III Prop de la fonction d'utilité de V-N DORGENSTERN.

① Cardinalité de la mesure

Si u et v sont deux mesures d'utilité à la VN-M alors :
$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha > 0,\ u = \alpha v + \beta$.

Contre exp :

lot 1 : $\xrightarrow{1/2} -1$; $\xrightarrow{1/2} 2$ lot 2 : $\xrightarrow{3/4} -2$; $\xrightarrow{1/4} 4$

$u(z) = z$ $\mathbb{E}[u(\text{lot}1)] = 0{,}5 > \mathbb{E}[u(\text{lot}2)] = -0{,}5$

$v(z) = e^z$ $\mathbb{E}[v(\text{lot}1)] = 2{,}56 < \mathbb{E}[u(\text{lot}2)] = 13{,}75$

2- Monotonicité

On peut montrer que si l'agent est insatiable, sa (mesure de fonction) d'utilité u est croissante.

3- Paradoxe de Allais :

Exp : 1^{er} cas :

$P_1 \xrightarrow{P=1} 1M€$ P_2 : $\xrightarrow{0{,}1} 5M€$; $\xrightarrow{0{,}89} 1M€$; $\xrightarrow{0{,}01} 0€$

2^{eme} cas

P_3 : $\xrightarrow{0{,}1} 5M€$; $\xrightarrow{0{,}9} 0€$ P_4 : $\xrightarrow{0{,}11} 1M€$; $\xrightarrow{0{,}89} 0€$

Si on préfère P_1 à P_2 et P_3 à P_4

$p \xrightarrow{P=1} 1M€$ q : $\xrightarrow{10/11} 5M€$; $\xrightarrow{1/11} 0€$

P_1 : $\xrightarrow{11/100} p$; $\xrightarrow{89/100} 1M€$ P_2 : $\xrightarrow{11/100} q$; $\xrightarrow{89/100} 1M€$

P_3 : $\xrightarrow{11/100} q$; $\xrightarrow{89/100} 0€$ P_4 : $\xrightarrow{11/100} p$; $\xrightarrow{89/100} q$

Chapitre 3: Comportement vis a vis du risque.

I- Aversion pour le risque et fonction d'utilité

On pose a un indv la question, que preferez vous ?

1) Participer a une loterie h de gain $\mathbb{E}[h]$
2) Toucher avec certitude $\mathbb{E}(h)$.

Si l'agent prefere toujours 2) a 1) alors il a de l'aversion pour le risque ou est RISCOPHOBE.

En terme de f° d'utilité :

1) $w(0) \longrightarrow w(0) + h$.
2) $w(0) \xrightarrow{P=1} w(0) + \mathbb{E}(h)$

L'agent est riscophobe si

$$\mathbb{E}(u(\text{sol } 2)) > \mathbb{E}(u(\text{sol } 1))$$

$$\mathbb{E}(u(w_0 + E(h)))$$

$$u(w_0 + \mathbb{E}(h)) > \mathbb{E}(u(w_0 + h)).$$

Theoréme :

L'agent est riscophobe si sa fonction d'utilité (a la VNM) u est strictement concave (si u est 2 fois dérivable, $u'' < 0$).

dem

$\Leftarrow$ Si u est str concave, l'inegalité est l'inegalité de Jensen.

$\Rightarrow$ Pour toute lotterie h déf par $P(h = h_1) = p$, $P(h = h_2) = 1-p$
$\forall p \in]0,1[$
$\forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}$

$$u(w_0 + ph_1 + (1-p)h_2) > p\,u(w_0 + h_1) + (1-p)\,u(w_0 + h_2)$$

$$\Leftrightarrow u(p(w_0 + h_1) + (1-p)(w_0 + h_2)) > p\,u(w_0 + h_1) + (1-p)\,u(w_0 + h_2)$$

Remarque: Si l'agent a du goût pour le risque (ou est riscophile) alors sa fonction d'utilité u est strictement convexe.

R2: Si l'agent est indifferent ou Neutre vis a vis du risque alors

$$\forall h,\ u(w_0 + \mathbb{E}(h)) = \mathbb{E}(u(w_0 + h))$$

alors u est affine.

Mesure d'aversion pour le risque au sens d'Arrow-Pratt :

Definition : Prime de risque

C'est le montant π qu'un agent est prêt à payer pour echanger le resultat d'une lotterie en contre son gain moyen.

Definition : Prime compensatoire

C'est le montant π' qu'on doit donner à un agent pour qu'il accepte d'echanger un gain certain $\mathbb{E}(h)$ contre le resultat d'une lotterie h d'esperence de gain $\mathbb{E}(h)$.

π et π' sont solution de :

$$\mathbb{E}(u(w_0+h)) = u(w_0 + \mathbb{E}(h) - \pi).$$

$$u(w_0 + \mathbb{E}(h)) = \mathbb{E}(u(w_0 + h + \pi')).$$

Proposition : Si l'agent est riscophobe, π et $\pi' > 0$.

Rmq : * Si l'agent est neutre vis-à-vis du risque, $\pi = \pi' = 0$

* Si l'agent est riscophile : $\pi, \pi' < 0$.

III Aversion absolue pour le risque :

objectif : donner la valeur de la prime de risque quand le resultat de la lotterie s'ajoute à la fortune initiale.

$$w_0 \xrightarrow{h} w_0 + h$$

Proposition : Un agent soumis à une lotrie h dont son resultat s'ajoute à sa fortune initiale w_0 reclame une prime de risque $\pi(w_0, h)$

$$\pi(w_0, h) = \frac{1}{2} \operatorname{Var}(h) \times -\frac{u''(w_0 + \mathbb{E}(h))}{u'(w_0 + \mathbb{E}(h))}$$

$$ARA(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = \text{Absolute Risk Aversion}$$

Elem :

$\pi = \pi(w_0, h)$ est solution de

$$u(w_0 + E(h) - \pi) = \mathbb{E}(u(w_0 + h))$$

$$u(w_0 + h) = u(w_0 + \mathbb{E}(h) + (h - \mathbb{E}(h)))$$

$$= u(w_0 + \mathbb{E}(h)) + (h - \mathbb{E}(h))\, u'(w_0 + \mathbb{E}(h)) + \frac{1}{2}(h - \mathbb{E}(h))^2\, u''(w_0 + \mathbb{E}(h)) + o(h^2)$$

et donc

$$\mathbb{E}(u(w_0 + h)) = u(w_0 + \mathbb{E}(h)) + 0 + \frac{1}{2}\operatorname{Var}(h)\, u''(w_0 + \mathbb{E}(h)) + \mathbb{E}(o(h^2)) \quad (1)$$

De l'autre côté :

$$u(w_0 + \mathbb{E}(h) - \pi) = u(w_0 + \mathbb{E}(h)) - \pi\, u'(w_0 + \mathbb{E}(h)) + o(\pi).$$

Donc pour des risques "petits" et au voisinage de $w_0 + \mathbb{E}(h)$.

$$\pi = \frac{1}{2} \operatorname{Var}(h)\, ARA(w_0 + E(h))$$

La prime de risque est proportionnelle

- A' la nature du risque $\operatorname{Var}(h)$
- A' l'attitude face au risque de l'agent $(ARA(w_0 + E(h)))$.

II- Aversion relative pour le risque :

Ce coup-ci, l'agent investit sa fortune initiale dans une loterie h (qui donne des rendements).

$$w_0 \xrightarrow{h} (1+h)w_0$$

h : $0{,}5 \to 10\%$; $0{,}5 \to -2\%$

w_0 : $0{,}5 \to 1{,}1\,w_0$; $0{,}5 \to 0{,}98\,w_0$ $\quad + o(h^2)$

Proposition :

L'agent soumis à cette lotterie reclame une prime de risque :

$$\pi(w_0, h) = \frac{1}{2} \operatorname{Var}(h)\,(w_0 + E(h))\, \frac{u''(w_0 + E(h))}{u'(w_0 + E(h))}$$

On note $RRA(w) = -w \dfrac{u''(w)}{u(w)}$

Relative Risk Aversion

Rmq : $RRA(w) = w\, ARA(w)$

du coup $\dfrac{dRRA(w)}{dw} = ARA(w) + w \dfrac{dARA(w)}{dw}$

IV- Quelques fonctions d'utilité :

1) Exponentielle, $u(w) = e^{-aw}$, $a > 0$

$ARA(w) = a$ constonte.

2) Fonction puissance

$u(w) = \frac{1}{\gamma} w^{\gamma}$ $\qquad \gamma > 1$

$ARA(w) = \frac{1-\gamma}{w}$ $\qquad RRA(w) = 1-\gamma$

$\lim_{w \to 0} ARA(w) = +\infty$

3) Fonction quadratique :

$u(w) = -\frac{1}{2}(b - aw)^2$ (Croissante pour $w < \frac{b}{a}$)

$ARA(w) = \dfrac{a}{b-aw}$, $\dfrac{dARA}{dw} = \dfrac{a^2}{(b-aw)^2} > 0$.

