

Valeur Actuelle Nette et Taux de Rentabilité
Interne



Valeur actuelle nette (VAN) et TRI

- Introduction
- Diagramme de flux
- VAN et TRI :
 - définitions
 - Exemples
- Fonctions financières d'Excel
- Choix d'investissements : VAN et TRI
- Investissement et comptabilité
- TRI et rentabilité moyenne
- Les limites du taux actuariel : obligations risquées
- Justification économique de la VAN en univers certain (absence d'opportunités d'arbitrage)

2

Choix d'investissement

- On a examiné comment des investisseurs extérieurs à l'entreprise pouvaient faire des choix de portefeuilles d'actifs financiers
 - *Modèle à une période*
 - *Markowitz, MEDAF*
- On va poursuivre cette analyse
 - *En introduisant plusieurs périodes*
 - *Différents types d'échéanciers de flux*
- Et des critères tels que la valeur actuelle nette (VAN) ou le taux de rentabilité interne (TRI)
 - *Étudier la pertinence de ces critères*
 - *Choix du bon taux d'actualisation pour la VAN*

3

Calculs financiers (VAN, TRI)

"The discovery of calculation (logismos) ended civil conflict and increased concord. For when there is calculation there is no unfair advantage, and there is equality, for it is by calculation that we come to agreement in our transactions."



Archytas de Tarente, 435 – 347 av. J.-C.

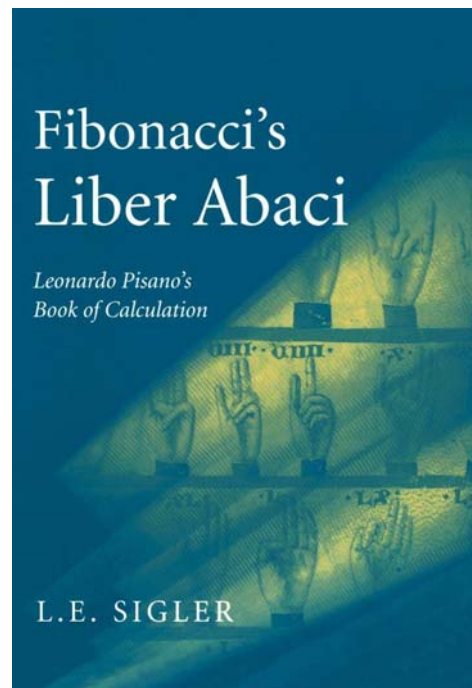
4

Aux origines de la valeur actuelle

- *Leonard de Pise ou Fibonacci*
- *1202 – Liber Abaci (livre des calculs)*
- *Traite essentiellement de mathématiques financières*
- *Raisonnements financiers rigoureux*
- *Valeur actuelle, facteurs d'actualisation, absence d'opportunités d'arbitrage*
- *Précède de peu les attaques de l'Église contre l'usure*
 - Fibonacci and the Financial Revolution
 - William N. Goetzmann
 - NBER Working Paper No. 10352, 2004



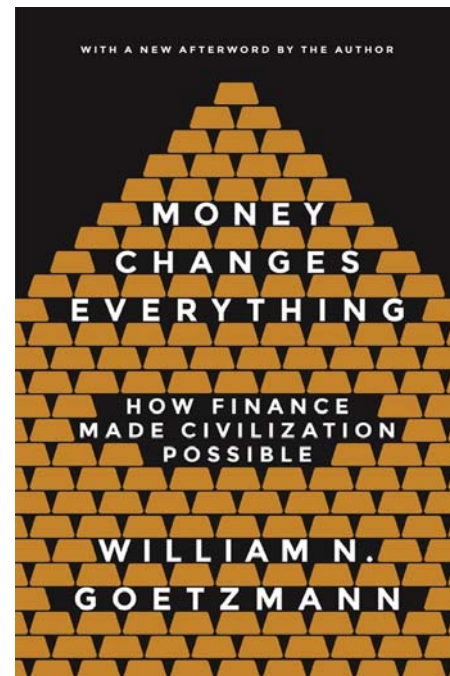
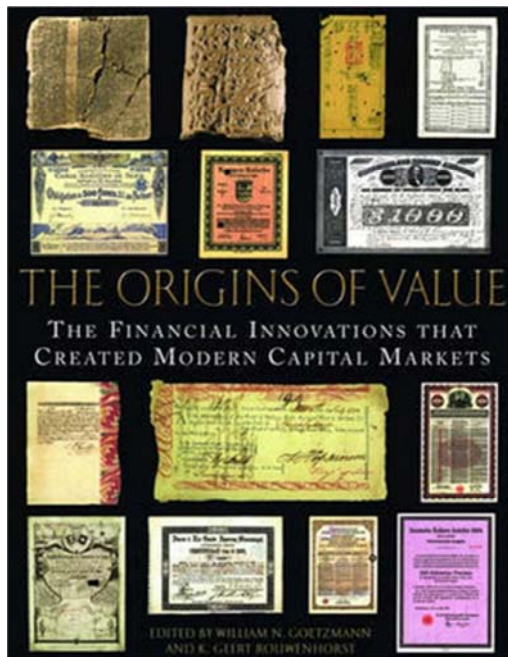
5



Intérêts composés :

A certain man gave one denaro at interest so that in five years he must receive double the denari, and in another five he must have double two of the denari, and thus forever from 5 to 5 years the capital and interest are doubled; it is sought how many denari from this one denaro he must have in 100 years...

6



7

Remarques les investissements

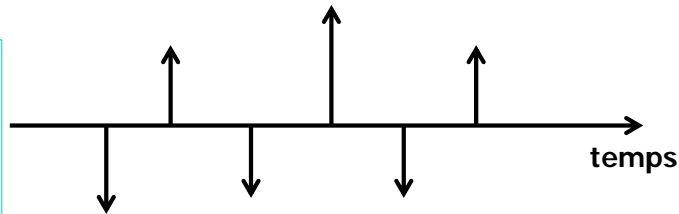
- **Caractéristiques d'un investissement**
 - *Caractère « irréversible » des dépenses engagées*
 - Les dépenses engagées pour creuser le tunnel sous la Manche le sont à fonds perdus
 - On peut arrêter l'exploitation mais on ne va pas combler le tunnel
 - *Caractère non divisible de l'investissement*
 - On ne peut pas creuser une fraction du tunnel
- **Mais on peut titriser cet investissement en créant une société cotée en Bourse et portant ce projet**
 - Les investisseurs initiaux peuvent alors revendre leurs parts sans attendre la fin de vie (éventuellement très lointaine) du projet
- *La cotation en Bourse d'une entreprise (actions et obligations) rend de fait l'investissement divisible en parts*
 - Solidarité des ... bailleurs de fonds

8

Diagrammes de flux

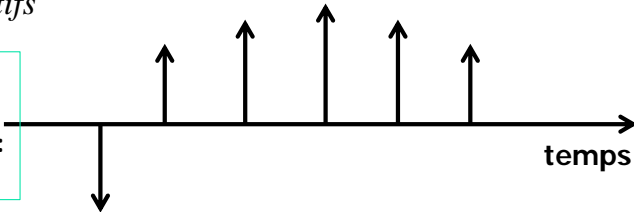
- Échéancier de flux général : aucune indication sur le signe des flux

Diagramme de flux :
En abscisse, le temps
En ordonnée, les flux de trésorerie à chaque date de paiement



- Investissement simple : un montant décaissé à la date initiale, puis des flux positifs

Flèche vers le bas :
flux décaissé
Flèche vers le haut :
Flux encaissé



9

Diagrammes de flux

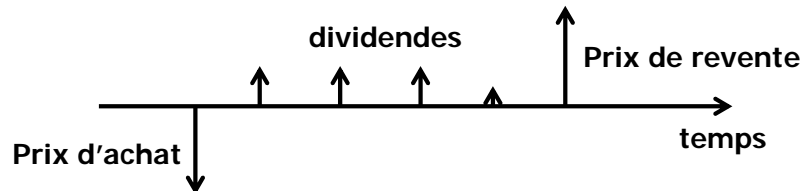
- On parlera d'un investissement simple quand il y a un décaissement à la date initiale t_0 ou 0
 - Montant de l'investissement $I > 0$
- ...Suivi d'une suite de flux de trésorerie positifs
 - Ces flux peuvent être régulièrement espacés au cours du temps
 - Ils peuvent être d'un montant identique
 - On parle alors de rente
 - Ils peuvent être déterministes ou constants en espérance
 - Ils peuvent être payés jusqu'à l'infini
 - Rente perpétuelle

