Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Connexité + Cycles + Graphes orientés

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Chaînes

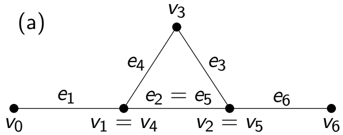
Définitions

(a) Chaîne : une suite alternée de sommets et d'arêtes :
$v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$, telle que $e_i = v_{i-1}v_i$ pour $1 \leq i \leq k$.
(s,t)-chaîne : une chaîne de $s = v_0$ à $t = v_k$.

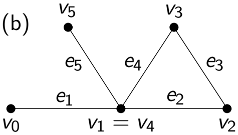
(b) Chaîne simple : chaîne telle que les arêtes sont distinctes.

(c) Chaîne élémentaire : chaîne telle que les sommets sont distincts.

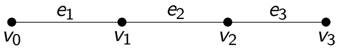
(a)



(b)



(c)



Équivalence sur les chaînes

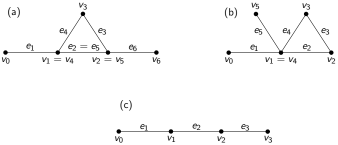
Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s,t)-chaîne.

(b) Il existe une (s,t)-chaîne simple.

(c) Il existe une (s,t)-chaîne élémentaire.



Équivalence sur les chaînes

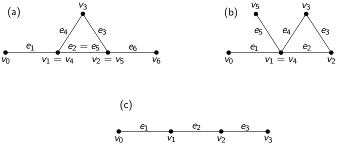
Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s,t)-chaîne.

(b) Il existe une (s,t)-chaîne simple.

(c) Il existe une (s,t)-chaîne élémentaire.



Démonstration

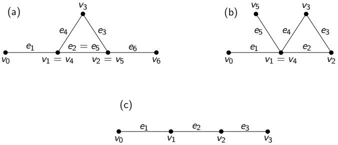
(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a) : évident.

Équivalence sur les chaînes

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s,t)-chaîne.
(b) Il existe une (s,t)-chaîne simple.
(c) Il existe une (s,t)-chaîne élémentaire.



Démonstration

(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a) : évident.
(a) $\Longrightarrow$ (c) :

Équivalence sur les chaînes

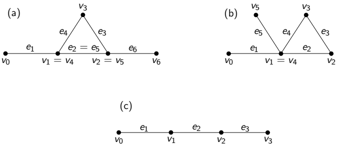
Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s,t)-chaîne.

(b) Il existe une (s,t)-chaîne simple.

(c) Il existe une (s,t)-chaîne élémentaire.



Démonstration

(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a) : évident.

(a) $\Longrightarrow$ (c) :

- Soit P une (s,t)-chaîne ayant un nombre minimum d'arêtes.

Équivalence sur les chaînes

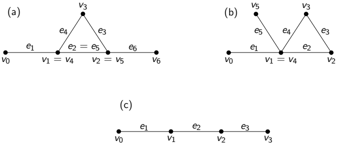
Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s,t)-chaîne.

(b) Il existe une (s,t)-chaîne simple.

(c) Il existe une (s,t)-chaîne élémentaire.



Démonstration

(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a) : évident.

(a) $\Longrightarrow$ (c) :

- Soit P une (s,t)-chaîne ayant un nombre minimum d'arêtes.
- Si $v_i = v_j$ alors en supprimant la sous-suite $v_i e_i \dots v_{j-1} e_j$ entre v_i et v_j on a une (s,t)-chaîne qui est plus courte que P, contradiction.

Équivalence sur les chaînes

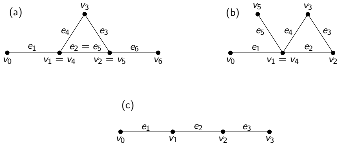
Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s, t)-chaîne.

(b) Il existe une (s, t)-chaîne simple.

(c) Il existe une (s, t)-chaîne élémentaire.



