interprète comme la **propriété de Markov** multiplicative pour S.

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

L'EDS d'Ornstein-Uhlenbeck est

$$\begin{aligned} dR_t &= -\alpha X_t \, dt + \sigma \, dW_t \\ R_0 &= r_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $\alpha > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. On a $b(x) = -\alpha x$ et $\sigma(x) = \sigma$. Sa solution est donnée par

$$R_t = e^{-\alpha t} \left(r_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} \, dW_s \right).$$

C'est un processus gaussien appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck de moyenne $\mathbb{E}(R_t) = xe^{-\alpha t}$ et fonction de covariance pour $0 \leq s < t$

$$\mathrm{Cov}(R_s, R_t) = e^{-\alpha(t-s)} \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha s})}{2\alpha}$$

On observe que $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}(R_t) = 0$ ("retour à la moyenne") et

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Var}(R_t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha t})}{2\alpha} = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

AUTRES EXEMPLES

EXEMPLE

EDS du Signal

$$dX_t = \sin(X_t)\,dt + \cos(X_t)\,dW_t$$

avec $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ à une unique solution forte. Cependant on ne sait pas résoudre formellement cette équation. D'où l'intérêt des méthodes numériques !

EXEMPLE

Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) On veut $R_t \geq 0$ et telle que

$$dR_t = a(b - cR_t)\,dt + \sigma\sqrt{R_t}\,dW_t$$

avec $R_0 = r_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ et a, b, c et σ des constantes strictement positives.
Attention : $\sigma\sqrt{x}$ n'est pas Lipchitzienne au voisinage de 0. Mais il existe une unique solution à trajectoires continues (sans formule fermée).
Il faut observer que $R_t \geq 0$ pour tout t.