Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Couplages dans les graphes bipartis

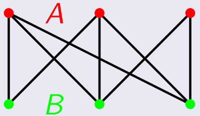
Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Applications des graphes bipartis

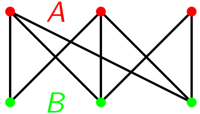
Applications

1. Analyse des documents
   - $V = \{\text{documents}\} \cup \{\text{mots}\}$,
   - $E = \{uv$ si mot u existe dans document $v\}$.
2. Choix des cours
   - $V = \{\text{étudiants}\} \cup \{\text{cours}\}$,
   - $E = \{uv$ si étudiant u prend cours $v\}$.
3. Affectation des tâches
   - $V = \{\text{employés}\} \cup \{\text{tâches}\}$,
   - $E = \{uv$ si employé u peut exécuter tâche $v\}$.
4. Connaissance entre filles et garçons
   - $V = \{\text{filles}\} \cup \{\text{garçons}\}$,
   - $E = \{uv$ si fille u connait garçon $v\}$.



Définition

Graphe biparti : s'il existe une partition de $V(G)$ en deux ensembles A et B telle que chaque arête de G relie un sommet de A à un sommet de B
$\Longleftrightarrow$ il existe une bonne coloration des sommets de G avec deux couleurs.



Notation

$(A, B; E)$: Graphe biparti où A et B sont les deux classes de couleurs et E est l'ensemble des arêtes.

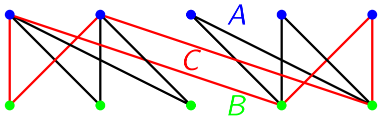
Caractérisation des graphes bipartis

Théorème 1

G est biparti $\iff$ G ne contient pas de cycle élémentaire impair.

Démonstration de nécessité

1. Supposons que G est biparti $(A, B; E)$.
2. Soit C un cycle élémentaire quelconque de G.
3. Chaque sommet de A est donc de degré 0 ou 2 dans C.
4. Toutes les arêtes de C sortent de A car G est biparti.
5. $|E(C)| = \sum_{v \in A} d_C(v) \equiv \sum_{v \in A} 0 = 0 \mod 2,$
6. il n'y a donc pas de cycle élémentaire impair.



Caractérisation des graphes bipartis

Démonstration de suffisance

1. Supposons qu'il n'existe pas de cycle élémentaire impair dans G.
2. Identifions un nombre maximum de paires de sommets sans créer un cycle élémentaire impair, on obtient ainsi G'.
3. G' est connexe sinon en identifiant deux sommets de composantes connexes distinctes on ne crée pas de cycle élémentaire, contradiction.
4. Si $|V(G')| = 1$, alors G n'avait pas d'arêtes et G est ainsi biparti.
5. Si $V(G') = \{v, b\}$, alors les arêtes de G sont entre v et b dans G'. La coloration qui colorie vert/bleu les sommets identifiés dans v/b est bonne.
6. Sinon, il existe dans G' deux arêtes uv et vw telles que $u \neq w$.
   1. En identifiant la paire u, w on obtient G''.
   2. D'après notre hypothèse, G'' contient un cycle élémentaire impair C''.
   3. Si C'' reste un cycle dans G' alors $C := C'$ sinon $C := C' + uv + vw$.
   4. C est un cycle élémentaire impair dans G' qui est une contradiction.

Graphes bipartis

Algorithme de reconnaissance des graphes bipartis

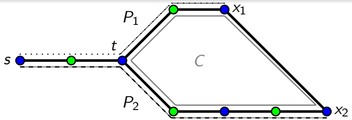
ENTRÉE : $G = (V, E)$ graphe connexe.
SORTIE : Une bonne coloration A, B des sommets de G avec deux couleurs ou un cycle élémentaire impair C.

Etape 0. *Initialisation.* Choisir un sommet s de V, $A := \{s\}, B := \emptyset$.

Etape 1. *Marquage.* Tant qu'il existe $u \in A \cup B, v \notin A \cup B, uv \in E$ faire :
$B := B \cup \{v\}$ si $u \in A$ et $A := A \cup \{v\}$ si $u \in B$; $p(v) := u$.