Démonstration

$(c) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a)$: évident.

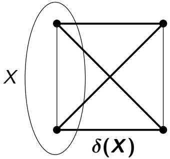
$(a) \Longrightarrow (c)$:

- Soit P une (s, t)-chaîne ayant un nombre minimum d'arêtes.
- Si $v_i = v_j$ alors en supprimant la sous-suite $v_i e_i \dots v_{j-1} e_j$ entre v_i et v_j on a une (s, t)-chaîne qui est plus courte que P, contradiction.
- P est donc élémentaire.

Caractérisation de l'existence d'une (s, t)-chaîne

Définitions : pour un sous-ensemble X de sommets,

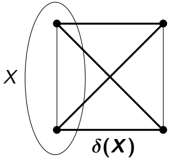
1. coupe de X : l'ensemble $\delta(X)$ des arêtes entre X et $V(G) \setminus X$.
2. degré de X : $d(X) = |\delta(X)|$.

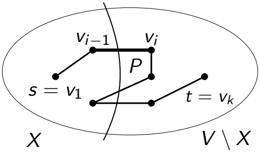


Caractérisation de l'existence d'une (s, t)-chaîne

Définitions : pour un sous-ensemble X de sommets,

1. **coupe** de X : l'ensemble $\delta(X)$ des arêtes entre X et $V(G) \setminus X$.
2. **degré** de X : $d(X) = |\delta(X)|$.





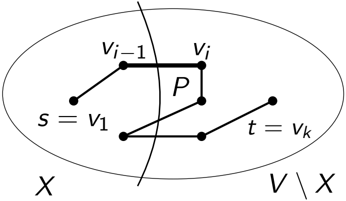
Théorème

1. Il existe une (s, t)-chaîne dans $G = (V, E)$ $\iff$
2. $d(X) \geq 1 \quad \forall X : \; s \in X \subseteq V \setminus t.$

Caractérisation de l'existence d'une (s, t)-chaîne

Démonstration de nécessité

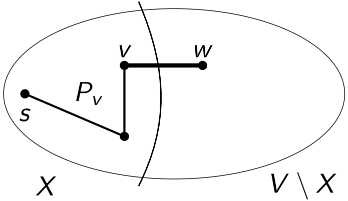
1. Supposons qu'il existe une (s, t)-chaîne $P = v_1 v_2 \dots v_k$ et que $s \in X \subseteq V \setminus t$.
2. Soit i le plus petit indice tel que $v_i \in V \setminus X$ (existe car $v_k \in V \setminus X$).
3. Comme $v_1 \in X$, on a $i \geq 2$, d'où $v_{i-1} \in X$, et donc
4. l'arête $v_{i-1}v_i$ de P appartient à la coupe définie par X, d'où
5. $d(X) \geq 1$.



Caractérisation de l'existence d'une (s, t)-chaîne

Démonstration de suffisance

1. Supposons que $d(X) \geq 1 \quad \forall X : s \in X \subseteq V \setminus t.$
2. Soit $X = \{v \in V :$ il existe une (s, v)-chaîne P_v dans $G\}$.
3. On a $s \in X$ et $d(X) = 0$: s'il existait $vw \in E, v \in X, w \in V \setminus X$ alors $P_v + vw$ serait une (s, w)-chaîne, ainsi on a $w \in X$, une contradiction.
4. Par la condition, on a $t \in X$, c'est-à-dire
5. qu'il existe une (s, t)-chaîne.



Trouver une (s,t)-chaîne

Algorithme Chaîne

ENTRÉE : Un graphe G et deux sommets distincts s et t de G.

SORTIE : Une (s,t)-chaîne P de G ou un certificat X qu'il n'y en a pas.

Etape 0: *Initialisation.* $S := \{s\}$.

Etape 1: *Marquage.*

Tant que $t \notin S$ et qu'il existe une arête uv de G telle que $u \in S, v \notin S$ faire :

$S := S \cup \{v\},\ p(v) := u$.

