Théorie des langages

Lionel Rieg (TL1)
Marie-Laure Potet (TL1)

Xavier Nicollin (TL2)

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

Année 2022-2023

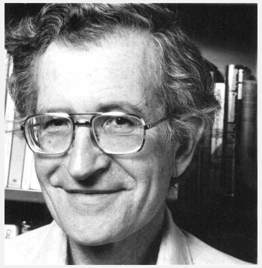
Motivations et objectifs

- Théorie des langages : étude des langages formels
- Langage formel : ensemble de *mots, phrases, textes, énoncés* défini « formellement », sans considération sémantique a priori
- Objectif : trouver des moyens de *définir* des langages formels, et des moyens de les *reconnaître* (savoir si un mot appartient au langage)

À quoi ça sert ?

- Définition de langages de programmation
  $\rightsquigarrow$ Analyse lexicale, syntaxique d'un programme (cf. TL2)
- Calculabilité, complexité (cf. TL2)
- Description de la structure de documents XML
- Recherche de texte dans un document
- Génération automatique d'images
- Bioinformatique
- Traitement automatique des langues naturelles
- Cryptographie
- Contrôle de systèmes
- ...

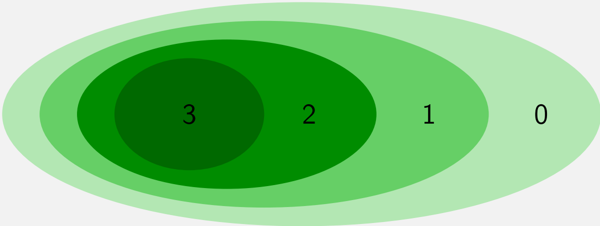
La référence



Noam Chomsky (1928-), États-Unis

- Linguiste, philosophe, logicien, activiste
- 1956 : définition des grammaires formelles
  - Ensemble de règles permettant d'engendrer des langages formels
  - Classification des grammaires (et des langages engendrés) en fonction de la forme de leurs règles
  - **Hiérarchie de Chomsky**

Hiérarchie de Chomsky



Type	Langage	Engendré par	Reconnu par
0	Calculatoirement énumérable	Grammaire générale	**Machine de Turing**
1	Sous-contexte	Grammaire sous-contexte	Machine de Turing linéairement bornée
2	Hors-contexte	**Grammaire hors-contexte**	Automate à pile
3	Régulier	Grammaire linéaire à droite	**Automate fini**

Description du cours de TL1

- 11 CM en amphis, 10 séances de TD, 1 séance de TP/projet
  - 7 CM sur les langages réguliers et automates
  - 4 CM sur les grammaires
  - Horaires : on commence **à l'heure**, on finit 10 minutes en avance
- Matériel disponible en ligne sur Chamilo
  - Quizz (non notés, ouverts 15 jours après chaque cours)
  - Diapos à trous sans animation (disponible à l'avance)
  - Diapos (en ligne chaque semaine après le 2e CM)
  - Sujets d'exercices de TD (également en papier)
  - Polycopié
- Permanences (*office hours*)
  - 1h30 par groupe
  - Chaque intervenant de TD place sa permanence

Théorie des langages 1

Cours 1 : Vocabulaires, mots, langages, induction

L. Rieg

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

Année 2022-2023

Définitions

Définitions (Vocabulaire, mot)

- Un vocabulaire (ou alphabet) est un ensemble **fini** quelconque.
  Ses éléments sont appelés des symboles (ou lettres).
- Un mot sur un vocabulaire V est une séquence finie de symboles de V.

Exemples

V	mot sur V	notations abrégées
$\{a, b, \ldots, z\}$	$[b, r, o, c, c, c, o, l, i]$	$brocccoli$, $broc^3oli$
$\{0, \ldots, 9\}$	$[2, 0, 2, 0]$	2020, $(20)^2$
$\{a, b, ab\}$	$[ab]$, $[a, b]$	ab ?

Définition

- On note ε le mot correspondant à la séquence vide (« *mot vide* »).

Définitions (suite)

Définition (longueur d'un mot)

Soit V un vocabulaire et soit $u = u_1 \cdots u_n$ un mot sur V.
La longueur de u est alors n, et on note $|u| = n$.

Remarque

En particulier, on a $|\varepsilon| = 0$.

Définitions

- Pour $n \in \mathbb{N}$, V^n est l'ensemble des mots sur V de longueur n.
  Par abus de notation, on identifie V et V^1.
- V^+ est l'ensemble des mots sur V de longueur au moins 1.
- V^* est l'ensemble des mots sur V.
- Pour $w \in V^*$ et $a \in V$, $|w|_a$ est le nombre d'occurrences de a dans w.

Exemples

Exemples

- Soient $V = \{a, b\}$ et $w = ababbb$.
- Soient $V = \{cd, dc\}$ et $w = cdcddc$.

Proposition

On a les égalités suivantes :

$$V^* = \bigcup_{n \geq 0} V^n$$
$$V^+ = \bigcup_{n > 0} V^n$$

Concaténation

Définition

Soit V un vocabulaire, $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_m$ deux mots de V^*.
La concaténation de u et v, notée $u.v$, est le mot de V^* défini par

$$u.v = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$$

Exemple

Soient $u = bac$ et $v = aacb$.

Théorème

$(V^*, ., \varepsilon)$ *est un monoïde (. associative,* ε *élément neutre).*

Notation

On pourra noter uv *au lieu de* $u.v$.

Concaténation (suite)

Proposition

Si $|u| = i$ *et* $|v| = j$*, alors* $|uv| = i + j$.

