Chapitre 1
Modèles discrets

Le but de ce chapitre est de présenter les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématiquement très simple des modèles discrets. Nous y reprenons essentiellement la première partie de [HP81]. Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est présenté en fin de chapitre sous forme de problème corrigé, pour illustrer la théorie de façon plus concrète.

1 Le formalisme des modèles discrets

1.1 Les actifs financiers

Un modèle de marché financier discret est construit sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$; $\mathcal{F}_n$ représente les informations disponibles à l'instant n et est appelée, “tribu des événements antérieurs à l'instant n”. “L'horizon” N sera le plus souvent, dans la pratique, la date d'échéance des options.

On supposera dans la suite que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\forall \omega \in \Omega\ \mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$. On suppose qu'il y a sur le marché $d+1$ actifs financiers, dont les prix à l'instant n sont donnés par des variables aléatoires $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d$ à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$ (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs). Le vecteur $S_n = (S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d)$ est le vecteur des prix à l'instant n. L'actif numéroté 0 représente “les placements sans risque” et on posera $S_0^0 = 1$. Si le taux d'intérêt des placements sans risque sur une période est constant et égal à r on aura $S_n^0 = (1+r)^n$. Le coefficient $\beta_n = 1/S_n^0$ apparaît comme le coefficient d'actualisation (de la date n à la date 0) : c'est la somme d'argent qui, investie à l'instant 0 dans l'actif sans risque, permet de disposer de 1 franc à l'instant n (si on compte les prix en francs). Les actifs numérotés de 1 à d seront appelés actifs “à risques”.

1.2 Les stratégies

Une *stratégie de gestion* est définie par un processus (simplement une suite dans le cas discret) aléatoire $\phi = \left(\left(\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)\right)_{0 \leq n \leq N}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{d+1}$, donnant à chaque instant n les quantités $\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d$ des divers actifs, détenues en portefeuille. On impose au processus ϕ d'être *prévisible* au sens suivant :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, d\} \begin{cases} \phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable} \\ \text{et, pour } n \geq 1 : \\ \quad \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable.} \end{cases}$$

La signification de cette hypothèse est la suivante : le portefeuille à la date n :

$$\left(\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right),$$

est constitué au vu des informations disponibles à la date $(n-1)$ et conservé tel quel au moment des cotations à la date n.

La *valeur du portefeuille* à l'instant n est donnée par le produit scalaire :

$$V_n(\phi) = \phi_n.S_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i,$$

la *valeur actualisée* est :

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n(\phi_n.S_n) = \phi_n.\tilde{S}_n,$$

où $\beta_n = 1/S_n^0$ et $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \ldots, \beta_n S_n^d)$ est le vecteur des prix actualisés.

On dira qu'une stratégie est *autofinancée* si la relation suivante est réalisée pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$:

$$\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n\,.$$

Cette relation s'interprète de la façon suivante : à l'instant n, après avoir pris connaissance des cours $S_n^0,\ldots,S_n^d$, l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_n à la composition ϕ_{n+1}, le réajustement se faisant aux cours de la date n en réinvestissant la valeur totale du portefeuille et rien de plus. Il n'y a donc ni apports, ni retraits de fonds (en particulier, il n'y a pas de consommation).

Remarque 1.1 L'égalité $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$ est évidemment équivalente à

$$\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_n.S_n,$$

ou encore à

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n).$$

A l'instant $n+1$, la valeur du portefeuille est $\phi_{n+1}.S_{n+1}$ et la différence $\phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_{n+1}.S_n$ représente le gain (net) dû à la variation des cours entre les instants n et $n+1$. Une stratégie autofinancée est donc une stratégie pour laquelle les variations de valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dûs à l'agitation des cours.

La proposition suivante permet de préciser cette remarque en termes de quantités actualisées.

Proposition 1.2 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *La stratégie ϕ est autofinancée.*

ii) *Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,*

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta S_j,$$

où ΔS_j est le vecteur $S_j - S_{j-1}$.

iii) *Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,*

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j,$$

où $\Delta\tilde{S}_j$ est le vecteur $\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Démonstration : L'équivalence entre i) et ii) résulte de la remarque 1.1. L'équivalence entre i) et iii) s'obtient en remarquant que $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$ si et seulement si $\phi_n.\tilde{S}_n = \phi_{n+1}.\tilde{S}_n$. ∎

Cette proposition montre que, pour une stratégie autofinancée, la valeur actualisée (et, donc, la valeur tout court) du portefeuille est complètement déterminée par la richesse initiale et le processus $\left(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)_{0 \leq n \leq N}$ des quantités *d'actifs à risques* détenues (cela vient simplement du fait que $\Delta\tilde{S}_j^0 = 0$). Plus précisément, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Pour tout processus prévisible* $\left(\left(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)\right)_{0 \leq n \leq N}$ *et pour toute variable* V_0 $\mathcal{F}_0$*-mesurable, il existe un et un seul processus prévisible* $\left(\phi_n^0\right)_{0 \leq n \leq N}$ *tel que la stratégie* $\phi = \left(\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d\right)$ *soit autofinancée et de valeur initiale* V_0.

Démonstration : La condition d'autofinancement entraîne :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\phi) &= \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \cdots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \Delta\tilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta\tilde{S}_j^d\right)\end{aligned}$$

Ce qui détermine ϕ_n^0. La seule chose à vérifier est la prévisibilité de ϕ^0, qui est immédiate à partir de l'égalité :

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\phi_j^1 \Delta\tilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta\tilde{S}_j^d\right) + \left(\phi_n^1 \left(-\tilde{S}_{n-1}^1\right) + \cdots + \phi_n^d \left(-\tilde{S}_{n-1}^d\right)\right)$$

∎

1.3 Stratégies admissibles et arbitrage

Nous n'avons pas imposé de condition sur les signes des quantités ϕ_n^i. Dire que $\phi_n^0 < 0$, signifie que l'on a *emprunté* la quantité $|\phi_n^0|$ sur le marché des placements sans risques. Dire que $\phi_n^i < 0$ pour un $i \geq 1$, c'est dire qu'on a des dettes libellées en actifs à risques (par suite de *ventes à découvert*). Les emprunts et les ventes à découvert sont donc permis, mais nous imposerons à la valeur du portefeuille d'être positive ou nulle à tout instant.

Définition 1.4 *Une stratégie* ϕ *est dite* admissible *si elle est* autofinancée *et si* $V_n(\phi) \geq 0$ *pour tout* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

L'investisseur doit donc être en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant.

La notion d'*arbitrage* (réalisation d'un profit sans prendre de risques) est alors formalisée de la façon suivante :

Définition 1.5 *Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.*

La plupart des modèles excluent toute possibilité d'arbitrage et l'objet de la section suivante est de donner une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

2 Martingales et arbitrages

Afin d'examiner les liens entre martingales et arbitrage, nous allons tout d'abord introduire la notion de martingale sur un espace de probabilité fini. Pour cela, l'usage de l'espérance conditionnelle est indispensable et nous renvoyons le lecteur à l'appendice pour un exposé des principales propriétés de cet outil.

2.1 Martingales et transformées de martingales

Dans ce paragraphe, on considère un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, avec $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ (sans supposer $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, ni $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). On dira qu'une suite $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires est adaptée à la filtration si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Définition 2.1 *Une suite adaptée $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires réelles est :*
- *une martingale si $\mathbf{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$ pour tout $n \leq N-1$.*
- *une surmartingale si $\mathbf{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq M_n$ pour tout $n \leq N-1$.*
- *une sousmartingale si $\mathbf{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq M_n$ pour tout $n \leq N-1$.*

Ces définitions s'étendent aux variables aléatoires vectorielles : on dit par exemple qu'une suite $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ est une martingale si chaque composante du vecteur M_n définit une martingale réelle.

Dans un modèle financier, dire que le cours $(S_n^i)_{0 \leq n \leq N}$ de l'actif i est une martingale revient à dire que, à tout instant n, la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) que l'on puisse faire de S_{n+1}^i, à partir des informations disponibles à la date n, est donnée par S_n^i.

Les propriétés suivantes, qui se déduisent aisément de la définition qui précède, constitueront pour le lecteur de bons exercices de maniement de l'espérance conditionnelle.

1. $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale si et seulement si :
$$\mathbf{E}(M_{n+j} | \mathcal{F}_n) = M_n \quad \forall j \geq 0$$
2. Si $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, on a pour tout n : $\mathbf{E}(M_n) = \mathbf{E}(M_0)$.
3. La somme de deux martingales est une martingale.
4. On a évidemment des propriétés analogues pour les surmartingales et les sousmartingales.

Définition 2.2 *Une suite adaptée $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires est prévisible si, pour tout $n \geq 1$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable.*

Proposition 2.3 *Soit $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ une martingale et soit $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$. On pose $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. La suite $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par :*

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ X_n &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_n \Delta M_n \quad \textit{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

(X_n) est parfois appelée “transformée de la martingale (M_n) par la suite (H_n)”. Une conséquence de cette proposition et de la proposition 1.2 est que, dans les modèles financiers où les prix actualisés des actifs sont des martingales, toute stratégie autofinancée conduit à une valeur finale actualisée égale, *en moyenne*, à la richesse initiale.

