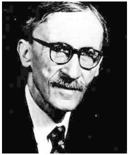
INTRODUCTION AUX PRODUITS DÉRIVÉS

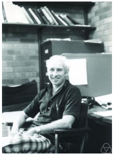
PAGE DU COURS SUR CHAMILO

Hervé Guiol (IPS LJK)

Johan Jensen
1859-1925



Paul Lévy
1886-1971



Robert Blumenthal
1931-2012

Plan du cours d'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. Premières propriétés du MBS.
4. **Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.**
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. Intégrale d'Itô 1 : définitions.
8. Intégrale d'Itô 2 : formule d'Itô. Processus d'Itô. Variations.
9. Représentation des martingales Browniennes. Formule d'Itô multi-*d*. Formule de Cameron-Martin.
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itô.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

OUTLINE

FILTRATIONS ET PROCESSUS ADAPTÉS

DÉFINITION 4.1

On appelle **filtration** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ croissante (au sens de l'inclusion) de sous tribus de $\mathcal{F}$.
L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace de probabilité filtré**.

DÉFINITION 4.2

Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, on dira qu'un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in I}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$**-adapté** si et seulement si $\forall t \in I$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Exemple Canonique : Pour tous processus $X = (X_t)_{t\in I}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on note

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t, s \in I)$$

la tribu engendrée par la trajectoire de X sur $[0, t] \cap I$.
La famille $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelée **filtration naturelle** du processus X.

Conditions habituelles

Définition 4.3 Conditions habituelles sur les filtrations

Dans tout ce qui suit on supposera toujours les deux conditions suivantes vérifiées.

A. Complétude : la sous tribu $\mathcal{F}_0$ contient tous les $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.

B. Continuité à droite : $\forall t \in I$ on définit la sous tribu de $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0,(t+\varepsilon)\in I} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

on supposera que $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$.

Remarques :

$(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S.

DÉFINITION 4.4.

Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré on appellera $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. sous $\mathbb{P}$ tout processus W vérifiant

(A) W est un M.B.S. sous $\mathbb{P}$;

(B) W est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté ;

(C) $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ les v.a. $(W_t - W_s)$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_s$.

Sous les conditions habituelles la filtration naturelle du M.B.S. notée $\mathcal{F}^W$ est continue à droite. On hérite alors de la propriété qui suit

COROLLAIRE 4.5. LOI $0-1$ DE BLUMENTHAL.

La tribu $\mathcal{F}_0^{W^+}$ est triviale : i.e.

$$\forall A \in \mathcal{F}_0^{W^+} \text{ on a } \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

APPLICATION

Application : Considérons $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} W_s$. Alors l'événement $\{M_t > 0, \forall t > 0\} \in \mathcal{F}_0^{W^+}$ car $\forall t$ on a que M_t est $\mathcal{F}_t^W$-mesurable et

$$\{M_t > 0, \forall t > 0\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{M_\varepsilon > 0\} \in \mathcal{F}_0^{W^+}$$

donc par Blumenthal $\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 0$ ou 1. Or si on avait

$$\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 0$$

cela impliquerait $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $M_{\varepsilon_0} = 0$ avec probabilité 1 ce qui est impossible car

$$\mathbb{P}(M_{\varepsilon_0} > 0) \geq \mathbb{P}(W_{\varepsilon_0} > 0) = 1/2.$$

d'où

$$\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 1.$$

Processus càd-làg Intégré

On admettra la proposition suivante qui nous sera bien utile lorsque l'on parlera d'intégration.

Proposition 4.6

Soit X un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté à valeurs réelles et continu à droite, limité à gauche (càd-làg) alors le processus Y définit par $\forall t \in I$

$$Y_t = \int_0^t X_s \, ds$$

est à trajectoires continues et est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté.

TEMPS D'ARRÊT

Contexte : On commence par supposer que $I = \mathbb{R}^+$; étant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré on note

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$$

la tribu engendrée par la réunion des éléments de la filtration. On a en général que

$$\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}.$$

DÉFINITION 4.7.

Dans ce contexte, une variable aléatoire τ à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}+ = [0, +\infty]$ vérifiant

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0$$

est appelé $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-**temps d'arrêt**.

