Ensimag 1A

2012-2013

Examen de Probabilités appliquées
Mercredi 23 janvier 2013

Durée : 2h00.
Document autorisé : 1 feuille A4 manuscrite recto-verso.
Calculatrices et téléphones portables interdits.
Merci d'inscrire votre numéro de groupe sur la copie.
Le sujet comporte 2 pages. Le barème est indicatif. Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités par le candidat dans l'ordre qu'il préfère. Tout élément de vérification des résultats sera très apprécié.

Exercice 1. [5pts]
Soient N et M deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
C'est à dire, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.

1. Soit $S = M + N$. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(S = k)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que les lois conditionnelles de M sachant $S = n$ et de N sachant $N = n$ sont des lois binomiales dont on précisera les paramètres.
3. Dans le rapport de projet de fin d'études d'un étudiant de l'ENSIMAG, on peut trouver deux types d'erreurs : les fautes de frappes et les fautes de grammaire. On suppose que le nombre N de fautes de frappes suit une loi de Poisson de paramètre λ et que le nombre M de fautes de grammaire suit une loi de Poisson, indépendante de celle de N, de paramètre μ.
   (a) Combien d'erreurs trouve-t-on en moyenne dans un rapport ?
   (b) Un correcteur a relevé k erreurs dans le rapport d'un étudiant ($k \in \mathbb{N}^*$). Quelle est la probabilité que ces k erreurs soient des fautes de grammaire ? Quelle est la probabilité qu'aucune de ces k erreurs ne soit une faute de grammaire ?
   (c) Calculer la valeur numérique de la moyenne de la question (a) lorsque $\lambda = 4$, $\mu = 6$.

Exercice 2. [8pts]
Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{1-U}{1+U}$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

   (b) Calculer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
   (c) Vérifier que la fonction F_X vérifie bien les propriétés d'une fonction de répartition.
   (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
   Indication : $\frac{1-t}{t+1} = -1 + \frac{2}{t+1}$.
   Vérifier la cohérence de votre résultat. *Rappel :* $\ln 2 \sim 0,69$.
2. On suppose qu'on a un algorithme de simulation pour X. On réalise l'expérience suivante : on répète de manière indépendante la simulation de X jusqu'à ce que la condition $\left(X < \frac{1}{2}\right)$ se réalise. On appelle T la variable aléatoire alors obtenue.
   (a) A quel type d'algorithme de simulation la construction de T fait-elle appel ? Déterminer la fonction de répartition de la variable T.
   (b) Soit N le nombre de simulations de X nécessaires pour que la condition $\left(X < \frac{1}{2}\right)$ se réalise dans l'agorithme précédent. Quelle est la loi de N ? Quelle est l'espérance de N ?
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.
   Indication : $1 - \frac{3t}{t+1} = -2 + \frac{3}{t+1}$.

Exercice 3. [7pts]
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant la densité f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = c(y - x)\mathbf{1}_{0<x<y<1}$

1. Calculer c.
2. Caculer la densité f_X de la loi marginale de X.
3. En déduire que l'espérance de la variable aléatoire X vaut $\frac{1}{4}$.
4. Calculer, pour $x \in]0, 1[$ la densité $f_Y^{X=x}$ de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
5. Montrer que, pour $x \in]0, 1[$, l'espérance conditionnelle $E(Y|X = x)$ vaut $\frac{x+2}{3}$. En déduire $E(Y|X)$.
6. Quelle est la valeur de $E(Y)$? Effectuer le calcul par deux méthodes différentes.

2012-2013
Ensimag 1A

Examen de Probabilités appliquées
Mardi 6 novembre 2012

Durée : 2h00.
Document autorisé : 1 feuille A4 manuscrite recto.
Calculatrices et téléphones portables interdits.
Merci d'inscrire votre numéro de groupe sur la copie.
Le sujet comporte 2 pages. Le barème est indicatif. Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités par le candidat dans l'ordre qu'il préfère.

Exercice 1. [5pts]
Les deux questions sont indépendantes.

1. (a) On lance simultanément deux dés à 6 faces équilibrés de façon indépendante, jusqu'à ce que l'un des deux dés au moins produise un six. Soit N le nombre de lancers. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $P(N = n)$.
   (b) Quelle est l'espérance de N ?
2. Une usine possède deux machines M_1 et M_2 qui fabriquent respectivement 40 et 60% de la production totale par jour. Les pièces fabriquées par la machine M_1 sont défectueuses dans 1% des cas et celles fabriquées par M_2 dans 6% des cas.
   (a) On prend une pièce au hasard dans la fabrication d'un jour. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
   (b) On prend une pièce au hasard dans la fabrication d'un jour. Elle n'est pas défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
   (c) Le vendredi 2 novembre, l'usine a fabriqué 200 pièces. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses. Calculer, pour $i \in \{1, \ldots, 200\}$, $P(Y = i)$. Quelle est l'espérance de Y ?

Exercice 2. [4pts]
Au football, on peut marquer des buts de la tête ou du pied. On suppose que le nombre de buts marqués lors d'un match est un nombre aléatoire K suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
C'est à dire, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $P(K = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.

La probabilité pour qu'un point soit marqué de la tête est p $(0 < p < 1)$. On suppose que les points sont marqués indépendamment les uns des autres.