VI- Application : Allocation de la richesse en presence d'une seule source de risque

On a un agent qui peut investir tout ou partie de sa richesse dans une lotterie de rendement X. La question est : Combien investit-il dans cette loterie.

S'il investit α (%) de sa richesse dans la loterie, sa richesse finale :

$$w_f = w_0(1-\alpha) + \alpha w_0 (1+X).$$

Il choisit donc α qui maximise l'esperance d'utilite de sa richesse finale.

$$\alpha^* = \operatorname*{Arg\,Max}_{\alpha \in [0,1]} \mathbb{E}(u(w_f(\alpha))).$$

Condition du premier ordre : $\left.\dfrac{d\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*} = 0$

Condition du second ordre : $\left.\dfrac{d^2\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha^*} < 0.$

$$\frac{d\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha} = \mathbb{E}(w_f'(\alpha)\, u'(w_f(\alpha)))$$
$$= \mathbb{E}(w_0 \times u'(w_f(\alpha))) \quad (1)$$

$$\frac{d^2\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha^2} = \mathbb{E}(w_0^2 x^2\, u''(w_f(\alpha))) \quad (2)$$

Si l'agent est riscophobe, $u'' < 0$.

$\Longrightarrow \mathbb{E}(w_0^2 x^2 u''()) < 0.$

Reste la cond du 1er ordre.

- Supposons que X ne prenne que des valeurs ≥ 0.

Dans ces conditions :

$\forall \alpha \in [0,1]$, $w_0(1+\alpha X) = w_f(\alpha) \leq w_0(1+X)$.

Donc $\mathbb{E}(u(w_0(1+\alpha X))) \leq \mathbb{E}(u(w_0(1+X)))$

$$\alpha^* = 1.$$

- Si X ne prend que des valeurs negatives :

$\forall \alpha \in [0,1]$, $w_0(1+\alpha X) < w_0$

$$\mathbb{E}(u(w_0(1+\alpha X))) < \mathbb{E}(u(w_0))$$
$$\alpha^* = 0$$

- Si X prend des valeurs positives ou negatifs :

$$\left.\frac{d\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \mathbb{E}(w_0 X u'(w_0))$$
$$= \underbrace{w_0\, u'(w_0)}_{>0}\, \mathbb{E}(X).$$

Si $E(X) < 0$, $\left.\dfrac{d\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} < 0$ et $\dfrac{d\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha}$, fct $\searrow$ de α

On choisit alors $\alpha^* = 0$.

Si $\mathbb{E}(X) > 0$, on regarde

$$\left.\frac{d\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = w_0\, \mathbb{E}(X u'(w_0(1+X)))$$

si c'est $> 0 \Longrightarrow \alpha^* = 1$

si TVI, $\exists \alpha^* \in]0,1[$ tq

$$\left.\frac{d\mathbb{E}(u(w_f(\alpha)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*} = 0.$$

Ch 4 : L'approche moyenne-variance

Objectif : Comment un agent insatiable et riscophobe choisit-il un portefeuille de titres financiers ?

Hypothèses :

H1 : Les investisseurs maximisent leur espérance d'utilité pour leur richesse finale. Ils sont insatiables et riscophobes.

H2 : Ils prennent leur décision dans un espace " espérance de gain - risque"

modélisation $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}(u(W_f)) \equiv V(\mathbb{E}(W_f), Var(W_f))$.

/* RSE : responsabilité sociétale des entreprises */

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(m, v) \longmapsto V(m, v)$$

I- Hypothèse des fonctions V (fonctions d'utilité MOYENNE - VARIANCE)

$$\frac{\partial V}{\partial m} > 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial v} < 0$$

II- Fondements de l'approche moyenne - variance :

Investisseur : richesse initiale W_0, il investit dans un portefeuille P de rentabilité (rendement) Rp.

$$W_0 \text{ €} \xrightarrow{P} W_f = W_0(1 + R_p) \text{ €}$$

On peut écrire, $R_p = m_p + \varepsilon_p$ avec $m_p = \mathbb{E}(R_p)$, donc $\varepsilon_p = R_p - \mathbb{E}(R_p)$

$\mathbb{E}(\varepsilon_p) = 0$

$$\Rightarrow W_f = W_0(1 + m_p + \varepsilon_p)$$

$$\Rightarrow u(W_f) = u(\underbrace{W_0(1 + m_p)}_{\mathbb{E}(W_f)} + W_0 \varepsilon_p)$$

$$u(W_f) = u(\mathbb{E}(W_f)) + W_0 \varepsilon_p u'(\mathbb{E}(W_f)) + \frac{1}{2} W_0^2 \varepsilon_p^2 u''(\mathbb{E}(W_f)) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} W_0^n \varepsilon_p^n u^{(n)}(\mathbb{E}(W_f))$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(u(W_f)) = u(\mathbb{E}(W_f)) + 0 + \frac{1}{2} W_0^2 Var(R_p) u''(\mathbb{E}(W_f)) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!} W_0^n u^{(n)}(\mathbb{E}(W_f)) \mathbb{E}(\varepsilon_p^n)$$

$$W_0^2 Var(R_p) = Var(W_f)$$

$$\mathbb{E}(u(W_f)) = u(\mathbb{E}(W_f)) + \frac{1}{2} u''(\mathbb{E}(W_f)) Var(W_f) + \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n!} W_0^n \mathbb{E}(\varepsilon_p) u^{(n)}(\mathbb{E}(W_f))$$

A quelles conditions on peut écrire

$$\mathbb{E}(u(W_f)) = V(\mathbb{E}(W_f), Var(W_f)) \ ?$$

$\rightarrow$ un cas simple $\Rightarrow$ u est quadratique ($u^{(n)} = 0$, $n \geq 3$)

$u(w) = bw - aw^2 \qquad a > 0 \quad , \quad w < \frac{b}{2a}$

$\mathbb{E}(u(W_f)) = bW_0(n+m) - aW_0^2(1+2m+\sigma^2+m^2)$

$V(m,v) = bw_0 - aw_0^2 - aw_0^2 m^2 + (bw_0 - 2aw_0^2)m - aW_0^2 v$

$\frac{\partial V}{\partial v} = -aW_0^2 < 0, \quad \frac{\partial V}{\partial m} = bW_0 - 2a(1+m)W_0^2$

comme $W_0(1+m) < \frac{b}{2a}$, on a bien $\frac{\partial V}{\partial m} > 0$.

(2) Cas où les rentabilités sont normalement distribuées

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}(M, \Delta)$, on a besoin de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\underbrace{Var(X), Var(Y), cov(X,Y)}_{\text{matrice de covariance}}$

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} Var(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

$$f_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \underbrace{(x_1, \dots x_n)}_{x \in \mathbb{R}^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det \Delta}} \exp\left[-\frac{1}{2} {}^t(x-M)\Delta^{-1}(x-M)\right]$$

On suppose que le portefeuille contient $N > 0$ titres

On note $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ le vect de renta. de ces N titres.

On suppose que $R \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{E}, \Delta)$ $\quad \mathcal{E} \in \mathbb{R}^N$, $\Delta \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

L'investisseur investit W_0 € dans le portefeuille P à la date $t=0$

$\Rightarrow$ il achète (vends si $n_i < 0$) n_i titre i pour $i = 1$ à N

Si on note $S_i(0)$, le prix du titre i aujourd'hui, $S_i(1)$ — demain

R_i = renta. du titre i

$$R_i = \frac{S_i(1) - S_i(0)}{S_i(0)} = \frac{S_i(1)}{S_i(0)} - 1$$

$$W_0 = \sum_{i=1}^N n_i S_i(0)$$

$$R_p = \frac{S_p(1)}{S_p(0)} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^N n_i S_i(1)}{\sum n_i S_i(0)} - 1 = \sum_{i=1}^N \frac{n_i S_i(1)}{\sum_{j=1}^n n_j S_j(0)} - 1 = \sum_{i=1}^n \frac{n_i(1+R_i)S_i(0)}{\sum_{j=1}^n n_j S_j(0)} - 1$$

$$= \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{n_i S_i(0)}{\sum_{j=1}^n n_j S_j(0)}}_{w_i} R_i \quad ; \quad w_i = \frac{n_i S_i(0)}{W_0}, \quad R_p = CL \text{ des } R_i$$

$$R_p = {}^t w R \quad \text{avec} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$R_p \sim \mathcal{N}({}^t w \mathcal{E}, {}^t w \Delta w)$$

$${}^t w \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}(R_i)$$

$${}^t w \Delta w = \sum_{i,j} w_i w_j \, cov(R_i, R_j)$$

$R_p \sim \mathcal{N}(m_p, \sigma_p^2)$, $m_p = {}^t w \mathcal{E}$, $\sigma_p^2 = {}^t w \Delta w$

