Compléments sur la méthode de relaxation

Système $Ax = b$

de matrice A inversible

$$(L + \frac{1}{\omega} D)\, x_{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega} D - U)\, x_k + b$$

$A = L + D + U$

$D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{NN}),\ a_{ii} \neq 0 \forall i$

$$L = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ a_{ij}\ (i > j) & \ddots \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \ddots & a_{ij}\ (j > i) \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

converge si $\rho(Q_\omega) < 1,\ Q_\omega = (L + \frac{1}{\omega} D)^{-1} (\frac{1-\omega}{\omega} D - U)$

Implémentation avec stockage d'un seul vecteur:

à partir de $\left(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$ on calcule $\left(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$

En multipliant la relation de récurrence par ωD^{-1}, on obtient

l'écriture par composantes: $$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j \geq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Théorème :

Pour toute matrice A symétrique définie positive, la méthode de relaxation converge si et seulement si $\omega \in]0,2[$

Démonstration:

Produit scalaire sur IR^n : $(x,y)_A = x^T A y$, norme associée: $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$

Norme subordonnée: $\forall B \in M_n(\mathrm{IR})$: $\|\|B\|\| = \underset{x\in \mathrm{IR}^n, x\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|Bx\|_A}{\|x\|_A} = \underset{x\in \mathrm{IR}^n, \|x\|_A=1}{\mathrm{Sup}} \|Bx\|_A$

1) Montrons que si $\omega \in]0,2[$ alors $\|\|Q_\omega\|\| < 1$

Cela implique $\rho(Q_\omega) < 1$ et la CV de la méthode

On a $Q_\omega = M^{-1}N = M^{-1}(M-A) = I - M^{-1}A$

Pour tout $x \in \mathrm{IR}^n$, $\|Q_\omega x\|_A^2 = \|x-y\|_A^2$ avec $y = M^{-1}Ax$

$$= (x-y, x-y)_A = \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 - 2(Ax)^T y$$

$$= \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 - 2(My)^T y$$

(suite démonstration)

Pour tout $x \in \mathrm{IR}^n$, $\quad \|Q_\omega x\|_A^2 = \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 - 2(My)^T y$

$$= \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 - y^T (M^T + M)y$$

$$= \|x\|_A^2 - y^T \left((M^T + M) - A\right)y$$

$$-A + M + M^T = -A + L + \frac{1}{\omega}D + L^T + \frac{1}{\omega}D = -A + L + U + \frac{2}{\omega}D = \left(\frac{2}{\omega} - 1\right)D$$

Comme A est symétrique définie positive, $a_{ii} = e_i^T A e_i > 0$

(e_i désigne le ième vecteur de la base canonique) donc la matrice diagonale

D est définie positive, ainsi que $M + M^T - A = \left(\dfrac{2-\omega}{\omega}\right)D$

$$\|\|Q_\omega\|\| = \operatorname*{Sup}_{u \in \mathrm{IR}^n, \|u\|_A = 1} \|Q_\omega u\|_A = \|Q_\omega x\|_A \text{ pour un certain } x \in \mathrm{IR}^n, \|x\|_A = 1$$

donc $\|\|Q_\omega\|\|^2 = \|Q_\omega x\|_A^2 = \|x\|_A^2 - y^T \left((M^T + M) - A\right)y < 1$ d'où $\|\|Q_\omega\|\| < 1$

(suite démonstration)

2) Montrons que si $\omega \notin]0,2[$ alors $\rho(Q_\omega) \geq 1$ et donc la méthode diverge

Soit x vecteur propre de Q_ω associé à une valeur propre λ

$$|\lambda|^2 \|x\|_A^2 = \|Q_\omega x\|_A^2 = \|x\|_A^2 + y^T\left(A-(M^T+M)\right)y \quad \text{avec } y = M^{-1}Ax \neq 0$$

Si $\omega > 2$ ou $\omega < 0$, $A - M - M^T = \left(1-\dfrac{2}{\omega}\right)D$ est définie positive

d'où $|\lambda|^2 \|x\|_A^2 > \|x\|_A^2$.

Donc toutes les valeurs propres λ de Q_ω sont de module >1.

Si $\omega = 2, A - M - M^T = 0$ donc $|\lambda|^2 \|x\|_A^2 = \|x\|_A^2$, d'où $|\lambda| = 1$

Si $\omega = 0$: $Q_\omega = (\omega L + D)^{-1}((1-\omega)D - \omega U) = I$ d'où $\lambda = 1$