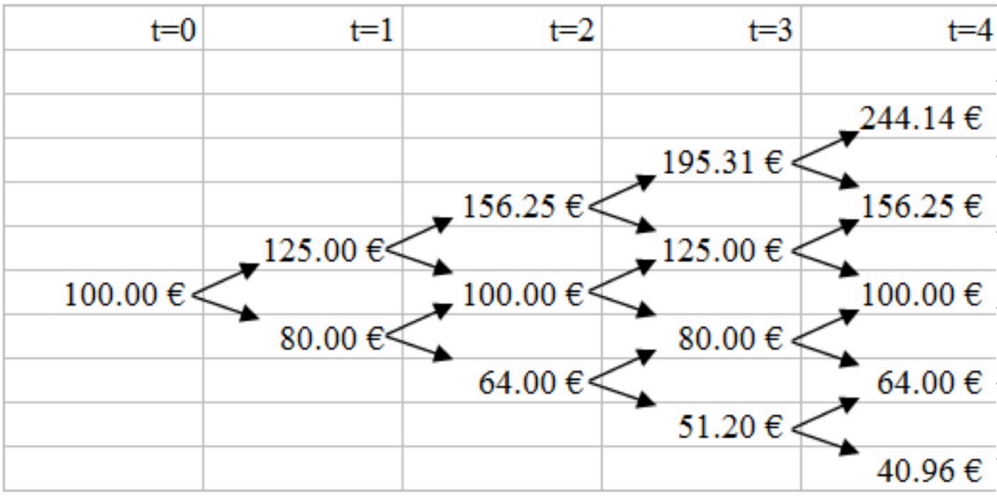
TD ②
exo ④

si on t = 4

$S(t=4) \geq 150$ €

on verse au client

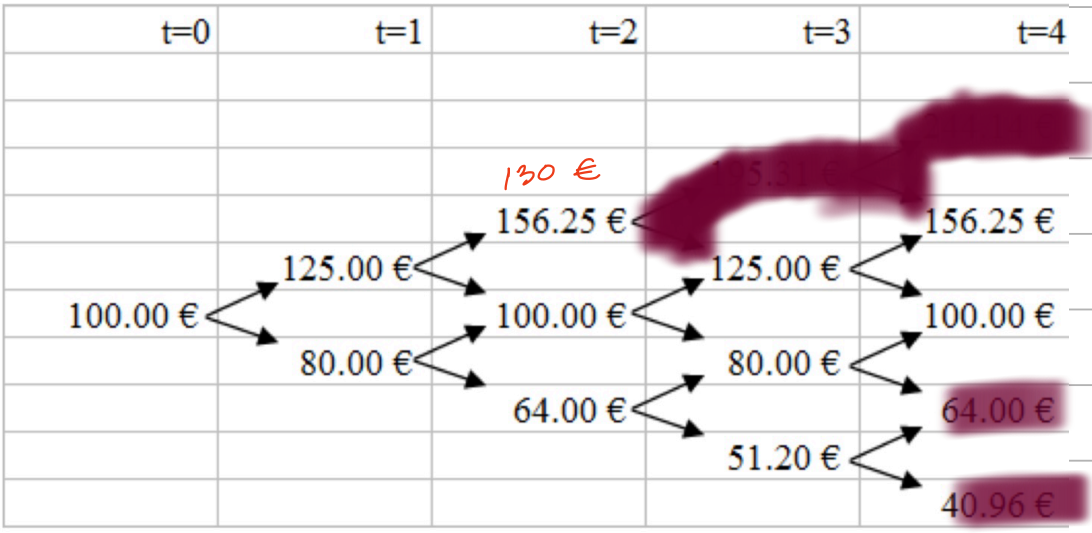
150 €



on fixe F_0 à 100

flux en t = 4 :

u^4	150 €	$(2/3)^4$	$\Rightarrow$ 88 €
$u^3 d$	100 €	$4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$	⚠ pq la banque decide de rendre
$u^2 d^2$	100 €	$6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$	q/q chose à 100 € alors que son
$u d^3$	100 €	$4 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$	prix de couverture est 88 €
d^4	100 €	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\Rightarrow$ gha dro bha fji b-hu (100 - 88)



