

# Éléments de calcul stochastique pour l'évaluation et la couverture des actifs dérivés

Avec exercices corrigés, travaux pratiques et études de cas

---

Imen Ben Tahar, José Trashorras et Gabriel Turinici



# Avant-propos

Un *actif contingent* est un contrat financier entre deux parties, un *acheteur* et un *vendeur*, qui donne lieu à des flux monétaires futurs dépendant d'événements incertains. On parle également de *produit dérivé*, contrat dont la valeur *dérive* de la valeur future d'un *sous-jacent*. Le sous-jacent peut être un actif financier (prix d'une action), une matière première (prix du blé), une créance, etc.

L'existence de tels produits n'est pas un fait récent. La création de contrats permettant de se prémunir contre les risques futurs (ou de faire de la spéculation) a accompagné les activités commerciales depuis des siècles. Cependant, le XX<sup>e</sup> siècle, notamment à partir des années 1970, a connu un développement spectaculaire du marché des produits dérivés. Plusieurs auteurs s'accordent à citer, parmi les facteurs principaux de cette évolution, l'élaboration d'une méthodologie permettant de donner, *dans le cadre de modèles mathématiques*, une réponse au problème d'évaluation des actifs contingents.

L'objectif de ce livre est de présenter le modèle de Black-Merton-Scholes pour l'évaluation et la couverture de produits dérivés. Ce modèle procède de la *méthodologie d'évaluation par réplication en absence d'opportunités d'arbitrage*. Il repose sur la modélisation des processus de prix des actifs financiers par des *processus stochastiques en temps continu* et fait appel notamment au *Mouvement brownien* et au *calcul d'Itô*.

Nous commençons par exposer, dans le chapitre 1, la méthodologie d'évaluation par réplication en absence d'opportunités d'arbitrage dans le cadre d'un modèle de marché financier en temps discret. La modélisation en temps discret des transactions financières est assez intuitive. Elle permet de présen-

ter dans un cadre simple des notions de base, qui seront étendues dans les chapitres suivants au temps continu. Le chapitre 2 est consacré au mouvement brownien et au calcul d'Itô. Nous y présentons les outils du calcul stochastique indispensables pour aborder le chapitre 3. Dans ce dernier chapitre nous décrivons le modèle de Black-Merton-Scholes et nous examinons, dans le cadre de ce modèle, le problème d'évaluation d'actifs contingents. Finalement, des applications (travaux pratiques, études de cas) font l'objet des derniers chapitres de l'ouvrage.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Absence d'opportunités d'arbitrage, probabilité risque neutre et évaluation en temps discret</b>	<b>1</b>
1.1	Modèle de marché financier . . . . .	1
1.1.1	Stratégie financière . . . . .	3
1.1.2	Processus de gains . . . . .	5
1.1.3	Stratégie autofinancée . . . . .	5
1.1.4	Portefeuilles admissibles . . . . .	6
1.1.5	Contraintes de portefeuille . . . . .	6
1.2	Opportunités d'arbitrage et leurs absences . . . . .	7
1.2.1	Opportunités d'arbitrage . . . . .	7
1.2.2	Conséquences de l'A.O.A. . . . .	8
1.3	Caractérisation de la condition A.O.A. . . . .	10
1.4	Réplication d'actifs et évaluation sous la condition A.O.A. . . .	12
1.5	Arbre binomial . . . . .	13
1.5.1	Modélisation probabiliste . . . . .	14
1.5.2	Évaluation de produits dérivés dans le modèle binomial	15
1.6	Exercices . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Mouvement brownien et calcul d'Itô</b>	<b>25</b>
2.1	Processus stochastiques en temps continu . . . . .	26
2.1.1	Filtrations et mesurabilité . . . . .	27
2.1.2	Processus gaussiens . . . . .	28
2.2	Martingales en temps continu . . . . .	31
2.3	Mouvement brownien . . . . .	35

2.3.1	Définition et premières propriétés . . . . .	35
2.3.2	Mouvement brownien multi-dimensionnel . . . . .	39
2.3.3	Variation d'ordre $p$ . . . . .	39
2.4	Intégrale d'Itô . . . . .	44
2.4.1	Fonction à variation bornée et intégrale de Stieltjes . . .	45
2.4.2	Intégration des processus élémentaires . . . . .	46
2.4.3	Intégration des processus de $\mathcal{L}^2([0, T])$ . . . . .	52
2.4.4	Intégration des processus de $\mathcal{L}([0, T])$ . . . . .	54
2.5	Calcul d'Itô . . . . .	56
2.5.1	Processus d'Itô . . . . .	56
2.5.2	Formule d'Itô . . . . .	58
2.5.3	Formule de Itô multi-dimensionnelle . . . . .	63
2.5.4	Équations différentielles stochastiques . . . . .	64
2.6	Représentation de martingales, changement de probabilité . . .	65
2.7	Exercices . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Modèle de Black-Merton-Scholes</b>	<b>79</b>
3.1	Présentation du modèle . . . . .	79
3.1.1	Stratégie financière . . . . .	80
3.2	Condition d'absence d'opportunités d'arbitrage et changement de mesure . . . . .	82
3.3	Évaluation d'options européennes et équation de Black-Merton- Scholes . . . . .	83
3.3.1	Évaluation par réplication . . . . .	84
3.3.2	Approche Monte-Carlo pour l'évaluation d'options : cal- cul pratique du prix en utilisant la formule (3.9) . . . .	85
3.3.3	Équation de Black-Merton-Scholes . . . . .	87
3.3.4	Approche E.D.P. pour l'évaluation d'options, mise en pratique du delta-hedging . . . . .	89
3.3.5	Les Grecques . . . . .	90
3.4	Évaluation d'options américaines . . . . .	91
3.5	Exercices . . . . .	92

<b>4</b>	<b>Solution des exercices</b>	<b>97</b>
4.1	Exercices du chapitre 1 . . . . .	97
4.2	Exercices du chapitre 2 . . . . .	109
4.3	Exercices du chapitre 3 . . . . .	137
<b>5</b>	<b>Travaux pratiques en Octave et Matlab</b>	<b>151</b>
5.1	Programmes pour le chapitre 1 . . . . .	151
5.2	Programmes pour le chapitre 2 . . . . .	155
5.3	Programmes pour le chapitre 3 . . . . .	159
5.4	Versions R des programmes . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Quelques études de cas</b>	<b>167</b>
6.1	Couverture d'option (delta-hedging) et négociation (trading) de volatilité . . . . .	167
6.1.1	Implémentation d'une couverture de type delta-hedging	167
6.1.2	Incertitude sur les paramètres : volatilité implicite, vo- latilité réelle, négociation de volatilité . . . . .	170
6.2	Assurance de portefeuille : stop-loss et C.P.P.I. . . . .	173
6.2.1	Une fausse bonne idée : prendre le meilleur actif . . . .	173
6.2.2	Stratégie stop-loss . . . . .	176
6.2.3	C.P.P.I. . . . .	179
6.3	Versions R des programmes . . . . .	183
<b>A</b>	<b>Quelques prérequis de probabilités</b>	<b>187</b>
A.1	Variable normale ou gaussienne . . . . .	187
A.2	Fonction caractéristique . . . . .	187
A.3	Espaces $L^p$ . . . . .	188
A.3.1	Espace $L^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . . . . .	188
A.3.2	Espaces $L^p(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , $p \in [1, \infty[$ . . . . .	188
A.4	Convergence des suites de variables aléatoires . . . . .	189
A.5	Espérance conditionnelle . . . . .	191
A.6	Martingales en temps discret . . . . .	193
A.7	Changement de probabilité . . . . .	195
A.8	Résultat de type théorème de classe monotone . . . . .	196

A.9 Construction du mouvement brownien . . . . .	197
A.10 Ensemble de scénarios et mesure de Wiener . . . . .	197
<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>



# Chapitre 1

## Absence d'opportunités d'arbitrage, probabilité risque neutre et évaluation en temps discret

Nous introduisons, à travers la présentation d'un marché financier en temps discret, les notions essentielles abordées dans ce livre :

- ★ la formulation d'un modèle mathématique pour décrire des stratégies financières dynamiques,
- ★ la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A.) et le principe d'évaluation par réplication en A.O.A.,
- ★ la modélisation de la rentabilité par une marche aléatoire,
- ★ l'outil fondamental qu'est la probabilité risque neutre.

### 1.1 Modèle de marché financier

On considère, sur un horizon de temps  $T > 0$ , un marché financier formé par  $(d+1)$  actifs,  $S^0, \dots, S^d$  ; il convient de noter que  $S^j$  signifie aussi bien l'actif  $j$  que son processus de prix. On suppose que les agents peuvent intervenir sur ce marché aux dates discrètes  $t_k \in \mathcal{T} := \{t_0, \dots, t_N\}$  où  $t_0 < \dots < t_N = T$ .

L'actif  $S^0$  est un actif sans risque. Son processus de prix, noté toujours  $S^0 := \{S_t^0, t \in \mathcal{T}\}$  évolue selon la dynamique déterministe

$$S_{t_{k+1}}^0 = S_{t_k}^0 e^{r(t_{k+1}-t_k)}. \quad (1.1)$$

Sauf mention explicite du contraire nous prendrons  $t_0 = 0$  et  $S_{t_0}^0 = 1$ . La constante  $r \geq 0$  est le taux d'intérêt sans risque, supposé constant et connu. Pour modéliser l'incertitude concernant les prix des actifs  $S^1, \dots, S^d$ , on introduit un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On désigne par  $S_{t_k}^i$  la variable aléatoire qui correspond au prix de l'actif  $i$  à la date  $t_k$ . On note  $S = \{S_t, t \in \mathcal{T}\}$  le processus  $(d+1)$ -dimensionnel

$$S := \left\{ S_t = \left( S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d \right)^*, t \in \mathcal{T} \right\}.$$

Ici, pour tout vecteur ou matrice  $X$ , nous notons  $X^*$  son transposé. En particulier  $S_t$  est donc un vecteur colonne.

On désigne par processus de prix actualisés le processus  $\tilde{S}$  défini par

$$\tilde{S} := \left\{ \tilde{S}_t = \left( 1, S_t^1/S_t^0, \dots, S_t^d/S_t^0 \right)^*, t \in \mathcal{T} \right\}.$$

Notons que  $\tilde{S}^i$  représente le prix de l'actif risqué  $S^i$  si  $S^0$  est pris comme unité de compte. On dit également que  $\tilde{S}^i$  est le prix de l'actif  $S^i$  lorsque  $S^0$  est pris comme *numéraire*.

Dans ce chapitre, on note  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$  la filtration engendrée par  $S$  :

$$\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(S_{t_i}, t_i \leq t_k) \quad \forall t_k \in \mathcal{T}.$$

**Hypothèse 1.1 (Marché sans frictions)** Les actifs de ce marché financier sont parfaitement divisibles et ils ne sont pas soumis à des coûts de transaction.

Pour éviter des problèmes purement techniques, nous travaillerons sous l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.2** *Le processus  $S$  est borné.*

### 1.1.1 Stratégie financière

Un agent disposant d'un capital initial  $V_{t_0}$  l'investit sur le marché financier en l'allouant entre les différents actifs. À chacune des dates  $t_k$  il a la possibilité de changer l'allocation de sa richesse entre ces actifs. Ainsi, une stratégie financière peut être décrite par un processus stochastique

$$\theta := \left\{ \theta_{t_k} = \left( \theta_{t_k}^0, \dots, \theta_{t_k}^d \right)^*, t_k \in \mathcal{T} \setminus \{t_0\} \right\}.$$

Ici  $\theta_{t_k}^i \in \mathbb{R}$  représente le nombre d'unités de  $S^i$  détenues entre les dates  $t_{k-1}$  et  $t_k$ . Noter que  $\theta_{t_k}^i$  peut être négatif : il s'agit alors d'une vente à découvert.

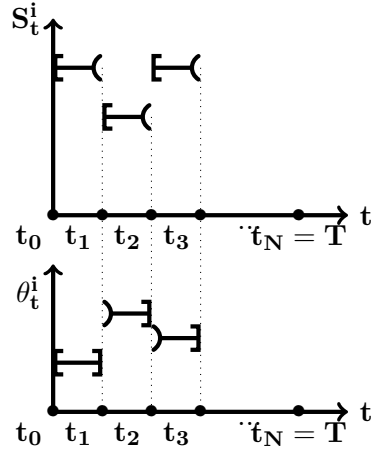
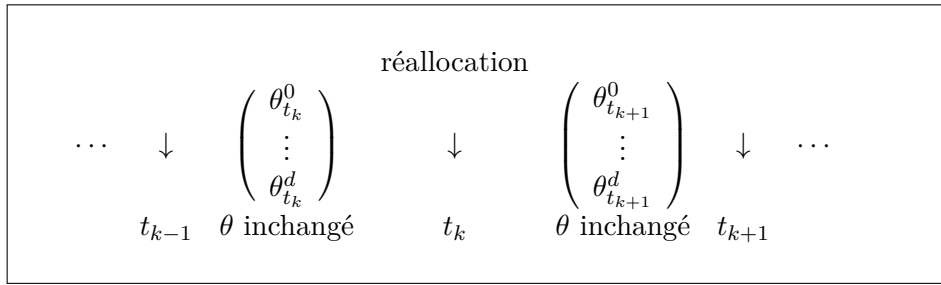


FIGURE 1.1 – Illustration d'un changement d'allocation au sein de la stratégie  $\theta$  (cf. l'intuition 1.1.1). On voit que les prix  $S_t$  sont continus à droite et les quantités  $\theta_t$  continues à gauche.

On note  $V_{t_k}$  la valeur à la date  $t_k$  de ce portefeuille et  $\tilde{V}_{t_k}$  sa valeur actualisée c'est-à-dire sa valeur exprimée dans le numéraire  $S^0$ . On a alors

$$V_{t_k} = \sum_{i=0}^d \theta_{t_k}^i S_{t_k}^i =: \langle \theta_{t_k}, S_{t_k} \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{V}_{t_k} = \sum_{i=0}^d \theta_{t_k}^i \tilde{S}_{t_k}^i =: \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_k} \rangle.$$

Introduisons  $\Delta \tilde{S}$  le processus  $d + 1$ -dimensionnel défini par

$$\Delta \tilde{S}_{t_k} = \left( \Delta \tilde{S}_{t_k}^0, \dots, \Delta \tilde{S}_{t_k}^d \right)^* := \left( 0, \tilde{S}_{t_k}^1 - \tilde{S}_{t_{k-1}}^1, \dots, \tilde{S}_{t_k}^d - \tilde{S}_{t_{k-1}}^d \right)^*.$$

La décision prise par l'investisseur lors de la ré-allocation à la date  $t_{k-1}$  au prix  $S_{t_{k-1}}$  dépend de l'information dont il dispose entre  $t_0$  et  $t_{k-1}$ . Il est donc naturel de considérer que la variable aléatoire  $\theta_{t_k}$  est  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -mesurable.

**Définition 1.1** Soit  $\theta = \{\theta_{t_k}, 1 \leq k \leq N\}$  un processus aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Il est dit *prévisible* si, pour tout  $k = 1, \dots, N$ , la variable aléatoire  $\theta_{t_k}$  est  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -mesurable.

**Intuition 1.1.1** Pour comprendre la notation  $\theta_{t_k}$  il faut constater qu'il y a une ambiguïté possible concernant sa définition : nous pouvons noter  $\theta_{t_k}$  la valeur *AVANT* (en notation intuitive  $\theta_{t_k} = \theta_{t_k}^-$ ) ou *APRÈS* (en notation intuitive  $\theta_{t_k} = \theta_{t_k}^+$ ) ré-allocation au prix  $S_{t_k}$ . **Nous considérons que  $\theta_{t_k}$  est la distribution d'actifs résultant de la ré-allocation au prix  $S_{t_{k-1}}$  et AVANT une éventuelle ré-allocation au prix  $S_{t_k}$ .** Voici pourquoi : les prix sont imprévisibles, c'est-à-dire que, comme ils changent en  $t_k$ , leurs valeurs ne sont pas de simples « continuations » de leurs valeurs en  $t_k - \epsilon$ . Pour cette raison nous pouvons les considérer comme continus à droite ayant une limite à gauche (trajectoire dite « càdlàg »). Par conséquent  $\theta$  « subira » ce changement sans pouvoir intervenir : la quantité  $\theta_{t_{k-1}}^+$  après la ré-allocation au prix  $S_{t_{k-1}}$  subira, sans possibilité d'intervention, le prix  $S_{t_k}$ . Par conséquent  $\theta_{t_k}^- = \theta_{t_{k-1}}^+$  voit les prix  $S_{t_k}$  et cette quantité est notée  $\theta_{t_k} := \theta_{t_k}^- = \theta_{t_{k-1}}^+$ .

### 1.1.2 Processus de gains

Si  $\theta$  est un processus prévisible alors nous pouvons aussi considérer le processus de gains  $\left(\theta \bullet \Delta \tilde{S}\right)$  c'est-à-dire le processus

$$\left(\theta \bullet \Delta \tilde{S}\right)_{t_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\theta \bullet \Delta \tilde{S}\right)_{t_k} = \sum_{m=1}^k \langle \theta_{t_m}, \Delta \tilde{S}_{t_m} \rangle \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Il est facile de voir que ce processus compte la somme des gains réalisés par la stratégie  $\theta$  du fait de son choix d'allocation, gains exclusivement dus aux évolutions (favorables ou pas) des prix des actifs  $S_t$ .

### 1.1.3 Stratégie autofinancée

**Définition 1.2 (Stratégie autofinancée)** *On dit que la stratégie  $\theta$  est autofinancée ou encore qu'elle vérifie la condition d'autofinancement si pour tout  $k = 1, \dots, N$  on a*

$$\tilde{V}_{t_k} = \tilde{V}_{t_0} + \left(\theta \bullet \Delta \tilde{S}\right)_{t_k}. \quad (1.2)$$

**Intuition 1.1.2** *Cette définition implique que toute variation de la valeur du portefeuille entre deux dates successives est totalement due à la variation des prix des actifs, c'est-à-dire qu'il n'y a ni ajout ni retrait d'argent du portefeuille entre  $t_0$  et  $t_N$ .*

Dans notre modèle en temps discret, la condition d'autofinancement de la stratégie  $\theta$  se traduit par l'équation :

$$\tilde{V}_{t_k} = \tilde{V}_{t_{k-1}} + \sum_{i=1}^d \theta_{t_k}^i \left( \tilde{S}_{t_k}^i - \tilde{S}_{t_{k-1}}^i \right) = \tilde{V}_{t_{k-1}} + \langle \theta_{t_k}, \Delta \tilde{S}_{t_k} \rangle \quad (1.3)$$

Ainsi, on remarque que l'expression de la richesse actualisée d'une stratégie autofinancée est complètement déterminée par  $V_{t_0}$  et  $\theta$ .

**Remarque 1.1** *La condition d'autofinancement est équivalente à*

$$\langle \theta_{t_{k-1}}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle = \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle, \quad \forall k = 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

(Voir l'exercice 1.1 page 20.)

