Méthodes Numériques - Chapitre 2

Interpolation polynomiale

Ensimag 1A

27 janvier 2021

Plan

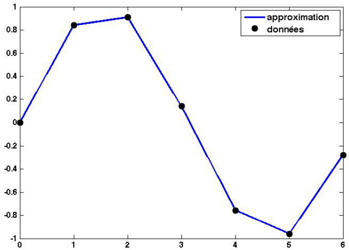
Plan

Interpolation

- On se donne $n+1$ points de $\mathbb{R}^2$: (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\dots (x_n, y_n)$.
- Les abscisses x_i sont supposées **distinctes**
- Problème d'interpolation : on cherche une fonction P simple telle que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$
- Applications : obtenir un modèle continu à partir de données discrètes, approximation d'intégrales, de formes géométriques, de solutions d'équations différentielles,...

Interpolation linéaire par morceaux

Exemple : interpolation linéaire par morceaux de la fonction sinus
Abscisses $x_i = i$ et ordonnées $y_i = \sin x_i$, avec $i = 0, 1, 2, \ldots, 6$.
On relie les points (x_i, y_i) par des droites.



Cela correspond à l'approximation du sinus par la fonction linéaire par morceaux :

$$f(x) = \left\{ \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i \quad \text{pour} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \right.$$

L'approximation est peu précise et manque de régularité.

Exemple d'interpolation polynomiale

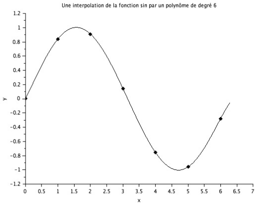
Pour obtenir davantage de régularité, on cherche un polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \ldots 6$. Cela donne un système de 7 équations à 7 inconnues, dont la solution est : $a_0 = 0$,

$$a_1 = 0.9037647, \quad a_2 = 0.2254590, \quad a_3 = -0.3576635$$

$$a_4 = 0.0731893, \quad a_5 = -0.0031263, \quad a_6 = -0.0001523$$



Interpolation polynomiale : cas général

- Degré d'un polynôme : P est un polynôme de degré n si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad \text{avec} \qquad a_n \neq 0$$

- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$. C'est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
- On se donne $n+1$ points de $\mathbb{R}^2$: (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots (x_n, y_n)$ avec des abscisses x_i **distinctes**
- On cherche un polynôme P de degré $\leq n$ tel que

$$P(x_i) = y_i \qquad i = 0, \ldots, n$$

- Nous allons montrer que P existe et est unique
- P est appelé polynôme d'interpolation des points (x_i, y_i)
- Si $y_i = f(x_i)$, P est appelé polynôme d'interpolation de f aux abscisses x_i

Existence et unicité du polynôme d'interpolation

On cherche un polynôme P de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

tel que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Pour trouver les a_k, il faut résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Existence et unicité du polynôme d'interpolation

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \qquad \text{matrice de Vandermonde}$$

Le système admet une unique solution car V est inversible :

- Première démonstration :

$$det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$$

- Seconde démonstration : $\operatorname{Ker} V = \{0\}$ car un polynôme de degré $\leq n$ ayant $n+1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_n$ est forcément le polynôme nul.

Comment calculer le polynôme d'interpolation ?

- Résoudre le système linéaire de matrice V est coûteux ($O(n^3)$ opérations), et instable numériquement si des x_i sont proches, et plus généralement lorsque V est mal conditionnée (c'est souvent le cas). Exemple : interpolation en 7 abscisses équidistantes $x_i = 0, 1, \ldots, 6$:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 \end{pmatrix}$$

conditionnement euclidien : $\approx 1.6 \cdot 10^6$

- Solution : choix d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle les composantes du polynôme d'interpolation se calculent plus simplement.

