Correction TD 6 Probas

Rédacteurs:

- Romain Pigret-Cadou
- Léon Roussel
- Arthur Sarry

Questions de cours

Définition de la **fonction de répartition** d'une variable aléatoire réelle :

On dit que la loi d'une variable aléatoire réelle X est caractérisée par la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = P(X \leq t)$$

avec :

$F(t) \in [0, 1]$

$lim_{-\infty} F(t) = 0$

$lim_{+\infty} F(t) = 1$

F est croissante

$\forall s < t, P(X \in [s, t]) = F(t) - F(s)$

Théorème de transfert pour une loi continue :

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f et ϕ une fonction soit positive, soit telle que $\phi(X)$ est intégrable.
Alors :

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \cdot f(x) dx$$

Définition de la **loi exponentielle** de paramètre λ>0 :

Soit X une variablé aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ>0.

La fonction de densité de X est :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Exercice 1

Question 1

Soit P l'événement *"la pièce fait pile"*.

On a alors $X = U \cdot 1_P + 2U \cdot 1_{\bar{P}}$.

Donc par la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= P(X \leq t|P)P(P) + P(X \leq t|\bar{P})P(\bar{P}) \\ &= P(U \leq t)p + P(2U \leq t)(1-p) \\ &= P(U \leq t)p + P(U \leq \frac{t}{2})(1-p) \end{aligned}$$

- Si $t \in [0, 1]$.

Comme U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$:

$$P(X \leq t) = tp + \frac{t}{2}(1-p) = \frac{t}{2}(1+p)$$

- Si $t \in [1, 2]$.

Comme U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ ($P(U \leq t) = 1$):

$$P(X \leq t) = p + \frac{t}{2}(1-p)$$

Donc F est définie comme suit :

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{t}{2}(1+p) \text{ si } t \in [0, 1[\\ p + \frac{t}{2}(1-p) \text{ si } t \in [1, 2[\\ 1 \text{ si } t > 2 \end{cases}$$

F est dérivable sur $]-\infty, 0[,]0, 1[,]1, 2[,]2, +\infty[$

D'où la densité de probabilité de X obtenue en dérivant F et en remplacant p par $\frac{2}{3}$:

$$f(t) = \frac{5}{6} \cdot 1_{t \in [0,1]} + \frac{1}{6} \cdot 1_{t \in [1,2]}$$

Question 2

- On résout $P(X \leq m) = \frac{1}{2}$

Avec $p = \frac{2}{3}$, on cherche la médiane sur l'intervalle $[0, 1]$:

D'où pour $m \in [0, 1]$:

$$P(X \leq m) = \frac{m}{2} \cdot (1 + p) = \frac{5m}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

- Par linéarité de l'espérance et indépendance de U et P, on a :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[U \cdot 1_P + 2U \cdot 1_{\bar{P}}]$$
$$= \mathbb{E}[U \cdot 1_P] + 2\mathbb{E}[U \cdot 1_{\bar{P}}]$$
$$= \mathbb{E}[U] \cdot \mathbb{E}[1_P] + 2\mathbb{E}[U] \cdot \mathbb{E}[1_{\bar{P}}]$$
$$= \mathbf{\frac{2}{3}}$$

car $\mathbb{E}[U] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}[1_P] = \frac{2}{3}$

Question 3

- X vaut U avec une probabilité de p et vaut $2U$ avec une probabilité de $1 - p$. $X = (1 + Y)U$ revient au même car Y vaut 0 avec une probabilité p et 1 avec une probabilité $1 - p$ (loi de Bernoulli)
- Par linéarité de l'espérance et indépendance de Y et U :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(1 + Y)U] = \mathbb{E}[U] + \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[U]$$
$$= \frac{1}{2} + q \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2

Question 1

- Calcul de la fonction de répartition et la densité de X:

$$\forall t \in [0, 1], P(X \leq t) = P(\sqrt{U} \leq t) = P(U \leq t^2) = t^2$$

car U suis une loi uniforme sur $[0, 1]$

donc :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t^2 \text{ si } t \in [0,1] \\ 1 \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

donc en dérivant :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 2t \text{ si } t \in [0,1] \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

Remarque : on retrouve bien que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est 1.