#### 1.1.4 Portefeuilles admissibles

On appelle *ensemble des portefeuilles admissibles* ou encore *ensemble des stratégies admissibles* l'ensemble, noté  $\mathcal{A}$ , des processus prévisibles et autofinancés  $\theta$  tels que le processus  $\theta$  est borné. Ainsi

$$\mathcal{A} = \left\{ \theta : \text{prévisible, autofinancé, } \exists C^\theta > 0 \text{ t.q. } |\theta_{t_k}| \leq C^\theta \quad \forall t_k \in \mathcal{T} \setminus \{t_0\} \right\}.$$

Soient  $v \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in \mathcal{A}$ . On note  $V^{v,\theta}$  le processus de richesse autofinancé associé au capital initial  $v$  et à la stratégie admissible  $\theta$  et  $\tilde{V}^{v,\theta}$  le processus actualisé correspondant, c'est-à-dire exprimé dans le numéraire  $S^0$ . Alors

$$\tilde{V}_{t_k}^{v,\theta} = v/S_{t_0}^0 + \left( \theta \bullet \Delta \tilde{S} \right)_{t_k} \quad \text{et} \quad V_{t_k}^{v,\theta} = v e^{r(t_k-t_0)} + S_{t_k}^0 \left( \theta \bullet \Delta \tilde{S} \right)_{t_k}.$$

**Remarque 1.2** *Dès que nous parlons de portefeuille autofinancé il doit y avoir une compatibilité entre  $v$  et  $\theta$  :  $v = \langle \theta_{t_1}, S_{t_0} \rangle$ . Cette compatibilité sera toujours supposée vraie dès que nous invoquons un portefeuille autofinancé.*

**Proposition 1.1** *L'ensemble des portefeuilles admissibles est un sous-espace vectoriel de  $L^0(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{F})$  (voir la Section A.3 pour la définition de  $L^0(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{F})$ ). De plus, pour tout  $\theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{A}$  et  $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$  (compatibles au sens de la remarque 1.2)*

$$\left( (v + \tilde{v}) \bullet \Delta \tilde{S} \right) = \left( v \bullet \Delta \tilde{S} \right) + \left( \tilde{v} \bullet \Delta \tilde{S} \right) \quad \text{et} \quad V^{v+\tilde{v}, \theta+\tilde{\theta}} = V^{v,\theta} + V^{\tilde{v},\tilde{\theta}}.$$

**Preuve.** Exercice. □

#### 1.1.5 Contraintes de portefeuille

Des contraintes peuvent peser sur les stratégies financières d'un investisseur. En termes de modélisation, ceci revient à restreindre les stratégies fi-

nancières possibles à un sous-ensemble  $\mathfrak{P}$  de  $\mathcal{A}$  que l'on désignera par la suite comme *ensemble des portefeuilles possibles*. Par exemple :

- aucune contrainte :  $\mathfrak{P} = \mathcal{A}$ ,
- interdiction de vente à découvert des actifs risqués :

$$\mathfrak{P} := \{\theta \in \mathcal{A} : \theta_{t_k}^i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall t_k \in \mathcal{T}\},$$

- limite sur la variabilité de la stratégie en actifs risqués :

$$\mathfrak{P} := \{\theta \in \mathcal{A} : |\theta_{t_k}^i - \theta_{t_{k+1}}^i| \leq \ell \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall t_k \in \mathcal{T}\}$$

où  $\ell$  est une borne fixée,

- limite sur l'investissement en actifs risqués (en l'occurrence ici sur le  $i$ -ème actif) :

$$\mathfrak{P}^{V_0} := \{\theta \in \mathcal{A} : |\langle \theta_{t_{k+1}}^i, S_{t_k}^i \rangle / V_{t_k}^{V_0, \theta}| \leq \ell \quad \forall t_k \in \mathcal{T}\}$$

où  $\ell$  est une borne fixée.

## 1.2 Opportunités d'arbitrage et leurs absences

### 1.2.1 Opportunités d'arbitrage

On dit qu'un marché financier comporte une opportunité d'arbitrage s'il est possible de réaliser un gain sans risque à partir d'un investissement initial nul. Plus précisément, nous adoptons la définition suivante :

**Définition 1.3 (Opportunité d'arbitrage)** *On dit qu'un marché financier admet une opportunité d'arbitrage si il existe  $\theta \in \mathcal{A}$  avec  $\langle \theta_{t_0}, S_{t_0} \rangle = 0$  tel que :*

$$\mathbb{P}(\tilde{V}_T^{0, \theta} \geq 0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tilde{V}_T^{0, \theta} > 0) > 0.$$

**Définition 1.4 (A.O.A.)** *On dit que le marché financier vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A.) si il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier.*

### 1.2.2 Conséquences de l'A.O.A.

La première propriété, énoncée ci-dessous, porte sur la comparaison des valeurs et des « prix » de stratégies financières.

**Proposition 1.2** *Soient  $(v_1, \theta_1), (v_2, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$  tels que  $V_T^{v_1, \theta_1} \geq V_T^{v_2, \theta_2}$   $\mathbb{P}$ -p.s. En A.O.A. on a nécessairement  $v_1 \geq v_2$ .*

**Preuve.** Supposons que  $v_2 > v_1$ . Posons  $\theta := \theta_1 - \theta_2$ ; alors :

$$\begin{aligned} \left( \theta \bullet \Delta \tilde{S} \right)_T &= \left( \theta_1 \bullet \Delta \tilde{S} \right)_T - \left( \theta_2 \bullet \Delta \tilde{S} \right)_T \\ &= \left( V_T^{v_1, \theta_1} / S_T^0 - v_1 \right) - \left( V_T^{v_2, \theta_2} / S_T^0 - v_2 \right) \\ &= \left( V_T^{v_1, \theta_1} - V_T^{v_2, \theta_2} \right) / S_T^0 + (v_2 - v_1) \geq (v_2 - v_1) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi nous vérifions que  $\theta$  génère une opportunité d'arbitrage, ce qui contredit la condition A.O.A. On conclut que nécessairement  $v_2 \leq v_1$ .  $\square$

**Corollaire 1.1** *Supposons que le marché financier vérifie la condition A.O.A. Soient  $(v_1, \theta_1), (v_2, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$  tels que  $V_T^{v_1, \theta_1} \geq V_T^{v_2, \theta_2}$   $\mathbb{P}$ -p.s.*

1. *Alors  $v_1 \geq v_2$  et  $V_{t_k}^{v_1, \theta_1} \geq V_{t_k}^{v_2, \theta_2}$ ,  $\forall t_k \in \mathcal{T}$ ;*
2. *En particulier, si  $V_T^{v_1, \theta_1} = V_T^{v_2, \theta_2}$   $\mathbb{P}$ -p.s., alors pour tout  $t_k \in \mathcal{T}$  on a  $v_1 = v_2$  et  $V_{t_k}^{v_1, \theta_1} = V_{t_k}^{v_2, \theta_2}$ .*

À présent nous donnons quelques conséquences importantes de la condition A.O.A. sur les prix d'actifs contingents standards : les *options vanille*. On désigne par option vanille une option d'achat ou une option de vente sur l'un des actifs risqués  $S^i$ .

**Définition 1.5 (Option d'achat européenne)** *On appelle option d'achat européenne ou call européen un contrat entre deux parties qui donne à l'acheteur le droit mais pas l'obligation (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) :*

– *d'acheter un actif financier  $S$  (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, fonds, inflation, etc.), appelé actif sous-jacent,*



- à un prix précisé à l'avance  $K$  (prix d'exercice ou strike en anglais),
- à une date d'échéance donnée  $T$  (option dite européenne).

Sa valeur terminale est :  $C_T = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$ .

**Définition 1.6 (Option de vente européenne)** Une option de vente européenne ou put européen est un contrat entre deux parties qui donne à l'acheteur le droit mais pas l'obligation (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) :

– de vendre un actif financier  $S$  (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, fonds, inflation, etc.), appelé actif sous-jacent,

- à un prix précisé à l'avance  $K$  (prix d'exercice ou strike en anglais),
- à une date d'échéance donnée  $T$  (option dite européenne).

Sa valeur terminale est :  $P_T = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$ .

On note  $C_t(S, T, K)$  (respectivement  $P_t(S, T, K)$ ) le prix à la date  $t$  de l'option d'achat (resp. de l'option de vente) de maturité  $T$ , de prix d'exercice  $K$  et de sous-jacent  $S$ .

**Proposition 1.3 (Relation de parité Call-Put)** Pour tout  $t \in [0, T]$  les prix du put et du call vérifient

$$C_t(S, T, K) - P_t(S, T, K) = S - Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.5)$$

**Preuve.** Considérons la stratégie financière, **str 1**, qui consiste à acheter le call et à vendre le put à la date initiale  $t = 0$  et à maintenir le portefeuille inchangé jusqu'à la maturité  $T$ . On a  $V_T^{\text{str1}} = (S_T - K)^+ - (S_T - K)^- = S_T - K$ . Considérons maintenant la stratégie, **str 2**, qui consiste à acheter l'actif risqué  $S$  et à se faire prêter  $Ke^{-rT}$  unités monétaires dans l'actif sans risque  $S^0$  à la date initiale  $t = 0$ , puis à maintenir le portefeuille inchangé jusqu'à la date  $T$ . La valeur terminale de cette stratégie est  $V_T^{\text{str2}} = S_T - K$ . On voit que  $V_T^{\text{str1}} = V_T^{\text{str2}}$  dans tous les états du monde. En utilisant le Corollaire 1.1 on conclut que, à toute date  $t \in [0, T]$ , les valeurs de ces deux stratégies sont égales, d'où la relation de parité Call-Put.  $\square$

**Proposition 1.4 (Bornes sur les prix d'options vanille)** *À toute date  $t \in [0, T]$  on a*

$$\begin{aligned} (S - Ke^{-r(T-t)})^+ &\leq C_t(S, T, K) \leq S \\ (S - Ke^{-r(T-t)})^- &\leq P_t(S, T, K) \leq Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Preuve.** C'est l'objet de l'exercice 1.2 page 20. □

**Proposition 1.5 (Convexité des prix par rapport à  $K$ )** *Pour toute valeur de  $t \in [0, T]$ , les fonctions  $K \mapsto C_t(S, T, K)$  et  $K \mapsto P_t(S, T, K)$  sont convexes.*

**Preuve.** C'est l'objet de l'exercice 1.3 page 20. □

### 1.3 Caractérisation de la condition A.O.A.

Le but de ce paragraphe est d'établir une condition suffisante pour la condition d'A.O.A. sur un marché financier. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.6 pour un rappel des notions requises concernant les martingales à temps discret. Finalement, nous rappelons que deux mesures de probabilité  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  sont dites équivalentes si pour tout  $X \in \mathcal{F}$  :  $\mathbb{P}(X) = 0$  si et seulement si  $\mathbb{Q}(X) = 0$ .

**Théorème 1.1 (Condition suffisante d'A.O.A.)** *On suppose qu'il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que le processus de prix actualisé  $\tilde{S}$  soit une martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}; \mathbb{F})$  (on dira également que  $\tilde{S}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale). Alors ce marché financier vérifie la condition A.O.A.*

Pour prouver ce résultat, nous allons utiliser la propriété suivante :

**Proposition 1.6** *Soit  $\theta \in \mathcal{A}$  un portefeuille admissible tel que  $\langle \theta_{t_0}, S_{t_0} \rangle = 0$ . On suppose qu'il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que le processus de prix actualisé  $\tilde{S}$  soit une  $\mathbb{Q}$ -martingale. Alors le processus de richesse actualisée  $\tilde{V}^{0, \theta}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.*

**Preuve.** Soit  $\theta \in \mathcal{A}$  un portefeuille admissible tel que  $\theta$  soit borné par une constante  $M : \mathbb{P}(|\theta_{t_k}| \leq M) = 1$ . Comme la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  est équivalente à  $\mathbb{P}$  on a  $\mathbb{Q}(|\theta_{t_k}| \leq M) = 1$ . Donc pour tout  $k \geq 1$ , on a  $|\tilde{V}_{t_k}^{0,\theta}| := |\sum_{m=1}^k \langle \theta_{t_m}, \Delta \tilde{S}_{t_m} \rangle| \leq M \sum_{m=1}^k |\Delta \tilde{S}_{t_m}|$ . Comme chacune des variables aléatoires  $\tilde{S}_{t_m}$  est  $\mathbb{Q}$ -intégrable, on en déduit que chacune des variables aléatoires  $\tilde{V}_{t_k}^{0,\theta}$  est  $\mathbb{Q}$ -intégrable. Il nous reste à vérifier que pour tout  $k \geq 1$  on a  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t_k}^{0,\theta} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \tilde{V}_{t_{k-1}}^{0,\theta}$ . Or,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t_k}^{0,\theta} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t_{k-1}}^{0,\theta} + \langle \theta_{t_k}, \Delta \tilde{S}_{t_k} \rangle | \mathcal{F}_{t_{k-1}}].$$

Puisque le processus  $\tilde{V}^{0,\theta}$  est adapté et que le processus  $\theta$  est prévisible, on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t_k}^{0,\theta} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \tilde{V}_{t_{k-1}}^{0,\theta} + \sum_{i=1}^d \theta_{t_k}^i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Delta \tilde{S}_{t_k}^i | \mathcal{F}_{t_{k-1}}].$$

Enfin, puisque  $\tilde{S}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale on a  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Delta \tilde{S}_{t_k}^i | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = 0$ , ce qui nous permet de conclure que  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t_k}^{0,\theta} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}^S] = \tilde{V}_{t_{k-1}}^{0,\theta}$ .  $\square$

**Preuve.** Revenons au théorème 1.1. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que  $\tilde{S}$  soit une  $\mathbb{Q}$ -martingale. Nous montrons par l'absurde que cela implique A.O.A. Supposons qu'il existe un portefeuille admissible  $\theta \in \mathcal{A}$  tel que  $\mathbb{P}(\tilde{V}_T^{0,\theta} \geq 0) = 1$  et  $\mathbb{P}(\tilde{V}_T^{0,\theta} > 0) > 0$ . Comme  $\mathbb{Q}$  est équivalente à  $\mathbb{P}$  on a également  $\mathbb{Q}(\tilde{V}_T^{0,\theta} \geq 0) = 1$  et  $\mathbb{Q}(\tilde{V}_T^{0,\theta} > 0) > 0$ . Puisque  $\theta$  est borné, d'après la proposition 1.6 le processus  $\tilde{V}^{0,\theta}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale qui démarre (au capital initial égal) à zéro donc  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T^{0,\theta}] = \tilde{V}_0^{0,\theta} = 0$ . Ceci combiné à  $\mathbb{Q}(\tilde{V}_T^{0,\theta} \geq 0) = 1$  implique que  $\mathbb{Q}(\tilde{V}_T^{0,\theta} = 0) = 1$ , ce qui contredit  $\mathbb{Q}(\tilde{V}_T^{0,\theta} > 0) > 0$ .  $\square$

**Définition 1.7 (Mesure neutre au risque)** On appelle ensemble des mesures de probabilité neutres au risque l'ensemble noté  $\mathcal{M}(\tilde{S})$  des mesures de probabilité  $\mathbb{Q}$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telles que  $\mathbb{Q}$  est équivalente à  $\mathbb{P}$  et que le processus  $\tilde{S}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.

**Remarque 1.3** Nous venons de montrer que  $\mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset$  implique A.O.A. En temps discret et sous l'hypothèse que l'espace des états est fini (ou dé-

nombrable) la réciproque est aussi vraie : l'A.O.A. implique l'existence d'une mesure risque neutre, voir [11] pour une démonstration. Il y a donc, sous ces hypothèses, équivalence entre A.O.A. et l'existence d'une mesure risque neutre. Ceci est parfois appelé le premier théorème fondamental de la valuation d'actifs.

## 1.4 Réplication d'actifs et évaluation sous la condition A.O.A.

**Définition 1.8** *Un actif financier dont la valeur terminale au temps  $T$  est une variable aléatoire  $G$  intégrable et  $\mathcal{F}_T$ -mesurable est appelé actif contingent de maturité  $T$ .*

Cet actif contingent peut être, par exemple, un produit dérivé tel qu'une option d'achat ou une option de vente. On s'intéresse dans ce paragraphe au problème d'évaluation d'un actif  $G$  : comment déterminer le juste prix  $p_t^G$  de  $G$  à la date  $t$  pour tout  $t \in [0, T]$  dans un modèle donné.

**Intuition 1.4.1** *Le principe d'évaluation par réplication en A.O.A. repose sur l'idée suivante : si le marché financier vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage, alors deux stratégies financières ayant les mêmes valeurs terminales ont nécessairement le même prix à chaque date  $t \in [0, T]$ . Ceci est énoncé dans le Corollaire 1.1. Donc, si l'on est en mesure de construire à partir des actifs  $S^i$  une stratégie dont la valeur terminale coïncide avec  $G$ , alors le prix de  $G$  peut être calculé comme la valeur de cette stratégie.*

**Définition 1.9 (Stratégie de réplication)** *Soit  $\theta \in \mathcal{A}$  et  $v_0 \in \mathbb{R}$ . On dit que le portefeuille admissible  $\theta$  permet de répliquer l'actif contingent  $G$  à partir du capital initial  $v_0$  si :  $G = V_T^{v_0, \theta} \mathbb{P} - p.s.$*

**Proposition 1.7 (Prix d'un actif répliquable)** *On suppose qu'il existe une mesure de probabilité neutre au risque  $\mathbb{Q}$ . On suppose que l'actif contingent*

$G$  admet une stratégie de réplcation  $\theta \in \mathcal{A}$  à partir du capital initial  $v_0$ . On suppose de plus que  $\theta$  est bornée. Si on note  $p_{t_k}^G$  le prix de  $G$  à l'instant  $t_k$  alors pour tout  $k$  on a  $p_{t_k}^G = e^{rt_k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Ge^{-rT} | \mathcal{F}_{t_k}]$ .

**Preuve.** On suppose que  $G$  est réplcable à partir du capital initial  $v_0$  et de la stratégie admissible  $\theta \in \mathcal{A}$ . Alors, en A.O.A., pour tout  $k \leq N$ ,  $p_{t_k}^G = V_{t_k}^{v_0, \theta}$ . Comme  $\theta$  est bornée, le processus  $\tilde{V}^{v_0, \theta}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale. En utilisant le fait que  $G = V_T^{v_0, \theta}$ , on obtient :  $\mathbb{E}[e^{-rT} G | \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}[\tilde{V}_T^{v_0, \theta} | \mathcal{F}_{t_k}] = \tilde{V}_{t_k}^{v_0, \theta}$ . On conclut que :  $p_{t_k}^G = V_{t_k}^{v_0, \theta} = \mathbb{E}[e^{-r(T-t_k)} G | \mathcal{F}_{t_k}]$ .  $\square$

**Définition 1.10 (Marché complet)** On appelle marché complet tout marché financier où tout actif contingent admet une stratégie de réplcation.

**Proposition 1.8** On considère un marché financier complet. Alors, si elle existe, la mesure de probabilité neutre au risque est unique.

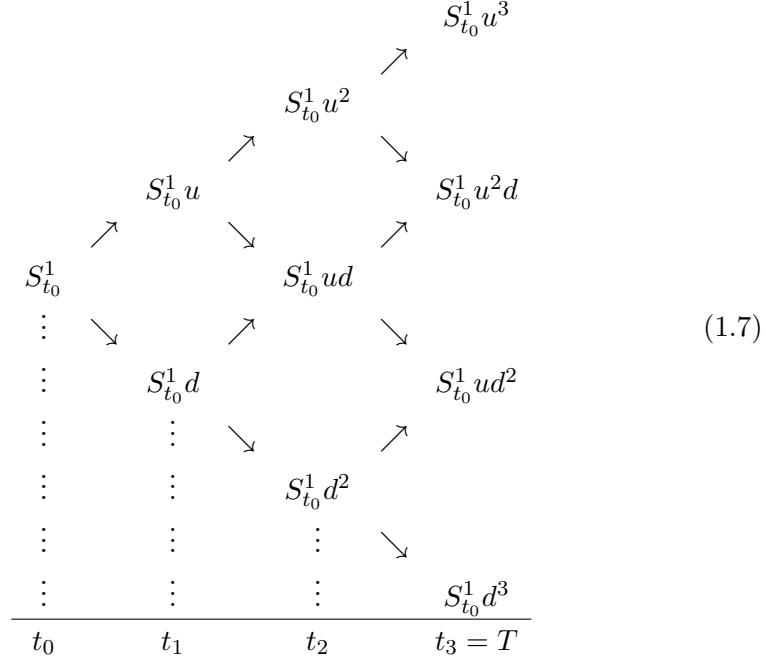
**Preuve.** La preuve est laissée en exercice au lecteur.  $\square$

**Intuition 1.4.2** Si  $r = 0$  alors  $p_0^G = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G)$ , c'est-à-dire que le prix de l'actif à l'instant zéro est juste la moyenne, sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ , des gains possibles à maturité. C'est cette propriété qui donne son nom de probabilité risque neutre à  $\mathbb{Q}$ , en opposition aux approches « averses au risque » (où le prix est inférieur à la moyenne des gains espérés) ou « à propension pour le risque » (où le prix est supérieur à la moyenne des gains espérés).

