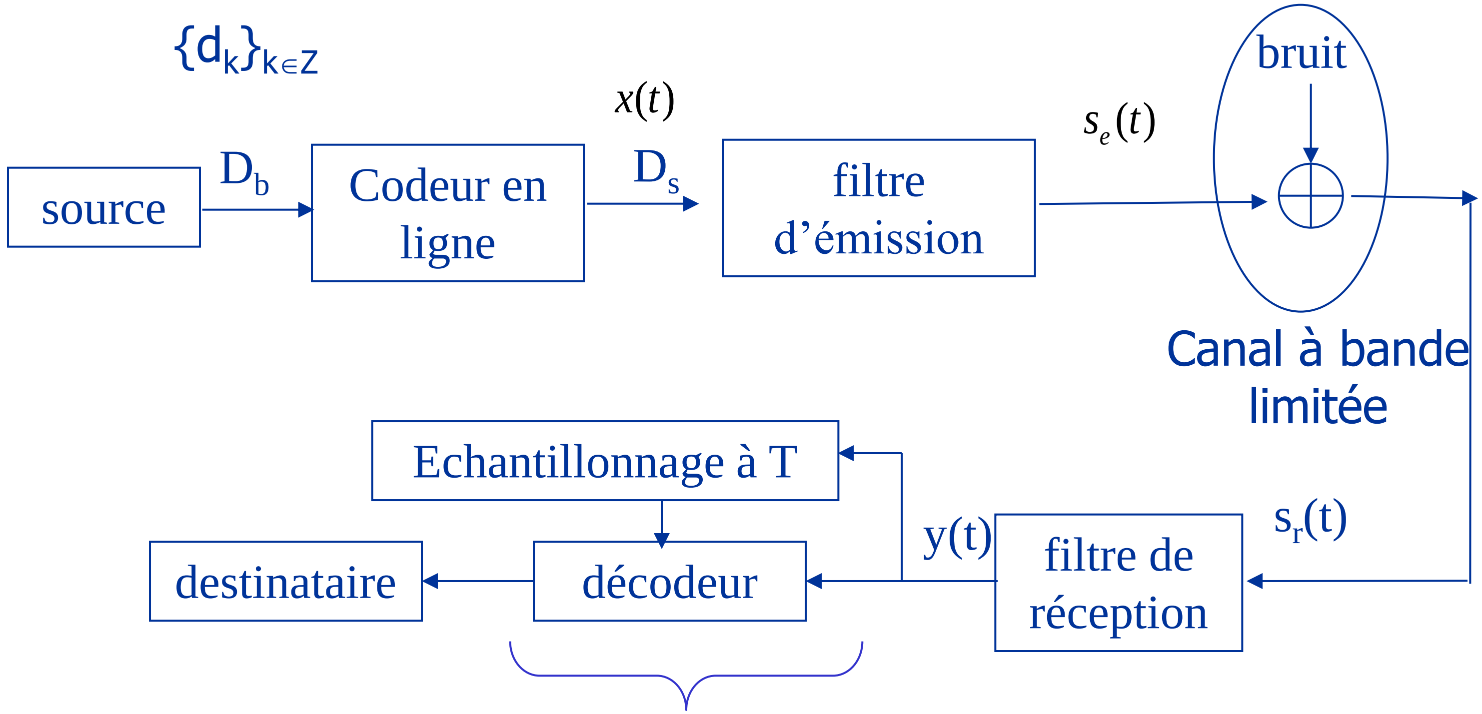
Partie 3 :
Les contraintes dues au bruit

Comment transmettre des bits à travers un canal bruité ? Quel niveau de qualité de la transmission peut-on attendre ?

Chaîne de transmission en bande de base



But : trouver à l'instant $t_j=jT+\tau$ la valeur de a_j !

