Chapter 3

Mouvement Brownien

On rappelle que dans ce cours $I = \mathbb{R}^+$ ou $[0, T]$ pour un $T > 0$.

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Mouvement Brownien Standard.*
On appelle ***mouvement Brownien standard*** *réel (M.B.S.) tout processus* $W = (W_t)_{t \in I}$ *à* ***trajectoires continues*** *vérifiant*

a. $W_0 = 0$ *p.s.;*

b. accroissements stationnaires gaussien : $\forall 0 \leq s < t \in I$ *la v.a.* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*;*

c. accroissements indépendants : $\forall n \geq 1$ *et* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ *les v.a.* $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ *pour* $0 \leq i < n$ *sont indépendantes.*

Remarque : On observe que $\forall t \in I$ la v.a. $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. De plus $\forall 0 \leq s < t$ on a $\mathbf{Cov}(W_s, W_t) = s$.
Exercice : prouver les affirmations de la remarque ci dessus.
On peut également définir le

Définition 3.2. *Mouvement Brownien issu de* 0.
On appelle ***mouvement Brownien issu de*** 0 *réel tout processus* $B = (B_t)_{t \in I}$ *à* ***trajectoires continues*** *vérifiant*

a. $B_0 = 0$ *p.s.;*

b. accroissements stationnaires : $\forall 0 \leq s < t \in I$ *la v.a.* $B_t - B_s$ *a même loi que* B_{t-s}*;*

c. accroissements indépendants : $\forall n \geq 1$ *et* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ *les v.a.* $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ *pour* $0 \leq i < n$ *sont indépendantes.*

De la même façon que la loi normale est reliée à la loi normale standard, le mouvement Brownien issu de 0 est relié au M.B.S. ce qui fait de ce dernier un processus central. Ceci est énoncé dans le résultat qui suit.

Théorème 3.3. *(admis)*
Si B *est un mouvement Brownien issu de* 0 *alors il existe deux paramètres* $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma > 0$ *tels que le processus* W *définit par*

$$W_t = \frac{B_t - \mu t}{\sigma}, \ \forall t \in I$$

est un M.B.S.

Remarque : Ainsi si $B = (B_t)_{t \in I}$ est un mouvement Brownien issu de 0, avec $\mu := \mathbb{E}(B_1)$ et $\sigma^2 := \mathbf{Var}(B_1)$, alors on pourra toujours écrire

$$B_t = \mu t + \sigma W_t$$

avec $W = (W_t)_{t\in I}$ M.B.S. En conséquence on observe que $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.
La définition et le résultat précédent établissent qu'un MBS est un processus centré à trajectoires continue, à accroissements stationnaires et indépendants de variance t au temps t.
La proposition qui suit établit qu'il s'agit également d'un processus gaussien centré de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t$ et à trajectoires continues.

Proposition 3.4. *M.B.S comme processus gaussien.*
Soit $W = (W_t)_{t\in I}$ un processus à valeurs réelles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Le processus W est un M.B.S.*
2. *Le processus W est gaussien, centré à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t$.*

Preuve. On commence à montrer que 1. implique 2.
Les accroissements $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ étant indépendants pour tous choix $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et respectivement de loi $\mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$ le vecteur $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^T$ est gaussien centré et de matrice de covariance diagonale $diag(t_1, t_2 - t_1, ..., t_n - t_{n-1})$. De plus comme

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

donc par la Proposition 1.13 on conclu que le vecteur $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ est gaussien centré. De plus le processus est par définition à trajectoires continue et on a pour tous $s < t \in I$, $K(s,t) = \mathbf{Cov}(W_s, W_t) = s = s \wedge t$.

A présent pour montrer que 2. implique 1.
Il suffit de montrer que $W_0 = 0$ p.s. et que W est à accroissements indépendants et stationnaires gaussiens avec la bonne variance associée.

Comme W est un processus gaussien centré on en déduit que pour tous $s < t \in I$

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}(W_t - W_s) = \mathbf{Var}(W_t) + \mathbf{Var}(W_s) - 2\mathbf{Cov}(W_t, W_s) = t + s - 2s = t - s$$

pour l'indépendance des accroissements il suffit de calculer leurs covariances : $\forall s < t \leq u < v \in I$

$$\mathbf{Cov}(W_v - W_u, W_t - W_s) = \mathbf{Cov}(W_v, W_t) - \mathbf{Cov}(W_u, W_t) - \mathbf{Cov}(W_v, W_s) + \mathbf{Cov}(W_u, W_s) = t - s - t + s = 0$$

le vecteur étant gaussien cela signifie l'indépendance de ses coordonnées.
Enfin $\mathbb{E}(W_0) = 0$ et $\mathbf{Var}(W_0) = 0$ donc $W_0 = 0$ p.s. □