$W_f = W_0(1+R_p) \rightsquigarrow \mathcal{N}(W_0(1+m_p), W_0^2 \sigma_p^2)$

$W_f = W_0(1+R_p) = W_0(1+m_p+\varepsilon_p) = W_0(1+m_p+\sigma_p Z_p)$ $\qquad Z_p = \frac{R_p - \mathbb{E}(R_p)}{\underset{\sigma_p}{\underset{\parallel}{\sigma(R_p)}}}$

$$\frac{\partial E(u(W_f))}{\partial m_p} = \frac{\partial}{\partial m_p}\left[E(u(w_0(1+m_p+\sigma_p Z_p)))\right]$$

$$= E(\underbrace{w_0}_{>0}\ u'(w_0(1+m_p+\sigma_p Z_p))) > 0$$

$$\frac{\partial E(u(W_f))}{\partial \sigma_p} = E(w_0 Z_p u'()) = w_0 \operatorname{cov}(Z_p, u'(W_f))$$

Si $Z_p \nearrow$, $W_f \nearrow$, $u'(W_f) \searrow$ car u' decroissante

donc $\operatorname{cov}(Z_p, u'(W_f)) < 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial E(u(w_f))}{\partial \sigma_p} < 0$$

$$\left.\frac{\partial m_p}{\partial \sigma_p}\right|_{E(u(w_f)) = c^{te}} = \frac{\partial v/\partial \sigma_p}{\partial v/\partial m_p} = \frac{-\operatorname{cov}(Z_p, u'(w_f))}{E(u'(w_f))} > 0$$

II- Ensemble des portefeuilles efficients

1 $N > 0$ titres sur le marché

$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$ = vecteur des Renta. des N titres

$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix}$, $\Delta = (\operatorname{cov}(R_i, R_j))_{i,j=1..N}$

Un portefeuille peut être représenté par un vecteur $W_p \in \mathbb{R}^N$ tq

$\sum_{i=1}^{N} w_i = {}^t w\, \mathbb{1}_N = 1$ avec $\mathbb{1}_N = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \updownarrow N$

w_i = "part" de la marché initiale investie dans le titre i.

$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_i) = {}^t w\, \mathcal{E}$

$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) = {}^t w \Delta w$

2 Diversification

La diversification est dû au fait qu'on peut toujours trouvé un portefeuille qui a une variance plus petite ou egale à la plus petite des variances des titres individuelles.

$$\sigma_0^2 = \underset{\substack{w \in \mathbb{R}^N \\ {}^t\mathbb{1} w = 1}}{\operatorname{Arg\,Min}}\ Var(R_p(w))$$

Si le titre i est celui qui a la variance la plus petite, alors

$\sigma_0^2 \leq \sigma_i^2$, car σ_i^2 = le portefeuille avec $w = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{ème}$ ligne

3 Frontière efficiente :

L'investisseur : - se fixe une esperance de gain m, puis investit dans le portefeuille qui a cette esperance de gain m et la var la plus petite possible.

Il resoud :

$$w^* = \underset{\substack{w \in \mathbb{R}^n \\ sc\ {}^t\mathbb{1}w = 1 \\ {}^tE w \underset{\geq}{=} m}}{\mathrm{Arg\,Min}}\ Var(R_p(w))\ (= {}^tw \Delta w) \qquad [A]$$

Ou, l'investisseur se fixe un risque (variance) minimale σ^2 et cherche des portefeuilles d'esperance maximale pour cette variance σ^2.

$$w^{**} = \underset{\substack{sc\ {}^tw\mathbb{1} = 1 \\ {}^tw \Delta w \underset{\leq}{=} \sigma^2}}{\mathrm{Arg\,Max}}\ \mathbb{E}(R_p(w))\ (= {}^tE w)$$

Optimisation sous contrainte d'égalite :

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ i = 1, \dots, p$

$$(P) \quad \underset{s.c}{\mathrm{Max}\ (\mathrm{Min})}\ f(x_1, \dots x_n)$$

$$g_1(x_1 - x_n) = 0$$
$$g_2(x_1 - x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_p(x_1 - x_n) = 0$$

On pose $L : \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1 \dots x_n, \lambda_1 - \lambda_p) \longrightarrow f(x_1 - x_n) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i (x_1 - x_n)$$

L = Lagrangien du probleme (P)

λ_i = multiplicateur de Lagrange

$(P') = \mathrm{Max}\ (\mathrm{Min})\ L(x_1 - x_n, \lambda_1 - \lambda_p)$

Proposition :

Si $(x_1^*, - x_n^*, \lambda_1^* - \lambda_p^*)$ est solution de (P') alors $(x_1^*, - x_n^*)$ est solution de (P).

Ideé de la demo :

$$\underset{sc\ g_i(x_1 - x_n) = 0}{\mathrm{Min}\ (\mathrm{Max})}\ L(x_1 - x_n, \lambda_1 - \lambda_p) \equiv (P)$$

Condition du premier ordre pour (P')

$\forall i,\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}() = -g_i(x_1^*, \dots x_n^*) = 0$

donc la solution de (P') c'est aussi la solution de

$\underset{s.c\ g(x_1 - x_n) = 0}{\mathrm{Max}}\ L()$ et donc c'est résoudre (P)

Trouver w_0, la composition du portefeuille de variance minimale

$$w_0 = \underset{s.c\ {}^tw\mathbb{1} = 1.}{\mathrm{Arg\,Min}}\ Var(R_p(w)) = ({}^tw \Delta w)$$

Lagrangien

$$L(w,\lambda) = {}^t w \Delta w - \lambda({}^t\mathbb{1} w - 1)$$

Condition du 1er ordre :

$$\begin{cases} \operatorname{grad}_w L(w^*,\lambda^*) = 2\Delta w^* - \lambda^* \mathbb{1} = 0_{\mathbb{R}^N} & [1] \\ \operatorname{grad}_\lambda L(w^*,\lambda^*) = {}^t\mathbb{1} w^* - 1 = 0_{(\mathbb{R})} & [2] \end{cases}$$

[1] Si Δ est inversible $\Rightarrow w^* = \frac{1}{2}\lambda^* \Delta^{-1}\mathbb{1}$

[2] $\Rightarrow \frac{1}{2}\lambda^* \, {}^t\mathbb{1}\Delta^{-1}\mathbb{1} = 1$

$$\Rightarrow \lambda^* = \frac{2}{{}^t\mathbb{1}\Delta^{-1}{}^t\mathbb{1}}$$

[2] $\Rightarrow$ $$w^* = \frac{\Delta^{-1}\mathbb{1}}{{}^t\mathbb{1}\Delta^{-1}\mathbb{1}}$$

Choix de portefeuille :

L'investisseur cherche le portefeuille qui est solution de

[A] $$\begin{aligned} &\operatorname{Min} \ {}^t w \Delta w \\ &\text{sc } {}^t w \mathbb{1} = 1 \\ &\quad {}^t \mathcal{E} w \geq m \end{aligned}$$ (choisi par l'investisseur)

[B] $$\begin{aligned} &\operatorname{Max} \ {}^t \mathcal{E} w \\ &\text{sc } {}^t w \mathbb{1} = 1 \\ &\quad {}^t w \Delta w \leq \sigma^2 \end{aligned}$$ (choisie par l'investisseur)

[A] $$\mathcal{L}(w,\lambda_1,\lambda_2) = {}^t w\Delta w - \lambda_1({}^t\mathbb{1} w - 1) - \lambda_2({}^t\mathcal{E} w - m)$$

cond 1er ordre :

$$\operatorname{grad}_w L(w^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) = 2\Delta w^* - \lambda_1^*\mathbb{1} - \lambda_2^*\mathcal{E} = 0_{\mathbb{R}^N}$$

$$\operatorname{grad}_{\lambda_1} L(w^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) = {}^t\mathbb{1} w^* - 1 = 0_{\mathbb{R}} \quad [2]$$

$$\operatorname{grad}_{\lambda_2} L(w^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*) = {}^t\mathcal{E} w^* = m \quad [3]$$

[1] si Δ est inversible

$$\Longrightarrow w^* = \frac{1}{2}\lambda_1^*\Delta^{-1}\mathbb{1} + \frac{1}{2}\lambda_2^*\Delta^{-1}\mathcal{E}$$

[2] [3] $$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\,{}^t\mathbb{1}\Delta^{-1}\mathbb{1}\lambda_1^* + \frac{1}{2}\,{}^t\mathbb{1}\Delta^{-1}\mathcal{E}\lambda_2^* = 1 \\ \frac{1}{2}\,{}^t\mathcal{E}\Delta^{-1}\mathbb{1}\lambda_1^* + \frac{1}{2}\,{}^t\mathcal{E}\Delta^{-1}\mathcal{E}\lambda_2^* = m \end{cases}$$