À l'instant d'échantillonnage : $y(t_j) = a_j l(\tau) + \underbrace{\sum_{k\neq j} a_k l(\tau + (j-k)T)}_{\text{IES=0 avec le critère de Nyquist}} + b_r(jT+\tau)$

Modélisation du bruit

Bruit : blanc, gaussien centré

- blanc = densité spectrale bilatérale de puissance indépendante de la fréquence (= $N_0/2$)

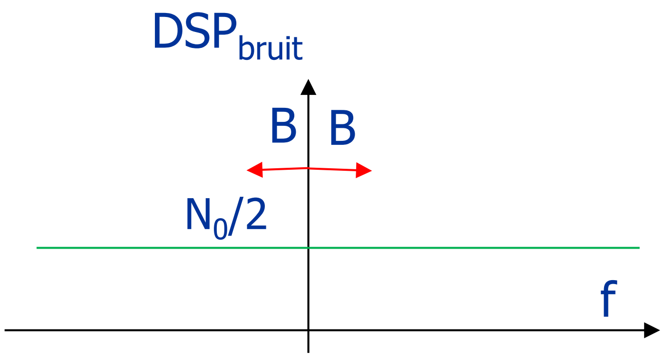
- gaussien = loi de distribution est gaussienne, à valeur moyenne nulle (centré)

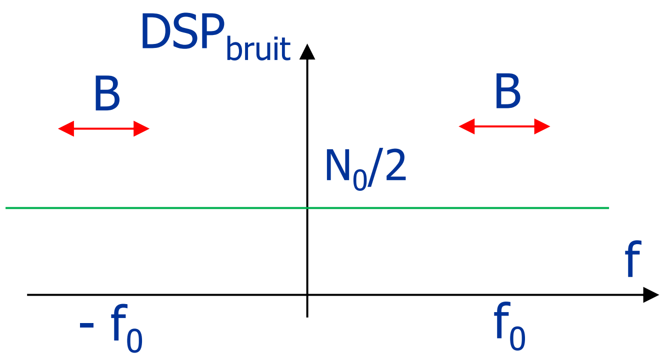
$$p_{b_r}(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} \right)$$

σ^2 = puissance du bruit (à la sortie du filtre de réception)

$p_{br}(u)$: 'probabilité que le bruit $b_r(t)$ prenne une amplitude=u'

