TD 6 : conditionement des matrices

Ex 1 :

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x+\delta x) = b + \delta b \end{cases} \Rightarrow \underbrace{Ax}_{=b} + A\delta x = b + \delta b$$

$$\Rightarrow A\delta x = \delta b$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta x = A^{-1}\delta b}$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq |||A^{-1}|||\,\|\delta b\|$$

donc $\|\delta x\| \leq |||A^{-1}|||\,\|\delta b\| \quad (1)$

d'autre part : $\|b\| = \|Ax\| \leq |||A|||\,\|x\|$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq |||A||| \times \frac{1}{\|b\|} \quad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{|||A^{-1}|||\,|||A|||}_{K(A)} \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

2) On cherche $b, \delta b \in \mathbb{R}^n$ tq $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = |||A||| \, |||A^{-1}||| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

Soit x tq $\|x\| = 1$ et $\|Ax\| = |||A||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$

et soit :
$b = Ax$, alors

$\|b\| = \|Ax\| = |||A||| \, \|x\|$ (1)

• Soit δb tq $\|\delta b\| = 1$ et $\|A^{-1}\delta b\| = |||A^{-1}|||$

Soit $\delta x = A^{-1}\delta b$, alors $\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| = |||A^{-1}||| \, \|\delta b\|$ (2)

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|} = \frac{|||A|||}{\|b\|}$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = |||A^{-1}||| \times \|\delta b\| \times \frac{|||A|||}{\|b\|} = \underbrace{|||A^{-1}||| \, |||A|||}_{K(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = K(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

3) $AA^{-1} = Id \Rightarrow |||AA^{-1}||| = |||Id||| = 1$

$1 = |||AA^{-1}||| \leq |||A||| \, |||A^{-1}||| = K(A)$

$\Rightarrow \boxed{K(A) \geq 1}$

4) $K(AB) = |||AB||| \, |||(AB)^{-1}||| \leq |||A||| \, |||B||| \times |||B^{-1}||| \, |||A^{-1}|||$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\leq K(A) K(B)$.

Ex 2

1) On note $B = A\,{}^tA$

Symétrique : ${}^tB = {}^t(A\,{}^tA) = {}^t({}^tA)\,{}^t(A)$
$= A\,{}^tA = B$

${}^tB = B$ donc B symétrique.

définie positive : ${}^tx\,B\,x > 0 \quad \forall x \neq 0$.

$x \neq 0$, ${}^tx B x = {}^tx A\,{}^tA x = {}^t({}^tAx)\,{}^tAx$
$= \|{}^tAx\|^2 > 0$

car $x \neq 0$ et A inversible.

2) $\rho(A\,{}^tA) = \max\limits_{\sigma_i \in Sp(A\,{}^tA)} |\sigma_i| = \sigma_{max}$.

$|||A|||_2 = \sqrt{\sigma_{max}}$

$|||A^{-1}|||_2 = \sqrt{\rho\left(A^{-1}\,{}^t(A^{-1})\right)}$

$A^{-1}\,{}^t(A^{-1}) = A^{-1}({}^tA)^{-1} = ({}^tA\,A)^{-1}$

on sait que $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$ ont les mêmes valeurs propres.
(demo : λ vp $A\,{}^tA$, $A\,{}^tA\,x = \lambda x$
$\iff {}^tAA(\underbrace{{}^tAx}_{y}) = \lambda \underbrace{({}^tAx)}_{y}$
$\iff {}^tAAy = \lambda y$

De plus, si $\lambda \in Sp(B)$,
$\frac{1}{\lambda} \in Sp(B^{-1})$

$$|||A^{-1}|||_2 = \sqrt{\rho(({}^tAA)^{-1})}$$

$$\rho(({}^tAA)^{-1}) = \max_{\lambda_i \in sp(({}^tAA)^{-1})} |\lambda_i| = \max_{\sigma_i \in sp({}^tAA)} \frac{1}{|\sigma_i|} = \sigma_{min}$$

$$|||A^{-1}|||_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{min}}}$$

donc $K_2(A) = |||A|||_2 \, |||A^{-1}|||_2 = \sqrt{\dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}$

3) A symétrique définie positive, $A = {}^tA$

$\forall x \neq 0, \; {}^txAx > 0$

$A\,{}^tA = A^2 \Rightarrow \sigma_{max} = \lambda_{max}^2$

$\sigma_{min} = \lambda_{min}^2$

A sym def pos $\Rightarrow$ vp de A sont réelles positives

$$K_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

4) RAPPEL : les vp de A sont : $\lambda_k = 4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ $k=1\dots n$

Démo à la fin

$\sin^2$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\lambda_{min} = \lambda_1 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$\lambda_{max} = \lambda_n = 4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) = 4\sin^2\left(\frac{\cancel{(n+1)}\pi}{2\cancel{(n+1)}} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

A est symétrique, définie positive. donc

$$K_2(A) = \frac{\lambda max}{\lambda min} = \frac{\cancel{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}{\cancel{4} \sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}$$

Remarque : si $n \to +\infty$, $\frac{\pi}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$$

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$ donc quand $n \to +\infty$

A est mal conditionnée.

Démo : les vp de A sont $\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ $k=1,\dots,n$

On note $v_p = e^{iqp}$ $\quad 2v_p - v_{p+1} - v_{p-1} = (2 - e^{iq} - e^{-iq})\, v_p$

$$= 2(1-\cos(q))\, v_p$$

$$= 4\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) v_p$$

On note $w_p = \sin(qp) = \frac{1}{2i}(e^{iqp} - e^{-iqp})$

$$2w_p - w_{p+1} - w_{p-1} = 4\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) w_p.$$

si $q = \frac{k\pi}{n+1}$, $k=1,\dots,n$ alors $w_0 = w_{n+1} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2w_p - w_{p+1} - w_{p-1} = 4\sin\left(\frac{q}{2}\right) w_p & p=1,\dots,n \\ w_0 = w_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad A w = 4\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) w \qquad w = (w_1, \ldots, w_n).$