10

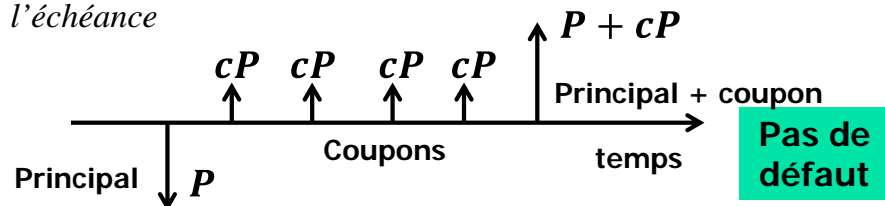
Diagrammes de flux

- Investissement simples

- Stratégie « buy and hold » : cas d'une action



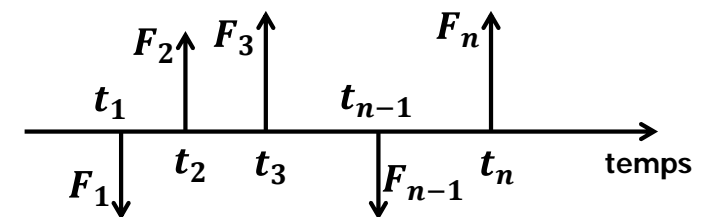
- Achat d'une obligation à l'émission et détention jusqu'à l'échéance



11

Diagrammes de flux

- Échéancier de flux associés à un projet d'investissement
- Ensemble de flux financiers : F_1, F_2, \dots, F_n
- payés à des dates données : t_1, t_2, \dots, t_n
 - Les flux futurs peuvent être aléatoires ou prédéterminés
 - Ils sont exprimés dans une devise donnée



12

Diagrammes de flux : opérations à terme

- La date courante peut être ou non confondue avec la date à laquelle on décide de mettre en œuvre de l'investissement
- Le flux de trésorerie à la date courante est alors nul, On parle d'**opération** (ou d'investissement) **à terme**
- Immobilier, achat d'actions, d'obligations, etc.
 - Par exemple pour les actions, le règlement et la livraison du titre ont souvent lieu un ou deux jours ouvrés après la date de négociation du titre.

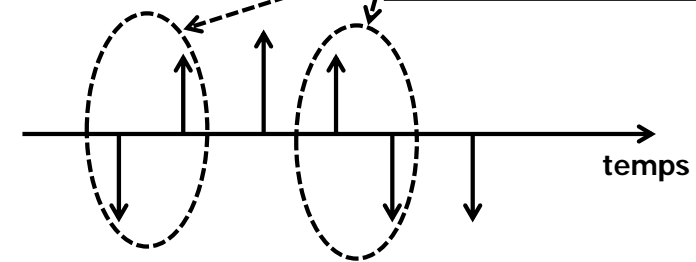
13

Diagrammes de flux : changement de signe

- Investissements qui ne sont pas « simples »

- *Investissements au début du projet*
 - Cash-flows négatifs
- *Période d'exploitation*
 - Cash-flows positifs
- *Coûts de dépollution*
 - Cash-flows négatifs
 - Sortie du nucléaire ?

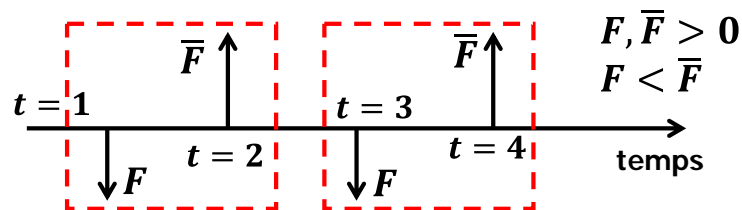
Il y a deux changements de signe dans l'échéancier de flux
Un seul pour un investissement simple



14

Diagrammes de flux : investissements renouvelés

- Investissements qui ne sont pas simples
 - Superposition de deux investissements simples



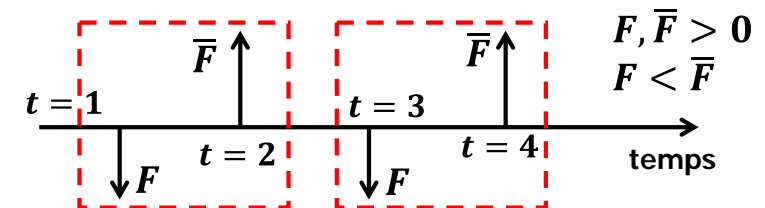
- écart de deux périodes entre les deux investissements
- S'il s'agit de deux décisions prises séparément, il faut évaluer chaque investissement séparément

15

Diagrammes de flux

- Investissements qui ne sont pas simples

- Superposition de deux investissements simples



- Si la décision de renouveler l'investissement est prise dès le début, sans possibilité ultérieure d'abandonner le « second » projet, il s'agit d'un seul investissement.
 - Investissements routiniers ou de renouvellement
 - Problématique de la détermination d'un projet et des flux

16

VAN (Valeur actuelle nette)

■ Cas particulier d'échéanciers de flux

- Flux équirépartis dans le temps (« annuity »)
- $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$
- Pour simplifier :
- $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_{n-1} = n - 1, t_n = n$

$$VAN = \sum_{k=0}^n \frac{F_k}{(1+r)^k}$$

- Pour calculer la VAN, outre l'échéancier de flux, il faut se donner un taux d'actualisation r
- La VAN peut être positive pour certaines valeurs de r et négative pour d'autres valeurs de r

17

VAN (Valeur actuelle nette)

■ Cas où le premier flux est un décaissement lié à un investissement de montant I : $F_0 = -I$

- Cash-flows futurs : F_1, \dots, F_n

$$VAN = -I + \frac{F_1}{1+r} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = 0$$

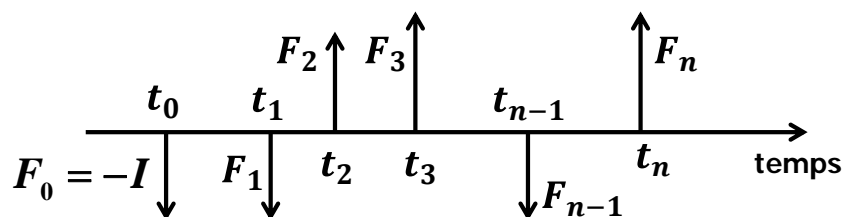
■ VAN = valeur actuelle des cash-flows futurs net de l'investissement initial

- Taux de Rentabilité Interne (TRI)
- Taux d'actualisation r tel que $\sum_{k=0}^n \frac{F_k}{(1+r)^k} = 0$

18

Valeur actuelle nette

■ VAN d'un échéancier (dates de paiement quelconques)



- À la date t_0 , au taux d'actualisation discret r

$$VAN = \sum_{k=0}^n \frac{F_k}{(1+r)^{t_k - t_0}}$$

Convention
flèche vers le haut = encaissement
Flèche vers le bas = décaissement

19

TRI : Taux de rentabilité interne

■ Taux d'actualisation r tel que $VAN = \sum_{k=0}^n \frac{F_k}{(1+r)^k} = 0$

■ Cas où le premier flux est un décaissement lié à un investissement de montant I : $F_0 = -I$

- Cash-flows futurs : F_1, \dots, F_n

$$\underbrace{I}_{\text{investissement initial}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k}}_{\text{valeur actuelle des cash-flows futurs}}$$

- Un TRI est un taux d'actualisation tel que la valeur actuelle des cash-flows futurs est égale à l'investissement initial.

20

VAN et TRI

- Un taux de rentabilité interne associé à un projet d'investissement est tel que la valeur actuelle nette des flux actualisés à ce taux est nulle
 - En matière de choix d'investissement, le principe est que l'on préfère des projets dont le TRI est élevé.
 - Le calcul du taux de rentabilité interne ne fait intervenir que l'échéancier de flux, dates de paiement et montant des flux.
 - D'où le nom de taux « interne »
 - C'est un avantage pratique
 - Inconvénients pratiques
 - Un échéancier de flux peut admettre plusieurs TRI
 - Un échéancier de flux peut n'admettre aucun TRI
 - Attention au TRI calculé avec les outils informatiques « standard »

21

Existence et unicité du TRI (investissements simples)

- $F_0 = -I < 0, F_1 > 0, \dots, F_n > 0$
- Il faut chercher un taux d'actualisation r tel que :

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k}$$

Valeur actuelle des cash-flows futurs

- La fonction $r \in]-100\%, +\infty[\rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k}$ est décroissante :