1. Soit L la variable aléatoire qui représente le nombre de buts marqués de la tête. Sachant que $K = k$ buts ont été marqués lors d'un match, montrer que la probabilité conditionnelle pour que $L = l$ buts soient marqués de la tête est
$$P(L = l|K = k) = \frac{k!}{l!(k-l)!}p^l(1-p)^{k-l}, l = 0, \ldots, k.$$
2. En déduire la probabilité d'observer $L = l$ points marqués de la tête lors d'un match, pour $l \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. [4pts]
On tire au hasard un nombre U uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$ puis on lance une pièce équilibrée dont le résultat est indépendant de U. Si le résultat est pile, on définit $X = U$. Si le résultat est face, on définit $X = 2U$.

1. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition $F_X(t)$ de la variable aléatoire X.
2. Représenter graphiquement cette fonction. Par une vérification très simple, contrôler la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Par une vérification très simple, contrôler la cohérence de votre résultat.

Exercice 4. [7pts]
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa fonction de répartition F_X est donnée par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est sans mémoire, c'est à dire que pour tout $s \geqslant 0$ et pour tout $t \geqslant 0$,
$$P(X \geqslant t + s|X \geqslant t) = P(X \geqslant s).$$
2. Le temps d'attente à un serveur téléphonique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ (en minutes). Marie a appellé à ce serveur et attend une réponse depuis 5 minutes. Quelle est la probabilité qu'elle attende encore pendant une durée supérieure ou égale à 5 minutes ?
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Soit $W = \min(X_i, i = 1, \ldots, n)$.
   Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(W > t)$. En déduire la fonction de répartition F_W de la variable aléatoire W. Quelle est la loi de la variable aléatoire W ?
4. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = N+1$. Soit $W_M = \min_{i=1,\ldots,M} X_i$. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, la probabilité pour que W_M soit supérieur à t.

Grenoble INP ensimag

2012-2013
Ensimag 1A

Examen de Probabilités appliquées

Mardi 6 novembre 2012

Durée : 2h00.
Document autorisé : 1 feuille A4 manuscrite recto.
Calculatrices et téléphones portables interdits.
Merci d'inscrire votre numéro de groupe sur la copie.
Le sujet comporte 2 pages. Le barème est indicatif. Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités par le candidat dans l'ordre qu'il préfère.

Exercice 1. [5pts]
Les deux questions sont indépendantes.

1. (a) On lance simultanément deux dés à 6 faces équilibrés de façon indépendante, jusqu'à ce que l'un des deux dés au moins produise un six. Soit N le nombre de lancers. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $P(N = n)$.
   (b) Quelle est l'espérance de N ?
2. Une usine possède deux machines M_1 et M_2 qui fabriquent respectivement 40 et 60% de la production totale par jour. Les pièces fabriquées par la machine M_1 sont défectueuses dans 1% des cas et celles fabriquées par M_2 dans 6% des cas.
   (a) On prend une pièce au hasard dans la fabrication d'un jour. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
   (b) On prend une pièce au hasard dans la fabrication d'un jour. Elle n'est pas défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
   (c) Le vendredi 2 novembre, l'usine a fabriqué 200 pièces. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses. Calculer, pour $i \in \{1, \dots, 200\}$, $P(Y = i)$. Quelle est l'espérance de Y ?

Exercice 2. [4pts]
Au football, on peut marquer des buts de la tête ou du pied. On suppose que le nombre de buts marqués lors d'un match est un nombre aléatoire K suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
C'est à dire, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $P(K = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

La probabilité pour qu'un point soit marqué de la tête est p $(0 < p < 1)$. On suppose que les points sont marqués indépendamment les uns des autres.

1. Soit L la variable aléatoire qui représente le nombre de buts marqués de la tête. Sachant que $K = k$ buts ont été marqués lors d'un match, montrer que la probabilité conditionnelle pour que $L = l$ buts soient marqués de la tête est
$$P(L = l|K = k) = \frac{k!}{l!(k-l)!} p^l (1-p)^{k-l}, l = 0, \dots, k.$$
2. En déduire la probabilité d'observer $L = l$ points marqués de la tête lors d'un match, pour $l \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. [4pts]
On tire au hasard un nombre U uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$ puis on lance une pièce équilibrée dont le résultat est indépendant de U. Si le résultat est pile, on définit $X = U$. Si le résultat est face, on définit $X = 2U$.

1. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition $F_X(t)$ de la variable aléatoire X.
2. Représenter graphiquement cette fonction. Par une vérification très simple, contrôler la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Par une vérification très simple, contrôler la cohérence de votre résultat.

Exercice 4. [7pts]
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa fonction de répartition F_X est donnée par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est sans mémoire, c'est à dire que pour tout $s \geqslant 0$ et pour tout $t \geqslant 0$,
$$P(X \geqslant t + s|X \geqslant t) = P(X \geqslant s).$$
2. Le temps d'attente à un serveur téléphonique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ (en minutes). Marie a appellé à ce serveur et attend une réponse depuis 5 minutes. Quelle est la probabilité qu'elle attende encore pendant une durée supérieure ou égale à 5 minutes ?
3. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Soit $W = \min(X_i, i = 1, \dots, n)$.
   Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(W > t)$. En déduire la fonction de répartition F_W de la variable aléatoire W. Quelle est la loi de la variable aléatoire W ?
4. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = N+1$. Soit $W_M = \min_{i=1,\dots,M} X_i$. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, la probabilité pour que W_M soit supérieur à t.

