IPD

GUIOL

CALCUL D'ITÔ

MARTINGALES BROWNIENNES

COVARIATION QUADRATIQUE

FORMULE D'ITÔ BI-DIMENSIONNELLE

FORMULE D'ITÔ BI-DIMENSIONNELLE

MOUVEMENT BROWNIEN EN DIMENSION d

THÉORÈME DE CAMERON-MARTIN

PROBABILITÉS ÉQUIVALENTES

CHANGEMENT DE PROBABILITÉS

THÉORÈME DE CAMERON-MARTIN

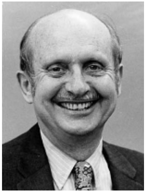
INTRODUCTION AUX PRODUITS DÉRIVÉS

PAGE DU COURS SUR CHAMILO

Hervé Guiol (IPS LJK)

Kiyosi Itô
1915-2008

Robert H. Cameron
1908-1989



W. Ted Martin
1911-2004

Plan du cours d'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. Premières propriétés du MBS.
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. Intégrale d'Itō : définitions et construction. Processus d'Itō. Variation quadratique.
8. Calcul d'Itō : formules d'Itō. Représentation des martingales Browniennes.
9. **Formule de Cameron-Martin.**
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itō.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

Résumé

IPD

Guiol

Calcul d'Itô
Martingales Browniennes
Covariation Quadratique
Formule d'Itô bi-dimensionnelle
Formule d'Itô bi-dimensionnelle
Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin
Probabilités équivalentes
Changement de probabilités
Théorème de Cameron-Martin

1. Calcul d'Itô
   - Martingales Browniennes
   - Covariation Quadratique
   - Formule d'Itô bi-dimensionnelle
   - Formule d'Itô bi-dimensionnelle
   - Mouvement Brownien en dimension d
2. Théorème de Cameron-Martin

IPD

Guiol

Calcul d'Itô

Martingales Browniennes

Covariation Quadratique

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Changement de probabilités

Théorème de Cameron-Martin

Théorème 6.11

Soit $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un M.B.S. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on considère $(\mathcal{F}_t^W)_{0\leq t\leq T}$ sa **filtration naturelle complétée** i.e. $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$ telle que $\mathcal{F}_T^W = \mathcal{F}$. Pour toute $(\mathcal{F}_t^W)_{0\leq t\leq T}$-martingale $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ il existe un processus $H \in \Pi_3^2([0, T])$ tel que $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dW_s = \mathbb{E}(M_T) + \int_0^t H_s\, dW_s.$$

Si de plus M est de carré intégrable alors $H \in \Pi_2^2([0, T])$.

Exemple

Pour toute variable aléatoire Z, $\mathcal{F}_T^W$-mesurable, de carré intégrable alors il existe H, càd-làg $(\mathcal{F}_t^W)_{0\leq t\leq T}$-adapté, vérifiant $\int_0^T \mathbb{E}(H_s^2)\, ds < +\infty$ tel que

$$\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t^W) = \mathbb{E}(Z) + \int_0^t H_s\, dW_s.$$

Covariation Quadratique

IPD

Guiol

Calcul d'Itô

Martingales Browniennes

Covariation Quadratique

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Changement de Probabilités

Théorème de Cameron-Martin

Définition 6.12

Pour deux processus X et Y on définit leur covariation quadratique comme le processus $\langle X, Y\rangle = (\langle X, Y\rangle_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$\langle X, Y\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})$$

où $\Delta_n(t) = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{t_i\in\Delta_n(t)} (t_i - t_{i-1}) = 0$.

Proposition 6.13

- On a $\langle X, X\rangle = \langle X\rangle$;
- Identité de polarisation : $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{4}(\langle X + Y\rangle - \langle X - Y\rangle)$;
- L'opérateur $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique ;
- Si X et Y sont à trajectoires continues alors $\langle X, Y\rangle$ l'est aussi.
- $t \mapsto \langle X, Y\rangle_t$ est à variations finies.

Covariation Quadratique

IPD

Guiol

Calcul d'Itô

Martingales Browniennes

Covariation Quadratique

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Changement de probabilités

Théorème de Cameron-Martin

Proposition 6.14

- Si M et N **sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingales de carrés intégrables, à trajectoires continues**, alors $\langle M, N\rangle$ est l'unique processus à variations finies, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté, à trajectoires continues, valant 0 en $t = 0$ tel que

$$MN - \langle M, N\rangle = (M_t N_t - \langle M, N\rangle_t)_{t\geq 0}$$

  est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.
- Si X est **à variation finie et Y continu** alors $\langle X, Y\rangle = 0$;
- Si X et Y sont **deux processus indépendants** alors $\langle X, Y\rangle = 0$.
- Si $X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$ et $Y_t = Y_0 + \int_0^t L_s\, ds + \int_0^t R_s\, dW_s$ sont **deux processus d'Itô** alors