Etape 2: *Construction de la chaîne.*

Si $t \in S$ faire :

$v := t$, $P := v$,

tant que $v \neq s$ faire :

$u := p(v),\ e := uv,\ P := ueP,\ v := u$,

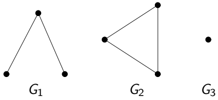
STOP.

Etape 3: *Construction du certificat.* $X := S$, STOP.

Connexité

Définitions

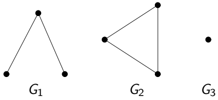
1. graphe connexe : Il existe une chaîne entre chaque paire de sommets dans le graphe.
2. composantes connexes d'un graphe : Les sous-graphes connexes maximaux du graphe.



Connexité

Définitions

1. graphe connexe : Il existe une chaîne entre chaque paire de sommets dans le graphe.
2. composantes connexes d'un graphe : Les sous-graphes connexes maximaux du graphe.



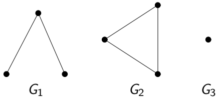
Remarques

1. G est connexe $\Longleftrightarrow$ G a exactement une composante connexe.
2. Il n'y a pas d'arêtes entre les composantes connexes.

Connexité

Définitions

1. graphe connexe : Il existe une chaîne entre chaque paire de sommets dans le graphe.
2. composantes connexes d'un graphe : Les sous-graphes connexes maximaux du graphe.



Remarques

1. G est connexe $\Longleftrightarrow$ G a exactement une composante connexe.
2. Il n'y a pas d'arêtes entre les composantes connexes.

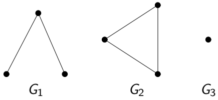
Théorème (Caractérisation d'un graphe connexe)

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe $\Longleftrightarrow$ $d(X) \geq 1 \quad \forall\, \emptyset \neq X \subset V$.

Connexité

Définitions

1. graphe connexe : Il existe une chaîne entre chaque paire de sommets dans le graphe.
2. composantes connexes d'un graphe : Les sous-graphes connexes maximaux du graphe.



Remarques

1. G est connexe $\Longleftrightarrow$ G a exactement une composante connexe.
2. Il n'y a pas d'arêtes entre les composantes connexes.

Théorème (Caractérisation d'un graphe connexe)

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe $\Longleftrightarrow$ $d(X) \geq 1 \quad \forall\, \emptyset \neq X \subset V.$

Facile

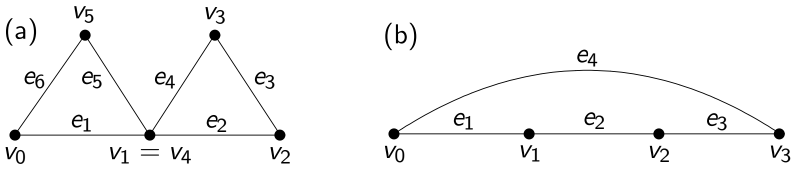
Décider si G est connexe.

Cycles

Définitions

(a) Cycle : une séquence circulaire de sommets et d'arêtes : $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $e_k = v_{k-1} v_0$ sont des arêtes distinctes

(b) Cycle élémentaire : un cycle dont les sommets sont distincts.

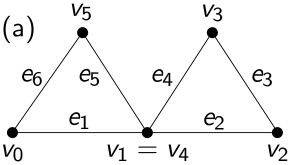


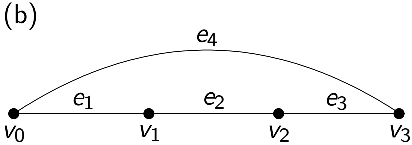
Cycles

Définitions

(a) Cycle : une séquence circulaire de sommets et d'arêtes : $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1}v_i$ pour $1 \le i \le k-1$ et $e_k = v_{k-1}v_0$ sont des arêtes distinctes $\Longleftrightarrow$ une chaîne simple dont les extrémités coïncident.