Remarque : Dans le cas ou $I = [0, T]$ on a bien entendu que $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$ et on supposera seulement que pour tout $t \geq T$ on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_T$.

Temps d'arrêt

En **temps continu** et sous les **conditions habituelles** sur la filtration on a

Proposition 4.8

Une v.a. τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt si et seulement si

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0$$

Exemples de temps d'arrêt.

1. Toute constante positive est un temps d'arrêt ;
2. Le maximum (resp. le minimim) de deux $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt.
3. La somme de deux $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt.
4. Si B est un borélien de $\mathbb{R}$ et si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus à trajectoires continues, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté alors la v.a. $\tau_B := \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$ (appellée temps d'atteinte de B par le processus est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt.

Tribu des événements antérieurs à un temps d'arrêt.

Définition 4.9

Soit τ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt on définit

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0\}$$

qui est appelée **tribu des événements antérieurs à** τ.

Remarque : Il s'agit bien d'une sous-tribu de $\mathcal{F}$: on a bien $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ de plus si $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors $\forall t \geq 0$ on a

$$\overline{A} \cap \{\tau \leq t\} = \overline{A \cap \{\tau \leq t\}} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et enfin $\forall A_k \in \mathcal{F}_\tau$, $\forall t \geq 0$ on a

$$\left(\bigcup_k A_k\right) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_k (A_k \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

Tribu des événements antérieurs à un temps d'arrêt.

Proposition 4.10

Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré alors

1. Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. alors la v.a. τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable ;
2. Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. fini $\mathbb{P}$-p.s. et si X est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté à trajectoires continues alors la v.a. X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable ;
3. Si τ' est un autre $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. tel que $\tau' \leq \tau$ $\mathbb{P}$-p.s. alors

$$\mathcal{F}_{\tau'} \subseteq \mathcal{F}_\tau$$

   ce qui entraine que pour tout σ $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A on a

$$\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau$$

4. Pour tout processus X, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté, à trajectoires continues le **processus arrété**

$$X^\tau = (X_{t\wedge\tau})_{t\in I}$$

   est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté. De plus X^τ est aussi $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\in I}$-adapté.

Rappels sur l'espérance conditionnelle

Definition 4.11.

Etant donnés X une v.a. intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ l'unique $\mathbb{P}$-p.s. v.a. $\mathcal{G}$-mesurable notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X\right], \ \forall A \in \mathcal{G} \tag{1}$$

Proposition 4.12

On suppose X v.a. intégrable, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle vérifie les propriétés qui suivent :

A. la propriété (1) est équivalente à
$$\mathbb{E}\left[Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}\left[ZX\right], \ \forall Z \text{ v.a. } \mathcal{G} - \text{mesurable et t.q. } ZX \text{ intégrable;} \tag{2}$$

B. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$;

C. $\mathbb{E}(1|\mathcal{G}) = 1$, $\mathbb{P}$-p.s. ;

D. L'espérance conditionnelle est $\mathbb{P}$-p.s. linéaire ;

E. Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable vérifiant que XY est intégrable alors
$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}), \ \mathbb{P} - p.s.;$$

F. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X), \ \mathbb{P} - p.s.;$$

G. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ est une sous tribu alors
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}), \ \mathbb{P} - p.s.;$$

H. inégalité de Jensen : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\varphi(X)$ est intégrable alors
$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})), \ \mathbb{P} - p.s.$$

DEFINITION 4.13

Etant donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ on dira qu'un processus X à valeurs réelles sur cet espace, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté et intégrable (c.à.d. $\forall t \in I\ \mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$) est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-

- sous-martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$
$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$
- sur-martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$
$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$
- martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$
$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$

EXEMPLES

Exemples :

- Toute martingale est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.
- Pour toute v.a. Z intégrable le processus X définit par $X_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$, $\forall t \in I$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale.
- Soient X une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale (resp. sous-martingale) et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante) telle que $\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t\in I}$ est intégrable alors $\varphi(X)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-sous-martingale.

PROPOSITION 4.14

Soit W un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. alors les processus qui suivent sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingales

A. $W = (W_t)_{t\in I}$;

B. $(W_t^2 - t)_{t\in I}$;

C. $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)\right)_{t\in I}$.