Introduction aux produits dérivés

Page du Cours sur Chamilo

Hervé Guiol (IPS LJK)

Robert Brown
1773-1858

Percy Daniell
1889-1946

Andreï Kolmogorov
1903-1987

PLAN DU COURS D'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. **Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.**
3. Premières propriétés du MBS.
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. Intégrale d'Itô 1 : définitions.
8. Intégrale d'Itô 2 : formule d'Itô. Processus d'Itô. Variations.
9. Représentation des martingales Browniennes. Formule d'Itô multi-d. Formule de Cameron-Martin.
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itô.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

OUTLINE

PROCESSUS STOCHASTIQUE

DÉFINITION 2.1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $I = \mathbb{R}^+$ (ou $[0, T]$). On appelle **processus aléatoire** (ou **stochastique**) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ toute famille $X = (X_t)_{t\in I}$ de vecteurs aléatoires définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Remarques :

1. à $t \in I$ fixé X_t est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$:
   $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ X_t^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$.
2. à $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ de $I \to \mathbb{R}^d$ est appelée **trajectoire** du processus X. Par suite on appellera également ω une trajectoire du processus.
3. On dira que le processus X est (à trajectoires) **continu**(es) si ses trajectoires sont $\mathbb{P}$-p.s. continues : $\exists D \in \mathcal{F}$ t.q.
   $$\{\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ n'est pas continue }\} \subseteq D$$
   où $\mathbb{P}(D) = 0$.

Lois, Indépendance, Tribus engendrées.

Définitions 2.2.

A. Deux processus stochastiques X et Y ont **même loi** si toutes leurs **marginales finidimensionnelles** ont mêmes lois : i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in I$ les vecteurs $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ ont mêmes lois.

B. Deux processus X et Y sont **indépendants** si leurs **tribus naturelles** $\mathcal{F}^X = \sigma(X)$ et $\mathcal{F}^Y = \sigma(Y)$ sont indépendantes : i.e. $\forall A \in \mathcal{F}^X$ et $\forall B \in \mathcal{F}^Y$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

C. On appelle **tribu engendrée par les trajectoires de X jusqu'au temps $t > 0$** la tribu engendrée par l'application $s \mapsto X_s$ de $[0, T] \to \mathbb{R}^d$. On la note $\mathcal{F}_t$. Elles définissent une filtration : i.e. on a $\forall 0 \leq s < t$

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}^X \subseteq \mathcal{F}$$

Exemple : Processus Gaussien

Définition 2.3

Un processus $X = (X_t)_{t \in I}$ à valeurs réelles est un **processus gaussien** si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1 < \dots < t_n \in I$ le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien : i.e. les lois finidimensionnelles de X sont **toutes** gaussiennes.

Définition 2.4. Moyenne et fonction de covariances.

Si X est un processus gaussien on appelle (fonction) **moyenne** l'application $m_X : I \to \mathbb{R}$ définie par $m_X(t) := \mathbb{E}(X_t)$ et **fonction de covariance** l'application $\Gamma_X : I \times I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma_X(s,t) = \mathbf{Cov}(X_s, X_t)$$

Proposition 2.5. Caractérisation.

Deux processus gaussiens ont même loi si et seulement si ils ont mêmes fonctions moyenne et de covariance.

Versions et processus indistinguables

Définition 2.6

Soient $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ deux processus stochastiques sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dira que

1. X est une **version** (ou **modification**) de Y si et seulement si $\forall t \in I$

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

2. X et Y sont **indistinguables** si et seulement si

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in I) = 1$$

ou de manière équivalemente

$$\exists A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \{\omega \in \Omega : \exists t \in I \text{ t.q. } X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \subseteq A \text{ avec } \mathbb{P}(A) = 0.$$

Proposition 2.7

Si X est une version de Y et si de plus les trajectoires de X et Y sont continue alors X et Y sont indistinguables.

Théorème de Kolmogorov-Chentsov

IPD

H. Guiol

Généralités
Processus stochastique
Lois
Processus Gaussien
Versions et processus indistinguables

Mouvement Brownien
MBS
MB issu de 0
MBS Gaussien
Existence du M.B.S.

Compléments

Theorème 2.8 de Kolmogorov-Chentsov.

Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ un processus stochastique vérifiant
$\forall T > 0$, $\exists \alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0$ des constantes t.q. $\forall\ 0 \leq s, t \leq T$

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^{\alpha}) \leq \delta |t - s|^{1+\beta}$$

Alors il existe $\widetilde{X}$ une version continue de X.
De plus $\widetilde{X}$ est localement Hölderienne d'exposant $\gamma \in \left]0, \frac{\beta}{\alpha}\right[$.

Appelé également théorème de continuité de Kolmogorov. Ce résultat montre qu'un contrôle en moyenne sur les trajectoires d'un processus implique l'existence d'une version continu du processus. Il se révèlera utile dans l'exposé qui suit pour assurer pour l'existence mathématique du mouvement Brownien.