Ensimag 1A

2012-2013

Examen de Probabilités appliquées
Mercredi 23 janvier 2013

Durée : 2h00.
Document autorisé : 1 feuille A4 manuscrite recto-verso.
Calculatrices et téléphones portables interdits.
Merci d'inscrire votre numéro de groupe sur la copie.
Le sujet comporte 2 pages. Le barème est indicatif. Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités par le candidat dans l'ordre qu'il préfère. Tout élément de vérification des résultats sera très apprécié.

Exercice 1. [5pts]
Soient N et M deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
C'est à dire, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.

1. Soit $S = M + N$. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(S = k)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que les lois conditionnelles de M sachant $S = n$ et de N sachant $N = n$ sont des lois binomiales dont on précisera les paramètres.
3. Dans le rapport de projet de fin d'études d'un étudiant de l'ENSIMAG, on peut trouver deux types d'erreurs : les fautes de frappes et les fautes de grammaire. On suppose que le nombre N de fautes de frappes suit une loi de Poisson de paramètre λ et que le nombre M de fautes de grammaire suit une loi de Poisson, indépendante de celle de N, de paramètre μ.
   (a) Combien d'erreurs trouve-t-on en moyenne dans un rapport ?
   (b) Un correcteur a relevé k erreurs dans le rapport d'un étudiant ($k \in \mathbb{N}^*$). Quelle est la probabilité que ces k erreurs soient des fautes de grammaire ? Quelle est la probabilité qu'aucune de ces k erreurs ne soit une faute de grammaire ?
   (c) Calculer la valeur numérique de la moyenne de la question (a) lorsque $\lambda = 4$, $\mu = 6$.

Exercice 2. [8pts]
Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{1-U}{1+U}$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

   (b) Calculer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
   (c) Vérifier que la fonction F_X vérifie bien les propriétés d'une fonction de répartition.
   (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
   Indication : $\frac{1-t}{t+1} = -1 + \frac{2}{t+1}$.
   Vérifier la cohérence de votre résultat. *Rappel :* $\ln 2 \sim 0,69$.
2. On suppose qu'on a un algorithme de simulation pour X. On réalise l'expérience suivante : on répète de manière indépendante la simulation de X jusqu'à ce que la condition $\left(X < \frac{1}{2}\right)$ se réalise. On appelle T la variable aléatoire alors obtenue.
   (a) A quel type d'algorithme de simulation la construction de T fait-elle appel ? Déterminer la fonction de répartition de la variable T.
   (b) Soit N le nombre de simulations de X nécessaires pour que la condition $\left(X < \frac{1}{2}\right)$ se réalise dans l'agorithme précédent. Quelle est la loi de N ? Quelle est l'espérance de N ?
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.
   Indication : $1 - \frac{3t}{t+1} = -2 + \frac{3}{t+1}$.

Exercice 3. [7pts]
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant la densité f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = c(y - x)\mathbf{1}_{0<x<y<1}$

1. Calculer c.
2. Caculer la densité f_X de la loi marginale de X.
3. En déduire que l'espérance de la variable aléatoire X vaut $\frac{1}{4}$.
4. Calculer, pour $x \in]0, 1[$ la densité $f_Y^{X=x}$ de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
5. Montrer que, pour $x \in]0, 1[$, l'espérance conditionnelle $E(Y|X = x)$ vaut $\frac{x+2}{3}$.
   En déduire $E(Y|X)$.
6. Quelle est la valeur de $E(Y)$? Effectuer le calcul par deux méthodes différentes.

Exercice 53 . On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} cye^{-x} & \text{si } (x,y) \in \Delta\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où c est une constante positive et Δ est le domaine de $I\!R^2$ défini par

$$\Delta = \{(x,y) \ : \ 0 < y < x\}\,.$$

1) Déterminer la constante c.
2) Déterminer les lois marginales des variables X et Y ainsi que la covariance du couple (X, Y).
3) Déterminer la loi conditionnelle de la variable Y sachant $X = x$. En déduire l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}[Y|X = x]$.
4) Soit X une variable de loi $G(3, 1)$ et U une variable de loi $\mathcal{U}(0, 1)$ indépendante de X. Déterminer la loi du couple $(X, \sqrt{U}X)$. En déduire un algorithme de simulation du couple de densité f.

Exercice 54 . On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité conjointe

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad f(x,y) = ce^{-x}\mathbf{1}_D(x,y)\,,$$

où c est une constante positive et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < y < x\}$.

1) Déterminer la valeur de c, la loi de la variable Y, la densité de la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, et l'espérance conditionnelle $E[X|Y]$.
2) Écrire un algorithme de simulation d'un couple de densité f.
3) Calculer $E[XY]$.
4) On pose $Z = Y/X$. Dmontrer que Z est de loi uniforme sur $(0, 1)$.

Exercice 55 . Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1) Montrer que la loi de la variable aléatoire

$$Z = Y/X$$

admet pour fonction de répartition

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F_Z(t) = 1 - \frac{1+3t}{(1+t)^3}\,.$$

2) Démontrer que la variable $T = 1/(1 + Z)$ admet pour densité

$$\forall t \in (0,1), \quad f(t) = 6t(1-t)$$

3) Justifier le fait que la loi de densité g peut être obtenue comme la loi de la somme de deux variables de loi exponentielle indépendantes de paramètre 1. En déduire un algorithme de simulation de la loi de densité f.

