MNBI - TD5 (feuille 4)

Ex 1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h & j \\ 0 & i & k \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 4 \\ h = 3 \\ j = 3 \\ bg = 3 \\ bh + i = 4 \\ bj + k = 3 \\ cg = 3 \\ ch + ei = 3 \\ cj + ek + l = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 4 \\ h = 3 \\ j = 3 \\ b = 3/4 \\ i = 7/4 \\ k = 3/4 \\ c = 3/4 \\ e = 3/7 \\ l = 10/7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 3/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 7/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 10/7 \end{pmatrix}$$

Meilleure méthode : opérat° linéaires sur A pour obtenir U ⇒ coeffs utilisés pour multiplier lignes A donnent L.

Ex 2 :

Rappel cours : Gauss sur $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible peut s'effectuer sans permu-tat° des lignes de A ssi les n sous-matrices Δ_k, $1 \leq k \leq n$ sont inversibles. Alors, on a $A = LU$.

$$\rightarrow \Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Tous les Δ_k st à diago str. dominante donc cqfd.

Ex 3

1. Supposons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tq $\alpha_i = 0$.
Alors $\det(U) = 0$ (car U est tri. sup)

Or, $A = LU$ donc $\det(A) = \det(L)\det(U) = 0$ → impossible car A est inversible.

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$.

$A = LU$ donc : $\begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ \gamma_k \alpha_{k-1} = b_k \quad \text{pour } k = 2, \dots, n \\ \gamma_k c_k + \alpha_k = a_k \quad \text{pour } k = 2, \dots, n. \end{cases}$

2. D'après ce qui précède, on calcul pour k de 2 à n, d'abord γ_k en utilisant α_{k-1} déjà calculé, puis α_k à partir de γ_k.
↳ 1 op° ↳ 2 op°
⇒ 3 opérat° / k

Le calcul de L et U nécessite donc $3(n-1) \underset{\infty}{\sim} 3n$ opérations.