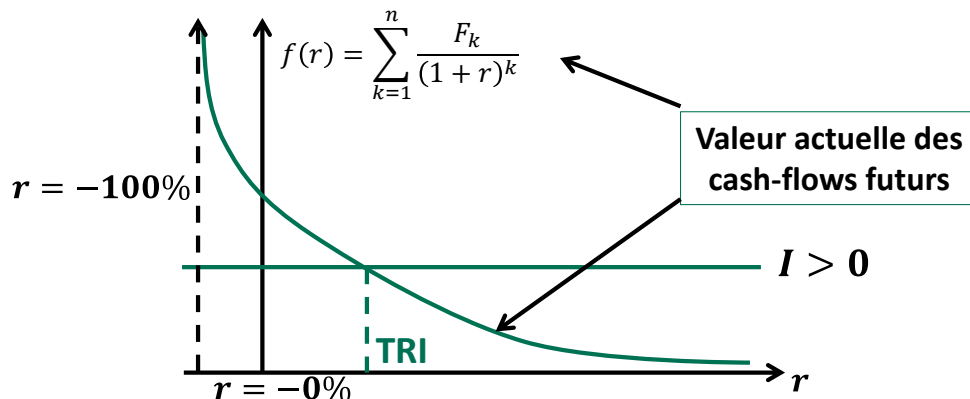
$$f(r) = \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k} \Rightarrow f'(r) = \sum_{k=1}^n \frac{-k \times F_k}{(1+r)^{k+1}} < 0$$

22

Existence et unicité du TRI (investissements simples)

- Existence et unicité d'un TRI pour un investissement simple
 - Domaine de variation de la valeur actuelle des cash-flows futurs

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k} = 0 \quad \lim_{r \rightarrow -100\%} \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k} = +\infty$$



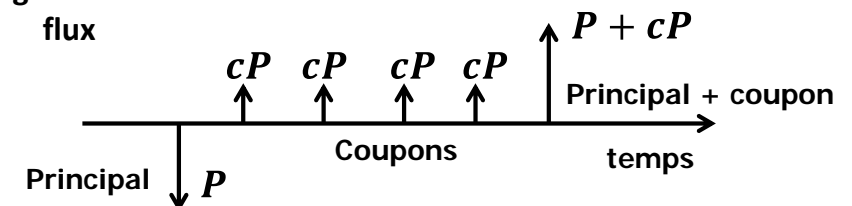
23

Obligation à amortissement in fine



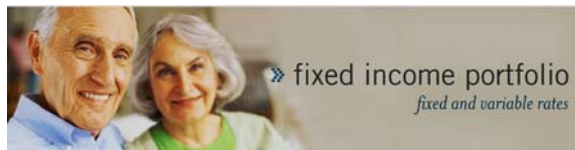
- OAT : Obligations Assimilables du Trésor, émises par l'état français
 - P : principal (1 euro)
 - cP coupon (annuel)
 - Remboursement du principal en une seule fois

Diagramme de flux



24

Obligation à amortissement in fine

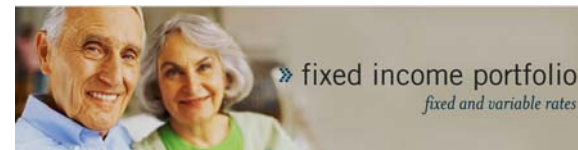


- Achat d'une obligation in fine (cash-flows certains)
 - Prix d'acquisition de l'obligation = 100
 - Maturité = 4 ans
 - Taux de coupon = 5 %

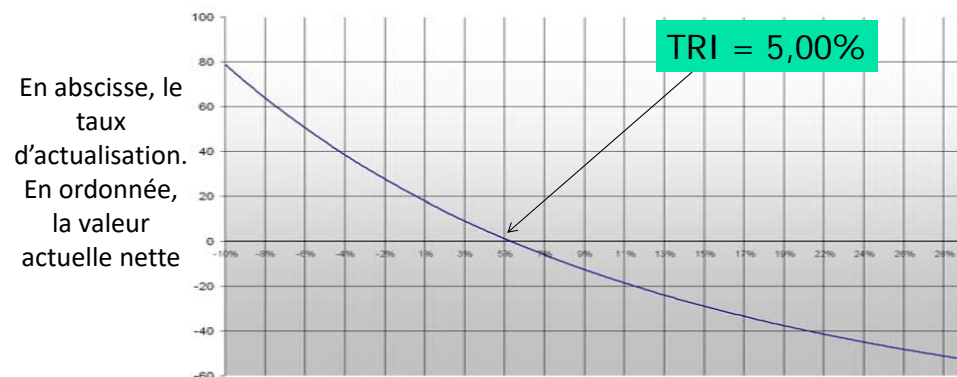
| dates | t_0 | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| flux | F_0 | F_1 | F_2 | F_3 | F_4 |
| | -100 | 5 | 5 | 5 | 105 |

25

Obligation à amortissement in fine



- Valeur actuelle nette (VAN) des flux futurs d'une obligation in fine en fonction du taux d'actualisation
 - On remarque que dans l'exemple choisi, la VAN décroît avec le taux d'actualisation
 - Le Taux de Rentabilité Interne (TRI ou TIR) est égal à 5%



Annuités constantes

- Rentes temporaires ou perpétuelles
 - Suite de cash-flows de montant constant
 - $F_1 = F_2 = \dots = F_n = F$
 - Dates de paiement équiréparties (annuité)
 - $t = 1, 2, \dots, n$
 - Annuité
 - Dans nos exemples, l'unité de temps est l'année
- Si $n = +\infty$, on parle de rente perpétuelle
- Nombre fini de dates de paiement : rente temporaire
 - Première date de paiement est dans un an : rente à terme échu

27

Annuités constantes

- Echéancier de flux : exemple

| dates | t_0 | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{10} |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| flux | F_0 | F_1 | F_2 | F_3 | F_4 | F_5 | F_6 | F_7 | F_8 | F_9 | F_{10} |
| | -1000 | 110 | 110 | 110 | 110 | 110 | 110 | 110 | 110 | 110 | 110 |

28

Annuités constantes : valeur actuelle

- Valeur actuelle de rentes temporaires ou perpétuelles
- $F/(1+r) + F/(1+r)^2 \dots + F/(1+r)^n = F \times \left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \right)$
- Démonstration
 - $z = 1/(1+r)$
 - $(1+z+\dots+z^{n-1}) \times (1-z) = 1-z^n$
- Valeur actuelle d'une rente perpétuelle F/r

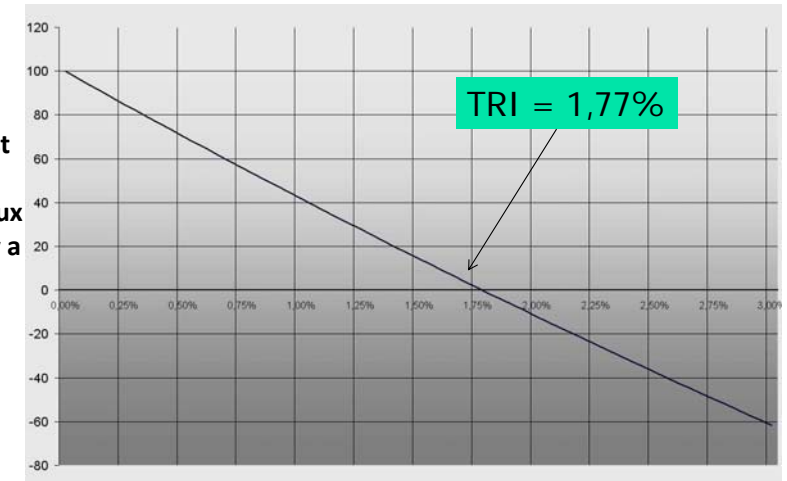
le graphique suivant représente la valeur actuelle de l'échéancier $\sum_{k=0}^{10} \frac{F_k}{(1+i)^k}$ en fonction du taux d'actualisation i . Les taux d'actualisation varient entre 0% et 3%. On remarque que la valeur actuelle est une fonction décroissante du taux d'actualisation.