3.1.1 Existence du M.B.S.

On va utiliser le théorème de Kolmogorov-Centsov pour justifier l'existence d'un processus continue vérifiant bien les propriétés du M.B.S.
On prend X un processus à accroissements indépendants et stationnaire vérifiant $X_0 = 0$ p.s. et $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ pour tous $s < t \in I$. (L'existence d'un tel processus est une conséquence du théorème de consistance de Kolmogorov qui montre l'existence d'un tel processus sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).
On rappelle que si $Z \in \mathcal{N}(0,1)$ alors Z a des moments de tout ordre en particulier on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(Z^{2n+1}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(Z^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$$

ce qui implique ici que

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^{2n}] = |t - s|^n \frac{(2n)!}{n!2^n}$$

En utilisant le théorème de Kolmogorov-Centsov avec $\alpha = 2n$, $\beta = n - 1$ et $\delta = \frac{(2n)!}{n!2^n}$ on en déduit :

1. il existe $W = \widetilde{X}$ une version continue de X, et donc W est un M.B.S.
2. De plus W est localement Hölderien d'exposant $\gamma \in]0, 1/2[$.

3.2 Rappels/Compléments de théorie des probabilités

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabiilité.

Définition 3.5. *Etant donnés $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ on définit les deux événements $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ par*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \text{ et } \liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

Exercice : décrire en terme d'événement la signification de $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ et montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
On énonce ici deux résultats célèbres de la théorie des probabilités.

Lemme 3.6. *Lemmes de Borel-Cantelli*

1. *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements tels que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

   alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

2. *Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements* ***indépendants*** *tels que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = +\infty$$

   alors $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 1$.

Exercices

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. montrer que si $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$$

   alors X_n converge presque sûrement vers 0.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}xp(\log(n))$.
   [2.1] Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.
   [2.2] Montrer que $\mathbb{P}(|X_n| > 1) = 1/n$ et en déduire que X_n ne converge pas p.s.

3.3 Premières propriétés du MBS

3.3.1 Principes d'invariance

Proposition 3.7. *Soient $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ un M.B.S., $s > 0$ et $\lambda \neq 0$. Les processus B^s et $\widetilde{B}^\lambda$ respectivement définis par : $\forall t \in \mathbb{R}+$*

1. *$B_t^s = W_{t+s} - W_s$ (Invariance par translation du temps.)*
2. *$\widetilde{B}_t^\lambda = \lambda W_{\frac{t}{\lambda^2}}$ (Invariance par changement d'échelle.)*

sont des M.B.S. De plus B^s est indépendant de $\sigma(W_u, u \in [0, s])$.

Preuve. Vu en exercice cf. TD2 □

3.3.2 Lois des grands nombres

Proposition 3.8. *Une première LDGN pour le M.B.S.*
Soit $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}+}$ un M.B.S. alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} W_n = 0, \ \mathbb{P} - p.s.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{W_n}{n} \right| > \varepsilon \right) = \mathbb{P}\left(|Z| > \varepsilon \sqrt{n} \right)$$

ou

$$\mathbb{P}\left(|Z| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2} \right)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{W_n}{n} \right| > \varepsilon \right) < +\infty$$

qui par Borel Cantelli (cf exercice) implique

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} W_n = 0, \ \mathbb{P} - p.s.$$

□

Remarques :

1. On aurait pu également montrer le résultat en utilisant la LFGN pour les v.a. i.i.d. : en posant $X_k = W_k - W_{k-1}$ on observe que
$$\frac{1}{n} W_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$
où les X_k sont des v.a. indépendantes de moyenne 0. Cette approche justifie le nom "LDGN pour le M.B.S." employé pour décrire le résultat.

2. Pour montrer qu'on a également $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} W_t = 0, \ \mathbb{P} - p.s.$ on a besoin d'un contrôle uniforme sur les trajectoires.

Pour tout $t > 0$ il existe $n(t) \in \mathbb{N}$ tel que $n(t) \leq t < n(t) + 1$

$$\frac{W_t}{t} = \frac{W_t - W_{n(t)}}{t} + \frac{W_{n(t)}}{n(t)\left(1 + \frac{t - n(t)}{n(t)}\right)}$$

et

$$\left| \frac{W_t}{t} \right| \leq \frac{\max_{u \in [n(t), n(t)+1]} |W_u - W_{n(t)}|}{t} + \frac{1}{\left(1 + \frac{t - n(t)}{n(t)}\right)} \left| \frac{W_{n(t)}}{n(t)} \right|$$

Or comme $B_{u-n(t)} := W_u - W_{n(t)}$ est un MBS sur $u \in [n(t), n(t)+1]$ le numérateur du premier membre de droite de l'inégalité précédente se comporte comme :

$$\max_{s \in [0,1]} |B_s|$$

qui est une v.a. finie p.s. (que nous verrons être de même loi que $|W_1|$ plus loin dans le cours) d'où

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\max_{u \in [n(t), n(t)+1]} |W_u - W_{n(t)}|}{t} = 0$$

et par ce qui précède on a p.s.

