Feuille d'exercices 4 : Stocha.

Exo 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+2}$ et $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$

On a : $\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) =$

$$\mathbb{P}\left(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n \mid X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}, \dots, X_{t_0} - X_0 = x_0 - 0\right) \quad (*)$$

or les $(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ sont indépendants

Donc $\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n) \quad (**)$

(indep) $= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n \mid X_{t_n} - X_0 = x_n - 0)$

$= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n \mid X_{t_n} = x_n)$

$= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n) \quad (*)$

cqfd (car E dénombrable)

2) On a bien (X) de Markov

$\Rightarrow \forall h, \forall t : \mathbb{P}[X_{t+h} = y \mid X_t = x] = \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = y - x)$

or $X_{t+h} - X_t$ indep de $t \Rightarrow X_{t+h} - X_t = X_{0+h} - X_0 = X_h$.

$\Rightarrow \forall h, \forall t : \mathbb{P}[X_{t+h} = y \mid X_t = x] = \mathbb{P}(X_h = y - x)$

ou bien $(*)$ et $(**)$ Donne directement le résultat car $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ ne dep pas de t_n

$(*)$ Car : $\left(\dfrac{\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1}, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0)}{\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0)} = \dfrac{\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n, \dots, X_{t_0} - X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}, \dots, X_{t_0} - X_0 = x_0)} \right)$

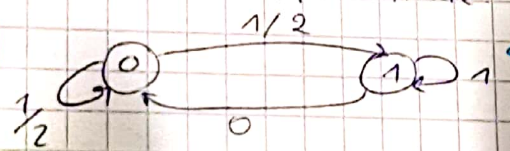
3) Voyons que les accroissements de S sont indep et stationnaires. Soient : $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$

les accroissmt : $S_{k_i} - S_{k_{i-1}} = \sum_{k=t_{i-1}+1}^{t_i} Y_k$ sont indep par indep des Y_k.

Or $\forall 0 \leq s \leq t : S_t - S_s = \sum_{k=s+1}^{t} Y_k \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{t-s} Y_j$ Car les Y_i sont iid

$\Rightarrow$ Accroissemt stationnaire $\Rightarrow (S_n)$ est une CM

4)



$\leftarrow$ matrice de transition

$\boxed{X_0 = 0}$

⚠ Pour définir une CM, il suffit de donner une matrice de transi° $+ X_0$

Soit $X = (X_n)$ la CM décrite par la matrice de transition et $X_0 = 0$

$X_2 - X_1 \perp X_1 - X_0 = X_1$??

$\mathbb{P}(X_2 - X_1 = 0 ; X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_2 - X_1 = 0 \mid X_1 = 0)\, \mathbb{P}(X_1 = 0)$

$= \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)\, \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$;

$\mathbb{P}(X_2 - X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 0, X_1 = 0)$

$= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\, \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0)\, \mathbb{P}(X_1 = 0$

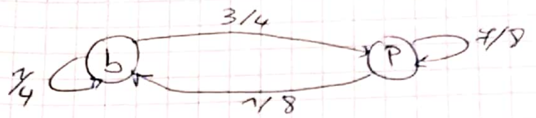
$= 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Donc : $\mathbb{P}(X_2 - X_1 = 0 ; X_1 = 0) \neq \mathbb{P}(X_2 - X_1 = 0) . \mathbb{P}(X_1 = 0)$

$\Rightarrow$ EMarkov $\not\Rightarrow$ acc indep

Feuille 1 Stocha

Exo 1



$$\longrightarrow Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B & P \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 7/8 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Com : On note X_n le temps aujourd'hui ($\forall n$, $X_n \in \underbrace{\{B, P\}}_{=E}$)

D'après l'énoncé : (X_n) est une CM de matrice de transition Q.

2) I - Suivre l'indication

II - Utiliser propo 2.2 pour dire que $P(X_n^B = B) = Q^n(B,B)$ et Calculer Q^n en diagonalisant Q.

$\longrightarrow$ I/ On a : $P(n) = P(X_n^B = B) = \frac{1}{4} P(X_{n-1}^B = B) + \frac{1}{8} P(X_{n-1}^B = P)$

$= \frac{1}{4} P(n-1) + \frac{1}{8}(1 - P(n-1))$

$= \frac{1}{8} P(n-1) + \frac{1}{8}$

$\hookrightarrow$ Pt fixe de : $x = \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \iff 8x = x + 1 \iff x = \frac{1}{7}$.