## 1.5 Arbre binomial

Dans cette section consacrée au modèle binomial, également appelé arbre binomial, nous allons nous restreindre au cas où le marché ne contient qu'un seul actif risqué :  $d = 1$ . Cette simplification est adoptée par souci de clarté. Les résultats énoncés dans cette section peuvent être étendus au cas général  $d \geq 2$  sans difficulté.

Nous modélisons l'actif risqué par un arbre binomial (aussi dit arbre de Cox-Ross-Rubinstein) décrit graphiquement en (1.7) pour  $N = 3$  : le prix de l'actif peut évoluer en multipliant sa valeur par le facteur  $u$  (« up ») ou en multipliant sa valeur par le facteur  $d$  (« down »), avec  $0 < d < u < \infty$ .



### 1.5.1 Modélisation probabiliste

Ici l'ensemble des états possibles est l'ensemble des suites  $u, ud, u^2d$ , etc. Donc :

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_N) | \omega_i \in \{d, u\}\} = \{u, d\}^N.$$

Il convient de noter que ceci implique que l'arbre est **recombinant** c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs possibles en  $T$  est  $N + 1$  et pas  $2^N$ .

Nous notons  $Y_{k+1} = S^1_{t_{k+1}}/S^1_{t_k}$  les rendements.

Ici  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_N\}$  avec :

- au temps  $t_0$  :  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  car on connaît seulement l'état initial ;
- au temps  $t_1$  :  $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega \in \Omega | \omega_1 = d\}, \{\omega \in \Omega | \omega_1 = u\}, \Omega\}$  car on connaît

l'état au temps  $t_1$  ; cette tribu représente l'ensemble des parties de  $\Omega$  dont on peut dire si elles sont réalisées ou pas à l'instant  $t_1$  ;

- au temps  $t_2$  :

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{\omega \in \Omega | \omega_1 = d, \omega_2 = d\}, \{\omega \in \Omega | \omega_1 = d, \omega_2 = u\}, \\ \{\omega \in \Omega | \omega_1 = u, \omega_2 = d\}, \{\omega \in \Omega | \omega_1 = u, \omega_2 = u\}, \Omega\},$$

car on connaît les valeurs prises par  $S_t^1$  jusqu'à  $t_2$  (inclus) ; cette tribu représente l'ensemble des parties de  $\Omega$  dont on peut dire si elles sont réalisées ou pas à l'instant  $t_2$  ;

- ...

Par ailleurs nous constatons que les variables  $S_{t_k}^1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Y_{t_k}^1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont respectivement définies par

$$S_{t_k}^1(\omega_1, \dots, \omega_N) = S_{t_0}^1 \prod_{\ell=1}^k \omega_\ell, \\ Y_k(\omega_1, \dots, \omega_N) = \omega_k.$$

**Remarque 1.4** Clairement  $\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(Y_1, \dots, Y_k)$ . La tribu  $\mathcal{F}_1$  est aussi la tribu engendrée par  $S_{t_1}^1$ , car la tribu engendrée est l'image réciproque par  $S_{t_1}^1$  des boréliens de  $\mathbb{R}$ . (on rappelle que la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$  est la tribu engendrée par les ensembles ouverts.) De même,  $\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(S_{t_1}^1, \dots, S_{t_k}^1)$ .

### 1.5.2 Évaluation de produits dérivés dans le modèle binomial

**Remarque 1.5** Un produit dérivé (ou actif contingent)  $G$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Elle s'écrit donc sous la forme

$$G = \phi(S_{t_0}^1, S_{t_1}^1, \dots, S_{t_N}^1),$$

où  $\phi$  est une application borélienne. Lorsque  $\phi$  dépend seulement de la dernière variable on dira que l'actif dérivé est indépendant du chemin : calls et puts européens (dits aussi « vanille »), calls et puts digitaux, etc.

Lorsque au contraire  $\phi$  dépend pleinement de tous ses arguments on dira que  $G$  est un actif dérivé dépendant du chemin. Un exemple d'actif dépendant

du chemin est l'option (call ou put) asiatique dont le payoff se calcule comme celui d'un call ou put européen mais en prenant en compte la moyenne des valeurs du sous-jacent entre  $t_0$  et  $T$  plutôt que sa valeur terminale. Par souci de clarté nous considérerons seulement les actifs indépendants du chemin, bien que notre manière de procéder soit facilement extensible à tous les actifs.

**Théorème 1.2 (Modèle binomial et probabilité risque neutre)**

Supposons que  $t_k = k\Delta t$  et qu'il y a A.O.A. dans le modèle binomial. Alors

1.  $d < e^{r\Delta t} < u$  ;
2. il existe une unique probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ . Sous cette probabilité les rendements  $Y_1, \dots, Y_N$  sont indépendants et de même loi donnée par

$$\mathbb{Q}(Y_1 = u) = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(Y_1 = d) = 1 - q$$

où

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (1.8)$$

**Preuve.** Démonstration du point 1 : une stratégie d'arbitrage entre l'actif sans risque et l'actif risqué est immédiate à construire si la condition n'est pas satisfaite. Par exemple si  $d \geq e^{r\Delta t}$  ceci veut dire que  $u > d \geq e^{r\Delta t}$  et alors il suffit d'acheter l'actif risqué et de vendre l'actif sans risque pour la même somme d'argent pour obtenir un arbitrage.

Démonstration du point 2 : supposons qu'il existe une probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  et montrons qu'elle est nécessairement unique. Une mesure risque neutre  $\mathbb{Q}$  satisfait  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_{t_k}^1 | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \tilde{S}_{t_{k-1}}^1$  pour tout  $k = 1, \dots, N$  ou encore, selon la définition de  $Y_k$  et de  $\tilde{S}$  :  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_{t_{k-1}}^1 Y_k e^{-r\Delta t} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \tilde{S}_{t_{k-1}}^1$ . Puisque  $S_{t_{k-1}}^1$  est  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$  mesurable il en découle que  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y_k | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = e^{r\Delta t}$  ou encore, après quelques calculs immédiats :

$$u\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_k=u} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) + d\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_k=d} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = e^{r\Delta t}. \quad (1.9)$$

Par ailleurs  $\mathbf{1}_{\Omega}$  est  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -mesurable donc  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\Omega} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \mathbf{1}_{\Omega} = 1$ . Mais en décomposant comme avant nous obtenons aussi :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_k=u} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_k=d} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1. \quad (1.10)$$



Combinant les relations (1.9) et (1.10) nous obtenons :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_k=u}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_k=d}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d}.$$

Nous constatons que les termes de droite des deux égalités ci-dessus ne dépendent ni de  $\omega$  ni de  $k$ , donc sous  $\mathbb{Q}$ , pour tout  $k = 1, \dots, N$ , la variable aléatoire  $Y_k$  est nécessairement indépendante de  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$  ce qui implique que sous  $\mathbb{Q}$  les variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_N$  sont nécessairement indépendantes et de même loi

$$\mathbb{Q}(Y_1 = u) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(Y_1 = d) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = 1 - q$$

où  $q$  est donné par (1.8). Ceci détermine  $\mathbb{Q}$  de façon unique. Réciproquement, en reprenant les arguments ci-dessus, il est facile de montrer qu'en posant

$$\mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_N) = q^{\text{card}\{k:\omega_k=u\}}(1-q)^{\text{card}\{k:\omega_k=d\}}. \quad (1.11)$$

on définit bien une probabilité risque neutre.  $\square$

### **Théorème 1.3 (Évaluation des actifs indépendants du chemin)**

Soit un actif dérivé  $G$  indépendant du chemin  $G = \phi(S_T^1)$  avec  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable. Supposons que  $t_k = k\Delta t$  et que dans le modèle binomial il y a A.O.A. Alors pour tout  $k = 0, \dots, N$  le prix de  $G$  à la date  $t_k$  ne dépend que de la valeur du sous-jacent à cette date. On note  $p_{t_k}^G(X)$  ce prix quand  $S_{t_k}^1 = X$ . On a  $p_{t_N}^G(X) = \phi(X)$  et si  $k = 0, \dots, N-1$  on a

$$p_{t_k}^G(X) = e^{-r\Delta t} \left[ qp_{t_{k+1}}^G(Xu) + (1-q)p_{t_{k+1}}^G(Xd) \right] \quad (1.12)$$

où  $q$  vérifie (1.8). De plus, l'actif  $G$  admet une stratégie de réplication donnée par

$$v = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\phi(S_T^1)], \quad \theta_{t_k}^1 = \frac{p_{t_k}^G(S_{t_{k-1}}^1 u) - p_{t_k}^G(S_{t_{k-1}}^1 d)}{S_{t_{k-1}}^1 u - S_{t_{k-1}}^1 d}. \quad (1.13)$$

**Preuve.** Supposons d'abord que  $G$  est répliquable. On sait alors d'après la proposition 1.7 page 12 que, en A.O.A., pour tout  $k = 0, \dots, N-1$  le prix de  $G$

à la date  $t_k$  est donné par  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t_k)}\phi(S_T^1)|\mathcal{F}_{t_k}]$ . Mais ici  $S_T^1 = S_{t_k}^1 \cdot \Pi_{l=k+1}^N Y_l$  par conséquent le conditionnement par  $\mathcal{F}_{t_k}$  est identique au conditionnement par  $S_{t_k}^1$ . Ceci est spécifique aux actifs indépendants du chemin. En particulier le prix de l'actif contingent à la date  $t_k$  est donné par une fonction de  $S_{t_k}^1$ . Donc

$$\begin{aligned}
 p_{t_k}^G(S_{t_k}^1) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t_k)}\phi(S_T^1)|\mathcal{F}_{t_k}] \\
 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t_k)}\phi(S_T^1)|\mathcal{F}_{t_{k+1}}]\right]\middle|\mathcal{F}_{t_k}\right] \\
 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\Delta t}p_{t_{k+1}}^G(S_{t_{k+1}}^1)\middle|\mathcal{F}_{t_k}\right] \\
 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\Delta t}\left(\mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=u\}} + \mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=d\}}\right)p_{t_{k+1}}^G(S_{t_{k+1}}^1)\middle|\mathcal{F}_{t_k}\right] \\
 &= e^{-r\Delta t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=u\}}p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 u) + \mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=d\}}p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 d)\middle|\mathcal{F}_{t_k}\right].
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

En observant que  $p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 u)$  et  $p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 d)$  dépendent tous deux de  $S_{t_k}^1$  alors que  $\mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=u\}}$  et  $\mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=d\}}$  sont indépendantes de  $S_{t_k}^1$  on obtient l'expression (1.12) après utilisation des propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle. On remarquera que (1.12), combiné au fait évident que  $p_{t_N}^G = \phi$ , détermine de façon unique par récurrence descendante une famille  $p_{t_k}^G, t_k \in \mathcal{T}$ , de fonctions définies sur les valeurs possibles de  $S_{t_k}^1$  à chaque date  $t_k$ .

Montrons à présent, à l'aide de la famille  $p_{t_k}^G, t_k \in \mathcal{T}$ , que  $G$  est effectivement répliquable en considérant le problème de sa couverture. Nous procédons par récurrence en montrant que pour tout  $k = 0, \dots, N$  l'actif  $p_{t_k}^G(S_{t_k}^1)$  est répliquable en suivant la stratégie  $\theta$  donnée par l'énoncé. Ceci prouvera que  $G$  est répliquable puisque  $p_{t_N}^G(S_{t_N}^1) = \phi(S_T^1) = G$ . Le cas  $k = 0$  est trivial car  $p_{t_0}^G(S_{t_0}^1)$  est la constante réelle  $v$ , répliquable avec un portefeuille de valeur  $v$  investi uniquement en actif sans risque. Supposons à présent que nous avons montré pour  $k$  fixé que  $p_{t_k}^G(S_{t_k}^1)$  est répliquable à l'aide d'une stratégie de valeur initiale  $v$  et de  $\theta_{t_\ell}^1$  ( $\ell = 1, \dots, k$ ) définies comme indiqué; nous montrons que ceci est encore vrai pour  $k + 1$ . D'après (1.3) page 5, nous sommes donc à la recherche d'une variable  $\mathcal{F}_{t_k}$  mesurable  $\theta_{t_{k+1}}^1$  telle que :

$$e^{r\Delta t}p_{t_k}^G(S_{t_k}^1) + \theta_{t_{k+1}}^1(S_{t_{k+1}}^1 - S_{t_k}^1 e^{r\Delta t}) = p_{t_{k+1}}^G(S_{t_{k+1}}^1). \tag{1.15}$$

Ceci, selon les valeurs possibles de  $S_{t_{k+1}}^1$ , conduit à un système de deux équations

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} p_{t_k}^G(S_{t_k}^1) + \theta_{t_{k+1}}^1 S_{t_k}^1 (u - e^{r\Delta t}) &= p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 u) \\ e^{r\Delta t} p_{t_k}^G(S_{t_k}^1) + \theta_{t_{k+1}}^1 S_{t_k}^1 (d - e^{r\Delta t}) &= p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 d). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\theta_{t_{k+1}}^1 = \frac{p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 u) - p_{t_{k+1}}^G(S_{t_k}^1 d)}{S_{t_k}^1 u - S_{t_k}^1 d},$$

c'est-à-dire la formule attendue pour  $\theta^1$ . On remarque que  $\theta^1$  est égal au quotient entre la variation du prix du dérivé et la variation du prix du produit sous-jacent. En utilisant les formules (1.12) et (1.13) (et après calculs) nous constatons que  $p^G$  et  $\theta$  vérifient effectivement (1.15). La stratégie  $\theta$  ainsi construite permet de répliquer  $G$  ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarque 1.6** *La valeur  $q$  ne dépend pas de la probabilité  $\mathbb{P}$  donc la probabilité  $\mathbb{Q}$  ne dépend pas de la probabilité  $\mathbb{P}$ . Donc, dans ce modèle, le prix du produit dérivé sera le même dès que les investisseurs s'accordent sur l'ensemble de scénarios possibles, sans nécessité d'accord sur la probabilité de chaque scénario. Ainsi deux options ayant même strike et même maturité sur deux sous-jacents différents (mais avec les scénarios «  $u$  » ou «  $d$  » identiques) auront le même prix, même si par exemple pour le premier  $\mathbb{P}(Y_k = u) = 90\%$  et pour le deuxième  $\mathbb{P}(Y_k = u) = 10\%$ .*

Il est possible, avec les mêmes arguments, de démontrer le

#### **Théorème 1.4 (Évaluation des actifs dépendants du chemin)**

*Soit un actif dérivé  $G = \phi(S_{t_0}^1, S_{t_1}^1, \dots, S_{t_N}^1)$  avec  $\phi : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable. Supposons que  $t_k = k\Delta t$  et que dans le modèle binomial il y a A.O.A. Alors, pour tous  $k = 0, \dots, N$ , le prix de  $G$  à la date  $t_k$  ne dépend que de la valeur du sous-jacent aux dates  $t_0, \dots, t_k$ . On note  $p_{t_k}^G(X_0, \dots, X_k)$  ce prix quand  $(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1) = (X_0, \dots, X_k)$  et on a*

$$p_{t_N}^G(X_0, \dots, X_N) = \phi(X_0, \dots, X_N)$$

et

$$p_{t_k}^G(X_0, \dots, X_k) = e^{-r\Delta t} \left[ qp_{t_{k+1}}^G(X_0, \dots, X_k, X_k u) + (1-q)p_{t_{k+1}}^G(X_0, \dots, X_k, X_k d) \right] \quad (1.16)$$

si  $k = 0, \dots, N-1$  où  $q$  vérifie (1.8). De plus l'actif  $G$  admet une stratégie de réplication donnée par

$$v = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT}G], \quad \theta_{t_k}^1 = \frac{p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_{k-1}}^1, S_{t_{k-1}}^1 u) - p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_{k-1}}^1, S_{t_{k-1}}^1 d)}{S_{t_{k-1}}^1 u - S_{t_{k-1}}^1 d}. \quad (1.17)$$

**Preuve.** C'est l'objet de l'exercice 1.11. □

**Remarque 1.7** Les arguments de cette section sont encore valables, avec quelques ajustements, pour des arbres plus généraux ayant des valeurs  $u$  et  $d$  qui peuvent dépendre de  $t_k$  et plus généralement de  $S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1$ .

## 1.6 Exercices

**Exercice 1.1** Démontrer la remarque 1.1, page 5.

**Exercice 1.2** Démontrer la proposition 1.4 page 10.

**Exercice 1.3** Démontrer la proposition 1.5 page 10.

**Exercice 1.4** Soit un marché avec  $d = 1$ ,  $r = \ln(1.06)$ ,  $N = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  et un investisseur avec un portefeuille autofinancé de valeur  $V$ . Nous savons que  $V_{t_0} = 1000$ ,  $V_{t_1} = 1060$ ,  $V_{t_2} = 1042$ ,  $S_{t_0}^0 = 100$ ,  $S_{t_0}^1 = 100$ ,  $S_{t_1}^1 = 120$ ,  $S_{t_2}^1 = 100$ .

1. Calculer  $S_{t_k}^0$  et  $\tilde{V}_{t_k}$  pour  $k = 0, 1, 2$  ;
2. Calculer  $\theta_{t_k}$  pour  $k = 1, 2$  ;
3. Comparer la stratégie de l'investisseur avec une stratégie impliquant seulement l'actif sans risque.

**Exercice 1.5** Soit un marché avec un actif risqué et un investisseur qui alloue toujours la moitié de la valeur de son portefeuille autofinancé sur l'actif risqué et l'autre moitié sur un actif sans risque.

1. Écrire la formule de récurrence de  $\theta_{t_k}$  en fonction de  $\theta_{t_{k-1}}$  et  $S_{t_{k-1}}$  ;
2. Pareil pour  $V_{t_k}$  en fonction de  $V_{t_{k-1}}$ ,  $S_{t_{k-1}}$  et  $S_{t_k}$ .

**Exercice 1.6** Soit  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi (qui seront dites « i.i.d. » par la suite) de moyenne nulle et de variance finie.