Etape 2. *Coloration.*
Si A et B sont stables alors arrêter avec la coloration A et B.

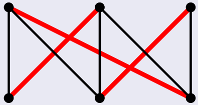
Etape 3. *Cycle élémentaire impair.*
S'il existe $x_1x_2 \in E$ tq x_1 et x_2 sont de même couleur alors faire :
Soit P_i la (s, x_i)-chaîne obtenue en utilisant $p(.)$ $(i = 1, 2)$.
Soit t le dernier sommet en commun de P_1 et P_2 à partir de s.
Arrêter avec le cycle élémentaire impair $C = P_1[x_1, t] + P_2[t, x_2] + x_2x_1$.



Applications des couplages dans les graphes bipartis

Applications

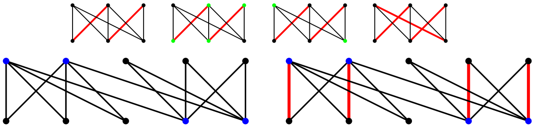
1. Analyse des documents
   - Existe-t-il des livres différents qui peuvent expliquer certains mots rares aux étudiants ?
2. Choix des cours
   - Peut-on choisir des représentants des cours parmi les étudiants qui les suivent ?
3. Affectation des tâches
   - Trouver le nombre maximum de tâches qui peuvent être exécutées par les employés !
4. Connaissance entre filles et garçons
   - Quel est le nombre maximum de couples qui peuvent dancer à la fois ?



Couplages

Définitions

1. Couplage de G : $M \subseteq E(G)$ deux-à-deux non-adjacentes.
2. Sommet M-saturé : s'il existe une arête de M incidente au sommet.
3. Sommet M-insaturé : s'il n'y a pas d'arête de M incidente au sommet.
4. Couplage parfait de G : couplage M sans sommet M-insaturé.
5. Transversal de G : $T \subseteq V(G)$ tel que $G - T$ contient aucune arête.
6. $\nu(G)$: le nombre maximum d'arêtes d'un couplage de G.
7. $\tau(G)$: le nombre minimum de sommets d'un transversal de G.



$\nu(G) = 4, \tau(G) = 4.$

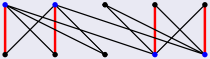
Relation entre $\nu(G)$ et $\tau(G)$

Lemme 1

Pour tout graphe G, $\nu(G) \leq \tau(G)$.

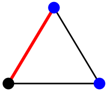
Démonstration

1. Soient M un couplage maximum et T un transversal minimum de G.
2. Puisque T est un transversal, T contient au moins une extrémité de chaque arête e de M, disons v_e.
3. Comme M est un couplage, $v_e \neq v_f$ si $e, f \in M$ et $e \neq f$.
4. $|M| = |\{v_e \in T : e \in M\}| \leq |T|$.
5. $\nu(G) = |M| \leq |T| = \tau(G)$.



Exemple

$\nu(K_3) = 1 < 2 = \tau(K_3)$.

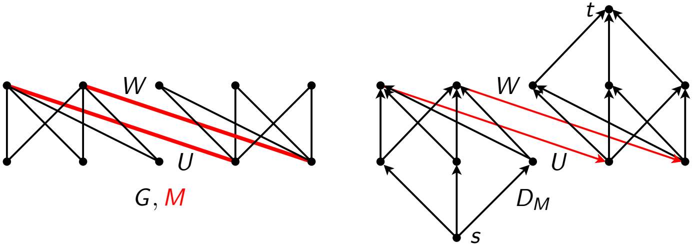


Construction d'un graphe orienté auxiliaire

Définition

Étant donnés un graphe biparti $G = (U, W; E)$ et un couplage M de G, on construit un graphe orienté $D_M = (V, A)$ de la façon suivante :

1. $V := U \cup W \cup \{s, t\}$,
2. $A := \{su : u \ M\text{-insaturé dans } U\} \cup \{wt : w \ M\text{-insaturé dans } W\} \cup \{wu : uw \in M\} \cup \{uw : uw \in E \setminus M\}$.