Expression de la puissance de bruit dans une bande B



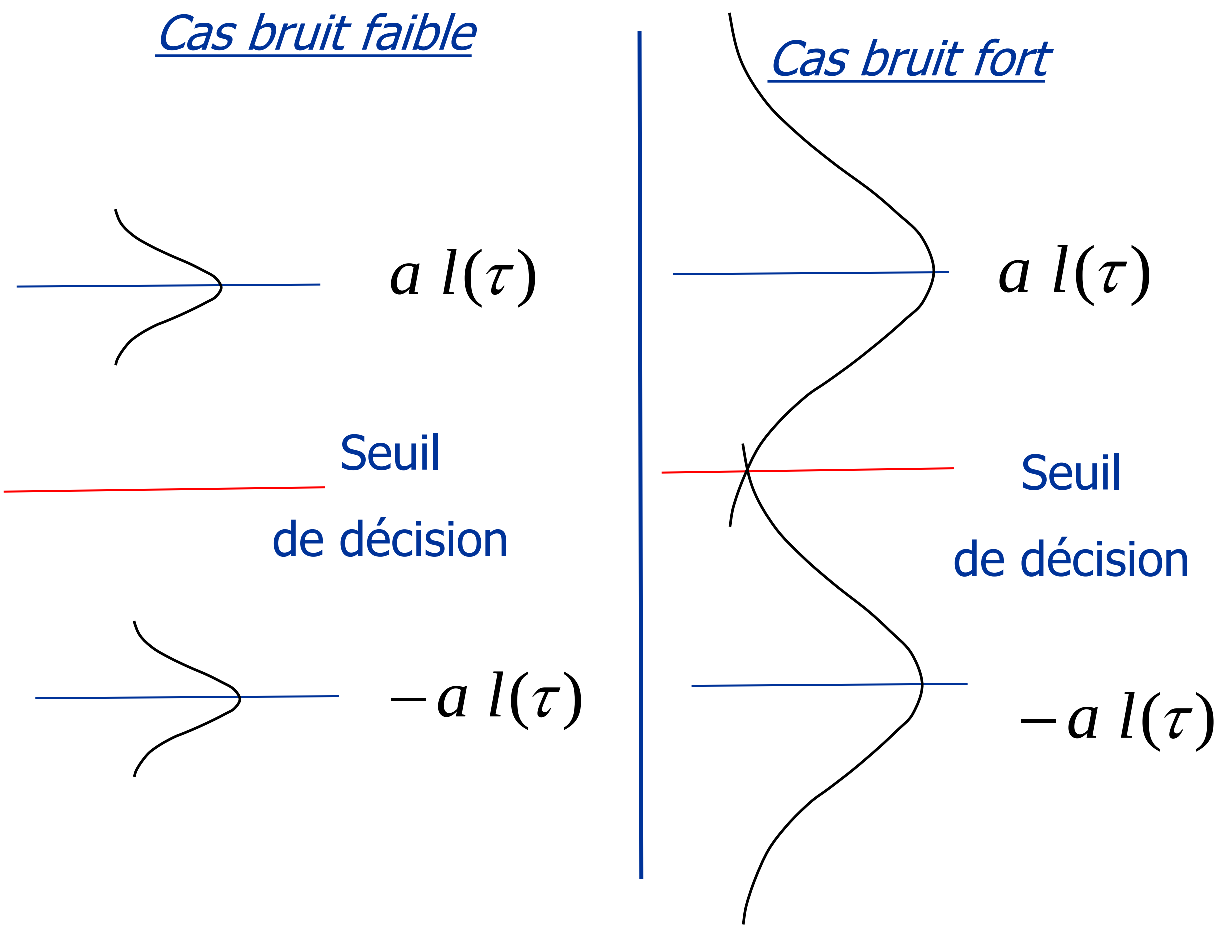


B : définie dans le domaine des fréquences positives

$$\boxed{P_{bruit} = N_0 \times B}$$

Répartition statistique des échantillons reçus

cas d'une transmission NRZ polaire binaire : $a_j = \pm a$



Algorithme de décision :

- si $y(t_j) > 0$

  alors $\hat{a}_j = a$

- si $y(t_j) \leq 0$

  alors $\hat{a}_j = -a$

Estimation de la probabilité d'erreur

Principe du calcul :

$$P_{erreur} = \mathrm{proba}\left(\mathrm{a}_{\mathrm{j}} = -a\right) \times \mathrm{proba}\left(\widehat{a}_j = a / \mathrm{a}_{\mathrm{j}} = -a\right)$$
$$+ \mathrm{proba}\left(\mathrm{a}_{\mathrm{j}} = a\right) \times \mathrm{proba}\left(\widehat{a}_j = -a / \mathrm{a}_{\mathrm{j}} = a\right)$$

or

$$\mathrm{proba}\left(\widehat{a}_j = a / \mathrm{a}_{\mathrm{j}} = -a\right) = \mathrm{proba}\left(\mathrm{b}_{\mathrm{r\,j}} > al(\tau)\right)$$
$$= \int_{al(\tau)}^{+\infty} p_{br}(u)\,du$$

...

alors :

$$\boxed{P_{erreur} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{a^2 l(\tau)^2}{2\sigma^2}}\right) \quad \text{où} \quad erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp\left(-u^2\right) du}$$

Interprétation : rôle du rapport signal/bruit

$a^2 l(\tau)^2$: puissance du signal à l'instant d'échantillonnage

σ^2 : puissance du bruit

=> Probabilité d'erreur dépend du rapport S/B à l'instant d'échantillonnage

=> But = maximiser S/B à l'instant d'échantillonnage !