29

Annuités constantes

- Valeur actuelle d'un prêt à remboursements par mensualités constantes
 - En abscisse, le taux d'actualisation, en ordonnée, la VAN

Il s'agit d'un investissement simple : la VAN est une fonction décroissante du taux d'actualisation. Il y a un unique TRI



Développement durable



- Projet de type « développement durable »
 - On s'est limité à un projet d'investissement avec seulement trois flux.
 - Le premier flux correspond à l'investissement initial
 - Le deuxième flux aux flux issus de l'exploitation de cet investissement
 - Le dernier flux correspond à un coût de sortie du projet

| dates | t_0 | t_1 | t_2 |
|-------|---------|----------|----------|
| | 0 | 1 | 2 |
| flux | - 1 600 | + 10 000 | - 10 000 |

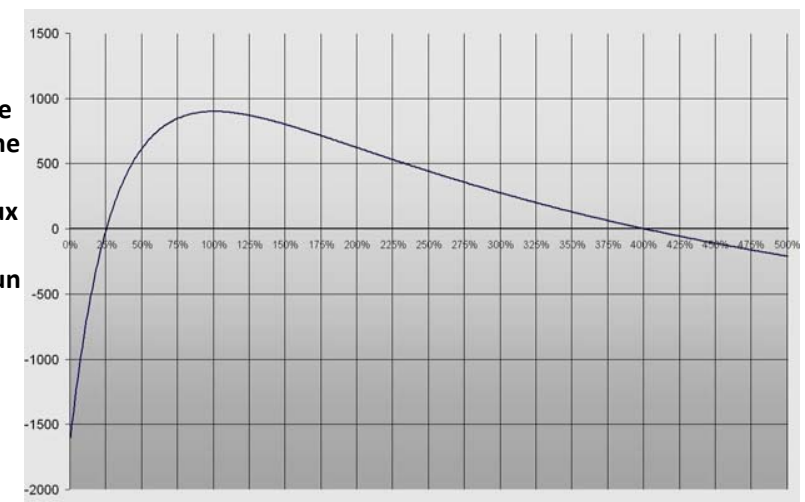
31

Développement durable



- Projet de développement durable, deux TRI
 - En abscisse, le taux d'actualisation, en ordonnée, la VAN

La valeur actuelle nette n'est pas une fonction monotone du taux d'actualisation. Il ne s'agit pas d'un investissement simple.



32

Développement durable



■ Projet de type « développement durable »

- On s'est limité à un projet d'investissement avec seulement trois flux.

- Le premier flux correspond à l'investissement initial
- Le deuxième flux aux flux issus de l'exploitation de cet investissement
- Le dernier flux correspond à un coût de sortie du projet

| dates | t_0 | t_1 | t_2 |
|-------|---------|---------|---------|
| | 0 | 1 | 2 |
| flux | - 1 000 | + 1 990 | - 1 000 |

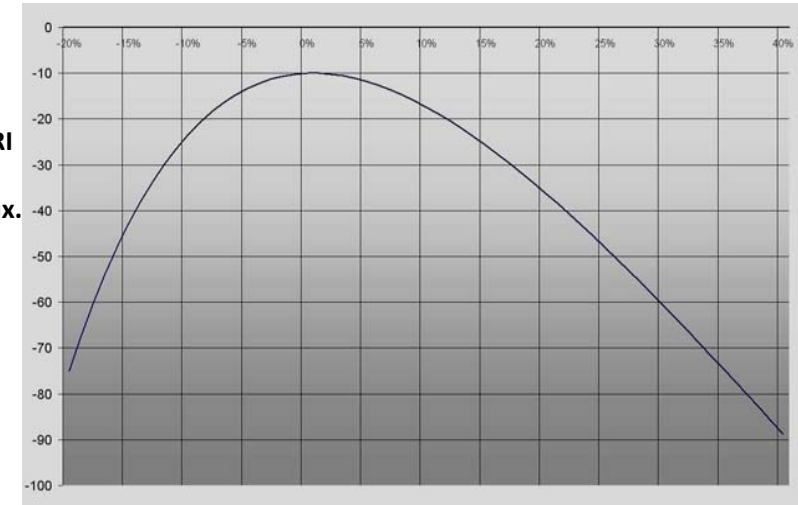
33

Développement durable



- Projet de développement durable, pas de TRI
- En abscisse, le taux d'actualisation, en ordonnée, la VAN

La VAN reste
négative.
Il n'y a pas de TRI
associé à cet
échancier de flux.
Ce n'est pas un
investissement
« simple »





- Calcul de VAN (NPV) sous Excel
 - <http://office.microsoft.com/en-us/excel-help/npv-function-HP010342728.aspx>
- $NPV = \sum_{j=1}^n values_j / (1 + rate)^j$
- Dates de paiement équiréparties
- La première date est la date **1**
 - *Attention s'il y a un flux d'investissement à date **0***
- Calcul de TRI (IRR) sous Excel
 - <http://office.microsoft.com/en-us/excel-help/irr-function-HP010342631.aspx>
- Uniquement pour des dates de paiement équiréparties
- Convergence non garantie
- Ne traite pas les cas de multiples TRI ou d'absence de TRI
 - *Pour les cas complexes, tracer le graphe de $r \rightarrow VAN(r)$*

37

Utilisation de fonctions financières

- *Taux actuariel d'obligations dans Excel*
- *Excel calcule le taux actuariel par la méthode de Newton.*
 - Nombre d'itérations maximal : 100
- Utilisation d'Excel (version française)
 - *RENDEMENT.TITRE(règlement;échéance;taux;valeur_nominale;valeur_échéance;fréquence;base)*
 - *Règlement : date de règlement*
 - On peut trouver « liquidation » au lieu de règlement comme nom du champ
 - Si la date de règlement est le 23 mai 2013, utiliser DATE(2013;5;23)
 - *Échéance : date d'échéance (du dernier paiement) de l'obligation*
 - *Taux : taux de coupon (attention pour un taux de 5%, entrer 0.05)*
 - *Valeur_nominale : il s'agit en fait du prix pied de coupon du titre*

38

Utilisation de fonctions financières

- Utilisation d'Excel (version française)
 - *RENDEMENT.TITRE(règlement;échéance;taux;valeur_nominale;valeur_échéance;fréquence;base)*
 - *Valeur_échéance : c'est en principe la valeur faciale*
 - *Fréquence : 1 pour un coupon payé annuellement*
 - voir le champ frequency de la fonction yield
 - *Base : 1 pour la norme ACT/ACT*
 - La norme ACT/ACT (Actual/Actual ou Exact/Exact) est utilisée pour le calcul du coupon couru par exemple pour les obligations d'État françaises (OAT)
 - voir le champ basis de la fonction yield
- *RENDEMENT.TITRE(DATE(2012;3;3); DATE(2022;6;1); 0.05; 95.05034;100;1;1)*
- *Taux actuariel : 5.64601%*

39

40

VAN et TRI

- Valeur Actuelle Nette : VAN
- « Net Present Value » : NPV
 - Nette ?
 - Prise en compte du premier cash-flow
- Taux de rentabilité interne : TRI
- « Internal rate of return » : IRR
- Taux d'actualisation : discount rate
- Actualiser : to discount



NPV = Total PV of future cashflows – Initial cashflow (CF₀)

$$NPV = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+r)^i} - CF_0$$

$$NPV = \left[\frac{CF_1}{(1+r)^1} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \dots \right] - CF_0$$

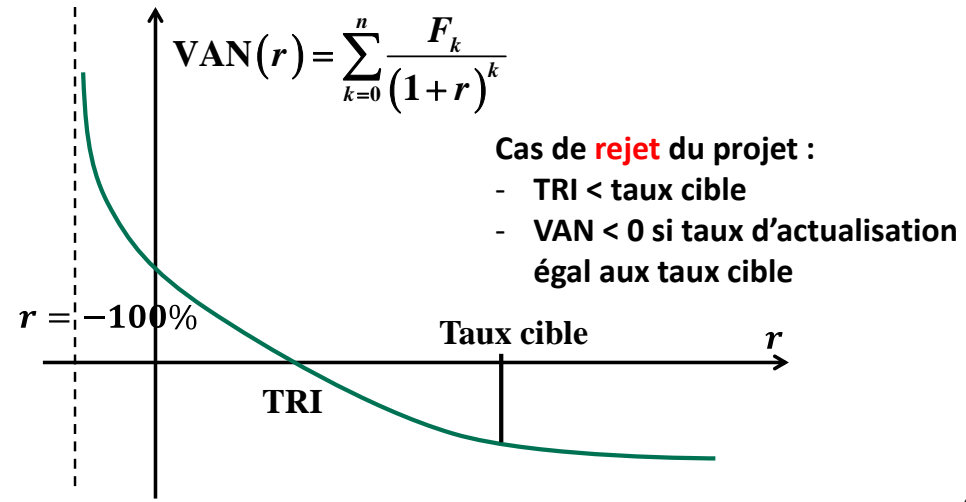
r = discount rate
 n = time period of the project / investment

