# Chap. I : "Fondamentaux"

## 1. Espace de probabilité(s), mesure de probabilité(s)

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ c'est la donnée de

1/ $\Omega$ : l' "ensemble fondamental", il représente l'ensemble des états du monde $\omega$ possibles.

2/ $\mathcal{A}$ : une tribu de sous-ensembles de $\Omega$, qu'on appelle des "évènements"

De façon générale : Soit $E$ un ensemble. Un ensemble $\Sigma$ de parties (sous-ens.) de $E$ est une tribu (on parle de "tribu sur $E$") si :

i) $E \in \Sigma$

ii) $\forall A \in \Sigma$, $A^c \in \Sigma$

iii) $\forall (A_i)_{i \in I}$ suite dénombrable d'él$^{ts}$ de $\Sigma$ on a $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma$.

Les évènements contenus dans $\mathcal{A}$ concernent les états du monde contenus dans $\Omega$ ;
on va pouvoir leur donner un poids entre 0 et 1 grâce à

3/ $\mathbb{P}$ : une mesure de probabilité ; c'est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ t.q.

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) Pour toute suite $(A_i)_i$ d'év^ts mutuellement exclusifs (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, on parle aussi d'"év^ts disjoints") on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

Rq 1.1.1 : De façon générale soit $E$ et $\mathcal{E}$ une tribu sur $E$.
On appelle $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.
Une mesure $\mu$ sur $(E, \mathcal{E})$ c'est une application $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ t.q. i/ $\mu(\emptyset) = 0$ (NB. $\emptyset \in \mathcal{E}$ car $\emptyset = E^c$)

ii/ $\mu$ est $\sigma$-additive, i.e.

$\forall (A_i)$ suite d'élts disjoints de $\Sigma$ on a

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

$\Rightarrow$ Une façon équivalente de définir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est donc : c'est un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ (on parle ici d'espace "probabilisable") équipé d'une mesure $\mathbb{P}$

t.q. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ évident

$\boxed{\Rightarrow}$ $\sigma$-addé : OK, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Reste à vérifier $\mathbb{P}(\phi) = 0$

Par pt ii/ on $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\phi \cup \Omega) = \mathbb{P}(\phi) + \mathbb{P}(\Omega)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\phi) = 0$

Exemple 1.1.1 :

Soit $\Omega = \{B, P, N\}$

il fait beau, il pleut, il neige

trois exemples de tribu qu'on peut mettre sur $\Omega$ :

t. ...

... avoir leur donner un poids entre ... à ...

... une mesure de probabilité ; c'est une ... cation $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ t.q.

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii/ Pour toute suite $(A_i)_i$ d'évts mutuellement exclusifs (i.e. $A_i \cap A_j = \phi \ \forall i \neq j$, on parle aussi d'"évts disjoints") on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

Rq 1.1.1 : De façon générale soit $E$ et $\Sigma$ une tribu sur $E$.

On appelle $(E, \Sigma)$ un espace mesurable.

Une mesure $\mu$ sur $(E, \Sigma)$ c'est une application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup$ ...

t.q. i/ $\mu(\phi) = 0$ (NB : ...

1/ $\mathcal{A} = \{\Omega, \phi\}$ : la "tribu grossière", on ne peut pas décrire grand chose avec cette tribu...

2/ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ : l'ensemble des parties de $\Omega$, c'est la tribu "la plus fine sur $\Omega$" ; on a

$$\mathcal{A} = \Big\{ \{B,P,N\}, \{B,P\}, \{B,N\}, \{P,N\}, \{B\}, \{P\}, \{N\}, \phi \Big\}$$

→ on peut décrire (et donner une proba à) toutes les situations possibles relatives aux états du monde contenus dans $\Omega$.

Par ex si $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(N) = \frac{1}{3}$

on peut calculer

$$\mathbb{P}(\{N,P\}) = \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(P) = \frac{2}{3}$$

$= \mathbb{P}($"il fait mauvais"$)$

3) Situation intermédiaire :

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{B\}, \{N,P\}\}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{N,P\}) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ on peut accéder (via directement $\mathcal{A}$) à $\mathbb{P}$(" il fait mauvais ") $= 3/4$

Mais pas à

$\mathbb{P}$(" il fait beau ou il pleut ")

$= \mathbb{P}$(" il ne neige pas ")

[illegible] et ceci n'a [illegible] pas de sens car cet évén. n'est pas dans $\mathcal{A}$.

Autres propriétés 1.1.4

(découlant des pts 1/ et 2/ de la déf° de $\mathbb{P}$)

1/ $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(car $\mathbb{P}(A^c \cup A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$= \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A)$)

2/ (Inégalité de Boole) :

Toute suite, dénombrable, d'événements $(A_i)_{i \in I}$ satisfait

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

3/ (Continuité séquentielle croissante, ou "convergence monotone").

$\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite d'événements croissants

(i.e. $\forall i$, $A_{i+1} \supset A_i$) on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Pour $\mathbb{P}$ mesure de probas on a la cont. séq. décroissante :

$\forall (A_i)_i$ suite $\searrow$ d'événements (i.e. $\forall i$, $A_{i+1} \subset A_i$)

on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_i A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i)$$

dém : $\mathbb{P}\left(\bigcap_i A_i\right) =$

$1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_i A_i\right)^c\right) =$

$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i^c\right)$

2/ (Inégalité de Boole) :

Toute suite d'événements $(A_i)_{i \in I}$ satisfait

dénombrable

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

3/ (Continuité séquentielle croissante, ou "convergence monotone").

$\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite d'évts croissante

(i.e. $\forall i,\ A_{i+1} \supset A_i$) on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Pour $\mathbb{P}$ mesure de probas on a la cont. séq. décroissante :

$\forall (A_i)_i$ suite $\searrow$ d'évts (i.e. $\forall i,\ A_{i+1} \subset A_i$)

on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_i A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

dem : $\mathbb{P}\left(\bigcap_i A_i\right) =$

$1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_i A_i\right)^c\right) =$

$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i^c\right)$