(b) Cycle élémentaire : un cycle dont les sommets sont distincts.

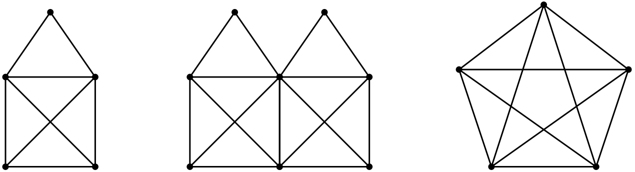




Motivation

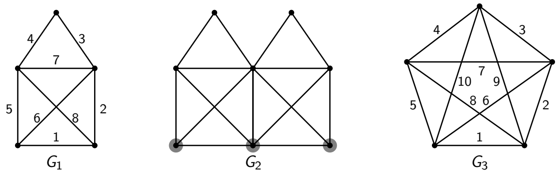
Est-il possible de dessiner les arêtes des graphes suivants consécutivement

1. sans lever le crayon et
2. sans passer deux fois sur la même arête?



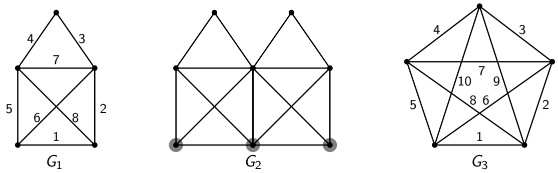
G_1 G_2 G_3

Graphes Eulériens



G_1 et G_3 : On peut dessiner les arêtes dans l'ordre indiqué sur la Figure.

Graphes Eulériens



G_1 et G_3 : On peut dessiner les arêtes dans l'ordre indiqué sur la Figure.

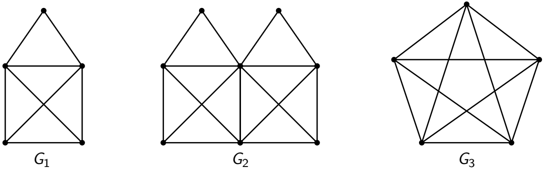
G_2 : il n'est pas possible :

1. Supposons qu'il y ait une solution pour G_2, avec v_1 et v_m premier et dernier sommet visité.
2. Si on a passé k fois par un sommet $v \neq v_1, v_m$ alors $d(v) = 2k$.
3. G_2 devrait donc contenir au plus deux sommets de degré impair.
4. Or les trois sommets de G_2 indiqués sur la Figure sont de degré impair.

Graphes Eulériens

Définition

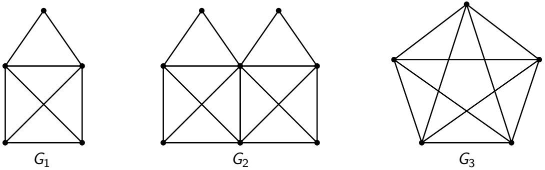
1. Chaîne eulérienne de G : chaîne simple contenant chaque arête de G.
2. Cycle eulérien de G : cycle contenant toutes les arêtes de G.
3. Graphe eulérien : graphe qui possède un cycle eulérien.



Graphes Eulériens

Définition

1. Chaîne eulérienne de G : chaîne simple contenant chaque arête de G.
2. Cycle eulérien de G : cycle contenant toutes les arêtes de G.
3. Graphe eulérien : graphe qui possède un cycle eulérien.



Théorème (Caractérisation des graphes eulériens)

Un graphe G sans sommet isolé (v isolé : $d(v) = 0$) est eulérien $\Longleftrightarrow$

1. il est connexe et
2. tous ses sommets sont de degré pair.

Caractérisation des graphes eulériens

Théorème

Un graphe G sans sommet isolé est eulérien $\Longleftrightarrow$

(a) il est connexe et

(b) tous ses sommets sont de degré pair.

