Examen de théorie de l'information - Ensimag - 1A

Novembre 2018

POLYCOPIE, NOTES DE COURS ET CALCULATRICES AUTORISES

Le sujet est composé de 5 problèmes indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

1 Questions générales (3 points)

Soient

X une variable aléatoire à $N = 2$ états (x_1 et x_2),

Y une variable aléatoire à $M = 3$ états (y_1, y_2 et y_3)

avec les probabilités conjointes $P(X = x_i\ ; Y = y_j)$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$ données ci-dessous :

$P(x_i\ ; y_j)$	y_1	y_2	y_3
x_1	$1/8$	$1/8$	$1/4$
x_2	$3/8$	$1/8$	0

1. Déterminer les entropies $H(X)$ (0.5 point), $H(Y)$ (0.5 point) et $H(Y|X)$ (0.5 point) ainsi que l'information mutuelle $I(X\ ; Y)$ (0.5 point) (on donnera les valeurs exactes — avec $\log$ (0.5 point) — et approchées).
2. En déduire $H(X|Y)$. (0.5 point)

2 Capacité de canal (3 points)

On considère un canal symétrique, tel que

+ l'entrée X peut prendre $N = 3$ états notés $\{0; 1; 2\}$,

+ la sortie Y peut prendre $M = 3$ états notés $\{0; 1; 2\}$,

+ $p(y = 1|x = 0) = p$, $p(y = 2|x = 0) = q$ et $p(y = 0|x = 1) = q$.

1. Ecrire la matrice de transition de ce canal. (1 point)
2. Quelle loi d'entrée maximise l'information mutuelle entre l'entrée et la sortie ? (1 point)
3. Calculer la capacité de ce canal (1 point)

3 Déchiffrabilité (6 points)

On code une source simple à 4 états par les mots binaires

$M_1 = 1, M_2 = 101, M_3 = 10, M_4 = 01$ de longueurs $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 2$, $l_4 = 2$.

1. Montrer que ce code n'est pas instantané. (0,5 point)
2. Ce code est-il déchiffrable ? Justifier votre réponse. (0,5 point)
3. Montrer qu'il n'existe pas de code instantané binaire avec le même jeu de longueurs. (1 point)
4. Existe-t-il un code instantané ternaire ? Justifier dans le cas négatif ou donner un tel code dans le cas positif en précisant si le code donné peut-être un code de Huffman. (1,5 point)
5. A partir de maintenant, les probabilités des 4 états sont $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/8$. (1 point) Construire un code binaire instantané de longueur moyenne aussi faible que possible pour le codage de cette source.
6. Calculer l'entropie de la source. (0,5 point)
7. Montrer qu'il n'est pas nécessaire de coder des extensions de cette source pour atteindre l'efficacité maximale. (1 point)

4 Codage canal (5 points)

On considère le code bloc linéaire binaire de matrice de contrôle de parité :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rendement de ce code ? (0,5 point)
2. Donner sa matrice génératrice. (0,5 point)
3. Dire de combien de mots le code est composé (0,5 point) et écrire l'ensemble des mots (0,5 point).
4. Calculer sa capacité de correction d'erreur. (1 point)
5. On note $\mathbf{c}$ le mot de code en entrée du canal. Le canal est supposé binaire symétrique de probabilité de transition $p < 1/2$. On note $\mathbf{y}$ la séquence observée en sortie du canal.
   (a) En supposant qu'il s'est produit une seule erreur, dire quelles sont les valeurs possibles du syndrome et donner un algorithme de correction d'erreur (autre que la recherche exhaustive). (1 point)
   (b) Le syndrome vaut 110, que peut-on dire ? (1 point)

5 Réduction de l'entropie par fusion d'états (3 points)

Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$ et Y la v.a. à valeurs dans

$\{y_1 = x_1, \cdots, y_{k-1} = x_{k-1}, y_k = \{x_k \cup x_{k+1}\}\}$

(C'est-à-dire que l'état y_k est obtenu en groupant les états x_k et x_{k+1} de la v.a. X.)

1. Montrer que l'entropie de Y est inférieure ou égale à celle de X. (2 point)
2. Dans quel cas a-t-on égalité ? (1 point)