Rmq : On peut écrire :

$$a^2 l(\tau)^2 = a^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) H_e(f) H_r(f) \exp\left(j 2\pi\tau f \right) df \right]^2$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \left| H_r(f) \right|^2 df$$

Relation de Cauchy-Schwartz

$$\left|\int u(x)v(x)dv\right|^2 \leq \int \left|u(x)\right|^2 dx \int \left|v(x)\right|^2 dx$$

Egalité si : $u(x) = \lambda v^*(x)$

Condition pour maximiser le rapport S/B à l'instant d'échantillonnage

Démonstration complète disponible sur Chamilo

1) Rapport S/B max pour un filtre de réception particulier, appelé le filtre adapté :

$$H_r(f) = \lambda\, F_e^{\,*}(f)\exp\left(-\,j2\pi\tau f\right)$$

2) La valeur du rapport S/B max est connue et dépend de la DSP du bruit, de la puissance de signal à l'entrée du récepteur et de la durée du bit

$$\left.\frac{a^2 l(\tau)^2}{\sigma^2}\right|_{\max} = 2\,\frac{P_{reçue}\times T_b}{N_0}$$

Récepteur numérique optimal : filtrage adapté

Filtre de réception : adapté à la forme de l'impulsion qui arrive

$$\boxed{h_r(t) = \lambda\, f_e(\tau - t)}$$

<ins>Ex</ins> : *forme de l'impulsion = rectangle*

Forme de la réponse impulsionnelle du filtre adapté ?

Forme de l'impulsion à échantillonner ?

=> Rôle du filtre adapté = concentrer le max d'énergie au moment de la prise de décision !

Probabilité d'erreur pour la transmission binaire en bande de base

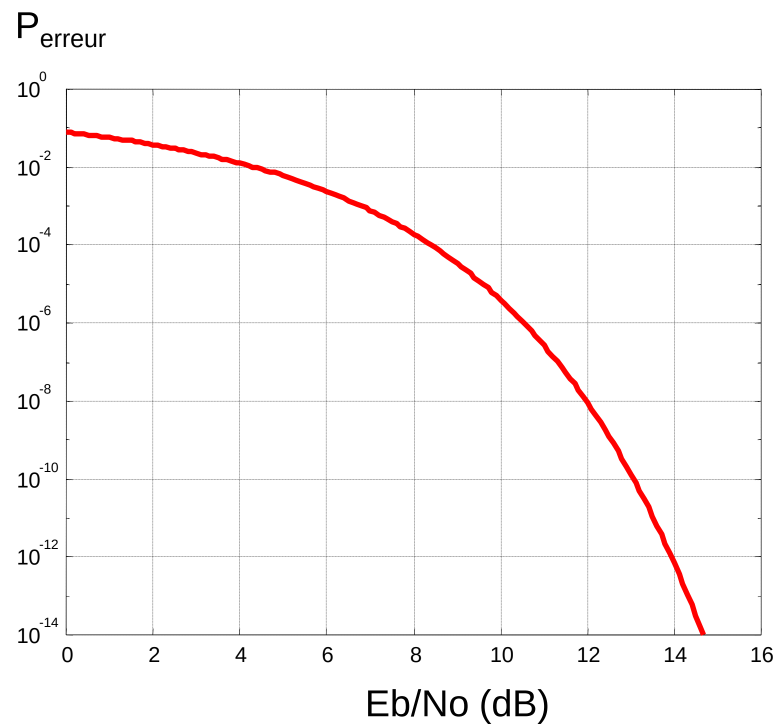
probabilité d'erreur fonction du rapport énergie d'un bit / DSP de bruit au niveau du récepteur :