Caractérisation des graphes eulériens

Théorème

Un graphe G sans sommet isolé est eulérien $\Longleftrightarrow$

(a) il est connexe et

(b) tous ses sommets sont de degré pair.

Facile

Décider si G est eulérien.

Caractérisation des graphes eulériens

Théorème

Un graphe G sans sommet isolé est eulérien $\iff$

(a) il est connexe et

(b) tous ses sommets sont de degré pair.

Facile

Décider si G est eulérien.

Démonstration de la nécessité

1. Soit C un cycle eulérien de G, donc $E(G) = E(C)$.
2. Puisque G n'a pas de sommet isolé, $V(G) = V(C)$.
3. Pour toute paire $u, v \in V(G)$, en parcourant le cycle C, on a une (u, v)-chaîne, donc le graphe est connexe.
4. Si C passe k fois par un sommet v alors $d_G(v) = d_C(v) = 2k$.

(Sans) démonstration de la suffisance

Algorithme de Fleury

Entrée : Un graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré pair.
Sortie : Un cycle eulérien C de G.

Etape 1: *Initialisation.*
Choisir un sommet u de G, $C := u$.

Etape 2: *Construction du cycle.*
Tant que u n'est pas un sommet isolé de G faire :
Choisir une arête $e = uv$ de G incidente à u,
si possible contenue dans un cycle de G.
$C := Cev$,
$G := G - e$,
$u := v$.

Etape 3: *Fin de l'algorithme.*
STOP.

Graphes hamiltoniens

Motivation : Problème du Voyageur de commerce

1. Le voyageur de commerce doit passer par chaque grande ville de la France une et une seul fois en minimisant la distance parcourue.
2. Dans un graphe complet avec des coûts sur les arêtes, trouver un cycle élémentaire contenant tous les sommets dont le coût total est minimal.

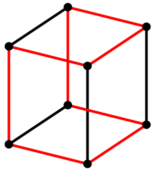
Graphes hamiltoniens

Motivation : Problème du Voyageur de commerce

1. Le voyageur de commerce doit passer par chaque grande ville de la France une et une seul fois en minimisant la distance parcourue.
2. Dans un graphe complet avec des coûts sur les arêtes, trouver un cycle élémentaire contenant tous les sommets dont le coût total est minimal.

Définitions

1. Cycle hamiltonien de G : cycle élémentaire contenant tous les sommets de G.
2. Graphe hamiltonien : graphe qui possède un cycle hamiltonien.

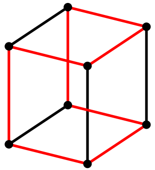


Motivation : Problème du Voyageur de commerce

1. Le voyageur de commerce doit passer par chaque grande ville de la France une et une seul fois en minimisant la distance parcourue.
2. Dans un graphe complet avec des coûts sur les arêtes, trouver un cycle élémentaire contenant tous les sommets dont le coût total est minimal.

Définitions

1. Cycle hamiltonien de G : cycle élémentaire contenant tous les sommets de G.
2. Graphe hamiltonien : graphe qui possède un cycle hamiltonien.

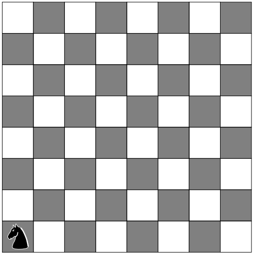


Problème

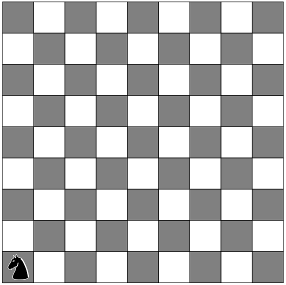
Décider si un graphe donné est hamiltonien.

Application

Sur un échiquier 8×8 (Fig. (a)), un cavalier posé sur la case en bas à gauche, peut-il se déplacer de telle sorte qu'il revienne à la case de départ après avoir exploré chacune des cases une fois et une seule fois ?



