5.2 Intégrale d'Itô

Nous allons nous intéresser à l'intégration des processus aléatoires par le Mouvement Brownien Standard.

5.2.1 Construction de l'intégrale d'Itô

Comme pour l'intégrale de Wiener nous allons procéder par étape. Pour cela on va dans un premier temps s'inspirer de la construction de l'intégrale stochastique discrète (abordée dans le cours de PSAF). Afin de conserver de bonne propriétés un élément important de cette construction est l'intégration de processus prévisibles. Dans le cas discret la notion de processus prévisible est simple et naturelle : si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration, un processus à temps discret $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-prévisible si X_0 est $\mathcal{F}_0$ mesurable et pour tout $n \geq 1$ la v.a. X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable.
Nous allons voir comment procéder en temps continu.

Processus de base prévisible

Définition 5.7. *On appelle* ***processus de base prévisible*** *tout processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme*

$$H_t = \Phi \cdot \mathbf{1}_{]u,v]}(t) \tag{5.1}$$

où $0 \leq u < v$ et Φ une v.a. $\mathcal{F}_u$-mesurable, de carré intégrable.
On note Π_0^2 l'espace vectoriel des processus de base prévisibles.
Pour tout $H \in \Pi_0^2$ de représentation (5.1) on définit son ***intégrale d'Itô*** *par W, un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S., comme le processus $I(H) = (I_t(H))_{t\geq 0}$ vérifiant $\forall t \geq 0$*

$$I_t(H) = \Phi \cdot (W_{v\wedge t} - W_{u\wedge t})$$

Remarque : Pour le processus H de la forme (5.1) ci dessus

$$I_t(H) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq u; \\ \Phi \cdot (W_t - W_u) & \text{si} \quad u < t \leq v; \\ \Phi \cdot (W_v - W_u) & \text{si} \quad t > v. \end{cases}$$

On observe ainsi que $I(H)$ est bien à trajectoires continues et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté.

Proposition 5.8. *Pour tout $H \in \Pi_0$ de représentation (5.1) le processus $I(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues, de carré intégrable, nulle en $t = 0$. De plus le processus $(I_t^2(H) - \int_0^t H_s^2\, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues.*

Preuve. La continuité et l'adaptabilité découle de la remarque ci-dessus.
On montre à présent que le processus est de carré intégrable :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_t^2(H)) &= \mathbb{E}[\Phi^2 \cdot (W_{t\wedge v} - W_{t\wedge u})^2] \\ &= \mathbb{E}[\Phi^2 \cdot \mathbb{E}((W_{t\wedge v} - W_{t\wedge u})^2 | \mathcal{F}_u)] \\ &= \mathbb{E}(\Phi^2)(t \wedge v - t \wedge u) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}(H_s^2)\, ds < +\infty \end{aligned}$$

ce qui, bien entendu entraine l'intégrabilité.
Pour avoir la propriété de martingale il reste à montrer le plus long ici : la propriété d'espérance conditionnelle. On va procéder par étapes dépendant comment les indices $0 \leq s < t$ se placent par rapport à $u < v$ de la représentation (5.1). On observe d'abord que

$$\mathbb{E}[I_t(H)|\mathcal{F}_s] = I_s(H) + \mathbb{E}[I_t(H) - I_s(H)|\mathcal{F}_s]$$

1. Si $s < t \leq u$ alors $I_t(H) = I_s(H) = 0$ et le résultat est évident.
2. Si $s \leq u < t < v$ alors $I_s(H) = 0$ et $I_t(H) = \Phi \cdot (W_t - W_u)$ et
$$\mathbb{E}[I_t(H)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\Phi \cdot (W_t - W_u)|\mathcal{F}_s]$$
et comme $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_u$ on a
$$\mathbb{E}[I_t(H)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\Phi \cdot \mathbb{E}(W_t - W_u|\mathcal{F}_u)|\mathcal{F}_s] = 0 = I_s(H).$$
3. Si $u < s < t < v$ alors $I_t(H) - I_s(H) = \Phi \cdot (W_t - W_u) - \Phi \cdot (W_s - W_u) = \Phi \cdot (W_t - W_s)$ et comme Φ est $\mathcal{F}_u$-mesurable et que $\mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_s$ on a
$$\mathbb{E}[I_t(H) - I_s(H)|\mathcal{F}_s] = \Phi \cdot \mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = 0.$$