Pour qu'il y ait une seule solution il faut

$$ {}^t\mathbb{1}\, \Sigma^{-1} \mathbb{1}\; {}^t\mathcal{E}\, \Sigma^{-1} \mathcal{E} - ({}^t\mathbb{1}\, \Sigma^{-1} \mathcal{E})^2 \neq 0 $$

ie :

$$ \|\mathcal{E}\|^2_{\Sigma^{-1}} \; \|\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} - \langle \mathbb{1}, \mathcal{E} \rangle^2_{\Sigma^{-1}} $$

$$ \|\mathcal{E}\|^2_{\Sigma^{-1}} \; \|\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} - \|\mathcal{E}\|^2_{\Sigma^{-1}} \; \|\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} \cos^2_{\Sigma^{-1}}(\mathbb{1}, \mathcal{E}) $$

vaut 0 si $\cos(\widehat{\mathcal{E}, \mathbb{1}}) = \pm 1$

$\Rightarrow$ ie $\mathcal{E} = \alpha \mathbb{1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

On pose

$$ a = {}^t\mathbb{1}\, \Sigma^{-1} \mathbb{1} $$
$$ b = {}^t\mathbb{1}\, \Sigma^{-1} \mathcal{E} = {}^t\mathcal{E}\, \Sigma^{-1} \mathbb{1} $$
$$ c = {}^t\mathcal{E}\, \Sigma^{-1} \mathcal{E} $$

[2]
[3] $\Rightarrow \lambda_1^* = 2\, \dfrac{c - bm}{ac - b^2}$, $\lambda_2^* = 2\, \dfrac{am - b}{ac - b^2}$

$$ w^* = \frac{c - bm}{ac - b^2} \Sigma^{-1} \mathbb{1} + \frac{am - b}{ac - b^2} \Sigma^{-1} \mathcal{E} $$

$$ w_0 = \frac{\Sigma^{-1} \mathbb{1}}{{}^t\mathbb{1}\, \Sigma^{-1} \mathbb{1}} = \frac{1}{a} \Sigma^{-1} \mathbb{1} \quad \text{(compo de portefeuille de var min)} $$

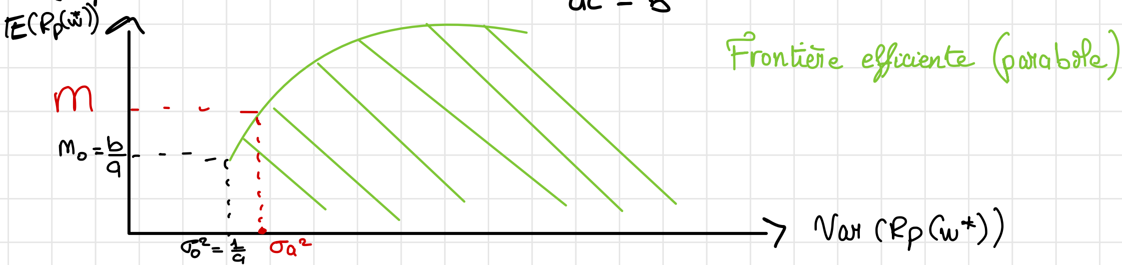
$$ w_1 = \frac{\Sigma^{-1} \mathcal{E}}{{}^t\mathbb{1}\, \Sigma^{-1} \mathcal{E}} = \frac{1}{b} \Sigma^{-1} \mathcal{E} \quad \text{(compo d'un autre portefeuille)} $$

$$ \Rightarrow w^* = a\, \frac{c - bm}{ac - b^2} w_0 + b\, \frac{am - b}{ac - b^2} w_1 $$

$$ {}^t\mathcal{E}\, w_0 = \frac{b}{a} \quad , \quad {}^t\mathcal{E}\, w_1 = \frac{c}{b} $$

$$ {}^t\mathcal{E}\, w^* = a\, \frac{c - bm}{ac - b^2} \frac{b}{a} + b\, \frac{am - b}{ac - b^2} \frac{c}{a} = m = E(R_p(w^*)) $$

$$ Var(R_p(w^*)) = {}^t w^* \Sigma w^* = \frac{am^2 - 2bm + c}{ac - b^2} $$



Si on resoud [A] $\rightarrow$ solution $m^* = m$
$\sigma^* = \sigma_A^*$

Si on resoud [B] avec $\sigma = \sigma_A^* \Rightarrow$ on trouve $m_B^* = m$

Quelques proprietés :

Thm : Black (1972)

Tout portefeuille de Frontière efficiente est une une CL $\underbrace{\text{convexe}}_{\text{all coefs are} > 0 \text{ and sum to } 1}$ de deux portefeuilles distincts de la frontière efficiente.

dem :

Un portefeuille est sur la frontière efficiente ssi :

$\exists \alpha \in \mathbb{R}, w = \alpha w_0 + (1-\alpha) w_1$ (où w est la compo du portefeuille)

Theoreme 2 : Un portefeuille P est efficient ssi
$\exists \beta_p \geq 0, \exists \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que
$\forall i \in \{1, .. N\}, \ cov(R_i, R_p) = \beta_p \mathbb{E}(R_i) + \alpha_p$

demo :

$\Rightarrow$ P est efficient

$$w_p = \frac{c - bm}{ac - b^2} \Delta^{-1} \mathbb{1} + \frac{am_p - b}{ac - b^2} \Delta^{-1} \mathcal{E}$$

La compo de $R_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ iéme ligne

$$cov(R_i, R_p) = {}^t u \Delta w_p$$
$$= {}^t u_i \left(\frac{c - bm_p}{ac - b^2} \mathbb{1} + \frac{am_p - b}{ac - b^2} \mathcal{E} \right)$$
$$= \frac{c - bm_p}{ac - b^2} \times 1 + \frac{am_p - b}{ac - b^2} \mathbb{E}(R_i)$$

Comme $m_p = \mathbb{E}(R_p)$ on a : $cov(R_i, R_p) = \frac{a\mathbb{E}(R_p) - b}{ac - b^2} \mathbb{E}(R_i) + \frac{c - b\mathbb{E}(R_p)}{ac - b^2}$

$$\beta_p = \frac{a\mathbb{E}(R_p) - b}{ac - b^2} \qquad \alpha_p = \frac{c - b\mathbb{E}(R_p)}{ac - b^2}$$

$\beta_p \geq 0$ car 1) $a\mathbb{E}(R_p) - b \geq 0$ car $m_0 = \frac{b}{a}$ (car P est efficient et aucun portefeuille efficient a' une esperence $< m_0$).

2) $ac - b^2 = \|\mathcal{E}\|^2_{\Delta^{-1}} \|\mathbb{1}\|^2_{\Delta^{-1}} \left(1 - \cos^2(\widehat{\mathbb{1}, \mathcal{E}})\right) \geq 0$

$\Leftarrow$ On suppose $\forall i \in \{1 ... N\}, \ cov(R_i, R_p) = \beta_p \mathbb{E}(R_i) + \alpha_p$ avec $\beta_p \geq 0$

$\forall i \in \{1, .. N\}$

$$ {}^t\mathbb{1}_i \, \Delta w_p = \beta_p \, \mathbb{E}(R_i) + \alpha_p \implies \Delta w_p = \beta_p \mathcal{E} + \alpha_p \mathbb{1} $$

et donc, $\mathbb{E}(R_p) = m_p$ et ${}^t\mathbb{1} w_p = 1$

$$ \beta_p b + \alpha_p a = 1 $$

$$ \beta_p c + \alpha_p b = m_p $$

$$ \beta_p = \frac{a m_p - b}{ac - b^2}, \quad \alpha_p = \frac{c - b m_p}{ac - b^2} $$

W_p est la compo d'un portefeuille efficient car $m_p \geq \frac{b}{a}$

Cas où il existe un actif sans risque :

$\longrightarrow$ On ne peut pas résoudre le problème de la m̂ façon que dans le paragraphe precedant parce que si le portefeuille n°0 est l'actif sans risque.

$$ R_{new} \begin{pmatrix} r_f \\ R_i \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}(R_{new}) = \mathcal{E}_{new} = \begin{pmatrix} r_f \\ \mathbb{E}(R_i) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(R_N) \end{pmatrix} \qquad \Delta_{new} = \begin{bmatrix} 0 & — & 0 \\ | & \Delta & \\ 0 & & \end{bmatrix} $$ pas inversible

Pour resoudre le probleme on place α (%) de son fortune initiale dans l'actif sans risque, le reste dans un portefeuille d'actifs risqués de compo w_s richesse finale.

$$ W_f = \alpha W_0 (1 + r_f) + (1-\alpha) W_0 (1 + R_s(w_s)) $$

$$ R_p(\alpha, w_s) = \frac{W_f - W_0}{W_0} = \alpha (1 + r_f) + (1-\alpha)(1 + R_s(w_s)) - 1 $$

$$ = \alpha r_f + (1-\alpha) R_s(w_s) $$

$$ \mathbb{E}(R_p(\alpha, w_s)) = \alpha r_f + (1-\alpha) \mathbb{E}(R_s(w_s)) $$

$$ \mathrm{Var}(R_p(\alpha, w_s)) = (1-\alpha)^2 \mathrm{Var}(R_s(w_s)) $$

On doit ressoudre le probléme

[A'] $\quad \mathrm{Min}\ \mathrm{Var}(R_p(\alpha, w_s)) = (1-\alpha)^2 \mathrm{Var}(R_s(w_s))$

$\quad$ sc $\ {}^t w_s \mathbb{1}_N = 1$

$\quad \alpha r_f + (1-\alpha) \mathbb{E}(R_s(w_s)) = m$

2ème contrainte

$$ \implies \alpha (r_f - \mathbb{E}(R_s(w_s))) = m - \mathbb{E}(R_s(w_s)) \implies \alpha = \frac{\mathbb{E}(R_s) - m}{\mathbb{E}(R_s(w_s)) - r_f} $$

en reportant dans [A']

$$ \underset{\substack{s.c \\ {}^t w_s \mathbb{1} = 1}}{\mathrm{Min}} \frac{\mathrm{Var}(R_s(w_s))}{(\mathbb{E}(R_s(w_s)) - r_f)^2} $$

$$ \iff \underset{sc\ {}^t w_s \mathbb{1} = 1}{\mathrm{Max}} \lambda(w_s)^2 \quad \text{avec } \lambda(w_s) = \frac{\mathbb{E}(R_s(w_s)) - r_f}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_s(w_s))}} $$

NB: $\frac{\text{Prime de risque}}{\text{ecart-type}}$, prime de risque par unité de risque (Ratio de Sharpe)

λ doit être > 0 parce que les investisseurs sont riscophobes.