$$P_{erreur} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

E_b : énergie du bit

$= P_{reçue} \times T_b$

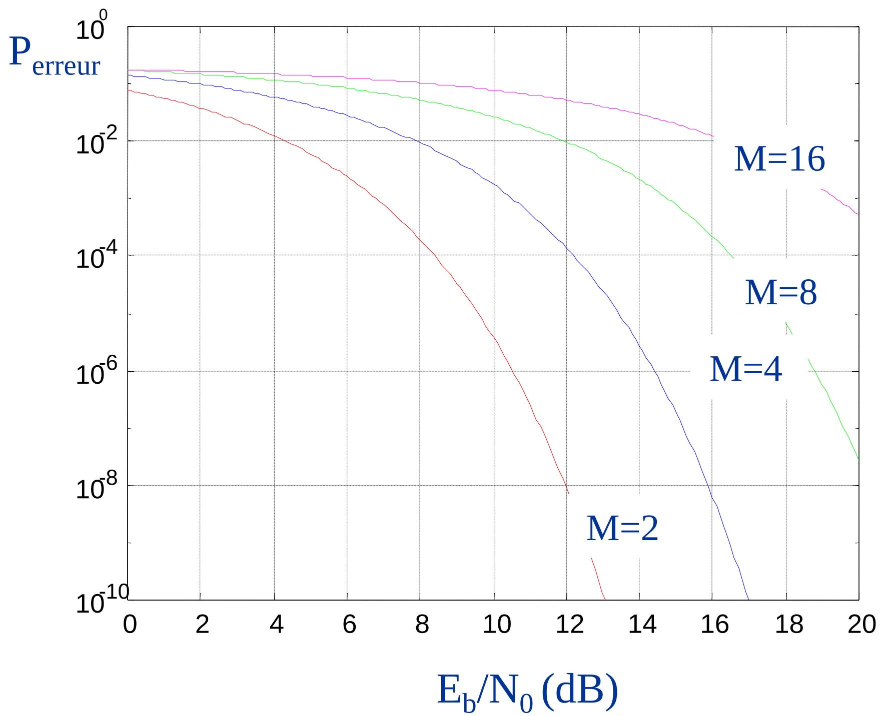
Où : $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-u^2) du$



Rmq : E_b/N_0 (dB) = $10\log_{10}(E_b/N_0)$!

Généralisation à la transmission M-aire en bande de base

$$P_{erreur} \approx \frac{M-1}{M\log_2 M}\, erfc\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



Rmq : en pratique on mesure TEB qui permet d'estimer la P_{erreur}.

=> Si M ↑, pour avoir la même qualité de transmission, E_b/N_0 doit ↑

=> Si M ↑, moins de contraintes fréquentielles, mais + de contraintes sur la puissance émise !

Quelques exemples

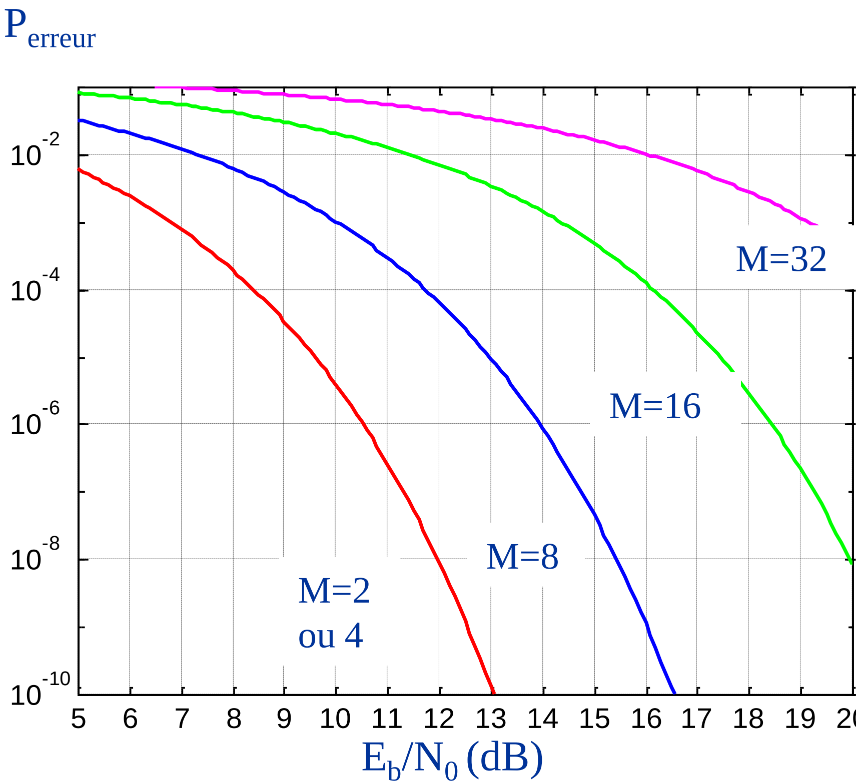
Une transmission binaire à 10 Mbit/s, garantissant un TEB de 10^{-3} (pour un signal téléphonique) pour un canal de bande égale à 7 MHz :

