Rappel du plan du cours

Cours

1. différences finies pour pb lim 1D
2. interpolation polynomiale
3. méth. itératives linéaires
4. méth. itératives linéaires
5. **factorisation LU**
6. factorisation Cholesky
7. équations différentielles
8. équations différentielles
9. équations non linéaires
10. équations non linéaires
11. optimisation

TD

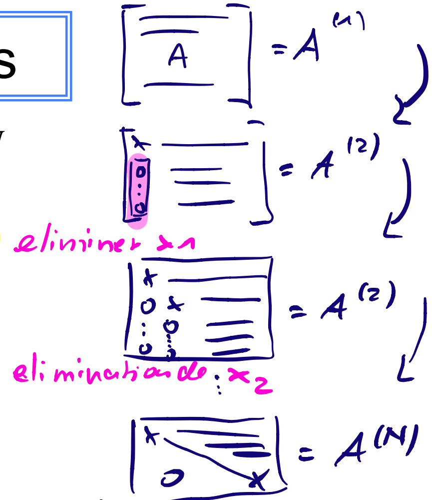
1. différences finies
2. interpolation polynomiale
3. méth. itératives linéaires
4. méth. itératives linéaires
5. **factorisation LU**
6. factorisation Cholesky
7. conditionnement matriciel
8. équations différentielles
9. moindres carrés linéaires
10. équations non linéaires
11. équations non linéaires

Méthode de Gauss et factorisation LU

I – Rappels sur la méthode de Gauss

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^N$

Système linéaire à résoudre : $Ax = b$



Méthode de Gauss (élimination) :

combinaisons linéaires des lignes du système

$\Rightarrow$ suite de systèmes équivalents $A^{(k)}x = b^{(k)}$ où l'on fait apparaître $(k-1)$ colonnes de 0 de tailles décroissantes

$\Rightarrow$ système final $A^{(N)}x = b^{(N)}$ triangulaire

"méthode directe" : solution x après nb fini d'opérations

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ inversible et $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^N$. Système linéaire à résoudre : $A\,x = b$

"Pivot"

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } a_{11} \neq 0,}$ on peut éliminer x_1 dans les lignes 2 à N.

On dit alors qu'on choisit a_{11} comme "pivot".

Soit $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

Combinaisons linéaires : pour i=2...N : (ligne i) $\rightarrow$ (ligne i) - $l_{i1} \times$(ligne 1)

Système linéaire équivalent (de taille N) à résoudre : $\boxed{A^{(2)}\,x = b^{(2)}}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2N}^{(2)}x_N = b_2^{(2)} \\ \vdots \\ 0 + a_{N2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{NN}^{(2)}x_N = b_N^{(2)} \end{cases}$$

2

N

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}$$

$$b_i^{(2)} = b_i - l_{i1}b_1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_{11}}} x_1 + \ldots + a_{1N} x_N = b_1 \\ \vdots \\ \underset{\neq 0}{\underline{a_{i1}}}\, x_1 \\ \vdots \\ a_{N1} x_1 + \ldots + a_{NN} x_N = b_N \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Si } a_{11} = 0,}$ on permute la ligne 1 avec une autre

où $a_{i1} \neq 0$ (possible puisque A inversible).

$\Rightarrow$ on se ramène au cas précédent

$\Rightarrow$ Système linéaire équivalent (de taille N) à résoudre : $\boxed{A^{(2)} x = b^{(2)}}$

après avoir éliminé x_1 :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(2)} x_2 + \ldots + a_{2N}^{(2)} x_N = b_2^{(2)} \\ \vdots \\ 0 + a_{N2}^{(2)} x_2 + \ldots + a_{NN}^{(2)} x_N = b_N^{(2)} \end{array}\right.$$

"pivot"

Sous-système de dimension $N-1$

pour $(x_2, \ldots, x_N)$

on veut éliminer x_2

On répète la même procédure sur le sous-système de dimension $N-1$ pour $(x_2,\ldots,x_N)$

$\Rightarrow$ on élimine x_2 des lignes 3 à N

Système linéaire équivalent (de taille N) à résoudre : $\boxed{A^{(3)}x = b^{(3)}}$

$a_{22}^{(2)} \neq 0$ pivot

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\
0 + a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2N}^{(2)}x_N = b_2^{(2)} \\
0 + 0 + a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3N}^{(3)}x_N = b_3^{(3)} \\
\vdots \\
0 + 0 + a_{N3}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{NN}^{(3)}x_N = b_N^{(3)}
\end{cases}
$$