$\longrightarrow$ Frontière efficiente :

un portefeuille qui contient :

- de l'actif sans risque
- un seul et m̂ portefeuille d'actifs risqués.

C'est le portefeuille qui maximise le ratio de Sharpe.

$$R_s^* = R_s(w_s^*) \;/$$

$$w_s^* = \underset{\substack{w_s \in \mathbb{R}^N \\ t\mathbb{1} w_s = 1}}{\text{Arg Max}} \quad \lambda_s = \frac{\mathbb{E}(R_s(w_s)) - r_f}{\sigma(R_s(w_s))}$$

$$R_p(\alpha, w) = \alpha r_f + (1-\alpha) R_s(w)$$

$$\mathbb{E}(R_p) = \alpha r_f + (1-\alpha)\mathbb{E}(R_s(w))$$

$$Var(R_p) = (1-\alpha)^2 Var(R_s)$$

R_p^* optimal

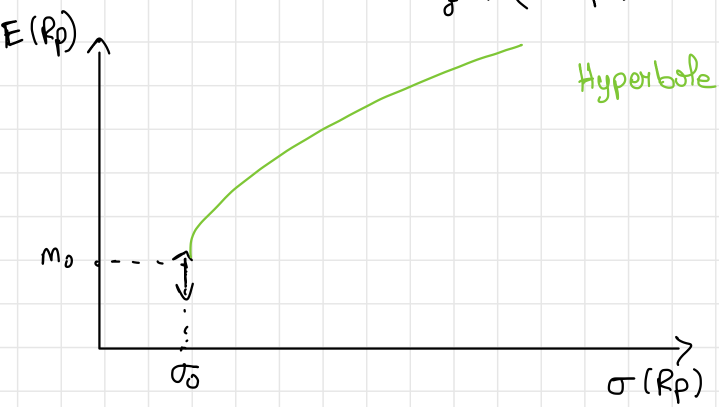
$$\mathbb{E}(R_p^*) = m_p = \alpha_p^*(r_f - \mathbb{E}(R_s^*)) + \mathbb{E}(R_s^*)$$

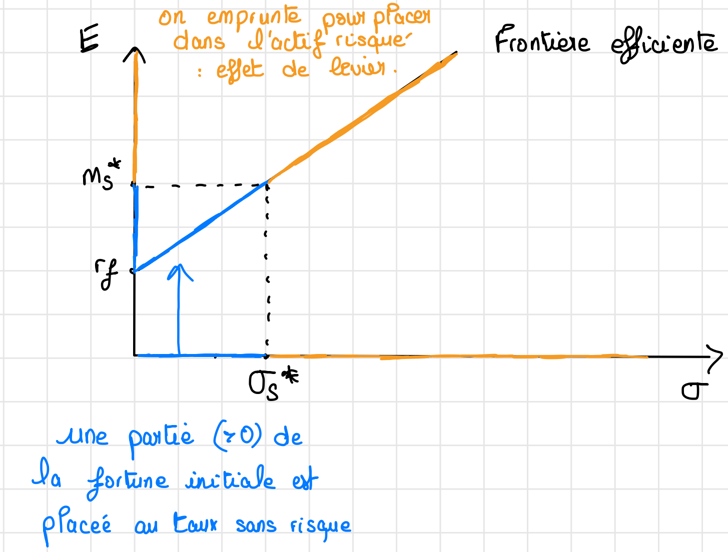
$$Var(R_p^*) = (1-\alpha_p^*)^2 Var(R_s^*)$$

$$\mathbb{E}(R_s^*) = r_f + \lambda^* \sigma(R_s^*)$$

donc $\mathbb{E}(R_p^*) = m_p = \alpha_p^*(-\lambda\sigma(R_s^*)) + r_f + \lambda^*\sigma(R_s^*)$

$$= r_f + (1-\alpha_p^*)\lambda^*\sigma(R_s^*) = r_f \pm \lambda^*\sigma(R_p^*)$$





NB : le monde de finance peut être déconnecté du marché de l'économie réelle.

Théorème :

Une CNS pour qu'un portefeuille appartienne à la frontière efficiente (ici droite dans l'espace Espérance - écart-type) est :

$$\forall i \in \{1\_N\},\ \mathbb{E}(R_i) - r_f = \frac{cov(R_i, R_p)}{Var(R_p)}\left(\mathbb{E}(R_p) - r_f\right) \quad \text{avec } \mathbb{E}(R_p) > r_f$$

le choix de portefeuille pour un investisseur :

Investisseur, insatiable, riscophobe fait son choix dans l'espace Espérance de gain / Risque maximise son espérance d'utilité

$$\mathbb{E}(u(W_0(1+R_p))) = \bar{V}(\mathbb{E}(R_p), var(R_p))$$

L'investisseur choisit le portefeuille de compo w^* qui vérifie :

$$w^* = \underset{\substack{w \in \mathbb{R}^N \\ {}^t\mathbb{1}w = 1}}{\mathrm{Arg\,Max}}\ \mathbb{E}(u(1 + R_p(w)))$$

$$= \underset{\substack{w \in \mathbb{R}^N \\ {}^t\mathbb{1}w = 1}}{\mathrm{Arg\,Max}}\ (\bar{V}({}^t\varepsilon w, {}^t w \Lambda w))$$

summer time madness

Lagrangien

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = \bar{V}({}^t\varepsilon w, {}^t w \Lambda w) - \lambda({}^t\mathbb{1}w - 1)$$

condition 1er ordre :

$$\mathrm{grad}_w\, \mathcal{L}(w^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^N} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial m}()\,\varepsilon + 2\frac{\partial \bar{V}}{\partial v}()\,\Lambda w^* - \lambda^* \mathbb{1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(w^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}} = {}^t\mathbb{1}w^* - 1 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow w^* = \frac{\lambda^*}{2V_v()} \Sigma^{-1} \mathbb{1} - \frac{V_m()}{2V_v()} \Sigma^{-1} \varepsilon .$$

$\Downarrow$

$$(2) \quad \frac{\lambda^*}{2V_v()} \, {}^t\mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1} - \frac{1}{2} \frac{V_m()}{2V_v()} \, {}^t\mathbb{1} \Sigma^{-1} \varepsilon = 1$$

$$a = {}^t\mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1} , \quad b = {}^t\mathbb{1} \Sigma^{-1} \varepsilon , \quad c = {}^t\varepsilon \Sigma^{-1} \varepsilon$$

$$w_0 = \frac{\Sigma^{-1}\mathbb{1}}{{}^t\mathbb{1} \Sigma^{-1}\mathbb{1}} , \quad w_1 = \frac{\Sigma^{-1}\varepsilon}{{}^t\mathbb{1} \Sigma^{-1}\varepsilon}$$

$$w^* = \Theta^* w_0 + (1 - \Theta^*) w_1$$

$$\lambda^* = \frac{2V_v()}{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{V_m()}{2V_v()} b \right] \text{ reporté dans } (1)$$

$$\Theta = -\frac{2V_m()}{V_v()} .$$

IV- Le MEDAF ou CAPM

Modèle d'evaluation des actifs financiers

Capital Asset Pricing Model

① **objectif :** Trouver la/les relation(s) entre les rentabilité espérées à l'equilibre du marché.

Hypothèses :

H1 | Les marchés sont parfaits

→ pas d'impots, taxes

→ pas de restructions sur les ventes à decouvert.

→ personne ne pese sur les prix.

H2 | Les investisseurs sont insatiables, riscophobes et maximisent leur fonction d'utilité pour leur richesse finale.

H3 | Les investisseurs sélectionnent leurs portefeuille dans un espace Esperance de gain / risque.

H4 | Les marchés sont à l'equilibre i.e le prix aujourd'hui de chaque titre (y compris le zero-coupon, donc le taux sans risque) de telle façon à ce que l'offre totale de chaque titre egalise la demande.