(a) 8×8



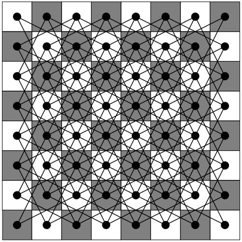
(b) 9×9

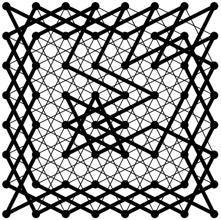
Solution

A l'échiquier $k \times k$ on associe le graphe $G_{k \times k}$ suivant :

> les sommets sont les cases et deux sommets sont reliés par une arête si les deux cases correspondantes sont disposées de manière à ce qu'un mouvement du cavalier permette de passer de l'une à l'autre.

La question est : ce graphe possède-t-il un cycle hamiltonien ?

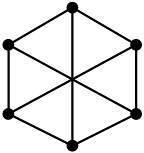




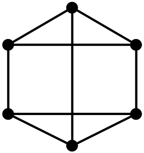
Une condition suffisante

Théorème (Dirac) (sans démonstration)

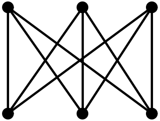
Si G est un graphe simple à $n \geq 3$ sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $n/2$, alors G est hamiltonien.



G_1



G_2



G_3

Complexité

Facile

Difficile

Complexité

Facile

S'il existe un cycle hamiltonien :

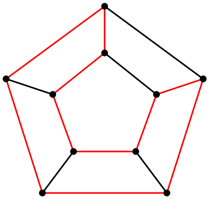
Difficile

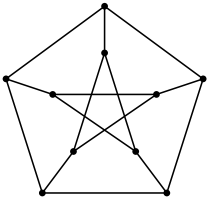
Complexité

Facile

S'il existe un cycle hamiltonien :
certificat $=$ un cycle hamiltonien.

Difficile





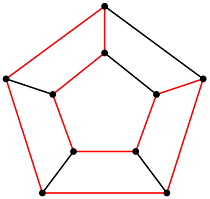
Complexité

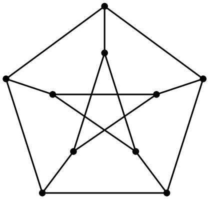
Facile

S'il existe un cycle hamiltonien : certificat = un cycle hamiltonien.

Difficile

S'il n'existe pas de cycle hamiltonien:





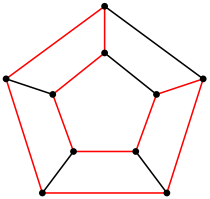
Complexité

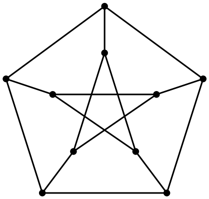
Facile

S'il existe un cycle hamiltonien : certificat = un cycle hamiltonien.

Difficile

S'il n'existe pas de cycle hamiltonien: on n'a pas de certificat.





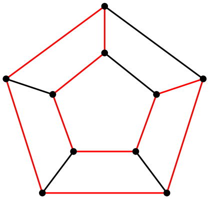
Complexité

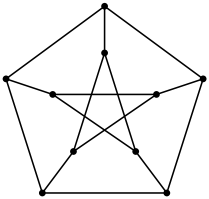
Facile

S'il existe un cycle hamiltonien : certificat = un cycle hamiltonien.

Difficile

S'il n'existe pas de cycle hamiltonien: on n'a pas de certificat.





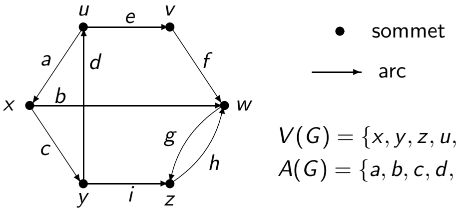
Difficile

Problème du Voyageur de commerce.