Exercice 56 . On considère une variable X de loi de fonction de répartition $F(t)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0\,, \\ t/2 & \text{si } 0 \le t < 1\,, \\ 1 & \text{si } t \ge 1\,. \end{cases}$$

1) Rappeler le principe de simulation par inversion et écrire un algorithme de simulation par inversion pour cette loi.
2) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. On considère la variable Y définie par

$$Y = \begin{cases} U & \text{si } V \le 1/2\,, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la fonction de répartition de Y. À quel type d'algorithme de simulation la construction de Y fait elle appel ?
3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 57 . Soit $c > 0$ et $f(x)$ une densité de probabilité définie par

$$f(x) = c\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathbf{1}_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer c.
2) Écrire $f(x)$ comme la somme pondérée de deux densités facilement simulables par inversion et décrire les deux algorithmes d'inversion.
3) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Déduire de la question précédente que la loi de la variable aléatoire définie par

$$X = \begin{cases} \sqrt{U} & \text{si } V \le 1/5\,, \\ U^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

admet $f(x)$ pour densité.
4) Déduire les valeurs de $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{E}[X^2]$.

et M une variable aléatoire indépendante de N telle que

$$P(M=0)=\frac{1}{3} \quad , \quad P(M=1)=\frac{1}{3} \quad , \quad P(M=2)=\frac{1}{3} .$$

Déterminer la loi de la variable $M+N$.

Exercice 46 . Dans une suite de parties de *pile ou face* indépendantes, on considère la variable aléatoire Z égale au rang de la première apparition d'un *pile* suivi d'un *face*. On suppose que la probabilité d'obtenir un *pile* lors d'une partie quelconque est p.

a) Déterminer la loi de la variable Z.
b) Déterminer la fonction génératrice de la variable Z (écrire Z comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes dont les lois sont classiques).
c) Calculer $E[Z]$ et $Var(Z)$.

Exercice 47 . Les Dalton peuvent s'évader du bagne de deux manières différentes : en creusant un tunnel ou en escaladant un mur. Ils choisissent de creuser avec la probabilité p, $0<p<1$ ou d'escalader avec la probabilité $1-p$. Lorsque l'évasion est tentée, les Dalton sont immédiatement rattrapés par Lucky Luke avec la probabilité α, $0<\alpha<1$. Soit N le nombre d'essais nécessaires aux Dalton pour réussir une évasion et X le nombre de tunnels creusés lors des tentatives successives.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire N.
2) Soient i,n deux entiers tels que $i \leq n$. Quelle est la probabilité conditionnelle de l'événement $(X=i)$ sachant $(N=n)$?
3) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
4) Calculer l'espérance de la variable X.

Exercice 48 . L'objectif de ce problème est d'établir un résultat très célèbre en théorie des nombres, dû à Hardy et Ramanujan (1930). La démonstration s'inspire de Turan (1934).

0) Soient $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ des variables aléatoires de Bernoulli et $X=X_1+\cdots X_n$. Montrer que

$$Var(X) \leq E[X]+\sum_{i\neq j} E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j] .$$

Désormais, les indices intervenant dans les sommes sont des nombres premiers.

1) Soit N un nombre pris au hasard uniformément dans l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ et p un nombre premier plus petit que n. Montrer que l'espérance mathématique de la variable $X_p=\mathbf{1}_{(p \text{ divise } N)}$ est égale à $\lfloor n/p \rfloor /n$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.
2) Soit X le nombre d'entiers premiers $p\leq n$ qui divisent N. Montrer que

$$E[X]=\sum_{p\leq n}\left(\frac{1}{p}+O(\frac{1}{n})\right) .$$

On admet que la somme partielle est équivalente à $\ln\ln n$ lorsque n tend vers l'infini.

3) Soient p et q deux nombres premiers distincts inférieurs à n. Montrer que

$$E[X_pX_q]-E[X_p]E[X_q] \leq \frac{1}{pq}-(\frac{1}{p}-\frac{1}{n})(\frac{1}{q}-\frac{1}{n}) .$$

En déduire que

$$\sum_{p\neq q\leq n} E[X_pX_q]-E[X_p]E[X_q] \leq \frac{1}{n}\sum_{p\neq q\leq n}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) \leq \frac{\pi(n)-1}{n}\sum_{p\leq n}\frac{2}{p}$$

où $\pi(n)$ compte les nombres premiers inférieurs à n.

4) En utilisant l'équivalent $\pi(n)\sim n/\ln n$, montrer, pour n grand, que

$$Var(X) \leq \ln\ln n(1+o(1)) .$$

5) À l'aide de l'inégalité de Tchebishev, montrer que

$$P(|X-\ln\ln n| > \lambda\sqrt{\ln\ln n}) < \frac{1}{\lambda^2}+o(1) .$$

6) Pour tout x entier, notons $f(x)$ le nombre de diviseurs premiers de x. Pour toute suite $\lambda_n\to\infty$, montrer que la proportion d'entiers $x\leq n$ tels que

$$\ln\ln n-\lambda_n\sqrt{\ln\ln n} < f(x) < \ln\ln n+\lambda_n\sqrt{\ln\ln n}$$

devient proche de 100% lorsque n grandit. Comment interprétez-vous ce résultat ?

3 Chapitre 4

Exercice 49 . Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de densité $f_{(X,Y)}$. Montrer que le support de $f_{(X,Y)}$ est le produit cartésien de deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$.

Exercice 50 . Soient U,V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. Calculer la probabilité de l'événement $(U<V)$. Même question lorsque U suit la loi exponentielle de paramètre λ et V la loi exponentielle de paramètre μ.

Exercice 51 . Dans une galette des rois de rayon R, Mamie Markov a placé une fève circulaire de rayon r. Mickey coupe la galette en pointant le bout du couteau pile au centre. Quelle est la probabilité de couper la fève ?