Sous-système de dimension $N-2$ pour $(x_3,\ldots,x_N)$

On répète la même procédure sur le sous-système de dimension $N-2$ pour $(x_3,\dots,x_N)$

$\Rightarrow$ on élimine x_3 des lignes 4 à N

Etc…

solution $Ax=b$

$\Rightarrow$ Suite de systèmes équivalents $A^{(k)}x = b^{(k)},\ k = 2,\dots,N$

après avoir éliminé $x_1, \dots, x_{N-1}$

Le dernier système $A^{(N)}x = b^{(N)}$ est triangulaire :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\
0 + a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2N}^{(2)}x_N = b_2^{(2)} \\
0 + 0 + a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3N}^{(3)}x_N = b_3^{(3)} \\
\qquad\vdots \\
0 + 0 + 0 + \dots + 0 + a_{NN}^{(N)}x_N = b_N^{(N)}
\end{array}
\right.
$$

$A^{(N)} = $ (0)

triangulaire supér.

Notons $A^{(N)} = U$ (matrice triangulaire supérieure) et $b^{(N)} = y$

upper

Système obtenu à la fin de l'élimination de Gauss :

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \ldots + u_{1N}x_N = y_1 \\ 0 \;\; + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \ldots + u_{2N}x_N = y_2 \\ 0 \;+\; 0 \;\; + \; u_{33}x_3 + \ldots \; + u_{3N}x_N = y_3 \\ \vdots \\ 0 \;+\; 0 \;\; + 0 \;+\; \ldots \;+\; 0 + u_{NN}x_N = y_N \end{cases}$$

$u_{N-1,N-1}\boxed{x_{N-1}} + u_{N-1,N}x_N = y_{N-1}$

Résolution du système triangulaire :

$x_N = \dfrac{y_N}{u_{NN}}$ et pour $i = N-1, N-2, \ldots, 1$:

$\boxed{x_i} = \dfrac{1}{u_{ii}}\left(y_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij}\, x_j\right) \Rightarrow$ on a résolu le système initial $A\,x = b$

Exemple :

$l_{2i} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$ $l_{3i} = \frac{a_{3i}}{a_{11}} = \frac{1}{3}$

$Ax = b$

$\Leftrightarrow$

$$(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}) \quad \begin{cases} 1 \cdot x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{47}{60} \end{cases}$$

- On multiplie la 1ère ligne par 1/2 et on la soustrait à la 2ème ligne.
- On multiplie la 1ère ligne par 1/3 et on la soustrait à la 2ème ligne.

On obtient le système équivalent :

$$(\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}) \quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6} \\ 0 + \frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{12}x_3 = \frac{1}{6} \\ 0 + \frac{1}{12}x_2 + \frac{4}{45}x_3 = \frac{31}{180} \end{cases}$$

$$(\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & \frac{11}{6} \\ 0 & + & \frac{1}{12}x_2 & + & \frac{1}{12}x_3 & = & \frac{1}{6} \\ 0 & + & \frac{1}{12}x_2 & + & \frac{4}{45}x_3 & = & \frac{31}{180} \end{array} \right.$$

- On soustrait la 2ième ligne à la 3ième.

On obtient :

$$(\mathbf{A}^{(3)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(3)}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \frac{1}{2}\boxed{x_2} & + & \frac{1}{3}\boxed{x_3} & = & \frac{11}{6} \\ 0 & + & \frac{1}{12}x_2 & + & \frac{1}{12}\boxed{x_3} & = & \frac{1}{6} \\ 0 & + & 0 & + & \frac{1}{180}\boxed{x_3} & = & \frac{1}{180} \end{array} \right.$$

ici $N=3$

C'est un système **triangulaire**. On le résout en partant de la dernière ligne : $x_3 = 1$, puis $x_2 = 12(1/6 - 1/12) = 1$, puis $x_1 = 11/6 - 1/2 - 1/3 = 1$.

test $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} b$

Coût de la méthode de Gauss

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^N$. Système linéaire à résoudre : $A\,x = b$

i.e. coût asymptotique ?

On calcule un équivalent quand $N \to \infty$ du nombre d'opérations arithmétiques élémentaires $(+,-,\times,/)$ nécessaires pour l'élimination de Gauss.

On suppose pour simplifier que celle-ci se fait sans permutations.

