Examen final

Lundi 20 janvier 2014 - 2h

Documents manuscrits et polycopié du cours autorisés. Tout autre document interdit.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X un espace de Banach et $f : X \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur X. On suppose que $f(tx) = t^n f(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. *On considère dans cette question le cas $n = 1$. Soit $x \in X$ fixé, et $\varphi(t) = f(tx)$.*
   (a) *Exprimer la dérivée de φ en t en fonction de la différentielle de f.*
   (b) *En déduire que $\forall x \in X, \quad f(x) = df_0(x)$.*
2. *Dans le cas général, montrer que*
$$f(x) = \frac{1}{n!} d^n f_0(x^{(n)})$$
   où $x^{(n)}$ est le n-uplet $(x, x, \ldots, x)$ et $d^n f_0$ la différentielle n-ième de f au point $0 \in X$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dx \qquad (b) \lim_{n \to +\infty} \int_0^\infty \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x(1 + x^2)} dx$$

Exercice 3

*On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g **positives** sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) dt$$

1. *Montrer que $f * g$ est une fonction bien définie, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, qui vérifie :*
$$\int_{\mathbb{R}} f * g(x) dx = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right)$$
   En déduire que si f et g sont intégrables, alors $f * g$ est fini presque partout sur $\mathbb{R}$.
2. *On suppose maintenant que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors $f * g$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.*
   En admettant la propriété suivante :
$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} |h(x + h) - h(x)| dx = 0, \qquad \forall h \in L^1(\mathbb{R}),$$
   montrer que $f * g$ est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. *Exemple : calculer*
   - $f * 0$
   - $f * \mathbb{1}$, *pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.*
   - $f * f$, *avec $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$.*

   Vérifier que la fonction obtenue est bien continue!

Exercice 4

1. *Montrer, en utilisant la définition, que la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est une fonction réelle paire.*

2. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = e^{-2\pi|x|}$$

   Calculer $\hat{f}$*, la transformée de Fourier de* f*.*

3. *Montrer que* $\hat{f}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$*. En déduire la transformée de Fourier de la fonction :*

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$