$P(n) - \frac{1}{7} = \frac{1}{8} P(n-1) + \frac{1}{8} - \frac{1}{7} = \frac{1}{8}\left(P(n-1) + 1 - \frac{8}{7}\right) = \frac{1}{8}\left(P(n-1) - \frac{1}{7}\right)$

On pose : $V_n = P(n) - \frac{1}{7}$ on a : $V_n = \frac{1}{8} V_{n-1}$

$\Rightarrow V_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n V_0 = \left(\frac{1}{8}\right)^n \left(P(0) - \frac{1}{7}\right) \Rightarrow V_n = \left(\frac{6}{7}\right) \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$

$\Rightarrow P(n) = \frac{6}{7} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{7}$

3) $Q^n(B,P) = P(X_n^B = P) = \frac{3}{4} P(n-1) + \frac{7}{8}(1 - P(n-1))$

$= -\frac{1}{8} P(n-1) + \frac{7}{8}$

$= -\left(\frac{1}{8}\right)^n \frac{6}{7} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{7}{8} = \frac{48}{56} - \left(\frac{1}{8}\right)^n \frac{6}{7}$

$= \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{8}\right)^n \frac{6}{7} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{6}{7}$

$Q^n(B,B) = P(n) \longrightarrow \frac{1}{7}$

$Q^n(P,B) = P(X_n^P = B) = \ell(n)$ en Calculan on trouve : $Q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} B & P \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/7 & 6/7 \\ 1/7 & 6/7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} B \\ P \end{array} \end{array}$

Proba qu'il fasse Beau $= \frac{1}{7}$

Feuille d'exos 6

Ex 1.

On a bien 1) $\forall n\ E|X_n| < \infty$
2) (X_n) est $\mathcal{F}_n$-adapté : } car X_n est sur-martingale

On a $\forall n$: $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$ car sur martingale

$\Rightarrow \quad X_n - E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^\circ) \geq 0$

~~Or~~ on a : $\mathbb{E}(X_n - E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^\circ)) = E(X_n) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n))$ car X_{n+1} est $\mathcal{F}_{n+1}$ mes donc $\mathcal{F}_n$ mes

$= \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n+1}) = 0$ car $\mathbb{E}$ cste

Donc $X_n - E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^\circ) = 0$ p.s.

$\Rightarrow$ 3) $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^\circ) = X_n$ ✓

Donc : (X_n) est une martingale

Ex 2.

a) ~~Mq~~ : $X_m Y_m$ est $\mathcal{F}_m^\circ$-mesurable (produit de 2 fcts mesurables.

Soit $A \in \mathcal{F}_m^\circ$; $\mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{1}_A X_m}_{Y_m \text{ mesurable}} Y_n) = ~~\mathbb{E}(\mathbb{1}~~ \mathbb{1}_A X_m \mathbb{E}(Y_n)$

$\mathbb{E}(X_m Y_n | \mathcal{F}_m^\circ) = X_m \underbrace{\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_m^\circ)} = X_m Y_m$ (vue en cours) ✓

b) On a : $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k Y_k) - \sum_{k=1}^{n} E(X_k Y_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} E(X_{k-1} Y_k)$

$+ \sum_{k=1}^{n} E(X_{k-1} Y_{k-1})$

$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} E(X_k Y_{k-1} | \mathcal{F}_k^\circ)}$

$= 2\sum_{k=1}^{n-1} E(X_k Y_k) + E(X_n Y_n) + E(X_0 Y_0) - \sum_{k=1}^{n} E(E(X_k Y_{k-1} | Y_{k-1}))$

$- \sum_{k=1}^{n} E(X_{k-1}$

$= \sum_{k=1}^{n} E(E(X_k Y_{k+1} | \mathcal{F}_k) - \sum_{k=1}^{n} E(E(X_k Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}^\circ) + \sum_{k=1}^{n} E(E(X_k Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}^\circ)$

