Interpolation aux abscisses de Tchebychev

Préliminaires

Les fonctions de Tchebychev $\mathcal{T}_k(x)$ sont définies, pour $k \geq 0$, de la manière suivante:

$$\mathcal{T}_k(x) = \cos(k \text{ arccos}(x)), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

1. Calculer $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

2. Quel est le maximum de $|\mathcal{T}_k(x)|$ sur $[-1, 1]$? Pour quels points est-il atteint?

3. Montrer que pour $k \geq 1$ on la relation de récurrence suivante

$$\mathcal{T}_{k+1}(x) = 2x\mathcal{T}_k(x) - \mathcal{T}_{k-1}(x).$$

indication: on pourra utiliser un développement de cos$((k \pm 1)\theta)$ en fonction de cos$(k\theta)$.

4. Montrer que $\mathcal{T}_{k+1}(x)$ est un polynôme. Quel est son degré, que vaut son coefficient directeur? En déduire que les $(k + 1)$ racines distinctes de $\mathcal{T}_{k+1}(x)$ sont les suivantes:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i + 1}{2k + 2}\pi\right), \quad 0 \leq i \leq k.$$

On les appelle les **abscisses de Tchebychev**.

Erreur d'interpolation

Soit une fonction f de classe C^{n+1}, interpolée par un polynôme Φ de degré n en $n+1$ points $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$:

$$\Phi(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Les points d'interpolation sont choisis comme étant les racines du polynôme de Tchebychev, $\mathcal{T}_{n+1}(x)$.

5. On considère ici que $[a, b] = [-1, 1]$. Exprimer l'erreur d'interpolation en fonction de $\mathcal{T}_{n+1}(x)$.

6. On considère ici que $[a, b]$ est quelconque. Montrer que

$$\|f(x) - \Phi(x)\|_\infty \leq \frac{2}{(n + 1)!}\left(\frac{b - a}{4}\right)^{n+1} \|f^{n+1}\|_\infty.$$

indication: on pourra utiliser un changement affine de variable et choisir les points d'interpolation comme étant les images, par ce changement de variable, des racines du polynôme de Tchebychev.
