ordre de consistance schéma du point milieu

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - \phi(t_k, y_k, h) = 0$$

$$\phi(t_k, y_k, h) = f\left(t_k + \frac{h}{2}, \; y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right).$$

f vérifie l'hypothèse (H) et est de classe C^2.

Soit $y \in C^3$ solution de l'équation différentielle (E) : $y' = f(t,y)$.

- $\phi(t, y(t), h) = f\left(t+\frac{h}{2}, \; y(t) + \frac{h}{2} y'(t)\right)$

$$= f\left(t+\frac{h}{2}, \; y\left(t+\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{4}\int_0^1 (1-s)\, y''\left(t+s\frac{h}{2}\right) ds\right)$$

car d'après la formule de Taylor :

$$y\left(t+\frac{h}{2}\right) = y(t) + \frac{h}{2}y'(t) + \frac{h^2}{4}\int_0^1 (1-s)\, y''\left(t+s\frac{h}{2}\right) ds$$

- $\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$ se développe également par la formule de Taylor :

$$y(t+h) = y\left(t+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) = y\left(t+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}y'\left(t+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8}y''\left(t+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{16}\int_0^1 (1-s)^3 y^{(3)}\left(t+\frac{sh}{2}\right) ds$$

$$y(t) = y\left(t+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right) = y\left(t+\frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}y'\left(t+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8}y''\left(t+\frac{h}{2}\right) - \frac{h^3}{16}\int_0^1 (1-s)^3 y^{(3)}\left(t-\frac{sh}{2}\right) ds$$

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = y'\left(t+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{16} \times \int_0^1 (1-s)^3\left[y^{(3)}\left(t+s\frac{h}{2}\right) + y^{(3)}\left(t-s\frac{h}{2}\right)\right] ds$$

- Erreur de consistance :

$$\varepsilon(t) = \frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \phi(t, y(t), h)$$

$$= f\left(t+\frac{h}{2}, y\left(t+\frac{h}{2}\right)\right) - f\left(t+\frac{h}{2}, y\left(t+\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{4}\int_0^1 (1-s)\, y''\left(t+\frac{sh}{2}\right) ds\right)$$
$$+ \frac{h^2}{16}\int_0^1 (1-s)^3\left[y^{(3)}\left(t+s\frac{h}{2}\right) + y^{(3)}\left(t-s\frac{h}{2}\right)\right] ds$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse (H) sur f (L-lipschitzienne) :

$$\|\varepsilon(t)\| \le L\frac{h^2}{4}\left\|\int_0^1 (1-s)\,y''\left(t+s\frac{h}{2}\right) ds\right\| + \frac{h^2}{16}\left\|\int_0^1 (1-s)^3\left[y^{(3)}\left(t+s\frac{h}{2}\right) + y^{(3)}\left(t-s\frac{h}{2}\right)\right] ds\right\|$$

$$\le L\frac{h^2}{4}\sup_{[0,T]}\|y''\|\int_0^1 (1-s)\,ds + \frac{h^2}{8}\sup_{[0,T]}\|y^{(3)}\|\int_0^1 (1-s)^3\,ds$$

Donc $\displaystyle\sup_{[0,T-h]}\|\varepsilon(t)\| \le C h^2$ avec $\displaystyle C = \frac{L}{8}\sup_{[0,T]}\|y''\| + \frac{1}{32}\sup_{[0,T]}\|y^{(3)}\|$

Le schéma du point milieu est donc consistant d'ordre 2.

Remarque:

Si on souhaite simplement vérifier que le schéma est consistant sans calculer son ordre, il suffit de revenir à l'expression de ϕ :

$$\phi(t,y,h) = f\left(t+\frac{h}{2},\ y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

et de remarquer que $\phi(t,y,0) = f(t,y)\quad \forall t, \forall y$.