future
process
Calculating
Discounting
amount
present
compounding
opposite
value

VAN et TRI

- Comparaison entre les critères de la VAN et du TRI

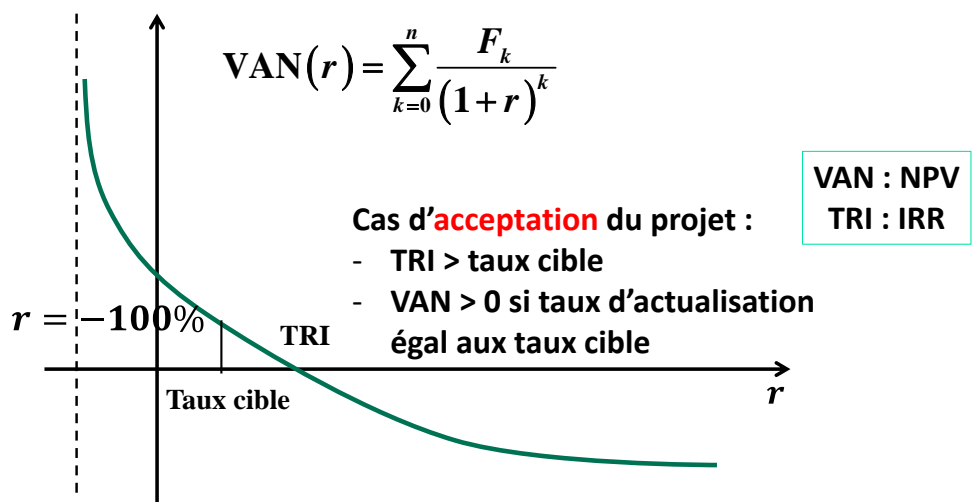
■ Investissements simples



VAN vs TRI

- Comparaison entre les critères de la VAN et du TRI

■ Investissements simples



VAN vs TRI

- Comparaison entre l'utilisation de la VAN et du TRI

■ Critère de la VAN

- Un projet est retenu si sa valeur actuelle nette au taux d'actualisation pertinent est positive
- Taux d'actualisation « pertinent » donné par le MEDAF et le Beta du projet $r = R_f + \beta(E_M - R_f)$
- Beta supposé ici constant au cours du temps

■ Critère du TRI

- Un projet est accepté si son TRI est supérieur à un taux de rentabilité cible
- Le taux de rentabilité cible est le même que celui utilisé pour le calcul de la VAN

■ On s'intéresse ici à des investissements simples

- Unique TRI, VAN fonction décroissante du taux d'actualisation



VAN vs TRI

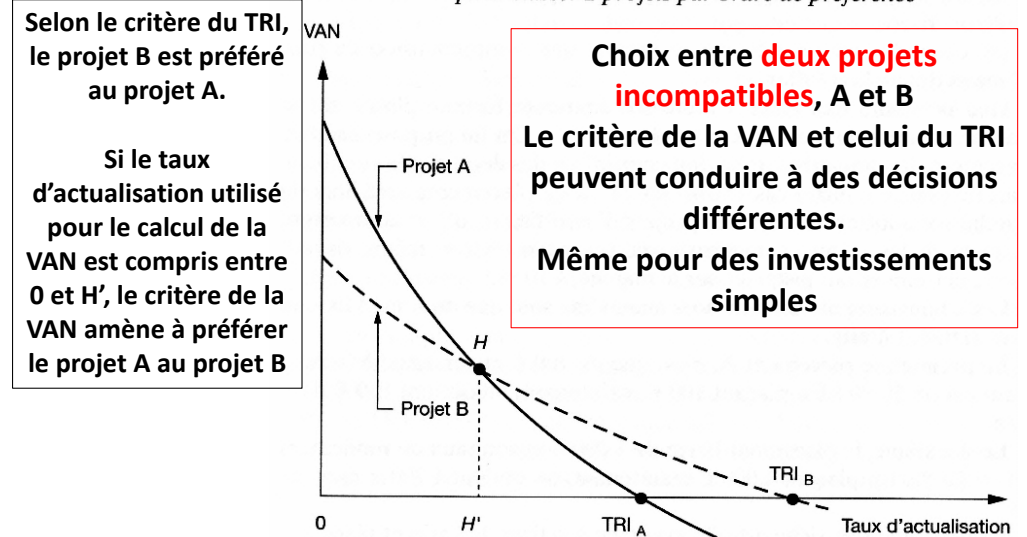
- Comparaison entre les critères de la VAN et du TRI
 - Dans certains cas, comme les investissements simples, les deux critères aboutissent aux mêmes décisions
 - Pour des investissements correspondant à des échéanciers de flux généraux, toutes les situations peuvent se produire
 - Acceptation du projet selon les deux critères
 - Acceptation du projet selon le critère de la VAN et rejet selon le critère du TRI
 - Acceptation du projet selon le critère du TRI et rejet selon le critère de la VAN
 - Rejet des deux projets
 - La situation précédente correspond à la situation d'un seul projet d'investissement
 - La décision à prendre est l'acceptation ou non du projet proposé
 - Que se passe-t-il si un ensemble de projets est considéré ?

45

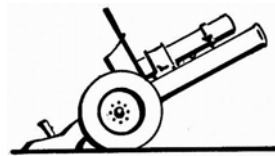
VAN vs TRI



Graphique 6.5 – Comparaison des critères de la VAN et du TRI pour classer 2 projets par ordre de préférence



VAN vs TRI



- Pourquoi deux projets d'investissement seraient-ils incompatibles ?
 - Par exemple, si l'entreprise ne possède pas les ressources nécessaires pour mener l'un et l'autre simultanément
 - Il y a donc trois choix possibles
 - Ne réaliser aucun des deux projets
 - Réaliser le projet {A}
 - Réaliser le projet {B}
 - Dans l'exemple précédent, si le taux d'actualisation est correctement défini, le critère de la VAN est préférable
 - VAN grandeur monétaire qui mesure la création de richesse
 - Pour l'investisseur, choix du projet qui crée le plus de richesse

47

VAN vs TRI



- Choix parmi un ensemble de projets d'investissement
 - Considérons qu'une entreprise considère trois projets d'investissement : {A}, {B} et {C}
 - Le projet {A} mobilise beaucoup de ressources et ne peut pas être mené de front avec {B} ou {C}
 - La VAN du projet {A} est égale à 100
 - Les projets {B} et {C} de taille plus modeste peuvent être menés de front.
 - La VAN du projet {B} est de 60 et celle du projet {C} de 50
 - L'entreprise a intérêt à réaliser {B} et {C}, la VAN étant égale à 110 et à renoncer au projet {A}, dont la VAN prise isolément est plus élevée

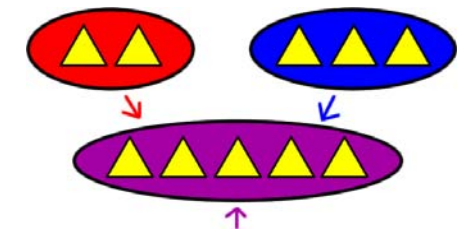
48

VAN vs TRI

- Il faut expliciter la ou les décisions à prendre
- Il peut s'agir de réaliser ou pas un projet d'investissement donné
 - On va alors regarder la suite des cash-flows si le projet n'est pas mis en œuvre
 - La suite des cash-flows si le projet est mis en œuvre
 - Il faut alors examiner la suite de cash-flows obtenue par différence
 - Et examiner si la valeur actuelle nette de cette suite de cash-flows est positive.
 - On suppose implicitement que la décision à prendre est « réaliser l'investissement tout de suite » ou son abandon

49

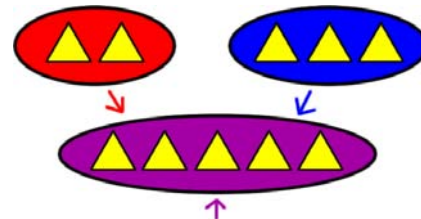
Externalités



- Additivité de la VAN
- $\{A + B\} = \{A\} + \{B\}$?
- Soit deux projets d'investissements $\{A\}$ et $\{B\}$
- $F_{1A}, F_{2A}, \dots, F_{nA}$ cash-flows associés au projet $\{A\}$
- $F_{1B}, F_{2B}, \dots, F_{nB}$ cash-flows associés au projet $\{B\}$
- On suppose que le taux d'actualisation pertinent est le même pour les deux projets, mettons **12%**.
- A-t-on $VAN_{A+B} = VAN_A + VAN_B$?