1. Montrer que le processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  défini par

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$$

pour tout  $n \geq 1$  est une martingale par rapport à la filtration « naturelle »  $\mathbb{F}$  donnée par  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i, 1 \leq i \leq n).$$

2. Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = X_n^2 + \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2]$ . En déduire qu'il existe une unique suite croissante de réels  $(a_n)_{n \geq 0}$  telle que  $a_0 = 0$  et  $(X_n^2 - a_n)_{n \geq 0}$  soit une  $\mathbb{F}$ -martingale.
3. Soit maintenant une autre suite de variables aléatoires  $\eta_1, \dots, \eta_n, \dots$  i.i.d., centrées, de variance finie telle que  $\xi_k$  est indépendante de  $\eta_\ell$  pour tout  $\ell \neq k$ . Soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  le processus défini par

$$Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad Y_n = \sum_{\ell=1}^n \eta_\ell$$

pour tout  $n \geq 1$ . Montrer qu'il existe une unique suite de réels  $(d_n)_{n \geq 0}$  vérifiant  $d_0 = 0$  et telle que  $(X_n Y_n - d_n)_{n \geq 0}$  soit une martingale par rapport à la filtration  $\mathbb{G}$  donnée par  $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,

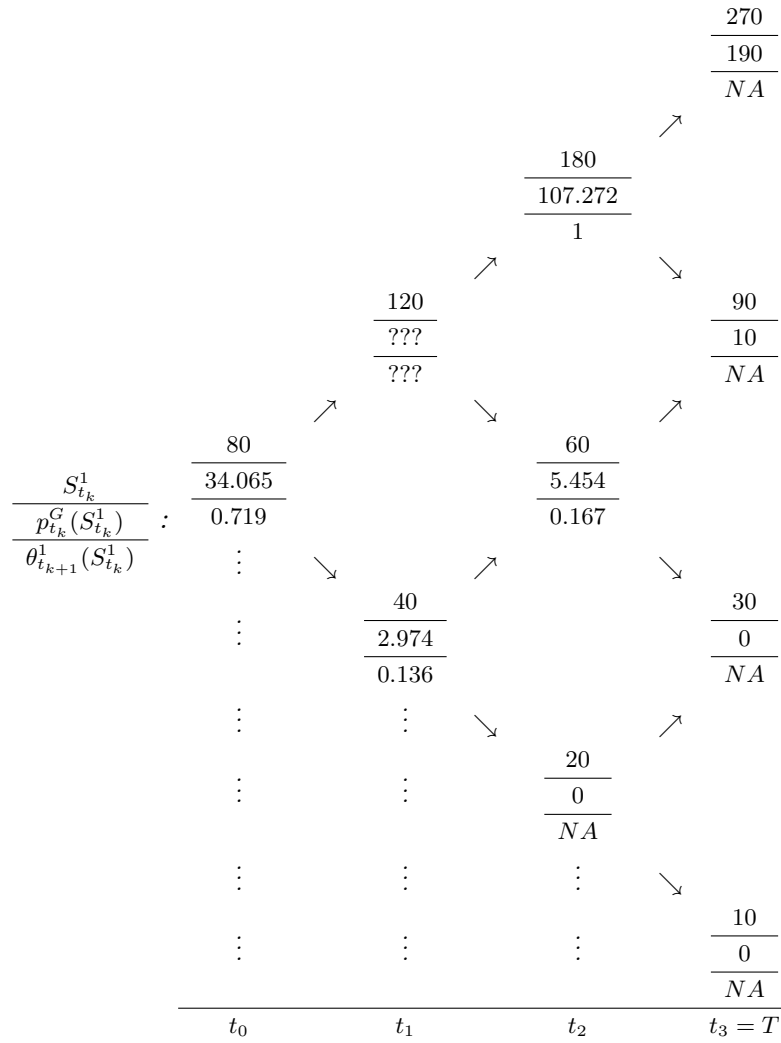
$$\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_i, \eta_\ell, 1 \leq i, \ell \leq n).$$

**Exercice 1.7 (arbre binomial)** Considérons un arbre binomial à 2 pas avec  $S_{t_0}^1 = 100$ ,  $t_0 = 0$ ,  $N = 2$ ,  $T = 4$ ,  $K = 100$ ,  $u = 1.5$ ,  $d = 0.5$ ,  $r = -\frac{1}{2}\ln(0.8)$ . Cet arbre est utilisé pour l'évaluation du prix d'une option d'achat européenne de prix d'exercice  $K$  et de maturité  $T$ . Calculer  $q$  et remplir les endroits manquants du tableau suivant

			$\frac{225}{\frac{??}{NA}}$
		$\nearrow$	
		$\frac{150}{\frac{???}{???}}$	$\searrow$
	$\nearrow$		
$\frac{S_{t_k}^1}{\frac{p_{t_k}^G(S_{t_k}^1)}{\theta_{t_{k+1}}^1(S_{t_k}^1)}} :$	$\frac{100}{\frac{??}{??}}$		$\frac{75}{\frac{??}{NA}}$
	$\vdots$	$\searrow$	$\nearrow$
	$\vdots$	$\frac{50}{\frac{??}{??}}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\searrow$
	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{25}{\frac{??}{NA}}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$t_0$	$t_1$	$t_2 = T$

**Exercice 1.8** Considérons un arbre binomial à 3 pas (exemple adapté de [1]) avec  $S_{t_0}^1 = 80$ ,  $t_0 = 0$ ,  $N = T = 3$ ,  $K = 80$ ,  $u = 1.5$ ,  $d = 0.5$ ,  $r = \ln(1.1)$ . Comme dans l'exercice précédent, cet arbre est utilisé pour l'évaluation du prix d'une option d'achat européenne de prix d'exercice  $K$  et de maturité  $T$ .

1. Calculer  $q$  et remplir les endroits manquants du tableau suivant qui contient



2. Considérer par exemple le scénario  $80 \rightarrow 120 \rightarrow 60 \rightarrow 90$  et montrer comment se fait la couverture de l'option. Même question pour le scénario  $80 \rightarrow 120 \rightarrow 60 \rightarrow 30$ .

**Exercice 1.9** Montrer que pour un arbre trinomial la probabilité risque neutre n'est pas unique.

**Exercice 1.10** Soit un marché complet à  $d = 1$  actif risqué et qui admet une probabilité risque neutre. Nous supposons que pour tout  $k$  les valeurs possibles de  $S_{t_k}^1$  sont en nombre fini. Comparer les prix actualisés d'un dérivé de payoff

*fonction indicatrice d'une valeur possible de  $S_T^1$  (dit actif de type « Arrow-Debreu ») avec la probabilité risque neutre. Généraliser pour  $d > 1$ .*

**Exercice 1.11** *Démontrer le théorème 1.4.*



## Chapitre 2

# Mouvement brownien et calcul d'Itô

Le but de ce chapitre est d'introduire le mouvement brownien et les outils de base du calcul stochastique nécessaires pour comprendre et formuler le modèle de Black-Merton-Scholes :

- ★ après une présentation générale des processus en temps continu, une section est consacrée aux martingales continues,
- ★ nous présentons ensuite le mouvement brownien et étudions quelques propriétés importantes de ce processus,
- ★ nous introduisons la notion d'intégrale stochastique qui nous servira par la suite à modéliser l'évolution du processus de richesse dans un modèle financier où les transactions se déroulent de manière continue dans le temps,
- ★ enfin, nous présentons les processus d'Itô, le lemme d'Itô et les équations différentielles stochastiques.

Pour toute information complémentaire concernant ce chapitre nous renvoyons le lecteur aux références données dans la bibliographie, en particulier [12] et [13].

## 2.1 Processus stochastiques en temps continu

Dans toute cette section, on considère un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On rappelle qu'un ensemble  $B \subset \Omega$  est dit négligeable s'il existe un événement  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $B \subset A$  et  $\mathbb{P}(A) = 0$ . Dans toute la suite, on note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des ensembles négligeables de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Définition 2.1 (Espace de probabilité complet)** *L'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est dit complet si  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ .*

**Définition 2.2 (Processus stochastique)** *Toute famille  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est appelée processus stochastique en temps continu, ou simplement processus stochastique.*

Un processus  $X$  peut être vu comme une famille de variables aléatoires indexée par le temps :

$$X_t : \omega \in (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto X_t(\omega) \in (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

On peut alors s'intéresser aux lois des variables aléatoires  $X_t$  :

**Définition 2.3** *Soit  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processus stochastique.*

1. *[Lois fini-dimensionnelles] Les lois fini-dimensionnelles de  $X$  sont les lois de tous les vecteurs aléatoires  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})$  pour  $t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}_+$  et  $N \in \mathbb{N}$ .*
2. *[Processus équivalents] Deux processus  $X$  et  $Y$  sont dits équivalents si on a égalité de toutes les lois fini-dimensionnelles de  $X$  et de  $Y$ . On écrit alors  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ . On dit également que  $X$  et  $Y$  sont égaux en loi ou que  $Y$  est une version ou une modification de  $X$ .*
3. *[Processus stationnaire] Un processus  $X$  est dit stationnaire si pour tout  $h \geq 0$  le processus  $X_{\cdot+h} := \{X_{t+h}, t \geq 0\}$  est équivalent à  $X$ .*
4. *[Accroissements stationnaires - Accroissements indépendants] Un processus  $X$  est dit à accroissements stationnaires si : pour tout  $t$ , la loi de  $X_{t+h} - X_t$  ne dépend pas de  $t$ . Le processus  $X$  est dit à accroissements*

*indépendants si : pour tout  $n \geq 1$  et tous  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \in \mathbb{R}_+$ , les variables aléatoires  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.*

5. *[Trajectoire d'un processus] Pour tout  $\omega \in \Omega$ , la fonction  $t \mapsto X_t(\omega)$  est appelée trajectoire de  $X$  (associée à l'état  $\omega$ ). Le processus est dit à trajectoires continues si pour tout  $\omega \in \Omega$ , la fonction  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .*
6. *[Processus mesurable] Le processus  $X$  est dit mesurable si l'application :  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  muni de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  muni de la tribu  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , est mesurable. C'est-à-dire si pour tout  $\alpha^1, \dots, \alpha^d \in \mathbb{R}$ , l'ensemble*

$$\{(t, \omega) : X_t^1(\omega) \leq \alpha^1, \dots, X_t^d(\omega) \leq \alpha^d\}$$

*est dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ .*

### 2.1.1 Filtrations et mesurabilité

Un processus stochastique  $X$  modélise l'évolution dans le temps d'une quantité aléatoire. L'observation de l'évolution de  $X$  dans le temps véhicule de l'information : les réalisations passées de  $X$  et sa réalisation présente peuvent informer sur son évolution future. L'outil mathématique qui nous permettra de traduire cette idée d'évolution de l'information est la notion de filtration.

**Définition 2.4** *Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique.*

1. *[Filtration] Une filtration est une famille  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  de tribus telles que :  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  pour tout  $t \geq s \geq 0$ . Si l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est muni d'une filtration  $\mathbb{F}$ , on parlera de l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ .*
2. *[Espace filtré complet] Soit  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  une filtration donnée sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . L'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$  est dit complet si  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ .*
3. *[Filtration naturelle d'un processus] Soit  $X$  un processus stochastique défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Une filtration naturellement associée à  $X$  est la*

filtration  $\tilde{\mathbb{F}}^X = \{\tilde{\mathcal{F}}_t^X, t \geq 0\}$  définie par :  $\tilde{\mathcal{F}}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$ . En général, l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \tilde{\mathbb{F}}^X)$  n'est pas complet. Nous considérons donc plutôt la filtration  $\mathbb{F}^X$  définie par :  $\mathcal{F}_t^X := \tilde{\mathcal{F}}_t^X \vee \mathcal{N}$ . La filtration  $\mathbb{F}^X$  est appelée la  $\mathbb{P}$ -complétée de  $\tilde{\mathbb{F}}^X$  et l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F}^X)$  est donc complet. C'est  $\mathbb{F}^X$  que nous appellerons la filtration naturelle du processus  $X$  ou encore la filtration engendrée par  $X$ .

4. [Processus adapté] On dit que  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est  $\mathbb{F}$ -adapté si pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Pour en savoir plus 2.1.1 (Processus progressif)** On dit que le processus  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est  $\mathbb{F}$ -progressif si pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ , définie sur  $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ , est mesurable. Cette définition est surtout utile pour les processus avec des sauts où les filtrations  $(\mathcal{F}_{t-})_{t \geq 0}$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$  peuvent être différentes.

### 2.1.2 Processus gaussiens

Ce paragraphe est consacré à un type particulier de processus : les processus gaussiens. Avant de définir ces processus nous commençons par faire un bref rappel sur les vecteurs gaussiens.

**Définition 2.5 (Vecteur gaussien)** Soit  $X = (X^1, \dots, X^N)$  un vecteur aléatoire défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Il est dit gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne c'est-à-dire que pour tout  $a \in \mathbb{R}^N$ , la variable aléatoire  $Y^a := \langle a, X \rangle = \sum_{k=1}^N a^k X^k$  est gaussienne.

**Proposition 2.1** Soit  $X^1, \dots, X^N$  des variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Alors le vecteur  $(X^1, \dots, X^N)$  est un vecteur gaussien.

**Preuve.** La démonstration utilise l'injectivité de la fonction caractéristique, cf. section A.2 pour les détails. D'après la définition d'un vecteur gaussien,

il suffit de montrer que la variable aléatoire  $Y^a := \langle a, X \rangle = \sum_{k=1}^N a^k X^k$  est une variable aléatoire gaussienne pour tout  $a \in \mathbb{R}^N$ . Notons  $m_k = \mathbb{E}[X^k]$ ,  $\sigma_k^2 = \text{var}(X^k)$ . Alors

$$\begin{aligned} \Phi_{Y^a}(\xi) &= \mathbb{E}[e^{i\langle \xi, Y^a \rangle}] = \mathbb{E}[e^{i \sum_{k=1}^N \xi a_k X^k}] = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^N e^{i \xi a_k X^k}] \\ &\stackrel{X^k \text{ indépendantes}}{=} \prod_{k=1}^N \mathbb{E}[e^{i \xi a_k X^k}] = \prod_{k=1}^N \exp\left(i \xi a_k m_k - \frac{\xi^2 \sigma_k^2 a_k^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(i \xi \left(\sum_{k=1}^N a_k m_k\right) - \frac{\xi^2 \left(\sum_{k=1}^N \sigma_k^2 a_k^2\right)}{2}\right), \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi gaussienne de moyenne  $(\sum_{k=1}^N a_k m_k)$  et variance  $(\sum_{k=1}^N \sigma_k^2 a_k^2)$ . Par l'injectivité de la fonction caractéristique  $Y^a$  est une v.a. gaussienne.  $\square$

**Proposition 2.2** *Si  $X := (X^1, \dots, X^N)$  est un vecteur gaussien alors sa fonction caractéristique vaut :*

$$\Phi_X : \xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \exp\left(i \langle \xi, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, K_X \xi \rangle\right)$$

où  $K_X$  est la matrice de covariance de  $X$ .

**Preuve.** D'après la définition d'un vecteur gaussien, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$  la variable aléatoire  $\sum_{k=1}^N \xi_k X^k$  est une variable aléatoire gaussienne. Donc

$$\begin{aligned} \Phi_X(\xi) &= \mathbb{E}[e^{i \langle \xi, X \rangle}] = \mathbb{E}[e^{i \sum_{k=1}^N \xi_k X^k}] \\ &= \Phi_{\sum_{k=1}^N \xi_k X^k}(1) \\ &= \exp\left(i 1 \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^N \xi_k X^k\right] - \frac{1^2}{2} \text{var}\left(\sum_{k=1}^N \xi_k X^k\right)\right) \\ &= \exp\left(i \langle \xi, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^N \xi_k \xi_\ell \text{cov}(X^k X^\ell)\right) \\ &= \exp\left(i \langle \xi, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, K_X \xi \rangle\right). \end{aligned}$$

$\square$

**Théorème 2.1** *Soit  $X := (X^1, \dots, X^N)$  un vecteur gaussien. Ses composantes sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.*

**Preuve.** La preuve de « indépendance implique corrélation zéro » est immédiate. Supposons maintenant que les composantes  $X^k$  sont non corrélées. Alors la matrice  $K_X$  est diagonale. Par la proposition précédente

$$\begin{aligned} \Phi_X(\xi) &= \exp \left( i \langle \xi, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, K_X \xi \rangle \right) \\ &\stackrel{K_X = \text{diagonale}}{=} \exp \left( i \left( \sum_{k=1}^N \xi_k \mathbb{E}[X^k] \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N \xi_k^2 \text{var}(X^k) \right) \right) \\ &= \prod_{k=1}^N \exp \left( i \xi_k \mathbb{E}[X^k] - \frac{\xi_k^2 \text{var}(X^k)}{2} \right) \\ &= \prod_{k=1}^N \Phi_{X^k}(\xi_k), \end{aligned}$$

ce qui implique, via la proposition A.1 page 188, l'indépendance des composantes du vecteur  $X$ .  $\square$

**Définition 2.6 (Processus gaussien)** *Soit  $X : \{X_t, t \geq 0\}$  un processus stochastique défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Le processus  $X$  est dit gaussien si pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tous  $t_0 \leq \dots, t_N \in \mathbb{R}_+$ , le vecteur  $(X_{t_0}, \dots, X_{t_N})$  est gaussien.*

Si  $X$  est un processus gaussien, alors (par la proposition 2.2) sa loi est complètement caractérisé par sa fonction moyenne  $e_X : t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$  et par l'opérateur covariance  $K_X : (s, t) \mapsto \text{cov}(X_s, X_t)$ . Quelques exemples :

- le mouvement brownien issu de zéro (il sera étudié plus tard) est un processus gaussien  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  à trajectoires continues dont la fonction moyennes  $e_B$  et l'opérateur de covariance  $K_B$  sont donnés par  $e_B(t) = 0$  et  $K_B(s, t) = \min(s, t)$ ,
- le pont brownien est un processus gaussien  $\Pi = \{\Pi_t, t \in [0, 1]\}$  à trajectoires continues vérifiant  $e_\Pi(t) = 0$  et  $K_\Pi(t, s) = \min(s, t) - st$ .

## 2.2 Martingales en temps continu

**Définition 2.7 ( $\mathbb{F}$ -martingale en temps continu)** Soit  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  un processus stochastique adapté défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration  $\mathbb{F}$ . On dit que  $M$  est une martingale si :

1. pour tout  $t \geq 0$  la variable aléatoire  $M_t$  est intégrable ;
2. pour tout  $t \geq s \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ .

Lorsque à la place du point 2 le processus  $M_t$  vérifie  $\forall s \leq t : M_s \leq \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s)$  (resp.  $\forall s \leq t : M_s \geq \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s)$ ) le processus  $M$  est appelé sous-martingale (resp. sur-martingale).

**Intuition 2.2.1** Si on considère un jeu où l'on gagne  $M_t$  à tout instant  $t$  et on se pose la question de comparer l'espérance de gain à l'instant  $t$  sachant qu'à l'instant présent  $s \leq t$  le gain est de  $M_s$  alors une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale un jeu perdant et une sous-martingale un jeu gagnant.

**Définition 2.8 (Temps d'arrêt)** Soit  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  une filtration. Une variable aléatoire  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  est un temps d'arrêt si pour tout  $t \geq 0$

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

**Définition 2.9 ( $\mathbb{F}$ -martingale locale en temps continu)** Soit un processus stochastique adapté  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration  $\mathbb{F}$ . Le processus  $M$  est dit martingale locale s'il existe une suite strictement croissante de temps d'arrêt  $(T_n)_{n \geq 1}$  telle que :

1. la suite  $T_n$  converge presque sûrement vers  $+\infty$  ;
2. pour tout  $n \geq 0$  le processus  $M^{T_n} := \{M_t^{T_n} = M_{t \wedge T_n}, n \geq 0\}$  est une martingale.

**Proposition 2.3** Soit  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  une martingale définie sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration  $\mathbb{F}$ . Soit  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application

convexe telle que pour tout  $t \geq 0$ , la v.a.  $\Phi(M_t)$  est intégrable. On définit le processus  $M^\Phi$  par :  $\mathbb{M}_t^\Phi := \Phi(M_t)$ ,  $t \geq 0$ .

1.  $M^\Phi$  est une sous-martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$  ;
2. si  $M$  est seulement sous-martingale mais  $\Phi$  est croissante alors  $M^\Phi$  est également une sous-martingale.

**Preuve.** Il faut utiliser l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles, cf. section A.5 proposition A.5, point 9 page 192.  $\square$

Le résultat de la proposition A.7 page 194 valable pour les sous-martingales en temps discret peut être étendu aux sous-martingales (donc, en particulier, aux martingales) à trajectoires continues. En fait il suffit d'avoir des processus avec des trajectoires « càdlàg » (continues à droite avec limite à gauche cf. [15]). Nous obtenons :

**Proposition 2.4 (Inégalité maximale de Doob)** Soit  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  une sous-martingale définie sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration  $\mathbb{F}$ . On suppose que  $M$  est à trajectoires continues. Alors pour tout  $0 \leq \tau < T$  et tout  $\lambda > 0$  on a

$$\lambda \mathbb{P} \left( \sup_{s \in [\tau, T]} M_s \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left[ |M_T| \mathbf{1}_{\{\sup_{s \in [\tau, T]} M_s \geq \lambda\}} \right] \leq \mathbb{E} [|M_T|] .$$

**Technique importante 2.2.1** Le résultat est démontré dans l'appendice pour le cas du temps discret. Pour passer au temps continu nous allons utiliser l'ensemble (dénombrable) des temps rationnels et utiliser la continuité pour les autres temps.