- Espérance de X:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x.f_X(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2[\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Question 2

- Via la formule de transfert (car la fonction racine est positive sur $[0,1]$):

$$\mathbb{E}[\sqrt{U}] = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot f_U(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x} \times 1dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx$$
$$= [\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

On retrouve bien le même résultat que précédemment.

- X étant positive, on peut utiliser la formule suivante :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X \geq t)dt = \int_0^{+\infty} (1 - P(X \leq t))dt$$
$$= \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))dt = \int_0^1 (1 - t^2)dt = [t - \frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

On retrouve bien la même chose.

Question 3

Via la fomule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[U] - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Exercice 3

Question 1

Soit $t \geq 0$.

$$(X \geq t) = \cap_{i=1}^{n}(X_i \geq t)$$

Si on suppose que les X_i sont indépendantes, on a alors :

$$P(X \geq t) = P(\cap_{i=1}^{n}(X_i \geq t)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1 - P(X_i \leq t)) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t}$$

car la fonction de répartition de chacune des X_i est $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Donc en calculant le produit :

$$P(X \geq t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t} = e^{\sum_{i=1}^{n} -\lambda t} = \mathbf{e^{-n\lambda t}}$$

Question 2

- $$\forall t \geq 0, P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t) = 1 - e^{-n\lambda t}$$

Donc:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Il vient en dérivant :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ n\lambda e^{-n\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

X suit donc une loi exponentielle de paramètre $n\lambda > 0$ (car on a $n \leq 1$).

- Comme espérance d'une loi exponentielle, on a :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n\lambda}$$

(Si on veut recalculer cette valeur, il faut calculer l'intégrale de $x \mapsto x.f_X(x)$ sur $[0, +\infty[$.)

Exercice 4

Question 1

Soit $t \geq 0$.

$$P(X \leq t) = \cap_{i=1}^{N} P(U_i \leq t)$$

Par indépendance des U_i, on a :

$$P(X \leq t) = P(\cap_{i=1}^{N}(U_i \leq t)) = \prod_{i=1}^{N} P(U_i \leq t) = \prod_{i=1}^{N} t = t^N$$

Puis en utilisant les probabilités totales ($N(\Omega) = \mathbb{N}^*$), et en utilisant le résultat démontré précédemment :

$$P(X \leq t) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X \leq t | N = i) P(N = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} t^i \cdot (1-p)^{i-1} p = \frac{tp}{1 - t(1-p)}$$

Donc :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{tp}{1-t(1-p)} \text{ si } t \in [0, 1] \\ 1 \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

Question 2

La variable X étant positive, on peut calculer l'espérance ainsi :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X \geq t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - P(X \leq t)) dt = \int_0^1 (1 - F_X(t)) dt = 1 - \int_0^1 F_X(t) dt$$

On cherche donc une primitive de F sur $[0, 1]$.

$$\forall t \in [0,1], F(t) = \frac{tp}{1 - t(1-p)} = p \frac{t}{1 - t(1-p)} = \frac{-p}{1-p} \frac{-t(1-p)}{1 - t(1-p)} = \frac{p}{p-1} \frac{1 - t(1-p) + 1}{1 - t(1-p)}$$

$$= \frac{p}{p-1} \left(\frac{1 - t(1-p)}{1 - t(1-p)} - \frac{1}{1 - t(1-p)} \right) = \frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{1}{1 - t(1-p)} \right)$$

$$= \frac{p}{p-1} \left(1 + \frac{1}{t(1-p) - 1} \right)$$

Une primitive de F est donc :

$$h : t \mapsto \frac{p}{p-1} \left(t + \frac{ln|t(1-p) - 1|}{1-p} \right)$$

Donc :

$$\int_0^1 F_X(t) dt = [h(t)]_0^1 = \frac{p}{p-1} \left(1 + \frac{ln(p)}{1-p} \right)$$

Donc en reprenant l'expression en amont, on a :

$$\mathbb{E}[X] = 1 - \frac{p}{p-1} \left(1 + \frac{ln(p)}{1-p} \right)$$

Question 3

$$\mathbb{E}[X] == 1 - (-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} ln(3)) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} ln(3) \approx 0.67604$$