$- \sum_{k=1}^{n} E(E(X_{k-1} Y_k | \mathcal{F}_{k-1}^\circ)$

$= \sum_{k}$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k Y_k) + \mathbb{E}(X_{k-1}Y_{k-1}) - \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_k Y_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}))}_{\mathbb{E}(X_{k-1}Y_{k-1})} - \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k-1} Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}))}_{\mathbb{E}(X_{k-1}Y_{k-1})}$$

$$= \mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0)$$

NB : De façon generale (M_t), on a :

$$\forall t > s : \mathbb{E}((M_t - M_s)^2) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2)$$

Exo 3 :

1) i : $\mathbb{E}|Z_n^t| = \mathbb{E}(e^{tS_n - nt^2\frac{\sigma^2}{2}}) = e^{-\frac{nt^2\sigma^2}{2}} \mathbb{E}(e^{t\sum_i X_i})$

$$= e^{-\frac{nt^2\sigma^2}{2}} \prod \underbrace{\mathbb{E}(e^{tX_i})}_{1} < +\infty$$

ii - On a : S_n est $\mathcal{F}_n^0$ - mes $\forall n$ (Somme de fcts $\mathcal{F}_n^0$ mes)

et $x \longmapsto \exp(tx - nt^2\sigma^2/2)$ est C^0 $\Rightarrow$ borélienne

$\Rightarrow$ (Z_n^t) est $\mathcal{F}_n^0$ - adaptée

iii - $\mathbb{E}(Z_{n+1}^t \mid \mathcal{F}_n^0) = \mathbb{E}(e^{tS_{n+1} - (n+1)t^2\frac{\sigma^2}{2}} \mid \mathcal{F}_n^0)$

$$= e^{-(n+1)t^2\sigma^2/2} \mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \mid \mathcal{F}_n^0)$$

pas la peine $\rightarrow$ $\boxed{= e^{-(n+1)t^2\frac{\sigma^2}{2}} \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(e^{tX_i} \mid \mathcal{F}_n^0)}$

$$= e^{-(n+1)t^2\frac{\sigma^2}{2}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i} \mid \mathcal{F}_n^0) \times \underbrace{\mathbb{E}(e^{tX_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n)}$$

$$= e^{-(n+1)t^2\frac{\sigma^2}{2}} \prod_{i=1}^{n} e^{tX_i} \times \cancel{\mathbb{E}(e^{tX_1} \mid \mathcal{F}_n^0)}\ \mathbb{E}(e^{tX_{n+1}})$$ par indep.

$$= e^{-(n+1)t^2\frac{\sigma^2}{2}} \prod_{i=1}^{n} e^{tX_i} \times \mathbb{E}(e^{tX_1})$$ par distribu° identique

$$= e^{-(n+1)t^2\frac{\sigma^2}{2}} \prod_{i=1}^{n} e^{tX_i} \times e^{t^2\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$= e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i - nt^2\frac{\sigma^2}{2}} = Z_n^t$$

On a alors i, ii et iii Donc Z_n^t est $\mathcal{F}_n$ - martingale

2) D'après le Corollaire 4.1 (Z_n^t est surmartingale car martingale)

on a bien $Z_n^t \geq 0$ $\Rightarrow$ $Z_n^t \xrightarrow[n\to+\infty]{} Z_\infty^t$ p.s

Calcul : $t \neq 0$: Loi des grds nbres : $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(X_1) = 0$ p.s

Donc $n\left(\frac{tS_n}{n} - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ p.s

Donc : $Z_n^t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ p.s

Mais : il n'y a pas de cv ds L^1 car $\mathbb{E}|Z_n^t - 0| = \mathbb{E}Z_n^t = 1\ \forall n \not\longrightarrow 0$

Par Contraposi° (Z_n^t) n'est pas UI.

Exo 5 . Feuille d'exercices 7

1) On a : $\varphi : x \longmapsto x^2$ est convexe.

Donc X_n^2 est une sous-martingale par théo 1.1

Donc on utilise la décomposition de Doob à la sous-mart. X_n^2

$\Rightarrow \exists$ M mart. et A process prévisible croissant $(A_0=0)$ tq

$$X_n^2 = M_n + A_n$$

$$X_n^2 - A_n = M_n \text{ est une } \mathcal{F}_n\text{-martingale}$$

Donc $\langle X \rangle_n = A_n$ de la décomposi° de Doob de X_n^2

unique par théo 5.1 (Decompo de Doob) $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = -1\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = 0$

2) 1) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\mathbb{E}|S_n| = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\varepsilon_i) < +\infty$.