On suppose que la matrice A est pleine.

Exemple de coût : $3N^3 + \underbrace{2N^2 + 50}_{O(N^2)}$

$N \to \infty$

Etape 1 $\Rightarrow$ système linéaire équivalent : $A^{(2)}\,x = b^{(2)}$

Combinaisons linéaires : pour i=2...N : (ligne i) $\to$ (ligne i) - $l_{i1} \times$(ligne 1)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2N}^{(2)}x_N = b_2^{(2)} \\ \quad\vdots \\ 0 + a_{N2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{NN}^{(2)}x_N = b_N^{(2)} \end{array}\right.$$

taille N-1

$-$ $\times$

$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}$ $\quad$ i = 2... N-1, j = 2... N-1

$b_i^{(2)} = \underbrace{b_i - l_{i1}b_1}_{2\text{ op.}}$ $\quad$ i = 2... N-1

Calculer $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2 \dots N$: N − 1 divisions

Calculer $a_{ij} - l_{i1} a_{1j}$, $2 \le i, j \le N$: $2 \cdot (N-1)^2$ multiplications et soustractions

Calculer $b_i - l_{i1} b_1$, $2 \le i \le N$: $2(N-1)$ multiplications et soustractions

$\Rightarrow$ passage $A\,x = b$ à $A^{(2)}\,x = b^{(2)}$ en : $\boxed{2N^2 - N - 1 \text{ opérations}}$ étape élim. de x_1

Etapes suivantes :

même procédure pour sous-systèmes de taille $N-1,\ N-2, \dots, 2$

Nombre d'opérations pour obtenir système triangulaire final $U\,x = y$:

$$\sum_{k=2}^{N} (2k^2 - k - 1)$$

#op. pour les N-1 étapes

Rappel de quelques équivalents :

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \approx (1/2)N^2 \text{ quand } N \to \infty$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{1}{3} N\left(N-\frac{1}{2}\right)(N-1)$$

$$\approx \frac{1}{3} N^3 + O(N^2)$$

Par ailleurs on remarque que :

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{N}((k+1)^3 - k^3) = \frac{(N+1)^3}{3} = \sum_{k=0}^{N}(k^2 + k + 1/3)$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 \approx (1/3)N^3 \text{ quand } N \to \infty$$

Par récurrence : $\sum_{k=1}^{N} k^p \approx \frac{1}{p+1} N^{p+1}$ quand $N \to \infty$

$$\approx 2\left(\frac{1}{3}N^3 + O(N^2)\right) - \left(\frac{1}{2}N^2 + O(N)\right) - (N-1)$$

Application :

nombre d'opérations pour obtenir système triangulaire final $U\,x = y$:

$$\boxed{\sum_{k=2}^{N}(2k^2 - k - 1) \approx \sum_{k=2}^{N} 2k^2 \approx (2/3)N^3 \text{ opérations}}$$

Coût pour calculer

$$\underbrace{A^{(N)}}_{=:\,U} x = b^{(N)}$$

($(1/3)N^3$ soustractions et multiplications)

Résolution dernier système $Ux = y$ (triangulaire) :

$$x_N = \frac{y_N}{u_{NN}} \quad \text{et pour } i = N-1, N-2, \ldots, 1 :$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(y_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij}\, x_j\right)$$

$\Rightarrow$ N divisions,

$1+2+\ldots+(N-1) = N(N-1)/2$ multiplications,

$1+2+\ldots+(N-1) = N(N-1)/2$ soustractions

$\Rightarrow \boxed{O(N^2) \text{ opérations}}$

$$\sum_{k=1}^{N-1} = \frac{(N-1)N}{2} = \frac{1}{2}N^2 + O(N)$$

$\Rightarrow$ Coût total élevé de la résolution du système :

$\approx (2/3)N^3$ opérations (pour matrice A pleine)

II – Utilité d'une factorisation matricielle

Nous verrons que la méthode de Gauss fournit aussi une factorisation : $A = L\,U$ ou $P\,A = L\,U$

L : matrice triangulaire inférieure (diagonale unité)

U : matrice triangulaire supérieure

P : matrice de permutation

(permutation des colonnes de la matrice identité)

Pour résoudre $A\,x = b \;\Leftrightarrow\; P\,A\,x = P\,b$:

