

chapitre 2 : Théorie de l'utilité en avenir incertain

1 - Axiomatique des préférences en avenir incertain :

1 - modèle :

2 dates , en $t=0$ = aujourd'hui

en $t=1$: demain

avenir incertain \Rightarrow les états de la nature en $t=1$, sont multiples

$\Omega = \{ \text{ensemble des états de la nature en } t=1 \}$ les agents sont capables d'affecter une proba d'occurrence à chaque état de la nature (on définit P et (r, R) un espace probabilisable)

les loteries :

Une loterie = application qui associe à chaque état de la nature la quantité de bien ou le panier de biens qu'on obtient (engros \equiv variable aléatoire)

1) l'incertitude est liée quant aux états de la nature qui peuvent se produire à la date 1 les objets du choix sont des loteries dont les résultats sont aléatoires.

2) l'incertitude est modélisée de la façon suivante : on suppose que tout individu sait à la date 0 que l'état de la nature qui prévaudra à la date 1 appartient à Ω , mais qu'il ne connaît qu'avec une probabilité celui qui se réalisera effectivement.

3) loterie $x = [w, p]$ $w = (w_1, w_2, w_3)$ sont $w_i, w_i \in \{1, 2, 3\}$ est la quantité reçue à l'état w , et $p = (p_1, p_2, p_3)$ $\sum p_w = 1$ / la proba de cet état (ex : s'il y a seulement 3 états)

3 - l'hypothèse d'espérance d'utilité :

$X = \{ \text{les loteries auxquelles est soumis l'agent} \}$ l'agent doit donner ses préférences en fonction des distributions aléatoires de panier

Pour définir l'utilité en avenir incertain, on a besoin des axiomes de Von Neumann et Morgenstern

4 - les axiomes :

1) comparabilité : $\forall p, q \in X$, $p \succsim q$ ou $q \succsim p$

2) transitivité : $\forall x, y, z$, $x \succsim y$ et $y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$

3) indépendance : $\forall p, q \in X$ et $\alpha \in [0, 1]$

$$p \sim q \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)r \sim \alpha q + (1-\alpha)r$$

$$p \succ q \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)r \succ \alpha q + (1-\alpha)r$$

4) valeur intermédiaire : $\forall p, q, r \in X$ si $p \succ q \succ r$ ou $p \succ q \succ r$

$$\text{alors } \exists \alpha \in [0, 1] \quad q \sim \alpha p + (1-\alpha)r$$

Dominance : $\forall p, q \in X$ $p \succsim q$ et $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ $\alpha p + (1-\alpha)q \succsim \beta p + (1-\beta)q$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \beta$$

II : Thm de l'espérance d'utilité :

Thm : pour toute relation de préférence \succsim sur un ensemble X qui vérifie les axiomes 1 à 4, il existe $U: X \rightarrow \mathbb{R}$ tq :

1/ $\forall p, q \in X, p \succsim q \Rightarrow U(p) \geq U(q)$

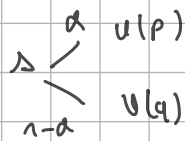
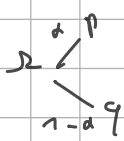
2/ $\forall p, q \in X, \forall \alpha \in [0, 1], U(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(q)$

Rmq :

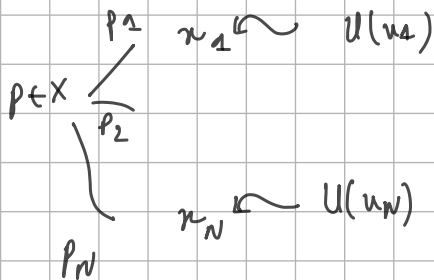
1/ signifie que U est une fonction d'utilité.

2/ signifie que U est une fonction affine.

Une loterie qui donne le résultat de Δ loterie avec proba α et le résultat d'une loterie avec une proba $1-\alpha$



$$U(r) = U(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(q) = E(\Delta)$$



$$U(p) = \sum_{i=1}^N p_i U(u_i)$$

Corollaire : \forall relation de préférence \succsim qui vérifie les axiomes 1 à 4

\exists fct° mesure d'utilité U tq :

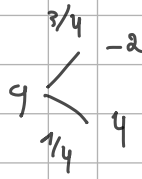
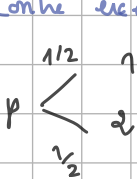
$$\forall p, q \in X, p \succsim q \Leftrightarrow E(p) \geq E(q)$$

III - Propriétés de la fct° d'utilité de VN-M :

1 - Cardinalité de la mesure :

si U et V 2 mesure d'utilité d'une même relation de préférence \succsim alors elles sont égales à transformation affine positive près c-à-d $\exists \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \quad V = \alpha U + \beta$

Contre exemple :



$$U(1) = 3$$

$$U(2) = 2$$

$$E(U(p)) = 0,5 > E(U(q)) = -0,5$$

$$E(V(p)) = 2,5 < E(V(q)) = 13,75$$

2- monotonie:

si les agents sont insatiables, alors u est croissante (les agents sont gourmands et cette hypothèse de non satiété)

Paradoxe de Allais:

Cas 1: choix entre les 2 loteries:

$P_1 \xrightarrow{p=1} 1M€$

$P_2 \begin{cases} 0,4 \rightarrow 5M€ \\ 0,8 \rightarrow 1M€ \\ 0,2 \rightarrow 0€ \end{cases}$

Cas 2: choisi entre les 2 loteries:

$P_3 \begin{cases} 0,4 \rightarrow 5M€ \\ 0,8 \rightarrow 0€ \end{cases}$

$P_4 \begin{cases} 0,4 \rightarrow 1M€ \\ 0,8 \rightarrow 0€ \end{cases}$

choisi 1% 2 et 3% 4 ne respecte pas les axiomes de la
fct = d'utilité