RÉSUMÉ n°11 : LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Dans ce qui suit : $\begin{cases} \boxed{I} \text{ est un intervalle} \\ \boxed{a,b : I \to \mathbb{C}} \text{ sont deux fonctions \textbf{continues} sur } I \\ \boxed{A} \text{ est une primitive de } a \text{ sur } I \end{cases}$.

D1 a) L'équation (E) : $\boxed{y'+a(x).y=b(x)}$ s'appelle une **équation différentielle linéaire du premier ordre**.

b) $\boxed{b(x)}$ s'appelle le **second membre** de (E).

c) L'équation (E_m) : $\boxed{y'+a(x).y=0}$ s'appelle l'**équation différentielle sans second membre** (ou **homogène**) associée à (E).

P1 L'ensemble des solutions sur I de l'**équation sans second membre** (E_m) : $\boxed{y'+a(x).y=0}$ est constitué des fonctions :

$\boxed{y_m : x \mapsto \lambda.e^{-A(x)}}$ où λ est une **constante réelle ou complexe** quelconque.

E1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : (E) : $y'+2x.y=0$.

P2 L'ensemble des solutions sur I de l'**équation** (E) : $\boxed{y'+a(x).y=b(x)}$ est constitué des fonctions $\boxed{y}$ de la forme

$\boxed{y=y_0+y_m}$ avec : $\boxed{y_0}$ **solution particulière** de (E) : $\boxed{y'+a(x).y=b(x)}$ sur I.

$\boxed{y_m}$ **solution générale** de (E_m) : $\boxed{y'+a(x).y=0}$ sur I.

L'ensemble des solutions sur I de l'**équation** (E) : $\boxed{y'+a(x).y=b(x)}$ est donc constitué des fonctions y de la forme :

$\forall x \in I$: $\boxed{y(x)=y_0(x)+\lambda.e^{-A(x)}}$ avec :

$\boxed{y_0}$ **solution particulière** de (E) : $\boxed{y'+a(x).y=b(x)}$ sur I.

$\boxed{\lambda}$ **constante** réelle ou complexe arbitraire.

E2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : (E) : $y'+2y=3$.

P3 Si $\boxed{y_0 : I \to \mathbb{C}}$ est une fonction définie par $\forall x \in I$: $\boxed{y_0(x)=\lambda(x).e^{-A(x)}}$ avec la condition $\forall x \in I$: $\boxed{\lambda'(x).e^{-A(x)}=b(x)}$,

alors $\boxed{y_0}$ est une **solution particulière** de (E) : $\boxed{y'+a(x).y=b(x)}$ sur I.

D2 C'est la **méthode de variation de la constante**.

E3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : (E) : $y'-y=e^x$.

P4 On considère : $\begin{cases} \text{L'équation } (E) : \boxed{y'+a(x).y=b(x)} \text{ sur } I \\ x_0 \in I \text{ fixé} \\ \alpha \in \mathbb{C} \text{ fixé} \end{cases}$.

Le système suivant $(*)$: $\boxed{\begin{cases} y'+a(x).y=b(x) \\ y(x_0)=\alpha \end{cases}}$ admet alors une **unique solution** sur I.

D3 La condition $\boxed{y(x_0)=\alpha}$ s'appelle une **condition initiale** de $(*)$.

E4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système $(*)$: $\begin{cases} y'+x.y=x \\ y(0)=0 \end{cases}$.

RECOLLEMENT D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Soit l'équation différentielle (E) : $\boxed{a(x).y'+b(x).y=c(x)}$ avec $\boxed{a,b,c:\mathbb{R}\to\mathbb{C}}$ **continues** sur $\mathbb{R}$.

D4 L'équation (E) : $\boxed{a(x).y'+b(x).y=c(x)}$ est dite sous **forme non résolue**.

Faisons l'étude dans le cas particulier où $\forall x\in\mathbb{R}$: $\boxed{a(x)=x}$.

On considère donc (E) : $\boxed{x.y'+b(x).y=c(x)}$. On se sert de l'équivalence :

$$\boxed{y:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \text{ est solution de } (E) : \boxed{x.y'+b(x).y=c(x)} \text{ sur } \mathbb{R}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y \text{ est } \textbf{solution} \text{ de } (E') : \boxed{y'+\dfrac{b(x)}{x}.y=\dfrac{c(x)}{x}} \text{ sur }]0,+\infty[\\ y \text{ est } \textbf{solution} \text{ de } (E') : \boxed{y'+\dfrac{b(x)}{x}.y=\dfrac{c(x)}{x}} \text{ sur }]-\infty,0[\\ y \text{ est } \textbf{continue} \text{ en } 0 \\ y \text{ est } \textbf{dérivable} \text{ en } 0 \end{cases}}$$

a) Sur $]0,+\infty[$, $\boxed{(E)}$ est **équivalente** à (E') : $\boxed{y'+\dfrac{b(x)}{x}.y=\dfrac{c(x)}{x}}$. L'équation (E') est alors sous **forme résolue**.

