CM7 Probabilités appliqués : Méthode de Monte-Carlo

Julien Horvat, Flavie Ailhaud, Andy Zhang

1. Cours

- Objectif : Calculer $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ avec φ quelconque et en supposant que J existe
- Principe : On introduit une densité de probabilité f "instrumentale" avec

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R} :}\ f(x) \geq 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

On a $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} f(x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}[\psi(X)]$ où X est de loi $f(x)$ et $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ (f est nulle où φ est nulle)

Pour calculer l'espérance, on utilise la loi des grands nombres :
Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de loi de densité $f(x)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i) \simeq J$$

Pour mettre la méthode en oeuvre:

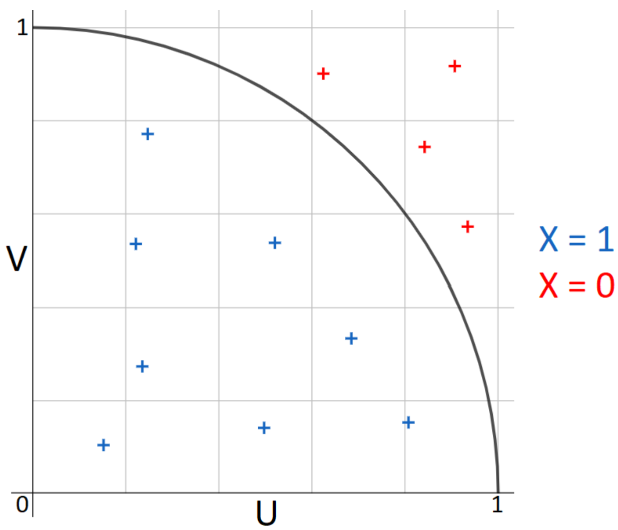
1) La variable aléatoire X_i doit être "simulable"
2) $\mathbb{E}[(\psi(X))^2] < \infty$
3) $f(x)$ devrait être choisie de sorte que $Var(\psi(X)) = Var\left(\dfrac{\varphi(X)}{f(X)}\right)$ est minimale.

---

2. Exercices

Exercice 1 : Calcul de π

On tire U_i, V_i de manière uniforme dans un carré unité. Il est équivalent de supposer que U_i et V_i sont indépendantes et de loi $\mathbb{U}(0,1)$.



$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si } U_i^2 + V_i^2 \leq 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, P(X_i = 1))$$

Où $\mathcal{B}(n,p)$ désigne la loi binomiale de paramètre n et p.

Or $P(X_i = 1) = P((U_i, V_i) \in \text{intérieur du disque }) \underset{\substack{\text{loi}\\\text{uniforme}}}{=} \text{Aire(disque)} = \frac{\pi}{4}$

Donc $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\pi}{4})$ et $\frac{1}{n} Z_n \simeq \frac{n}{n}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ (Loi des grands nombres)

La variance de Z_n est

$$\boxed{Var\left(\frac{1}{n} Z_n\right)} = \frac{1}{n} Var(X_1) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi(4-\pi)}{16n}}$$

Exercice 2 : (Question 5)

On a :

$$\text{Aire(intérieur du disque)} = \boxed{P(U_i^2 + V_i^2 \leq 1)} = \frac{\pi}{4} \underset{\substack{\text{proba totales}\\ \text{continues}}}{=} \int_0^1 P(U_i^2 + V_i^2 \leq 1 | V_i = v) \underbrace{f_{V_i}(v)\mathrm{d}v}_{P(V_i=v)}$$

$$= \int_0^1 P(1 - U_i^2 \geq v^2)\mathrm{d}v = \int_0^1 P\left(\sqrt{1-U_i^2} \geq v\right)\mathrm{d}v$$

$$= \boxed{\mathbb{E}\left[\sqrt{1-U_i^2}\right]} \text{ car on a l'intégrale de la fonction de survie}$$

$$= \int_0^1 \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$$

Méthode de Monte-Carlo :

$$Z_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-U_i^2} \simeq \mathbb{E}\left[\sqrt{1-U^2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$Var\left(Z_n^{(2)}\right) = \frac{1}{n}Var\left(\sqrt{1-U_i^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}\left[1-U^2\right] - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et on a

$$\boxed{Var(Z_n^{(2)}) < Var(Z_n^{(1)})}$$

Exercice 3 : Méthode de Monte-Carlo

$$J = \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} f_U(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \sqrt{1-u}\sqrt{1+u}\mathrm{d}u$$

On pose $\varphi(u) = \sqrt{1-u^2}$ et $f(u) = c\sqrt{1-u}$.