Plan

Forme de Lagrange du polynôme d'interpolation

Polynômes de Lagrange $\ell_j(x)$, $0 \leq j \leq n$:

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Ce sont des polynômes de degré n tels que

$$\ell_j(x_i) = 0 \text{ si } i \neq j, \qquad \ell_j(x_j) = 1$$

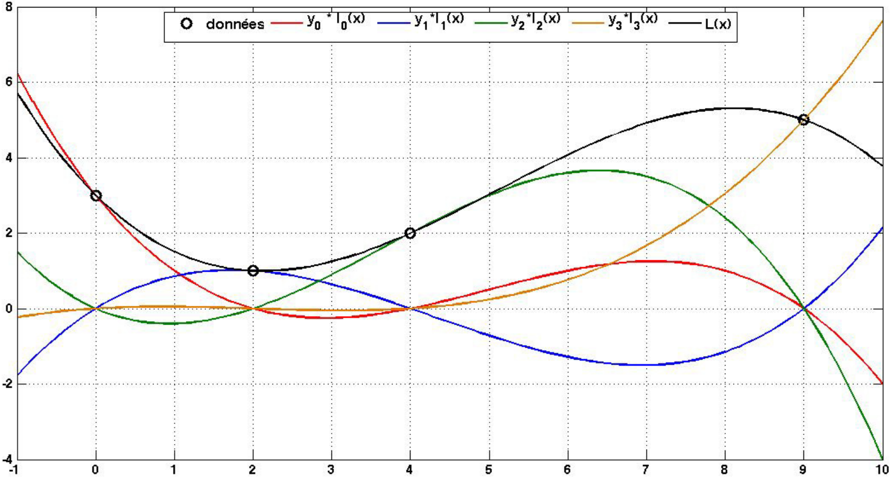
Le polynôme d'interpolation de $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ s'écrit :

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \, \ell_j(x)$$

Remarque : cette décomposition montre aussi que $(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (famille génératrice à $n+1$ éléments).

Exemple 1

On dispose des points $(0,3)$, $(2,1)$, $(4,2)$, $(9,5)$.



Exemple 2

Calculer le polynôme d'interpolation des points suivants :

$$(x_0, y_0) = \left(-1, \frac{1}{26}\right) \;,\; (x_1, y_1) = (0, 1) \;,\; (x_2, y_2) = \left(1, \frac{1}{26}\right)$$

$$\ell_0(x) = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \quad \text{car } (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 2$$

$$\ell_1(x) = -(x+1)(x-1) = -x^2 + 1 \quad \text{car } (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = -1$$

$$\ell_2(x) = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{car } (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 2$$

D'où

$$P_2(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + y_2\,\ell_2(x) = -\frac{25}{26}x^2 + 1$$

Plan

Forme de Newton du polynôme d'interpolation

On appelle base de Newton associée aux noeuds (distincts) x_i :

$$1,\ (x-x_0),\ (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

- polynômes de degrés croissants 0, 1, 2, ..., n
- C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$: famille libre à $n+1$ éléments.

Le polynôme d'interpolation des points $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ s'écrit :

$$P(x) = \delta^0 + \delta^1(x-x_0) + \delta^2(x-x_0)(x-x_1)\cdots + \delta^n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

avec $\delta = (\delta^0, \delta^1, \ldots, \delta^n)^T$ solution du système $L\,\delta = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \ldots & & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_n - x_0 & \ldots & \ldots & \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) \end{pmatrix}$$

Forme de Newton du polynôme d'interpolation

- Les composantes δ^k sont déterminées par un système triangulaire et s'obtiennent par récurrence : $\delta^0 \to \delta^1 \cdots \to \delta^n$
- Leur calcul correspond à $O(n^2)$ opérations arithmétiques élémentaires (comme le calcul des polynômes de la base de Lagrange)
- δ^k dépend uniquement de $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$.
  On notera $\delta^k = \delta^k y(x_0, \ldots, x_k)$ où $y = (y_0, \ldots, y_k)$.
  Si $y_i = f(x_i)$, on notera $\delta^k = \delta^k f(x_0, \ldots, x_k)$.
- Rajouter un point d'interpolation (x_{n+1}, y_{n+1}) ne change pas les vecteurs précédents de la base de Newton (contrairement à la forme de Lagrange) et les composantes δ^k calculées précédemment.