2) Soit $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n)$; $\mathcal{F}_0^0 = \{\phi, \Omega\}$

on a clairement S_n est $\mathcal{F}_n^0$-adapté car $\mathcal{F}_n^0$ est la filtra° naturelle de (S_n)

3) On a : $\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n^0) = \mathbb{E}(S_n + \varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n^0)$

car S_n est $\mathcal{F}_n^0$-mes $= S_n + \mathbb{E}(\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n^0)$

(car ε_{n+1} indep de $\mathcal{F}_n^0$) $= S_n + \mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}) = S_n$ (car ε_{n+1} est de loi centrée)

$\longrightarrow S_n$ martingale

[$\mathbb{E}(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \, \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon_i = \ldots) < +\infty$]

* On a : S_n^2 vérifie les conditions de la décomposition de Doob, Donc d'après

1) on a : $\langle S \rangle_n = A_n$ ← de la décompo.

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 - S_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-1})$$

⋮

~~calcul long~~

↳ Méthode 2 : On utilise l'unicité de la décomposition de q1, il suffit de mq : 1- n est un processus croissant (c'est evident)

2- $S_n^2 - n$ est une martingale.

Revenons sur le carré intégrabilité de S_n $\binom{n}{k}$

On a $E(S_n^2) = \sum_{k=-n}^{n} k^2 \mathbb{P}(S_n = k) = 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(S_n=k)$
$= 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^k < +\infty$

1- $S_n^2 - n$ est une mart ?

→1. $E|S_n^2 - n| < +\infty$ ✓

→2. Mq : $S_n^2 - n$ est $\mathcal{F}_n^0$-adapté, ça découle du fait que S_n^2 soit sous-martingale.

→3. Mq $E(S_{n+1}^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n^0) = S_n^2 - n$

$E(S_{n+1}^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n^0) = E(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n^0) - (n+1)$

2) On a : $E(\xi_1) = 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$

$E(\xi_1^2) = 1 \times 1 = 1$ car $\xi_1^2(\Omega) = \{1\}$

Donc les ξ_i sont dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

On a vu ds le cours qu'une telle MA symétrique (S_n) (avec incréments intégrables) est une martingale % à la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$; $\forall n \geq 1$, $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(\xi_i, i \leq n) = \sigma(S_k, k \leq n)$

En outre, ici, (S_n) est de carré intégrable.

En effet, $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, or chaque ξ_i, $i = 1, \dots, n$ est ds L^2 et L^2 est un

Par Q1 : $\exists!$ processus $\langle S \rangle$ prévisible, avec $\langle S \rangle_0 = 0$, croissant tq $S_n^2 - \langle S \rangle$ est une $(\mathcal{F}_n)$-mart.

n est bien prévisible, croissant, partant de 0

Si on vérifie que $(S_n^2 - n)$ est une $\mathcal{F}_n$-mart, on conclura par unicité que $\langle S \rangle_n = n$

⚠ il faut pas changer de filtration

$(S_n^2 - n)$ intégrable car (S_n) est de carré intégrable et adapté car (S_n)-ada

On a : $E(S_{n+1}^2 - n - 1 | \mathcal{F}_n^0) = E((S_n + \xi_{n+1})^2 - n - 1 | \mathcal{F}_n)$
$= E(S_n^2 + 2\xi_{n+1} S_n + \xi_{n+1}^2 - n - 1 | \mathcal{F}_n)$
$= S_n^2 - n + \underbrace{E(\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)}_{E(\xi_{n+1}^2) \text{ car } \xi_{n+1} \text{ indep de } \mathcal{F}_n} - 1 + 2\underbrace{E(\xi_n S_n | \mathcal{F}_n)}_{=0}$

$= E(\xi_1^2) = 1$

On a $E(S_n \xi_n | \mathcal{F}_n) = S_n E(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$ cqfd.

a vu ds le Cours que (S_n) est une martingale % à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n^0)$,
et que T est une $(\mathcal{F}_n^0)$-t a

* Mq T n'est pas borné

① D'après le théo 3.2 : T borné $\Rightarrow \mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(S_0)$

or ici ; $\mathbb{E}(S_0) = 1$ et $\mathbb{E}(S_T) \overset{\text{par def de } T}{=} 0$

Donc par Contraposition T n'est pas borné

* On pose : $Y_n = S_{n \wedge T} = S_n^T \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'après le théo 3.1 ; Y_n est une martingale.