Démonstration : Il est clair que (X_n) est une suite adaptée. De plus, pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n\right) \\
&= \mathbf{E}\left(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n\right) \\
&= H_{n+1}\mathbf{E}\left(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n\right) \text{ car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{E}\left(X_{n+1} | \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(X_n | \mathcal{F}_n\right) = X_n$$

ce qui prouve que (X_n) est une martingale. ∎

La proposition suivante donne une caractérisation des martingales qui nous sera utile par la suite.

Proposition 2.4 *Une suite adaptée de variables aléatoires réelles* (M_n) *est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible* (H_n)*, on a :*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0$$

Démonstration : Si (M_n) est une martingale, il en est de même, par la proposition 2.3, de la suite (X_n) définie par : $X_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n$, pour toute suite prévisible (H_n). On a donc $\mathbf{E}(X_N) = \mathbf{E}(X_0) = 0$. Réciproquement, on remarque que si $j \in \{1, \ldots, N\}$, à tout événement $\mathcal{F}_j$-mesurable A, on peut associer la suite (H_n) définie par $H_n = 0$ pour $n \neq j+1$ et $H_{j+1} = \mathbf{1}_A$. Il est clair que la suite (H_n) est prévisible et l'égalité $\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0$ donne :

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_A \left(M_{j+1} - M_j\right)\right) = 0$$

et par conséquent $\mathbf{E}\left(M_{j+1} | \mathcal{F}_j\right) = M_j$. ∎

2.2 Marchés financiers viables

Nous revenons maintenant aux modèles de marchés discrets introduits au paragraphe 1.

Définition 2.5 *On dit que le marché est* viable *s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.*

Théorème 2.6 *Le marché est viable si, et seulement si, il existe une probabilité* $\mathbf{P}^*$ *équivalente*[1] *à* $\mathbf{P}$ *sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Démonstration :

a) Supposons qu'il existe une probabilité $\mathbf{P}^*$ équivalente à $\mathbf{P}$ sous laquelle les actifs actualisés sont des martingales. Alors, pour toute stratégie autofinancée (ϕ_n), on a, d'après la proposition 1.2 :

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j . \Delta \tilde{S}_j .$$

[1] Rappellons que deux probabilités $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ sont équivalentes si et seulement si, pour tout événement A, $\mathbf{P}_1(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}_2(A) = 0$. Ici, $\mathbf{P}^*$ équivalente à $\mathbf{P}$ signifi e simplement que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$.

On en déduit, grâce à la proposition 2.3, que $\left(\tilde{V}_n(\phi)\right)$ est une martingale sous $\mathbf{P}^*$. Donc $\tilde{V}_N(\phi)$ a même espérance sous $\mathbf{P}^*$ que $V_0(\phi)$:

$$\mathbf{E}^*\left(\tilde{V}_N(\phi)\right) = \mathbf{E}^*\left(\tilde{V}_0(\phi)\right).$$

Si la stratégie est admissible et de valeur initiale nulle, on a donc $\mathbf{E}^*\left(\tilde{V}_N(\phi)\right) = 0$, avec $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$. D'où, $\tilde{V}_N(\phi) = 0$ puisque $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$.

b) La démonstration de la réciproque est plus délicate. Soit Γ le cône convexe des variables aléatoires positives et non nulles. Le marché est viable si et seulement si pour toute stratégie admissible ϕ on a : $V_0(\phi) = 0 \Rightarrow \tilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma$.

b1) A tout processus prévisible $(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)$, on associe le processus défini par :

$$\tilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \Delta\tilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta\tilde{S}_j^d\right).$$

C'est le processus des gains actualisés cumulés dans toute stratégie autofinancée suivant les quantités d'actifs risqués $\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d$. D'après la proposition 1.3, il existe un (unique) processus (ϕ_n^0) tel que la stratégie $((\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))$ soit autofinancée et de valeur initiale nulle. $\tilde{G}_n(\phi)$ est alors la valeur actualisée à l'instant n de cette stratégie et l'hypothèse de viabilité du marché entraîne que si cette valeur est positive à tout instant, c'est-à-dire si $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$, pour tout $n = 1, \ldots, N$, alors $\tilde{G}_N(\phi) = 0$. Le lemme suivant montre que, même sans l'hypothèse de positivité des $\tilde{G}_n(\phi)$, on a encore $\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$.

Lemme 2.7 *Si le marché est viable, tout processus prévisible* $(\phi^1, \ldots, \phi^d)$ *vérifie :*

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma.$$

Démonstration : Supposons $\tilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$. On a clairement une contradiction de la viabilité si $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$. Si cette dernière propriété n'a pas lieu, introduisons l'entier $n = \sup\left\{k | \mathbf{P}\left(\tilde{G}_k(\phi) < 0\right) > 0\right\}$. On a :

$$n \leq N - 1, \quad \mathbf{P}\left(\tilde{G}_n(\phi) < 0\right) > 0 \text{ et } \forall m > n \quad \tilde{G}_m(\phi) \geq 0.$$

On définit alors un nouveau processus ψ en posant :

$$\psi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ \mathbf{1}_A(\omega)\phi_j(\omega) & \text{si } j > n \end{cases}$$

où A est l'événement $\left\{\tilde{G}_n(\phi) < 0\right\}$. En utilisant la prévisibilité de ϕ et le fait que A est $\mathcal{F}_n$-mesurable on voit que ψ est aussi prévisible. D'autre part :

$$\tilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ \mathbf{1}_A\left(\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_n(\phi)\right) & \text{si } j > n \end{cases}$$

Alors, on voit que $\tilde{G}_j(\psi) \geq 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, N\}$ et que $\tilde{G}_N(\psi) > 0$ sur A ce qui contredit la viabilité et achève la démonstration du lemme. ∎

b2) Il est clair que l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables aléatoires de la forme $\tilde{G}_N(\phi)$, avec ϕ prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbf{R}^\Omega$ de toutes les variables aléatoires réelles définies sur Ω. D'après le lemme 2.7, le sous-espace $\mathcal{V}$ ne rencontre pas Γ, ni le convexe compact $K = \{X \in \Gamma | \sum_\omega X(\omega) = 1\}$, qui est contenu dans Γ. Il en résulte, par le théorème de séparation des convexes (voir l'appendice), qu'il existe $(\lambda(\omega))_{\omega \in \Omega}$ tel que :

1. $\forall X \in K, \quad \sum_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$
2. Pour tout ϕ prévisible :

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$$

De la propriété 1, on déduit que $\lambda(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, de sorte que la probabilité $\mathbf{P}^*$ définie par :

$$\mathbf{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}$$

est équivalente à $\mathbf{P}$.

De plus, si on note $\mathbf{E}^*$ l'espérance par rapport à la probabilité $\mathbf{P}^*$, la propriété 2 signifie que, pour tout processus prévisible (ϕ_n)à valeurs dans $\mathbf{R}^d$:

$$\mathbf{E}^*\left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j \Delta \tilde{S}_j\right) = 0.$$

On en déduit immédiatement que pour tout indice $i \in \{1, \ldots, d\}$ et toute suite prévisible (ϕ_n^i), à valeurs réelles, on a :

$$\mathbf{E}^*\left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j^i \Delta \tilde{S}_j^i\right) = 0,$$

ce qui entraîne, grâce à la proposition 2.4 que, sous $\mathbf{P}^*$, les prix actualisés $(\tilde{S}_n^1), \ldots, (\tilde{S}_n^d)$ sont des martingales. ∎

3 Marchés complets et évaluation des options

3.1 Marchés complets

Nous définirons une *option*[2] *européenne* d'échéance N par la donnée d'une variable aléatoire $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$-mesurable, représentant le profit que permet l'exercice de l'option. Ainsi, pour une option d'achat ou “call” sur une unité d'actif 1, au prix d'exercice K, on a : $h = \left(S_N^1 - K\right)_+$ et, pour une option de vente ou “put” sur une unité d'actif 1 au prix d'exercice K : $h = \left(K - S_N^1\right)_+$. Dans ces deux exemples (les plus importants dans la pratique), la variable aléatoire h est une fonction de S_N seulement. Il existe des options pour lesquelles h dépend de toutes les valeurs des cours jusqu'à l'échéance : S_0, S_1,..., S_N. C'est le cas des options dites *asiatiques*, dont le prix d'exercice est égal à la moyenne des cours observés sur une période donnée, précédant l'échéance.

Définition 3.1 *On dit que l'actif conditionnel défini par h est simulable (ou atteignable[3]) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant N est égale à h.*

[2] ou plus généralement un “bien contingent” (contingent claim) ou “actif conditionnel”.
[3] “attainable” dans certains articles américains.

Remarque 3.2 Dans un marché viable, pour que l'option h soit simulable, il suffit qu'il existe une stratégie *autofinancée* de valeur égale à h à l'instant N. En effet, si ϕ est une stratégie autofinancée et si $\mathbf{P}^*$ est une probabilité équivalente à $\mathbf{P}$ sous laquelle les prix actualisés sont des martingales, alors, sous $\mathbf{P}^*$, $\left(\tilde{V}_n(\phi)\right)$ est une martingale (en tant que transformée de martingale). On a donc, pour $n \in \{0, \ldots, N\}$ $\tilde{V}_n(\phi) = \mathbf{E}^*\left(\tilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n\right)$. Il est clair alors que, si $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$ (en particulier si $V_N(\phi) = h$), la stratégie ϕ est admissible.