Exercice 52 . Soit Θ un angle aléatoire de loi $\mathcal{U}_{[-\pi/2,\pi/2]}$. On pose $X=\cos\Theta$, $Y=\sin\Theta$. Les variables X et Y sont-elles corrélées ? Sont-elles indépendantes ?

$V := 1/(1 + RANDOM)$
Jusqu'à $(V < 3/4)$
$X := V$

Calculer $E[X]$ et $Var(X)$ si ces grandeurs existent.

Exercice 39 . Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. Déterminer la fonction de répartition de la variable

$$X = \mathbf{1}_{(U<1/3)}V + \mathbf{1}_{(U\geq 2/3)}(1+V) .$$

Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 40 . Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant pour densité f.

a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties l'identité suivante :

$$\forall n \geq 1 , \quad \int_0^n xf(x)dx = \int_0^n \mathrm{P}(x \leq X \leq n)dx .$$

b) En déduire

$$E[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)dx .$$

Exercice 41 . Soient $U_1, \ldots, U_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes de fonction de répartition commune F. Déterminer la loi des variables

$$X = \max_i U_i$$

et

$$Y = \min_i U_i .$$

Application : traiter le cas où F est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, puis la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}(0,1)$. Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.

Exercice 42 . Soient $U_1, U_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{U}(0,1)$ et N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p indépendante des U_i. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$X = \max_{1\leq i\leq N} U_i .$$

Calculer l'espérance de X.

Exercice 43 . On considère la fonction F définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 ; \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 ; \\ 1/2 & \text{si } 1/2 \leq t < 1 ; \\ 1 & \text{si } t \geq 1 . \end{cases}$$

Vérifier que F est une fonction de répartition. Quelle procédure peut-on utiliser pour générer une variable aléatoire de fonction de répartition F ?

Exercice 44 . Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On pose

$$X = -\ln(\frac{2U}{1+U}) .$$

1) Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
2) En déduire la densité de la variable X.
3) Calculer l'espérance de X.
4) Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ indépendante de U et telle que
$$\mathrm{P}(V=1) = 1/2 .$$
Déterminer la fonction de répartition de la variable
$$Y = VX + (1-V)X^2 .$$
5) Ecrire un algorithme de simulation de la variable Y.
6) On pose
$$Z = \mathbf{1}_{(U>1/2)}\, X .$$
Déterminer la fonction de répartition de la variable Z et tracer la courbe représentative de cette fonction.
7) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
8) Calculer l'espérance de Z.
9) Ecrire un algorithme de simulation de la variable Z.
10) On répète de manière indépendante la simulation de X jusqu'à ce que la condition $(X < \ln(3/2))$ se réalise. On appelle T la variable alors obtenue. Déterminer la fonction de répartition de la variable T et tracer la courbe représentative de cette fonction.
11) Combien de répétitions sont en moyenne nécessaires pour que la condition se réalise ?
12) Calculer l'espérance de T.

Exercice 45 . Soit N une variable aléatoire discrète telle que

$$\mathrm{P}(N=0) = \frac{1}{2} \quad , \quad \mathrm{P}(N=1) = \frac{1}{4} \quad , \quad \mathrm{P}(N=2) = \frac{1}{4}$$

Exercice 32 . Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace muni d'une structure probabiliste. Soient A, B, C trois événements indépendants dans la tribu $\mathcal{A}$. On définit la variable aléatoire X par

$$X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C \quad .$$

Calculer $E[X]$ et $E[X^2]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 33 . Un joueur parie sur la réalisation d'événements A et B de la manière suivante. Le gain du joueur est d'une unité si A se réalise. Il ajoute r unités supplementaires à ce gain si, de surcroit, B se réalise aussi. Si A ne se réalise pas, le joueur perd s unités. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue du pari.

1) Exprimer X sous la forme d'une variable étagée en faisant apparaître les fonctions indicatrices de A, $A \cap B$ et $\bar{A}$.
2) Calculer l'espérance de X.
3) Déterminer la loi de X.

Le pari porte sur le lancer de deux pièces de monnaie non truquées et sur les événements $A =$ "La première pièce montre pile" et $B =$ "la deuxième pièce montre pile".

4) A quelle condition l'espérance E$[X]$ est-elle positive ?
5) On suppose que $r = s = 1$. Calculer $Var(X)$.

Exercice 34 .
Question A - Soit U un nombre pris au hasard dans l'intervalle $(0,1)$ et $(I_1, \ldots, I_m)$ une partition de $(0,1)$ en m intervalles. On définit la variable aléatoire discrète K de la manière suivante

$$\forall k = 1, \ldots, m\,, \quad (K = k) \text{ si } \; I_k \text{ contient U.}$$

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire K.
2) Nous nous intéressons à la longueur de l'intervalle qui contient U. Il s'agit d'une variable aléatoire que l'on note L. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(0,1)$. Montrer que
$$E[L] = \sum_{k=1}^{m} (\lambda(I_k))^2 \ .$$

Question B - Un individu cherche à localiser le point U dans l'intervalle $(0,1)$. Il questionne un oracle qui connait la valeur de U et ne répond que par oui ou non. Le joueur adopte la stratégie suivante. Il fixe un réel α dans $(0,1)$ et demande si $U < \alpha$. Il obtient une réponse qui lui permet de localiser U soit dans l'intervalle $(0,\alpha)$ soit dans l'intervalle $(\alpha, 1)$ (étape 1). Le joueur procède alors itérativement en divisant l'intervalle obtenu après chaque réponse en 2 sous-intervalles de longueurs respectives proportionnelles à α et $1-\alpha$ puis en demandant si U se trouve dans le premier de ces intervalles. Soit $(I_k^n)_{k \in \{1 \ldots 2^n\}}$ la partition de $(0,1)$ en les 2^n intervalles susceptibles d'être obtenus après la réponse à la n-ième question.

