CM n°9 : Proba appliquées : Formules de conditionnement.

Définition :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. On suppose que ce couple admet une loi de densité $p(x, y)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, tq $p_X(x) > 0$
On appelle espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$, la fonction

$$\phi(x) = \mathbb{E}[Y \,|\, X = x] = \int_{\mathbb{R}} y p_Y(y \,|\, X = x) dy \quad \text{(si définie)}$$

$= $ « espérance de la loi conditionnelle ».

Attention : c'est une fonction de la variable x

Formule de conditionnement :

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[Y \,|\, X = x] p_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) p_X(x) dx\,.}$$

En d'autres termes,

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\phi(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \,|\, X]]$$

Variables aléatoires

La formule est valide de façon générale, lorsque le couple (X, Y) n'admet pas forcément une loi à densité.

Exemple : Soit A un événement et $Y = \mathbb{1}_A \in \{0,1\}$

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = P(A) = \int_{\mathbb{R}} P(A \,|\, X = x) p_X(x) dx}$$

La formule encadrée correspond à la formule des probabilités totales pour un conditionnement par une variable aléatoire « continue ».

Attention, $P(A \,|\, X = x) \neq \dfrac{P(A \cap X = x)}{P(X = x)} = \dfrac{'0'}{0}$

Exercice n°1 :

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi $U(0,\ 1)$.
Quelle est la loi de $Y = UV$?

Solution : Soit $t \in [0,1]$.

$$F(t) = P(Y \leq t) = P(UV \leq t)$$

On utilise la formule des probabilités totales en conditionnant par une variable, par exemple V.

$$F(t) = \int_0^1 P(UV \leq t \,|\, V = v)p_V(v)dv \ = \int_0^1 P(vU \leq t \,|\, V = v)dv$$ *« densité = 1, V=v »*

$$F(t) = \int_0^1 P(U \leq \frac{t}{v})dv.$$ *« indépendance de U et de V ».*

Pour résoudre ce calcul, on doit penser à discuter les différentes valeurs relatives de t et de v.

$$F(t) = \int_0^t P(U \leq \frac{t}{v})dv + \int_t^1 P(U \leq \frac{t}{v})dv \ = t + t\int_t^1 \frac{1}{v}dv \ = t(1 - \ln(t)).$$

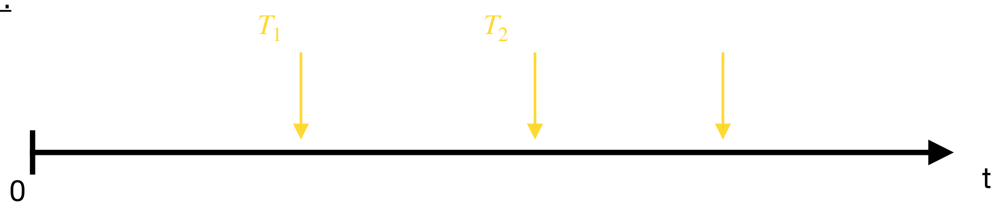
Continuité :

- $F(0) = ? = 0(1 - \ln(0)) = 0$ par convention
- $F(1) = 1 ?,\ \ 1(1 - \ln(1)) = 1$

La fonction de répartition est bien continue. **Densité** : $\forall y \in \mathbb{R},\ p_Y(y) = -\ln(y)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$

Exercice n°2 : Dans un processus de poisson de paramètre $\lambda > 0$, on s'intéresse au temps d'attente de la seconde occurence. (on peut généraliser)

Rappel :



N_t correspond au nombre d'occurrences au temps t qui suit une loi de Poisson (λt).
T_1 suit la loi exponentielle de fréquence λ.
$\forall t \in \mathbb{R}, P(T_1 \geq t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.
Les durées inter-occurences X_1 et X_2 sont indépendantes et de loi exponentielle $\epsilon(\lambda)$.

$$\boxed{T_2 = X_1 + X_2}$$

<u>Loi de T_2 :</u> Soit $t \geq 0$,

$$P(T_2 \leq t) = P(X_2 + X_1 \leq t) = \int_0^{+\infty} P(X_1 + X_2 \leq t \,|\, X_1 = x) p_{X_1}(x) dx \quad \textit{(par conditionnement)}$$

$$= \int_0^t P(X_2 \leq t - x) p_{X_1}(x) dx = (F_{X_2} * p_{X_1})(t) \quad \textit{(produit de convolution)}$$

$$= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-x)}) \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} = 1 - P(N_t = 0) - P(N_t = 1) = P(N_t \geq 2).$$

<u>Remarque :</u>

$T_2 \leq t \Leftrightarrow N_t \geq 2$: donne le résultat directement.

Pour la n^{ieme} occurence :

$$T_n \leq t \Leftrightarrow N_t \geq n \Rightarrow P(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)$$

Alors, la **densité est :**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \; p_{T_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \quad \text{« loi gamma »}$$

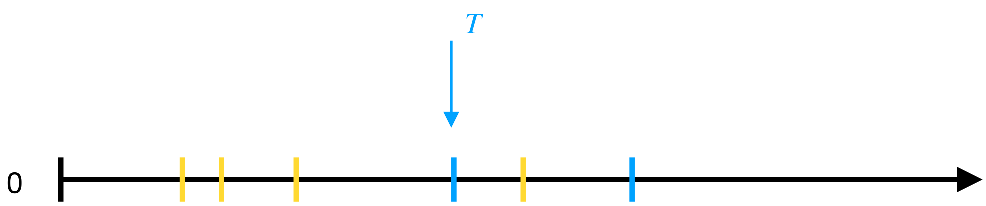
<u>Remarque :</u>

Si U et V suivent une loi uniforme $U(0,\ 1)$ et sont indépendantes,

1. $-\ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.
2. $-\ln(UV) = X_1 + X_2 = T_2$ avec $\lambda = 1$

<u>Exercice n°3 :</u>

Soit N_t un processus de poisson de paramètre λ. Les occurrences sont de deux types indépendants, bleu ou jaune, dont les proportions sont différentes. On s'intéresse au nombre d'occurrences jaunes au moment de la première occurence bleue.



- : proportion de p. N_t^J est un processus de poisson de paramètre λp
- : proportion de $q = 1 - p$ N_t^B est un processus de poisson de paramètre λq

Loi du nombre de traits jaunes au temps $T = T^B$: $N^J_{T^B}$ = ?

$P(N^J_{T^B} \geq n) = P(T^J_n \leq T^B) = P(X^J_1 + \ldots + X^J_n \leq T^B)$

On fait le conditionnement :

$$= \int_0^{+\infty} p_{X^J_1+\ldots+X^J_n}(t) P(T^B \geq t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} p_{X^J_1+X^J_2+\ldots+X^J_N}(t) e^{-\lambda q t} dt$$

$= \mathbb{E}[e^{-\lambda q X^J_1}] \ldots \mathbb{E}[e^{-\lambda q X^J_n}]$ *par la formule du transfert puis indépendance.*

$$= (\mathbb{E}[e^{-\lambda q X^J_1}])^n = (\int_0^{+\infty} e^{-\lambda q x} \lambda p e^{-\lambda p x} dx)^n = p^n$$

On a alors,

$P(N^J_{T^B} = n) = p^n q$, $\forall n \geq 0$ (Loi de pascal).