Feuille 2

CHAINES

Exercice 2.1. — Soit G un graphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une chaîne entre u et v dans G.

(b) Il existe une chaîne simple entre u et v dans G.

(c) Il existe une chaîne élémentaire entre u et v dans G.

Exercice 2.2. — Montrer que s'il existe une chaîne élémentaire P_{xy} reliant x et y et une chaîne élémentaire P_{yz} reliant y et z, alors il existe une chaîne élémentaire reliant x et z.

CONNEXITE

Exercice 2.3. — Montrer qu'un graphe G est connexe si et seulement si $d(X) \geq 1$ pour chaque $\emptyset \neq X \subset V(G)$.

Exercice 2.4. — Soit G un graphe simple à $2n$ sommets. Montrer que si le degré de chaque sommet est au moins n alors G est connexe.

Exercice 2.5. — Montrer qu'au moins l'un des deux graphes G ou $\overline{G}$ est connexe.

CYCLES

Exercice 2.6. —

(a) Soit $P := \{v_1, ..., v_\ell\}$ une plus longue chaîne élémentaire dans un graphe G. Montrer que chaque voisin u de v_1 se trouve dans $\{v_2, ..., v_\ell\}$.

(b) Montrer que si tous les degrés des sommets d'un graphe G simple sont supérieurs ou égaux à deux, alors G admet un cycle élémentaire.

Exercice 2.7. —

(a) Montrer qu'un graphe G sans sommet isolé contient un cycle eulérien si et seulement si G est connexe et chaque sommet de G est de degré pair.

(b) Montrer qu'un graphe G sans sommet isolé contient une chaîne eulérienne si et seulement si G est connexe et le nombre de sommets de degré impair de G est inférieur ou égal à 2.

Exercice 2.8. — Montrer que si $G - v$ n'est pas connexe alors G ne contient pas de cycle hamiltonien.

GRAPHES ORIENTES

Exercice 2.9. — Montrer que pour tout graphe orienté $G = (V, A)$, la somme des demi-degrés extérieurs est égale à la somme des demi-degrés intérieurs, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v).$$

Exercice 2.10. — Montrer qu'un graphe orienté G admet un circuit élémentaire si

$$d^+(v) \geq 1 \ \forall v \in V(G).$$

Exercice 2.11. — Soient s et p deux sommets d'un graphe orienté G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un chemin de s à p.

(b) Pour tout sous-ensemble X de sommets tel que $s \in X,\ p \notin X$, on a $d^+(X) \geq 1$.

(c) Il existe un chemin élémentaire de s à p.

Exercice 2.12. — Le problème de Bruce Willis :

On a trois récipients dont les contenances sont respectivement 8, 5 et 3 litres. Au départ le récipient de 8 litres est supposé plein, les autres vides. Il s'agit – par une série de transvasement et sans perdre de liquide – d'isoler 4 litres dans chacun des deux premiers récipients. (Les récipients ne sont pas gradués et on ne peut pas évaluer une fraction du contenu d'un récipient ; c'est-à-dire qu'une opération de transvasement aura pour effet de vider complètement un des récipients et/ou d'en remplir un autre à ras bord.)