TD n°2 - partie 1

Questions de cours

- Rappeler la définition de la loi geométrique et ses hypothèses de modélisation.
- Rappeler la définition de la loi binomiale et ses hypothèses de modélisation.
- Rappeler la valeur de l'espérance dans les deux cas.

Exercice 1

Dans un labyrinthe, un rat se trouve face à 4 portes dont une seule le conduit à la sortie. Il choisit une porte au hasard. S'il ne sort pas, il est reconduit devant les 4 portes et peut faire un nouvel essai, éventuellement identique au précédent. On note X le nombre d'essais nécessaires au rat pour sortir du labyrinthe.

Question 1

On observe que le rat n'a pas de mémoire. Il choisit l'une des quatre portes de façon équiprobable à chaque essai.

- Décrire la loi de la variable X.
- Donner l'espérance de la variable X.

Question 2

On observe que le rat a une mémoire parfaite. A chaque nouvel essai, il évite toutes les portes choisies précédemment et choisit au hasard de façon équiprobable parmi les restantes.

- Calculer les probabilités conditionnelles suivantes

$$\pi_i = \mathrm{P}(X = i+1 \mid X > i), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

- Calculer la probabilité des événements $(X = i)$, pour tout $i = 1, \ldots, 4$, de maniére itérative.
- Reconnaître la loi de la variable X et donner son espérance.

Question 3

On observe que le rat se souvient uniquement du résultat de la dernière expérience infructueuse et qu'il évite toujours la porte associée à cet essai infructueux.

- Montrer que la probabilité de l'événement $(X = 1)$ est égale à $1/4$.
- Pour tout $i \geq 1$, donner (sans calcul) la valeur de la probabilité conditionnelle suivante

$$\rho_i = \mathrm{P}(X > i + 1 \mid X > i).$$

- En déduire la probabilité de l'événement $(X = i)$ pour tout $i \geq 2$.

Question 4

Soit Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $3/4$ et G une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/3$, indépendante de Y. On pose

$$Z = 1 + YG$$

- Montrer que la loi de la variable aléatoire Z est identique à celle de X.
- Calculer l'espérance de X.
- Vérifier votre calcul à l'aide d'une simulation en R (attention, la loi geométrique dans R est décalée en zéro).

```
n = 1000000
x <- 1 + rbinom(n,1,0.75)*(1 + rgeom(n, 1/3))
mean(x)
```

Exercice 2

Les shadoks fabriquent des fusées qui décollent avec une probabilité égale à un sur un million. Le professeur Shadoko prétend qu'il suffit de faire un million d'essais pour qu'une fusée décolle. On suppose que les lancements forment des épreuves identiques et indépendantes, dans lesquelles les fusées décollent ou ne décollent pas.

- Décrire la loi du rang d'apparition du premier décollage de fusée.
- Calculer la probabilité pour qu'aucune fusée ne décolle lors du premier million essais. Montrer que ce nombre est voisin de $1/e$.

Et pour finir une citation

> “En essayant continuellement on finit par réussir. Donc, plus ça rate, plus on a de chance que ça marche.”
> *Professeur Shadoko*