Ex 1

1. 0 n'est pas VP de A car sinon, on aurait $x \neq 0$ tq $x^T A x = x^T . 0 = 0$
→ impossible car A est définie.
Donc $\det(A) \neq 0$: A est inversible. Elle admet donc une factorisation LU où :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \gamma_2 & \ddots & \\ 0 & \gamma_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & a_{12} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{bidiagonales}$$

Par ailleurs, $T = L \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$. Donc T est également bidiagonale.

2. D'après le TD4, on a :

$$(*) \begin{cases} u_{11} = a_{11} \\ \gamma_k u_{k-1,k-1} = a_{k,k-1} \\ \gamma_k a_{k-1,k} + u_{kk} = a_{kk} \end{cases} \quad \rightarrow 3n \text{ opérations pour obtenir les coefficients}$$

+ n opérations pour le calcul des racines carrées
+ n opérations pour la multi° matricielle

= <u>5n opérations</u>

Relat° de récurrence : $\begin{cases} (*) \\ t_{kk} = \sqrt{u_{kk}} \\ t_{k,k-1} = \gamma_k \sqrt{u_{kk}} \end{cases}$

<u>Méthode plus efficace</u> :

$t_{11} = \sqrt{u_{11}} \rightarrow t_{21} = \dfrac{a_{21}}{t_{11}}$

$$\forall j \geq 2 : \quad t_{j+1,j} = \frac{1}{t_{jj}} (a_{j+1,j} - \Sigma t_{j+1,k} t_{j,k})$$
$$= \frac{a_{j+1,j}}{t_{jj}}$$
$$t_{j+1,j+1} = (a_{j+1,j+1} - \Sigma t_{j+1,k}^2)^{1/2}$$
$$= (a_{j+1,j+1} - t_{j+1,j}^2)^{1/2}$$

3. Soit $i = 2, 3, \dots, n-1$. Posons $x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ième ligne

$$x_i^T A x_i = (0 \; 0 \overset{i}{1} 0 \; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i = 2 > 0$$

Pour $i = 1$: $x_1^T A x_1 = (1 0 \cdots 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$

Pour $i = n$: $x_n^T A x_n = (0 \cdots 0\, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 > 0$

De plus, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

D'où :

$$y^T A y = \sum a_i x_i^T \; A \; \sum a_i x_i$$
$$= \sum a_i^2 x_i^T A x_i \quad > 0 \text{ comme somme de termes } > 0.$$

Donc A est positive.

• D'après ce qui précède : $y^T A y = \sum \underbrace{a_i^2}_{\geq 0} \underbrace{x_i^T A x_i}_{>0}$

Donc $y^T A y = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i^2 = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \Rightarrow y = 0$

Donc A est définie.

D'après 2) : $t_{11} = 1$ et $\forall j \geq 1$: $t_{j+1,j} = \dfrac{-1}{t_{jj}} = -1$

$t_{j+1,j+1} = \left(2 - \dfrac{1}{t_{jj}^2}\right)^{1/2}$ donc $t_{jj} = 1$ $\Uparrow$

Donc $T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & 1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}$

→ (Apparemment) : $A = T^T T \Leftrightarrow A$ est sym, def, pos.

Ex 2 :

1. * Sym : $M^T = (A^T A)^T = A^T A^{T^T} = A^T A = M \rightarrow$ OK

* $x^T M x = x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$
$= 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $A \neq 0$ psq A inversible.

Ex 3

1. Th de facto° de Cholesky : A est symdefpos ⇒ facto° de C. est unique.

→ Montrons que $A + \frac{1}{k} I$ est sdp.

• Sym : $(A + \frac{1}{k} I)^T = A^T + \frac{1}{k} I^T = A + \frac{1}{k} I$ car A est sdp.

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$x^T (A + \frac{1}{k} I) x = \underbrace{x^T A x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{k} \|x\|^2}_{>0} > 0$