50

Externalités



- Additivité de la VAN ?
- $\{A + B\} = \{A\} + \{B\}$
- A-t-on $VAN_{A+B} = VAN_A + VAN_B$?
- Si la réalisation **simultanée** des projets $\{A\}$ et $\{B\}$ entraîne des synergies : $F_{A+B,k} > F_{A,k} + F_{B,k}$, $k = 1, \dots, n$
 - À taux d'actualisation inchangé, on a alors $VAN_{A+B} > VAN_A + VAN_B$
- Il se peut que le taux d'actualisation à appliquer à $\{A + B\}$ soit supérieur à **12%** et que $VAN_{A+B} < VAN_A + VAN_B$
 - La modification des cash-flows peut entraîner des modifications des Betas

51

52

- En matière de choix d'investissement, l'accent est mis sur les **flux de trésorerie**
- Les grandeurs comptables ont également une importance
 - *Le résultat net est une variable directement et facilement accessible aux actionnaires et aux analystes financiers*
 - *Signal envoyé aux actionnaires extérieurs à l'entreprise*
 - *L'entreprise a une latitude pour déterminer son résultat*
 - Décision de déprécier certains actifs (impairment)
 - Réalisation de plus ou moins values sur des cessions
 - *Ce signal peut donner des indications sur la performance financière de l'entreprise et les flux de trésorerie futurs*

53

- Les règles comptables ont des conséquences sur les flux de trésorerie
 - *Exemple : dotation aux amortissements*
 - *Ces flux comptables ont une incidence sur les flux de trésorerie*
 - Par exemple, les mécanismes de dotation aux amortissements ont un effet sur le résultat comptable et donc sur l'impôt sur les bénéfices.
 - L'impôt sur les bénéfices étant bien un flux de trésorerie
 - *Si le résultat est négatif, difficulté à verser des dividendes*
 - *Cela peut également suspendre les paiements d'intérêt sur les dettes subordonnées*
 - *Si le résultat est négatif, aucun avantage fiscal à l'endettement*

54

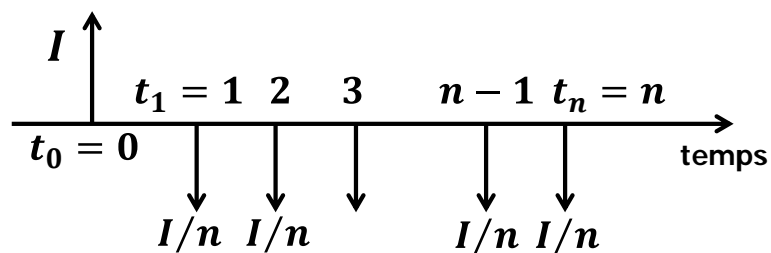
- Améliorer le résultat net en détruisant de la valeur !
 - *1 milliard € amortissement linéaire en dix ans*
 - *Dotation annuelle aux amortissements : 100 millions €*
 - *Cash-flows dégagés à partir de la date $t = 2$: 400 millions €*
 - *À la date $t = 1$, pas de cash-flows*
 - *VAN au taux $r = 15\%$*
 - $$-1000 + \frac{0}{(1+15\%)} + \frac{400}{(1+15\%)^2} + \dots + \frac{400}{(1+15\%)^{10}} = 660$$
 - *Abandonner l'investissement améliore le résultat de 100 millions € à la date $t = 1$*
- Résultat : mauvais indicateur de la performance d'une valeur de croissance

55

- Pourquoi choisir des flux de trésorerie ?
- Exemple de la dotation aux amortissements
- Investissement d'un montant I en $t_0 = 0$
 - *Montant effectivement décaissé par l'investisseur*
 - *N'est pas disponible pour un autre usage*
- Amortissement linéaire sur une durée de n années
 - *Dotation aux amortissements : I/n de $t_1 = 1$ à $t_n = n$*
- Les flux comptables donnent l'illusion que les décaissements liés à l'investissement sont plus tardifs
- Minore le coût effectif pour l'investisseur si $r > 0$
 - *Préférence pour un paiement demain plutôt qu'aujourd'hui*

56

- Les flux comptables donnent l'illusion que les décaissements liés à l'investissement sont plus tardifs



- Ceci minore le coût effectif pour l'investisseur si le taux d'actualisation $r > 0$
 - *Préférence pour un paiement demain plutôt qu'aujourd'hui*

TRI et rentabilités moyennes

- Rentabilités moyennes arithmétiques et géométriques
- cinq années : $t = 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015$
- rentabilités simples d'un portefeuille : $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$

| R_1 | R_2 | R_3 | R_4 | R_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 90% | 10% | 20% | 30% | -90% |

- On laisse de côté la question des dividendes
- **Rentabilité arithmétique moyenne** $\frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{5} = 12,5\%$

61

TRI et rentabilités moyennes

- Que devient un investissement de 1€ fait début 2010
- Valeurs (acquises) de l'investissement :

| R_1 | R_2 | R_3 | R_4 | R_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 90% | 10% | 20% | 30% | -90% |

| 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|------------------|---------------------------|------|------|------|
| $1 + 90\% = 1,9$ | $= 1,9 \times (1 + 10\%)$ | ... | ... | ... |

- **Remarque** $1 + R_t = 1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}}$
- Valeur terminale (2015) : $1,9 \times 1,1 \times 1,2 \times 1,3 \times 0,1 = 0,32604$ euros

62

TRI et rentabilités moyennes

- Un investissement « buy and hold » de $P_0 = 1€$ en 2010, rapporte 0,32604 euros en 2015.
- **Rentabilité annuelle simple** : $\left(\frac{0,32604}{1} - 1\right)/5 = -13,48\%$
- **Rentabilité annuelle composée** : $\left(\frac{0,32604}{1}\right)^{1/5} - 1 = -20,08\%$
 - Elle est telle que $(1 + (-20,08\%))^5 = \frac{0,32604}{1}$
- En termes de choix d'investissement $F_0 = -I = -P_0 = -1€$, $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$, $F_5 = 0,32604 €$
- $-1 + \frac{0,32604}{(1 + (-20,08\%))^5} = 0$
- **-20,08% est le TRI de l'investissement « buy and hold »**

63

TRI et rentabilités moyennes

- **On remarque la rentabilité composée (TRI) est inférieure à la rentabilité arithmétique moyenne**
 - Les mathématiques nous disent qu'effectivement la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique
 - $\left(\frac{P_1}{P_0} \times \frac{P_2}{P_1} \times \frac{P_3}{P_2} \times \frac{P_4}{P_3} \times \frac{P_5}{P_4}\right)^{1/5} \leq \frac{1}{5} \times \left(\frac{P_1}{P_0} + \frac{P_2}{P_1} + \frac{P_3}{P_2} + \frac{P_4}{P_3} + \frac{P_5}{P_4}\right)$
 - Il en résulte que la rentabilité géométrique est toujours supérieure à la rentabilité arithmétique
 - Voyons l'information financière communiquée aux investisseurs : Boursorama, Moringstar, KID/DIC
 - [allianz actions aequitas - FR0000975880](#)
 - FR0010128587 (actions liées au traitement de l'eau)

64

TRI et rentabilité moyenne

- Holding détenant une participation financière dans une filiale
- Cash-flows négatifs : apports en capital
- Cash-flow positifs : remontée de dividendes, rachat d'actions.
- Cas 1 : la filiale est cotée en Bourse, on connaît les prix de l'action
- Cas 2 : la filiale n'est pas cotée. Peut-on avoir une idée de la rentabilité du point de vue de la holding ?
- ...

65

TRI et rentabilité moyenne

- Faisons comme si la filiale était cotée en Bourse
- On note P_t , la valeur boursière à la date t
- $R_t = \frac{P_t + d_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ est le taux de rentabilité de l'investissement entre $t - 1$ et t
 - d_t est le cash-flow net reçu par la holding à la date t
 - $P_0 = 0$ (capitalisation nulle avant création) et $P_T = 0$ (T date de liquidation)
 - $P_{t-1} = \frac{P_t + d_t}{1 + R_t}$
 - Supposons le taux de rentabilité constant $R_t = r$
 - $\sum_{t=0}^T \frac{d_t}{(1+r)^t} = 0$, donc r est un TRI des cash-flows reçus

66

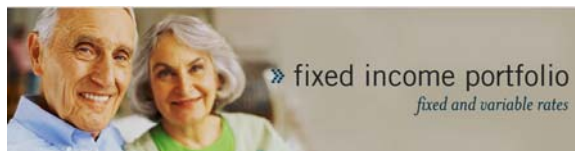
TRI et rentabilité moyenne

- Remarque : on peut interpréter le TRI comme un taux de rentabilité hypothétique s'il avait été constant
- Dans l'exemple précédent, le TRI n'est pas forcément unique
- Si on note $V_T = d_T$, $V_t = d_t + \frac{V_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$, $t = 0, 1, \dots, T - 1$
- V_t est la valeur actuelle des cash-flows reçus postérieurement à t
- Si $V_t \geq 0$, alors $\min_t R_t \leq \text{TRI} \leq \max_t R_t$
 - Peut-on comparer les TRI et les rentabilités moyennes (arithmétique ou géométrique) ?