② **Portefeuille de marché**

Definition : On appelle portefeuille de marché un portefeuille qui reproduit la composition en valeur du marché (des titres risqués).

i.e le PDM contient chaque titre en proportion de sa capitalisation boursière.

Prix de marché de l'entreprise

Sur le marché il y a N titres risqués

N_i = nombre d'action(s) du titre $i \in \{1, \dots N\}$

A' la date t La capitalisation du marché :

$$C_m(t) = \sum_{i=1}^{N} N_i \, S_i(t)$$

$S_i(t)$ est le prix de l'action à la date t.

Le "poids" du titre i à la date t dans le portefeuille de marché est :

$$w_M(i) = \frac{N_i \, S_i(t)}{\sum_{j=1}^{N} N_j \, S_j(t)} = \frac{N_i S_i(t)}{C_m(t)}$$

Théorème :

Lorsque le marché est à l'équilibre le portefeuille de marché est une CL convexe de portefeuilles de l'ensemble des investisseurs.

dém :

Soit $K > 0$, le nombre d'investisseurs $W_0(k)$ la richesse initiale de l'investisseur k (investie dans le marché)

$W_0 = \sum_{k=1}^{K} W_0(k)$ = somme totale investie sur le marché à $t = 0$

Si à $t = 0$, le marché est à l'équilibre.

$\Rightarrow$ tous les titres sont détenus

$$\Rightarrow W_0 = \sum_{i=1}^{N} N_i \, S_i(0)$$

L'investisseur k possède une proportion $w_i(k)$ du titre i

Equilibre sur le titre i donne :

$$\sum_{k=1}^{N} \underbrace{w_i(k) \, W_0(k)}_{\substack{\text{somme placée} \\ \text{dans le titre } i \\ \text{par l'investisseur } k}} = N_i \, S_i(0)$$

or $N_i S_i(t) = w_M(t) \, C_m(t) = w_M(i) \, W_0$

donc on a :

$$\forall i \in \{1, \dots N\} \quad N_i S_i(0) = w_M(i) \, W_0 = \sum_{k=1}^{K} W_0(k) \, w_i(k)$$

$$\Rightarrow w_M(i) = \sum_{k=1}^{K} \frac{W_0(k)}{W_0} \, w_i(k)$$

$$\Rightarrow w_M = \begin{pmatrix} w_M(1) \\ \vdots \\ w_M(N) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{K} \frac{W_0(k)}{W_0} \, w(k)$$

avec $w(k) = \begin{pmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \\ \vdots \\ w_N(k) \end{pmatrix}$

Comme $\sum_{k=1}^{k} \frac{W_0(k)}{W_0} = 1$ on a bien w_M = CL convexe des $w(k)$.

Corrolaire : Si les hypothèses H_1 à H_4 sont vraies, le portefeuille de marché est moyenne-variance efficient (est sur la frontière efficiente des actifs risqués).

Théorème MEDAF

S'il existe un ZC de taux (sans risque) r_f alors si les hypothèses H_1 à H_4 sont vraies. On a :

$$\forall i \in \{1, \dots N\}, \quad \mathbb{E}(R_i) - r_f = \beta_i \left(\mathbb{E}(R_m) - r_f \right)$$

avec $\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_m)}{\mathrm{Var}(R_m)}$ $\qquad \mathbb{E}(R_m) > r_f$

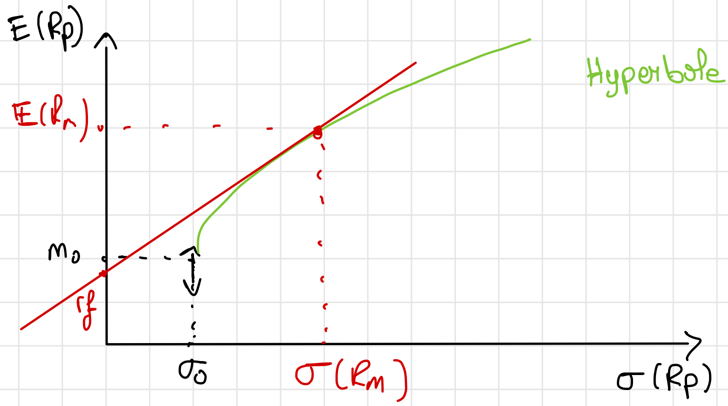
R_i = rentabilité du titre i.
R_m = " du marché.

dém :

On a vu que tout portefeuille P de la FE des actifs risqués vérifie : $\mathbb{E}(R_i) - r_f = \frac{\mathrm{cov}(R_P, R_i)}{\mathrm{Var}(R_P)} \left(\mathbb{E}(R_P) - r_f \right)$

donc reste à montrer $\mathbb{E}(R_m) > r_f$

a) le portefeuille de marché est le portefeuille tangent. Car tous les investisseurs ne détiennent alors que le seul portefeuille tangent d'actif risqué et le portefeuille de marché est la CL convexe de ce seul portefeuille.



Si $rf = m_0$
Si on reprend les equations qui donnent la proportion investie dans le portefeuille risqué (et celle investie dans la ZC)
$\rightarrow$ on demande des qtés infinis de titres donc pas d'équilibre.

Si $rf > m_0 \Rightarrow$ on va vendre le portefeuille de marché pour placer dans le ZC
$\Rightarrow$ ils demandent des qtés négatives de titres et donc la somme de ces qtés n'est pas > 0.

Ch : Arbitrage :

I- Introduction :

La notion d'arbitrage va permettre de donner une relation / d'évaluer le prix aujourd'hui d'un actif financier en fonction du prix d'un ou plusieurs. Si le prix de marché de l'instrument A est x € aujourd'hui alors s'il n'y a pas d'arbitrage le prix de l'instrument B est y €. Cette notion est moins exigente que l'equilibre.

On definit la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) sur les marchés financiers.

Definition : Opportunité d'arbitrage : c'est la possibilité pour un investisseur de detenir aujourd'hui un portefeuille d'actifs financiers qui vaut 0€ et qui procure dans le futur des flux strictement positifs avec une proba str. pos. et des flux str. neg. avec une proba nulle.

Contre exemple :

Un contrat Forward ou futur donne l'obligation d'acheter (ou vendre) un actif donné (un sous-jacent) à une date fixée à l'avance (date d'exercice) et à un prix fixé à l'avance (prix futur).

ex : Contrat futur sur une action qui vaut 40 € aujourd'hui.
Date d'exercice 3 Mois. Taux sans risque 5% (par an)

* Si le prix futur est 43 €
  → j'emprunte 40€ au taux sans risque
  → j'achete l'action
  → je vends le Futur

dans 3 mois :
  → je rembourse le prêt $= -40\left(1 + \frac{5\%}{4}\right)$ € $= -40{,}5$ %
  → je touche les 43 €
  → je donne l'action
  → je gagne de manière certaine $43 - 40{,}5 = 2{,}5$ €

* Si le prix futur est 39 €
  → je vends l'action
  → je place les 40 € au taux sans risque
  → j'achete le forward.

dans 3 mois :

→ je suis remboursé du prêt $= 40\left(1+\frac{5\%}{4}\right)€ = 40,5\ €$

→ je paye le futur $= -39\ €$

→ me donne l'action

→ je "rachete" mon achat à découvert avec cette action qui m'a été livrée.

→ gain certain $+1,5€$.

II Theoremes fondamentaux :

On va montrer :

La valeur aujourd'hui d'un paquet de 2 cash-flows doit être égale à la somme des valeurs aujourd'hui de chacun des 2 cash-flows.

① Hypothèses :

Comme d'habitude 2 dates :

0 : Aujourd'hui, on forme les portefeuilles

1 : Futur : On denoue la position (tout ce qui a été acheté est vendu, tout ce qui a été vendu à découvert est racheté).

On a $N \geq 1$ titres notés $1, 2, \dots N$

Prix en $t=0$ de chq titre $S_i(0)$ et $\mathcal{S}(0) = \mathcal{S} = \begin{pmatrix} S_1(0) \\ \vdots \\ S_N(0) \end{pmatrix}$

$\Omega = \{$ états du monde en $t=1\}$; pour chaque $w \in \Omega$, le titre i verse un cash-flow $F_i(w)$.

On suppose qu'il y a $K \geq 1$ états du monde en $t=1$.

On peut noter $F_{ik} = F_i(w_k)$
$i = 1$ à N, $k = 1$ à N

$$\begin{array}{cc} & \xleftarrow{\quad \text{états} \quad} \\ \text{Matrice } \mathcal{F} = & \begin{bmatrix} \quad F_{ik} \quad \end{bmatrix} \updownarrow \text{actifs} \end{array}$$

Un portefeuille peut être representé par un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

où X_i est la qté d'actifs i "détenu".