1) factoriser $P\,A = L\,U$

$P\,A\,x = P\,b \Leftrightarrow L(U\,x) = P\,b$, on pose $U\,x = y$

2) "descente" : calculer la solution y de $L\,y = P\,b$

3) "remontée" : calculer la solution x de U x = y

Coût de l'algorithme (nombre d'opérations arithmétiques élémentaires) pour une matrice A pleine :

1) factorisation $P\,A = L\,U$: $\sim\ (2/3)\,N^3$

2) système triangulaire $L\,y = P\,b$: $O(N^2)$

3) système triangulaire U x = y : $O(N^2)$

$\Rightarrow$ Factorisation utile lorsqu'il faut résoudre de nombreuses fois des systèmes linéaires dont le second membre change mais pas la matrice A (factorisée une seule fois)

Exemples d'applications où cela se produit :
intégration en temps d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, résolution de systèmes d'équations non linéaires

Exemple: discrétisation d'une équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = M\ x + f(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^N$$

$$M \in M_N(\mathbb{R})\ , \quad \mathrm{f}(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$$

Approximation numérique des solutions : $x_k \approx x(k\,\Delta t)$

Schéma "implicite" :

$$\boxed{\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = M\ x_{k+1} + f((k+1)\Delta t)}$$

$$\Leftrightarrow A\ x_{k+1} = b_k \Leftrightarrow L\,U\ x_{k+1} = P\ b_k$$

avec $A = I - \Delta t\ M, \quad b_k = x_k + \Delta t\ f((k+1)\Delta t)$

matrices A et P, L, U inchangées à chaque itération,

second membre b_k variable

Calcul pratique des itérés x_k définis par $A\, x_{k+1} = b_k$:

1) factorisation $PA = LU$ (coût $O(n^3)$)

2) pour tout $k \geq 0$:

x_k étant connu, on calcule $b_k = x_k + \Delta t\ f((k+1)\Delta t)$

- résoudre le système triangulaire (coût $O(n^2)$) :

  $L\, y_k = P\, b_k$

- résoudre le système triangulaire (coût $O(n^2)$) :

  $U\, x_{k+1} = y_k$

III - Factorisation A=LU ou PA=LU

= réinterprétation matricielle des manipulations de la méthode de Gauss

1er cas :

la méthode de Gauss peut s'effectuer sans permutation des lignes du système

(pivots $a_{k,k}^{(k)}$ non nuls)

⇨reformulation matricielle des combinaisons linéaires de lignes

Reformulation matricielle des combinaisons linéaires de lignes

$$
\begin{array}{rc}
\text{Ligne } i \rightarrow &
\underbrace{\begin{pmatrix}
0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\
\cdots & 1 & \\
0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0
\end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Colonne } j}}
\end{array}
\underbrace{\begin{pmatrix}
L\,1 \\ \hline L\,2 \\ \hline \vdots \\ \hline L\,N
\end{pmatrix}}_{A}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline L\,j \\ \hline 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \Leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}
$$

Pour soustraire $\ell \times$ Lj à Li :

$$
\begin{array}{rc}
 & -\ell_{ij} \\
\text{Ligne } i \rightarrow &
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & & & 0 \\
 & 1 & & \\
 & & 1 & \\
0 & \boxed{-\ell} & & 1
\end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Colonne } j}}
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix}
L\,1 \\ \hline L\,2 \\ \hline \vdots \\ \hline L\,i \\ \vdots \\ L_N
\end{bmatrix}}_{A}
=
\begin{bmatrix}
L\,1 \\ \hline L\,2 \\ \hline \vdots \\ \hline L\,i - \ell \times L\,j \\ \vdots \\ L_N
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \Leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}
$$

combinaison lin. de lignes dans algo de Gauss

Elimination de Gauss sur $A \in M_N(IR)$ inversible :

$A = A^{(1)} \to A^{(2)} \to \cdots \to A^{(N)}$ triangulaire supérieure

1ère étape de l' élimination de Gauss sur A :

$$l_{i,1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -l_{N,1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=T_1} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \quad \cdots \quad a_{1N} \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{A}_1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

i.e. $\boxed{T_1 A = A^{(2)}}$

kième étape de l' élimination de Gauss sur une matrice A :

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & -l_{k+1,k} & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -l_{N,k} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(k)} & a_{1,2}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,N}^{(k)} \\ 0 & a_{2,2}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,N}^{(k)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,N}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{N,k}^{(k)} & \cdots & a_{N,N}^{(k)} \end{pmatrix} = A^{(k)}$$

colonne k

$$l_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

$$\boxed{T_k A^{(k)} = A^{(k+1)}}$$

T_k : matrice d'élimination

A la fin de l'élimination de Gauss sur A :

$$\underbrace{A^{(N)}}_{\text{(◣)}} = \underbrace{T_{N-1}\, T_{N-2} \cdots T_2\, T_1}_{=: T = (◣)}\, A = T\, A$$