Définition 3.3 *On dit que le marché est* complet *si tout actif conditionnel est simulable.*

Supposer qu'un marché financier est complet est une hypothèse restrictive dont la justification économique est moins claire que celle de l'hypothèse de viabilité. L'intérêt des marchés complets est qu'ils se prêtent à une théorie très simple de l'évaluation et de la couverture des actifs conditionnels. Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, que nous étudierons plus loin, fournit un exemple de modèle de marché complet d'une grande simplicité. Le théorème suivant donne une caractérisation des marchés viables et complets.

Théorème 3.4 *Un marché viable est complet si, et seulement si, il existe une seule probabilité* $\mathbf{P}^*$ *équivalente à* $\mathbf{P}$ *sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.*

La probabilité $\mathbf{P}^*$ apparaîtra dans la suite comme l'outil de *calcul* des formules de prix et de couverture.

Démonstration :

a) Supposons le marché viable et complet. Alors, toute variable aléatoire h $\mathcal{F}_N$-mesurable et positive peut s'écrire $h = V_N(\phi)$ où ϕ est une stratégie admissible, qui simule l'actif conditionnel h. Puisque ϕ est une stratégie autofinancée on a :

$$\frac{h}{S_N^0} = \tilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{N} \phi_j.\Delta\tilde{S}_j.$$

Alors, si $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ sont deux probabilités sous lesquelles les prix actualisés sont des martingales, $\left(\tilde{V}_n(\phi)\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale à la fois sous $\mathbf{P}_1$ et sous $\mathbf{P}_2$. D'où pour $i = 1$ ou 2 :

$$\mathbf{E}_i\left(\tilde{V}_N(\phi)\right) = \mathbf{E}_i\left(V_0(\phi)\right) = V_0(\phi),$$

la dernière égalité venant du fait que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. On a donc :

$$\mathbf{E}_1\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = \mathbf{E}_2\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$$

et, comme h est arbitraire, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ sur la tribu $\mathcal{F}_N$, que l'on a supposée égale à $\mathcal{F}$.

b) Supposons le marché viable et non complet. Alors il existe une variable aléatoire $h \geq 0$ non simulable. Notons $\tilde{\mathcal{V}}$ l'espace des variables aléatoires de la forme :

$$U_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\tilde{S}_n, \tag{1.1}$$

avec U_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable et $\left(\left(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ prévisible, à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. Il résulte de la proposition 1.3 et de la remarque 3.2 que la variable aléatoire h/S_n^0 n'appartient pas à $\tilde{\mathcal{V}}$. $\tilde{\mathcal{V}}$ est donc un sous-espace strict de l'espace de toutes les variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Alors, si $\mathbf{P}^*$ est une probabilité équivalente à $\mathbf{P}$ sous laquelle les prix actualisés sont des martingales et si l'on munit l'espace des variables aléatoires du produit scalaire $(X, Y) \mapsto \mathbf{E}^*(XY)$, on voit qu'il existe une variable aléatoire X non nulle et orthogonale au sous-espace $\tilde{\mathcal{V}}$.

Posons alors :

$$\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \mathbf{P}^*(\{\omega\})$$

où $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. On définit ainsi une probabilité (car $\mathbf{E}^*(X) = 0$) qui est équivalente à $\mathbf{P}$, et distincte de $\mathbf{P}^*$. On a de plus

$$\mathbf{E}^{**}\left(\sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\tilde{S}_n\right) = 0$$

pour tout processus prévisible $\left((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)\right)_{0 \le n \le N}$, ce qui entraîne, par la proposition 2.4, que $(\tilde{S}_n)_{0 \le n \le N}$ est une $\mathbf{P}^{**}$-martingale. ∎

3.2 Evaluation et couverture des actifs conditionnels dans les marchés complets

On suppose le marché viable et complet et on note $\mathbf{P}^*$ l'unique probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Soit un actif conditionnel défini par une variable aléatoire $\mathcal{F}_N$-mesurable $h \ge 0$ et soit ϕ une stratégie admissible simulant h, c'est-à-dire vérifiant :

$$V_N(\phi) = h.$$

La suite $\left(\tilde{V}_n\right)_{0 \le n \le N}$ est une martingale sous $\mathbf{P}^*$ et par conséquent, $V_0(\phi) = \mathbf{E}^*\left(\tilde{V}_N(\phi)\right)$, d'où $V_0(\phi) = \mathbf{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$ et plus généralement

$$V_n(\phi) = S_n^0 \mathbf{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0} | \mathcal{F}_n\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

La valeur à tout instant de toute stratégie admissible simulant h est donc complètement déterminée par h. Il est naturel d'appeler $V_n(\phi)$ la valeur de l'option : c'est la richesse qui, détenue à l'instant n, permet, en suivant la stratégie ϕ à partir de l'instant n, de produire exactement la richesse h à l'instant N.

Si, à l'instant 0, un investisseur vend l'option au prix

$$\mathbf{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right),$$

il a la possibilité, en suivant une stratégie simulante ϕ, de restituer la richesse promise h à l'instant N ; c'est à dire qu'il peut *se couvrir parfaitement*.

Remarque 3.5 Il est important de noter que le calcul du prix nécessite seulement la connaissance de $\mathbf{P}^*$ (pas celle de $\mathbf{P}$). On aurait pu se contenter de partir de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, muni de la filtration $(\mathcal{F}_n)$, c'est-à-dire, concrètement, de définir tous les états possibles et l'évolution de l'information disponible au cours du temps. Dès que l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ et la filtration sont spécifiés, il est inutile, pour évaluer des options par simulation, de déterminer les "vraies" probabilités des divers états possibles (en utilisant notamment une approche statistique). L'étude du modèle de Cox-Ross-Rubinstein montrera comment, dans la pratique, les calculs de prix et de couverture peuvent être menés à bien.

3.3 Première approche des options américaines

Une option américaine pouvant être exercée à n'importe quel instant entre 0 et N, nous la définirons comme une suite (Z_n) positive et adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$, Z_n représentant le profit que permet l'exercice de l'option à l'instant n. Dans le cas d'un call américain sur une unité d'actif 1 au prix d'exercice K, $Z_n = \left(S_n^1 - K\right)_+$; dans le cas d'un put américain, $Z_n = \left(K - S_n^1\right)_+$. Pour définir la valeur de l'option américaine associée au processus $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$, nous allons raisonner par récurrence en marche arrière à partir de l'échéance N. Il est clair que la valeur de l'option à l'instant N est $U_N = Z_N$. A quel prix vendre l'option à l'instant $N-1$? Si l'acheteur exerce immédiatement, il fera le profit Z_{N-1}, sinon il exercera (éventuellement) à l'instant N et le vendeur doit être prêt à payer la richesse Z_N à l'instant N. Le vendeur doit donc encaisser à l'instant $N-1$ une somme au moins égale à Z_{N-1} et lui permettant de fournir la richesse Z_N à l'instant N. La somme qui, disponible à l'instant $N-1$, permet d'obtenir la richesse Z_N à l'instant N, c'est la valeur à l'instant $N-1$ d'une stratégie admissible de valeur finale Z_N, c'est-à-dire $S_{N-1}^0 \mathbf{E}^* \left(\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1}\right)$, avec $\tilde{Z}_N = Z_N / S_N^0$. Il est donc naturel de prendre pour valeur de l'option américaine à l'instant $N-1$ la quantité :

$$U_{N-1} = \max\left(Z_{N-1}, S_{N-1}^0 \mathbf{E}^* \left(\tilde{Z}_N \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right)\right).$$

De proche en proche, on définit la valeur de l'option américaine à l'instant n par la relation de récurrence suivante, valable pour $n = 1, \ldots, N$:

$$U_{n-1} = \max\left(Z_{n-1}, S_{n-1}^0 \mathbf{E}^* \left(\frac{U_n}{S_n^0} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right)\right).$$

Dans le cas d'un taux d'intérêt constant égal à r sur chaque période,

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

et :

$$U_{n-1} = \max\left(Z_{n-1}, \frac{1}{1+r} \mathbf{E}^* \left(U_n | \mathcal{F}_{n-1}\right)\right).$$

Soit $\tilde{U}_n = \frac{U_n}{S_n^0}$ la valeur actualisée de l'option américaine.

Proposition 3.6 *La suite* $\left(\tilde{U}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ *est une* $\mathbf{P}^*$*-surmartingale. C'est la plus petite* $\mathbf{P}^*$*-surmartingale majorant la suite* $\left(\tilde{Z}_n\right)_{0\leq n\leq N}$.

Noter que, contrairement au cas européen, la valeur actualisée de l'option américaine ne définit pas nécessairement une martingale sous $\mathbf{P}^*$.