1) Montrer que, pour tout $k = 1, \ldots, 2^n$,
$$\begin{aligned} \lambda(I_{2k-1}^{(n+1)}) &= \alpha \lambda(I_k^{(n)}) \\ \lambda(I_{2k}^{(n+1)}) &= (1-\alpha)\lambda(I_k^{(n)}) \end{aligned}$$
2) Soit $\alpha \neq 1/2$. Démontrer par récurrence que la partition susceptible d'être obtenue à l'étape n contient exactement C_n^r intervalles de longueur $\alpha^r(1-\alpha)^{n-r}$, $r = 0, \ldots, n$. (Un intérêt particulier sera accordé à la rédaction).
3) Nous cherchons à évaluer la précision sur l'estimation de U en considérant l'intervalle obtenu à la n-ième étape. Nous appelons $\epsilon_n(\alpha)$ la précision moyenne obtenue lorsque U varie dans $(0,1)$.
   a) En utilisant la question A, montrer que
   $$\epsilon_n(\alpha) = (\alpha^2 + (1-\alpha)^2)^n$$
   b) Avec la stratégie adoptée, quel choix de α vous semble-t-il optimal ?
   c) Calculer la variance liée à la précision obtenue. Que vaut cette variance pour la valeur obtenue précédemment ?

Exercice 35 . Soit α un nombre réel positif et U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $(0,1)$. Déterminer la loi de la variable $V = \alpha U$.

Exercice 36 . Déterminer la loi de la variable X en sortie de l'algorithme suivant.

Répéter
  $V := 2 * RANDOM$
Jusqu'à $(V < 1.6)$
$X := V$

Quelle est la loi du nombre d'appels de $RANDOM$ dans cet algorithme ?

Exercice 37 . Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $(0,1)$. Déterminer la fonction de répartition puis la densité, lorsqu'elle existe, de la variable X définie par

a) $X = \sqrt{U}$;
b) $X = (2U-1)^2$;
c) $X = 1/(1+U)$.

Dans chacun des cas, déterminer (si c'est possible) l'espérance et la variance de X.

Exercice 38 . Déterminer la loi de la variable X en sortie de l'algorithme suivant

Répéter

Exercice 22 . Un logiciel comporte $n = 5$ fautes. A chaque exécution, toute faute a la probabilité $p = \frac{1}{3}$ d'être corrigée. Les corrections sont indépendantes les unes des autres. Combien de fois faut-il exécuter ce logiciel pour que la probabilité qu'il ne reste aucune faute soit de 0.90 ?

Exercice 23 . Nous inhalons à chaque inspiration environ 2.2 10^{22} molécules d'air. L'atmosphère est composée au total de 10^{44} molécules d'air. Quelle est la probabilité d'inhaler au moins une des molécules du dernier soupir de Jules César lors d'une inspiration ?

Exercice 24 . Pour deux joueurs A et B, une partie de dés se déroule de la manière suivante. A commence et jette deux dés. Si la somme des points marqués sur les deux dés est six, A est vainqueur et le jeu s'arrête. Sinon, B lance à son tour les deux dés. Si la somme des points marqués est sept, B est vainqueur et le jeu s'arrête. Sinon, une autre partie est jouée. Tous les lancers de dés sont supposés indépendants.

a) Quelle est la probabilité que A gagne à la première partie ? Même question pour B.
b) Quelle est la probabilité pour que la $n$ième partie soit effectivement jouée et que ce soit A qui la gagne ? Même question pour B.
c) Quelle est la probabilité que A (resp. B) termine vainqueur ? A et B vont-ils jouer indéfiniment ?

2 Chapitre 3

Exercice 25 . Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace muni d'une structure probabiliste. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_\Omega X \,\mathrm{dP} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > n) \quad .$$

Application. Calculer cette grandeur lorsque X est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p, $(0 < p < 1)$.

Exercice 26 . Joe et Bill jouent à la roulette russe avec un pistolet à six coups qui contient une seule balle. On fait tourner le barilet une seule fois au début du jeu. Soit N la variable aléatoire égale à la durée du jeu. Déterminer la loi de N et son espérance. Joe joue le premier. Quelle est la probabilité pour que Joe meure le premier. Joe a-t-il réellement intéret à débuter le jeu ? On fait tourner le barillet avant chaque essai. Mêmes questions.

Exercice 27 . On choisit 10 intervalles de longueur $1/10$ dans $(0, 1)$. Les intervalles peuvent se recouvrir de manière arbitraire. Soit U un point tiré au hasard dans (0,1). A combien d'intervalles en moyenne U appartient-il ?

Exercice 28 . Soient I_1 et I_2 deux intervalles de longueur $1/2$ inclus dans $(0, 1)$. Soit U un point tiré au hasard dans (0,1) et N le nombre d'intervalles qui contiennent U. Déterminer la loi de N. Calculer $E[N]$.