**Preuve.** On note  $D$  l'ensemble dénombrable  $D := ([\tau, T] \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}$ .

1. Dans un premier temps, on montre que  $\sup_{s \in [\tau, T]} M_s = \sup_{s \in D} M_s$ . Comme  $D \subset [\tau, T]$ , il est clair que  $\sup_{s \in [\tau, T]} M_s \geq \sup_{s \in D} M_s$ . Soit  $t \in [\tau, T]$  et  $\omega \in \Omega$  quelconques mais fixés. On peut se donner une suite  $s_n \in D$  telle



que  $s_n \rightarrow t$ . Alors  $\sup_{s \in D} M_s(\omega) \geq M_{s_n}(\omega)$  pour tout  $n$ . Par passage à la limite et continuité de la trajectoire on obtient  $\sup_{s \in D} M_s(\omega) \geq M_t(\omega)$ . Comme ceci a lieu pour  $t$  et  $\omega$  arbitraires on obtient  $\sup_{s \in D} M_s(\omega) \geq \sup_{t \in [\tau, T]} M_t(\omega)$  ce qui conduit à l'égalité annoncée.

**2.** Il est possible de considérer une suite d'ensembles finis  $(F_n)_{n \geq 0}$  tels que

$$F_n \subset F_{n+1} \subset D, \quad T = \max F_n \quad \text{pour tout } n, \quad \text{et} \quad \bigcup_n F_n = D.$$

La proposition A.7 appliquée à la sous-martingale  $\{M_s, s \in F_n\}$  donne :

$$\lambda \mathbb{P} \left( \sup_{s \in F_n} M_s \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left[ |M_T| \mathbf{1}_{\{\sup_{s \in F_n} M_s \geq \lambda\}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ |M_T| \mathbf{1}_{\{\sup_{s \in [\tau, T]} M_s \geq \lambda\}} \right].$$

Or, comme la suite des ensembles  $F_n$  est croissante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sup_{s \in D} M_s \geq \lambda \right) &= \mathbb{P} \left( \bigcup_n \left\{ \sup_{s \in F_n} M_s \geq \lambda \right\} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sup_{s \in F_n} M_s \geq \lambda \right). \end{aligned}$$

On conclut alors que :

$$\begin{aligned} \lambda \mathbb{P} \left( \sup_{s \in D} M_s \geq \lambda \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \mathbb{P} \left( \sup_{s \in F_n} M_s \geq \lambda \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left[ |M_T| \mathbf{1}_{\{\sup_{s \in [\tau, T]} M_s \geq \lambda\}} \right]. \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 2.4 .

**Proposition 2.5 (Inégalité de Doob II)** *Soit  $M$  une martingale définie sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration  $\mathbb{F}$ . On suppose que  $M$  est à trajectoires continues. Alors pour tout  $0 \leq \tau < T$  et  $p > 1$  on a*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sup_{s \in [\tau, T]} |M_s| \right)^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|M_T|^p]$$

**Preuve.** Notons  $M^\star := \sup_{s \in [\tau, T]} |M_s|$ . Soit  $L$  un réel positif

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M^\star \wedge L)^p] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{M^\star \wedge L} p\lambda^{p-1} d\lambda \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^L p\lambda^{p-1} \mathbf{1}_{\{M^\star \geq \lambda\}} d\lambda \right] \\ &= \int_0^L p\lambda^{p-1} \mathbb{P}(M^\star \geq \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du théorème de Fubini. Maintenant, en appliquant la proposition 2.4 à la sous-martingale  $|M|$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M^\star \wedge L)^p] &\leq \int_0^L p\lambda^{p-2} \mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{M^\star \geq \lambda\}}] d\lambda \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^L p\lambda^{p-2} |M_T| \mathbf{1}_{\{M^\star \geq \lambda\}} d\lambda \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{L \wedge M^\star} p\lambda^{p-2} |M_T| d\lambda \right] \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbb{E} \left[ |M_T| (L \wedge M^\star)^{p-1} \right]. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E} \left[ |M_T| (L \wedge M^\star)^{p-1} \right] \leq (\mathbb{E} [|M_T|^p])^{1/p} (\mathbb{E} [(L \wedge M^\star)^p])^{(p-1)/p}.$$

Il en résulte que  $\mathbb{E}[(M^\star \wedge L)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E} [|M_T|^p]$ . Enfin, en faisant tendre  $L$  vers  $+\infty$  et par un argument de convergence monotone (voir proposition A.2 point A.2 page 190) on obtient l'inégalité voulue.  $\square$

**Intuition 2.2.2** Les inégalités précédentes sont utiles pour obtenir des informations sur le comportement de *TOUTE* la trajectoire d'une sous-martingale  $(M_t)_{t \geq 0}$  en utilisant seulement les valeurs de  $M_T$  au temps final  $T$ .

## 2.3 Mouvement brownien

### 2.3.1 Définition et premières propriétés

**Définition 2.10 (mouvement brownien réel)** Soit  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  un processus défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration naturelle (complétée) du processus  $B$ , filtration notée  $\mathbb{F}$  tel que :

1.  $B$  est un processus à trajectoires continues ;
2.  $B$  est un processus à accroissements indépendants, c'est-à-dire que pour tous  $0 \leq s \leq t$  la variable aléatoire  $B_t - B_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$  ;
3. pour tous  $0 \leq s \leq t$  la variable aléatoire  $B_t - B_s$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, t - s)$ .

Si de plus  $B_0 = 0$  (respectivement  $B_0 \neq 0$ ), on dit que  $B$  est un mouvement brownien standard (respectivement non-standard).

Quand la filtration  $\mathbb{F}$  est donnée a priori, un processus  $\mathbb{F}$ -adapté qui vérifie les conditions ci-dessus est dit  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien.

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite du contraire nous supposons  $B_0 = 0$ .

**Théorème 2.2** *Le mouvement brownien existe.*

**Preuve.** Résultat admis ; la démonstration peut être consultée en entier dans les références. Une question non-triviale est la continuité des trajectoires, voir le théorème A.4 (Section A.9 page 197).  $\square$

**Remarque 2.1** *Le mouvement brownien est un processus à accroissements stationnaires.*

**Proposition 2.6** 1. Soit  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ . Alors  $B$  est un processus gaussien de fonction moyenne  $e_B(t) = 0$  et d'opérateur de covariance  $K_B(s, t) = \min(s, t)$ .

2. Soit  $B$  un processus gaussien continu de fonction moyenne  $e_B(t) = 0$  et d'opérateur de covariance  $K_B(s, t) = \min(s, t)$  et avec  $B_0 = 0$ . Alors  $B$  est un mouvement brownien standard.

**Preuve.** Pour le point 1 voir aussi l'exercice 2.6 page 69. Pour le point 2 la plupart des propriétés s'obtiennent immédiatement. L'indépendance de l'accroissement  $B_t - B_s$  par rapport à  $\mathcal{F}_s$  est une conséquence du caractère gaussien, du théorème de type classe monotone A.3 et du corollaire A.1.  $\square$

**Proposition 2.7** *Soit  $B$  un mouvement brownien standard et  $\lambda \in \mathbb{R}$  une constante. Chacun des processus suivants est une martingale :*

$$(i) : \{B_t, t \geq 0\}, (ii) : \{B_t^2 - t, t \geq 0\}, (iii) : \{e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}, t \geq 0\}.$$

**Preuve.** Voir exercice 2.4 page 69.  $\square$

**Proposition 2.8 (Caractérisation de Lévy du mouvement brownien)**

*Soit  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  une martingale continue vérifiant  $M_0 = 0$  telle que  $\{M_t^2 - t, t \geq 0\}$  est aussi une martingale. Alors  $M$  est un mouvement brownien.*

**Preuve.** Admis ; pour un cas particulier voir l'exercice 2.7 page 69.  $\square$

**Proposition 2.9** *Soit  $B$  un mouvement brownien standard. Soient  $T$  et  $\lambda$  deux constantes strictement positives données. Ces processus sont des mouvements browniens :*

1.  $B^- := \{-B_t, t \geq 0\}$  : c'est la propriété de symétrie.
2.  $B^{\oplus T} := \{B_{T+t} - B_T, t \geq 0\}$  : c'est la propriété d'invariance par translation.
3.  $B^{\otimes \lambda} := \{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} B_{\lambda t}, t \geq 0\}$  : c'est la propriété d'auto-similarité.
4.  $B^{\triangleleft} := \{t B_{1/t}, t \geq 0\}$  : c'est la propriété d'inversion du temps.

**Preuve.** Ces différentes propriétés sont relativement faciles à obtenir (par la définition ou, mieux encore, par application de la proposition 2.6). Le point le plus délicat concerne la propriétés d'inversion du temps où, pour vérifier la continuité de la trajectoire du processus  $B^{\triangleleft}$ , il faut établir que  $\mathbb{P} - p.s.$   $\lim_{t \searrow 0} t B_{1/t} = 0$ . Ceci est une conséquence de la propriété énoncée dans la proposition suivante, laquelle est obtenue grâce à la propriété de martingale du mouvement brownien  $B$ .  $\square$



**Mise en garde 2.3.1** *Il faut faire attention dans la définition des filtrations. Par exemple pour l'auto-similarité la filtration naturelle associée à  $B^{\otimes \lambda}$  est la filtration suivante  $(\mathcal{F}_t^{\otimes \lambda})_{t \geq 0} = (\mathcal{F}_{\lambda t})_{t \geq 0}$  où  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est la filtration du brownien  $B_t$ .*

Dans les quatre propositions qui suivent nous nous intéressons aux propriétés des trajectoires du mouvement brownien.

**Proposition 2.10** *Soit  $B$  un mouvement brownien standard. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} = 0, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

**Preuve.** Nous rappelons que  $|B| = \{|B_t|, t \geq 0\}$  est une sous-martingale. Soit

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega \left| \max_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} |B_t| \geq (2^n)^{1/2 + \varepsilon/2} \right. \right\}.$$

Par l'inégalité de Doob (proposition 2.4 page 32) pour  $\lambda = (2^n)^{1/2 + \varepsilon/2}$  et en tenant compte du fait que  $|B_t|$  a la même loi que  $\sqrt{t}|\mathcal{N}(0, 1)|$  il existe une constante  $C_0$  dépendant seulement de la distribution de la loi normale telle que :

$$(2^n)^{1/2 + \varepsilon/2} \mathbb{P}(A_n) \leq C_0 (2^{n+1})^{1/2},$$

ou encore  $\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{C_0 \sqrt{2}}{(2^n)^{\varepsilon/2}}$ . Mais alors pour  $D_m = \cup_{n \geq m} A_n$  il existe une constante  $C_1$  telle que

$$\mathbb{P}(D_m) \leq \sum_{n \geq m} \frac{C_0 \sqrt{2}}{(2^n)^{\varepsilon/2}} = \frac{C_1}{(2^{\varepsilon/2})^m}.$$

Donc  $\mathbb{P}(D_m) \rightarrow 0$  pour  $m \rightarrow \infty$ ; par ailleurs  $D_m$  est une suite décroissante. Ainsi, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe  $m_\omega$  tel que  $\omega \notin D_{m_\omega}$ ;

ceci est équivalent à dire que  $\omega \notin A_n$  pour tout  $n \geq m_\omega$ . Par conséquent  $\max_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} |B_t| \leq (2^n)^{1/2+\varepsilon/2}$ ,  $\forall n \geq m_\omega$ . Ceci implique que pour tout  $t \geq 2^{m_\omega}$  on a  $|B_t| \leq (2^n)^{1/2+\varepsilon/2} \leq t^{1/2+\varepsilon/2}$ . Nous obtenons donc  $\frac{|B_t|}{t^{1/2+\varepsilon/2}} \leq 1$  pour tout  $t \geq 2^{m_\omega}$ . Ceci montre que  $\frac{|B_t|}{t^{1/2+\varepsilon}} \leq \frac{1}{t^{\varepsilon/2}}$  pour tout  $t \geq 2^{m_\omega}$  donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|B_t|}{t^{1/2+\varepsilon}} = 0$ .  $\square$



**Mise en garde 2.3.2** La v.a.  $B_t$  est de loi  $\sqrt{t}\mathcal{N}(0, 1)$  (ici  $\mathcal{N}(0, 1)$  désigne une variable normale centrée réduite). Donc  $\frac{B_t(\omega)}{t^{1/2+\varepsilon}}$  est de loi  $\frac{1}{t^\varepsilon}\mathcal{N}(0, 1)$ , et devrait être de plus en plus petit dans la limite  $t \rightarrow \infty$ . Mais la loi de  $\frac{B_t(\omega)}{t^{1/2+\varepsilon}}$  ne donne que des informations à un temps fixé et ne nous renseigne pas sur le comportement des trajectoires qui elles, décrivent justement l'évolution par rapport au temps. Il faut donc chercher une autre idée.

**Technique importante 2.3.1** Notons que si  $\omega$  est tel que  $\frac{B_t(\omega)}{t^{1/2+\varepsilon}}$  ne converge pas vers 0 alors on peut trouver une suite  $t_n(\omega)$  telle que

$$\frac{B_{t_n(\omega)}(\omega)}{t_n(\omega)^{1/2+\varepsilon/2}} \geq 1.$$

### Proposition 2.11 (Récurrence du mouvement brownien)

Soit  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. Alors pour tout  $T \geq 0$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}(\exists s \geq T, B_s = x) = 1.$$

**Preuve.** C'est l'objet de l'exercice 2.9 page 69.  $\square$

Soit  $B$  un mouvement brownien. On note

$$B^*(\omega) := \sup_{t \geq 0} B_t(\omega) \quad \text{et} \quad B_*(\omega) := \inf_{t \geq 0} B_t(\omega).$$

Il n'est pas évident que  $B^*$  et  $B_*$  sont des variables aléatoires car d'après leurs définitions elles sont le supremum et l'infimum d'une famille non-dénombrable

de variables aléatoires. Cependant, la continuité des trajectoires du mouvement brownien permet d'écrire que

$$B^*(\omega) := \sup_{t \geq 0, t \in \mathbb{Q}} B_t(\omega) \quad \text{et} \quad B_*(\omega) := \inf_{t \geq 0, t \in \mathbb{Q}} B_t(\omega) .$$

Or le supremum et l'infimum d'une famille dénombrable de variables aléatoires est une variable aléatoire. Donc,  $B^*$  et  $B_*$  sont bien des variables aléatoires.

**Proposition 2.12** *Soit  $B$  un mouvement brownien, alors :*

$$\mathbb{P} \left( \inf_{t \geq 0} B_t = -\infty \right) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P} \left( \sup_{t \geq 0} B_t = +\infty \right) = 1 .$$

**Preuve.** Ce résultat est établi dans l'exercice 2.9 page 69. □

**Proposition 2.13** *Le mouvement brownien est nulle-part dérivable (à un ensemble  $\mathbb{P}$ -négligeable près).*

**Preuve.** C'est l'objet de l'exercice 2.11 page 70. □

### 2.3.2 Mouvement brownien multi-dimensionnel

**Définition 2.11** *Soit  $\mathbb{F}$  une filtration donnée. Un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  noté  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$  est appelé  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard à  $d$  dimensions ou  $d$ -dimensionnel si et seulement si les composantes  $B_t^k$  de  $B$  sont des  $\mathbb{F}$ -mouvements browniens standard indépendants.*

### 2.3.3 Variation d'ordre $p$

Soit  $t > 0$  un réel donné et  $\Delta := \{t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t\}$  une subdivision de l'intervalle  $[0, t]$ . On appelle module de la subdivision  $\Delta$  et on note  $|\Delta|$  la quantité  $|\Delta| := \sup_i |t_i - t_{i-1}|$ . Pour une fonction  $g$  et un réel  $p \geq 1$  on note

$$V_t^{(p)}(g, \Delta) := \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p . \quad (2.1)$$

**Définition 2.12** Soit  $T \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . On dit que la fonction  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation d'ordre  $p$  finie si pour tout  $0 \leq t \leq T$  :  $\sup_{\Delta} V_t^{(p)}(g, \Delta) < \infty$ . La fonction  $t \mapsto V_t^{(p)}(g) := \overline{\lim}_{|\Delta| \rightarrow 0} V_t^{(p)}(g, \Delta) < \infty$  est appelée variation totale d'ordre  $p$  de  $g$ . Elle est positive et croissante. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t^{(p)}(g) < \infty$ , on dit que  $g$  est de variation d'ordre  $p$  bornée.

Notons que la définition ci-dessus ne dépend pas de la sous-suite utilisée pour la  $\overline{\lim}$ . Dans le reste de ce paragraphe nous allons nous intéresser aux cas

- $p = 1$  : la variation d'ordre 1 d'une fonction  $g$  est appelée variation totale de la fonction  $g$ , et on note  $V(g) := V^{(1)}(g)$ .
- $p = 2$  : la variation d'ordre 2 d'une fonction  $g$  est appelée variation quadratique de la fonction  $g$ .

Soit  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processus stochastique défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Nous pouvons définir pour chaque trajectoire  $t \mapsto X_t(\omega)$  sa variation d'ordre  $p$ .

**Proposition 2.14 (Variation quadratique du mouvement brownien)**

Soit  $B$  un mouvement brownien sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors, pour tout  $t \geq 0$

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ |V_t^{(2)}(B, \Delta) - t|^2 \right] = 0.$$

Ceci peut s'écrire encore  $V_t^{(2)}(B, \Delta) \xrightarrow[|\Delta| \rightarrow 0]{L^2} t$ . On dit que la variation quadratique sur  $[0, t]$  du mouvement brownien existe dans  $L^2$  et  $V_t^{(2)}(B) = t$ .

**Intuition 2.3.1** La variation quadratique somme les carrés des oscillations du mouvement brownien. Lorsque l'intervalle du temps devient de plus en plus petit nous obtenons une somme d'incrémentes indépendants qui convergera donc vers sa moyenne.



