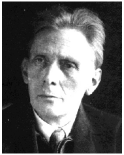
INTRODUCTION AUX PRODUITS DÉRIVÉS

PAGE DU COURS SUR CHAMILO

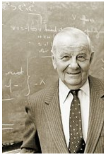
Hervé Guiol (IPS LJK)



Alexandre Khintchine
1894-1959

Raymond Paley
1907-1933

Norbert Wiener
1894-1964



Antoni Zygmund
1900-1992

PLAN DU COURS D'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. **Premières propriétés du MBS.**
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. Intégrale d'Itô 1 : définitions.
8. Intégrale d'Itô 2 : formule d'Itô. Processus d'Itô. Variations.
9. Représentation des martingales Browniennes. Formule d'Itô multi-*d*. Formule de Cameron-Martin.
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itô.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

OUTLINE

Rappels : Mouvement Brownien Standard

Définition 3.1 Mouvement Brownien Standard

On appelle **mouvement Brownien standard** réel (M.B.S.) tout processus $W = (W_t)_{t \in I}$ à **trajectoires continues** vérifiant

A. $W_0 = 0$ p.s. ;

B. accroissements stationnaires gaussien : $\forall 0 \leq s < t \in I$ la v.a. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$;

C. accroissements indépendants : $\forall n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ les v.a. $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ pour $0 \leq i < n$ sont indépendantes.

Proposition 3.4

Soit $W = (W_t)_{t \in I}$ un processus à valeurs réelles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le processus W est un M.B.S.
2. Le processus W est gaussien, centré à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s, t) = s \wedge t$.

Principes d'invariance

Vu en TD.

Proposition 3.7 Invariances élémentaires

Soient $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ un M.B.S., $s > 0$, $\lambda \neq 0$ et $T > 0$ des constantes. Les processus B, B^s, $\widetilde{B}^\lambda$ et $\widehat{B}^T$ respectivement définis par :

0. $B_t = -W_t$, $\forall t \in \mathbb{R}+$ (*Symétrie.*)
1. $B_t^s = W_{t+s} - W_s$, $\forall t \in \mathbb{R}+$ (*Invariance par translation du temps.*)
2. $\widetilde{B}_t^\lambda = \lambda W_{\frac{t}{\lambda^2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}+$ (*Invariance par changement d'échelle.*)
1. $\widehat{B}_t^T = W_T - W_{T-t}$, $\forall t \in [0, T]$ (*Invariance par retournement du temps.*)

sont des M.B.S. De plus B^s est indépendant de $\sigma(W_u, u \in [0, s])$.

Lois des grands nombres 1/2

Proposition 3.8. Une première LDGN pour le M.B.S

Soit $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}+}$ un M.B.S. alors $\mathbb{P} - p.s.$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} W_n = 0, \ n \in \mathbb{N}$$

Soit $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{W_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|Z| > \varepsilon\sqrt{n}\right)$$

ou

$$\mathbb{P}\left(|Z| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{W_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < +\infty$$

qui par Borel Cantelli (cf exercice) implique

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} W_n = 0, \ \mathbb{P} - p.s.$$

Lois des grands nombres 2/2

Théorème 3.9. LDGN pour le M.B.S

Soit W un M.B.S. Alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} W_t = 0,\ \mathbb{P} - p.s.$$

$\forall t > 0\ \exists n(t) \in \mathbb{N}$ tel que $n(t) \leq t < n(t) + 1$ on écrit

$$\frac{W_t}{t} = \frac{W_t - W_{n(t)}}{t} + \left(1 + \frac{t - n(t)}{n(t)}\right)^{-1} \frac{W_{n(t)}}{n(t)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{W_t}{t}\right| \leq \frac{1}{t} \max_{u\in[n(t),n(t)+1]} |W_u - W_{n(t)}| + \left(1 + \frac{t - n(t)}{n(t)}\right)^{-1} \left|\frac{W_{n(t)}}{n(t)}\right|$$

Or $B_{u-n(t)} := W_u - W_{n(t)}$ est un MBS sur $u \in [n(t), n(t) + 1]$ et comme $\max_{s\in[0,1]} |B_s|$ est une v.a. finie p.s. on a

$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \max_{u\in[n(t),n(t)+1]} |W_u - W_{n(t)}| = 0$ et par ce qui précède on a p.s.

$\lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{t-n(t)}{n(t)}\right)^{-1} \left|\frac{W_{n(t)}}{n(t)}\right| = 0.$

Invariance par inversion du temps

Le résultat précédent nous permet de conclure la preuve vue en TD du

Corollaire 3.10

Soit $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ un M.B.S. alors le processus X défini par $X_0 = 0$ et $\forall t > 0$

$$X_t = tW_{\frac{1}{t}}$$

est un M.B.S.