Exercice 29 . Dans une urne, il y a 3 boules rouges, 2 boules noires et 5 boules blanches. On effectue n tirages successifs dans l'urne en replaçant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On s'intéresse au nombre de boules de chaque couleur résultant de cette expérience.

a) Quelle est la nature de la variable aléatoire d'intérêt correspondant à cette expérience ?
b) Quelle est sa loi ?
c) Intégrer cette variable sous la mesure de probabilité correspondant au modèle de cette expérience ?

Exercice 30 . (Source AB) **Mathématiques financières.** Jojo veut envoyer dix billets de 10000 francs CFA à son ami Gbetnkom qui habite un pays éloigné. Il glissera les billets entre les pages d'articles de mathématiques qu'il lui enverra. Cependant, un envoi sur cinq est perdu ou détourné par les postiers ou les douaniers. Jojo pense à trois méthodes d'envoi différentes :

1. Il met les dix billets dans un seul paquet ;
2. Il met cinq billets dans un seul paquet et cinq dans un autre ;
3. Il met chaque billet dans un paquet different, et enverra les dix paquets à des dates différentes.

On note X le nombre de billets reu par Gbetnkom.

a) Pour chacune des méthodes précédentes, déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
b) Quelle est la meilleure stratégie d'envoi si l'on veut que $E[X]$ soit maximale, ou que Gbetnkom reoive au moins un billet avec la plus grande probabilité possible, ou que Gbetnkom reoive tous les billets avec la plus grande probabilité possible.

Exercice 31 . À La Grave (Hautes-Alpes), le nombre d'alpinistes inexpérimentés qui se perdent dans la montagne suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un alpiniste inexpérimenté peut tomber dans une crevasse avec la probabilité p ou subir des chutes de pierres avec la probabilité q. Quelle est la loi du nombre d'alpinistes tombés dans une crevasse, ou victimes de chutes de pierres, ou les deux ?

Exercice 12 . On choisit un nombre N au hasard entre 1 et 4 puis un nombre X au hasard entre 1 et N. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = k)$, $k = 1, \dots, 4$.

Exercice 13 . On répète le lancer d'un dé (que l'on suppose équilibré) à 12 faces jusqu'à ce que le dé produise un résultat pair que l'on divise finalement par deux. Le résultat final est-il uniformément réparti dans $\{1, \dots, 6\}$?

Exercice 14 . Un jeu nécessite le lancer d'un dé à 33 faces. Comment peut-on jouer à ce jeu avec un dé à six faces ? Même question avec un dé à 19 faces. Il y a plusieurs algorithmes possibles pour chacune des deux questions. Quels sont ceux qui demandent le moins de lancers en moyenne ?

Exercice 15 . (Source AB) On lance un dé à cinq faces un grand nombre de fois. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire. Calculer p_1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n.

Exercice 16 . Un questionnaire à choix multiples comprend huit questions. Pour chacune d'entre elles quatre réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Un candidat décide de répondre au hasard et indépendamment à chacune des questions. Soit X le nombre de bonnes réponses qu'il donne.

a) Déterminer la loi de X.
b) Pour être reçu, il faut donner au moins cinq bonnes réponses. Quelle est la probabilité pour que ce candidat soit reçu ?
c) Ecrire un algorithme de simulation de la variable X.
d) Un autre candidat connait la réponse à trois des questions posées et répond au hasard aux autres. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ?

Exercice 17 . Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique et revient à son point de départ. On note X le nombre d'essais nécessaires au rat pour sortir du labyrinthe et on envisage successivement trois hypothèses sous lesquelles on déterminera la loi de X.

a) Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des quatre portes.
b) Le rat a une mémoire immédiate. A chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.
c) Le rat a une bonne mémoire. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.

Ecrire un algorithme de simulation de la variable X dans chacune des trois hypothèses.

toucher rectal ♡

Exercice 18 . (Source : A. Bienvenüe) Blanche-Neige passe la serpillière quand la méchante reine se présente, grimmée en pauvre vieille, pour lui offrir un panier de cinq pommes bien rouges, dont une empoisonnée et deux véreuses. Blanche-Neige prend les pommes une par une pour les croquer. Si elle tombe sur une pomme véreuse, elle jette le reste du panier au cochon, sinon elle continue. Calculer la probabilité pour que

a) le cochon trépasse,
b) Blanche-Neige mange toutes les pommes.

Exercice 19 . Dérangements. Ecrire un algorithme de simulation d'une permutation de $\{1, \dots, n\}$ au hasard (une permutation est une application bijective $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même).

a) Quelle est la probabilité qu'une telle permutation ne modifie pas le numéro 1 ?
b) Quelle est la probabilité qu'une telle permutation ne modifie pas les k premiers numéros ?
c) Démontrer, pour toute famille finie d'événements $(A_i)_{i=1,\dots,n}$, la relation suivante

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}).$$

d) Calculer la probabilité que la permutation simulée modifie tous les numéros.

Guillaume Renouvin volé

Exercice 20 . ~~Mickey Markov~~ est très fier de son beau parapluie. Surtout que la région est trés pluvieuse et qu'il doit effectuer $n = 20$ trajets entre son domicile et son lieu de travail chaque mois. Il démarre de son domicile. Lorsqu'il fait beau, Mickey n'emporte jamais son parapluie. Lorsqu'il pleut, il le prend dans la mesure ou il est disponible. Lors d'un trajet, il pleut avec la probabilité p. On définit la variable X_n de la manière suivante.

$$\begin{aligned} X_n &= 1 \text{ si l'individu est en possession du parapluie à l'issue du } n^{e}\text{trajet} \\ X_n &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

a) Ecrire un algorithme de simulation pour la variable X_n.
b) En utilisant un argument de récurrence, calculer $P(X_n = 0)$.
c) Calculer la probabilité pour que Mickey se mouille lors du $n$ième trajet.
d) C'est novembre et $p = 1/3$. Donner une valeur approchée de la probabilité.
e) Quelle est la probabilité que Camille récupère son paquet de riz avant la fin du cours ? Si oui celle-ci est-elle réalisée ?