130 €

100 €

100 €

130 € en t = 0 avec proba q^2

150 € en t = 4 " " $2q^3(1-q)$

100 € en t = 4 " " $1 - q^2 - 2q^3(1-q)$

Exo 1

S_0, $B_0 = \frac{1}{r}$ $\to$ uS_0, $rB_0 = 1$; dS_0, $rB_0 = 1$

AOA ssi $d+b < r < u+b$

$d < r-b < u$

$$\pi_u = \frac{1}{r}\,\frac{r-d-b}{u-d} \qquad \pi_d = \frac{1}{r}\,\frac{u+b-r}{u-d}$$

$$q = \frac{r-d-b}{r-d}$$

L'action qui verse un dividende :

S_0, B_0 $\to$ $(b+u)S_0$; $(b+d)S_0$

$$S_0 = \frac{1}{r}\mathbb{E}_q(E_1)$$

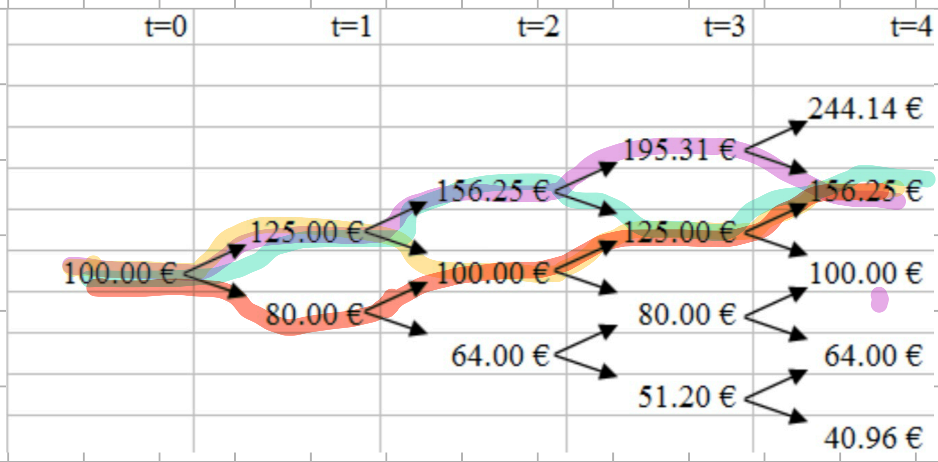
$$= \frac{1}{r}\left(q(u+b)S_0 + (1-q)(b+d)S_0\right)$$

Pour une action qui ne verse pas de dividende :

Prix en 0 de l'action qui ne verse pas de dividende

$$\frac{1}{r}\mathbb{E}_q(S_1^1) = \frac{1}{r}\left[q u S_0 + (1-q) d S_0\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{r-b-d}{u-d}\,u + \frac{u+b-r}{u-d}\,d\right] S_0$$



option "russe" à la date d'exercice $c(T) = \max_{t\in[0,T]} \{(S(t) - S(T))^+\}$

ici $r = 1 + r_f = 1,1$

que vaut $C(T=4)$ quand $S(T=4) = 156,25$

path dependent : (car il depend du chemin)

ici il faut voir le prix en $(T=4)$ sur tous les chemin possible jusqu arrivé à 156,25

donc :

uuuu :	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$
uuud :	39,06	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}$
uudu :	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$
uduu :	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$
udud :	25	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
	⋮	

prix en $t=0$ $\quad C(0) = \frac{1}{(1,1)^4}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times 0 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} \cdot 39,06 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 25 + \dots + \dots\right)$

Date	chemin	Prix option	Δ	Cash	NB E.C(0,4)
$t=3$	uuu	$\frac{1}{1,1}\left(0 + \frac{1}{3} \cdot 39.\right.$ $= 11,83$ €	$\frac{0-39,66}{244,1 - 156,5}$ $= -0,44$	prix option − Δ prix action $(t=3)$ 11,83 − −0,44 × 195,31 = 97,7 €	$97,7 \times 1,1$ $= 107,47$
	uud				
	udu				
	duu				
	dud				
	ddu				
	ddd				

exo enam (gestion de portefeuille éthique)

notes éthiques

investisseur " éthique " caracterisé par $\pi > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ on cherche à maximiser

$\mathbb{E}(w_f) - \beta \operatorname{Var}(w_f) + \beta N_f$

N_f : note finale du portefeuille

donnée : R = vecteur de renta des N titres $\quad \Sigma = \mathbb{E}(R) \quad \Delta = \operatorname{cor}(R)$