Caractérisation d'un couplage de cardinal maximum

Théorème 2

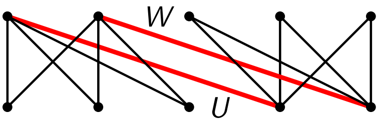
Étant donnés un graphe biparti $G = (U, W; E)$ et un couplage M de G, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\nu(G) = |M|$,
2. il n'existe pas de (s, t)-chemin dans D_M,
3. $\tau(G) \leq |M|$.

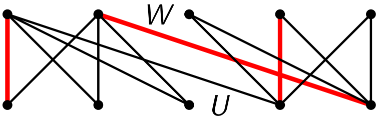
Caractérisation d'un couplage de cardinal maximum

Démonstration de (1) $\Longrightarrow$ (2) : $\nu(G) = |M| \Longrightarrow$ pas de (s,t)-chemin

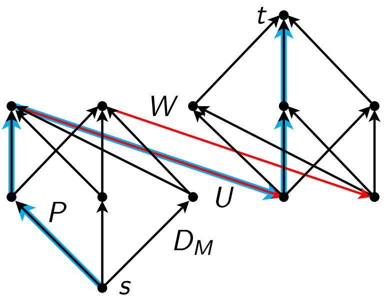
1. On suppose par l'absurde qu'il existe un (s,t)-chemin P dans D_M.
2. Soit $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P - s - t) \setminus M)$.
3. M' est un couplage et $|M'| = |M| + 1$.
4. M n'est donc pas de cardinal maximum, contradiction.



G, M



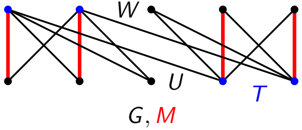
G, M'

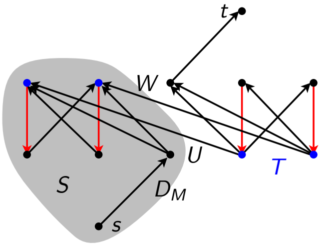


Caractérisation d'un couplage de cardinal maximum

Démonstration de (2) $\Longrightarrow$ (3) : pas de (s,t)-chemin $\Longrightarrow \tau(G) \leq |M|$

1. On suppose qu'il n'existe pas de (s,t)-chemin dans D_M.
2. Soit S l'ensemble des sommets atteignables depuis s dans D_M.
3. Soit $T = (U \setminus S) \cup (W \cap S)$.
4. Puisque qu'il n'y a pas d'arc sortant de S dans D_M, T est un transversal de G et $|T| \leq |M|$.
5. $\tau(G) \leq |T| \leq |M|$.





Caractérisation d'un couplage de cardinal maximum

Démonstration de (3) $\Longrightarrow$ (1) : $\tau(G) \leq |M| \Longrightarrow \nu(G) = |M|$

1. On suppose que $\tau(G) \leq |M|$.
2. Puisque M est un couplage, $|M| \leq \nu(G)$.
3. Par Lemma 1, $\nu(G) \leq \tau(G)$.
4. Par conséquent, on a égalité partout, en particulier : $|M| = \nu(G)$.

Conséquences

Théorème 3 (Kőnig)

Dans un graphe biparti G, $\nu(G) = \tau(G)$.

Algorithme couplage de cardinal maximum dans un graphe biparti

ENTRÉE : G graphe biparti.

SORTIE : Couplage M de G de cardinal maximum.

Etape 0. *Initialisation.*

$M := \emptyset$.

Etape 1. *Augmentation du couplage.*

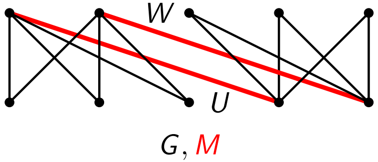
Tant qu'il existe un (s, t)-chemin P dans D_M faire

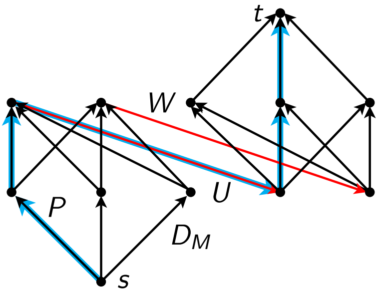
$M := (M \setminus E(P)) \cup (E(P - s - t) \setminus M)$.