T triangulaire inférieure,
coefs diagonaux = 1

car T_k triang. inf.
avec 1 en diagonale

$$A^{(N)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(N)} & \cdots & a_{1,N}^{(N)} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{N,N}^{(N)} \end{bmatrix} = U \text{ triangulaire supérieure}$$

$A^{(N)} = U = TA$

T inversible (car 1 en diag.)

$\det T = 1 \neq 0$

⇒ Factorisation de A :

$$\underbrace{A = T^{-1}U,}_{(◣)\,(◥)} \qquad T^{-1} \text{ triangulaire inférieure}$$

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & -\ell_{ik} & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_k \cdot T_{k-1} =$$

Calcul de l' inverse de T :

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \\ \ell_{ij} & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}}$$

Montrons que $L = T^{-1}$

$$\ell_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}$$ (à verifier)

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -l_{N,1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & \ell_{ij} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\,L = T_{N-1} T_{N-2} \cdots T_2 T_1 \,L = I$$

$L = T^{-1}$

+++

Bilan :

Si l'élimination de Gauss faite sur A peut s'effectuer sans permutation des lignes de A (pivots $a_{k,k}^{(k)}$ non nuls) alors on obtient une factorisation LU de A :

$$A = L\,U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & \ell_{ij} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = A^{(N)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(N)} & \cdots & \cdots & a_{1,N}^{(N)} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N,N}^{(N)} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Sous quelle condition a - t - on tous les pivots $a_{k,k}^{(k)}$ non nuls ?

$A =$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$

sous - matrices principales de A

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

1) si tous les pivots $\underline{a_{k,k}^{(k)}}$ sont non nuls

$$\det(\Delta_k) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{2,2}^{(2)} & \\ & X \end{matrix}} & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & a_{1,k} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} \\ & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$\det(L_k)\det(U_k) = 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)} \neq 0$

Donc : $\det(\Delta_k) = a_{1,1}\, a_{2,2}^{(2)} \ldots a_{k,k}^{(k)} \neq 0$

2) Réciproquement, si $\det(\Delta_k) \neq 0$ pour tout k :

$\det(\Delta_1) = a_{1,1} \neq 0 \rightarrow$ 1ère étape de Gauss sans permutation

$\neq 0$ $\neq 0$

Alors : $\det(\Delta_2) = a_{1,1}\, a_{2,2}^{(2)} \neq 0 \rightarrow a_{2,2}^{(2)} \neq 0$

$\rightarrow$ 2ème étape de Gauss sans permutation

Alors : $\det(\Delta_3) = a_{1,1}\, a_{2,2}^{(2)} a_{3,3}^{(3)} \neq 0 \rightarrow a_{3,3}^{(3)} \neq 0$

$\rightarrow$ 3ème étape de Gauss sans permutation

Etc….

$\rightarrow$ toutes les étapes de Gauss s'effectuent sans permutation

Conclusion :

Théorème 1 :

L'élimination de Gauss faite sur $A \in M_N(\mathrm{IR})$ inversible

peut s'effectuer sans permutation des lignes de A (tous pivots $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$)

si et seulement si les N sous-matrices Δ_k sont inversibles.

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

On a alors : A = L U

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & \ell_{ij} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad l_{i,j} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}$$

$$U = A^{(N)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(N)} & \cdots & a_{1,N}^{(N)} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{N,N}^{(N)} \end{pmatrix}$$

Exemple de factorisation $A = LU$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

ligne 2 $\leftarrow$ ligne 2 $- l_{21} \times$ ligne 1, $l_{21} = 1/2$,

ligne 3 $\leftarrow$ ligne 3 $- l_{31} \times$ ligne 1, $l_{31} = 1/3$:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 1/12 & 4/45 \end{pmatrix} \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & ? & 1 \end{pmatrix}$$

ligne 3 $\leftarrow$ ligne 3 $- l_{32} \times$ ligne 2, $l_{32} = 1$:

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1/180 \end{pmatrix} \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2ème cas :

la méthode de Gauss est effectuée avec des permutations des lignes du système

Raisons possibles :

❖Un pivot s'annule

❖Précision des calculs sur machine

❖Préserver une structure de matrice creuse

⇨reformulation matricielle de la méthode de Gauss combinant combinaisons linéaires de lignes et permutations

Théorème 2

Soit $A \in M_N(IR)$ inversible. Il existe une matrice de permutation P, une matrice triangulaire inférieure L (diagonale unité), et une matrice triangulaire supérieure U inversible telles que :

$$P A = L U$$

Cette factorisation se calcule explicitement par élimination de Gauss sur A.

