Examen de RECHERCHE OPERATIONNELLE 1A Ensimag

le 4 mai 2020, de 13h30 à 16h30.

Polycopié et tous documents manuscrits autorisés. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction. Vous devez expliquer tout ce que vous faites. Veuillez noter sur votre copie le numéro de votre groupe.

Exercice 1 : On considère des subdivisions de $\boldsymbol{K_5}$, c'est-à-dire des graphes obtenus en remplaçant les arêtes du graphe complet à 5 sommets par des chaînes élémentaires (voir aussi poly p.13). Soit $\boldsymbol{K_5^2}$ le subdivision de K_5 où toutes les arêtes ont été remplacées par des chaînes élémentaires de longueur 2, c'est-à-dire un nouveau sommet sur chaque arête. De même, $\boldsymbol{K_5^3}$ est le subdivision de K_5 où toutes les arêtes ont été remplacées par des chaînes élémentaires de longueur 3, c'est-à-dire deux nouveaux sommets sur chaque arête.

1. Déterminer le nombre chromatique $\boldsymbol{\chi}$ de K_5^2 et puis de K_5^3.
   Attention : Une bonne coloration de G avec k couleurs démontre seulement que $\chi(G) \leq k$.
2. Déterminer la taille maximum $\boldsymbol{\nu}$ d'un couplage de K_5^2 et puis de K_5^3.
   Attention : Un couplage de taille k de G démontre seulement que $\nu(G) \geq k$.

Exercice 2 : Soit $\boldsymbol{K_{5,5}} = (A, B; E)$ le graphe biparti complet où $\boldsymbol{A} = \{a_1, \ldots, a_5\}$, $\boldsymbol{B} = \{b_1, \ldots, b_5\}$ et $\boldsymbol{E} = \{a_i b_j : 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5\}$. Soit c un coût sur les arêtes tel que $\boldsymbol{c}(a_i b_j) = i$.

1. Donner le nombre d'arêtes d'un arbre couvrant de $K_{5,5}$.
2. Trouver un arbre couvrant de c-coût minimum de $K_{5,5}$ en exécutant un algorithme vu en cours.
3. Donner la description exacte des arbres couvrants de c-coût minimum de $K_{5,5}$.
4. Donner le nombre d'arbres couvrants de c-coût minimum de $K_{5,5}$.
5. Y a-t-il un arbre couvrant de c-coût minimum de $K_{5,5}$ qui possède un couplage parfait ?

Exercice 3 : On considère un problème d'ordonnancement simple comportant 6 tâches. Pour chacune des tâches, sa durée et la liste des tâches requises sont données dans le tableau suivant :

Tâches	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Durée	2	3	5	4	2	1
Tâches requises	–	–	T_1	T_1, T_2	T_3, T_4	T_3, T_4

1. Donner le réseau potentiel-tâches associé.
2. Quelle est la durée minimum de réalisation du projet ?
3. Donner la liste des tâches critiques et des chemins critiques.
4. On a la possibilité de réduire la durée d'une et une seule tâche. Est-il possible de réduire ainsi la durée totale du projet ? Quelle tâche faudrait-il choisir et de combien la durée totale peut-elle être diminuée ?
5. Notons que l'arc T_1T_4 n'appartient pas à un chemin critique bien que ses deux extrémités soient critiques. Montrer qu'en général, dans un réseau potentiel-tâches (G, c), si $\pi(T)$ est la date au plus tôt pour une tâche T, alors un arc T_iT_j appartient à un chemin critique si et seulement si T_i et T_j sont critiques et $\pi(T_j) - \pi(T_i) = c(T_iT_j)$.

Exercice 4 : Un enfant veut acheter des cadeaux pour Noël. Il est prêt à dépenser tout son argent de poche, **18 €**. Il est allé au magasin et a choisi trois types de cadeaux de coût respectif **3, 2** et **2 €**. Il doit maintenant décider combien il achète de chaque. Le volume de son sac est **14** litres et le volume de cadeau de type 1, 2 et 3 sont **4**, **1** et **2** litres. Les cadeaux sont assez lourds, **2**, **1** et **1** kg et il sait bien qu'il ne peut pas porter plus de **10** kg. Son but est de maximiser le nombre de bisous qu'il peut obtenir pour ces cadeaux. Le cadeau de type 1, 2 et 3 lui peut apporter **6**, **9** et **10** bisous. Aider l'enfant à prendre sa décision.

1. Expliquer que le programme linéaire (P) ci-dessous décrit ce problème :
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + \ \ 2x_3 & \leq & 18 \\ 2x_1 + 1x_2 + \ \ 1x_3 & \leq & 10 \\ 4x_1 + 1x_2 + \ \ 2x_3 & \leq & 14 \\ x_1 \quad x_2 \quad\ \ x_3 & \geq & 0 \\ 6x_1 + 9x_2 + 10x_3 & = & z(\max) \end{array}$$
2. Ecrire la forme standard (P') de (P).
3. Appliquer l'algorithme du simplexe sur (P').
4. Vérifier que simplexe fournit, avec les nouvelles variables x_4, x_5, x_6, les équations suivantes :
$$\begin{array}{rrrrrrl} -1x_1 & +1x_2 & & +\ \ 1x_4 & & -1x_6 & = 4 \\ 0.5x_1 & & & -0.5x_4 & +1x_5 & & = 1 \\ 2.5x_1 & & +1x_3 & -0.5x_4 & & +1x_6 & = 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geq 0 \\ -10x_1 & & & -\ \ 4x_4 & & -1x_6 & = z(\max) - 86 \end{array}$$
5. En conclure une solution optimale $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ de (P).
6. Combien de bisous l'enfant va-t-il obtenir ?
7. Ecrire le dual (D) de (P).
8. En utilisant $\overline{x}$ et les conditions des écarts complémentaires trouver une solution optimale de (D).