Devoir à la maison de "Processus Stochastiques et Applications Financières"

à rendre pour le 6 décembre 2023

La notation dépendra grandement de la qualité de la rédaction. Les questions étoilées sont plus longues ou plus difficiles.

Exercice 1: La marche aléatoire symétrique et son temps de sortie d'une région.

Dans cet exercice on considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de zéro comme rencontrée à diverses reprises en cours et en TD. On rappelle sa définition.

On a (ξ_i) suite i.i.d. de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi donnée par $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On considère le processus $(S_n)_{n \geq 0}$ défini par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ \forall n \geq 1, \quad S_0 = 0.$$

1) Rappelez brièvement pourquoi $(S_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, et précisez en particulier par rapport à quelle filtration $(\mathcal{F}_n)$ c'est le cas.

2) Rappelez pourquoi (S_n) est de carré intégrable. Que pouvez-vous dire du processus $(S_n^2 - n)$?

NB: Pour les questions 1) et 2) on ne demande pas de refaire des calculs qui auraient pu être faits en cours ou TD. Bien au contraire il s'agit d'aller vite et on pourra citer le cours ou les exercices traités en TD pour justifier sa réponse.

3*) Montrer que le processus $(S_n^3 - 3nS_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

Dans la suite de l'exercice on fixe $a, b \in \mathbb{N}^*$ et on considère T le temps (aléatoire) de sortie de (S_n) de la région $[\![-a+1, b-1]\!]$. C'est à dire que T est défini par

$$T = \inf\{\, n \geq 0 : \ \ S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

On admet le résultat suivant

$$T < \infty \quad \mathbb{P} - \text{p.s.} \tag{1}$$

On va s'intéresser à diverses probabilités, espérances, ou espérances conditionnelles mettant en jeu (S_n) ou T.

4) Justifier que T est un temps d'arrêt (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ identifiée à la question 1)).

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $T \wedge n = \min(n, T)$ est un temps d'arrêt borné.

6) En déduire en faisant attention à la justification que $\mathbb{E}(S_{T \wedge n}) = 0$, pour tout $n \geq 0$.

7) En déduire (on fera toujours attention à la justification) que $\mathbb{E}(S_T) = 0$.

8*) Donner une autre expression de $\mathbb{E}(S_T)$ et en déduire que

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b} \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(S_T = -a) = \frac{b}{a+b}.$$

9*) En vous inspirant des questions 6) à 8), mais en vous aidant d'une autre martingale montrez que $\mathbb{E}(T) = ab$.

10)** Montrer que

$$\mathbb{E}(\,T\,|S_T = b) = \frac{1}{3}(b^2 + 2ab) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\,T\,|S_T = -a) = \frac{1}{3}(a^2 + 2ab)$$

(on rappelle que pour X v.a. et $A \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathbb{P}(A) > 0$ on note $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A]/\mathbb{P}(A)$; c'est l'espérance de X sachant l'évènement A).

Exercice 2: Options américaines et européennes (source: inspiré en partie de l'examen de 2022/2023).

Dans cet exercice on cherche à comparer le prix des options dites "européennes" vues en cours à celui des options dites "américaines".

On note les indices temporels par la lettre t. Par exemple, pour une échéance $0 < T < \infty$ on considérera $t \in [0, T]$. Cela sous-entend qu'on est en temps continu et on pourra écrire les éventuels facteurs de capitalisation en conséquence (comme dans la section 5.2 du cours). Cependant considérer qu'on est en temps discret ne changerait absolument rien à la démarche de l'exercice.

Les options européennes paient à leur détenteur un certain pay-off h à une certaine échéance T (la définition de la variable aléatoire h et l'échéance sont convenues à l'avance).

Par opposition le fonctionnement d'une option américaine est le suivant: une échéance $0 < T < \infty$ et un processus adapté $G = (G_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs réelles (le processus "pay-off ") sont donnés. Une option américaine définie par G est un contrat passé à l'instant $t = 0$ entre l'acheteur et le vendeur de l'option, qui donne à l'acheteur la possibilité d'empocher la richesse G_t s'il décide d'exercer l'option à l'instant $0 \leq t \leq T$. Il y a bien sûr au plus un instant d'exercice sur la durée de vie de l'option (i.e. sur l'intervalle $[0, T]$): s'il y en a un l'option est clôturée à cet instant d'exercice, mais il se peut aussi qu'il n'y en ait pas (dans ce cas l'option se termine à l'échéance T, sans qu'il y ait eu exercice).

Par exemple si $G_t = (S_t - K)_+$ l'option est un "Call américain" (si l'acheteur exerce en T cela lui rapporte la même chose que le Call européen vu en cours; mais il peut décider d'exercer à tout moment plus avantageux avant l'échéance...).

Soient donc une échéance $0 < T < \infty$ et un processus pay-off $G = (G_t)_{0 \leq t \leq T}$. On note X_t le prix à l'instant $0 \leq t \leq T$ de l'option américaine définie par G. On note de plus x_t le prix à l'instant $0 \leq t \leq T$ d'une option européenne payant le pay-off $h = G_T$ à l'échéance T.

Dans les questions 1) à 2) on cherche à montrer la proposition 1 ci-dessous.