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s R_s\, ds$$

COVARIATION QUADRATIQUE

EXEMPLE

1. Soit B un M.B.S. et $M = (M_t)$ définit par $M_t = B_t^2 - t$. Calculer $\langle B, M\rangle_t$.
Indication : on écrit $B_t = \int_0^t 1\, dB_s$ et $M_t = \int_0^t 2B_s\, dB_s$
2. Prouvez que $B_t M_t - \langle B, M\rangle_t$ est une martingale sans utiliser le premier point de la proposition 6.14.
Indication : appliquer Itô à $f(t, B_t) = B_t^3 - tB_t$.

PROPOSITION 6.15

Soient X et Y deux processus de covariation quadratique $\langle X, Y\rangle$ alors pour toute fonction continue f on a avec probabilité 1

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \Delta_n(t)} f(t_{i-1})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) = \int_0^t f(s)\, d\langle X, Y\rangle_s$$

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

IPD

Guiol

Calcul d'Itô

Martingales Browniennes

Covariation Quadratique

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Changement de probabilités

Théorème de Cameron-Martin

Théorème 6.16. Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Soient X et Y deux processus à trajectoires continues et à variations quadratiques finies. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ on a presque sûrement $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t, X_t, Y_t) &= f(0, X_0, Y_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s, Y_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s, Y_s)\, dX_s \\ &+ \int_0^t f'_y(s, X_s, Y_s)\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f''_{yy}(s, X_s, Y_s)\, d\langle Y\rangle_s + \int_0^t f''_{xy}(s, X_s, Y_t)\, d\langle X, Y\rangle_s \end{aligned}$$

Corollaire 6.17. Formule d'IPP

Soient X et Y deux processus à trajectoires continues et à variations quadratiques finies.

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t X_s\, dY_s + \langle X, Y\rangle_t$$

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Théorème 6.16. Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Soient X et Y deux processus à trajectoires continues et à variations quadratiques finies. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ on a presque sûrement $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t, X_t, Y_t) \quad &= \quad f(0, X_0, Y_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s, Y_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, X_s, Y_s)\, dX_s \\ &\quad + \int_0^t f_y'(s, X_s, Y_s)\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f_{yy}''(s, X_s, Y_s)\, d\langle Y\rangle_s + \int_0^t f_{xy}''(s, X_s, Y_t)\, d\langle X, Y\rangle_s \end{aligned}$$

Corollaire 6.17. Formule d'IPP

Soient X et Y deux processus à trajectoires continues et à variations quadratiques finies.

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t X_s\, dY_s + \langle X, Y\rangle_t$$

MOUVEMENT BROWNIEN EN DIMENSION d

DÉFINITION

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ on définit un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Mouvement Brownien de dimension d un processus $B = (B_1, ..., B_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que

- $\forall i \in \{1, ..., d\}$ le processus $(B_i(t))_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S.
- $\forall i \neq j$ les processus B_i et B_j sont indépendants.

PROCESSUS D'ITÔ

Dans ce contexte on appelle processus d'Itô tout processus X de représentation

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \sum_{i=1}^{d} H_i(s) \, dB_i(s)$$

où les processus K, H_1,..., H_d sont $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté et vérifient

$$\int_0^t \left(|K_s| + \sum_{i=0}^{d} H_i^2(s) \right) ds < +\infty$$

RÉSUMÉ

IPD

GUIOL

CALCUL D'ITÔ

MARTINGALES BROWNIENNES

COVARIATION QUADRATIQUE

FORMULE D'ITÔ BI-DIMENSIONNELLE

FORMULE D'ITÔ BI-DIMENSIONNELLE

MOUVEMENT BROWNIEN EN DIMENSION d

THÉORÈME DE CAMERON-MARTIN

PROBABILITÉS ÉQUIVALENTES

CHANGEMENT DE PROBABILITÉS

THÉORÈME DE CAMERON-MARTIN

1 CALCUL D'ITÔ

2 THÉORÈME DE CAMERON-MARTIN
- Probabilités équivalentes
- Changement de Probabilités
- Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Calcul d'Itô

Martingales Browniennes

Covariation Quadratique

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Changement de probabilités

Théorème de Cameron-Martin

Définition 7.1

Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on dira qu'une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est

- absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, noté $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$, si

$$\forall A \in \mathcal{F} \ : \ \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

- équivalente à $\mathbb{P}$ si $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} << \mathbb{Q}$. On note alors $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Exemple

Sur $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ définies par

$$\mathbb{P}(]a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx \text{ et } \mathbb{Q}(]a, b]) = \int_a^b \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|} \, dx$$

sont équivalentes. Par contre elles ne sont pas équivalentes à $\widetilde{\mathbb{Q}}$ définie par :

$$\widetilde{\mathbb{Q}}(]a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) dx$$

on a seulement $\widetilde{\mathbb{Q}} << \mathbb{P}$ et $\widetilde{\mathbb{Q}} << \mathbb{Q}$.