4. Si $u < s < v \leq t$ alors $I_t(H) - I_s(H) = \Phi \cdot (W_v - W_s)$ et donc
$$\mathbb{E}[I_t(H) - I_s(H)|\mathcal{F}_s] = \Phi \cdot \mathbb{E}[W_v - W_s|\mathcal{F}_s] = 0.$$
5. Enfin si $v \leq s < t$ alors $I_t(H) - I_s(H) = 0$ d'où
$$\mathbb{E}[I_t(H) - I_s(H)|\mathcal{F}_s] = 0.$$

On a donc bien que $I(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale de carré intégrable à trajectoires continues. De plus on a $I_0(H) = \Phi \cdot (W_0 - W_0) = 0$.
De par la propriété d'orthogonalité des martingales de carré intégrable (cf. TD) on a
$$\mathbb{E}[(I_t(H) - I_s(H))^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(I_t^2(H)|\mathcal{F}_s] - I_s^2(H)$$
Il reste à montrer que
$$\mathbb{E}[(I_t(H) - I_s(H))^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t H_u^2\ du\ |\mathcal{F}_s\right]$$
cela se fait en reprenant les étapes ci-dessus. Nous laissons le lecteur le faire à titre d'exercice. □

Processus prévisible élémentaire de $\Pi_1^2([0,T])$

Définition 5.9. *Soit $T > 0$ on appelle* ***processus prévisible élémentaire*** *sur $[0,T]$ tout processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ de la forme*
$$H_t = \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t) \tag{5.2}$$
où $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ et pour tout $i \in \{\ 1, ...n\}$ chaque Φ_i est une v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable de carré intégrable.
*On note $\Pi_1^2([0,T])$ l'**espace vectoriel des processus prévisibles élémentaires** sur $[0,T]$.*
Pour tout $H \in \Pi_1^2([0,T])$ de représentation (5.2) on définit l' ***intégrale d'Itô*** *de H par W, un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S., comme le processus $I(H) = (I_t(H))_{t\geq 0}$ vérifiant $\forall t \geq 0$*
$$I_t(H) = \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot (W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t})$$

Remarques :

a. $\forall t \in [t_{k-1}, t_k[$ on a
$$I_t(H) = \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_i \cdot (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k \cdot (W_t - W_{t_{k-1}})$$

b. De par la proposition précédente $I(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale de carré intégrable à trajectoires continues.

c. $\forall s < t$, $t_{p-1} \leq s < t_p$, $p \leq k-1$ et $t_{k-1} \leq t < t_k$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(I_t(H) - I_s(H))^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=p+1}^{k-1} \Phi_i \cdot (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k \cdot (W_t - W_{t_{k-1}}) + \phi_p \cdot (W_{t_p} - W_s)\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] \\ &= \sum_{i=p+1}^{k-1} \mathbb{E}\left[\left(\Phi_i \cdot (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(\Phi_k \cdot (W_t - W_{t_{k-1}})\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left(\Phi_p \cdot (W_{t_p} - W_{t_s})\right)^2 |\mathcal{F}_s\right]\end{aligned}$$

donc par la proposition précédente
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(I_t(H) - I_s(H))^2|\mathcal{F}_s] &= \sum_{i=p+1}^{k-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_u^2\ du|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_{t_{k-1}}^{t} H_u^2\ du|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_{t_s}^{t_p} H_u^2\ du|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^t H_u^2\ du|\mathcal{F}_s\right]\end{aligned}$$

On obtient ainsi directement le

Corollaire 5.10. *Pour tout $H \in \Pi_1^2([0,T])$ l'intégrale d'Itô $I(H)$ de H par W est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale de carré intégrable, à trajectoires continues, nulle en $t=0$.*
De plus le processus $(I_t^2(H) - \int_0^t H_s^2\ ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues.
Pour tout $t \in [0,T]$ on notera

$$\int_0^t H_u\ dW_u = I_t(H).$$

On en déduit le

Théorème 5.11. ***Isométrie d'Itô***
Pour tous $H \in \Pi_1^2([0,T])$ et $t \in [0,T]$ on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_u\ dW_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\ ds\right]$$

Processus de $\Pi_2^2([0,T])$

Remarques :

1. Sur l'espace vectoriel $\Pi_1^2([0,T])$ l'application $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|H\|_2^2 = \sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t \mathbb{E}(H_u^2)\ du\right)$$

   est une norme.