- *Que se passe-t-il si le signal est momentanément atténué de 5 dB ?*

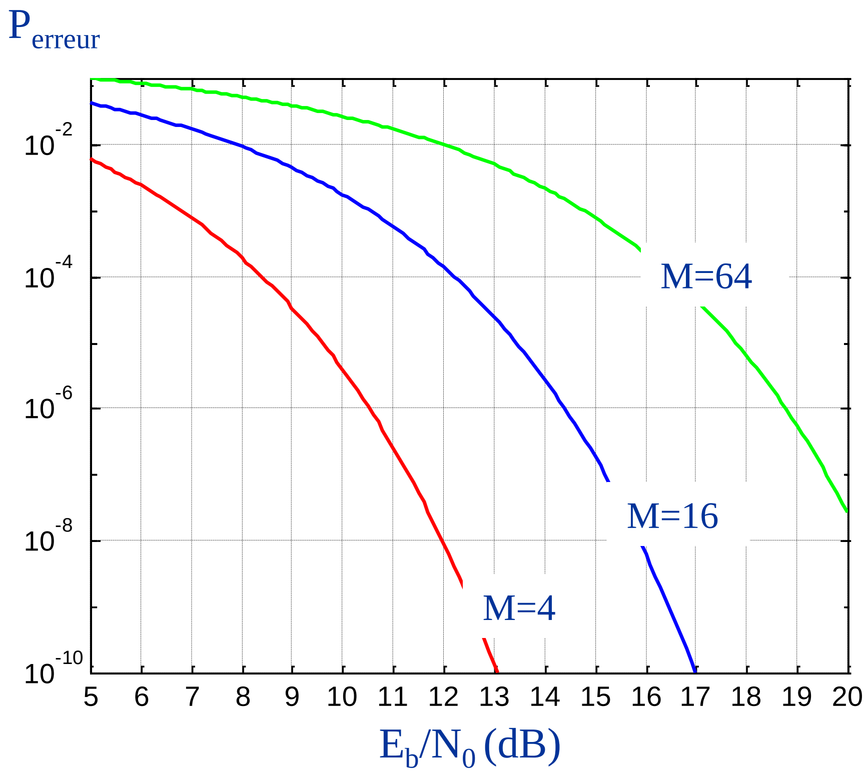
- Comment faire si on veut garantir maintenant un TEB de 10^{-6} (pour un signal video) ?

Performances optimales des différentes modulations

Modulations PSK-M



Modulations QAM-M



=> Si M ↑, pour avoir la même qualité E_b/N_0 doit ↑

=> Si M ↑, moins de contraintes fréquentielles, mais + de contraintes sur la puissance émise !

Lien avec la théorie de l'information

Sous réserve que le débit reste inférieur à la capacité du canal, il est possible de réduire à une valeur arbitrairement petite la probabilité d'erreur sans réduire le débit de transmission.

