Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
TD : Connexité + Cycles + Marquage

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

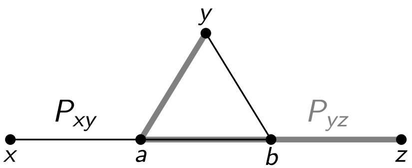
EXO 2.2

Énoncé

S'il existe une (x, y)-chaîne élémentaire P_{xy} et une (y, z)-chaîne élémentaire P_{yz}, alors il existe une (x, z)-chaîne élémentaire.

Démonstration

- La concaténation de P_{xy} et P_{yz} est une (x, z)-chaîne
- qui contient une (x, z)-chaîne élémentaire, par EXO 2.1.



La concaténation $xabyabz$ des chaînes $P_{xy} = xaby$ et $P_{yz} = yabz$ contient la (x, z)-chaîne élémentaire $xabz$.

EXO 2.4

Énoncé

Soit G un graphe simple à $2n$ sommets tel que $d_G(v) \geq n \; \forall v \in V(G)$. Montrer que G est connexe.

Démonstration

- Supposons par l'absurde que G a plus qu'une composante connexe.
- Par $|V(G)| = 2n$, il y a une composante connexe G' de G telle que $|V(G')| \leq n$.
- Pour un sommet v de G', on a une contradiction :
- $n \leq d_G(v) = d_{G'}(v) \leq |V(G')| - 1 \leq n - 1$.

EXO 2.5

Énoncé

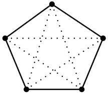
Montrer qu'au moins l'un des deux graphes G ou $\overline{G}$ est connexe.

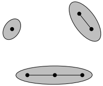
Démonstration

Soient $G_1, \ldots, G_\ell$ les composantes connexes de G.

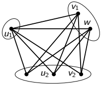
1. Si $\ell = 1$ alors G est connexe.
2. Si $\ell \geq 2$ alors soient $u \in V(G_i)$ et $v \in V(G_j)$.
    1. Si $i \neq j$ alors, dans $\overline{G}$, u et v sont reliés par la chaîne uv.
    2. Si $i = j$, par $\ell \geq 2$, il existe $k \neq i$ et $w \in V(G_k)$. Alors, dans $\overline{G}$, les sommets u et v sont reliés par la chaîne $uw + wv$.
    3. $\overline{G}$ est donc connexe.

$G = (V, E)$ et $\overline{G} = (V, \overline{E})$
E en gras et $\overline{E}$ en pointillé :
$\forall u, v \in V, uv \in \overline{E}$ ssi $uv \notin E$





G



$\overline{G}$

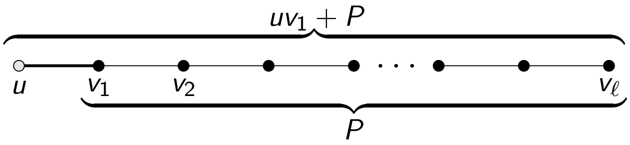
Exo 2.6 (a)

Énoncé

Soit $P = v_1 \ldots v_\ell$ une plus longue chaîne élémentaire dans un graphe simple. Alors chaque voisin de v_1 se trouve dans $\{v_2, \ldots, v_\ell\}$.

Démonstration

1. Supposons que v_1 possède un voisin $u \notin \{v_2, \ldots, v_\ell\}$.
2. $uv_1 + P$ serait une chaîne élémentaire plus longue que P,
3. contradiction.



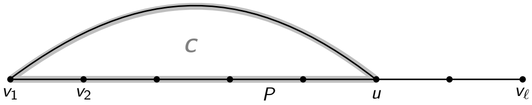
Exo 2.6 (b)

Énoncé

Si tous les degrés des sommets d'un graphe simple G sont supérieurs ou égaux à deux, alors G possède un cycle élémentaire.

Démonstration

1. Soit $P := v_1 v_2 \dots v_\ell$ une plus longue chaîne élémentaire de G.
2. Par $d(v_1) \geq 2$ et G simple, il existe une arête $v_1 u$ telle que $u \neq v_2$.
3. Par EXO 2.6 (a), $u \in \{v_3, ..., v_\ell\}$.
4. Donc $C = P[v_1, u] + uv_1$ est un cycle élémentaire.



EXO 2.7(b)

Énoncé

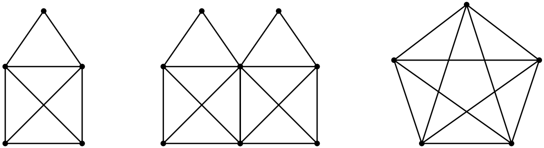
Un graphe G sans sommet isolé contient une chaîne eulérienne $\Longleftrightarrow$

(a) G est connexe et

(b) le nombre de sommets de degré impair est au plus 2.