($x_i \geq 0$ achat, $x_i < 0$ vente à decouvert) en $t=0$

Un portefeuille de compo X n'est pas un portefeuille d'arbitrage si :

1) $\sum_{i=1}^{N} X_i S_i(0) = {}^tX\mathcal{S} = {}^t\mathcal{S}X = 0$ (prix aujourd'hui du portefeuille $=0$)

2) ${}^t\mathcal{F}X \geq 0$ (Proba que le portefeuille verse un flux <0 est 0)

3) Il n'existe pas de ligne de ${}^t\mathcal{F}X$ non nulle.

Arbitrage :

- mise 0
- Je suis sûr que dans le futur le portefeuille rapporte / vaut toujours des flux ≥ 0.

AOA $\Longleftrightarrow$ tous les flux futurs sont nuls (tout le temps).

Théorème :

Il y a AOA sur un marché financier ssi :

1) Le prix aujourd'hui d'un instrument financier qui est un portefeuille représenté par un vecteur X pour des actifs A.
(Le portefeuille contient X_1 actif(s) A_1, X_N actif(s) A_N).
est la combinaison linéaire :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \, S_i(0) \quad \text{où} \quad S_i(0) \text{ est le prix de l'actif } A_1 \text{ à la date } 0.$$

2) Si pour $X \in \mathbb{R}^N$, on a :

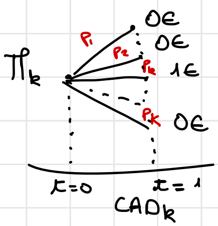
$${}^tF X \geq 0 \qquad {}^tX F \mathbb{1}_k > 0$$

$\to$ flux futurs pos ou nul avec l'un d'entre eux str pos.

$$\Longrightarrow \quad {}^tX S > 0 \qquad \left(S = \begin{pmatrix} S_1(0) \\ \vdots \\ S_N(0) \end{pmatrix} \right) \to \text{le prix aujourd'hui est str pos.}$$

Définition : Créance d'Arrow - Debreu

On appelle créance d'Arrow-Debreu un instrument financier qui donne un flux égal à 1€ dans un des états du monde demain et 0€ dans tous les autres.



Π_k = prix aujourd'hui de la CAD_k

AOA $\Rightarrow$ $\Pi_k > 0$.

$$F = (F_{ik}) \quad \begin{matrix} i : 1 \text{ à } N \\ k : 1 \text{ à } K \end{matrix}$$

F_{ik} = Prix de (flux versé par) l'action i en $t=1$ dans l'état k.

$\Rightarrow$ alors le flux versé par l'action i : $F_{ik} = F_{ik} \times 1€$ est le même que celui versé par le portefeuille qui contient en $t=0$ F_{ik} CAD pour tous les $k = 1$ à K.

S'il y a AOA le Théorème dit que le prix du portefeuille en $t=0$ est $\sum_{k=1}^{K} F_{ik} \Pi_k$.

obligatoirement $S_i(0) = \sum_{k=1}^{K} F_{ik} \Pi_k$.

vrai $\forall i \in \{1, \dots N\}$

$$S = F \Pi \qquad \Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_K \end{pmatrix}$$

Théoréme : (V2)

Il y a AOA sur le marché ssi $\exists \pi \in \mathbb{R}^K$ tq :

i) $S = \mathcal{F}\pi$

ii) $\pi > 0$ (tous les π_k sont > 0).

dém :

$\overset{CS}{\Longleftarrow}$ on suppose, $\exists \pi \in \mathbb{R}^k$, $\pi > 0$ et $S = \mathcal{F}\pi$.

Soit un portefeuille representé par $X \in \mathbb{R}^N$, le prix aujourd'hui du portefeuille.

$P_X = {}^tX S = {}^tS X = {}^tX \mathcal{F}\pi = {}^t\pi \, {}^t\mathcal{F}X$.

Si P est un portefeuille d'arbitrage, $P_X = 0$, ${}^t\mathcal{F}X \geq 0$ et au moins une des $P_X = {}^t\pi \, {}^t\mathcal{F} X = \sum_{k=1}^{k} {}^t\pi$

Comme tous les π_k sont > 0 et au moins un titre str > 0 ${}^t\mathcal{F}X > 0$ alors $P_X > 0$.

$\overset{CN}{\Longrightarrow}$ Il y a AOA sur le marché.

On cherche le prix minimal aujourd'hui d'un portefeuille qui donne des flux ≥ 0, dans tous les états du monde demain, on doit resoudre.

$$\min_{\substack{X \in \mathbb{R}^N \\ \text{s.c } {}^t\mathcal{F}X \geq 0}} {}^tSX$$

Si ${}^tSX^*$ est solution, on a ${}^tSX^* \leq 0$, car pour $X = 0_{\mathbb{R}^N}$, on a ${}^tS0_{\mathbb{R}^N} = 0$ et ${}^t\mathcal{F}0_{\mathbb{R}^N} = 0 \geq 0$.

Pourquoi l'AOA $\Rightarrow {}^tSX^* = 0$?

Si ${}^tSX^* < 0 \Rightarrow$ on touche $-{}^tSX^*$ en $t=0$ et dans tout les états du monde en $t=1$ des flux $\geq 0 \Rightarrow$ Arbitrage.

donc AOA $\Rightarrow {}^tSX^* = 0$ et l'AOA impose aussi ${}^t\mathcal{F}X^* = 0$.

Le dual du problème de minimisation est :

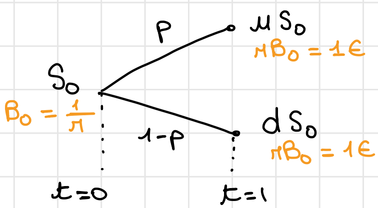
$$(\mathcal{D}) \qquad \max_{\substack{\pi \in \mathbb{R}^k \\ \mathcal{F}\pi \leq S}} {}^t0\pi$$

Si les contraintes du primal sont saturées les contraintes du dual aussi et donc à la solution $\mathcal{F}\pi^* = S$, reste à montrer $\pi^* > 0$.

π_k = de combien on améliore (on déterioré) la solution du primal si on relâche (on remore) la contrainte k d'une unité dans le primal
renorer la contrainte k d'une unité c'est dire que dans l'état k. le flux serra ≥ 1€.

$\Rightarrow$ La contrainte se sature donc Π_k = prix aujourd'hui d'un portefeuille qui vaut 1€ dans l'état k et 0€ dans tous les autres états
ie prix de la CAD_k et AOA $\Rightarrow \Pi_k > 0$.

Application : modèle à 2 états, 2 dates.



$p \in]0, 1[$
$u > d$. (rem $r = 1 + r_f$)
AOA ?

ici on a

$$\mathcal{F} = \begin{array}{c} \\ \text{actifs} \end{array} \begin{array}{c} \longleftarrow \text{états} \longrightarrow \\ \begin{bmatrix} uS_0 & dS_0 \\ 1€ & 1€ \end{bmatrix} \end{array}$$

AOA $\exists \Pi \in \mathbb{R}^2$
$\Pi > 0$ et $\mathcal{F}\Pi = \mathcal{S}$

$$\begin{bmatrix} uS_0 & dS_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_u \\ \Pi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{r-d}{u-d} \\ \frac{u-r}{u-d} \end{bmatrix}$$

$\Pi_u > 0 \Rightarrow r - d > 0$
$\Pi_d > 0 \Rightarrow u - r > 0$
$\Rightarrow \boxed{d < r < u.}$

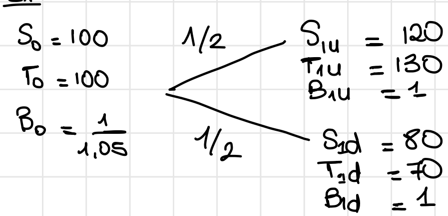
Rmq sur Theoreme V2 :

R_1 : CAD n'a pas obligatoirement un instrument du marché.

R_2 : Π est solution de $\underset{N\times 1}{\mathcal{S}} = \underset{N\times K}{\mathcal{F}} \cdot \underset{K\times 1}{\Pi}$

Systeme de N equations à K inconnues :
- Si 0 solution $\Rightarrow$ il y a arbitrage possible.

ex



portefeuille en t = 0.
je vends S = - 100€
j'achete 0,7 T + 70€
j'achete 30x1,05 B + 30 €
en t = 1
etat u : - 120 + 0,7x130 + 30 x 1,05 = + 2,5 €
état d: - 80 + 0,7x70 + 30x 1,05 = + 0,5 €

– Si le système a une solution :

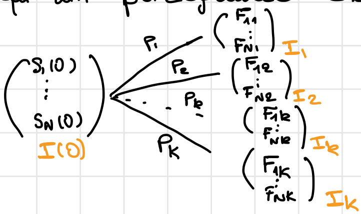
→ Il y a autant d'instruments financiers linéairement idp, qu'il y a d'état de la nature.

→ Le marché est "complet".

⇒ conséquence fondamentale.

Si on "ajoute" un nouvel instrument financier et que le marché reste sans arbitrage, alors :

Les flux produits par cet instrument (en $t = 1$) sont les mêmes qu'un portefeuille bien choisi des N instruments de départ.