<u>Expression de la capacité du canal gausien en bit/s (théorème de Shannon-Hartley)</u> :

$$C = B \times log2(1+\text{SNR})$$

$$\eta_{max} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0} . \eta_{max}\right) \frac{\text{bits/sec}}{\text{Hz}}$$

η : efficacité spectrale

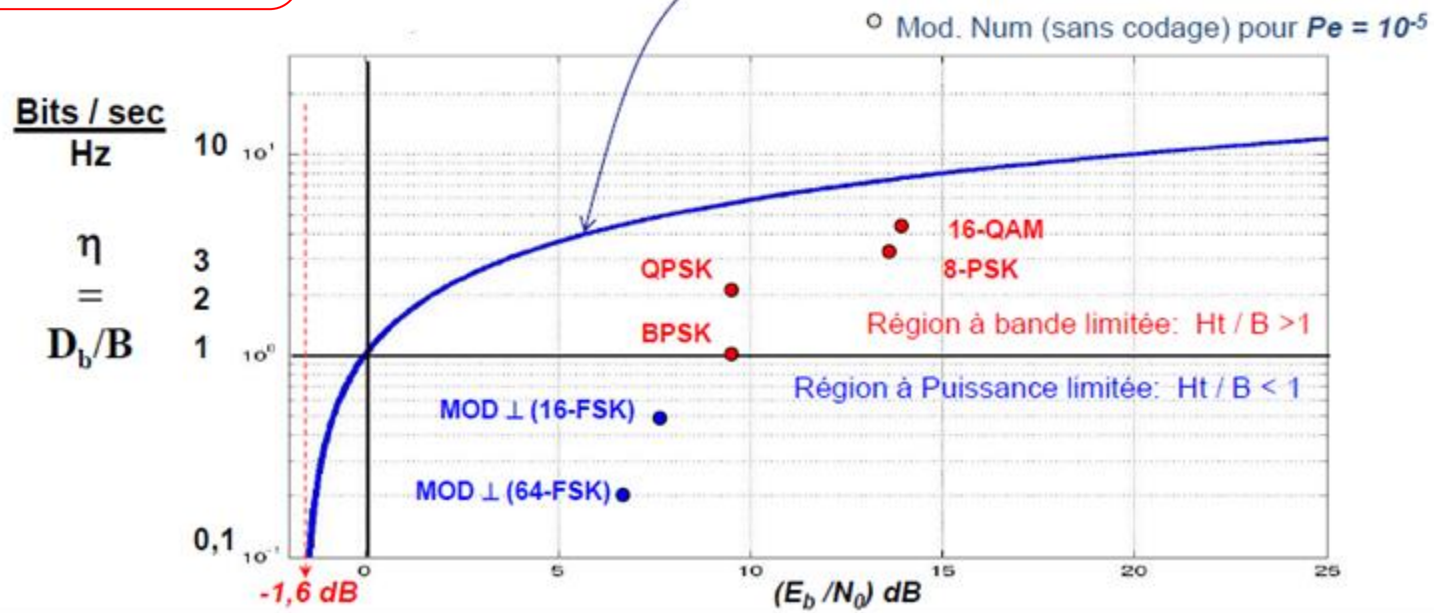
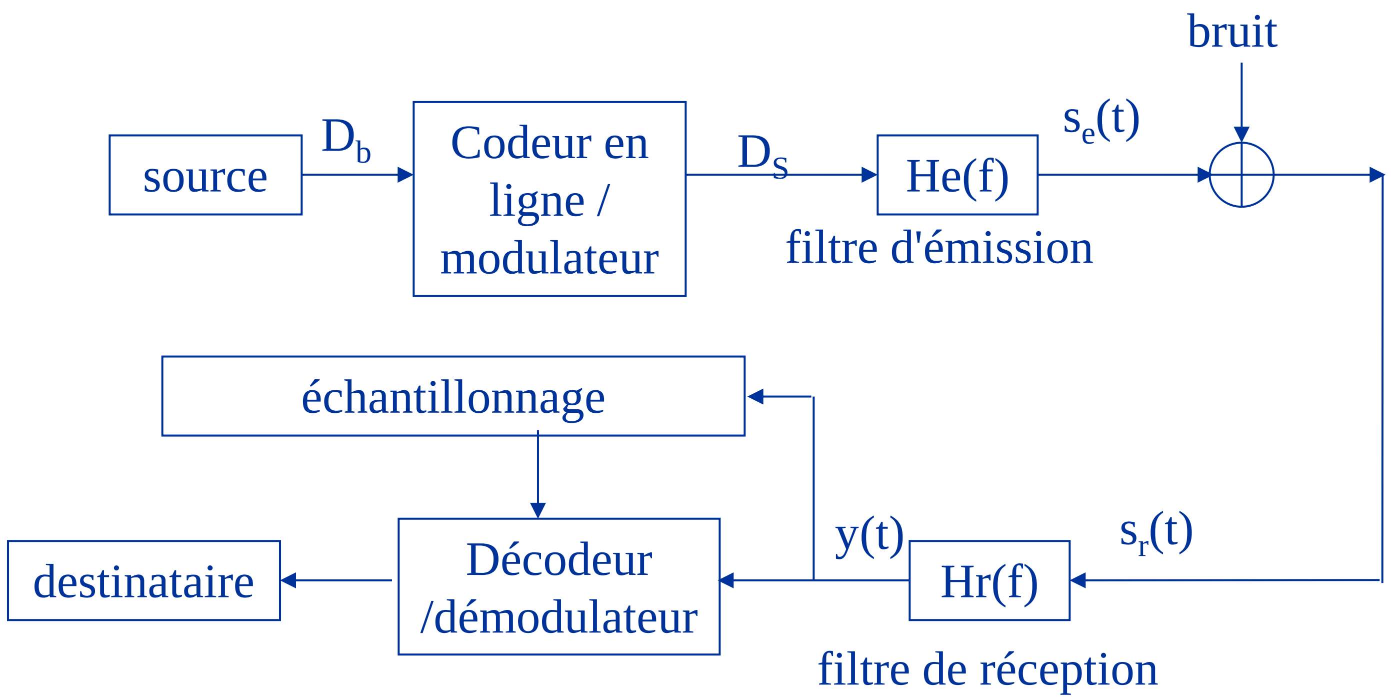