Exercice 21 . Quelle est la probabilité pour que sur n personnes prises au hasard, toutes aient des dates d'anniversaires différentes ? Calculer n pour que cette probabilité soit supérieure à 0.5.

1 Chapitre 1 et 2

Exercice 1 . On lance deux dés non pipés. Calculer la probabilité des événements suivants

a) Obtenir au moins un six.
b) Obtenir au moins un numéro pair.
c) La somme des numéros obtenus est égale à 6.
d) La somme des numéros obtenus est paire.

Exercice 2 . Soit X un nombre positif mesuré à l'issue d'une épreuve aléatoire. On suppose que

$$\forall 0 \leq a \leq b < \infty\,, \quad \mathrm{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b e^{-x} dx\,.$$

a) Calculer $\mathrm{P}(X \geq t)$ pour tout $t \geq 0$.
b) Calculer $\mathrm{P}(\sin X \geq 0)$.
c) Soit U un nombre pris au hasard dans $[0,1]$ tel que

$$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1\,, \quad \mathrm{P}(U \in [a,b]) = b - a\,.$$

Calculer pour tout $0 \leq a \leq b$, $\mathrm{P}(\ln(1/U) \in [a,b])$.

Exercice 3 . Les algorithmes suivants jouent aux dés. Certains trichent. Lesquels ?

a) $X \longleftarrow \mathrm{int}(RANDOM * 6) + 1$
b) $X \longleftarrow \mathrm{round}(RANDOM * 5) + 1$
c) $X \longleftarrow \mathrm{int}(RANDOM * 10)$; $X \longleftarrow (X \mathrm{mod} 6) + 1$
d) $X \longleftarrow \mathrm{int}(RANDOM * 12)$; $X \longleftarrow (X \mathrm{mod} 6) + 1$
e) $X \longleftarrow \mathrm{int}(6 * \mathrm{sqr}(RANDOM)) + 1$

On considère que $RANDOM$ est un nombre pris au hasard dans $[0,1]$ comme dans l'exercice précédent c).

Exercice 4 . Ecrire un algorithme qui retourne 0 avec probabilité $\frac{1}{6}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$ à partir d'un (ou plusieurs) nombres pris au hasard dans $[0,1]$.

Exercice 5 . Ecrire un algorithme qui choisisse entre n éventualités $e_1, \ldots, e_n$, l'éventualité e_i avec la probabilité p_i (les probabilités $p_1, \ldots, p_n$ sont données et leur somme vaut 1).

Exercice 6 . Il y a une chance sur trois pour que l'équipe d'Allemagne soit en finale du championnat du monde de football, une chance sur deux pour que l'équipe du Brésil

le soit et onze chance sur quinze qu'au moins une des deux soit en finale. Quelle est la probabilité pour que la finale oppose le Brésil et l'Allemagne ?

Exercice 7 . Soit A et B deux événements tels que :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}\ ;\ \mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}\ ;\ \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{4}{9}.$$

Calculer $\mathrm{P}(A|\ B)$, $\mathrm{P}(\bar{A}|\ B)$, $\mathrm{P}(A \cap \bar{B}|\ B)$.

Exercice 8 . Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ? Conclusion.

Exercice 9 . (Source A. Bienvenüe) Jojo fait du ski à la station *Vallées Blanches*. Il est en haut du téléski des Cailloux, et a le choix entre les pistes de *Tout-plat* (une bleue), *Les Bosses* (une rouge) et *Les Rase-Mottes* (une noire). Il choisit une piste au hasard de telle façon qu'il emprunte la bleue et la noire avec la probabilité 1/4 et la rouge – qu'il préfère – avec la probabilité 1/2. Il descend ensuite la piste choisie. Jojo n'est pas encore très à l'aise cette saison. Il tombe avec une probabilité de 1/10 sur une piste bleue, 1/6 sur une piste rouge et 2/5 sur une piste noire.

a) Calculer la probabilité de l'événement *Jojo tombe sur la piste qu'il a choisie.*
b) Bernard, qui attend Jojo en bas des pistes, à la terrasse d'un café, voit arriver Jojo couvert de neige : il est donc tombé. Sachant cela, quelle est la probabilité que Jojo ait emprumpté la piste noire.

Exercice 10 . On simule le lancer de deux dés équilibrés à n faces. On note S la somme des deux dés.

a) Pour tout $1 \leq i \leq n+1$, montrer que

$$\mathrm{P}(S = i) = \frac{i-1}{n^2}\,.$$

b) Pour tout $n+2 \leq i \leq 2n$, montrer que

$$\mathrm{P}(S = i) = \frac{2n-i+1}{n^2}\,.$$

c) Calculer $P(S \leq n+1)$.

Exercice 11 . On répète le lancer d'un dé (que l'on suppose équilibré) à 10 faces jusqu'à ce que le dé produise un résultat inférieur ou égal à 6. On note alors X le résultat produit. Déterminer la probabilité de l'événement $(X = k)$, $k = 1, \ldots, 6$.