Etape 2. *Fin de l'algorithme.*

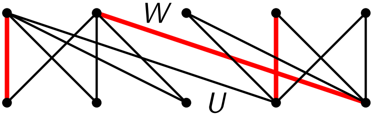
STOP.

Exécution de l'algorithme

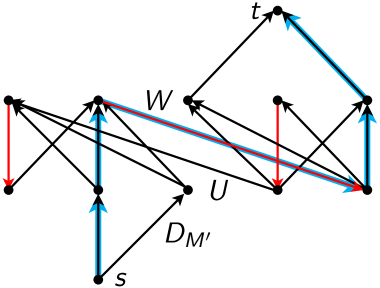




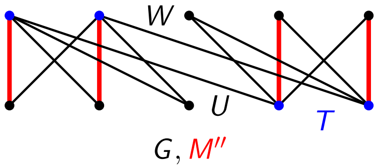
Exécution de l'algorithme

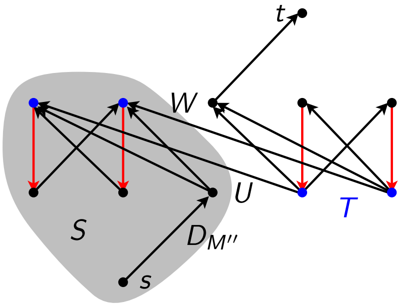


G, M'



Exécution de l'algorithme

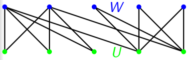




Couplages parfaits dans un graphe biparti

Notation

Étant donnés un graphe biparti $G = (U, W; E)$ et $X \subseteq U$,
$\Gamma_G(X)$: l'ensemble des voisins de X.

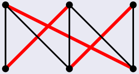


Théorème 4 (Hall)

Un graphe biparti $G = (U, W; E)$ admet un couplage parfait $\Longleftrightarrow$

(a) $|U| = |W|$,

(b) $|\Gamma_G(X)| \geq |X|\ \forall X \subseteq U$.



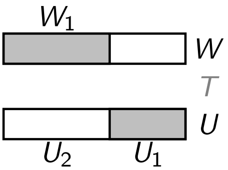
Démonstration de nécessité :

1. Si G admet un couplage parfait M alors $\forall X \subseteq U, |\Gamma_M(X)| = |X|$.
2. En particulier, $|U| = |\Gamma_M(U)| = |W|$ et ainsi (a) est satisfaite.
3. Puisque $|\Gamma_G(X)| \geq |\Gamma_M(X)|$, (b) est donc satisfaite.

Couplages parfaits dans un graphe biparti

Démonstration de suffisance :

1. Par Théorème 3, $\exists$ couplage M et transversal T de G tq $|M| = |T|$.
2. $U_1 := T \cap U$, $W_1 := T \cap W$ et $U_2 := U - U_1$.
3. Comme T est un transversal, $\Gamma(U_2) \subseteq W_1$; et ainsi $|W_1| \geq |\Gamma(U_2)|$.
4. Par (b), $|\Gamma(U_2)| \geq |U_2|$ et par (a) $|U| = |W|$.
5. $|M| = |T| = |U_1 \cup W_1| = |U_1| + |W_1| \geq |U_1| + |U_2| = |U| = |W|$.
6. Les sommets de U et aussi ceux de W sont donc M-saturés.
7. Par conséquent, M est un couplage parfait.



D'autres résultats et applications :

Algorithmes pour trouver un couplage + applications

1. de coût max. dans un graphe biparti (Détections des objets volants),
2. de cardinal max. dans un graphe quelconque (Affectation des pilotes),
3. de coût maximum dans un graphe quelconque (Postier chinois).