Un des intérêts des résultats que nous venons de voir est de nous apporter des informations sur le comportement, pour le premier, asymptotique et pour le second, de la limite en 0 du M.B.S.

Comportement asymptotique

En effet la LDGN pour le Brownien $\lim_{t\to\infty} W_t/t = 0$ montre que $|W_t|$ va moins vite que t vers l'infini.
En revanche nous avons également vu en TD que $\mathbb{P}$-p.s. on a

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty \text{ et } \liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

ce qui traduit que W_t n'a pas de limite quand $t \to +\infty$ et qu'il existe des sous suites $(W_{t_n})_{n\geq 0}$ qui tendent vers $+\infty$ et $-\infty$. De plus ces sous suites sont respectivement asymptotiquement plus rapide que $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
Le résultat le plus précis est donné par

Théorème 3.11 Loi du logarithme itéré (Khintchine 1924)

Soit W un M.B.S. Alors $\mathbb{P}$-p.s. on a

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = 1 \text{ et } \liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = -1$$

Limite en 0

En utilisant l'invariance par inversion du temps nous avons vu que le processus X, définit par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ pour $t > 0$, est un M.B.S. En utilisant la loi du logarithme itéré on obtient $\mathbb{P}$-p.s.

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = 1 \text{ et } \liminf_{t\to+\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = -1$$

et donc en posant $s = 1/t$ on obtient le résultat

Corollaire

Pour tout M.B.S. W on a $\mathbb{P}$-p.s.

$$\limsup_{s\searrow 0} \frac{W_s}{\sqrt{2s\log(\log(1/s))}} = 1 \text{ et } \liminf_{s\searrow 0} \frac{W_s}{\sqrt{2s\log(\log(1/s))}} = -1$$

Ceci traduit le fait, de part la continuité des trajectoires du MBS, que le graphe de $t \mapsto W_t$ traverse une infinité de fois l'axe des abscisses quand $t \to 0^+$.

ENSEMBLE DES ZÉROS DU MBS

PROPOSITION 3.12 ENSEMBLE DES ZÉROS DU M.B.S

On note $\aleph$ l'ensemble aléatoire des 0 de W : tel que $\forall\omega \in \Omega$

$$\aleph(\omega) = \{t \geq 0 : W_t(\omega) = 0\}$$

Alors avec probabilité 1 :

1. La mesure de Lebesgue de $\aleph$ est nulle.
2. L'ensemble $\aleph$ est un fermé non borné.
3. Le point $t = 0$ est point d'accumulation de $\aleph$.

Par Tonnelli

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\aleph}(t)\, dt\right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(t \in \aleph)\, dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(W_t = 0)\, dt = 0$$

Comme $\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\aleph}(t)\, dt \geq 0$ on en déduit que cette v.a. est nulle $\mathbb{P}$-p.s. Pour $\mathbb{P}$ presque tout ω la trajectoire $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue donc $\aleph(\omega) = W(\omega)^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc $\aleph(\omega)$ est fermé. De plus cet ensemble n'est pas borné car $\limsup_{t\to+\infty} W_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to+\infty} W_t = -\infty$.

Non dérivabilité des trajectoires du M.B.S.

Théorème 3.13 Payley-Wiener-Zygmund 1933

Avec probabilité 1 le M.B.S. n'est dérivable nulle part.

Eléments de preuve : Soit W un M.B.S. On commence par observer qu'en posant $t = 1/s$ on a

$$\limsup_{s \searrow 0} \frac{W_s}{s} = \limsup_{t \to +\infty} tW_{1/t} = \limsup_{t \to +\infty} X_t = +\infty$$

Où X est le M.B.S. définit par $X_t = tW_{1/t}$. En conséquence W n'est pas dérivable (à droite) en 0. Par l'invariance par translation il n'est donc dérivable (à droite) en aucun point $s > 0$. Par renversement du temps ($B_t = W_T - W_{T-t}$) on montre qu'il n'est pas non plus dérivable à gauche. Ainsi on montre que pour tous $t \geq 0$ fixé l'ensemble

$$\mathcal{N}_t = \{\omega \in \Omega : s \mapsto W_s(\omega) \text{ est dérivable en t}\}$$

est négligeable. Toutefois cela ne suffit pas pour affirmer que l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{\omega \in \Omega : \exists t \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } s \mapsto W_s(\omega) \text{ est dérivable en t}\}$$

soit négligeable.