Les matrices L et U sont uniques lorsque P est fixée.

1) Unicité : $PA = L_1 U_1 = L_2 U_2$

$\rightarrow L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$

matrice triangulaire INF diagonale unité = matrice triangulaire SUP

$\rightarrow L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I$

$\rightarrow L_1 = L_2,\ U_1 = U_2$

Existence d'une factorisation PA=LU : reformulation matricielle des combinaisons linéaires de lignes + permutations

Matrice de transposition :

On permute colonnes
i et j de la matrice identité

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \leftarrow \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{col. } i & & \text{col. } j & & \end{array} & \end{array}$$

$P_{ij}\,x$ permute les composantes i et j d'un vecteur colonne x

$P_{ij}\,A$ permute les lignes i et j d'une matrice A

$A\,P_{ij}$ permute les colonnes i et j d'une matrice A

Nous allons montrer que $PA = LU$

$P = P_{N-1,i_{N-1}} \dots P_{3i_3} P_{2i_2} P_{1i_1}$ matrice de permutation

L triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure

Produits matrices de transposition et élimination :

$$
\begin{array}{ccc}
P_{ij} = & \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & \dots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \leftarrow \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{col. } i & & \text{col. } j & & \end{array} &
\end{array}
$$

Produit d'une matrice de permutation $P_{j\,i}$ par une matrice d'élimination T_k $(k < j < i)$:

$$
P_{j,i} \underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \vdots & \boxed{-l_{j,k}} & \ddots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \boxed{-l_{i,k}} & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & -l_{N,k} & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}}_{= T_k}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \vdots & \boxed{-l_{i,k}} & \ddots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \boxed{-l_{j,k}} & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & -l_{N,k} & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}}_{:= \tilde{T}_k}
P_{j,i}
$$

$$U = T_{N-1}\, P_{N-1,i_{N-1}} T_{N-2} \cdots P_{3i_3} T_2\, P_{2i_2} T_1\, P_{1i_1} A = \tilde{T}\, P\, A$$

$P = P_{N-1,i_{N-1}} \ldots P_{3i_3} P_{2i_2} P_{1i_1}$ matrice de permutation

(permutation des colonnes de la matrice identité)

$\tilde{T}$ a la même structure que T (triangulaire inférieure, diagonale unité)

U triangulaire supérieure inversible

PA=LU, L=$\tilde{T}^{-1}$ triangulaire inférieure, diagonale unité

Calcul pratique de L : on fait suivre les permutations

des lignes de A aux lignes de L (coefficients ℓ_{ij}) calculées

aux étapes précédentes de l'élimination de Gauss

Exemple : $PA = LU$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = P_{34}P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

IV Choix du Pivot

Amplification des erreurs d'arrondi pour de petits pivots:

Exemple : soit $\varepsilon << 1$ et $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, pivot ε petit

Résoudre $Ax = b$ avec b= $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ solution exacte: $x_1 = -x_2 = \dfrac{1}{\varepsilon - 1}$

Le système triangulaire obtenu à partir du pivot ε petit s'écrit :

