Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Résolution d'un Programme Linéaire

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

EXO 8.1.

Énoncé

On considère le programme linéaire :

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &= 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= w(\min) \end{aligned}$$

On pose $J = \{1,\ 2\}$.

(a) Montrer que J est une base réalisable.

(b) Montrer que la solution de base est optimale.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

(b) En considérant x_3 comme constante, on obtient $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

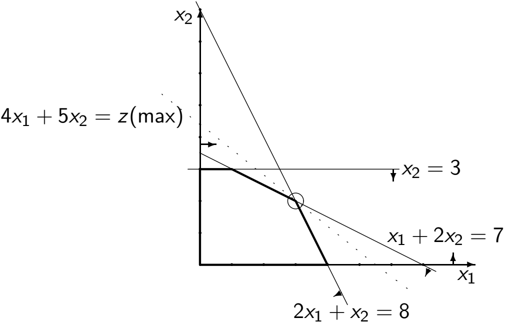
$w(\min) = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4 + 7x_3 \geq 4,$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution optimale.

$$\begin{array}{ll} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 2 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 2 & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = w(\min) \end{array}$$

Solution d'un PL : Méthode graphique

Énoncé d'EXO 8.2.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ 4x_1 + 5x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$



Solution Optimale

$$2x_1 + 1x_2 = 8$$
$$1x_1 + 2x_2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Itération du simplexe

ENTRÉE : Un PL sous forme standard par rapport à une base réalisable J.

$$\begin{aligned} I \cdot x_J + A_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad\quad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) \end{aligned}$$

SORTIE : Une et une seule des trois possibilités suivantes:

- La solution de base $\binom{\overline{x}_J}{\overline{x}_{\overline{J}}} = \binom{b}{0}$ est une solution optimale.
- Il n'y a pas de solution optimale bornée.
- Le PL sous forme standard par rapport à une meilleure base réalisable J'.

Itération du simplexe

ENTRÉE : Un PL sous forme standard par rapport à une base réalisable J.

$$\begin{aligned} I \cdot x_J + A_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) \end{aligned}$$

1. Soit $s \in \overline{J}$ pour lequel $c_s = \max\{c_i : i \in \overline{J}\}$.
2. Si $c_s \leq 0$ `arrêter`. (la solution de base est optimale.)
3. Si $a^s \leq 0$ `arrêter`. ($z(\max) = \infty$.)
4. Sinon soit r tel que $\frac{b_r}{A_r^s} = \min\{\frac{b_i}{A_i^s} : 1 \leq i \leq m$ tel que $A_i^s > 0\}$.
5. Pivoter à A_r^s et `arrêter` avec la nouvelle base $J' = J + s - J_r$.
   - $(a'_r, b'_r) = (a_r, b_r)/A_r^s$,
   - $(a'_i, b'_i) = (a_i, b_i) - A_i^s(a'_r, b'_r)$, pour tout $i \neq r$,
   - $(c'^T, -z'_0) = (c^T, -z_0) - c_s(a'_r, b'_r)$.

EXO. 8.3.

Énoncé

- Une assurance traite deux types de dossier :
  - **A** - des sinistres, qu'on considère comme **2** fois plus importants que
  - **B** - les garanties décennales.
- Chaque demande doit passer par trois sections **I**, **II** et **III** qui disposent de **80**, **80**, **120** heures par semaine respectivement.
- Les dossiers de type A demandent **5**, **8** et **12** heures de traitement dans les sections respectivement et
- les dossiers de type B : **8**, **4**, **4** heures de traitement.

EXO. 8.3.

Énoncé

(a) Mettre sous la forme d'un programme linéaire le problème de la maximisation du nombre de dossiers traités. Comment tenir compte de la différence d'importance entre les dossiers ?

(b) Résoudre par la méthode graphique.

(c) Résoudre par la méthode du simplexe.

(d) Si l'on peut employer une autre personne supplémentaire, dans quelle section son travail sera-t-il le plus avantageux ?

EXO. 8.3.

Solution (a)

1. Tableau de données :

Dossier	A	B	temps disponible
I	**5**	**8**	**80**
II	**8**	**4**	**80**
III	**12**	**4**	**120**
Importance	**2**	**1**	

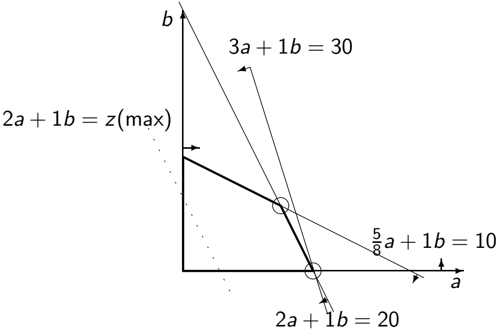
2. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

$$\begin{aligned} 5a + 8b &\leq 80 \\ 8a + 4b &\leq 80 \\ 12a + 4b &\leq 120 \\ a, \quad b &\geq 0 \\ 2a + 1b &= z(\max) \end{aligned}$$

Dans la fonction objectif le coefficient de a est 2 car les dossiers de type A sont deux fois plus importants.