**Preuve.** Soit  $\Delta = \{t_0 = 0 \leq \dots \leq t_n = t\}$  une subdivision de l'intervalle  $[0, t]$ , on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ V_t^{(2)}(B, \Delta) \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = t .\end{aligned}$$

Notons  $\xi_i = (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})$ . Les v.a.  $\xi_i$  sont indépendantes et de moyenne nulle. Par ailleurs la loi de  $\xi_i$  est  $(t_i - t_{i-1})(\mathcal{N}(0, 1)^2 - 1)$  donc  $\mathbb{E}[\xi_i^2] = 2(t_i - t_{i-1})^2$  (voir l'exercice 2.2 page 68). Donc

$$\mathbb{E} \left[ |V_t^{(2)}(B, \Delta) - t|^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^2 \right],$$

ce qui, en tenant compte de l'indépendance des variables  $\xi_i$ , permet d'écrire  $\mathbb{E} \left[ |V_t^{(2)}(B, \Delta) - t|^2 \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ |\xi_i|^2 \right]$  ou encore,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ |V_t^{(2)}(B, \Delta) - t|^2 \right] &= 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2|\Delta| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2t|\Delta|\end{aligned}$$

ce qui montre la convergence dans  $L^2$  de  $V_t^{(2)}(B, \Delta)$  vers  $t$  lorsque  $|\Delta|$  tend vers zéro.  $\square$

**Remarque 2.2** *La convergence d'une suite de variables aléatoires dans  $L^2$  implique la convergence de cette suite en probabilité. Par conséquent, pour tout  $\varepsilon > 0$  on a  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \mathbb{P} \left( |V_t^{(2)}(B, \Delta) - t| > \varepsilon \right) = 0$ . Consulter la section A.4 page 189 pour des rappels concernant la convergence des variables aléatoires et les relations entre les différents types de convergence.*

**Proposition 2.15 (Variation totale du mouvement brownien)** *Soit  $B$  un mouvement brownien défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors, pour  $t \geq 0$ , les trajectoires de  $B$  sont, presque sûrement, à variation totale infinie sur  $[0, t]$ .*

**Preuve.** On vient de voir que  $V_t^{(2)}(B, \Delta)$  converge vers  $t$  en probabilité. Or de toute suite qui converge en probabilité on peut extraire une sous-suite qui converge presque sûrement. On considère donc une suite de subdivisions de  $[0, t]$ ,  $\Delta^k = \{t_0^k \leq \dots \leq t_{N^k}^k = t\}$ ,  $k \geq 1$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Delta^k| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} V_t^{(2)}(B, \Delta^k) = t \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Par définition de  $V_t^{(2)}(B, \Delta^k)$ , on a

$$\begin{aligned} V_t^{(2)}(B, \Delta^k) &= \sum_{i=1}^{N^k} |B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N^k} \sup_i \left\{ |B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}| \right\} |B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}| \\ &\leq \sup_{i=1, \dots, N^k} \left\{ |B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}| \right\} V_t^{(1)}(B, \Delta^k). \end{aligned}$$

L'uniforme continuité des trajectoires du mouvement brownien sur l'intervalle  $[0, t]$  implique que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_i \left\{ |B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}| \right\} = 0$  presque sûrement. Donc

$$V_t(B) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{V_t^{(2)}(B, \Delta^k)}{\sup_i \left\{ |B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}| \right\}} = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

ce qui termine la preuve. □

**Remarque 2.3** *Soit  $g$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $[0, t]$  de dérivée  $g'$  bornée. Clairement  $V_t(g) = \int_0^t |g'(s)| ds < \infty$ , ainsi  $g$  est nécessairement de variation finie. La proposition 2.15 nous dit donc que presque sûrement, les trajectoires de  $B$  sur  $[0, t]$  n'admettent pas de dérivée bornée. En réalité, on peut monter un résultat encore plus fort : les trajectoires du mouvement brownien sont nulle-part dérivables, cf. la proposition 2.13 page 39.*

**Remarque 2.4** *La variation totale d'une fonction  $g$  sur l'intervalle de temps  $[0, t]$  est liée à la longueur de la courbe représentative de  $g$ ,  $\mathcal{C}_g$ . Plus précisément, elle mesure la longueur de la projection sur l'axe des ordonnées de la trajectoire parcourue par  $g$  entre l'instant 0 et l'instant  $t$ . La proposition 2.15 nous informe que la longueur du chemin parcouru par un mouvement brownien entre la date 0 et la date  $t$  est presque sûrement infinie !*

Dans le Tableau 2.1 est présenté un résumé des conclusions obtenues jusqu'ici concernant les variations d'ordre 1 et 2 ; en particulier, pour montrer que la variation d'ordre 2 d'une fonction  $C^1$  est nulle, on utilise le même type de majoration que dans la proposition 2.15. La variation d'ordre  $p$  est donc une mesure de la régularité d'une fonction.

Variation/régularité	Variation d'ordre 1	Variation d'ordre 2
fonction $C^1$	$< \infty$	0
mvt. brownien	$\infty$	$< \infty (= t)$

Tableau 2.1 – Variations d'ordre 1 et 2 des objets usuels.

**Définition 2.13** *Un processus  $X$  est dit à variation quadratique finie s'il existe un processus fini  $\langle X \rangle_t$  tel que pour toute suite de divisions  $\Delta^n$  avec  $|\Delta^n| \rightarrow 0$  :*

$$\mathbb{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} V_t^{(2)}(X, \Delta^n) = \langle X \rangle_t.$$

*Il s'agit donc d'une convergence en probabilité. Pour deux processus  $X, Y$  à variation quadratique finie nous notons*

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{\langle X + Y \rangle_t - \langle X \rangle_t - \langle Y \rangle_t}{2}.$$

*Cette quantité est appelée covariation quadratique et  $\langle X, X \rangle_t = \langle X \rangle_t$ .*



**Mise en garde 2.3.3** *La définition précédente n'est pas équivalente à dire que  $\mathbb{P}$  – p.s. la variation quadratique classique  $V_t^{(2)}(X(\cdot, \omega))$  de la fonction  $s \mapsto X(s, \omega)$  est égale à  $\langle X \rangle_t(\omega)$  ; il se peut même que  $\mathbb{P}$  – p.s.  $\omega \in \Omega$  nous ayons  $V_t^{(2)}(X(t, \omega)) = \infty$ , comme c'est d'ailleurs le cas pour le mouvement brownien (voir [15] page 28).*

*Ceci n'est pas en contradiction avec le résultat démontré : effectivement nous avons démontré que  $V_t^{(2)}(B(\cdot, \omega))$  converge en  $L^2$  vers  $t$  pour des divisions  $\Delta$  arbitraires avec  $|\Delta| \rightarrow 0$  ; mais cette convergence n'entraîne pas une convergence ponctuelle donc  $V_t^{(2)}(B(\cdot, \omega))$  ne converge peut-être pas vers  $t$ , voir aussi la remarque A.1 page 189. Par contre on peut extraire une suite de divisions  $\Delta_n$  telle que  $V_t^{(2)}(B(\cdot, \omega), \Delta_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Cependant comme la variation quadratique est la limite supérieure sur toutes les divisions (pas seulement les divisions  $\Delta_n$ ) nous obtenons seulement que*

$$V_t^{(2)}(B(\cdot, \omega)) \geq \overline{\lim}_{|\Delta| \rightarrow 0} V_t^{(2)}(B(\cdot, \omega), \Delta) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} V_t^{(2)}(B(\cdot, \omega), \Delta_n) = t$$

*donc nous n'aurons pas forcément  $V_t^{(2)}(B(\cdot, \omega)) = t$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .*

Le résultat suivant est dû à Paul Lévy. Il est intéressant de le comparer à la proposition 2.8 page 36.

**Proposition 2.16 (Caractérisation du mouvement brownien)** *Soit  $M$  une martingale continue avec  $M_0 = 0$  telle que  $\langle M \rangle_t = t$ . Alors  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien.*

**Preuve.** Voir exercice 2.25 page 76. □

## 2.4 Intégrale d'Itô

Dans cette section, on donne un sens à «  $\int_0^t f(s)dB_s$  » où  $f$  est une fonction vérifiant certaines propriétés et  $B$  est un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard

défini sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ . Au paragraphe 2.4.1 on explique comment et pour quelles fonctions déterministes  $f$  et  $g$  l'intégrale de Stieltjes «  $\int_0^t f(s)dg(s)$  » est définie. Nous verrons que cela requiert des conditions sur  $g$  que les trajectoires du mouvement brownien ne vérifient pas. Ainsi, cette première approche, celle qui semble la plus naturelle, est sans issue. Cela nous obligera à développer à partir du paragraphe 2.4.2 une approche différente pour construire l'intégrale d'Itô.

### 2.4.1 Fonction à variation bornée et intégrale de Stieltjes

**Proposition 2.17** *Soit  $\phi$  une fonction continue et croissante. On peut associer à  $\phi$  une mesure  $\mu_\phi$  définie sur l'ensemble des boréliens de  $\mathbb{R}_+$  en posant :  $\mu_\phi([0, t]) = \phi(t) - \phi(0)$ .*

**Preuve.** Résultat admis. Le lecteur peut se référer à [2]. □

**Proposition 2.18** *Soit  $g$  une fonction continue à variation (d'ordre 1) finie. Alors, il existe deux fonctions croissantes et continues  $g_+$  et  $g_-$  telles que :  $g(t) = g_+(t) - g_-(t)$ .*

**Preuve.** Il suffit de prendre  $g_+ = (V_t(g) + g)/2$  et  $g_- = (V_t(g) - g)/2$ . □

Nous voyons donc que si  $g$  est continue et à variation finie nous pouvons définir pour toute fonction mesurable et bornée  $f$  les intégrales

$$\int_0^t f(s)dg_+(s) := \int_0^t f(s)d\mu_{g_+}(s) \quad \text{et} \quad \int_0^t f(s)dg_-(s) := \int_0^t f(s)d\mu_{g_-}(s).$$

Ainsi, pour la fonction continue et à variation finie  $g$ , l'intégrale de Stieltjes de  $f$  par rapport aux variations de  $g$  est définie comme étant

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s)dg(s) &:= \int_0^t f(s)dg_+(s) - \int_0^t f(s)dg_-(s) \\ &:= \int_0^t f(s)d\mu_{g_+}(s) - \int_0^t f(s)d\mu_{g_-}(s). \end{aligned}$$

On vérifie de plus que, pour  $f$  assez régulière,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s)dg(s) &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i f(t_i) \{g(t_i) - g(t_{i-1})\} \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i f(t_{i-1}) \{g(t_i) - g(t_{i-1})\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Soit  $A := \{A_t, t \geq 0\}$  et  $H := \{H_t, t \geq 0\}$  deux processus stochastiques définis sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On suppose que les trajectoires de  $A$  sont à variations finies. On suppose de plus que  $H$  est mesurable et borné. Dans ce cas, on peut clairement définir pour chaque  $\omega$  l'intégrale

$$\int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega).$$

**Intuition 2.4.1** Si  $A$  est un mouvement brownien alors ses trajectoires ont une variation totale infinie sur  $[0, t]$ . Il n'est donc pas possible de définir l'intégrale  $\int_0^t H_s dB_s$  « trajectoire par trajectoire » comme une intégrale de Stieltjes. Cependant le fait que la variation quadratique du mouvement brownien existe dans  $L^2$  nous incite à travailler dans cet espace.

**Pour en savoir plus 2.4.1** D'une manière générale, l'intégrale  $\int f dg$  peut être définie pour des fonctions  $f, g$  ayant respectivement des variations d'ordre  $p$  et  $q$  finies avec  $1/p + 1/q > 1$  (voir [7, 8, 9, 16]).

## 2.4.2 Intégration des processus élémentaires

Dans toute la suite, on fixe un horizon de temps  $T > 0$ . On s'intéressera aux trajectoires des processus considérés seulement sur  $[0, T]$ .

**Définition 2.14 (Processus élémentaire)** Un processus  $H := \{H_t, t \geq 0\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et défini sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$  est appelé

élémentaire s'il peut s'écrire comme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^n \theta_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}, \forall t \in ]0, T], \quad (2.3)$$

où  $\{t_0 < \dots < t_n = T\}$  est une subdivision de  $[0, T]$  et  $(\theta_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une suite de variables aléatoires telles que  $\theta_i$  est  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et la v.a.  $\sup_i |\theta_i|$  est bornée. Dans toute la suite on note  $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$  l'ensemble des processus élémentaires définis sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ .

On commence par définir l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires.

**Définition 2.15 (Intégrale stochastique I)** Soit  $H \in \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$  un processus élémentaire et  $\theta_i$  les variables qui interviennent dans (2.3). L'intégrale stochastique de  $H$  contre le mouvement brownien entre la date 0 et la date  $t \leq T$ , notée  $\int_0^t H_u dB_u$  est définie par

$$\int_0^t H_u dB_u := \sum_{i=1}^n \theta_i (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}})$$

Pour  $0 \leq s \leq t \leq T$ , on pose

$$\int_s^t H_u dB_u := \int_0^t H_u dB_u - \int_0^s H_u dB_u$$

.

**Remarque 2.5** Notons que si  $k$  est l'entier tel que  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$ , alors

$$\begin{aligned} \int_0^t H_u dB_u &= \sum_{i=1}^k \theta_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \theta_{k+1} (B_t - B_{t_k}) \\ &= \sum_{i=1}^k H_{t_i} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + H_t (B_t - B_{t_k}). \end{aligned}$$

En particulier :  $\int_0^t 1 dB_u = B_t$ .

**Intuition 2.4.2** Comparer cette définition avec l'illustration dans la Figure 1.1, page 3 (voir aussi l'Intuition 1.1.1). L'intégrale ainsi définie permettra de calculer le gain de toute stratégie élémentaire.

**Proposition 2.19** *L'intégrale stochastique du processus élémentaire  $H$  contre le mouvement brownien vérifie :*

1. *Le processus  $\{\int_0^t H_u dB_u, 0 \leq t \leq T\}$  est  $\mathbb{F}$ -adapté et à trajectoires continues ;*
2. *Le processus  $\{\int_0^t H_u dB_u, 0 \leq t \leq T\}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale qui démarre à zéro ;*
3. *Le processus  $\{\int_0^t H_u dB_u, 0 \leq t \leq T\}$  vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t H_u dB_u \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t H_u^2 du \right] ;$$

4. *Si  $K$  est un processus élémentaire, alors*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t H_u dB_u \right) \left( \int_s^\tau K_u dB_u \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^{\min(t, \tau)} H_u K_u du \middle| \mathcal{F}_s \right] ;$$

5. *Le processus donné par  $\left\{ \left( \int_0^t H_u dB_u \right)^2 - \int_0^t H_u^2 du, 0 \leq t \leq T \right\}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale qui démarre à zéro.*

**Preuve.** Le point 1 : par définition,  $\int_0^t H_u dB_u$  est la somme de variables aléatoires qui sont toutes  $\mathcal{F}_t$ -mesurables, donc c'est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. La continuité des trajectoires du mouvement brownien permet aussi de vérifier que le processus  $\left( \int_0^t H_u dB_u \right)_t$  est à trajectoires continues.

Le point 2 : chacune des variables aléatoires  $\theta_i$  est de carré intégrable tout comme les accroissements du mouvement brownien. Alors, d'après de l'inégalité de Cauchy-Schwartz,  $\mathbb{E}[|\theta_i(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t})|] < \infty$  pour tout  $i$ , ce qui permet de conclure que pour tout  $t \leq T$  la variable aléatoire  $\int_0^t H_u dB_u$  est intégrable.



Soit  $0 < s \leq t$  et  $k_s$  l'unique entier tel que  $s \in ]t_{k_s}, t_{k_s+1}]$ . On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_0^t H_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \theta_i (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}}) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{k_s} \underbrace{\theta_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})}_{\mathcal{F}_s\text{-mesurables}} \middle| \mathcal{F}_s \right] + \mathbb{E} \left[ \theta_{k_s+1} (B_{t \wedge t_{k_s+1}} - B_{t_{k_s}}) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{i=k_s+2}^n \mathbb{E} \left[ \underbrace{\theta_i (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}})}_{\in \mathcal{F}_{t_{i-1}}} \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k_s} \theta_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \theta_{k_s+1} \mathbb{E} \left[ (B_{t \wedge t_{k_s+1}} - B_{t_{k_s}}) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{i=k_s+2}^n \underbrace{\theta_i \mathbb{E} [(B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}]}_{=0} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k_s} \theta_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \theta_{k_s+1} (B_s - B_{t_{k_s}}) = \int_0^s H_u dB_u.
\end{aligned}$$

Le point 3 : soit  $t \in [0, T]$  ; en posant  $I = \mathbb{E}[(\int_0^t H_u dB_u)^2]$  on a

$$I = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \theta_i (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}}) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \theta_i^2 (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}})^2 \right] + A$$

où

$$\begin{aligned}
A &:= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left[ \theta_i \theta_j (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}}) (B_{t \wedge t_j} - B_{t \wedge t_{j-1}}) \right] \\
&= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \underbrace{\theta_i (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}}) \theta_j (B_{t \wedge t_j} - B_{t \wedge t_{j-1}})}_{\mathcal{F}_{t_{j-1}} \text{ mesurable}} \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \theta_i (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}}) \theta_j \underbrace{\mathbb{E} [(B_{t \wedge t_j} - B_{t \wedge t_{j-1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}}]}_{=0, \text{ car } (B_{u \wedge t})_{u \geq 0} \text{ martingale,}} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t H_u dB_u \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \theta_i^2 \mathbb{E} \left[ (B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \theta_i^2 (t \wedge t_i - t \wedge t_{i-1}) \right] = \mathbb{E} \left( \int_0^t H_u^2 du \right).\end{aligned}$$

Le point 4 : Soit d'abord le cas  $t = \tau$  et  $K = H$ . Si  $s \in ]t_k, t_{k+1}]$  alors :

$$\int_s^t H_u dB_u := \sum_{i=k+1}^n \theta_i (B_{t \wedge \bar{t}_i} - B_{t \wedge \bar{t}_{i-1}}),$$

avec  $\bar{t}_k := s$ ,  $\bar{t}_\ell := t_\ell$  pour  $\ell > k$ . Comme précédemment :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t H_u dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \sum_{i=k+1}^n \theta_i^2 (B_{t \wedge \bar{t}_i} - B_{t \wedge \bar{t}_{i-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=k+1}^n \theta_i^2 (t \wedge \bar{t}_i - t \wedge \bar{t}_{i-1}) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^t H_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right].\end{aligned}$$

Pour la suite : traiter d'abord le cas  $\tau = t$  mais  $K \neq H$  et utiliser l'identité polaire pour un produit scalaire

$$2\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(X+Y)^2|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[X^2 + Y^2|\mathcal{F}_s].$$

Pour  $t < \tau$  conditionner d'abord par  $\mathcal{F}_t$ .

Le point 5 : c'est une conséquence, après calculs, du point précédent.  $\square$

**Proposition 2.20 (Variation quadratique I)** *Soit  $H$  un processus élémentaire. La variation quadratique de la martingale  $\left( \int_0^t H_u dB_u \right)_{t \geq 0}$  est donnée par*

$$\left\langle \int_0^\cdot H_u dB_u \right\rangle_t = \int_0^t H_u^2 du. \quad (2.4)$$

*Si  $K$  est un processus élémentaire, la covariation quadratique entre les deux*

martingales  $\left(\int_0^t H_u dB_u\right)_t$  et  $\left(\int_0^t K_u dB_u\right)_t$  est donnée par

$$\left\langle \int_0^\cdot H_u dB_u, \int_0^\cdot K_u dB_u \right\rangle_t = \int_0^t H_u K_u du. \quad (2.5)$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que la variation quadratique d'un processus élémentaire  $H$  est donnée par (2.4), (2.5) découlant alors de la définition même de la covariation quadratique. Soit  $\Delta = \{t_0^\Delta = 0, \dots, t_N^\Delta = t\}$  une subdivision de l'intervalle  $[0, t]$ . Nous supposons que les points  $t_k$  (qui interviennent dans la définition du processus élémentaire  $H$ ) font partie de la division  $\Delta$ ; alors

$$\int_0^{t_k^\Delta} H_u dB_u - \int_0^{t_{k-1}^\Delta} H_u dB_u = H_{t_k^\Delta} (B_{t_k^\Delta} - B_{t_{k-1}^\Delta}).$$

Donc

$$V_t^{(2)} \left( \int_0^\cdot H_u dB_u, \Delta \right) = \sum_{k=1}^N H_{t_k^\Delta}^2 (B_{t_k^\Delta} - B_{t_{k-1}^\Delta})^2.$$

Nous obtenons alors, en posant  $\Delta t_k := t_k^\Delta - t_{k-1}^\Delta$  et  $\Delta B_k := B_{t_k^\Delta} - B_{t_{k-1}^\Delta}$  :

$$\begin{aligned} err(\Delta) &:= \mathbb{E} \left[ \left( V_t^{(2)} \left( \int_0^\cdot H_u dB_u, \Delta \right) - \int_0^t H_u^2 du \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^N H_{t_k^\Delta}^2 (\Delta B_k)^2 - H_{t_k^\Delta}^2 \Delta t_k \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k \neq q} f_{k,q}^\Delta + \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[ \left( H_{t_k^\Delta}^2 (\Delta B_k)^2 - H_{t_k^\Delta}^2 \Delta t_k \right)^2 \right] \\ \text{où } f_{k,q}^\Delta &= \mathbb{E} \left[ \left( H_{t_k^\Delta}^2 (\Delta B_k)^2 - H_{t_k^\Delta}^2 \Delta t_k \right) \left( H_{t_q^\Delta}^2 (\Delta B_q)^2 - H_{t_q^\Delta}^2 \Delta t_q \right) \right]. \end{aligned}$$

Notons que si  $k < q$  alors

$$\begin{aligned} f_{k,q}^\Delta &= \mathbb{E} \left[ \left( H_{t_k^\Delta}^2 (\Delta B_k)^2 - H_{t_k^\Delta}^2 \Delta t_k \right) \mathbb{E} \left[ \left( H_{t_q^\Delta}^2 (\Delta B_q)^2 - H_{t_q^\Delta}^2 \Delta t_q \right) | \mathcal{F}_{t_{q-1}^\Delta} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( H_{t_k^\Delta}^2 (\Delta B_k)^2 - H_{t_k^\Delta}^2 \Delta t_k \right) \left( H_{t_q^\Delta}^2 \underbrace{\mathbb{E} [(\Delta B_q)^2]}_{=\Delta t_q} - H_{t_q^\Delta}^2 \Delta t_q \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} err(\Delta) &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[ \left( H_{t_k^\Delta}^2 (\Delta B_k)^2 - H_{t_k^\Delta}^2 \Delta t_k \right)^2 \right] \leq \sum_{k=1}^N 2(\Delta t_k)^2 C^4 (1 + \mathbb{E}[B_1^4]) \\ &\leq 8tC^4 |\Delta|, \end{aligned}$$

où  $C$  est un réel strictement positif tel que le processus élémentaire  $H$  soit borné par  $C$  :  $\sup_k |H_{t_k}| < C$ . En conclusion  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} err(\Delta) = 0$ .

