

Feuille de TD n.1 de IPD 2022-2023, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1.1 Transformation de Box-Muller

Soient R de loi exponentielle $(1/2)$ et Θ indépendante de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\sqrt{R}\sin(\Theta)$ et $\sqrt{R}\cos(\Theta)$ sont deux v.a. normales centrée réduites indépendantes.

Exercice 1.2 Loi log-Normale

Soit $X = e^Y$ où Y est de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On dit que X est de loi Log-Normale.

1) Trouver :

- a) la fonction de densité f de la v.a. X ;
- b) $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

2) Montrer que si X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi Log-Normale alors leur produit est aussi de loi Log-Normale.

Exercice 1.3 Queues de distribution de la loi Normale

Montrer que pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \leq \mathbb{P}(|Z| > x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right)$$

En déduire des équivalents pour $\mathbb{P}(|Z| > x)$ et $\mathbb{P}(Z > x)$.

Exercice 1.4 Densité d'un vecteur Gaussien

Soit X un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^d non dégénéré de loi $N(\mu, \Sigma)$, on se propose de montrer que X possède une densité f

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp \left(-\frac{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)}{2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Soient Y_1, \dots, Y_d , d variables aléatoires indépendantes gaussiennes réelles centrées et réduites. Ecrire la densité du vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$.
2. Trouver une matrice M symétrique définie positive de taille $d \times d$ et un vecteur b de taille d , tel que $MY + b$ ait même loi que X .
3. En déduire que X a la densité annoncée.

Exercice 1.5 Processus Gaussien

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit gaussien si et seulement si pour tout $k \geq 1$ et tout choix $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ est gaussien.

1. Soient f_1, \dots, f_n , n fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et G_1, \dots, G_n , n gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Montrer que le processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ défini par $X_t = \sum_{i=1}^n f_i(t) G_i$ est un processus gaussien et calculer ses fonctions de moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et de covariance $K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$.
2. Montrer que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de processus gaussiens convergeant vers le processus X en probabilité, alors X est gaussien et la convergence a lieu aussi dans L^2 .