Forme de Newton du polynôme d'interpolation

- $\delta^n y(x_0, \ldots, x_n)$ est le coefficient directeur (terme x^n) du polynôme d'interpolation de $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \delta^0 y + \delta^1 y(x - x_0) \cdots + \delta^n y(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= \delta^n y\, x^n + R(x), \quad \deg(R) \leq n - 1 \end{aligned}$$

- En identifiant les termes en x^n dans les formes de Newton et de Lagrange $P(x) = \sum_{j=0}^n y_j \prod_{k=0,k\neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, on obtient

$$\delta^n y(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j}{\prod_{k=0,k\neq j}^n (x_j - x_k)}$$

  Donc $\delta^n y(x_0, \ldots, x_n)$ est indépendant de l'ordre des point $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$

Différences divisées

On interpole une fonction f aux abscisses x_i :

$$P(x) = \delta^0 f(x_0) + \delta^1 f(x_0, x_1)(x - x_0) + \delta^2 f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

On obtient avec les conditions $P(x_0) = f(x_0)$, $P(x_1) = f(x_1)$:

$$\delta^0 f(x_0) = f(x_0), \quad \delta^1 f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\delta^0 f(x_1) - \delta^0 f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Nous allons montrer plus généralement la formule de récurrence :

$$\delta^{k+1} f(x_0, \dots x_{k+1}) = \frac{\delta^k f(x_1, \dots x_{k+1}) - \delta^k f(x_0, \dots x_k)}{x_{k+1} - x_0}$$

qui donne aux $\delta^k f(x_0, \dots x_k)$ le nom de *différences divisées*.
Par exemple

$$\delta^2 f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0} \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)$$

Preuve de la relation de récurrence des différences divisées

Notons $P_{x_0,\ldots,x_k}$ le polynôme d'interpolation de f en $x_0,\ldots,x_k$

On a la formule d'Aitken-Neville :

$$P_{x_0,\ldots,x_k} = \frac{1}{x_k - x_0}\Big((x-x_0)P_{x_1,\ldots,x_k} - (x-x_k)P_{x_0,\ldots,x_{k-1}}\Big)$$

On en déduit :

$$P_{x_0,\ldots,x_k} = \frac{1}{x_k - x_0}\Big((x-x_0)P_{x_1,\ldots,x_k} - (x-x_{k-1})P_{x_0,\ldots,x_{k-1}}\Big) + \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k - x_0}P_{x_0,\ldots,x_{k-1}}$$

$$= \frac{1}{x_k - x_0}\Big((x-x_0)P_{x_1,\ldots,x_k} - (x-x_{k-1})P_{x_0,\ldots,x_{k-1}}\Big) + \text{poly degré } \leq (\text{k-1})$$

En identifiant les termes en $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-2})(x-x_{k-1})$ il vient :

$$\delta^k f(x_0,\ldots,x_k) = \frac{1}{x_k - x_0}\Big(\delta^{k-1}f(x_1,\ldots,x_k) - \delta^{k-1}f(x_0,\ldots,x_{k-1})\Big)$$

Plan

Expression de l'erreur d'interpolation

On a la formule d'erreur suivante :

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ et $P_{x_0,\dots,x_n}$ le polynôme d'interpolation de f en $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]\min(x_i, x), \max(x_i, x)[$ tel que :

$$f(x) - P_{x_0,\dots,x_n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{j=n} (x - x_j)$$

Remarque : cette formule ressemble à la formule de Taylor avec reste de Lagrange, en remplaçant le polynôme de Taylor par un polynôme d'interpolation.

On obtient donc la borne : $\sup_{[a,b]} |f - P_{x_0,\dots,x_n}| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

Si $\sup_{[a,b]} |f^{(n)}|$ est borné indépendamment de n (p.ex. $f = \sin, \cos, \exp$), alors $\lim_{n \to +\infty} \sup_{[a,b]} |f - P_{x_0,\dots,x_n}| = 0$

Preuve de la formule d'erreur

Lien utile entre différences divisées et dérivées :