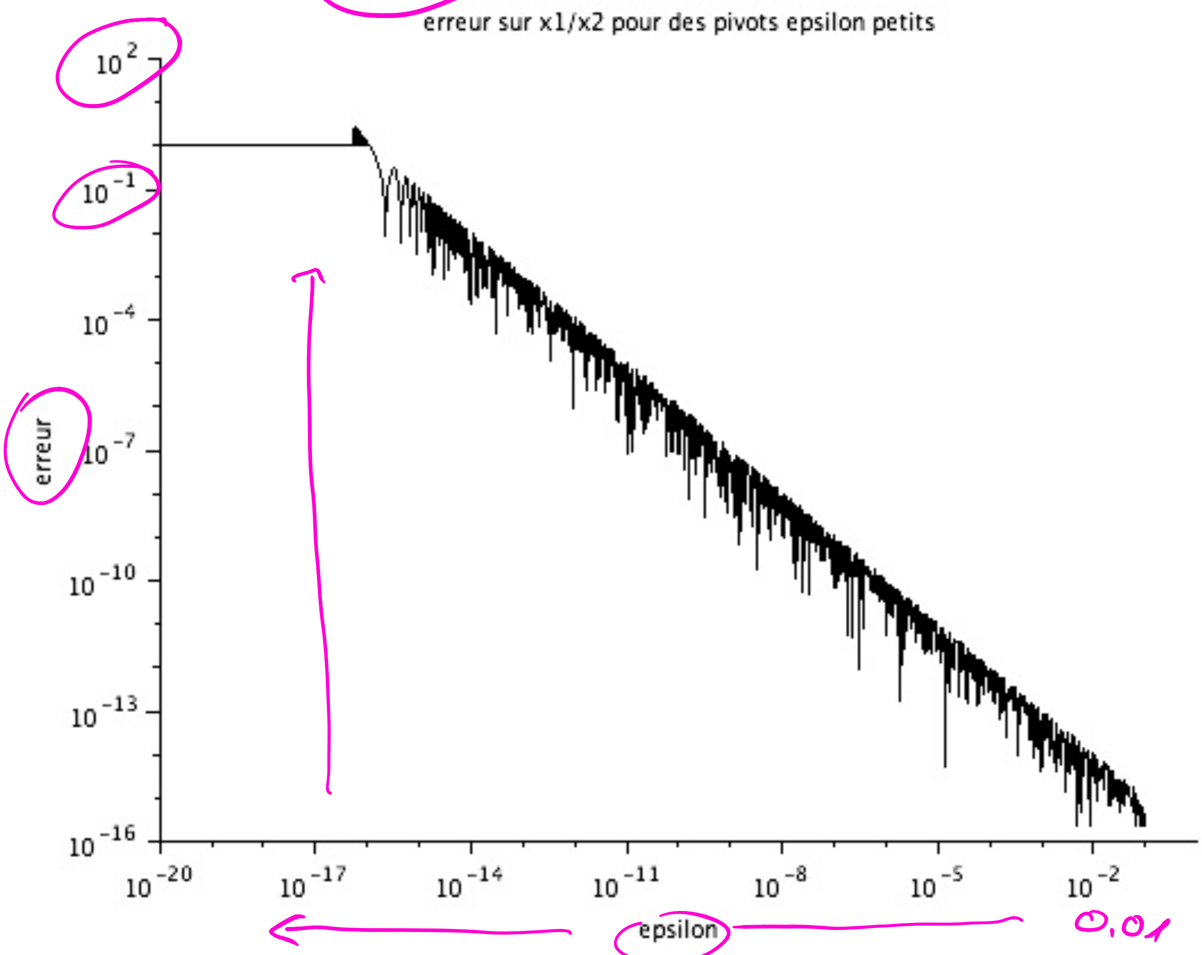
$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_2(1 - 1/\varepsilon) = -1/\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \quad Ux = L^{-1}b \qquad 10^{-10}$$

On a $A = LU$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - 1/\varepsilon \end{pmatrix}$. 10^{+10}

Remarque : det(U)=det(A)=ε-1 $= \varepsilon u_{22}$ donc U possède nécessairement à la fois de grands et petits coefficients diagonaux.

Illustration des erreurs d'arrondi avec Scilab : pour la solution numérique,

on trace le graphe de $\left|\dfrac{x_1}{x_2}+1\right|$ en fonction de ε.



Etude de la sensibilité de la solution d'un système linéaire aux perturbations du second membre

Etant donné une matrice inversible $A \in M_n(\mathrm{IR})$, on compare la solution x du système $Ax = b$ avec la solution $x + \delta x$ du système perturbé $A(x + \delta x) = b + \delta b$

$\cancel{Ax} + A\delta x = \cancel{b} + \delta b$

$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$

Soit $|||\cdot|||$ norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$

On vérifie que : $\|\delta x\| \leq |||A^{-1}|||\,\|\delta b\|$

Donc l'erreur absolue sur la solution peut être grande si $|||A^{-1}|||$ est grand

Définition :

Conditionnement d'une matrice inversible $A \in M_n(\mathrm{IR})$

relatif à la norme $\|\cdot\|$: $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

On vérifie que : $$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

résultat que l'on va démontrer en TD sur le "conditionnement"

Donc l'erreur relative sur la solution peut être grande

si A est mal conditionnée, i.e. si son conditionnement $\mathrm{cond}(A)$ est grand

Remarque : on a toujours $\mathrm{cond}(A) \geq 1$

1000, 10^6, >>

Des matrices L et U mal conditionnées amplifient fortement les erreurs d'arrondi dans les calculs sur machine en arithmétique flottante.