Solution (b)

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{8}a + 1b &\leq 10 \\ 2a + 1b &\leq 20 \\ 3a + 1b &\leq 30 \\ a, \quad b &\geq 0 \\ 2a + 1b &= z(\max) \end{aligned}$$



Solutions optimales

$$\begin{aligned} 2a + 1b &= 20 \\ b &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a + 1b &= 20 \\ \tfrac{5}{8}a + 1b &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{11} \\ \frac{60}{11} \end{pmatrix}$$

EXO. 8.3.

Solution (c)

1. La forme standard du PL est la suivante :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
5a & + & 8b & + & 1c & & & & & = & 80 \\
8a & + & 4b & & & + & 1d & & & = & 80 \\
12a & + & 4b & & & & & + & 1e & = & 120 \\
a, & & b, & & c, & & d, & & e & \geq & 0 \\
2a & + & 1b & & & & & & & = & z(\max) - 0
\end{array}
$$

2. C'est la forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4, 5\}$.
3. On peut donc utiliser l'Étape 2 du simplexe :

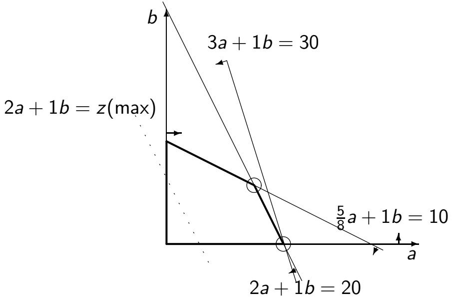
$$
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 80 \\
\boxed{8} & 4 & 0 & 1 & 0 & 80 \\
12 & 4 & 0 & 0 & 1 & 120 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{c}
\ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4
\end{array}
\quad
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
0 & \frac{11}{2} & 1 & -\frac{5}{8} & 0 & 30 \\
1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 10 \\
0 & -2 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -20 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\ell'_1 = \ell_1 - 5\ell'_2 \\ \ell'_2 = \ell_2/8 \\ \ell'_3 = \ell_3 - 12\ell'_2 \\ \ell'_4 = \ell_4 - 2\ell'_2
\end{array}
$$

4. La nouvelle base est $J' = \{3, 1, 5\}$. Puisque $s = 2$ et $c_2 = 0 \leq 0$, on s'arrête avec la solution optimale du PL initial $(\overline{a}, \overline{b}) = (10, 0)$.

Solution (d)

- Si on augmente le nombre de personnes dans la section I ou III, l'optimum ne change pas.
- Si on augmente le nombre de personnes dans la section II, l'optimum augmente.

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{8}a + 1b &\leq 10 \\ 2a + 1b &\leq 20 \\ 3a + 1b &\leq 30 \\ a, \quad b &\geq 0 \\ 2a + 1b &= z(\max) \end{aligned}$$



EXO. 8.4.

Énoncé

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ -1x_1 + 1x_2 &\leq 1 \\ x_1, \qquad x_2 &\geq 0 \\ 1x_1 + 2x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

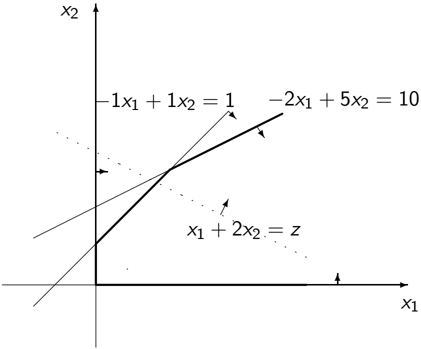
(a) Utiliser la méthode graphique pour chercher une solution optimale du programme linéaire.

(b) Ensuite appliquer formellement la méthode du simplexe pour le résoudre.

EXO. 8.4.

Solution (a)

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ -1x_1 + 1x_2 &\leq 1 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ 1x_1 + 2x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$



Solution optimale

n'existe pas,
$z(\max) = \infty$.

EXO. 8.4.

Solution (b)

1. La forme standard du PL est :

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
-2x_1 & + & 5x_2 & + & 1x_3 & & & = & 10 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & & & + & 1x_4 & = & 1 \\
x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & z(\max)
\end{array}$$

2. C'est la forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4\}$.
3. On peut donc utiliser l'Étape 2 du simplexe :

EXO. 8.4.

Solution (b)

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 5 & 1 & 0 & 10 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ell_1' = \ell_1 - 5\ell_2' \\ \ell_2' = \ell_2 \\ \ell_3' = \ell_3 - 2\ell_2' \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ \hline 0 & 0 & -1 & 3 & -7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ell_1'' = \ell_1'/3 \\ \ell_2'' = \ell_2' - (-1)\ell_1'' \\ \ell_3'' = \ell_3' - 3\ell_1'' \end{array}$$

Puisque $s = 4, c_4 = 3 > 0$ et $a^4 \leq 0$, on s'arrête : il n'existe donc pas de solution optimale bornée, ainsi $z(\max) = \infty$.