Démonstration : De la relation :

$$\tilde{U}_{n-1} = \max\left(\tilde{Z}_{n-1}, \mathbf{E}^* \left(\tilde{U}_n | \mathcal{F}_{n-1}\right)\right),$$

on déduit que $(\tilde{U}_n)_{0\leq n\leq N}$ est une surmartingale majorant $(\tilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$. Soit maintenant une surmartingale $(\tilde{T}_n)_{0\leq n\leq N}$ majorant $(\tilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$. Alors $\tilde{T}_N \geq \tilde{U}_N$ et si $\tilde{T}_n \geq \tilde{U}_n$ on a :

$$\tilde{T}_{n-1} \geq \mathbf{E}^* \left(\tilde{T}_n | \mathcal{F}_{n-1}\right) \geq \mathbf{E}^* \left(\tilde{U}_n | \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

et donc :

$$\tilde{T}_{n-1} \geq \max\left(\tilde{Z}_{n-1}, \mathbf{E}^* \left(\tilde{U}_n | \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) = \tilde{U}_{n-1}.$$

Ce qui démontre que (T_n) majore $(\tilde{U}_n)$, par récurrence descendante sur n. ∎

4 Problème corrigé : le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est une version discrétisée du modèle de Black-Scholes (qui sera étudié au chapitre 4), dans laquelle il y a un seul actif à risque, de prix S_n à l'instant n, $0 \leq n \leq N$, et un actif sans risque de rendement certain r sur une période, de sorte que, avec les notations des paragraphes précédents : $S_n^0 = (1+r)^n$

On fait les hypothèses suivantes sur l'évolution du cours de l'actif risqué : entre deux périodes consécutives, la variation relative des cours est soit a, soit b, avec $-1 < a < b$:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}$$

Le cours initial S_0 est donné. L'espace naturel des résultats possibles est donc $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$, chaque N-uple représentant les valeurs successives de S_{n+1}/S_n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. On prend naturellement : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. La tribu $\mathcal{F}_n$ sera, pour $n = 1, \ldots, N$, la tribu $\sigma(S_1, \ldots, S_n)$ engendrée par les variables aléatoires $S_1, \ldots, S_n$. L'hypothèse définissant **P** à une équivalence près est que tous les singletons de Ω ont une probabilité non nulle.

Introduisons les variables aléatoires $T_n = S_n/S_{n-1}$, pour $n = 1, \ldots, N$. Si $(x_1, \ldots, x_N)$ est un élément de Ω, on a $\mathbf{P}\{(x_1, \ldots, x_N)\} = \mathbf{P}(T_1 = x_1, \ldots, T_N = x_N)$. La connaissance de **P** équivaut donc à celle de la loi du N-uple $(T_1, T_2, \ldots, T_N)$. Notons aussi que, pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \ldots, T_n)$.

1. Montrer que le prix actualisé $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sous **P** si et seulement si $\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r$, $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

   La relation $\mathbf{E}(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n$ est équivalente à $\mathbf{E}(\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n|\mathcal{F}_n) = 1$, puisque $\tilde{S}_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et cette dernière égalité équivaut à $\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r$.

2. En déduire que, pour que le marché soit viable, il est nécessaire que r appartienne à l'intervalle $]a, b[$.

   Si le marché est viable, il existe une probabilité $\mathbf{P}^*$ équivalente à **P**, sous laquelle $(\tilde{S}_n)$ est une martingale. On a donc, d'après la question 1 :

   $$\mathbf{E}^*(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r$$

   et par conséquent $\mathbf{E}^*(T_{n+1}) = 1 + r$. Comme T_{n+1} est à valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$ et prend ces deux valeurs avec une probabilité non nulle, on a nécessairement : $(1+r) \in]1+a, 1+b[$.

3. Donner des exemples d'arbitrages possibles si la condition nécessaire de viabilité obtenue en 2 n'est pas vérifiée.

   Supposons par exemple $r \leq a$. En empruntant une somme S_0 à l'instant 0, on peut acheter une unité d'actif risqué. A la date N, on rembourse l'emprunt et on revend l'actif risqué. Le profit réalisé $S_N - S_0(1+r)^N$ est toujours positif ou nul, puisque $S_N \geq S_0(1+a)^N$, et strictement positif avec une probabilité non nulle. On a donc bien un arbitrage. Quand $r \geq b$, l'arbitrage s'obtient en vendant l'actif risqué à découvert.

4. Pour toute la suite, on suppose que $r \in]a, b[$ et on pose $p = (b-r)/(b-a)$. Montrer que $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sous **P** si et seulement et si les variables aléatoires T_1, T_2, …, T_N sont indépendantes équidistribuées, leur loi commune étant donnée par : $\mathbf{P}(T_1 = 1+a) = p = 1 - \mathbf{P}(T_1 = 1+b)$. En déduire que le marché est viable et complet.

   Si les T_i sont indépendantes et vérifient $\mathbf{P}(T_i = 1+a) = p = 1 - \mathbf{P}(T_i = 1+b)$, on a :

   $$\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(T_{n+1}) = p(1+a) + (1-p)(1+b) = 1 + r$$

   et $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sous **P**, d'après la question 1.

Réciproquement, si, pour $n = 0, 1, \dots, N-1$, $\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r$, on peut écrire :

$$(1+a)\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n\right) + (1+b)\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n\right) = 1 + r$$

On en déduit, en utilisant l'égalité

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n\right) + \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n\right) = 1$$

que $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n\right) = p$ et $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n\right) = 1 - p$.On voit alors, en raisonnant par récurrence sur n que, pour tous $x_i \in \{1+a, 1+b\}$,

$$\mathbf{P}\left(T_1 = x_1, \dots, T_n = x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

où $p_i = p$ si $x_i = 1 + a$ et $p_i = 1 - p$ si $x_i = 1 + b$, ce qui prouve que les T_i sont indépendantes équidistribuées sous $\mathbf{P}$ et vérifi ent $\mathbf{P}(T_i = 1 + a) = p$.

Ainsi, on voit que la condition que $(\tilde{S}_n)$ soit une martingale sous $\mathbf{P}$ détermine la loi du N-uple $(T_1, T_2, \dots, T_N)$ sous $\mathbf{P}$, et donc la probabilité $\mathbf{P}$ elle-même, de façon unique. Le marché est donc viable et complet.

5. On note C_n (resp. P_n) la valeur, à l'instant n, d'un call (resp. d'un put) européen sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice K et d'échéance N.

   (a) Retrouver, à partir des formules de prix sous forme d'espérances conditionnelles, la relation de parité call-put :

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$

   Notant $\mathbf{E}^*$ l'espérance par rapport à l'unique probabilité $\mathbf{P}^*$ sous laquelle $(\tilde{S}_n)$ est une martingale, on a :

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)}\mathbf{E}^*\left((S_N - K)_+ - (K - S_N)_+|\mathcal{F}_n\right) \\ &= (1+r)^{-(N-n)}\mathbf{E}^*\left(S_N - K|\mathcal{F}_n\right) \\ &= S_n - K(1+r)^{-(N-n)}, \end{aligned}$$

   la dernière égalité résultant du fait que $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sous $\mathbf{P}^*$.

   (b) Montrer que C_n peut s'écrire sous la forme : $C_n = c(n, S_n)$, où c est une fonction que l'on explicitera à l'aide de K, a, b, r et p.

   En écrivant $S_N = S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i$, on obtient :

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)}\mathbf{E}^*\left(\left.\left(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K\right)_+\right|\mathcal{F}_n\right)$$

   Comme, sous la probabilité $\mathbf{P}^*$, la variable aléatoire $\prod_{i=n+1}^{N} T_i$ est indépendante de $\mathcal{F}_n$ et que S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on peut écrire, en utilisant la proposition 2.5 de l'appendice : $C_n = c(n, S_n)$, où c est la fonction défi nie par :

$$\begin{aligned} &\frac{c(n,x)}{(1+r)^{-(N-n)}} \\ &= \mathbf{E}^*\left(x \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K\right)_+ \\ &= \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)!j!} p^j (1-p)^{N-n-j}\left(x(1+a)^j(1+b)^{N-n-j} - K\right)_+ \end{aligned}$$

6. Montrer que la stratégie de couverture parfaite d'un call est définie par une quantité d'actif risqué $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$ à détenir à l'instant n, où Δ est une fonction que l'on exprimera à partir de la fonction c.

   Notant H_n^0 la quantité d'actif sans risque dans le portefeuille simulant le call, on a :

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_n = c(n, S_n)$$

   Puisque H_n^0 et H_n sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables, ce sont des fonctions de $S_1, \ldots, S_{n-1}$ seulement et, S_n étant égal à $S_{n-1}(1+a)$ ou $S_{n-1}(1+b)$, l'égalité ci-dessus implique :

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a))$$

   et

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b))$$

   D'où, par soustraction,

$$\Delta(n,x) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}.$$

7. On utilise maintenant le modèle pour "pricer" un call ou un put d'échéance T sur une action. Pour cela, on fait tendre N vers l'infini en imposant les relations suivantes : $r = RT/N$, $\log((1+a)/(1+r)) = -\sigma/\sqrt{N}$ et $\log((1+b)/(1+r)) = \sigma/\sqrt{N}$. Le réel R s'interprète comme le taux d'intérêt instantané entre les instants 0 et T, puisque $e^{RT} = \lim_{N\to\infty}(1+r)^N$, et σ^2 comme la variance limite, sous la probabilité $\mathbf{P}^*$, de la variable aléatoire $\log(S_N)$, quand N tend vers l'infini, S_N représentant le cours de l'action à la date T.

