Examen - Session 1

Mardi 2 janvier 2019 - 2h

Documents et calculatrices interdits, hormis une feuille A4 recto-verso manuscrite.
N.B. : *La rédaction sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est toutefois préférable de conserver l'ordre proposé (difficulté croissante)*

Exercice 1

1. *Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.*
   Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite de fonctions f_n par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f_n(x) = \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)}$$

   (i) Soit $g_n(x) = n \sin(x/n)$. Montrer que la suite g_n converge simplement vers $x \mapsto x$.

   (ii) Montrer que pour tout $u \geq 0$, $\sin(u) \leq u$.

   (iii) En déduire que f_n est majorable par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   (iv) Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$$

   (on justifiera les calculs).

Exercice 2

On note $\mathcal{F}$ l'application qui à une fonction f associe sa transformée de Fourier $\widehat{f}$: $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$.

1. *(Cours)*

   (i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Rappeler la définition de la transformée de Fourier de f, notée $\widehat{f}$.

   (ii) Soit $\alpha > 0$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}; f_\alpha(x) = f(\alpha x)$. <u>*Démontrer*</u> *la propriété du cours :*

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f_\alpha)(\nu) = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}(\frac{\nu}{\alpha})$$

2. *Soit $G(x) = e^{-\pi x^2}$. On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction G est égale à : $\widehat{G} = G$.*

3. *On pose pour $a > 0$: $G_a(x) = e^{-ax^2}$.*

   (i) Calculer la relation entre $G_a(x)$ et $G(x)$.

   (ii) En déduire que la transformée de Fourier de G_a est égale à :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \widehat{G}_a(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

4. *Calculer la transformée de Fourier du produit de convolution $G_a * G_b$, $a, b > 0$.*

5. *En déduire, en le justifiant, que* $G_a * G_b = \lambda G_c$ *où* λ *et* c *sont des constantes à préciser.*

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$ *on pose* $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)dt$.

1. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *vérifie l'équation différentielle* $y' = -\frac{x}{2}y$.
3. *En déduire une expression explicite de* $f(x)$.
   (On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$*)*
4. *Montrer que cette expression de* $f(x)$ *aurait pu être trouvée en utilisant la transformée de Fourier de* $t \to e^{-t^2}$.

Exercice 4

Soit $0 < a < b$ *deux réels et soit* $A = \mathbb{R}_+ \times]a, b[$.

1. *Montrer que l'application définie* $f(x, y) = e^{-xy}$ *est intégrable sur* A.
2. *Déduire de la question précédente la valeur de :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

Exercice 5

Soit E *l'espace vectoriel des fonctions continues de* $[0, 1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *muni de l'application* $f \to \|f\|_1$ *avec :* $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$.

1. *Vérifier que* $\|\cdot\|_1$ *est une norme sur* E.
2. *On considère l'application* $L : E \to \mathbb{R}$ *définie par* $L(f) = f(1)$.
   (i) Montrer que L *est une application linéaire.*
   (ii) En considérant les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}\, x^n$, *montrer que* L *n'est pas continue.*

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in]0, +\infty[$ *on pose*

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^n} dt.$$

1. *Montrer que* I_n *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et calculer sa dérivée en fonction de* I_{n+1}.
2. *En déduire la valeur de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^3} dt.$$

Exercice 7 (Facultatif)
Soit $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$.

1. *Justifier que* $f_n \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

2. *Déterminer, si elle existe, la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

Exercice 8 (Facultatif)
Soit f *une application définie sur* $[0, 1]$, *à valeurs strictement positives, et continue. Pour* $\alpha \geq 0$ *on pose* $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t)dt$.

1. *Justifier que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$ *et calculer* $F'(0)$.

2. *En déduire la valeur de*

$$\lim_{\alpha\to 0} \left(\int_0^1 f^\alpha(t)dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$