OUTLINE

Mouvement Brownien Standard

Définition 3.1 Mouvement Brownien Standard

On appelle **mouvement Brownien standard** réel (M.B.S.) tout processus $W = (W_t)_{t \in I}$ à **trajectoires continues** vérifiant

A. $W_0 = 0$ p.s. ;

B. accroissements stationnaires gaussien : $\forall 0 \leq s < t \in I$ la v.a. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$;

C. accroissements indépendants : $\forall n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ les v.a. $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ pour $0 \leq i < n$ sont indépendantes.

Remarque : On observe que $\forall t \in I$ la v.a. $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. De plus $\forall 0 \leq s < t$ on a $\mathbf{Cov}(W_s, W_t) = s$.

Mouvement Brownien Issu de 0

Définition 3.2

On appelle **mouvement Brownien issu de** 0 réel tout processus $B = (B_t)_{t \in I}$ à **trajectoires continues** vérifiant

A. $B_0 = 0$ p.s. ;
B. accroissements stationnaires : $\forall 0 \leq s < t \in I$ la v.a. $B_t - B_s$ a même loi que B_{t-s} ;
C. accroissements indépendants : $\forall n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ les v.a. $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ pour $0 \leq i < n$ sont indépendantes.

Théorème 3.3

Si B est un mouvement Brownien issu de 0 alors il existe deux paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tels que le processus W définit par

$$W_t = \frac{B_t - \mu t}{\sigma}, \ \forall t \in I$$

est un M.B.S.

M.B.S. vu comme processus gaussien

Remarque : si $B = (B_t)_{t \in I}$ est un mouvement Brownien issu de 0, avec $\mu := \mathbb{E}(B_1)$ et $\sigma^2 := \mathbf{Var}(B_1)$, alors on pourra toujours écrire

$$B_t = \mu t + \sigma W_t$$

avec $W = (W_t)_{t \in I}$ M.B.S. En conséquence on observe que $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.
La définition et le résultat précédent établissent qu'un *MBS* est un **processus centré à trajectoires continue, à accroissements stationnaires et indépendants de variance** t **au temps** t.

Proposition 3.4

Soit $W = (W_t)_{t \in I}$ un processus à valeurs réelles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le processus W est un M.B.S.
2. Le processus W est gaussien, centré à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s, t) = s \wedge t$.

EXISTENCE DU M.B.S.

Théorème de Consistance de Kolmogorov (ou Daniell-Kolmogorov)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}^+$, et $d \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et toute suite $t_1, \ldots, t_k \in I$, on considère $\nu_{t_1 \ldots t_k}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d)^k$. Supposons que ces mesures satisfont les deux conditions de constances suivantes :

1. Pour toute permutation π de $\{1, \ldots, k\}$ et tous ensembles mesurables $F_i \subseteq \mathbb{R}^d$,
$$\nu_{t_{\pi(1)} \cdots t_{\pi(k)}} \left(F_{\pi(1)} \times \cdots \times F_{\pi(k)}\right) = \nu_{t_1 \ldots t_k} (F_1 \times \cdots \times F_k)\,;$$
2. Pour tous ensembles mesurables $F_i \subseteq \mathbb{R}^d$, et $m \in \mathbb{N}$
$$\nu_{t_1 \ldots t_k} (F_1 \times \cdots \times F_k) = \nu_{t_1 \ldots t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+m}} \Bigg(F_1 \times \cdots \times F_k \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{m}\Bigg)\,.$$

Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus stochastique $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ tels que
$$\nu_{t_1 \ldots t_k} (F_1 \times \cdots \times F_k) = \mathbb{P}\left(X_{t_1} \in F_1, \ldots, X_{t_k} \in F_k\right)$$
pour tous $t_i \in I$, $k \in \mathbb{N}^*$ et tous ensembles mesurables $F_i \subseteq \mathbb{R}^d$, i.e. X a $\nu_{t_1 \ldots t_k}$ pour loi fini-dimensionelle relative aux temps $t_1 \ldots t_k$.

EXISTENCE DU M.B.S.

De part les propriétés des lois Gaussiennes le théorème de consistance de Kolmogorov montre qu'il existe bien un espace de probabilité un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on a X un processus gaussien centré de fonction de covariance $K(s,t) = s \wedge t$ vérifiant $X_0 = 0$ p.s.

LEMME

Soit $Z \in \mathcal{N}(0,1)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}(Z^{2n+1}) = 0$ et $\mathbb{E}(Z^{2n}) = \dfrac{(2n)!}{n!2^n}$

comme $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$ ceci implique que

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^{2n}] = |t-s|^n \frac{(2n)!}{n!2^n}$$

En utilisant le théorème de Kolmogorov-Centsov avec $\alpha = 2n$, $\beta = n-1$ et $\delta = \frac{(2n)!}{n!2^n}$ on en déduit :

1. il existe $W = \widetilde{X}$ une version continue de X, et donc W est un M.B.S.
2. De plus W est localement Hölderien d'exposant $\gamma \in]0, 1/2[$.

Outline

Lemmes de Borel-Cantelli

Définition 3.5

Etant donnés $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ on définit les deux événements $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ par

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \text{ et } \liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

Lemmes de Borel-Cantelli

1. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements tels que $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
2. Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements **indépendants** tels que $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(B_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 1$.