$\exists\, \alpha_1 \ldots \alpha_N,\ \forall j \in \{1, \ldots N\}$

$$I_j = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_j F_{\ell j}$$

$$\Rightarrow I(0) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_j S_j(0)$$

Le prix en 0 de ce nouvel instrument financier est égal au prix en 0 de ce portefeuille bien choisi

Le portefeuille "bien choisi" s'appelle :

⇒ Portefeuille de couverture.

⇒ portefeuille réplicant.

– Si le système a une infinité de solutions :

L'AOA ne peut pas donner un prix unique pour un nouvel instrument financier, il existe une infinité de prix possibles compatibles avec l'AOA.

III-

(1) Construction

Soit un portefeuille $\mathcal{P}$ représenté par le vecteur $X \in \mathbb{R}^N$. S'il y a AOA, le prix en $t = 0$ de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P}(0) = {}^t\varphi X = {}^tX\varphi = {}^t(\mathcal{F}\pi)X$

$$= {}^t\pi({}^t\mathcal{F}X)$$

On note $Q \in \mathbb{R}^K$, $Q = \frac{\pi}{{}^t\mathbb{1}_k \pi} \Rightarrow {}^t\mathbb{1}_k Q = 1$

du coup :

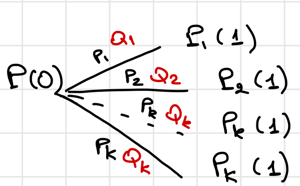
$$\mathcal{P}(0) = ({}^t\mathbb{1}_k \pi)\, {}^tQ\, ({}^t\mathcal{F}X)$$

Que représente ${}^t\mathcal{F}X$

⇒ Les K flux possibles du portefeuille $\mathcal{P}$ en $t = 1$

$$\equiv \mathcal{P}(1) = \begin{pmatrix} P_1(1) \\ \vdots \\ P_K(1) \end{pmatrix}$$ ← prix du portefeuille en $t = 1$ dans l'état 1

$$\Rightarrow \mathcal{P}(0) = ({}^t\mathbb{1}_k \pi)\, {}^tQ\, \mathcal{P}(1) = ({}^t\mathbb{1}_k \pi) \sum_{k=1}^{k} Q_k \mathcal{P}_k(1)$$



$$\sum_{k=1}^{K} Q_k P_k(1) = \mathbb{E}_Q(P(1))$$

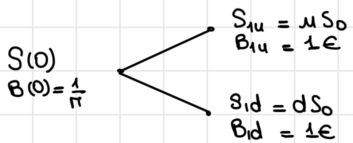
Que vaut ${}^t\mathbb{1}_K \pi$ = La somme des prix des K CAD $\Rightarrow$ le prix en 0 du portefeuille qui contient chacune de CAD en qté 1.

Le portefeuille vaut 1€ dans tous les états du monde en $t=1$ alors il est sans risque et son prix en 0 est $\frac{1}{1+rf}$ où rf = taux sans risque

$$\Rightarrow P(0) = \frac{1}{1+rf} \mathbb{E}_Q(P(1)).$$

Le prix aujourd'hui du portefeuille P est égal à l'espérance de sa valeur future actualisé au taux sans risque, si l'espérance est calculée sans la proba Q, les agents actualisent au taux sans risque s'ils sont risque neutre, du coup Q s'appelle Probabilité Risque Neutre.

ex: 2 états - 2 dates



AOA $\Leftrightarrow d < r < u$

$$\pi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \frac{r-d}{u-d} \\ \frac{u-r}{u-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_u \\ \pi_d \end{pmatrix}$$

$$\pi_u = \frac{1}{r}\mathbb{E}_Q(CAD_u) = \frac{1}{r} q \times 1$$

$$\Rightarrow q = \frac{r-d}{u-d}$$

Autre façon pour trouver q :

On compare :

- Acheter une action en $t=0$ et la revendre en $t=1$.
- Placer $S(0)$€ en $t=0$ au taux sans risque, la prime de risque

vaut : $\mathbb{E}(S(1)) - r S(0)$

$$p u (S_0) + (1-p) d (S_0) - r S(0)$$

L'agent est riscophobe si prime > 0 :

i.e $\left(p(u-d) + (d-r)\right) S(0) > 0$

$$\Leftrightarrow p > q = \frac{r-d}{u-d}$$

L'agent est neutre vis-à-vis du risque si prime $= 0 \Leftrightarrow p = q$.

IV Application prix d'une option :

Une option d'achat call de prix d'exercice K vaut à la date d'exercice T :

$$(S(T)-K)^+ = \max(S(T)-K, 0)$$

$$(K-S(T))^+ = \max(K-S(T), 0)$$

Question, Prix de l'option aujourd'hui.

Modèle 2 états, 2 dates :

Un call, date d'exercice $t = 1$, prix d'exercice K

$$\begin{array}{lcl} & & S_u(1) = u\,S(0) \\ & \overset{p}{\nearrow} & B_u(1) = 1€ \\ S(0) & & C_u(1) = (u\,S(0)-K)^+ \\ B(0) = \frac{1}{r} & & \\ C(0) = 1 & & S_d(1) = d\,S(0) \\ & \underset{1-p}{\searrow} & B_d(1) = 1€ \\ & & C_d(1) = (d\,S(0)-K)^+ \end{array}$$

$d < r < u \Rightarrow$ AOA

$$q = \frac{r-d}{u-d}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \frac{r-d}{u-d} \\ \frac{u-r}{u-d} \end{pmatrix}$$

Trouver $C(0)$ en gardant l'AOA :

$$C(0) = \frac{1}{r} E_Q(C(1)) = \frac{1}{r}\left[q\,C_u(1) + (1-q)\,C_d(1)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{r-d}{u-d}(u\,S(0)-K)^+ + \frac{u-r}{u-d}(d\,S(0)-K)^+\right]$$

Méthode 2:

L'option verse en $t = 1$, les m̂ flux que le portefeuille de CAD qui contient $C_u(1)\,CAD_u + C_d(1)\,CAD_d$.

Son prix aujourd'hui vaut : $C_u(1)\,\pi_u + C_u(1)\,\pi_d$.

Méthode 3 : portefeuille de couverture

Fabriquer un portefeuille en $t = 0$ qui donne en $t = 1$ les m̂ flux que l'option.

portefeuille $P = \Delta S + NB$

$$P(0) = \Delta S(0) + N \times \frac{1}{r} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \Delta S_u(1) + N = (u\,S(0)-K)^+ \\ \searrow \Delta S_d(1) + N = (d\,S(0)-K)^+ \end{array}$$

$$\Rightarrow \Delta(u-d)\,S(0) = (u\,S(0)-K)^+ - (d\,S(0)-K)^+$$

$$\Delta = \frac{(u\,S(0)-K)^+ - (d\,S(0)-K)^+}{(u-d)\,S(0)} = \frac{C_u(1)-C_d(1)}{S_u(1)-S_d(1)}$$

$$N = (u\,S(0)-K)^+ - \Delta\,u\,S(0).$$

Vend call $\Rightarrow$ achète action pour se couvrir $(\Delta > 0)$

$N < 0$, car prix action $<$ prix $\Delta \times$ action.

Call, on achète des actions en les finançant en partie par des emprunts.

Le risque du call est $>$ au risque d'acheter une action.

Autre manière : trouver le portefeuille de couverture.

en $t=0$, je fabrique un portefeuille en melangeant le CALL et l'action.

Ce portefeuille peut-il être sans risque ?

$$P = C - \Delta S$$

$$C(0) - \Delta S(0) \quad \begin{cases} C_u(1) - \Delta S_u(1) \\ C_d(1) - \Delta S_d(1) \end{cases}$$

Portefeuille sans risque ssi dés $t=0$, je sais combien vaut en $t=1$, donc si $P_u(1) = P_d(1)$

$$\Rightarrow C_u(1) - \Delta S_u(1) = C_d(1) - \Delta S_d(1)$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{C_u(1) - C_d(1)}{S_u(1) - S_d(1)}$$

alors $P(0) = \frac{1}{r} P(1)$

$$C(0) - \Delta S(0) = \frac{1}{r}(C_{1u} - \Delta S_{1u}) = \frac{1}{r}(C_{1d} - \Delta S_{1d})$$

nombre de ZC, $C(0) = \Delta S(0) + N \times \frac{1}{r}$.

Exercice :

Dans le même modèle à 2 états, 2 dates : On calcule la prime de risque par unité de risque si on achète une action en $t=0$ et on la revend en $t=1$

$$\lambda_S = \frac{\mathbb{E}(S(1)) - r\,S(0)}{\sigma(S(1))}$$

On calcule la prime de risque par unité de risque pour l'option :

$$\lambda_C = \frac{\mathbb{E}(C(1)) - r\,C(0)}{\sigma(C(1))}$$

$\Rightarrow$ on va avoir $\lambda_C = \lambda_S$

$$X \quad \begin{cases} \xrightarrow{p} X_u \\ \xrightarrow{1-p} X_d \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X(1)) = p X_u + (1-p) X_d$$

$$\sigma^2(X_1) = p(1-p)(X_u - X_d)^2$$