 thibaut.metivet@inria.fr

Transformation de Fourier

1 Rappel

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f comme

$$F(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\nu \mapsto \hat{f}(\nu) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$

L'application $F : L^1 \to L^\infty$ est la *transformation de Fourier*. C'est une application *continue* qui vérifie les propriétés :

a) Linéarité : $F(af(x) + bg(x))(\nu) = aF(f)(\nu) + bF(g)(\nu)$

b) Contraction du domaine : $F(f(ax))(\nu) = \frac{1}{|a|}F(f)(\nu/a)$

c) Translation temporelle : $F(f(x + x_0))(\nu) = F(f)(\nu)\exp(2i\pi\nu x_0)$

d) Produit de convolution : $F(f * g)(\nu) = F(f)(\nu)\, F(g)(\nu)$

e) Dérivation dans l'espace direct : $F(f')(\nu) = 2i\pi\nu\, F(f)(\nu)$ où $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$

2 Exercices

Exercice 1. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{1}_{[a,b]}$ la fonction caractéristique associée.

a) Calculer la transformée de Fourier $F\left(\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right)$.

b) Soit $t > 0$. Calculer la transformée de Fourier $F\left(\mathbf{1}_{[-\frac{t}{2},\frac{t}{2}]}\right)$.

c) Soit $a > \frac{t}{2}$. En déduire $F\left(\mathbf{1}_{[a-\frac{t}{2},a+\frac{t}{2}]}\right)$ et $F\left(\mathbf{1}_{[-a-\frac{t}{2},-a+\frac{t}{2}]} + \mathbf{1}_{[a-\frac{t}{2},a+\frac{t}{2}]}\right)$.

Exercice 2.

a) Enoncer le théorème de Riemann-Lebesgue pour la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ deux fois dérivable telle que f' et $f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$F(f)(\nu) = o_{|\nu|\to\infty}\left(\frac{1}{\nu^2}\right). \qquad (1)$$

c) Soit $f(t) = e^{-|t|}$. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, et calculer sa transformée de Fourier $F(e^{-|t|})(\nu)$.

d) Montrer que $F(e^{-|t|})(\nu)$ ne vérifie pas (1). Commenter.

Exercice 3. On admet dans cet exercice que la transformée de Fourier de la fonction $G(x) = \exp(-\pi x^2)$ est $\hat{G}(\nu) = \exp(-\pi\nu^2)$.

a) Soit :

$$G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \qquad a > 0.$$

Calculer la transformée de Fourier $\hat{G}_a$ de G_a.

b) Calculer la transformée de Fourier du produit de convolution $G_a * G_b$, $a, b > 0$.

c) En déduire $G_a * G_b$.