Figure du cours SICN SEOC2A L.Ros

Bilan sur la chaine optimale de transmission numérique



Conditions à respecter pour le récepteur optimal :

- filtrage de Nyquist pour supprimer l'IES

$$(F_e \times H_r)(f) = CS_\alpha(f)$$

- filtrage adapté pour maximiser Signal/Bruit à l'instant d'échantillonnage

$$H_r(f) = \lambda F_e^*(f)\exp(-j2\pi\tau f)$$

=> équirépartition du filtrage de Nyquist entre l'émission et la réception

Bilan 4

Canal : de bande B limitée pour la transmission, à bruit additif

Ressources à utiliser le + efficacement possible :

largeur de bande fréquentielle et puissance émise

- Comprendre le compromis bande occupée / puissance émise
et les implications en cas d'augmentation du débit binaire

- Connaître les rôles des principaux blocs d'une chaîne de transmission

- Savoir s'adapter au canal

- Faire le lien entre débit binaire et le débit symboles
- Choisir un codage optimal (nombre d'états, forme d'impulsion pour un canal) en fonction de la bande du canal et du débit binaire voulu
- Estimer la qualité de la transmission en utilisant les courbes $P_{erreur}(E_b/N_o)$ ou optimiser la puissance nécessaire en réception
- Savoir interpréter un diagramme de l'œil