Pour utiliser la méthode de Monte-Carlo, on doit choisir c pour que f soit une densité de probabilité. On choisit donc $c = \frac{3}{2}$.

Il vient : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{f(u)} f(u)\mathrm{d}u$

On pose $\psi(w) = \dfrac{\varphi(w)}{f(w)} = \dfrac{2}{3}\sqrt{1+w}$.

Alors $J = \displaystyle\int_0^1 \psi(w)f(w)\mathrm{d}w = \mathbb{E}[\psi(W)]$ où W est de loi de densité f et $W \in (0,1)$.

→ Montrons que W et $1 - V^{\frac{2}{3}}$ ont la même loi (où V est une variable aléatoire de loi $\mathbb{U}(0,1)$).

Soit $\underline{t \in [0,1]}$:

$$P(W \leq t) = P(1 - V^{\frac{2}{3}} \leq t) = P(V^{\frac{2}{3}} \geq 1-t) = P(V \geq (1-t)^{\frac{2}{3}}) = 1 - (1-t)^{\frac{3}{2}}$$

Si $P(W \leq t) = 1 - (1-t)^{\frac{2}{3}}$, W est-elle de densité $f(u) = \frac{3}{2}\sqrt{1-u}$?

$$\int_0^t \frac{3}{2}\sqrt{1-u}\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_{1-t}^1 \sqrt{u}\mathrm{d}u = 1 - (1-t)^{\frac{3}{2}}$$

Finalement, $P(W \leq t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$ donc la densité de W est f, pour $W \in (0,1)$.

Donc W et $1 - V^{\frac{2}{3}}$ ont la même loi.

Conclusion : on a $W_i = 1 - V_i^{\frac{2}{3}}$. Donc il est possible (réalisable) de simuler la loi de W_i à partir de tirages uniformes.

$$Z_n^{(3)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi(W_i) = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3}\sqrt{1+W_i} = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3}\sqrt{2-V_i^{\frac{2}{3}}}$$

Par la loi des grands nombres :

$$Z_n^{(3)} \simeq \mathbb{E}\left[\frac{2}{3}\sqrt{2-V^{\frac{2}{3}}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{2}{3}\sqrt{1+W}\right] = \mathbb{E}[\psi(W)] = J$$

$\rightarrow$ Variance de $Z_n^{(3)}$:

$$Var\left(Z_n^{(3)}\right) = \frac{1}{n}Var\left(\frac{2}{3}\sqrt{2-V^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}\left[\frac{4}{9}\left(2-V^{\frac{2}{3}}\right)\right] - J^2\right)$$

Or, comme V $\hookrightarrow \mathbb{U}(0,1)$, $\mathbb{E}[2-V^{\frac{2}{3}}] = 2 - \mathbb{E}[V^{\frac{2}{3}}] = 2 - \displaystyle\int_0^1 v^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}v = \frac{7}{5}$ et $J = \dfrac{\pi}{4}$

Donc $\boxed{Var\left(Z_n^{(3)}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{28}{45} - \dfrac{\pi^2}{16}\right)}$

Conclusion

$$\boxed{Var(Z_n^{(3)}) < Var(Z_n^{(2)}) < Var(Z_n^{(1)})}$$

- 3 méthodes pour calculer $J = \dfrac{\pi}{4}$
- la 3^e est plus précise

Par rapport à la méthode de référence $Z_n^{(1)} = \dfrac{Z_n}{n}$:

- gain de la méthode 2 : 3 fois plus précise. (en terme d'écart type)
- gain de la méthode 3 : 5 fois plus précise.