Définitions

Soient $v, z \in V^*$. On dit que v est un :

- sous-mot de z ssi $\exists u, w \in V^*$ tels que $z = u.v.w$
- préfixe de z ssi $\exists w \in V^*$ tel que $z = v.w$
- suffixe de z ssi $\exists u \in V^*$ tel que $z = u.v$

Langages

Définition

On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^*.

Exemples

- $\emptyset \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a, b\}^* \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{abab, ab, abba\} \subseteq \{a, b\}^*$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$ $\quad (\{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\})$
- « Ensemble des programmes Python » $\subseteq$ Unicode*

Remarque

On s'intéressera en TL à définir et reconnaître des sous-ensembles de V^*.

Comment définir un langage / un ensemble ?

- Par extension
  - On énumère les éléments de l'ensemble.
  - $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
  - $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
- Par compréhension
  - On décrit les caractéristiques des éléments de l'ensemble.
  - $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$
- Par induction structurelle
  - On explique comment construire les éléments de l'ensemble.
  - Fréquemment utilisé en informatique
  - P est le **plus petit** ensemble (pour l'inclusion) tel que :
    - $0 \in P$, et
    - si $n \in P$ alors $n + 2 \in P$.

Définition par induction structurelle

Principe général : on définit un ensemble en spécifiant :

- Des cas de base : quels sont les éléments les « plus simples » de l'ensemble ?
- Des règles de construction : comment peut-on, en partant d'éléments de l'ensemble, en construire de nouveaux ?

Exemples

Définitions inductives de V^* et $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

Définition générale

Définition (Ensemble inductif)

Soit U un ensemble ; définir un ensemble $E \subseteq U$ par induction structurelle consiste à donner :

- un ensemble non vide d'atomes $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq U$
- un ensemble $K = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ de constructeurs inductifs, où $\kappa_i : U^{a_i} \to U$ et $a_i > 0$ pour tout i (a_i : arité de κ_i)

E est alors le plus petit ensemble tel que :

- $B \subseteq E$
- $\forall i \in [1, m]$, si $(e_1, \dots, e_{a_i}) \in E^{a_i}$, alors $\kappa_i(e_1, \dots, e_{a_i}) \in E$

Exemples

V^*, listes, arbres, formules logiques, …

Exemple

Posons $V = \{a, b\}$, et soit L_0 le langage défini par induction structurelle de la façon suivante :

- Base : $\varepsilon \in L_0$ $\quad (b_1 = \varepsilon)$
- Induction (constructeurs) : si $u, v \in L_0$ alors
  - $a\,u\,b\,v \in L_0$ $\quad (\kappa_1(u, v) = a\,u\,b\,v)$
  - $b\,u\,a\,v \in L_0$ $\quad (\kappa_2(u, v) = b\,u\,a\,v)$

Quelques mots dans L_0 :

$$\varepsilon,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ bbaaaabb$$

Exercice : construire les trois derniers mots

Énumération d'un ensemble inductif

Théorème (Admis)

Soit E un ensemble défini par induction sur l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K.
Alors $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$, où la suite (E_n) est définie par :

$$\begin{aligned} E_0 &\stackrel{def}{=} B, \\ E_{n+1} &\stackrel{def}{=} E_n \cup \{\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}) \mid \kappa_i \in K, e_1, \ldots, e_{a_i} \in E_n\} \end{aligned}$$

algorithme $E =$
  $n \leftarrow 0,\ E_0 \leftarrow B$
  répéter
    $E_{n+1} \leftarrow E_n \cup \{\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}) \mid \kappa_i \in K, e_1, \ldots, e_{a_i} \in E_n\}$
    $n \leftarrow n + 1$
  jusqu'à $E_{n+1} = E_n$
  renvoyer E_n

Question : Est-ce que ça termine toujours ?

Fonction définie inductivement

Définition

Soit E un ensemble défini inductivement par l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K, et soit U' un ensemble quelconque.
Pour définir une fonction $f : E \to U'$, il suffit d'expliciter :

- les images des atomes $f(b_1), \ldots, f(b_n)$;
- la façon dont la fonction « interagit » avec les constructeurs : comment exprimer $f(\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}))$ en fonction de $f(e_1), \ldots, f(e_{a_i})$.

Remarque : $f(E)$ est un ensemble inductif !

Exemple (Longueur d'un mot)

$|\_| : V^* \to \mathbb{N}$

- Cas de base : $|\varepsilon| = 0$
- Constructeurs inductifs : $|xw| = 1 + |w|$

Exemples

Soient les fonctions dl et pa : $L_0 \to \mathbb{N}$ telles que $\forall w \in L_0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{dl}(w) &= |w|_a \\ \mathrm{pa}(w) &= \max\{|x| \mid x \text{ préfixe de } w \wedge x \in \{a\}^*\} \end{aligned}$$

Exercice : définir les fonctions dl et pa par induction structurelle
L_0 est défini par 1 cas de base et 2 constructeurs donc 3 cas à considérer.

Preuve par induction structurelle

Définition

Soit E un ensemble défini inductivement par l'ensemble d'atomes B et l'ensemble de constructeurs K, et soit P une propriété sur E.
Pour montrer que $P(e)$ est vraie pour tout $e \in E$, on peut :

- montrer que $P(b_1), \ldots, P(b_n)$ sont vrais ;
- pour $i \in [1, m]$, montrer que si $P(e_1), \ldots, P(e_{a_i})$ sont tous vrais, alors $P(\kappa_i(e_1, \ldots, e_{a_i}))$ l'est également.

Remarque

La preuve par induction structurelle est une généralisation de la preuve par récurrence :

- *Base :* 0
- *Constructeur : la fonction successeur* $s : n \mapsto n + 1$

Application

Soit $M_0 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que $L_0 \subseteq M_0$.

Exercice($\star$) Montrer que $M_0 \subseteq L_0$.