Retour à l'exemple : soit $\varepsilon << 1$ et $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, pivot ε petit

On a $A = LU$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - 1/\varepsilon \end{pmatrix}$.

$\text{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| = \text{cond}(L) \cdot \text{cond}(U)$

On calcule le conditionnement de L et U relatif à la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{U}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon - 1} \begin{pmatrix} 1 - 1/\varepsilon & -1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{cond}_\infty(\mathrm{U}) = \|U\|_\infty \, \|U^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon^2} >> 1$$

$$\text{cond}_\infty(\mathrm{L}) = \|L\|_\infty \, \|L^{-1}\|_\infty = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)^2 >> 1$$

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon \to 0 \\ \\ \end{matrix}\right\} \ \text{cond}(A) \to \infty$$

Amélioration du conditionnement par permutation des lignes :

[Exemple de Forsythe]

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pivot } = 1$$

On a $PA = LU$, $\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$

On calcule le conditionnement de L et U relatif à la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \frac{1}{1-\varepsilon}\begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cond}_\infty(U) = \|U\|_\infty \left\|U^{-1}\right\|_\infty = 4 + O(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

$$\mathrm{cond}_\infty(L) = \|L\|_\infty \left\|L^{-1}\right\|_\infty = 1 + O(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

cond(U) → 4

cond(L) → 1

Les matrices L et U restent bien conditionnées lorsque $\varepsilon << 1$

$\Rightarrow$ après cette permutation la solution est calculée à la précision machine

Elimination de Gauss avec pivot partiel

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ inversible et $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^N$. Système linéaire à résoudre : $A\,x = b$

- On permute la ligne 1 et la ligne i où $|a_{i1}|$ est le plus grand

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{iN}x_N = b_i \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{array}\right.$$

$\max\limits_{j \geq k} |a_{jk}^{(k)}|$

- On réalise la 1ère étape de l'élimination de Gauss
- On recommence pour les sous-systèmes de taille N-1, N-2,....2.

Au coût de l'élimination de Gauss hors permutations se rajoute $\sum_{k=2}^{N} k \approx O(N^2)$
donc une recherche de max parmi :

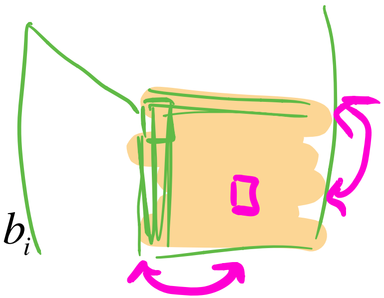
N coefficients $|a_{i1}|$, $(N-1)$ coefficients $|a_{i2}^{(2)}|$,...., 2 coefficients $|a_{i,N-1}^{(N-1)}|$

$\Rightarrow$ coût $O(N^2)$ $\Rightarrow$ le coût total de la résolution du système reste $\approx (2/3)N^3$

Elimination de Gauss avec pivot total

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^N$. Système linéaire à résoudre : $Ax = b$

- On permute la ligne 1 et la ligne i où $|a_{ij}|$ est le plus grand
- On permute les colonnes 1 et j de A et les inconnues x_1 et x_j



$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{ij}x_j + \ldots + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{iN}x_N = b_i \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{Nj}x_j + \ldots + a_{N1}x_1 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{array}\right.$$

- On réalise la 1ère étape de l'élimination de Gauss
- On recommence pour les sous-systèmes de taille N-1, N-2,....2.

$$\sum k^2 = \frac{1}{3}N^3 + O(N^2)$$

Au coût de l'élimination de Gauss hors permutations se rajoute donc une recherche de max parmi :

N^2 coefficients $|a_{ij}|$, $(N-1)^2$ coefficients $|a_{ij}^{(2)}|$,...., 4 coefficients $|a_{i,j}^{(N-1)}|$

$\Rightarrow$ coût $\approx (1/3)N^3 \Rightarrow$ le coût total de la résolution du système $\approx N^3$

=> c'est très coûteux.

=> Pivot Partiel est généralement utilisé.