Définitions

Graphe orienté $G = (V, A)$:

- sommets : $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$,
- arcs : $A(G) = \{a_1, \dots, a_m\}$, un arc est un couple de sommets,
- extrémité initiale : v_j pour l'arc $a_i = v_j v_k$,
- extrémité terminale : v_k pour l'arc $a_i = v_j v_k$,
- Attention ! : $v_j v_k \neq v_k v_j$.

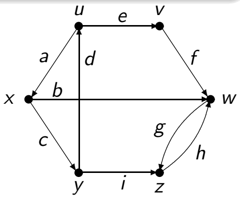


$V(G) = \{x, y, z, u, v, w\}$
$A(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Degrés

Définition

- degré sortant $d^+(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs sortants de v,
- degré entrant $d^-(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs entrants dans v.



Degrés

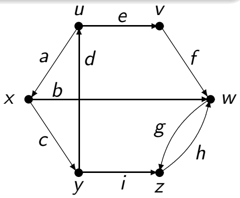
Définition

- degré sortant $d^+(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs sortants de v,
- degré entrant $d^-(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs entrants dans v.

Théorème : Pour un graphe orienté $G = (V, A)$

La somme des degrés sortants des sommets est égale à la somme des degrés entrants des sommets.

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v).$$



Degrés

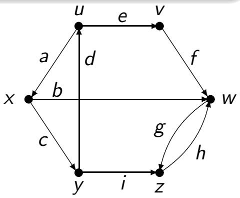
Définition

- degré sortant $d^+(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs sortants de v,
- degré entrant $d^-(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs entrants dans v.

Théorème : Pour un graphe orienté $G = (V, A)$

La somme des degrés sortants des sommets est égale à la somme des degrés entrants des sommets.

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^-(v).$$



Degrés

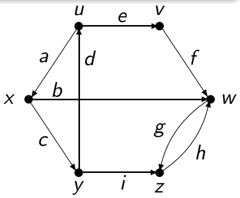
Définition

- degré sortant $d^+(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs sortants de v,
- degré entrant $d^-(v)$ du sommet v : le nombre d'arcs entrants dans v.

Théorème : Pour un graphe orienté $G = (V, A)$

La somme des degrés sortants des sommets est égale à la somme des degrés entrants des sommets.

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^-(v).$$



Démonstration

1. Calculer la somme des degrés sortants des sommets revient à compter les arcs sortants de chaque sommet et puis à ajouter ces nombres.
2. Chaque arc uv est compté exactement une fois dans la somme.

Chemins

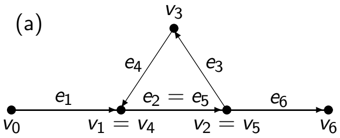
Définitions

(a) Chemin : une suite alternée de sommets et d'arcs : $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k, v_k$, telle que $e_i = v_{i-1}v_i$ pour $1 \leq i \leq k$.

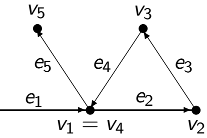
(b) Chemin simple : chemin tel que les arcs sont distincts.

(c) Chemin élémentaire : chemin tel que les sommets sont distincts.

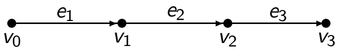
(a)



(b)



(c)

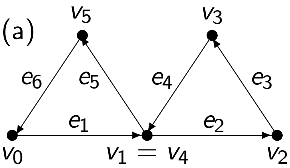


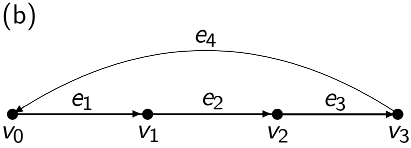
Circuits

Définitions

(a) Circuit : une séquence circulaire de sommets et d'arcs : $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1}v_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $e_k = v_{k-1}v_0$ sont des arcs distincts

(b) Circuit élémentaire : un circuit dont les sommets sont distincts.



