Feuille 5

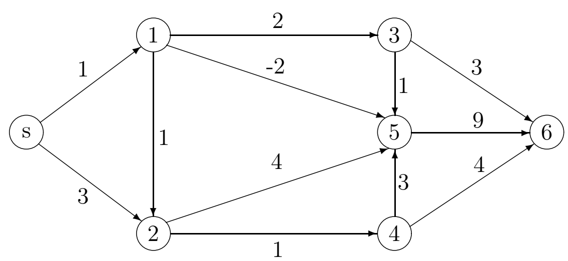
Exercice 5.1. — Dans un réseau (G, c) soient P un plus court (s, p)-chemin et x et y deux sommets de P. Alors le sous-chemin $P[x, y]$ est un plus court (x, y)-chemin.

Exercice 5.2. — Algorithme de Bellman :

Entrée : $(G = (V, A), c)$ réseau sans circuit et s racine de G.
Sortie : fonction $\ell : V \to \mathbb{R}$ et s-arborescence F de G telles que $\forall v \in V$:
le (s, v)-chemin unique dans F est de coût $\ell(v) = dist_{(G,c)}(s, v)$.

Etape 0 : $G_1 := G,\ v_1 := s,\ \ell(s) := 0,\ F_1 := \emptyset,\ i := 1,\ n := |V|$.
Etape 1 : $G_{i+1} := G_i - v_i$.
Etape 2 : Soit $v_{i+1} \in V(G_{i+1})$ tel que $d^-_{G_{i+1}}(v_{i+1}) = 0$.
Etape 3 : $\ell(v_{i+1}) := \min\{\ell(v_j) + c(v_j v_{i+1}) : j \leq i,\ v_j v_{i+1} \in A\}$.
Etape 4 : $F_{i+1} := F_i + v_j v_{i+1}$ où $v_j v_{i+1}$ donne le minimum à l'Etape 3.
Etape 5 : $i := i + 1$. Si $i < n$ ALLER à l'Etape 1, sinon STOP.

Donner **les plus courts** chemins issus du sommet s, et puis **les plus longs** chemins, dans le réseau suivant.

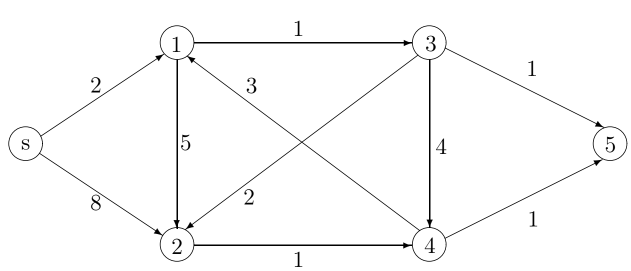


Exercice 5.3. — Algorithme de Dijkstra :

Entrée : $(G = (V, A), c)$ réseau tel que $c \geq 0$ et $s \in V$.
Sortie : ensemble S de sommets atteignables depuis s, fonction $\ell : V \to \mathbb{R}$ et s-arborescence F sur S tels que $\forall v \in V$: le (s, v)-chemin unique dans F est de coût $\ell(v) = dist_{(G,c)}(s, v)$.

Etape 0 : $\ell(s) := 0, \ell(v) := \infty, a(v) := \emptyset\ \forall v \in V,\ S := \emptyset,\ F := \emptyset$.
Etape 1 : Tant qu'il existe $u \in V \setminus S$ tel que $\ell(u)$ soit fini faire
Soit $v \in V \setminus S$ tel que $\ell(v) = \min\{\ell(u) : u \in V \setminus S\}$.
$S := S \cup v$,
$F := F \cup a(v)$.
$\forall vu \in A$ tel que $u \in V \setminus S$ et $\ell(u) > \ell(v) + c(vu)$
$\ell(u) := \ell(v) + c(vu)$ et $a(u) := vu$.
Etape 2 : STOP.

En appliquant l'algorithme de Dijkstra, donner les plus courts chemins issus du sommet s, dans le réseau suivant.

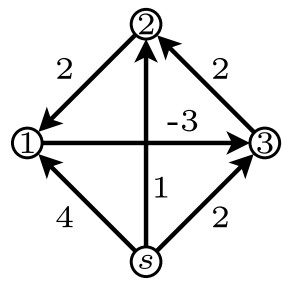


Exercice 5.4. — Donner un réseau sans circuit absorbant avec une racine s pour lequel l'algorithme de Dijkstra ne trouve pas les chemins de coût minimum issus de s.

Exercice 5.5. — Soit $(G = (V, A), c)$ un réseau sans circuit absorbant et soit s une racine de G. Soit $w_k(v)$ le coût minimum d'un (s, v)-chemin de longueur $\leq k$. Montrer que pour tout $v \in V$, on a

(a) $w_{k+1}(v) \leq w_k(v)$,
(b) $w_{k+1}(v) \leq c(uv) + w_k(u)$ pour chaque $uv \in A$,
(c) $w_{k+1}(v) = \min\{w_k(v), c(uv) + w_k(u) : uv \in A\}$,
(d) $w_n(v) = w_{n-1}(v)$.

Exercice 5.6. — Trouver les distances depuis s aux autres sommets dans le réseau suivant en utilisant l'algorithme de Bellman-Ford.



Exercice 5.7. — Soit (G, c) un réseau sans circuit absorbant. On ajoute un nouveau sommet s et pour chaque sommet v on ajoute l'arc sv avec coût 0. Soit (G', c') le nouveau réseau.

(a) Montrer que (G', c') est un réseau sans circuit absorbant.
(b) Montrer que si (G', c') admet un potentiel alors (G, c) admet un potentiel.

Exercice 5.8. — (**Théorème de Gallai**) Soit (G, c) un réseau. Montrer que (G, c) est sans circuit absorbant si et seulement si (G, c) admet un potentiel.

Exercice 5.9. — (**Théorème de Duffin**) Soient (G, c) un réseau sans circuit absorbant, s une racine de G et t un sommet de G. Montrer que $\min\{c(P) : P\ (s,t)\text{-chemin}\} = \max\{\pi(t) - \pi(s) : \pi \text{ potentiel}\}$.

Exercice 5.10. — Soit π un potentiel d'un réseau (G, c). Un arc uv est dit π-serré si $c(uv) = \pi(v) - \pi(u)$. Soit P un (s, t)-chemin tel que chaque arc de P soit π-serré. Montrer que P est un (s, t)-chemin de coût minimum.

Exercice 5.11. — Soient P un plus court (s, t)-chemin et π le potentiel canonique, c'est-à-dire les distances depuis s. Montrer que chaque arc de P est π-serré.

Exercice 5.12. — Soit (G, c) un réseau sans circuit absorbant et soit s une racine de G. Montrer qu'il existe une arborescence F de G telle que pour chaque sommet v, le (s, v)-chemin dans F soit de coût minimum dans G.