# Feuille de TD n.8 de IPD 2015-2016, Ensimag 2A IF

H. Guiol & J. Lelong

**Exercice 1.** (processus d'Ornstein-Uhlenbeck)
Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard, $a \in \mathbb{R}$ fixé et $X_t := \int_0^t e^{-a(t-s)}\, dB_s$, $t \in \mathbb{R}_+$.
1) Montrer que $(X_t)$ est un processus gaussien centré. Quelle est sa covariance?

**Réponse.** On a

$$X_t = e^{-at} \int_0^t e^{as}\, dB_s = e^{-at} Y_t$$

où $Y_t$ est une intégrale de Wiener donc est un processus gaussien centré de covariance

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \int_0^{t\wedge s} e^{2au}\ du = \frac{e^{2a(s\wedge t)} - 1}{2a}$$

On en déduit que $(X_t)$ est gaussien centré de covariance

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = e^{-a(t+s)} \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = e^{-a(t+s)} \frac{e^{2a(s\wedge t)} - 1}{2a}$$

□

Remarque: $(X_t)$ n'est par contre ni une martingale ni un processus à accroissements indépendants! (pourquoi?)

**Réponse.** On voit que pour tout $0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = e^{-at} Y_s = e^{-a(t-s)} X_s \neq X_s$$

de plus

$$\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = (e^{-a(t-s)} - 1) X_s \neq \mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$$

□

2) Démontrer que $(X_t)$ satisfait l'équation suivante:

$$X_t = -a \int_0^t X_s\, ds + B_t.$$

**Réponse.** On applique Itô à $X_t = e^{-at} Y_t$

$$dX_t = -aX_t\ dt + e^{-at}\ dY_t + d\langle e^{a\cdot}, Y\rangle_t = -aX_t\ dt + dB_t$$

On en déduit que $\langle X\rangle_t = t$. □

3) Démontrer par la formule d'Itô que le processus $f(X_t)$ est une martingale si $f$ satisfait l'équation différentielle suivante:

$$-ax\, f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

**Réponse.** Par Ito on a

$$df(X_t) = f'(X_t)\ dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X\rangle_t = \left[-aX_t f'(X_t) + \frac{1}{2} f''(X_t)\right]\ dt + f'(X_t)\ dB_t$$

Une condition nécessaire pour que $f(X_t)$ soit une martingale est que le terme en $dt$ ans l'expression ci-dessus soit nul. Cela correspond à l'équation différentielle. □

4) Poser $g(x) = f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle. Conclure que

$$f(x) = \int_0^x \exp(ay^2)\, dy.$$

**Réponse.** On a $-axg(x) + (1/2)g'(x) = 0$ d'où

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 2ax \implies \ln(g(x)) = ax^2 + cte$$

l'hypothèse $1 = f'(0) = g(0)$ implique $cte = 0$. On en titre

$$f(x) = \int_0^x e^{au^2}\ du + K$$

et l'hypothèse $f(0) = 0$ implique $K = 0$. D'où le résultat.
On note au passage qu'on a bien $f'(X_t) = e^{aX_t^2} \in \Pi_2^2[0,T]$ donc $f(X_t)$ est bien une martingale. $\square$

5) On pose $T := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t \notin ]b, c[\}$, le premier temps de sortie de l'intervalle $]b, c[$ ($T$ est un temps d'arrêt). Utiliser les question 3 et 4 pour calculer $\mathbb{P}(X_T = b)$.

**Réponse.** On pose $T_n = T \wedge n$ qui est un T.A. borné. Donc par le théorème d'arrêt on a

$$\mathbb{E}(f(X_{T_n})) = \mathbb{E}(f(X_0)) = 0$$

On remarque sur $\{T < \infty\}$ par convergence dominé $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_{T_n})|T < \infty) = \mathbb{E}(f(X_T)|T < \infty)$ et on a

$$\mathbb{E}(f(X_T)|T < \infty) = 0 = \int_0^b e^{au^2}\ du\ \mathbb{P}(X_T = b|T < \infty) + \int_0^c e^{au^2}\ du\ \mathbb{P}(X_T = c|T < \infty)$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_T = b|T < \infty) = \frac{\int_0^c e^{au^2}\ du}{\int_b^c e^{au^2}\ du}$$

Le fait que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ n'est pas trivial. Il peut se déduire de la propriété de Markov que vérifie le processus d'Ornstein-Uhlenbeck mais sort du cadre que nous nous sommes fixé dans ce cours. On ne détaillera donc pas ce point. $\square$

**Exercice 2.** (le mouvement brownien écrit votre prénom avec probabilité $> 0$ en un temps fini)
1) Montrer que si $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un mouvement brownien standard, alors on a pour $T > 0$ fixé,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T} |B_t| \le \varepsilon\right) > 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

**Réponse.** On remarque que $\left\{\sup_{0\le t\le T} |B_t| \le \varepsilon\right\} = \{\tau_\varepsilon > T\}$. Où $\tau_\varepsilon$ est le premier temps de sortie du brownien de l'intervalle $] - \varepsilon, \varepsilon[$.
Un résultat théorique (que nous ne détaillerons pas ici) donne pour tous $T > 0$ et $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\tau_\varepsilon > T) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{8\varepsilon^2}\ T\right) > 0$$

$\square$

2) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction (déterministe) continûment dérivable et telle que $g(0) = 0$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T} |B_t - g(t)| \le \varepsilon\right) > 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

*Indication:* Effectuer un changement de probabilité $\mathbb{P} \mapsto \tilde{\mathbb{P}}_T$ de telle sorte que $\tilde{B}_t := B_t - g(t)$ soit un mouvement brownien standard sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$. Se rappeler également que $\mathbb{P}(A) = 0$ implique $\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = 0$.

**Réponse.** Il s'agit d'appliquer ici le théorème de Cameron-Martin, on pose pour tout $t \in [0, T]$

$$L_t = \exp\left[-\int_0^t h(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (h(s))^2\ ds\right]$$

avec $h(t) = -g'(t)$ qui définit une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_T$ telle que $L_t = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}}$ telle que le processus $W$ définit par $W_t = B_t - g(t)$ est un MBS sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$.
De 1) on déduit que $\tilde{\mathbb{P}}_T\left(\sup_{0\le t\le T} |W_t| \le \varepsilon\right) > 0$ ce qui entraine $\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T} |W_t| \le \varepsilon\right) > 0$ qui est le résultat annoncé.
$\square$

Remarque: cette propriété reste vraie pour un mouvement brownien en deux dimensions et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$. Si on pense alors à la fonction $g$ qui écrit votre prénom (avec des lettres liées pour être continûment dérivable...), on arrive à la conclusion citée au début de l'exercice. On peut même montrer que la probabilité vaut 1 si on a le choix de l'échelle à laquelle on regarde le mouvement brownien!