   (a) Montrer que si $(Y_N)_{N\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de la forme :

$$Y_N = X_1^N + X_2^N + \ldots + X_N^N$$

   où, pour chaque N, les variables aléatoires X_i^N sont indépendantes équidistribuées, à valeurs dans :

$$\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\},$$

   et de moyenne μ_N, avec $\lim_{N\to\infty}(N\mu_N) = \mu$, alors la suite (Y_N) converge en loi vers une gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2.

   Il suffi t d'étudier la convergence de la fonction caractéristique ϕ_{Y_N} de Y_N. Le calcul donne :

$$\begin{aligned}\phi_{Y_N}(u) = \mathbf{E}\left(e^{iuY_N}\right) &= \prod_{j=1}^{N} \mathbf{E}\left(e^{iuX_j^N}\right)\\ &= \left(\mathbf{E}\left(e^{iuX_1^N}\right)\right)^N\\ &= \left(1 + iu\mu_N - \frac{\sigma^2u^2}{2N} + o(1/N)\right)^N.\end{aligned}$$

   D'où : $\lim_{N\to\infty}\phi_{Y_N}(u) = \exp\left(iu\mu - \frac{\sigma^2u^2}{2}\right)$, ce qui prouve la convergence demandée.

   (b) Expliciter les valeurs limites du put, puis du call à l'instant 0.

   Pour N fi xé, le prix du put à l' instant 0 est donné par :

$$\begin{aligned}P_0^{(N)} &= (1+RT/N)^{-N}\mathbf{E}^*\left(K - S_0\prod_{n=1}^{N} T_n\right)_+\\ &= \mathbf{E}^*\left((1+RT/N)^{-N}K - S_0e^{Y_N}\right)_+\end{aligned}$$

où $Y_N = \sum_{n=1}^{N} \log(T_n/(1+r))$. Avec les hypothèses de l'énoncé, les variables aléatoires $X_j^N = \log(T_j/(1+r))$ sont à valeurs dans $\{-\sigma/\sqrt{N}, \sigma/\sqrt{N}\}$, et indépendantes équidistribuées sous la probabilité $\mathbf{P}^*$. On a de plus :

$$\mathbf{E}^*(X_j^N) = (1-2p)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2 - e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

La suite (Y_N) est donc du type étudié dans la question 7a, avec $\mu = -\sigma^2/2$. Si on pose $\psi(y) = (Ke^{-RT} - S_0 e^y)_+$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |P_0^{(N)} & - \mathbf{E}^*(\psi(Y_N))| \\ &= \left|\mathbf{E}^*\left(\left((1+RT/N)^{-N}K - S_0 e^{Y_N}\right)_+ - \left(Ke^{-RT} - S_0 e^{Y_N}\right)_+\right)\right| \\ &\leq K\left|(1+RT/N)^{-N} - e^{-RT}\right| \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la convergence en loi de (Y_N) et le fait que la fonction ψ est continue bornée (c'est précisément pour avoir une fonction bornée que nous avons étudié le put d'abord) :

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}^*(\psi(Y_N)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (Ke^{-RT} - S_0 e^{-\sigma^2/2+\sigma y})_+ e^{-y^2/2} dy.$$

L'intégrale obtenue s'exprime, après un calcul élémentaire, à l'aide de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite, de sorte que :

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} = Ke^{-RT}F(-d_2) - S_0 F(-d_1),$$

où $d_1 = (\log(x/K) + RT + \sigma^2/2)/\sigma$, $d_2 = d_1 - \sigma$ et

$$F(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2} dx.$$

Pour le call, on obtient, en utilisant la relation de parité put-call : $\lim_{N\to\infty} C_0^{(N)} = S_0 F(d_1) - Ke^{-RT}F(d_2)$.

Remarque 4.1 Dans les formules obtenues, le seul paramètre qui n'est pas directement observable sur le marché est σ. L'interprétation de σ comme variance suggère de l'estimer par des voies statistiques. Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre 4.

Indications bibliographiques Nous avons supposé, dans ce chapitre, qu'il n'y avait pas de distribution de dividendes. En fait, on peut utiliser les mêmes idées pour traiter les marchés avec dividendes (cf. [HL88], chapitre 8). Le théorème de caractérisation des marchés complets peut être étendu à des espaces de probabilité infinis (cf. [DMW90], [Mor89]). A temps continu, la formulation du problème est délicate (cf. [HK79], [Str90] et [DS94]). La théorie des marchés complets à temps continu est développée dans [HP81] et [HP83]. On trouvera une présentation élémentaire du modèle de Cox-Ross-Rubinstein dans [CR85].

Chapitre 2
Problème d'arrêt optimal et options américaines

Le but de ce chapitre est de traiter l'évaluation et la couverture des options américaines et de faire apparaître le lien entre ces questions et le problème d'arrêt optimal. Pour cela, nous aurons besoin de la notion de temps d'arrêt, qui permet de modéliser les stratégies d'exercice d'une option américaine, et de la notion d'enveloppe de Snell, qui est la clé de la résolution du problème d'arrêt optimal. L'application de ces notions aux options américaines sera précisée dans le paragraphe 5 de ce chapitre.

1 Notion de temps d'arrêt

Le détenteur d'une option américaine peut l'exercer à tout moment, jusqu'à la date d'échéance. La décision d'exercer ou de ne pas exercer à l'instant n se fera au vu des informations disponibles à l'instant n. Si on se place dans un modèle discret construit sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}, \mathbf{P}\right)$ fini, on est conduit à décrire la date d'exercice par une variable aléatoire appelée temps d'arrêt :

Définition 1.1 *Une variable aléatoire* ν*, à valeurs dans* $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ *est un temps d'arrêt si, pour tout* $n \in \{0, 1, \cdots, N\}$ *:*

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Remarque 1.2 Comme dans le chapitre précédent, nous supposerons que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$. Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas essentielle : si elle n'est pas vérifiée, les résultats exposés dans ce chapitre restent vrais à condition de prendre les égalités au sens presque sûr. Par contre, nous ne ferons pas les hypothèses $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, sauf dans le contexte purement financier du paragraphe 5.

Remarque 1.3 On pourra vérifier, à titre d'exercice, que ν est un temps d'arrêt si et seulement si, pour tout $n \in \{0, 1, \cdots, N\}$:

$$\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Cette définition équivalente du temps d'arrêt est celle qui se généralise au temps continu.

Introduisons maintenant la notion de "suite arrêtée à un temps d'arrêt". Soit $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ et soit ν un temps d'arrêt. La suite arrêtée à l'instant ν est définie par :

$$X_n^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega)\wedge n}(\omega)$$

c'est à dire que, sur l'ensemble $\{\nu = j\}$ on a :

$$X_n^\nu = \begin{cases} X_j & \text{si } j \leq n \\ X_n & \text{si } j > n. \end{cases}$$

Noter que $X_N^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega)}(\omega)$ ($= X_j$ sur $\{\nu = j\}$).

Proposition 1.4 *Soit* (X_n) *une suite adaptée et soit* ν *un temps d'arrêt. La suite arrêtée* $(X_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ *est adaptée. Si, de plus,* (X_n) *est une martingale (resp. une surmartingale), alors* (X_n^ν) *est une martingale (resp. une surmartingale).*

Démonstration : On remarque que, pour $n \geq 1$, on a :

$$X_{\nu \wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \left(X_j - X_{j-1} \right),$$

où $\phi_j = \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}}$. Puisque $\{j \leq \nu\}$ est le complémentaire de l'ensemble $\{\nu < j\} = \{\nu \leq j-1\}$, le processus $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$ est prévisible.

Il est clair alors que $(X_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$. De plus, si (X_n) est une martingale, $(X_{\nu \wedge n})$ est aussi une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$, en tant que transformée de la martingale (X_n). On montre de même que si la suite (X_n) est une surmartingale (resp. une sousmartingale), la suite arrêtée est encore une surmartingale (resp. une sousmartingale) en utilisant la prévisibilité et la positivité de $(\phi_j)_{0 \leq j \leq N}$. ∎

2 Enveloppe de Snell

Dans ce paragraphe, on se donne une suite $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ adaptée, et on se propose d'étudier la suite $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U_N & = & Z_N \\ U_n & = & \max\left(Z_n, \mathbf{E}\left(U_{n+1} | \mathcal{F}_n\right)\right) \quad \forall n \leq N-1. \end{array} \right.$$

Cette étude est motivée par notre première approche des options américaines (paragraphe 3.3 du chapitre 1). Nous savons déjà, par la proposition 3.6 du chapitre 1, que $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ est la plus petite surmartingale majorant la suite $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$. On l'appelle enveloppe de Snell de la suite $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$.