67

68

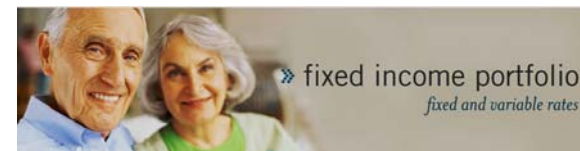
Limites du TRI



- Dans le cas des obligations, le taux de rentabilité interne s'appelle le « taux actuariel »
 - *Yield ou Yield to maturity*
- Disparité des taux actuariels des obligations émises par les états souverains de la zone euro
 - *Et pour une même maturité*
 - *Par exemple, 10 ans*
- Les taux actuariels des obligations d'état permettent-ils de déterminer des taux sans risque ?

69

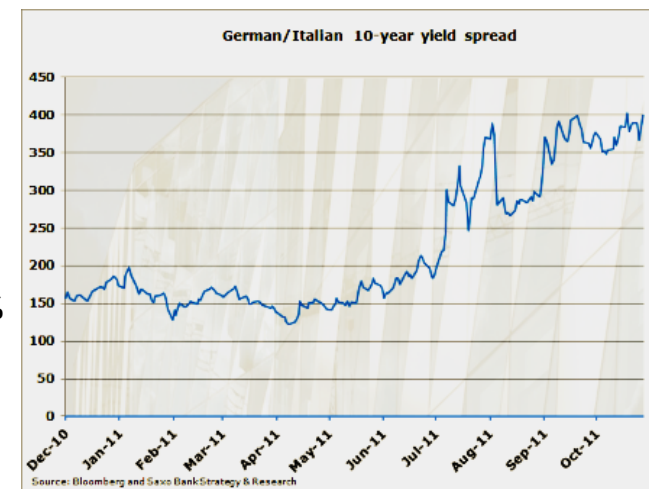
Les limites des TRI



- Écart de taux de rentabilité interne des obligations à 10 ans
 - *Allemagne contre Italie*

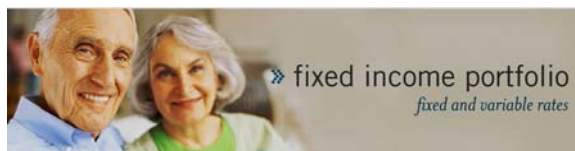
De décembre 2010
À novembre 2011

**En ordonnée, l'écart
entre les TRI en points
de base.
100 points de base = 1%**



70

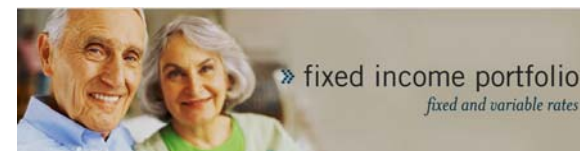
Les limites des TRI



- Le TRI des obligations italiennes en euros à 10 ans à l'automne 2011 était d'environ de 6%
- Celui des obligations allemandes est environ de 2%
- Faut-il en conclure qu'il faut acheter des obligations italiennes ?
 - *Application du critère du TRI ?*
 - *Où est passé le risque « de défaut » de l'émetteur dans le calcul du TRI ?*
 - *Quels sont les flux de trésorerie utilisés pour calculer le TRI ?*
 - *Dans l'approche utilisée sur les marchés obligataires, on utilise les flux associés à l'obligation en cas de « non-défait »*
 - Ou flux contractuels

71

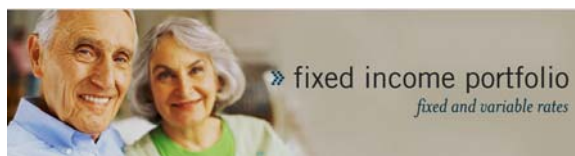
Les limites des TRI



- En cas de défaut ou de restructuration de la dette d'un état en difficulté financière
- Les flux de trésorerie effectivement reçus par les investisseurs ne sont pas ceux qui étaient effectivement prévus
 - *Exemple : répudiation totale de la dette*
 - *L'emprunteur n'effectue aucun des versements prévus*
 - *Les investisseurs obligataires ne reçoivent plus aucun flux après la date de répudiation de la dette.*
 - *Pour une date de paiement de coupon, le vrai cash-flow n'est pas le coupon promis mais*
 - Le coupon promis si la date de répudiation de la dette est postérieure à la date de paiement
 - Zéro, sinon

72

Les limites des TRI



■ Suite de l'exemple précédent

- *Le taux actuariel est un taux de rentabilité interne construit à partir d'un échéancier de flux optimiste pour l'investisseur*
- *Correspondant au scénario de non-défaut*
- *C'est même le scénario le plus optimiste*
- *Les cash-flows effectifs sont inférieurs ou égaux aux cash-flows contractuels*
- *Les TRI calculés à partir des cash-flows contractuels sont surévalués*
 - Ceci va expliquer une partie de l'écart des TRI entre les emprunts allemands et italiens
- *Les vrais cash-flows sont aléatoires à cause du risque de défaut*

73

Les limites des TRI

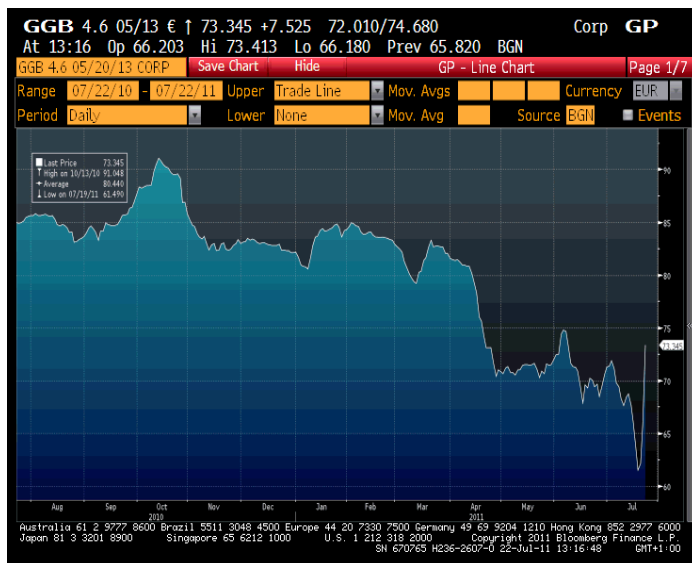
- Les vrais cash-flows des obligations sont aléatoires
 - Difficulté pratique de calcul du TRI
 - TRI faciles à calculer à partir des cash-flows contractuels déterministes
 - Pas de modèle probabiliste pour la survenance et la gravité du défaut
- *Importance de connaître les limites des pratiques de marché*
 - **Ce n'est pas le critère du TRI qui est en cause**
 - **Mais l'analyse des flux de trésorerie**
- *Problématique répétitive*
 - Crédits subprime, emprunts toxiques des collectivités territoriales,
 - TRI calculés à partir de flux de trésorerie dans des scénarios particuliers et biaisés.

74

Les limites des TRI

Ne pas minorer les risques des obligations (souveraines ou corporate)

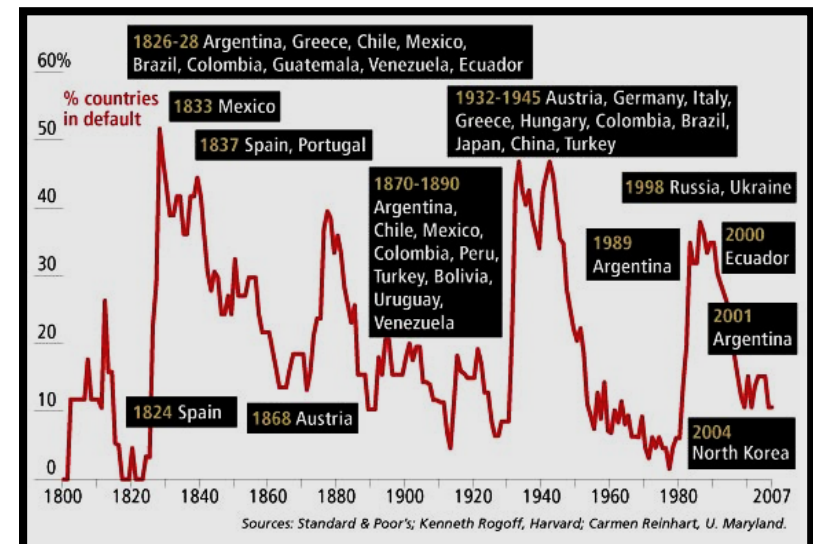
Obligation d'état grecque
Coupon 4,6%
Échéance 05/13
Juillet 2010 – Juillet 2011
Plus haut 90% du nominal
Plus bas 62% du nominal
Source Bloomberg



75

Les limites du TRI

- Les défauts sur les dettes publiques sont monnaie courante



76

Les limites des TRI

- Ne pas minorer le risque de défaut d'un Etat



Emprunt russe

Justification économique de la VAN (cash-flows certains)