D'une manière plus générale soit  $\tilde{\Delta}$  la division obtenue en ajoutant à  $\Delta$  les points  $t_k$ ; les quantités  $V_t^{(2)}(\int_0^\cdot H_u dB_u, \Delta)$  et  $V_t^{(2)}(\int_0^\cdot H_u dB_u, \tilde{\Delta})$  diffèrent tout au plus localement autour de chaque point  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ; un calcul direct montre que

$$\mathbb{E} \left[ V_t^{(2)} \left( \int_0^\cdot H_u dB_u, \Delta \right) - V_t^{(2)} \left( \int_0^\cdot H_u dB_u, \tilde{\Delta} \right) \right]^2$$

est majorée par  $(3n)^2 C^4 |\Delta|^2$  donc tend vers zéro lorsque  $|\Delta| \rightarrow 0$ .  $\square$

### 2.4.3 Intégration des processus de $\mathcal{L}^2([0, T])$

On considère l'ensemble  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F}; [0, T])$  noté plus simplement  $\mathcal{L}^2([0, T])$  défini par :

$$\mathcal{L}^2([0, T]) = \left\{ \{H_t, 0 \leq t \leq T\}, \text{ processus } \mathbb{F}\text{-adapté} \mid \mathbb{E} \left[ \int_0^T H_u^2 du \right] < \infty \right\}.$$

On désigne par  $\mathcal{M}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F}; [0, T])$ , ou plus simplement  $\mathcal{M}^2([0, T])$ , l'ensemble des martingales de carré intégrable :

$$\mathcal{M}^2([0, T]) = \left\{ \{M_t, 0 \leq t \leq T\} \text{ martingale} \mid \forall t \in [0, T], \mathbb{E}[M_t^2] < \infty \right\}.$$

**Proposition 2.21** *La fonction :  $H \mapsto \sqrt{\mathbb{E} \left[ \int_0^T H_u^2 du \right]}$  définit une norme sur  $\mathcal{L}^2([0, T])$ . Elle sera notée  $\|H\|_{\mathcal{L}^2}$ .*

**Lemme 2.1** *L'ensemble des processus élémentaires  $\mathcal{E}$  est dense dans  $\mathcal{L}^2([0, T])$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ . C'est-à-dire, pour tout processus  $H \in \mathcal{L}^2([0, T])$  il existe une suite de processus élémentaires  $(H^n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}$  telle que :*

$$\|H - H^n\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (H_u - H_u^n)^2 du \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Preuve.** Résultat admis. Le lecteur peut se référer à [6] ou [15].  $\square$

**Théorème 2.3 (Intégrale stochastique II)** *Il existe une unique application linéaire  $\mathcal{I}$  qui à tout processus  $H \in \mathcal{L}^2([0, T])$  associe une martingale continue de carré intégrable  $\mathcal{I}[H] \in \mathcal{M}^2([0, T])$  vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *L'application  $\mathcal{I}$  coïncide avec l'intégrale stochastique des processus élémentaires :*

$$\mathcal{I}[H^e]_{\cdot} = \int_0^{\cdot} H_u^e dB_u \quad \forall H^e \in \mathcal{E}.$$

2. *L'application  $\mathcal{I}$  vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E} [\mathcal{I}[H]_t^2] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t H_s^2 ds \right] \quad \forall H \in \mathcal{L}^2([0, T]), \forall t \in [0, T].$$

Pour  $H \in \mathcal{L}^2([0, T])$ , le processus  $\mathcal{I}[H]$  est appelé *intégrale stochastique de  $H$*  par rapport au mouvement brownien  $B$ . On note :  $\int_0^t H_s dB_s := \mathcal{I}[H]_t$ .

**Preuve.** Résultat admis. Le lecteur peut se référer à [6] ou [15].  $\square$

**Remarque 2.6** *L'isométrie nous renseigne que la norme de  $\mathcal{I}[\cdot]$  en tant qu'application linéaire de  $\mathcal{L}^2$  dans  $\mathcal{M}^2$  est égale à 1. Donc en particulier il s'agit d'une application continue et par exemple avec les notations du lemme 2.1 nous aurons que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}[H^n] = \mathcal{I}[H].$$

*Ceci est utile pour calculer  $\mathcal{I}[H]$ .*

Considérons le cas particulier de l'intégrale de Wiener :

**Proposition 2.22 (Intégrale de Wiener)** *Soit  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dans  $L^2([0, T], dx)$ , c'est-à-dire une fonction déterministe. Le processus  $\{\int_0^t f(s)dB_s, t \in [0, T]\}$  est appelé intégrale de Wiener et vérifie*

$$\int_0^t f(s)dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t f^2(s)ds\right).$$

**Preuve.** Voir exercice 2.19, page 73. □

#### 2.4.4 Intégration des processus de $\mathcal{L}([0, T])$

On considère l'ensemble  $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F}; [0, T])$  noté plus simplement  $\mathcal{L}([0, T])$  défini par :

$$\mathcal{L}([0, T]) := \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus } \mathbb{F}\text{-adapté} \left| \left[ \int_0^T H_u^2 du \right] < \infty \text{ } \mathbb{P} - \text{p.s.} \right. \right\}.$$

**Théorème 2.4 (Intégrale stochastique III)** *Il existe une unique application linéaire  $\mathcal{I}$  qui à tout processus  $H \in \mathcal{L}([0, T])$  associe un processus  $\mathcal{I}[H]$  à trajectoires continues sur  $[0, T]$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *L'application  $\mathcal{I}$  coïncide avec l'intégrale stochastique des processus élémentaires :*

$$\mathcal{I}[H^e] = \int_0^\cdot H_u^e dB_u, \quad \forall H^e \in \mathcal{E};$$

2. *L'application  $\mathcal{I}$  vérifie la propriété de continuité : si  $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de processus élémentaires telle que  $\int_0^T (H_u^n)^2 du \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  en probabilité, alors*

$$\sup_{t \in [0, T]} (\mathcal{I}(H^n)_t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ en probabilité.}$$

Pour  $H \in \mathcal{L}([0, T])$ , le processus  $\mathcal{I}[H]$  est appelé intégrale stochastique ou encore intégrale d'Itô de  $H$  par rapport au mouvement brownien  $B$ . On note  $\int_0^t H_s dB_s := \mathcal{I}[H]_t$ .

Par ailleurs si  $H$  est continue et localement bornée et  $\Delta^n$  est une suite de subdivisions de  $[0, t]$  avec  $|\Delta^n| \rightarrow 0$  alors (propriété de sommes de Riemann-Itô) :

$$\mathbb{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_k \in \Delta^n} H_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) = \int_0^t H_s dB_s.$$

**Preuve.** Résultat admis, consulter [15, 6] pour plus de détails. La propriété des sommes de Riemann découle de la propriété de continuité de l'intégrale stochastique.  $\square$



**Mise en garde 2.4.1** Soit  $H$  un processus arbitraire de  $\mathcal{L}([0, T])$ . Le théorème 2.4 ne dit plus que son intégrale  $\mathcal{I}[H]$  est nécessairement une martingale. Cette propriété est seulement assurée si  $H \in \mathcal{L}^2([0, T])$ .

**Pour en savoir plus 2.4.2** Si nous remplaçons le mouvement brownien par une martingale continue générale la plupart des démonstrations précédentes se généralisent avec adaptations immédiates (sous réserve de conditions techniques). Il est ainsi possible de définir une intégrale par rapport à des martingales continues ; encore mieux, l'intégrale stochastique peut être définie aussi par rapport à des semi-martingales i.e., des processus qui sont la somme d'une martingale (locale) et d'un processus à variation bornée (localement).

Quelques propriétés nouvelles :

1. associativité :  $\int_0^t H_s d(\int_0^s K_u dX_u) = \int_0^t H_s K_s dX_s$ .
2.  $\langle \int_0^\cdot H_s dX_s \rangle_t = \int_0^t H_u^2 d\langle X \rangle_u$ .

## 2.5 Calcul d'Itô

Considérons un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard  $B$  défini sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$  et un horizon de temps  $[0, T]$  où  $T > 0$ .

### 2.5.1 Processus d'Itô

**Définition 2.16 (Processus d'Itô)** *Un processus stochastique  $X$  est appelé processus d'Itô s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \int_0^t H_u dB_u$$

où  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $\{\alpha_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  et  $\{H_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  sont deux processus  $\mathbb{F}$ -adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^T |\alpha_u| du < \infty \quad \mathbb{P} - p.s. \quad \text{et} \quad \int_0^T |H_u|^2 du < \infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

On note également sous forme différentielle :  $dX_t = \alpha_t dt + H_t dB_t$ .

**Remarque 2.7** *La forme différentielle constitue juste une notation pour  $\int_a^b dX_t = X_b - X_a$ . Le mouvement brownien n'est pas différentiable pour autant (ce que laisserait penser le cas particulier  $\alpha = 0, H = 1$ !).*

Dorénavant on notera  $\mathfrak{I}$  l'ensemble des processus d'Itô et  $\mathfrak{I}^2$  le sous-ensemble des processus d'Itô,  $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \int_0^t H_u dB_u \in \mathfrak{I}$  tels que :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\alpha_u|^2 du \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^T |H_u|^2 du \right] < \infty .$$

**Proposition 2.23** *La décomposition en processus d'Itô des éléments de  $\mathfrak{I}^2$  est unique (à une modification près).*

**Preuve.** Considérons deux décompositions pour un même processus d'Itô

$$dX_t = \alpha_t^1 dt + H_t^1 dB_t = \alpha_t^2 dt + H_t^2 dB_t.$$



Alors pour  $\alpha_u = \alpha_u^1 - \alpha_u^2$ ,  $H_u = H_u^2 - H_u^1$  nous avons  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\alpha_u|^2 du \right] < \infty$ ,  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |H_u|^2 du \right] < \infty$  et par ailleurs :

$$\int_0^t \alpha_u du = \int_0^t H_u dB_u, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

Nous savons (après calculs) que  $\mathbb{E} \langle \int_0^\cdot H_u dB_u \rangle_T = \mathbb{E} \left[ \int_0^T |H_u|^2 du \right]$ .

Soit  $\Delta : t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$  une sub-division de  $[0, T]$ . Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} \left[ V^{(2)} \left( \int_0^\cdot \alpha_u du, \Delta \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_u du \right)^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \left( (t_{k+1} - t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_u^2 du \right) \right] \\ &\leq |\Delta| \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_u^2 du \right] = |\Delta| \mathbb{E} \left[ \int_0^T \alpha_u^2 du \right] \xrightarrow{|\Delta| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{E} \langle \int_0^\cdot \alpha_u du \rangle_T = 0$  et donc en utilisant (2.6)  $\mathbb{E} \langle \int_0^\cdot H_u dB_u \rangle_T = 0$  aussi, ce qui entraîne  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |H_u|^2 du \right] = 0$  donc  $H_u$  est identiquement nul donc  $\alpha_u$  l'est aussi. Par conséquent  $\alpha^1 = \alpha^2$ ,  $H^1 = H^2$ .  $\square$

**Proposition 2.24** Soit  $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \int_0^t H_u dB_u$  un processus d'Itô appartenant au sous ensemble  $\mathfrak{I}^2$ . Alors,  $X$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale si et seulement si le processus  $\alpha$  est presque sûrement nul.

**Proposition 2.25 (Variation quadratique d'un processus d'Itô)** On a  $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u^X du + \int_0^t H_u^X dB_u \in \mathfrak{I}^2$  et  $Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_u^Y du + \int_0^t H_u^Y dB_u \in \mathfrak{I}^2$  deux processus d'Itô. Alors

1. Variation quadratique de  $X$  :

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t |H_u^X|^2 du;$$

2. La covariation quadratique de  $X$  et  $Y$  est donnée par :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_u^X H_u^Y du.$$

**Preuve.** Pour le premier point il faut considérer une division de taille convergeant vers zéro et majorer la partie  $\alpha$  par la taille de la division, comme dans la démonstration de la proposition 2.23 (le cas  $\alpha = 0$  peut être traité en premier si besoin). Pour les termes croisés majorer par Cauchy-Schwartz. Le deuxième point est une conséquence immédiate du premier et de la définition de la covariation quadratique.  $\square$

### 2.5.2 Formule d'Itô

**Intuition 2.5.1** *L'exercice 2.14 page 71 montre que l'on a l'égalité suivante  $\int_0^T 2B_s dB_s = B_T^2 - T$  que l'on peut aussi écrire en forme différentielle :  $dB_s^2 = 2B_s dB_s + ds$ . Nous voyons donc que la formule de dérivation composée « habituelle »  $df(x) = f'(x)dx$  ne s'applique pas à  $f(x) = x^2$  et  $x = B_s$  car le terme  $-T$  apparaît. Regardons cela de plus près : l'incrément infinitésimal entre  $t$  et  $t + \Delta t$  d'un processus d'Itô est de l'ordre  $\alpha_t \Delta t$  pour la partie continue et  $H_t \sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1)$  pour la partie brownienne. Pour  $\Delta t$  petit c'est clairement la partie brownienne qui domine. Voir aussi la figure 2.1. Faisons un petit calcul **formel** pour une fonction  $f(x, y)$  et  $x = t$ ,  $y = \sqrt{t}$  dans la limite  $t$  petit :*

$$\begin{aligned} f(t, \sqrt{t}) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\sqrt{t} + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} t \sqrt{t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sqrt{t}^2 + o(t^2 + \sqrt{t}^2). \end{aligned}$$

*Pour prendre en compte tous les termes d'ordre inférieur ou égal à  $t$  il faut nécessairement inclure le terme  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sqrt{t}^2$ , c'est-à-dire écrire :*

$$f(t, \sqrt{t}) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\sqrt{t} + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} t + o(t).$$

*C'est ce terme additionnel qui constitue la nouveauté et doit être pris en compte. Il provient de la non-dérivabilité du mouvement brownien qui entraîne par ailleurs la non-différentiabilité de  $t \mapsto f(t, \sqrt{t})$  en zéro et donc la présence d'un terme d'ordre  $\sqrt{t}$  et des termes  $\sqrt{t}^2$ .*

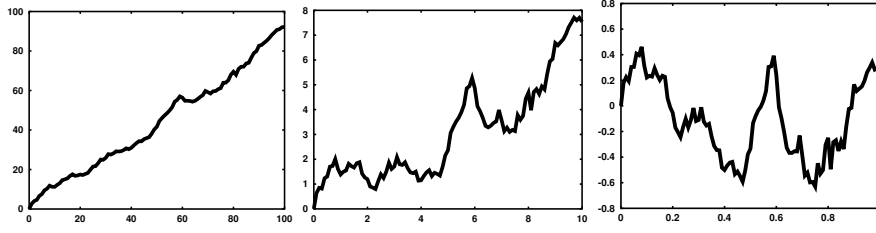


FIGURE 2.1 – Illustration du processus d'Itô  $t + B_t$  sur  $[0, T]$  aux différentes échelles en temps : à gauche  $T = 100$ , milieu :  $T = 10$ , à droite :  $T = 1$ . Nous constatons qu'au fur et à mesure que l'on zoome, la partie tendance  $t$  s'efface au profit de la partie oscillante  $B_t$ .

**Théorème 2.5 (formule d'Itô)** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  (c'est-à-dire dérivable une fois en temps avec la dérivée continue et deux fois en espace avec dérivée seconde continue). Soit  $X \in \mathfrak{I}$  un processus d'Itô  $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \int_0^t H_u dB_u$ . Alors, le processus  $Y_t = f(t, X_t) \in \mathfrak{I}$  et

$$\begin{aligned}
 f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, X_u) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) dX_u \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_u) d\langle X \rangle_u \\
 &= f(0, X_0) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_u \frac{\partial f}{\partial x} + H_u^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} (u, X_u) du \\
 &\quad + \int_0^t H_u \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) dB_u,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ou encore, en formulation différentielle,

$$df(t, X_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial x} + H_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} (t, X_t) dt + H_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dB_t. \tag{2.8}$$

**Preuve.** Commençons par montrer que le membre de droite de (2.7) est un élément de  $\mathfrak{I}$ . Puisque  $f$  est une fonction  $C^{1,2}$  pour tout  $\omega \in \Omega$  l'application

$$u \in [0, T] \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(u, X(\omega, u))$$

est une fonction continue sur un intervalle borné donc bornée, donc intégrable. Par ailleurs un raisonnement analogue pour  $u \in [0, T] \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u, X(\omega, u))$  conjointement avec l'hypothèse  $X \in \mathfrak{I}$  qui implique  $\mathbb{P}$ -p.s.  $\int_0^T |\alpha_u| du < \infty$  nous permet de conclure que  $\mathbb{P}$ -p.s.  $\int_0^T |\frac{\partial f}{\partial x}(u, X(\omega, u)) \alpha_u| du < \infty$ . Les termes restants  $H_u^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_u) du$  et  $H_u \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) dB_u$  se traitent d'une manière similaire : le membre de droite de (2.7) est un élément de  $\mathfrak{I}$ .