La relation de récurrence définissant (U_n) montre qu'à chaque instant, U_n est au dessus de Z_n (avec égalité pour $n = N$) et que, tant que l'inégalité est stricte, $U_n = \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)$. Cela suggère qu'en arrêtant convenablement la suite (U_n), on puisse obtenir une martingale, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.1 *La variable aléatoire définie par :*

$$\nu_0 = \inf\{n \geq 0 | U_n = Z_n\}$$

est un temps d'arrêt et la suite arrêtée $(U_{n \wedge \nu_0})_{0 \leq n \leq N}$ *est une martingale.*

Démonstration : Puisque $U_N = Z_N$, ν_0 définit bien un élément de $\{0, 1, \cdots, N\}$ et l'on a :

$$\{\nu_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0,$$

et pour $k \geq 1$:

$$\{\nu_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \cdots \cap \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_k.$$

Pour montrer que $(U_n^{\nu_0})$ est une martingale, on écrit, comme dans la démonstration de la proposition 1.4 :

$$U_n^{\nu_0} = U_{n \wedge \nu_0} = U_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \Delta U_j$$

où $\phi_j = \mathbf{1}_{\{\nu_0 \geq j\}}$. D'où, pour $n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$:

$$\begin{aligned} U^{\nu_0}_{n+1} - U^{\nu_0}_{n} &= \phi_{n+1}\left(U_{n+1} - U_n\right) \\ &= \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu_0\}}\left(U_{n+1} - U_n\right) \end{aligned}$$

On a, par définition, $U_n = \max\left(Z_n, \mathbf{E}\left(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)\right)$ et sur l'ensemble $\{n+1 \leq \nu_0\}$, $U_n > Z_n$ et par conséquent $U_n = \mathbf{E}\left(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)$. D'où :

$$U^{\nu_0}_{n+1} - U^{\nu_0}_{n} = \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu_0\}}\left(U_{n+1} - \mathbf{E}\left(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)\right)$$

et, en conditionnant :

$$\mathbf{E}\left(\left(U^{\nu_0}_{n+1} - U^{\nu_0}_{n}\right)|\mathcal{F}_n\right) = \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu_0\}}\mathbf{E}\left(\left(U_{n+1} - \mathbf{E}\left(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)\right)|\,\mathcal{F}_n\right)$$

car $\{n+1 \leq \nu_0\} \in \mathcal{F}_n$ (puisque le complémentaire de $\{n+1 \leq \nu_0\}$ est $\{\nu_0 \leq n\}$.
D'où :

$$\mathbf{E}\left(\left(U^{\nu_0}_{n+1} - U^{\nu_0}_{n}\right)|\mathcal{F}_n\right), = 0$$

ce qui prouve que U^{ν_0} est une martingale. ∎

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{T}_{n,N}$ l'ensemble des temps d'arrêt qui prennent leurs valeurs dans $\{n, n+1, \cdots, N\}$. Remarquons que, puisque Ω est supposé fini, $\mathcal{T}_{n,N}$ est un ensemble fini. La propriété de martingale de la suite U^{ν_0} permet de montrer le résultat suivant, qui fait le lien entre enveloppe de Snell et problème d'arrêt optimal.

Corollaire 2.2 *Le temps d'arrêt ν_0 vérifie :*

$$U_0 = \mathbf{E}\left(Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0\right) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}\left(Z_\nu|\mathcal{F}_0\right).$$

Si Z_n s'interprète comme la somme des gains d'un joueur après n parties d'un jeu de hasard, on voit que s'arrêter de jouer à l'instant ν_0 permet de maximiser le gain moyen sachant $\mathcal{F}_0$.
Démonstration : Puisque U^{ν_0} est une martingale, on a :

$$U_0 = U^{\nu_0}_0 = \mathbf{E}\left(U^{\nu_0}_N|\mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}\left(U_{\nu_0}|\mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}\left(Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0\right).$$

Par ailleurs, si $\nu \in \mathcal{T}_{0,N}$ la suite arrêtée U^ν est une surmartingale. D'où :

$$\begin{aligned} U_0 &\geq \mathbf{E}\left(U^{\nu}_N|\mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}\left(U_\nu|\mathcal{F}_0\right) \\ &\geq \mathbf{E}\left(Z_\nu|\mathcal{F}_0\right), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ∎

Remarque 2.3 Une généralisation immédiate du corollaire 2.2 donne :

$$\begin{aligned} U_n &= \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbf{E}\left(Z_\nu|\mathcal{F}_n\right) \\ &= \mathbf{E}\left(Z_{\nu_n}|\mathcal{F}_n\right), \end{aligned}$$

où $\nu_n = \inf\{j \geq n | U_j = Z_j\}$.

Définition 2.4 *On appelle temps d'arrêt optimal pour la suite* $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ *tout temps d'arrêt* ν *tel que :*

$$\mathbf{E}\left(Z_\nu|\mathcal{F}_0\right) = \sup_{\mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}\left(Z_\nu|\mathcal{F}_0\right)$$

Il résulte de ce qui précéde que ν_0 est un temps d'arrêt optimal. Le résultat suivant donne une caractérisation des temps d'arrêt optimaux qui montre que ν_0 est le plus petit temps d'arrêt optimal.

Théorème 2.5 *Un temps d'arrêt* ν *est optimal si et seulement si :*

$$\begin{cases} Z_\nu = U_\nu \\ \textit{et } \left(U_{\nu\wedge n}\right)_{0\leq n\leq N} \textit{ est une martingale.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Démonstration : Si la suite arrêtée U^ν est une martingale, on a $U_0 = \mathbf{E}(U_\nu|\mathcal{F}_0)$ et par conséquent, si (2.1) est vérifié, $U_0 = \mathbf{E}(Z_\nu|\mathcal{F}_0)$, ce qui, compte tenu du corollaire 2.2, entraîne l'optimalité de ν.

Réciproquement, si ν est optimal, on a :

$$U_0 = \mathbf{E}\left(Z_\nu|\mathcal{F}_0\right) \leq \mathbf{E}\left(U_\nu|\mathcal{F}_0\right).$$

Mais, puisque U^ν est une surmartingale :

$$\mathbf{E}\left(U_\nu|\mathcal{F}_0\right) \leq U_0.$$

D'où :

$$\mathbf{E}\left(U_\nu|\mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}\left(Z_\nu|\mathcal{F}_0\right)$$

et puisque $U_\nu \geq Z_\nu$, $U_\nu = Z_\nu$.

De l'égalité $\mathbf{E}\left(U_\nu|\mathcal{F}_0\right) = U_0$ et des inégalités :

$$U_0 \geq \mathbf{E}\left(U_{\nu\wedge n}|\mathcal{F}_0\right) \geq \mathbf{E}\left(U_\nu|\mathcal{F}_0\right)$$

(qui résultent du fait que (U_n^ν) est une surmartingale) on déduit aussi :

$$\mathbf{E}\left(U_{\nu\wedge n}|\mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}\left(U_\nu|\mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(U_\nu|\,\mathcal{F}_n\right)|\,\mathcal{F}_0\right).$$

Mais on a $U_{\nu\wedge n} \geq \mathbf{E}\left(U_\nu|\,\mathcal{F}_n\right)$, d'où $U_{\nu\wedge n} = \mathbf{E}\left(U_\nu|\,\mathcal{F}_n\right)$, ce qui prouve que (U_n^ν) est une martingale. ∎

3 Décomposition des surmartingales

La décomposition suivante (classiquement appelée "décomposition de Doob") permet, dans les modèles de marchés viables et complets, d'associer à toute surmartingale une stratégie de gestion dans laquelle la consommation est autorisée (voir à ce sujet l'exercice 5).

Proposition 3.1 *Toute surmartingale* $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ *peut s'écrire de façon unique sous la forme :*

$$U_n = M_n - A_n$$

où (M_n) *est une martingale et* (A_n) *un processus croissant, prévisible, nul en* 0*.*

Démonstration : Il est clair que le seul choix possible pour $n = 0$ est $M_0 = U_0$ et $A_0 = 0$. On doit ensuite avoir :

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n)\,.$$

D'où, en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_n$ et en utilisant les propriétés de M et A :

$$-(A_{n+1} - A_n) = \mathbf{E}\left(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) - U_n$$

et

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - \mathbf{E}\left(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\right).$$

(M_n) et (A_n) sont ainsi déterminés de manière unique et on voit que (M_n) est bien une martingale et que (A_n) est bien prévisible et croissant (parce que (U_n) est une surmartingale). ∎

Supposons maintenant que (U_n) soit l'enveloppe de Snell d'une suite adaptée (Z_n). On peut alors caractériser le plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_n) à l'aide du processus croissant (A_n) intervenant dans la décomposition de Doob de (U_n) :

Proposition 3.2 *Le plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_n) est donné par :*

$$\nu_{max} = \begin{cases} N & si\ A_N = 0 \\ \inf\{n,\ A_{n+1} \neq 0\} & si\ A_N \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration : On voit facilement que ν_{max} est un temps d'arrêt en utilisant le fait que $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ est prévisible. De l'égalité $U_n = M_n - A_n$ et du fait que $A_j = 0$, pour $j \leq \nu_{max}$, on déduit que $U^{\nu_{max}} = M^{\nu_{max}}$ ce qui entraîne que $U^{\nu_{max}}$ est une martingale. Pour avoir l'optimalité, il suffit par conséquent de montrer l'égalité :

$$U_{\nu_{max}} = Z_{\nu_{max}}.$$

Or :

$$\begin{aligned} U_{\nu_{max}} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{\nu_{max} = j\}} U_j + \mathbf{1}_{\{\nu_{max} = N\}} U_N \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{\nu_{max} = j\}} \max\left(Z_j, \mathbf{E}\left(U_{j+1}|\mathcal{F}_j\right)\right) + \mathbf{1}_{\{\nu_{max} = N\}} Z_N, \end{aligned}$$