Proposition 1 *En AOA on a $X_t \geq x_t$ pour tout $0 \leq t \leq T$.*
De plus, si $x_t \geq G_t$ pour tout $0 \leq t \leq T$, alors on a $x_t = X_t$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

1) Montrer la première partie de la proposition 1 par un raisonnement par arbitrage.

2*) Pour la deuxième partie, supposer que $x_t \geq G_t$ pour tout $0 \leq t \leq T$, que $X_{t'} > x_{t'}$ pour une certain $0 \leq t' \leq T$, et relever une possibilité d'arbitrage. Conclure.

Indication: On peut à tout instant t revendre une option qui serait en notre possession à son prix à l'instant t.

Puis on cherche à comparer les prix des Calls américain et européen.

3) Montrer que $(S_t - K)_+ \leq c_t$ pour tout $t \in [0, T]$ où on a noté S_t le prix à l'instant t d'un sous-jacent et c_t le prix l'instant t d'un Call européen portant sur ce sous-jacent.

4) En déduire que le prix d'un Call européen est égal à celui d'un Call américain.

Exercice 3: une autre vision du problème de valorisation dans le modèle CRR

Nous rappelons les éléments de définition du modèle discret CRR, où un horizon temporel $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

On note r le rendement sans risque sur une période de temps et $S_n^0 = (1+r)^n$ le prix à l'instant n de l'actif sans risque.

Le prix à l'instant n de l'actif risqué est noté S_n. La dynamique du processus $S = (S_n)_{0\leq n\leq N}$ est construite de la façon suivante.

On a $-1 < a < b$. On suppose $a < r < b$. On définit $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sur $(\Omega, \mathcal{F})$ on a une probabilité historique $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.

On a une suite i.i.d. $(T_n)_{n=1}^N$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$ (on a $T_n(\omega) = \omega_n$ pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$). On note $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et

$$\forall 1 \leq n \leq N, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(T_i,\, 1 \leq i \leq n).$$

La valeur initiale S_0 est déterministe. On a $S_{n+1} = T_{n+1}S_n$ pour $0 \leq n \leq N-1$.

Pour fixer les idées on va chercher à établir une formule de valorisation (européenne) d'options vanille portant sur l'actif risqué décrit par ce modèle (i.e. dont le pay-off à l'échéance N dépend seulement de S_N), mais par une méthode légèrement différente de celle vue en cours.

Merci donc de respecter le jeu: il ne faut pas invoquer les résultats du cours qu'on cherche à démontrer ici.

1) Rappeler la définition d'une stratégie autofinancée $H = (H^0, H^1) = ((H_n^0, H_n^1))_{0\leq n\leq N}$ et la valeur du portefeuille associé $V_n(H)$, en insistant sur le caractère prévisible ou adapté de H^1 et H^0. Ici les notations H^1 et H^0 sont celles vues en amphi. Par exemple H_n^1 désigne la quantité d'actif risqué détenue sur la période $(n-1, n]$ (le processus H^0 concerne quant à lui la quantité d'actif sans risque).

2*) Montrer que pour un tel portefeuille autofinancé on a

$$\forall 0 \leq n < N, \quad V_{n+1}(H) = H_{n+1}^1 S_{n+1} + (1+r)(V_n(H) - H_{n+1}^1 S_n). \tag{2}$$

3) Interpréter l'équation (2) par une phrase du type "la valeur à l'instant $n+1$ d'un portefeuille autofinancé est égale à ... plus ... ".

4) En déduire qu'on a

$$\forall 0 \leq n < N, \quad V_{n+1}(H) = H_{n+1}^1 T_{n+1} S_n + (1+r)(V_n(H) - H_{n+1}^1 S_n). \tag{3}$$

L'équation (3) définit désormais dans ce problème la notion d'autofinancement (on oublie la définition rappelée en 1)).

Pour tout $0 \leq n \leq N$ on note $\tilde{V}_n(H) = V_n(H)/S_n^0$. On se met en quête d'une mesure de probabilités $\mathbb{P}^*$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $(\tilde{V}_n(H))_{0\leq 0\leq N}$, avec H autofinancée, est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale sous $\mathbb{P}^*$.

5*) Montrer (**sans se servir de la proposition 5.4.1 du cours, ni faire comme dans le TD 9 Ex. 1**) qu'une condition suffisante pour que $(\tilde{V}_n(H))_{0\leq 0\leq N}$ (avec H autofinancée) soit une $(\mathcal{F}_n)$-martingale sous $\mathbb{P}^*$ est donnée par

$$\mathbb{E}^*(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r. \tag{4}$$

On admet pour la suite du problème qu'il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante.

6) Rappeler les éléments vus en TD qui nous assurent qu'une mesure de probabilités $\mathbb{P}^*$ satisfaisant (4) existe et est unique (il ne s'agit pas de refaire tous les calculs mais de citer les résultats à bon escient).

7) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Supposons qu'on puisse trouver un portefeuille (H^0, H^1), admissible et autofinancé au sens de l'équation (3), tel que $V_N(H) = f(S_N)$ p.s. Montrer que le prix à l'instant $0 \leq n \leq N$ du produit payant $f(S_N)$ à l'échéance N est donné par

$$(1+r)^{n-N}\mathbb{E}^*(f(S_N)|\mathcal{F}_n),$$

avec le $\mathbb{P}^*$ évoqué dans la question 6). On fera bien attention à la justification financière de la réponse.