2. Comme pour l'intégrale de Wiener nous allons étendre la définition de l'intégrale d'Itô à un espace plus grand :

   Définition 5.12. *On définit $\Pi_2^2([0,T])$ l'espace vectoriel des processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ continus à droite limité à gauche, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptés tels que*

$$\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2\ ds) < +\infty$$

3. $\forall t \leq T$ l'application $I_t : \Pi_1^2([0,T]) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est linéaire et continue pour la topologie induite sur $\Pi_1^2([0,T])$ par la norme $\|\cdot\|_2$.
   Nous allons utiliser la densité de $(\Pi_1^2([0,T]), \|\cdot\|_2)$ dans $(\Pi_2^2([0,T]), \|\cdot\|_2)$ et on prolongera I_t en une application linéaire J_t continue de $\Pi_1^2([0,T])$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Théorème 5.13. *Il existe une unique application linéaire $J : \Pi_2^2([0,T]) \to \mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales de carré intégrable à trajectoires continues vérifiant*

1. *$\forall H \in \Pi_1^2$ on a $J(H) = I(H)$;*
2. *Pour tout $H \in \Pi_2^2([0,T])$ le processus $J(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale de carré intégrable, à trajectoires continues, nulle en $t=0$*
3. *Pour tout $H \in \Pi_2^2([0,T])$ le processus $(J_t^2(H) - \int_0^t H_s^2\ ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues.*

On notera

$$J_t(H) = \int_0^t H_u\ dW_u.$$

Remarque : Pour tout $H \in \Pi_2^2([0,T])$ on a l'**l'isométrie d'Itô** :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_u\ dW_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\ ds\right]$$

Etapes de la preuve du théorème ci-dessus :

1. **Approximation.**
   Pour $H \in \Pi_2^2([0,T])$ on pose pour tout $n \geq 1$
$$H_t^n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{2^n}{T} \int_{\frac{k-1}{2^n}T}^{\frac{k}{2^n}T} H_s \; ds \right) \mathbf{1}_{\left]\frac{k}{2^n}T, \frac{k+1}{2^n}T\right]}(t)$$
   Observations : avec ce choix particulier H_t^n est $\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}T}$-mesurable tour tous $t \in \left]\frac{k}{2^n}T, \frac{k+1}{2^n}T\right]$ et H^n est dans $\Pi_1^2([0,T])$.
   Un résultat clé (que nous admettrons) est le
   Lemme 5.14.
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s - H_s^n)^2 \; ds\right] = 0$$
2. **Extention.**
   $\forall n \geq 1$ la suite de martingales $I(H^n)$ est bornée dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:
$$\mathbb{E}\left[I_t^2(H^n)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^n)^2 \; ds\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \; ds\right]$$
   Par le lemme précédent la suite $(H^n)_{n\geq1}$ est convergente dans $(\Pi_2^2([0,T]), \|\cdot\|_2)$ donc elle est de Cauchy. Par l'isométrie d'Itô on obtient que la suite $(I_t(H^n))_{n\geq1}$ est également de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$, or cet espace est complet donc la suite est convergente donc il existe $M_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ tel que
$$M_t = \lim_{n\to+\infty} I_t(H^n)$$
   dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$. On pose alors $J_t(H) = M_t$.
3. **Unicité.**
   On montre que cette application est unique.

Processus de $\Pi_3^2([0,T])$

On peut encore étendre l'intégration à un espace plus grand de processus à intégrer contre le Brownien.

Définition 5.15. *On définit $\Pi_3^2([0,T])$ l'espace vectoriel des processus $H = (H_t)_{t\geq0}$ continus à droite limité à gauche, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$-adaptés tels que*
$$\int_0^T H_s^2 \; ds < +\infty \; p.s.$$

Important : Il y a un prix à payer pour cette extension. L'intégrale d'Itô des processus de $\Pi_3^2([0,T])$ reste un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$-adapté à trajectoires continue. Mais ce n'est plus en général une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$-martingale (c'est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$-martingale locale). De plus l'isométrie d'Itô n'est plus vérifiée et on ne peut garantir que $\int_0^t H_s \; dW_s$ soit intégrable.
On admet la proposition :

Proposition 5.16. *Soit $H \in \Pi_3^2([0,T])$ et τ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$-temps d'arrêt alors*
$$\int_0^{t\wedge\tau} H_s \; dW_s = \int_0^t H_s \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) \; dW_s$$

Remarque : Pour $H \in \Pi_3^2([0,T])$ on introduit la suite (localisante) de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$-T.A.
$$T_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t H_s^2 \; ds \geq n\}$$
Par définition on a que $T_n \nearrow +\infty$ p.s. lorsque $n \to +\infty$. De plus on observe que le processus arrêté
$$H_t^n := H_{t\wedge T_n}$$
est dans $\Pi_2^2([0,T])$ pour tout $n \geq 1$ et on a
$$\int_0^t H_d^n \; dW_s = \int_0^t H_s \mathbf{1}_{[0,T_n]}(s) \; dW_s \to \int_0^t H_s \; dW_s$$
quand $n \to +\infty$.