On a $\mathbf{E}\left(U_{j+1}|\mathcal{F}_j\right) = M_j - A_{j+1}$ et, sur l'ensemble $\{\nu_{max} = j\}$, $A_j = 0$ et $A_{j+1} > 0$, donc $U_j = M_j$ et $\mathbf{E}\left(U_{j+1}|\mathcal{F}_j\right) = M_j - A_{j+1} < U_j$. Par suite $U_j = \max\left(Z_j, \mathbf{E}\left(U_{j+1}|\mathcal{F}_j\right)\right) = Z_j$. D'où finalement :

$$U_{\nu_{max}} = Z_{\nu_{max}}.$$

Il reste à démontrer que c'est le plus grand temps d'arrêt optimal. Cela résulte du fait que si ν est un temps d'arrêt vérifiant $\nu \geq \nu_{max}$ et $\mathbf{P}(\nu > \nu_{max}) > 0$, alors

$$\mathbf{E}(U_\nu) = \mathbf{E}(M_\nu) - \mathbf{E}(A_\nu) = \mathbf{E}(U_0) - \mathbf{E}(A_\nu) < \mathbf{E}(U_0)$$

et par conséquent U^ν ne peut pas être une martingale. ∎

4 Enveloppe de Snell et chaînes de Markov

Le but de ce paragraphe est de montrer comment, dans un cadre markovien, les calculs d'enveloppes de Snell peuvent être menés à bien. Une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini E est appelée chaîne de Markov si, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tous éléments x_0, x_1,…, x_{n-1}, x, y de E, on a :

$$\mathbf{P}\left(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x\right) = \mathbf{P}\left(X_{n+1} = y | X_n = x\right)$$

La chaîne est dite *homogène* si le nombre $P(x,y) = \mathbf{P}\left(X_{n+1} = y | X_n = x\right)$ ne dépend pas de n. La matrice $P = (P(x,y))_{(x,y)\in E\times E}$, indexée par $E \times E$, est alors appelée matrice de transition de la chaîne. La matrice P a des coefficients positifs ou nuls et vérifie : $\sum_{y\in E} P(x,y) = 1$, pour tout $x \in E$; on dit que c'est une matrice stochastique. Lorsqu'on travaille sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}, \mathbf{P}\right)$, on définit la notion de chaîne de Markov par rapport à la filtration :

Définition 4.1 *Une suite $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ de variables aléatoires à valeurs dans ensemble E est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ si (X_n) est adaptée et si pour toute fonction f de E dans $\mathbf{R}$, on a :*

$$\mathbf{E}\left(f\left(X_{n+1}\right) | \mathcal{F}_n\right) = Pf\left(X_n\right)$$

où Pf désigne la fonction qui à $x \in E$ associe $Pf(x) = \sum_{y\in E} P(x,y)f(y)$.

Noter que si l'on interprète les fonctions de E dans $\mathbf{R}$ comme des matrices unicolonnes indexées par E, Pf est bien le produit des deux matrices P et f. On vérifie façilement qu'une chaîne de Markov au sens élémentaire est une chaîne de Markov par rapport à sa filtration naturelle, définie par : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition précédente et de la définition de l'enveloppe de Snell.

Proposition 4.2 *Soit (Z_n) une suite adaptée définie par $Z_n = \psi(n, X_n)$, où (X_n) est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P, à valeurs dans E et ψ une fonction de $\mathbf{N}\times E$ dans $\mathbf{R}$. Alors, l'enveloppe de Snell (U_n) de la suite (Z_n) est donnée par $U_n = u(n, X_n)$, où la fonction u est définie par les relations suivantes :*

$$u(N,x) = \psi(N,x) \quad \forall x \in E$$

et, pour $n \leq N-1$,

$$u(n,\cdot) = \max\left(\psi(n,\cdot), Pu(n+1,\cdot)\right).$$

5 Application aux options américaines

Nous nous plaçons maintenant dans un modèle de marché viable et complet, construit sur l'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}, \mathbf{P}\right)$ et, comme dans les paragraphes 3.1 et 3.3 du chapitre 1, nous noterons $\mathbf{P}^*$ l'unique probabilité sous laquelle les actifs actualisés sont des martingales.

5.1 Exercice et couverture des options américaines

Dans le paragraphe 3.3 du chapitre 1, nous avons défini la valeur (U_n) d'une option américaine décrite par une suite (Z_n), par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_N & = & Z_N \\ U_n & = & \max\left(Z_n, S_n^0 \mathbf{E}^*\left(\frac{U_{n+1}}{S_{n+1}^0}|\mathcal{F}_n\right)\right) \quad \forall n \leq N-1. \end{array}\right.$$

La suite $(\tilde{U}_n)$ définie par $\tilde{U}_n = U_n/S_n^0$ (valeur actualisée de l'option) est donc l'enveloppe de Snell sous $\mathbf{P}^*$ de la suite $(\tilde{Z}_n)$. Il résulte du paragraphe 2 ci-dessus que l'on a :

$$\tilde{U}_n = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbf{E}^*\left(\tilde{Z}_\nu|\mathcal{F}_n\right)$$

et par conséquent :

$$U_n = S_n^0 \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbf{E}^*\left(\frac{Z_\nu}{S_\nu^0}|\mathcal{F}_n\right).$$

D'après le paragraphe 3, on peut écrire :

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n,$$

où $(\tilde{M}_n)$ est une $\mathbf{P}^*$ martingale et $(\tilde{A}_n)$ est un processus croissant prévisible nul en 0. Puisque le marché est complet, il existe une stratégie autofinancée ϕ telle que :

$$V_N(\phi) = S_N^0 \tilde{M}_N,$$

c'est à dire $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$. Comme la suite $\left(\tilde{V}_n(\phi)\right)$ est une $\mathbf{P}^*$-martingale, on a :

$$\begin{array}{lcl} \tilde{V}_n(\phi) & = & \mathbf{E}^*\left(\tilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n\right) \\ & = & \mathbf{E}^*\left(\tilde{M}_N|\mathcal{F}_n\right) \\ & = & \tilde{M}_n, \end{array}$$

et, par conséquent :

$$\tilde{U}_n = \tilde{V}_n(\phi) - \tilde{A}_n.$$

D'où :

$$U_n = V_n(\phi) - A_n,$$

où $A_n = S_n^0 \tilde{A}_n$. Il est clair sur cette expression que le vendeur de l'option peut se couvrir parfaitement puisque, en encaissant la prime $U_0 = V_0(\phi)$, il peut produire une richesse égale à l'instant n à $V_n(\phi)$ qui majore U_n donc Z_n.

Quelle est la date d'exercice optimale pour l'acheteur de l'option ? La date d'exercice est à choisir parmi tous les temps d'arrêt. Le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer à un instant n où $U_n > Z_n$, car il perdrait un actif de valeur U_n (l'option) contre une richesse égale à Z_n (venant de l'exercice de l'option). Donc une date τ d'exercice optimal vérifie $U_\tau = Z_\tau$. Par ailleurs, il n'a pas intérêt à exercer après l'instant

$$\nu_{max} = \inf\{j,\ A_{j+1} \neq 0\}$$

(qui est égal à $\inf\left\{j,\ \tilde{A}_{j+1} \neq 0\right\}$), car, à cet instant, en vendant l'option, il peut se constituer une richesse égale à $U_{\nu_{max}} = V_{\nu_{max}}(\phi)$ et, en suivant à partir de cet instant la stratégie ϕ, il se constitue un portefeuille dont la valeur est strictement plus grande que celle de l'option aux instants $\nu_{max}+1, \nu_{max}+2, \cdots, N$. On impose donc, comme seconde condition $\tau \leq \nu_{max}$, ce qui permet de dire que $\tilde{U}^\tau$ est une martingale. La conclusion de ce qui précède est que les dates d'exercice optimales sont les temps d'arrêt optimaux pour la suite $(\tilde{Z}_n)$, sous la probabilité $\mathbf{P}^*$. Pour préciser ce point, reprenons le point de vue du vendeur de l'option. Si celui-ci se couvre suivant la stratégie ϕ définie plus haut et si l'acheteur exerce à un instant τ qui n'est pas optimal, on a $U_\tau > Z_\tau$ ou $A_\tau > 0$. Dans les deux cas, le vendeur réalise un profit $V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau$, qui est strictement positif.

5.2 Options américaines et options européennes

Proposition 5.1 *Soit $\mathcal{C}_n$ la valeur à l'instant n d'une option américaine décrite par une suite adaptée $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ et soit c_n la valeur à l'instant n de l'option européenne définie par la variable aléatoire $\mathcal{F}_N$-mesurable $h = Z_N$. Alors, on a : $\mathcal{C}_n \geq c_n$.*

De plus, si $c_n \geq Z_n$, pour tout n, alors :

$$c_n = \mathcal{C}_n \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

L'inégalité $\mathcal{C}_n \geq c_n$ est bien naturelle puisque l'option américaine donne plus de droits que l'option européenne.

Démonstration : Puisque la valeur actualisée $\left(\tilde{\mathcal{C}}_n\right)$ est une surmartingale sous $\mathbf{P}^*$, on a :

$$\tilde{\mathcal{C}}_n \geq \mathbf{E}^*\left(\tilde{\mathcal{C}}_N|\mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}^*\left(\tilde{c}_N|\mathcal{F}_n\right) = \tilde{c}_n$$

D'où, l'inégalité : $\mathcal{C}_n \geq c_n$.

