

Examen du 28 Mai 2014

Durée : 3h.

Les seuls documents autorisés sont les notes du cours et des travaux dirigés de méthodes numériques et du soutien. Tout matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte pour l'évaluation des copies.

I. Normes et Conditionnement

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans \mathbb{C} .

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supposée de plus *sous-multiplicative*, c'est-à-dire:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.

On perturbe la matrice A en $(A + \Delta A)$. On désire alors savoir si la matrice perturbée $(A + \Delta A)$ est encore inversible et si oui, si $(A + \Delta A)^{-1}$ diffère beaucoup de A^{-1} .

1. Montrer que si $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\|S\| < 1$, alors la matrice $(I + S)$ est inversible et on a

$$(I + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k S^k = I - S + S^2 \dots$$

2. En déduire que si $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ alors $(A + \Delta A)$ est inversible.

3. Sous l'hypothèse de la question précédente $\left(\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$ montrer que:

$$\frac{\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \Delta A)^{-1}\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

avec $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ le conditionnement de A .

4. Qu'en déduisez-vous quant au lien entre le conditionnement de A et le fait que $(A + \Delta A)^{-1}$ diffère peu ou beaucoup de A^{-1} ?

II. Méthode de Newton pour un système partiellement linéaire

Soit deux entiers k et n avec $0 < k < n$. On se donne A une matrice (k, k) inversible, un vecteur b de \mathbb{R}^k et une application H de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n-k} non-linéaire.

Tout vecteur x de \mathbb{R}^n sera décomposé en :

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}^k \text{ et } v \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

On considère alors l'application F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n définie par :

$$F(x) = F(u, v) = \begin{pmatrix} Au - b \\ H(u, v) \end{pmatrix}$$

et on cherche à résoudre le système partiellement linéaire $F(x) = 0$.

1. Montrer que la matrice jacobienne $F'(x)$ de F s'écrit :

$$F'(x) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ H_1(x) & H_2(x) \end{pmatrix}.$$

On explicitera les matrices B , $H_1(x)$ et $H_2(x)$.

2. Expliciter l'itération de Newton dans \mathbb{R}^n pour résoudre $F(x) = 0$:

pour $x^r = \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix}$ on explicitera le système linéaire à résoudre à chaque pas, ainsi que $x^{r+1} = \begin{pmatrix} u^{r+1} \\ v^{r+1} \end{pmatrix}$.

On envisage une autre façon de résoudre le système : dans un premier temps, on résout le système linéaire $Au = b$; on note u^* la solution. On réinjecte la solution dans le système et on obtient un nouveau système non-linéaire à résoudre :

$$G(v) = 0 \text{ où } G : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}.$$

3. Calculer la matrice jacobienne de G .
4. Expliciter l'itération de Newton dans \mathbb{R}^{n-k} pour résoudre ce nouveau système, et montrer que l'on obtient le même algorithme que celui de la question 2.

III. Factorisation de Cholesky

1. Effectuer la factorisation de Cholesky LL^T de la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que l'algorithme de factorisation de Cholesky préserve la structure bande des matrices, i.e.:

Si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| \geq p$ alors $l_{ij} = 0$ pour $|i - j| \geq p$.

IV. Itérations linéaires

Soient L_1 et L_2 deux matrices (n, n) à éléments réels, et z un vecteur de \mathbb{R}^n .

On cherche à résoudre le système suivant: $(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 = L_1(z - x_2) \\ x_2 = L_2(z - x_1) \end{cases}$

où x_1 et x_2 sont deux vecteurs inconnus de \mathbb{R}^n , et L_1 et L_2 deux matrices telles que le rayon spectral de L_1L_2 est égal au rayon spectral de L_2L_1 (i.e. $\rho(L_1L_2) = \rho(L_2L_1)$).

On considère les deux itérations suivantes:

$$(J) \quad \begin{cases} x_1^{(0)} \text{ et } x_2^{(0)} \text{ donnés dans } \mathbb{R}^n \\ x_1^{(r+1)} = L_1(z - x_2^{(r)}) \\ x_2^{(r+1)} = L_2(z - x_1^{(r)}) \end{cases} \quad (G) \quad \begin{cases} y_1^{(0)} \text{ et } y_2^{(0)} \text{ donnés dans } \mathbb{R}^n \\ y_1^{(r+1)} = L_1(z - y_2^{(r)}) \\ y_2^{(r+1)} = L_2(z - y_1^{(r+1)}) \end{cases}$$

1. Mettre respectivement (J) et (G) sous forme d'itérations linéaires dans \mathbb{R}^{2n}

$$\begin{cases} u^{(r+1)} = T_J u^{(r)} + h_J & \text{pour } (J) \\ v^{(r+1)} = T_G v^{(r)} + h_G & \text{pour } (G) \end{cases}$$

On explicitera soigneusement les matrices $(2n, 2n)$ T_J et T_G , ainsi que les vecteurs h_J et h_G .

2. Montrer que (J) et (G) convergent ou divergent simultanément, selon la valeur de $\rho(L_1L_2)$.

3. Montrer que si (J) et (G) convergent, alors (G) converge deux fois plus vite que (J) vers l'unique solution du problème (Σ) .