En outre Y prend des valeurs positives

Donc d'après le Corollaire 4.1 : $Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} Y_\infty \in L^1$ p.s

Pour $\omega \in \{T = +\infty\}$ je veux que ce ω appartienne au complémentaire de l'evnmt $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y_\infty$

On a : $|Y_{n+1} - Y_n|(\omega) = |S_{n+1} - S_n|(\omega) = |X_{n+1}|(\omega) = 1$ (car $X_i = 1$ ou -1)

Donc il n'est pas possible que pour ce ω : $Y_n(\omega) \longrightarrow Y_\infty(\omega)$ (car sinon
on aurait $|Y_{n+1} - Y_n|(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ or on a vu que ça vaut 1)

C'est donc que $\omega \in \{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y_\infty\}^c$ ← on suppose sans perte de généralité que ceci $\in \mathcal{F}^0$

Mais, $\mathbb{P}(\{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y_\infty\}^c) = 0$ car $\mathbb{P}(\{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y_\infty\}) = 1$

Donc $T < +\infty$ p.s (car $\omega \in$ à evnt de proba nulle

Exo 1 :

1) Supposons $C_t > P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}$ (C_t est le plus cher et le put et l'actif son bon marché)

en t : { on vend un Call
on achète 1 Put et 1 actif.

On a : | 1 Put on est en "position longue" sur le Put
| -1 Call on est en "position Courte" sur le Call.
| 1 actif
| cash : $C_t - P_t - S_t$

* Si $C_t - P_t - S_t > 0$, alors la vente du Call a rapporté assez pour acheter le Put et l'actif (il nous reste encore de l'argent) $\Rightarrow$ je place $(C_t - P_t - S_t) > 0$ à la banque au taux r.

* Si $C_t - P_t - S_t < 0$, alors on emprunte $\underbrace{-(C_t - P_t - S_t)}_{>0}$ € à la banque au taux r

en T : * Si $S_T \geq K$: le Call s'exerce, le Put non
↳ (le Call a été vendu à qlq d'autre qui l'exerce, donc je suis obligé de leur vendre l'actif à K€)
on vend l'actif au prix K.

* Si $S_T < K$: le Put s'exerce (nous l'exerçons), le Call non
↳ On vend l'actif au prix K

→ Ds les 2 cas, on vend l'actif au prix K.

Bilan : 0 actif

Cash : $K + (C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} > 0$ → Arbitrage

Donc par contraposition ; $C_t - P_t \leq S_t - Ke^{-r(T-t)}$ (1)

Variante ds la façon de rédiger :

en t : | 1 actif
| cash : $C_t - P_t - S_t$
| + long sur Put et Court sur Call

en T : | 0 actif
| Cash

↳ Cash en T (regardé en t) : $C_t - P_t - S_t + K \underbrace{B(t,T)}_{e^{-r(T-t)}} > 0$

qd je suis en t, je sais de façon certaine que en T j'aurai K€, donc ceci est équivalent à "disposer en t de $K B(t,T)$

C'est la valeur en t de ce dont je disposerai e

2) On suppose $C_t < P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}$

en t : on achète Call
on vend Put et 1 actif
(à découvert : ie on l'emprunte et il faut le restituer en T)

Cash : $P_t + S_t - C_t$
-1 actif
long sur Call, court sur Put

en T : Si $S_T \geq K$: j'exerce le Call, le put n'est pas exercé
Si $S_T < K$: On exerce le put, j'exerce pas le Call.

→ Ds tous les cas j'achète l'actif au prix K, qu'on restitue aussitôt

Bilan : 0 actif (liquidé la dette)
cash (regardé en T) : $P_t + S_t - C_t - K \overbrace{B(t,T)}^{e^{-r(T-t)}} > 0$ ⇒ Arbitrage absurde car AOA.

car on débourse K€ en T

Donc $P_t + S_t - C_t - Ke^{-r(T-t)} \leq 0$

⇒ $C_t - P_t \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$ (2)

De (1) et (2) on obtient : $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$

Exo 2 :

1) $C_t \leq S_t$ car il serait absurde que $C_t > S_t$! (On ne va pas payer en t le droit d'acheter S plus cher que sa valeur en t !)