En résolvant $\boxed{(E')}$ sur $]0,+\infty[$, on obtient les solutions de $\boxed{(E)}$ sur $]0,+\infty[$ sous la forme

$\forall x\in]0,+\infty[$: $\boxed{y(x)=y_1(x)+\lambda.e^{-A(x)}}$.

b) Sur $]-\infty,0[$, $\boxed{(E)}$ est aussi **équivalente** à (E') : $\boxed{y'+\dfrac{b(x)}{x}.y=\dfrac{c(x)}{x}}$.

En résolvant $\boxed{(E')}$ sur $]-\infty,0[$, on obtient les solutions de $\boxed{(E)}$ sur $]-\infty,0[$ sous la forme

$\forall x\in]-\infty,0[$: $\boxed{y(x)=y_2(x)+\mu.e^{-A(x)}}$.

c) On veut aussi que $\boxed{y}$ soit continue en 0.

On cherche donc les constantes $\boxed{\lambda}$ et $\boxed{\mu}$ vérifiant $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} y(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} y(x)}$ c'est à dire :

(i) $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(y_2(x)+\mu.e^{-A(x)}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(y_1(x)+\lambda.e^{-A(x)}\right)}$, ces limites devant être **finies** : leur valeur commune sera appelée $\boxed{y(0)}$.

d) On veut aussi que $\boxed{y}$ soit dérivable en 0.

On cherche donc les constantes $\boxed{\lambda}$ et $\boxed{\mu}$ vérifiant $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}}$ c'est à dire :

(ii) $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\dfrac{y_2(x)+\mu.e^{-A(x)}-y(0)}{x-0}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\dfrac{y_1(x)+\lambda.e^{-A(x)}-y(0)}{x-0}\right)}$, ces limites devant être **finies**.

Leur valeur commune sera appelée $\boxed{y'(0)}$.

e) Conclusion :

Les solutions $\boxed{y\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}}$ de (E) sur $\mathbb{R}$ seront donc définies par : $\boxed{\begin{cases}\forall x\in]-\infty,0[\ :\ \boxed{y(x)=y_2(x)+\mu.e^{-A(x)}} \\ \forall x\in]0,+\infty[\ :\ \boxed{y(x)=y_1(x)+\lambda.e^{-A(x)}} \\ y(0)\ \text{ étant calculé en c)}\end{cases}}$,

$\boxed{\text{les constantes } \lambda \text{ et } \mu \text{ vérifiant c) et d)}}$.

E5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ x.y'-y=-x$.

E6 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ x.y'+y=-x$.

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans ce qui suit : $\boxed{\begin{cases}\boxed{I} \text{ est un intervalle fixé} \\ \boxed{a,b,c} \text{ sont des constantes réelles ou complexes avec } \boxed{a\neq 0} \\ \boxed{d\ :\ I\to\mathbb{C}} \text{ est une fonction continue sur } I\end{cases}}$.

D5 a) L'équation $(E)\ :\ \boxed{a.y''+b.y'+c.y=d(x)}$ s'appelle une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**.

b) $\boxed{d(x)}$ s'appelle le **second membre** de (E).

c) L'équation $(E_m)\ :\ \boxed{a.y''+b.y'+c.y=0}$ s'appelle l'**équation différentielle sans second membre** (ou **homogène**) associée à (E).

d) L'équation du second degré $(*)\ :\ \boxed{a.r^2+b.r+c=0}$ s'appelle l'**équation caractéristique** de (E).

P5 On considère l'équation $(E_m)\ :\ \boxed{a.y''+b.y'+c.y=0}$.

a) Si l'équation caractéristique $(*)\ :\ \boxed{a.r^2+b.r+c=0}$ admet deux racines réelles ou complexes $\boxed{r_1 \text{ et } r_2\ \textbf{distinctes}}$, alors l'ensemble des solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ est constitué des fonctions :

$\boxed{y\ :\ x\mapsto \lambda.e^{r_1.x}+\mu.e^{r_2.x}}$, λ et μ étant deux constantes réelles ou complexes arbitraires.

b) Si l'équation caractéristique $(*)\ :\ \boxed{a.r^2+b.r+c=0}$ admet une racine réelle ou complexe $\boxed{r_1\ \textbf{double}}$, alors l'ensemble des solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ est constitué des fonctions :

$\boxed{y\ :\ x\mapsto \lambda.e^{r_1.x}+\mu.x.e^{r_1.x}}$, λ et μ étant deux constantes réelles ou complexes arbitraires.