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{t - n(t)}{n(t)}\right)^{-1} \left| \frac{W_{n(t)}}{n(t)} \right| = 0.$$

d'où la loi forte

Théorème 3.9. *LFGN pour le M.B.S.*
Soit W un M.B.S. Alors

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} W_t = 0, \ \mathbb{P} - p.s.$$

On rappelle ici le corollaire vu en TD

Corollaire 3.10. *Invariance par inversion du temps.*
Soit $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ un M.B.S. alors le processus X défini par $X_0 = 0$ et $\forall t > 0$

$$X_t = tW_{\frac{1}{t}}$$

est un M.B.S.

3.3.3 Comportement asymptotique

Le résultat le plus précis est donné par un résultat fameux (que nous ne montrerons pas ici).

Théorème 3.11. *Loi du logarithme itéré (Khintchine 1924).*
Soit W un M.B.S. Alors $\mathbb{P}$-p.s. on a

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = 1 \text{ et } \liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = -1$$

Remarques

1. La $\liminf$ se déduit de la $\limsup$ en observant que

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = -\limsup_{t\to+\infty} \frac{-W_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}}$$

   et en utilisant (cf. exercices) que $-W$ est aussi un M.B.S.

2. On peut en déduire (cf. résultat vu indépendamment en TD) que $\mathbb{P}$-p.s. on a

$$\limsup_{t\to+\infty} W_t = \limsup_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty \text{ et } \liminf_{t\to+\infty} W_t = \liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

   ainsi que la LFGN vue précédement.

3. En utilisant que le processus X, définit par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ pour $t > 0$, est un M.B.S. on en déduit que $\mathbb{P}$-p.s. on a

$$\limsup_{s\searrow 0} \frac{W_s}{\sqrt{2s\log(\log(1/s))}} = 1 \text{ et } \liminf_{s\searrow 0} \frac{W_s}{\sqrt{2s\log(\log(1/s))}} = -1$$

3.4 Zéros et trajectoires du MBS

Une conséquence des résultats obtenus jusqu'ici est que si W est un M.B.S. alors le processus passe une infinité de fois par 0. On s'intéresse ici à ces visites en 0.

Proposition 3.12. *Ensemble des zéros du M.B.S.*
On note $\aleph$ l'ensemble aléatoire des 0 de W : tel que $\forall\omega \in \Omega$

$$\aleph(\omega) = \{t \geq 0 : W_t(\omega) = 0\}$$

Alors avec probabilité 1 :

1. *La mesure de Lebesgue de $\aleph$ est nulle.*
2. *L'ensemble $\aleph$ est un fermé non borné.*
3. *Le point $t = 0$ est point d'accumulation de $\aleph$.*

Preuve. *3.* est une conséquence de la loi du logarithme itéré.
Pour *1.* on a par Tonnelli

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\aleph}(t)\ dt\right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(t \in \aleph)\ dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(W_t = 0)\ dt = 0$$

Comme $\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\aleph}(t)\ dt \geq 0$ on en déduit que cette v.a. est nulle $\mathbb{P}$-p.s.
Enfin pour *2.* on a que pour $\mathbb{P}$ presque tout ω la trajectoire $t \mapsto W_t$ est continue donc $\aleph(\omega) = W(\omega)^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc $\aleph(\omega)$ est fermé. De plus cet ensemble n'est pas borné car

$$\limsup_{t\to+\infty} W_t = +\infty \text{ et } \liminf_{t\to+\infty} W_t = -\infty$$

et comme W est à trajectoires continues cela implique que quelque soit le temps t où l'on observe W, le niveau 0 est franchi une infinité de fois à partir de t. □

Une autre conséquence est le comportement peu régulier des trajectoires du M.B.S.

Proposition 3.13. *Avec probabilité 1 le M.B.S. n'est dérivable nulle part.*

Eléments de preuve : Soit W un M.B.S. On commence par observer qu'en posant $t = 1/s$ on a

$$\limsup_{s\searrow 0} \frac{W_s}{s} = \limsup_{t\to+\infty} tW_{1/t}$$

Or nous avons deja vu (cf TD) que le processus X définit par $X_t = tW_{1/t}$ est un M.B.S. et par ce qui précède

$$\limsup_{t\to+\infty} X_t = +\infty$$

en conséquence W n'est pas dérivable (à droite) en 0.
Par la propriété d'invariance par translation on montre qu'il n'est pas dérivable (à droite) en tout point $s > 0$.
La loi du logarithme itéré nous donne également ce résultat (ainsi que la non dérivabilité à gauche).
Ainsi on montre que pour tous $t \geq 0$ fixé l'ensemble

$$\mathcal{N}_t = \{\omega \in \Omega : s \mapsto W_s(\omega) \text{ est dérivable en t}\}$$

est négligeable.
En revanche cela ne suffit pas pour affirmer que l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{\omega \in \Omega : \exists t \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } s \mapsto W_s(\omega) \text{ est dérivable en t}\}$$

soit négligeable. Ce résultat plus technique, que nous admettrons est dû à Payley-Wiener & Zygmund (1933).