■ Justification économique de la VAN

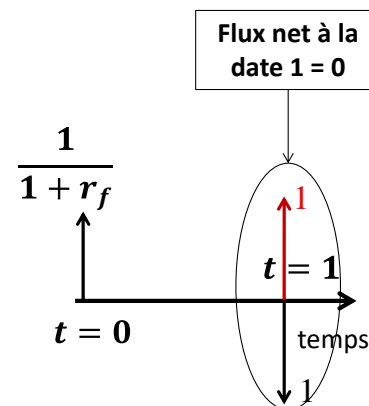
- *Raisonnement par « absence d'opportunités d'arbitrage »*
- *Pour simplifier la présentation, considérons deux dates*
 - $t = 0$, aujourd'hui, $t = 1$, demain
- *On suppose que l'on peut emprunter et prêter auprès d'une « banque » à un taux (simple) r_f*
 - Pas de risque de défaut, de liquidité, de coûts liés à ces opérations financières
 - Ce marché de prêts/emprunts « sans frictions » va servir de marché « pivot ».
- *Considérons un flux de 1 (une unité monétaire) reçu à la date 1.*
- *Empruntons $1/(1 + r_f)$ à la banque à la date 0*

81

Justification économique de la VAN (cash-flows certains)

■ Justification économique de la VAN

- *À la date 1, il faut rembourser* $\frac{1}{1 + r_f} \times (1 + r_f) = 1$ *à la banque*
montant emprunté
- *Flux de trésorerie*
- *En rouge, le flux initial reçu de 1 à la date 1, en noir les flux échangés avec la banque*
- *Le flux net à la date 1 est égal à :*
 - $+1 - 1 = 0$
- *Au total, on dispose d'une somme de $1/(1 + r_f)$*
 - Et il n'y a aucun flux futur



82



83

Cash-flows certains



<http://www.treasury.gov/Pages/default.aspx>

■ Interprétation

- *Grâce à une opération élémentaire*
 - Emprunt simple auprès de la « banque »
- *On a « transformé » un flux à recevoir à la date 1 en une somme immédiatement disponible*
- *Égale à la valeur actuelle du flux à recevoir*
- *Le taux d'actualisation est le taux de prêt/emprunt à la « banque »*
- *C'est le principe de l'escompte, des lettres de crédit : on peut « mobiliser » une créance (la promesse d'un paiement futur) contre un paiement aujourd'hui*

84

VAN / Cash-flows certains



- Notons P , le prix à la date 0, du titre précédent
- Montrons qu'en l'absence de frictions et d'opportunités d'arbitrage, on a nécessairement :

$$P = \frac{1}{1 + r_f}$$

■ Raisonnement par l'absurde

- Supposons que : $P < 1/(1 + r_f)$
- Réalisons les opérations suivantes :
 - 1) Achat du titre : décaissement de P à la date 0, encaissement de 1 à la date 1
 - 2) Emprunt de $1/(1 + r_f)$ à la banque : encaissement de $1/(1 + r_f)$ à la date 0, décaissement de 1 à la date 1

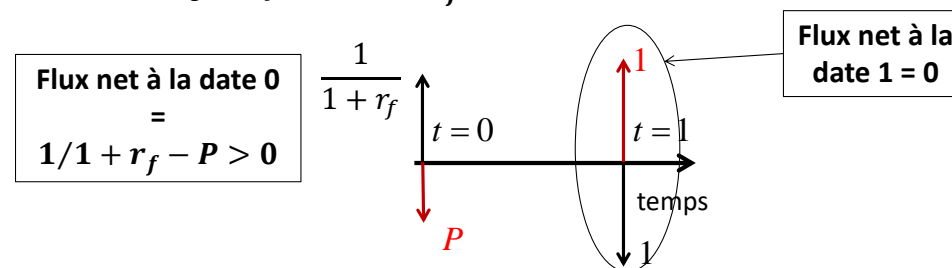
85

VAN / Cash-flows certains



■ Suite du raisonnement précédent

- Représentons les flux de trésorerie associés aux deux opérations précédentes
 - En rouge, les flux liés à l'achat du zéro-coupon
 - En noir, les flux liés à l'emprunt auprès de la banque
- Le solde des opérations financières fait apparaître un flux positif de $1/(1 + r_f) - P$



86

Cash-flows certains



■ Il s'agit d'une opportunité d'arbitrage

- Arbitrage entre le marché de l'actif zéro-coupon et le marché des prêts/emprunts à la banque
- Permettant de réaliser un profit immédiat, sans risque, sans mise de fonds, sans aucun engagement futur
- Techniquement, une « opportunité d'arbitrage » est un échéancier de flux positifs ou nuls
 - Avec au moins un flux strictement positif
- S'il existe une opportunité d'arbitrage, la demande est infinie
 - Incompatibilité avec l'équilibre, « no free-lunch »
- D'où l'hypothèse couramment faite d'absence d'opportunités d'arbitrage

87

Cash-flows certains



■ Enrichissement sans cause de l'« arbitrageur » ?

- « arbitrageur » : celui qui réalise l'opération financière précédente.
- Ici, par opposition à « spéculateur », puisqu'il n'y a aucune prise de risque.
 - Terminologies « non déposées »
- L'arbitrageur a une fonction économique de maintien de la cohérence du système de prix
 - Garantie donnée aux investisseurs finaux de payer le même prix pour deux échéanciers de flux futurs identiques
- Mais si les marchés sont efficients dans le sens précédent, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage et donc pas d'arbitrageurs
 - Ce qui résout la question morale posée plus haut...

88

Cash-flows certains



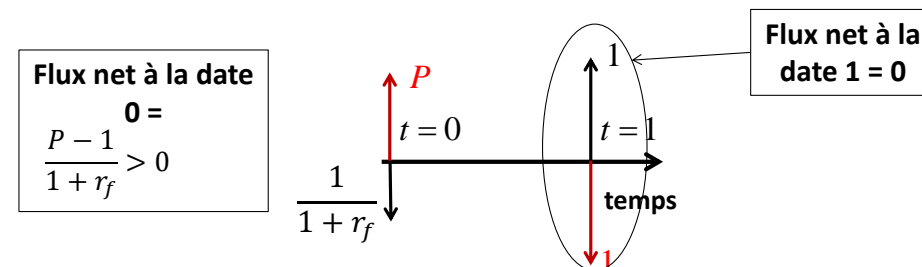
- Reprenons le raisonnement précédent
 - Si $P < 1/(1 + r_f)$, il est possible de construire une opportunité d'arbitrage
 - Contradiction avec l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, donc nécessairement : $P \geq 1/(1 + r_f)$
 - Supposons maintenant que $P > 1/(1 + r_f)$
 - Le prix P du zéro-coupon est élevé
 - Il faut donc vendre cet actif
 - Toujours vendre ce qui est cher et acheter ce qui est bon marché
 - On va réaliser des opérations financières symétriques à celles effectuées précédemment
 - 1) vente de l'actif zéro-coupon
 - 2) prêt d'un montant $1/(1 + R_F)$ à la banque

89

Cash-flows certains



- Flux de trésorerie associés aux opérations financières précédentes
 - En rouge, les flux liés à la vente du titre
 - En noir, les flux liés au prêt à la banque



- Le solde net des flux de trésorerie fait apparaître une opportunité d'arbitrage

90

Cash-flows certains



- Si l'on suppose qu'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage, la situation précédente est impossible
- On ne peut pas avoir : $P - 1/(1 + r_f) > 0$
- Donc, $P \leq 1/(1 + r_f)$
- Au total, on doit avoir : $P \leq 1/(1 + r_f)$ et $P \geq 1/(1 + r_f)$
- Soit $P = 1/(1 + r_f)$
- Le seul prix de l'actif zéro-coupon compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage est la valeur actuelle du flux futur (1)
- Le taux d'actualisation étant le taux de prêt/emprunt sans risque auprès de la « banque »
 - Cash-flow associé au zéro-coupon : aucun risque

91

Justification économique de la VAN

- Il ne peut exister qu'un taux sans risque pour une maturité donnée
 - En l'absence d'opportunités d'arbitrage
 - Sinon, on emprunterait au taux bas et prêter au taux élevé
- Le même raisonnement montre qu'il n'existe qu'un seul prix aujourd'hui pour un actif donné
 - Par exemple une action
 - Loi du prix unique dans des marchés sans frictions
 - S'il existe deux prix différents au même moment pour le même actif, on peut acheter l'actif au prix bas, le revendre au prix haut
 - Il s'agit d'une opportunité d'arbitrage

92

- Prix des coupons strips et des principal strips aux U.S.