Soit f de classe C^n sur $[a,b]$ et $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$.
Alors il existe $\xi \in]\min(x_i),\max(x_i)[$ tel que :

$$\delta^n f(x_0,\dots,x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

demo :

$$f(x) - P_{x_0,\dots,x_n}(x) \; = 0 \text{ en } x = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

$$\Rightarrow f'(x) - P'_{x_0,\dots,x_n}(x) \; = 0 \text{ en } x = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \cdots < x_{n-1}^{(1)} \text{ (théorème de Rolle)}$$

$$\Rightarrow f''(x) - P''_{x_0,\dots,x_n}(x) \; = 0 \text{ en } x = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \cdots < x_{n-2}^{(2)} \text{ (théorème de Rolle)}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) - P^{(n)}_{x_0,\dots,x_n}(x) \; = 0 \text{ en } x = x_0^{(n)} := \xi, \text{ et } P^{(n)}_{x_0,\dots,x_n} = \delta^n f(x_0,\dots,x_n)\, n!$$

Preuve de la formule d'erreur

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $P_{x_0,\dots,x_n}$ le polynôme d'interpolation de f en $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, et $x \in [a,b]$. Montrons qu'il existe $\xi \in]\min(x_i, x), \max(x_i, x)[$ tel que :

$$f(x) = P_{x_0,\dots,x_n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{j=n}(x - x_j)$$

L'égalité est évidente pour $x = x_i$.
Pour $x \neq x_i$, c'est une conséquence directe de la formule établie précédemment pour les différences divisées et de l'identité suivante (formule de Newton), obtenue en exprimant $P_{x_0,\dots,x_n,x}$ dans la base de Newton :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{x_0,\dots,x_n}(x) + \delta^{n+1} f(x_0,\dots,x_n,x)\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \\ &\quad (\,= P_{x_0,\dots,x_n,x}(x)\,) \\ &= P_{x_0,\dots,x_n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \end{aligned}$$

Phénomène de Runge

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

Runge (1856 – 1927) a montré que si cette fonction est interpolée aux points équidistants x_i entre -1 et 1

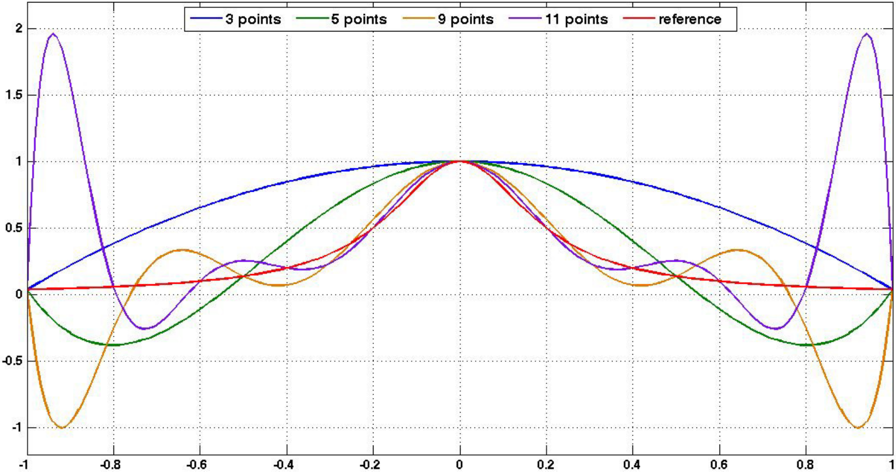
$$x_i = -1 + \frac{2i}{n} \qquad i = 0, \ldots, n$$

par un polynôme P_n de degré $\leq n$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty$$

Lorsqu'on augmente le nombre de points, le polynôme oscille fortement entre les points x_i dans les intervalles $[0.7, 1]$ et $[-1, -0.7]$, avec une amplitude de plus en plus grande.

Phénomène de Runge : illustration



Contourner le phénomène de Runge ?

L'interpolation polynomiale sous la forme décrite précédemment n'est pas toujours bien adaptée à l'approximation de fonctions.

Solutions :

- Segmenter : approcher la fonction par des polynômes par morceaux
  $\longrightarrow$ splines
- Choisir les points x_i d'interpolation afin de minimiser les oscillations du polynôme d'interpolation
  $\longrightarrow$ points de Tchebychev

Abscisses de Tchebychev

Soit f de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et $x_0,\ldots,x_n \in [a,b]$.

Soit $P_{x_0,\ldots,x_n}$ le polynôme d'interpolation de f en $x_0,\ldots,x_n$.

Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in \,]\min(x,x_i),\max(x,x_i)[$ tel que:

$$f(x) = P_{x_0,\ldots,x_n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

On a donc l'estimation d'erreur en norme uniforme sur $[a,b]$:

$$\left\| f - P_{x_0,\ldots,x_n} \right\|_\infty \leq \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{(n+1)!} C_{a,b}(x_0,x_1,\ldots,x_n)$$

$$C_{a,b}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

Question : comment choisir les abscisses d'interpolation afin de minimiser $C_{a,b}(x_0,x_1,\ldots,x_n)$?

Abscisses de Tchebychev

Fixons $[a,b]=[-1,1]$ (quitte à faire un changement de coordonnées)

On montre que :

$$\min_{x_i \in [-1,1]} \max_{x \in [-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| = \frac{1}{2^n}$$

est atteint pour les abscisses de Tchebychev :

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$

$$0 \le i \le n$$

Ces abscisses sont les racines du polynôme de Tchebychev $T_{n+1}(x)$:

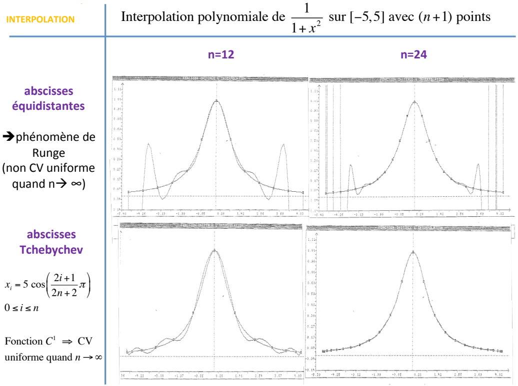
$$2^n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) := T_{n+1}(x) = \cos[(n+1)\arccos(x)] \text{ sur } [-1,1]$$

Avec abs. de Tchebychev, on a sur $[-1,1]$: $\left\| f - P_{x_0,\ldots,x_n} \right\|_\infty \le \dfrac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty}{2^n(n+1)!}$

Abscisses de Tchebychev

On peut montrer le résultat suivant pour les fonctions lipschitziennes ($|f(x) - f(y)| \leq \lambda\,|x - y|$, $\lambda \geq 0$ constante), en particulier dans $C^1[-1,1]$:

Théorème Soit f lipschitzienne sur $[-1,1]$ et P_n son polynôme d'interpolation aux abscisses de Tchebychev $(x_i)_{0\leq i\leq n}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$ sur $[-1,1]$.



Plan

Description du problème

Etant donné $f \in C^0([a,b])$, on cherche à estimer la valeur numérique de

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si on connaît explicitement une primitive de f sur $[a,b]$ ($F' = f$) :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Problème : souvent on ne dispose pas d'expression analytique pour F (en terme de fonctions usuelles). Exemples d'intégrales ne pouvant être calculées avec cette méthode :

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \cos(x^2)\,dx$$

Autres approches analytiques (non étudiées ici) utiles dans certains cas : méthode des résidus (chemins dans $\mathbb{C}$), passage intégrale $\rightarrow$ série, transformée de Fourier,...

Approche numérique : interpolation polynomiale

On approche f par un polynôme P ou une fonction polynomiale par morceaux puis on calcule l'approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx$$

P est obtenu par interpolation de f.

Avantages :

- les polynômes sont faciles à intégrer.
- méthode utilisable si on ne connaît qu'un ensemble discret de valeurs de f.

Formules de quadrature interpolatoires

Soient $n+1$ points d'interpolation $(x_i, y_i = f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, tels que $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, et P le polynôme d'interpolation de f en ces points :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx = I_n(f)$$

En exprimant P dans la base de Lagrange, on obtient la formule de quadrature (i.e. formule d'intégration numérique) :

$$I_n(f) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b y_i \ell_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i),$$

où les *poids* w_i sont donnés par :

$$w_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx$$

Pour des noeuds x_i équidistants : *formules de Newton-Cotes.*

Exemple 1 : formule des rectangles ($n = 0$)

On fixe $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ (extrémités de l'intervalle) et $P(x) = f(x_0)$, d'où