Démonstration de la nécessité

1. Si G contient une chaîne eulérienne P (avec extrémités u et v) alors
2. $P + uv$ est un cycle eulérien de $G + uv$,
3. on a les conditions, par EXO 2.7(a).



G_1 G_2 G_3

EXO 2.7(b)

Énoncé

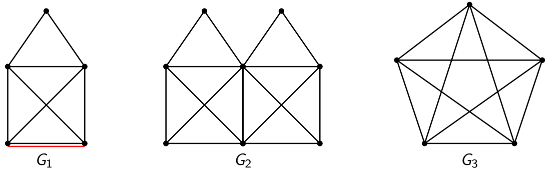
Un graphe G sans sommet isolé contient une chaîne eulérienne $\Longleftrightarrow$

(a) G est connexe et

(b) le nombre de sommets de degré impair est au plus 2.

Démonstration de la nécessité

1. Si G contient une chaîne eulérienne P (avec extrémités u et v) alors
2. $P + uv$ est un cycle eulérien de $G + uv$,
3. on a les conditions, par EXO 2.7(a).



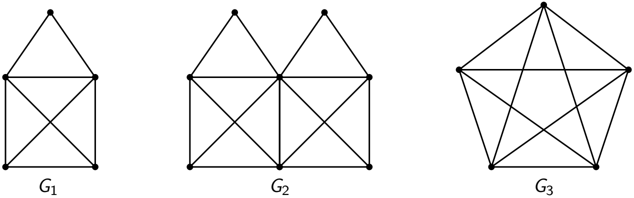
EXO 2.7(b)

Démonstration de la suffisance

Par (a), G est connexe.

Par (b),

1. soit il n'y a pas de sommet de degré impair : et par EXO 2.7(a),
   - G a un cycle eulérien
   - qui est une chaîne eulérienne de G.
2. soit il y a deux sommets u et v de degré impair : et par EXO 2.7(a),
   - $G + uv$ a un cycle eulérien C, et alors
   - $C - uv$ est une chaîne eulérienne de G.



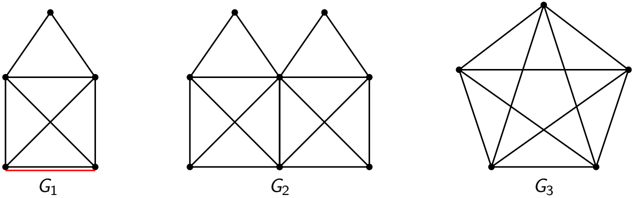
EXO 2.7(b)

Démonstration de la suffisance

Par (a), G est connexe.

Par (b),

1. soit il n'y a pas de sommet de degré impair : et par EXO 2.7(a),
   - G a un cycle eulérien,
   - qui est une chaîne eulérienne de G.
2. soit il y a deux sommets u et v de degré impair : et par EXO 2.7(a),
   - $G + uv$ a un cycle eulérien C, et alors
   - $C - uv$ est une chaîne eulérienne de G.



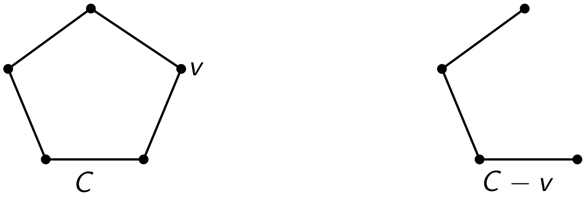
EXO 2.8

Énoncé

Montrer que si $G - v$ n'est pas connexe alors G n'est pas hamiltonien.

Démonstration

Sinon, si C est un cycle hamiltonien de G, alors puisque C est un cycle élémentaire, $C - v$ est connexe, et donc $G - v$ est connexe, contradiction.



Application

Énoncé

1. On a trois récipients dont les contenances sont respectivement de 8, 5 et 3 litres, le récipient de 8 litres est plein, les autres vides.
2. Les récipients ne sont pas gradués, c'est-à-dire qu'une opération de transvasement aura pour effet de vider complètement un des récipients et/ou d'en remplir un autre à ras bord.
3. Il s'agit, par une série de transvasements, d'isoler 4 litres dans chacun des deux premiers récipients.

Application

Solution

1. On introduit un graphe orienté $G = (V, A)$.
   - $V = \{(a, b, c)$ d'entiers qui correspondent aux remplissages possibles :
     - $a + b + c = 8$,
     - $0 \leq a \leq 8, 0 \leq b \leq 5, 0 \leq c \leq 3$,
     - l'un au moins parmi a, b et c est égal à une de ses bornes$\}$.
   - $A = \{tt'$: on peut passer de t à t' en réalisant un seul transvasement$\}$.
2. On trouve un chemin dans G du sommet $(8, 0, 0)$ au sommet $(4, 4, 0)$ en exécutant l'algorithme de Marquage.

Application