Démo. RO : CH1 :

1) Th :

$G = (V, E)$ un graphe

On a $$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

Preuve :

i) Calculer la somme des degrés $\sum_{v \in V} d_G(v)$ de G revient à compter les arêtes incidentes à chaque sommet et puis à ajouter ces nombres

ii) chaque arête uv est compté exactement deux fois dans la somme :

une fois dans $d_G(u)$ et une autre dans $d_G(v)$

D'où $$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

2) Th :

$\forall$ G graphe simple de degré maximum ΔG on :

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Preuve.

On procède par récurrence sur n

→ Pour $n=1$ $\quad \chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$

→ Sp que ce soit vrai pour tout graphe simple ayant n som

Soient G un graphe simple à $n+1$ sommets et $v \in V(G)$.

- $G - v$ est simple, $|V(G-v)| = n$ et $\Delta(G-v) \leq \Delta(G)$

D'après HR : il existe une bonne coloration de $G-v$

avec. $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$

- puisque $d_G(v) \leq \Delta(G)$, cette coloration utilise un nombre $\leq \Delta(G)$ couleurs pour les voisins de v, il reste donc au moins une couleur disponible pour v

D'où. En colorant v, avec cette couleur on obtient une bonne coloration de G avec $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.