

## TP Méthodes Numériques :

### *Simulation d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires*

- **Contact :** guillaume.james@univ-grenoble-alpes.fr
- Le TP est à réaliser en **Python**. Rédiger un compte-rendu sous la forme d'un **notebook Jupyter** (fichier .ipynb), en présentant et commentant avec soin les méthodes que vous avez employées, vos programmes et les résultats obtenus. La lisibilité des codes sera prise en compte dans l'évaluation du TP (penser notamment à structurer votre code en fonctions pour éviter des répétitions).
- **Travail en binôme ou trinôme.** Privilégier un travail en binôme (les trinômes sont acceptés en cas de difficulté à constituer un binôme). Il n'y a qu'un seul rapport à rendre par équipe.
- **Remise du rapport:** le TP est à rendre au plus tard le **2 Mai 2023** sur **TEIDE**. **Déposer un seul fichier .ipynb non compressé** (ne pas utiliser d'autres formats et ne pas créer d'archive, seul un fichier .ipynb sera examiné). Nommer le fichier avec les noms (et prénom en cas d'homonymes) des membres du binôme ou trinôme (Nom1\_Nom2\_Nom3.ipynb).

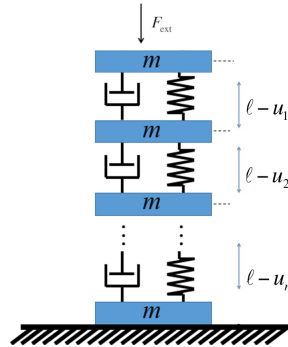


Figure 1: Exemple de chaîne d'oscillateurs : amortisseur constitué d'un ensemble de masses couplées par des ressorts non linéaires.

De nombreux systèmes physiques constitués d'éléments en interaction (milieux granulaires, chaînes moléculaires, circuits électroniques, oscillateurs mécaniques...) sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles du second ordre du type

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + C \frac{du}{dt} + \nabla W(u) = 0 \quad (1)$$

avec  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonction de classe  $C^2$  (appelée potentiel du système) et  $M, C \in M_n(\mathbb{R})$  matrices symétriques définies positives. La donnée d'une condition initiale  $(u(0), u'(0)) \in \mathbb{R}^{2n}$  détermine une solution  $u(t)$  unique, définie pour tout  $t \geq 0$  lorsque  $W$  est borné inférieurement.

L'équation (1) correspond en mécanique à la loi fondamentale de la dynamique prenant en compte à la fois des forces conservatives et des forces dissipatives (i.e. qui induisent une dissipation d'énergie). Considérons par exemple le système masses-ressorts représenté dans la figure 1, soumis lorsque  $t \geq 0$  à une force extérieure  $F_{\text{ext}}$  qu'on supposera constante et unitaire. Les masses sont normalisées à l'unité et on néglige la gravité. On note  $u_j(t)$  la variation de longueur du  $j$ ème ressort ( $1 \leq j \leq n$ ),  $V(u_j)$  l'énergie potentielle des ressorts ( $V \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $V'(0) = 0$ ) et  $\mu > 0$  leur coefficient d'amortissement linéaire. Les équations de la dynamique s'écrivent alors

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mu K \frac{du}{dt} = f(u), \quad (2)$$

avec  $K \in M_n(\mathbb{R})$  définie pour  $n \geq 2$  par

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(il s'agit d'une matrice symétrique définie positive), et le second membre

$$f(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} V'(u_1) \\ V'(u_2) \\ \vdots \\ V'(u_n) \end{bmatrix}.$$

En multipliant (2) par  $K^{-1}$ , on obtient la forme (1) des équations de la dynamique avec le potentiel  $W(u) = \sum_{j=1}^n V(u_j) - u_j$ .

On appelle équilibre du système (1) une solution  $u^* \in \mathbb{R}^n$  indépendante de  $t$ , qui vérifie donc  $\nabla W(u^*) = 0$ . Lorsque les équilibres sont isolés et que  $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} W(u) = +\infty$ , on peut démontrer que toute solution de (1) converge vers un équilibre quand  $t \rightarrow +\infty$ . Lorsqu'il existe un unique équilibre  $u^*$  qu'on sait calculer, l'état asymptotique du système est donc connu et ne dépend pas de la condition initiale  $(u(0), u'(0))$ . Cependant, l'étude du système peut être complexe lorsqu'on s'intéresse à sa dynamique transitoire. Par exemple, les questions suivantes se posent pour la chaîne d'oscillateurs de la figure 1 :

- Après application de la force extérieure statique  $F_{\text{ext}}$ , à quelle vitesse s'effectue la convergence vers le nouvel équilibre ?
- Cette convergence est-elle monotone, ou observe-t-on des oscillations temporelles potentiellement indésirables (risque de résonance avec une autre structure mécanique) ?
- Observe-t-on certaines structures spatiales, comme la propagation de fronts de compression semblables à des ondes de choc, ou bien certains modes de vibration causant des variations importantes de l'amplitude d'oscillation ?
- Ces fluctuations transitoires peuvent-elles avoir une amplitude importante (risques d'usure ou endommagement) ?
- Quels sont les effets des paramètres du modèle (paramètres physiques, nombre d'oscillateurs) et de la condition initiale sur ces différents points ?

Dans ce TP, nous allons simuler numériquement le système (2) à l'aide du schéma aux différences finies centré implicite

$$\frac{u^{(k+1)} - 2u^{(k)} + u^{(k-1)}}{h^2} + \mu K \frac{u^{(k+1)} - u^{(k-1)}}{2h} = f(u^{(k)}) \quad (3)$$

où  $h > 0$  est le pas de discrétisation et  $u^{(k)}$  une approximation de  $u(kh)$ .

Les questions du TP sont listées dans le fichier **TP\_MNB\_2023.ipynb** :

- Dans la section 1 du TP, on étudie théoriquement quelques propriétés générales du schéma (3), notamment son ordre de convergence.
- Dans la section 2, on teste ensuite le schéma (ordre de convergence, comportement asymptotique) dans le cas simple d'un système linéaire à un degré de liberté ( $n = 1$ ,  $K = 1$ ,  $V'(u) = u$ ), pour lequel les solutions du modèle (2) se calculent à la main.
- Dans la section 3, on étudie le type de convergence vers l'équilibre pour un système à un degré de liberté avec une non-linéarité cubique  $V'(u) = u^3$ .
- Dans la section 4, on étudie les caractéristiques de la convergence vers l'équilibre pour une chaîne de  $n$  oscillateurs avec non-linéarité cubique.