Si on a $c_n \geq Z_n$, pour tout n, alors la suite $(\tilde{c}_n)$, qui est une martingale sous $\mathbf{P}^*$, apparaît comme une surmartingale (sous $\mathbf{P}^*$) majorant la suite $(\tilde{Z}_n)$ et par conséquent :

$$\tilde{\mathcal{C}}_n \leq \tilde{c}_n \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}$$

D'où l'égalité. ∎

Remarque 5.2 On vérifiera sans peine que si les relations de la proposition 5.1 n'étaient pas vérifiées, il y aurait des opportunités d'arbitrage par des transactions sur les options.

Pour illustrer la proposition qui précède, plaçons-nous dans le cas d'un marché avec un seul actif risqué, de prix S_n à l'instant n et un taux d'intérêt sans risque constant, égal à $r \geq 0$ sur chaque période, de sorte que $S_n^0 = (1+r)^n$. Alors si, avec les notations de la proposition 5.1, on prend $Z_n = (S_n - K)_+$, c_n est le prix, à la date n, d'un call européen d'échéance N et de prix d'exercice K sur une unité d'actif risqué et $\mathcal{C}_n$ est le prix du call américain correspondant. On a :

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_n &= (1+r)^{-N}\mathbf{E}^*\left((S_N - K)_+|\mathcal{F}_n\right) \\
&\geq \mathbf{E}^*\left(\tilde{S}_N - K(1+r)^{-N}|\mathcal{F}_n\right) \\
&= \tilde{S}_n - K(1+r)^{-N},
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de martingale de $(\tilde{S}_n)$. D'où : $c_n \geq S_n - K(1+r)^{-(N-n)} \geq S_n - K$, puisque $r \geq 0$. Comme $c_n \geq 0$, on a aussi $c_n \geq (S_n - K)_+$ et par la proposition 5.1, $\mathcal{C}_n = c_n$. Il y a donc égalité entre le prix du call européen et le prix du call américain correspondant.

Cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas du put, ni dans le cas de calls sur devises ou sur actions distribuant des dividendes.

Remarque bibliographique : Pour des compléments sur l'enveloppe de Snell et l'arrêt optimal, on pourra consulter [Nev72] (chapitre VI) et [DCD83] (chapitre 5, paragraphe 1). Pour la théorie de l'arrêt optimal à temps continu, voir [Kar81].

6 Exercices

Exercice 1 Soit ν un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$. On note $\mathcal{F}_\nu$ l'ensemble des événements A tels que $A\cap\{\nu = n\}\in\mathcal{F}_n$, pour tout $n\in\{0,\ldots,N\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}_\nu$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_N$. $\mathcal{F}_\nu$ est souvent appelée “tribu des événements antérieurs à ν”.
2. Montrer que la variable aléatoire ν est $\mathcal{F}_\nu$-mesurable.
3. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer l'égalité :

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_\nu) = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{1}_{\{\nu = j\}}\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_j)$$

4. Soit τ un temps d'arrêt tel que $\tau\geq\nu$. Montrer que $\mathcal{F}_\nu\subset\mathcal{F}_\tau$.
5. Sous les mêmes hypothèses, montrer que si (M_n) une martingale, on a

$$M_\nu = \mathbf{E}(M_\tau|\mathcal{F}_\nu).$$

(On pourra traiter le cas $\tau = N$ d'abord.)

Exercice 2 Soit (U_n) l'enveloppe de Snell d'une suite adaptée (Z_n). Montrer, sans supposer $\mathcal{F}_0$ triviale que :

$$\mathbf{E}\left(U_0\right) = \sup_{\nu\in\mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}\left(Z_\nu\right),$$

et plus généralement que :

$$\mathbf{E}\left(U_n\right) = \sup_{\nu\in\mathcal{T}_{n,N}} \mathbf{E}\left(Z_\nu\right).$$

Exercice 3 Montrer que ν est optimal au sens de la définition 2.4 si et seulement si :

$$\mathbf{E}\left(Z_\nu\right) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}\left(Z_\tau\right).$$

Exercice 4 L'objet de cet exercice est d'étudier le put américain dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Les notations sont celles du chapitre 1.

1. Montrer que le prix $\mathcal{P}_n$, à l'instant n, du put américain d'échéance N, de prix d'exercice K sur une action peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_n = P_{am}(n, S_n)$$

où $P_{am}(n,x)$ est définie par $P_{am}(N,x) = (K-x)_+$ et, pour $n\leq N-1$

$$P_{am}(n,x) = \max\left((K-x)_+, \frac{f(n+1,x)}{1+r}\right),$$

avec $f(n+1,x) = pP_{am}(n+1,x(1+a)) + (1-p)P_{am}(n+1,x(1+b))$ et $p = \frac{b-r}{b-a}$.

2. Montrer que la fonction $P_{am}(0,.)$ peut se mettre sous la forme :

$$P_{am}(0,x) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}^*\left((1+r)^{-\nu}(K - xV_\nu)_+\right),$$

où la suite de variables aléatoires $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ est définie par : $V_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $V_n = \prod_{i=1}^n U_i$, où les U_i sont des variables aléatoires dont on précisera la loi conjointe sous $\mathbf{P}^*$.

3. A partir de la formule de la question précédente, montrer que la fonction $x \mapsto P_{am}(0,x)$ est convexe et décroissante.

4. On suppose $a < 0$. Montrer qu'il existe un réel $x^* \in [0,K]$ tel que, pour $x \leq x^*$, $P_{am}(0,x) = (K-x)_+$ et, pour $x \in]x^*, K/(1+a)^N[$, $P_{am}(0,x) > (K-x)_+$.

5. Un agent détient le put américain à l'instant 0. Pour quelles valeurs du cours spot S_0 a-t-il intérêt à exercer immédiatement son option ?

6. Montrer que la stratégie de couverture du put américain est définie par une quantité d'actif risqué $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$ à détenir à l'instant n, où Δ est une fonction que l'on exprimera à partir de la fonction P_{am}.

Exercice 5 Stratégies de consommation. Les stratégies autofinancées définies au chapitre 1 excluent toute possibilité de consommation. On peut introduire des stratégies de consommation de la façon suivante : à l'instant n, après avoir pris connaissance des cours $S_n^0,\ldots,S_n^d$, l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_n à la composition ϕ_{n+1} et décide de la richesse γ_{n+1} qui sera consommée à la date $n+1$. Le réajustement se faisant aux cours de la date n, s'il n'y a pas d'apports de fonds extérieurs, on doit avoir :

$$\phi_{n+1}.S_n = \phi_n.S_n - \gamma_{n+1}. \tag{2.2}$$

Une stratégie de gestion avec consommation sera donc définie par un couple (ϕ, γ), où ϕ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}^{d+1}$, représentant les quantités d'actifs détenues en portefeuille et $\gamma = (\gamma_n)_{1\leq n\leq N}$ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, représentant la richesse consommée à chaque instant, les processus ϕ et γ étant liés par la relation (2.2), qui remplace la condition d'autofinancement du chapitre 1.

1. Soit ϕ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}^{d+1}$ et soit γ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose $V_n(\phi) = \phi_n.S_n$ et $\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n.\tilde{S}_n$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Le couple (ϕ, γ) définit une stratégie de gestion avec consommation.
   (b) Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,
   $$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j.\Delta S_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j.$$
   (c) Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,
   $$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j.\Delta \tilde{S}_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j/S_{j-1}^0.$$

2. Dans toute la suite, on suppose le marché viable et complet et on note $\mathbf{P}^*$ l'unique probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Montrer que si le couple (ϕ, γ) définit une stratégie de gestion avec consommation, alors $(\tilde{V}_n(\phi))$ est une surmartingale sous $\mathbf{P}^*$.

3. Soit (U_n) une suite adaptée telle que $(\tilde{U}_n)$ soit une surmartingale sous $\mathbf{P}^*$. Montrer, en utilisant la décomposition de Doob, qu'il existe une stratégie de gestion avec consommation (ϕ, γ) telle que $V_n(\phi) = U_n$, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$.
4. Soit (Z_n), une suite adaptée. On dit qu'une stratégie de gestion avec consommation (ϕ, γ) couvre l'option américaine définie par (Z_n) si $V_n(\phi) \geq Z_n$, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Montrer que la valeur (U_n) de l'option américaine est la valeur d'au moins une stratégie de gestion avec consommation qui couvre (Z_n) et que toute stratégie de gestion avec consommation (ϕ, γ) qui couvre (Z_n) vérifie $V_n(\phi) \geq U_n$, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.
5. Soit x un nombre positif, représentant la richesse initiale d'un investisseur et soit $\gamma = (\gamma_n)_{1 \leq n \leq N}$ une suite prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On dira que le processus de consommation (γ_n) est finançable à partir de la richesse initiale x s'il existe un processus prévisible ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}^{d+1}$ tel que le couple (ϕ, γ) définisse une stratégie de gestion avec consommation, avec, de plus : $V_0(\phi) = x$ et $V_n(\phi) \geq 0$, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$. Montrer que (γ_n) est finançable à partir de la richesse initiale x, si et seulement si : $\mathbf{E}^* \left(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j / S_{j-1}^0 \right) \leq x$.