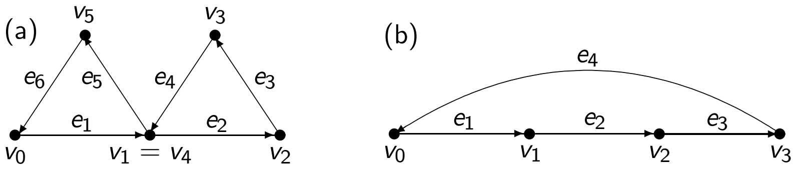


Circuits

Définitions

(a) Circuit : une séquence circulaire de sommets et d'arcs : $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $e_k = v_{k-1} v_0$ sont des arcs distincts $\Longleftrightarrow$ un chemin simple dont les extrémités coïncident.

(b) Circuit élémentaire : un circuit dont les sommets sont distincts.



Circuit élémentaire

Théorème

Si $d^+(v) \geq 1 \ \forall v \in V(G)$ alors il existe un circuit élémentaire.

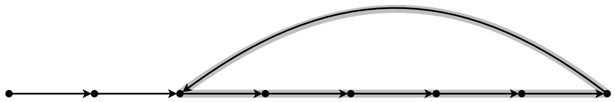
Circuit élémentaire

Théorème

Si $d^+(v) \geq 1 \; \forall v \in V(G)$ alors il existe un circuit élémentaire.

Démonstration

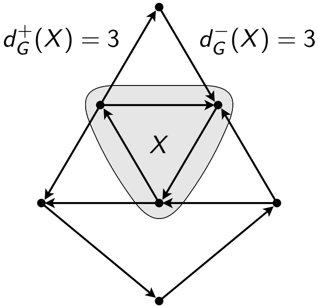
- On commence un parcours à partir d'un sommet quelconque,
- quand on arrive à un sommet non-visité on peut en sortir, par la condition.
- quand on arrive la première fois à un sommet déjà visité on a un circuit élémentaire entre les deux apparitions de ce sommet.



Degrés

Définitions

- Degré sortant $d_G^+(X)$ d'un ensemble X de sommets : nombre d'arcs dont extrémité initiale est dans X, extrémité terminale est dans $V \setminus X$.
- Degré entrant $d_G^-(X)$ d'un ensemble X de sommets : nombre d'arcs dont extrémité initiale est dans $V \setminus X$, extrémité terminale est dans X.



Caractérisation de l'existence d'un (s, t)-chemin

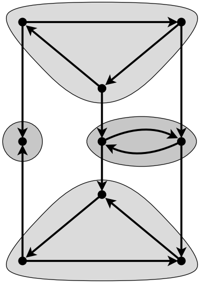
Théorème

Soient s et t deux sommets d'un graphe orienté $G = (V, A)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un chemin de s à t.

(b) Pour tout X tel que $s \in X \subseteq V \setminus t$, on a $d^+(X) \geq 1$.

(c) Il existe un chemin élémentaire de s à t.



Algorithme de Marquage

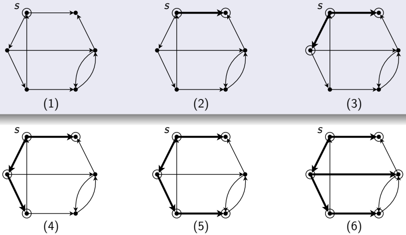
Algorithme de Marquage

ENTRÉE : Un graphe orienté $G = (V, A)$ et un sommet s de G.
SORTIE : S les sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin, et $F \subseteq A$ tel que (S, F) contient un (s, v)-chemin pour tout $v \in S$.

Étape 0: *Initialisation.*
$S := \{s\}$ et $F := \emptyset$.

Étape 1: *Marquage.*
Tant qu'il existe un arc uv de G tel que $u \in S, v \notin S$ faire :
$S := S \cup \{v\}$,
$F := F \cup \{uv\}$,

Étape 2: *Fin de l'algorithme.*
STOP.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)