CALCUL D'ITÔ
MARTINGALES BROWNIENNES
COVARIATION QUADRATIQUE
FORMULE D'ITÔ BI-DIMENSIONNELLE
FORMULE D'ITÔ BI-DIMENSIONNELLE
MOUVEMENT BROWNIEN EN DIMENSION d
THÉORÈME DE CAMERON-MARTIN
PROBABILITÉS ÉQUIVALENTES
CHANGEMENT DE PROBABILITÉS
THÉORÈME DE CAMERON-MARTIN

CHANGEMENT DE PROBABILITÉS

DÉFINITION 7.2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définit un changement de probabilités par rapport à $\mathbb{P}$ s'il existe une v.a. L, $\mathcal{F}$-mesurable telle que

$$\forall A \in \mathcal{F} \ : \ \mathbb{Q}(A) = \int_A L \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_A L)$$

La v.a. L est appelée densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$. On note alors $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L$ ou $d\mathbb{Q} = L \, d\mathbb{P}$ et on a $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$.

PROPRIÉTÉS.

- Pour toute v.a. Z, $\mathbb{Q}$-intégrable $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(LZ)$.
- Radon-Nykodym : si $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ alors il existe L vérifiant la définition ci dessus.
- Si de plus $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ alors L est strictement positive $\mathbb{P}$-p.s. et on a $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = L^{-1}$.

Changement de moyenne et de moyenne/variance d'une v.a. Gaussienne

Calcul d'Itô
Martingales Browniennes
Covariation Quadratique
Formule d'Itô bi-dimensionnelle
Formule d'Itô bi-dimensionnelle
Mouvement Brownien en dimension d
Théorème de Cameron-Martin
Probabilités équivalentes
Changement de Probabilités
Théorème de Cameron-Martin

Propositions 7.3 et 7.4

Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé on pose

$$L = L_\lambda(X) = \exp\left(\lambda(X-\mu) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)$$

   La v.a. L est > 0 et d'espérance 1 sous $\mathbb{P}$ et elle définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente sous laquelle X suit la loi $\mathcal{N}(\mu + \lambda\sigma^2, \sigma^2)$.

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta < \frac{1}{2\sigma^2}$ fixés on pose $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-2\theta\sigma^2}$ et

$$Z = Z_{\lambda,\theta}(X) = \frac{\Sigma}{\sigma}\exp\left(\theta(X-\mu)^2 + \lambda(X-\mu) - \frac{1}{2}\lambda^2\Sigma^2\right)$$

   La v.a. Z est > 0 et d'espérance 1 sous $\mathbb{P}$ et elle définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente sous laquelle X suit la loi $\mathcal{N}(\mu + \lambda\Sigma^2, \Sigma^2)$.

Changement de moyenne pour les vecteurs Gaussiens

IPD

Guiol

Calcul d'Itô

Martingales Browniennes

Covariation Quadratique

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Changement de probabilités

Théorème de Cameron-Martin

Proposition 7.5

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n, Z)$ un vecteur Gaussien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La v.a.

$$L = \exp\left(Z - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)\right)$$

définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente sous laquelle le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est Gaussien de matrice de covariance inchangée et de vecteur des espérance vérifiant

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i) + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X_i, Z)$$

En particulier pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ borelienne positive

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(X_1, ..., X_n)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(Z - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)\right) f(X_1, ..., X_n)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f\left(X_1 + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X_1, Z), ..., X_n + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X_n, Z)\right)\right]
\end{aligned}$$

Théorème de Cameron-Martin

IPD

Guiol

Calcul d'Itô

Martingales Browniennes

Covariation Quadratique

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Mouvement Brownien en dimension d

Théorème de Cameron-Martin

Probabilités équivalentes

Changement de probabilités

Théorème de Cameron-Martin

Théorème 7.6. Formule de Camron-Martin

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $B = (B_t)_{0\leq t\leq T}$ un $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-M.B.S. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable déterministe telle que $\int_0^T h^2(s)\, ds < +\infty$. Alors le processus $L = (L_t)_{0\leq t\leq T}$ définit par

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t h(s)\, dB_s - \int_0^t h^2(s)\, ds\right)$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale et il existe une probabilité $\mathbb{Q}_T$ equivalente à $\mathbb{P}$ telle que $L_T = d\mathbb{Q}_T/d\mathbb{P}$ **sous laquelle** le processus $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ définit par

$$W_t = B_t + \int_0^t h(s)\, ds$$

est un $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-M.B.S.