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_0(f) = (b-a)f(x_0)$$

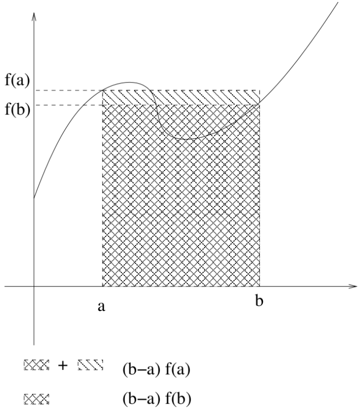
Erreur :
Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, il existe $\theta(x) \in]0,1[$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(\theta x_0 + (1-\theta)x)$$

(accroissements finis). Par le théorème de la moyenne, il existe donc $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$I(f) - I_0(f) = \pm \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

avec signe $+$ si $x_0 = a$, et $-$ si $x_0 = b$



Exemple 2 : formule du point milieu ($n = 0$)

On fixe $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (milieu de l'intervalle) et $P(x) = f(x_0)$, d'où

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_0(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Erreur :
Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, il existe $\theta(x) \in]0,1[$ tel que (formule de Taylor) :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\,f'(x_0) + \frac{1}{2}\,(x-x_0)^2\,f''(\theta x_0 + (1-\theta)x).$$

Avec $\int_a^b (x - x_0)\,dx{=}0$ et le théorème de la moyenne, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$I(f) - I_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

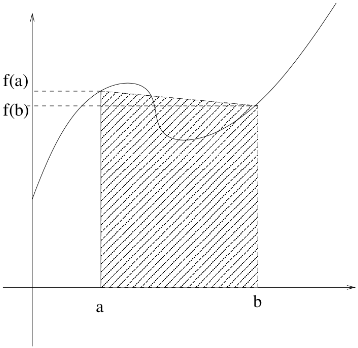
Donc si $|b-a| \ll 1$, on gagne un ordre de grandeur sur la formule des rectangles.

Exemple 3 : formule des trapèzes ($n = 1$)

$x_0 = a$, $x_1 = b$, $P(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

La formule des **trapèzes** est

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$



Erreur :

Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, il existe $\eta(x) \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = -\frac{1}{2}\,(x-a)\,(b-x)\,f''(\eta)$$

(formule d'erreur d'interpolation). Par le théorème de la moyenne, il existe donc $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$I(f) - I_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Exemple 4 : formule de Simpson ($n = 2$)

$x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, P est de degré ≤ 2. Formule de **Simpson** :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = I_2(f)$$

Si f est $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$I(f) - I_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

Erreur $O((b-a)^5)$ à cause de la symétrie des noeuds ($\frac{x_0+x_2}{2} = x_1$) :
si P_3 est le polynôme d'interpolation de f en x_0, x_1, x_2 et x_3 (arbitraire) et $R = P - P_3$, alors $\int_a^b R\,dx = 0$, car $\deg R \leq 3$ et $R(x_0) = R(\frac{x_0+x_2}{2}) = R(x_2) = 0$.
Donc $\int_a^b P\,dx = \int_a^b P_3\,dx = \int_a^b f\,dx + O((b-a)^5)$ avec formule d'erreur d'interpolation.

Formules composites

Pour augmenter la précision, on divise l'intervalle d'intégration en N sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{N}$:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, \qquad x_i = a + ih$$

et on utilise une formule élémentaire sur chacun des **petits** intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. Par exemple, si on applique la règle des trapèzes sur chaque intervalle :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

La formule composite des trapèzes s'écrit donc :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(b)] := I_N(f)$$

Estimation d'erreur

On suppose f de classe C^2 sur $[a, b]$. L'erreur sur $[a, b]$ est la somme des erreurs sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$I(f) - I_N(f) = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{f''(\xi_i)}{12} h^3, \qquad \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Puisque $N = \frac{b-a}{h}$, on obtient l'estimation d'erreur pour la formule composite des trapèzes :

$$E = |I(f) - I_N(f)| \leq \frac{(b-a)}{12} \, h^2 \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

De même, on obtient $E = O(h^2)$ pour la formule composite du point milieu si $f \in C^2$, $E = O(h)$ pour celle des rectangles si $f \in C^1$, et $E = O(h^4)$ pour la formule composite de Simpson si $f \in C^4$.