$\mathcal{N}$ = vecteur des N notes des N entreprises

$$\mathbb{E}(w_f) = w_0 (1 + \mathbb{E}(R_p(w)) = w_0(1 + {}^t w\, \mathcal{E})$$

$$\mathrm{Var}(w_f) = w_0^2\, {}^t w \Delta w \qquad \mathcal{N}_f = {}^t w\, \mathcal{N}$$

$$w^* = \underset{\substack{w \in \mathbb{R}^N \\ {}^t\mathbb{1} w = 1}}{\arg\mathrm{Max}} \left(w_0 {}^t w\, \mathcal{E} - \Pi w_0^2\, {}^t w \Lambda w + \beta\, {}^t w\, \mathcal{N} \right)$$

$$= \underset{SC}{\arg\mathrm{Max}}\; {}^t w \left(w_0 \mathcal{E} + \beta \mathcal{N} \right) - \Pi w_0^2\, {}^t w \Lambda w)$$

$$= \arg\max \left({}^t w\, \mathcal{E} - \Pi w_0\, {}^t w \Lambda w \right)$$

$$= \arg\max\; {}^t w (w_0 \mathcal{E} + \beta \mathcal{N}) - \Pi w_0^2\, {}^t w \Lambda w$$

remplacer $\mathcal{E}$ par $w_0 \mathcal{E} + \beta \mathcal{N}$

Π par Πw_0

$$w^* = \frac{b}{2\Pi w_0} \mu + \left(1 - \frac{b}{2\Pi w_0}\right) v \qquad \mu = \frac{\Lambda^{-1} \mathcal{E}}{{}^t\mathbb{1} \Lambda^{-1} \mathbb{1}} \qquad v = \frac{\Lambda^{-1} \mathbb{1}}{{}^t\mathbb{1} \Lambda^{-1} \mathbb{1}}$$

$$w^* = \left(1 - \frac{b}{2\Pi w_0^2}\right) v + \frac{b}{2\Pi w_0^2} \frac{\Lambda^{-2}(w_0 \mathcal{E} + \beta \mathcal{N})}{{}^t\mathbb{1} \Lambda^{-1} (w_0 \mathcal{E} + \beta \mathcal{N})}$$

$$= \alpha_1 v + \alpha_2 \mu + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\, \omega$$

avec $\omega = \dfrac{\Lambda^{-1} \mathcal{N}}{{}^t\mathbb{1} \Lambda^{-1} \mathcal{N}}$

exo ② option d'échange :

$\exists \pi > 0 \quad S' = \overset{\circ}{f}\ \pi$

$$\begin{cases} u_T > d_T \\ U_S > d_S \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_S S_0 & d_S S_0 \\ U_T T_0 & d_T T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_u \\ \Pi_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_u \\ \Pi_d \end{bmatrix} = \frac{1}{(U_S d_T - U_T d_S)\, S_0 T_0} \begin{bmatrix} d_T T_0 & -d_S S_0 \\ -U_T T_0 & U_S S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ T_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(U_S d_T - U_T d_S)} \begin{bmatrix} d_T & -d_S \\ -U_T & U_S \end{bmatrix} \mathbb{1}$$

$U_S > U_T$ et $d_S > d_T$ ou $U_S < U_T$ et $d_S > d_T$

T dans le numeraire S'

en $t=0$ $\quad T_0^{(S)} = \frac{T_0}{S_0}$

en $t=1$ $\quad T_u^{(S)} = \frac{u_T T_0}{u_S S_0}$ $\qquad T_d^{(S)} = \frac{d_T T_0}{d_S S_0}$

$\Delta\Delta$ $\quad 1 \to S_0$

$T \to T_0$

$T = \frac{T_0}{S_0}$

$1 \to u_S S_0$

$T_u \to u_T T_0$

$T_u = \frac{u_T T_0}{u_S S_0}$

3) Soit l'actif sans risque avec taux $r_f = 0$

actif "sans risque" dans le numeraire S' c'est S') =

$u=1$ car $1 = 1 + r_f$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{T_0}{S_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{u_T T_0}{u_S S_0} & \frac{d_T T_0}{d_S S_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_u^{(S)} \\ \pi_d^{(S)} \end{bmatrix}$$

$$q^{(S)} = \pi_u^{(S)}$$

$$E_1 = (\beta T_1 - \Delta S_1)^+ = \beta S_1 \left(\frac{T_1}{S_1} - \frac{\Delta}{\beta} \right)^+$$

$E_1^{(S)}$ = prix de l'option d'echange dans le numeraire S'

$$\boxed{E_1^{(S)} = \frac{E_1}{S'} = \beta \left(\frac{T_1}{S_1} - \underbrace{\frac{\Delta}{\beta}}_{=k} \right)^+ = \beta \left(T_1^{(S)} - k \right)^+}$$