E7 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ y''=y$.

E8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(E)\ :\ y''+2y'+y=0$.

P6 On considère à nouveau l'équation (E_m) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=0}$.

On suppose que a,b,c sont **réels** et que l'équation $(*)$: $\boxed{a.r^2+b.r+c=0}$ admet un **discriminant strictement négatif**.

$(*)$ admet donc deux racines complexes conjuguées $\boxed{r_1=\alpha+i.\beta}$ et $\boxed{r_2=\alpha-i.\beta}$.

L'ensemble des solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ est alors constitué des fonctions :

$\boxed{y\ :\ x\mapsto \lambda_1.e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)+\lambda_2.e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)}$, λ_1 et λ_2 étant deux constantes réelles ou complexes arbitraires.

E9 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : (E) : $y''+y'+y=0$.

P7 L'ensemble des solutions sur I de l'**équation** (E) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=d(x)}$ est constitué des fonctions $\boxed{y}$ de la forme

$\boxed{y=y_0+y_m}$ avec :

$\boxed{y_0}$ **solution particulière** de (E) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=d(x)}$ sur I.

$\boxed{y_m}$ **solution générale** de (E_m) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=0}$ sur I.

E10 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : (E) : $y''+y=e^x$.

<u>**Méthode pour obtenir une solution particulière de l'équation**</u> (E) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=d(x)}$:

a) Si le second membre est de la forme $\boxed{d(x)=P(x).e^{m.x}}$ avec $\boxed{P}$ **polynôme** et $\boxed{m}$ **constante complexe**, alors on cherche une solution particulière de $\boxed{(E)}$ sur I sous la forme $\boxed{y_0(x)=H(x).e^{m.x}}$.

b) On dérive deux fois $\boxed{y_0}$, on remplace les expressions obtenues dans la relation $\boxed{a.y_0''+b.y_0'+c.y_0=P(x).e^{m.x}}$ et on en déduit d'abord le **degré** de $\boxed{H}$ avant de déterminer l'**expression** de $\boxed{H}$, puis celle de $\boxed{y_0}$.

E11 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : (E) : $y''-5y'+6y=x.e^{2x}$.

P8 $\boxed{d_1,d_2\ :\ I\to\mathbb{C}}$ sont deux fonctions **continues** sur I.

On considère les équations différentielles suivantes : (E) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=d_1(x)+d_2(x)}$

(E_1) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=d_1(x)}$

(E_2) : $\boxed{a.y''+b.y'+c.y=d_2(x)}$

Si $\boxed{y_1}$ est une **solution particulière** de $\boxed{(E_1)}$ sur I.

Si $\boxed{y_2}$ est une **solution particulière** de $\boxed{(E_2)}$ sur I.

Alors $\boxed{y_1+y_2}$ est une **solution particulière** de $\boxed{(E)}$ sur I.

D6 C'est la **méthode de superposition des solutions particulières**.

E12 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : (E) : $y''+y=\cos(x)$.

P9 On considère : $\begin{cases} \text{L'équation } (E) \ : \ \boxed{a.y''+b.y'+c.y=d(x)} \text{ sur } I \\ \boxed{x_0 \in I} \text{ fixé} \\ \boxed{(\alpha,\alpha') \in \mathbb{C}^2} \text{ fixé} \end{cases}$

Le système suivant $(*)$: $\boxed{\begin{cases} a.y''+b.y'+c.y=d(x) \\ y(x_0)=\alpha \\ y'(x_0)=\alpha' \end{cases}}$ admet alors une **unique solution** sur I .

D7 Les conditions $\boxed{y(x_0)=\alpha}$ et $\boxed{y'(x_0)=\alpha'}$ s'appellent des **conditions initiales** de $(*)$.

E13 Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système $(*)$: $\begin{cases} y''+y'-2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases}$.

QUELQUES PROLONGEMENTS

Voici deux exemples d'**équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients non constants**.

Pour les résoudre, on doit donner une indication.

E14 On considère l'équation différentielle $(*)$: $(1-x^2).y''-x.y'+y=0$. On pose $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $z(t)=y(\sin(t))$.

1°)Montrer que y est solution de $(*)$ sur $]-1,1[$ si et seulement si z est solution sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ d'une équation différentielle $(**)$ que l'on déterminera.

2°)Résoudre $(**)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puis résoudre $(*)$ sur $]-1,1[$.

E15 On pose (E) : $(1+x).y''-2y'+(1-x).y=0$.

1°)Chercher une solution particulière non nulle y_0 de (E) sur $\mathbb{R}$.

2°)On posant $\forall x \in]-1,+\infty[$: $y(x)=y_0(x)\times z(x)$, résoudre (E) sur $]-1,+\infty[$.

FIN DU RÉSUMÉ