Nous allons considérer le reste de la preuve seulement pour un cas particulier et renvoyons aux références (e.g., [15]) pour les détails : supposons  $X_u = B_u$  et que la fonction  $f$  s'écrit sous la forme  $f(t, X) = g(X)$  avec  $g$  fonction de classe  $C^2$  avec  $g, g'$  et  $g''$  bornées. Les processus étant continus il suffit de prouver pour tout  $t > 0$  :

$$g(B_t) \stackrel{\mathbb{P}\text{-p.s.}}{=} g(B_0) + \int_0^t g'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(B_s) ds. \quad (2.9)$$

Considérons une division  $t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_k = k\Delta t < \dots < t = N\Delta t$  de  $[0, t]$ . Alors

$$\begin{aligned} g(B_t) - g(B_0) &= \sum_{k=1}^N (g(B_{t_k}) - g(B_{t_{k-1}})) \\ &= \sum_{k=1}^N \left( g'(B_{t_{k-1}}) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2} g''(\xi_k) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right). \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière relation nous avons appliqué la formule de Taylor à l'ordre 2 avec  $\xi_k(\omega) = \lambda_k(\omega) B_{t_{k-1}}(\omega) + (1 - \lambda_k(\omega)) B_{t_k}(\omega)$  où  $\lambda_k$  une fonction dépendant de  $B_{t_{k-1}}$  et  $B_{t_k}$  donc  $\lambda_k(\omega)$  et  $\xi_k$  sont des v.a.  $\mathcal{F}_{t_k}$  mesurables. Le terme  $\sum_{k=1}^N g'(B_{t_{k-1}}) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$  converge, d'après le théorème 2.4 page 54, en probabilité vers  $\int_0^t g'(B_u) dB_u$ . Nous allons montrer que le terme  $\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} g''(\xi_k) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2$  converge vers la même limite que le terme  $\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} g''(B_{t_{k-1}}) (t_k - t_{k-1})$  dont nous savons qu'il converge vers  $\int_0^t \frac{1}{2} g''(B_u) du$ . Il reste donc seulement à montrer que la limite de

$$\sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{2} g''(\xi_k) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - \frac{1}{2} g''(B_{t_{k-1}}) (t_k - t_{k-1}) \right)$$

est nulle. Écrivons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left( g''(\xi_k) (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - g''(B_{t_{k-1}}) (t_k - t_{k-1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left( [g''(\xi_k) - g''(B_{t_{k-1}})] (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right. \\ & \quad \left. + g''(B_{t_{k-1}}) [(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})] \right). \end{aligned}$$

Le deuxième terme se majore à cause des bornes sur  $g''$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^N g''(B_{t_{k-1}}) [(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})] \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left| g''(B_{t_{k-1}}) [(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})] \right|^2 + (\text{termes croisés nuls}) \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |g''(x)|^2 \sum_{k=1}^N \text{Var} [(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2] \\ &= \max_{x \in \mathbb{R}} |g''(x)|^2 \sum_{k=1}^N 2(\Delta t)^2 = 2 \max_{x \in \mathbb{R}} |g''(x)|^2 \frac{t^2}{N} \end{aligned}$$

et converge vers 0 pour  $N \rightarrow \infty$ . Donc

$$\left\| \sum_{k=1}^N g''(B_{t_{k-1}}) [(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})] \right\|_{L^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (2.10)$$

En particulier la convergence est aussi dans  $L^1$ . Pour le terme restant nous écrivons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^N [g''(\xi_k) - g''(B_{t_{k-1}})] (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \left( \sup_{k=1, \dots, N} |g''(\xi_k) - g''(B_{t_{k-1}})| \right) \left( \sum_{k=1}^N (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right) \right] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left[ \sup_{k=1, \dots, N} |g''(\xi_k) - g''(B_{t_{k-1}})| \right]^2} \sqrt{\mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^N (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right]^2}. \end{aligned}$$

Pour rappel  $|\xi_k - B_{t_{k-1}}| \leq |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|$ ; par continuité de  $g''$  et uniforme continuité de  $B_t$  le terme  $\left( \mathbb{E} \left[ \sup_{k=1, \dots, N} |g''(\xi_k) - g''(B_{t_{k-1}})| \right]^2 \right)^{1/2}$  converge vers 0 donc son espérance aussi (par convergence dominée car  $g''$  est bornée); le deuxième converge vers la variation quadratique du brownien, i.e.,  $t$ . Nous obtenons donc :

$$\left\| \sum_{k=1}^N [g''(\xi_k) - g''(B_{t_{k-1}})] (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right\|_{L^1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (2.11)$$

Il suffit de rappeler maintenant que la convergence  $L^1$  implique celle en probabilité pour conclure.  $\square$

Donnons quelques exemples d'utilisation de la formule d'Itô :

1. Soit  $X_t$  un processus d'Itô et  $f(t, x) = x^2$ ; par Itô nous obtenons :

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + d\langle X \rangle_t;$$

2. Soit maintenant  $a \in \mathbb{R}$ ; alors

$$\begin{aligned} d(e^{at} \sin(B_t)) &= ae^{at} \sin(B_t) dt + (e^{at} \cos(B_t)) dB_t \\ &\quad - \frac{1}{2} (e^{at} \sin(B_t)) dt; \end{aligned}$$

3. Soit  $r \geq 0$ , le processus d'Itô  $X_t$  d'équation  $dX_t = rX_t dt + H_t dB_t$  et le processus  $Y_t = e^{-rt} X_t$ . Alors  $dY_t = e^{-rt} H_t dB_t$ . En particulier si  $H_t \in \mathcal{L}^2([0, T])$  le processus  $Y_t$  est une martingale.

**Proposition 2.26 (Intégration par parties)** Soit  $X, Y \in \mathcal{I}$  deux processus d'Itô. Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s, \quad (2.12)$$

ou encore en notation différentielle :

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t. \quad (2.13)$$

**Preuve.** Par identité polaire à partir de la formule de Itô pour les processus  $X^2$ ,  $Y^2$  et  $(X + Y)^2$ .  $\square$

### 2.5.3 Formule de Itô multi-dimensionnelle

**Définition 2.17 (Processus d'Itô)** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard  $d$ -dimensionnel. Un processus stochastique  $X := \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  est appelé processus d'Itô  $d$ -dimensionnel s'il s'écrit sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_u^k dB_t^k,$$

où  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $\alpha = \{\alpha_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  et  $\{H_t^k, t \in \mathbb{R}_+\}$ ,  $k = 1, \dots, d$  sont des processus  $\mathbb{F}$ -adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^T |\alpha_u| du < \infty \text{ } \mathbb{P} - p.s. \quad \text{et} \quad \int_0^T |H_u^k|^2 du < \infty \text{ } \mathbb{P}.p.s., \quad k = 1, \dots, d.$$

Nous notons également sous forme différentielle :  $dX_t = \alpha_t dt + \sum_{k=1}^d H_t^k dB_t^k$ . La classe des processus d'Itô multi-dimensionnels sera encore notée  $\mathfrak{I}$ .

### Définition 2.18 (Covariation quadratique multi-D)

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  deux processus d'Itô  $d$ -dimensionnels :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \sum_{\ell=1}^d \int_0^t H_u^\ell dB_t^\ell, \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \beta_u du + \sum_{\ell=1}^d \int_0^t K_u^\ell dB_t^\ell. \end{aligned}$$

Nous définissons leur covariation quadratique par la formule

$$\langle X, Y \rangle_t = \sum_{\ell=1}^d \int_0^t H_u^\ell K_u^\ell du.$$

**Théorème 2.6 (formule d'Itô multi-dimensionnelle)** Considérons une application  $f(t, x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{1,2}$  (c'est-à-dire dérivable une fois en  $t$  avec  $\partial_t f$  continue et deux fois en  $x_k, x_\ell$  avec chaque

dérivée seconde  $\partial_{x_k x_\ell} f$  continue). Soit  $X^k \in \mathfrak{I}$  des processus d'Itô,  $k = 1, \dots, n$  vérifiant :

$$X_t^k = X_0^k + \int_0^t \alpha_u^k du + \sum_{\ell=1}^d \int_0^t H_u^{k,\ell} dB_u^\ell. \quad (2.14)$$

Alors, le processus  $Y_t = f(t, X_t^1, \dots, X_t^n) \in \mathfrak{I}$  et

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, X_u^1, \dots, X_u^d) du + \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(u, X_u^1, \dots, X_u^d) dX_u^k \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(u, X_u^1, \dots, X_u^d) d\langle X^k, X^\ell \rangle_u \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Preuve.** Admis, consulter les références pour détails.  $\square$

**Pour en savoir plus 2.5.1** Les formules d'Itô et celle de l'intégration par parties se généralisent à des semi-martingales (voir l'élément 2.4.2 page 55 pour la définition d'une semi-martingale).

#### 2.5.4 Équations différentielles stochastiques

Étant données deux applications  $a$  et  $b$  on se demande s'il existe un processus d'Itô  $X = \{X_t, t \leq 0\}$  dont la décomposition (unique) vérifie

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

en notation différentielle. Voir l'exercice 2.27 page 76 pour des exemples de telles équations apparaissant dans des modèles en finance.

**Théorème 2.7** Soit  $T > 0$  et  $a(\cdot, \cdot), b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables telles qu'il existe des constantes  $C, L > 0$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} |a(t, x)| + |b(t, x)| &\leq C(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ |a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| &\leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T]. \end{aligned}$$



Soit  $Z$  une variable aléatoire indépendante de  $\mathcal{F}^\infty = \sigma\{B_s, s \geq 0\}$  et telle que

$$\mathbb{E}[Z^2] < \infty.$$

Alors l'équation différentielle stochastique

$$X_t = Z + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, \quad t \in [0, T],$$

ou en notation différentielle

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = Z, \quad t \in [0, T], \quad (2.16)$$

admet une unique solution  $X = \{X_t, t \leq 0\}$  telle que :

1.  $X$  est continue par rapport à  $t$  ;
2.  $X$  est adaptée à la filtration  $\mathcal{F}_t^Z$  générée par  $\mathcal{F}_t$  et  $Z$  ;
3.  $X \in \mathcal{L}^2([0, T])$  i.e., :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt \right] < \infty.$$

**Preuve.** Voir par exemple les références [6, 15]. □

## 2.6 Représentation de martingales, changement de probabilité

Nous allons admettre ce résultat de représentation de martingale qui nous sera utile pour introduire les changements de probabilité.

**Théorème 2.8** Soit  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  une martingale par rapport à la filtration naturelle d'un mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$ . Supposons que  $M \in \mathcal{M}^2([0, T])$  (donc pour tout  $t \in [0, T]$  :  $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ ). Alors il existe un processus adapté  $(H_t)_{t \in [0, T]}$  tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s.$$

De plus  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T H_s^2 ds \right] < \infty$  (c'est-à-dire  $H \in \mathcal{L}^2([0, T])$ ).

**Intuition 2.6.1** Soit  $T > 0$  un horizon de temps donné fini (voir l'exercice 2.16 page 72 pour l'origine de cette dernière contrainte). Nous avons vu au chapitre 1 l'importance d'avoir une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle le processus de prix actualisé est une martingale.

Supposons qu'une telle probabilité  $\mathbb{Q}$  existe. D'après le théorème de Radon-Nyodim (cf. appendice A.7 page 195) il existe alors une fonction  $Z$ ,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, positive, vérifiant  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$  et telle que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(ZY), \quad (2.17)$$

pour toute v.a.  $Y$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Pour tout  $t \in [0, T]$  on introduit

$$Z_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z | \mathcal{F}_t].$$

Nécessairement  $\{Z_t, t \in [0, T]\}$  est une martingale sous la probabilité  $\mathbb{P}$  telle que  $Z_0 = 1$  et, si  $Y_t$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, alors l'égalité (2.17) s'écrit  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_t Y_t)$ .

Le problème évoqué au premier paragraphe prend donc la forme suivante : soit  $X$  un processus d'Itô donné par  $dX_t = \alpha_t dt + H_t^X dB_t$ . Nous cherchons  $\mathbb{Q}$  donc  $Z$ , aussi sous la forme d'un processus d'Itô, tel que

- $Z_t$  est une martingale positive sous la probabilité  $\mathbb{P}$  vérifiant  $Z_0 = 1$ ,
- $Z_t X_t$  est une martingale sous la probabilité  $\mathbb{P}$ , ceci impliquant que  $X_t$  est une martingale sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ .

D'après le théorème de représentation des martingales (théorème. 2.8 page 65) il faut donc chercher  $Z_t$  sous la forme  $dZ_t = H_t^Z dB_t$  et d'après la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} d(Z_t X_t) &= X_t dZ_t + Z_t dX_t + d\langle Z, X \rangle_t \\ &= X_t H_t^Z dB_t + Z_t \alpha_t dt + Z_t H_t^X dB_t + H_t^X H_t^Z dt. \end{aligned}$$

Pour que  $Z_t X_t$  soit une martingale il faut que le coefficient devant  $dt$  soit nul, c'est-à-dire  $Z_t \alpha_t + H_t^X H_t^Z = 0$ . Remarquons que si  $H_t^X = 0$  cette condition peut ne pas être satisfaite. Mais ceci est naturel car alors la

partie aléatoire de  $X_t$  est nulle. Il n'est donc pas raisonnable dans ce cas d'espérer que  $X_t$  soit une martingale.

Supposons donc que  $H_t^X > 0$   $\mathbb{P}$  - p.s. pour tout  $t \in [0, T]$  ; alors il faut choisir  $H_t^Z = -\frac{Z_t \alpha_t}{H_t^X}$  ou encore  $dZ_t = -\frac{\alpha_t}{H_t^X} Z_t dB_t$ . Donc  $Z_t$  est solution d'une EDS qui dépend du processus  $X_t$  avec condition initiale  $Z_0 = 1$ . Sa solution est  $Z_t = \exp\{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\}$  avec  $M_t = \int_0^t -\frac{\alpha_s}{H_s^X} dB_s$ . Pour s'en convaincre il suffit d'utiliser la formule d'Itô pour la fonction exponentielle appliquée au processus d'Itô :

$$d\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\right) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_s^2}{(H_t^X)^2} dt - \frac{\alpha_s}{H_t^X} dB_t.$$

En particulier pour  $X_t = \tilde{S}_t$  il est nécessaire que  $Z_t$  soit solution de  $dZ_t = -Z_t \frac{\mu - r}{\sigma} dB_t$ .

Pour le mouvement brownien nous avons un résultat un peu plus précis :

**Proposition 2.27** [Version élémentaire du théorème de Girsanov] Soit  $0 < T < \infty$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Considérons la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} := Z_t^\lambda \quad \text{où} \quad Z_t^\lambda := \exp \left\{ -\lambda B_t - \frac{(\lambda)^2}{2} t \right\}, \forall t \in [0, T]. \quad (2.18)$$

Alors, le processus  $\{B_t + \lambda t, t \in [0, T]\}$  est un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ .

**Preuve.** Voir l'exercice 2.16 page 72. □

Il convient de noter que le résultat précédent donne plus que la propriété de martingale puisque le processus  $\{B_t + \lambda t, t \in [0, T]\}$  est un mouvement brownien (et pas seulement une martingale).

## 2.7 Exercices

Dans tous les exercices de ce chapitre, on considère un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ . On considère également un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard  $B = \{B_t, t \geq 0\}$ .

**Exercice 2.1 (Loi du mouvement brownien)** Soit  $t$  un réel positif ou nul.

1. Déterminer la fonction caractéristique de  $B_t$ , notée  $\phi_{B_t}$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}[|B_t|]$  et  $\mathbb{E}[B_t \mathbf{1}_{B_t \leq a}]$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer que  $\mathbb{E}[X^4] = 3$ .  
En déduire que  $\mathbb{E}[|B_t|^4] = 3t^2$ .

**Exercice 2.2 (Continuité du mouvement brownien)** Soit  $X$  un processus stochastique tel que pour tous  $0 \leq s < t$ ,  $X_t - X_s$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t - s)$ . Montrer que

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^4] = 3|t - s|^2.$$

*Remarque : on déduit de ce résultat que le mouvement brownien admet une version continue grâce au théorème. A.4 page 197.*

**Exercice 2.3 (Mouvement brownien géométrique)** Soient  $\mu$  et  $\sigma$  deux constantes réelles données. On définit le processus  $S = \{S_t, t \geq 0\}$  en posant  $S_t := S_0 \exp\{\sigma B_t + \mu t\}$ .

1. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer que pour tout  $u \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = e^{\frac{u^2}{2}}.$$

*En déduire l'espérance et la variance de  $S_t$ .*

2. Soit  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et bornée. Montrer que pour tout  $t \geq s \geq 0$

$$\mathbb{E}[\Phi(S_t) | \mathcal{F}_s] = \phi(S_s) \quad \text{où} \quad \phi : x \mapsto \mathbb{E}\left[\Phi\left(x \frac{S_t}{S_s}\right)\right].$$

**Exercice 2.4** (Martingales, cf. proposition 2.7 page 36) *Montrer que chacun des processus suivant est une  $\mathbb{F}$ -martingale :*

1.  $\{B_t, t \geq 0\}$  ;
2.  $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$  ;
3.  $\{B_t^3 - 3tB_t, t \geq 0\}$
4.  $\{e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2}, t \geq 0\}, \sigma \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2.5** *Corriger les formules ci-dessous pour que les affirmations suivantes soient vraies :*

1.  $\{2 + B_t, t \geq 0\}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale ;
2.  $\{2 + B_{2t}, t \geq 0\}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale ;
3.  $\{\frac{B_{3t}}{\sqrt{2}}, t \geq 0\}$  est un mouvement brownien ;
4.  $\{\frac{tB_{4/t}}{\sqrt{2}}, t > 0\}$  est un mouvement brownien.

**Exercice 2.6** (processus gaussiens ; cf. proposition 2.6 page 35)

1. Montrer que le mouvement brownien standard  $B$  est un processus gaussien.
2. Déterminer  $e_B(t) := \mathbb{E}[B_t]$  et  $K_B(s, t) = \text{var}(B_t, B_s)$ .

**Exercice 2.7** *Démontrer la proposition 2.8 page 36 en ajoutant l'hypothèse que le processus est gaussien. Indication : utiliser la proposition 2.6 page 35.*

**Exercice 2.8** *Montrer que  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est un  $\mathbb{F}$  mouvement brownien si et seulement si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  le processus complexe  $M^\lambda = \{M_t^\lambda, t \geq 0\}$  défini par*

$$M_t^\lambda = \exp\{i\lambda X_t + \frac{\lambda^2}{2}t\}$$

*est une  $\mathbb{F}$  martingale.*

**Exercice 2.9** *Soit  $A = \{\overline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq x\}$ , où  $x > 0$  est fixé.*

1. *Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , l'événement  $A$  est indépendant de  $\mathcal{F}_m$ .  
En déduire que  $\mathbb{P}(A)$  vaut 0 ou 1.*

2. Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 1$ . En déduire que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty, \quad \mathbb{P} \text{ p.s..}$$

3. En déduire la proposition 2.11 page 38 et la proposition 2.12 page 39.

**Exercice 2.10** On veut montrer que presque sûrement la trajectoire du mouvement brownien n'est monotone sur aucun intervalle non trivial.

1. Montrer que l'ensemble  $F$  des  $\omega \in \Omega$  pour lesquels il existe un intervalle non trivial  $I$  de  $\mathbb{R}_+$  tel que  $t \mapsto B_t(\omega)$  soit monotone sur  $I$  est donné par

$$F = \bigcup_{s,v \in \mathbb{Q}_+, s < v} \{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [s, v]\}$$

2. Soient :

$$E = \{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [0, 1]\}$$

et

$$A = \{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est croissante sur } [0, 1]\}.$$

Montrer que  $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ , où

$$\forall n \geq 1, \quad A_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \left\{ \omega \in \Omega, B_{\frac{i+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{i}{n}}(\omega) \geq 0 \right\}$$

3. Prouver que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(A_n) = 2^{-n}$ . En déduire que  $\mathbb{P}(A) = 0$ .

4. Montrer que  $\mathbb{P}(E) = 0$  et en déduire que  $\mathbb{P}(F) = 0$ .

**Exercice 2.11** Montrer la proposition 2.13 page 39.

**Exercice 2.12 (Non-dérivabilité du mouvement brownien)** Soit  $t > 0$  arbitraire fixé. Montrer que  $\mathbb{P}$ -ps les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas dérivables en  $t$ .

*Indication : utiliser les propriétés d'invariance par translation et d'inversion*

du temps pour conclure qu'il suffit de montrer que le mouvement brownien n'a presque sûrement pas de limite à l'infini.

*Remarque : cet énoncé n'est qu'une version faible de la propriété de non-dérivabilité du mouvement brownien.*

**Exercice 2.13 (Pont brownien)** Soit  $Z := \{Z_t = B_t - tB_1, t \in [0, 1]\}$  un processus.

1. Montrer que  $Z$  est un processus gaussien indépendant de  $B_1$ .  
Indication : utiliser le corollaire A.1 page 197.
2. Déterminer  $e_Z(t) := \mathbb{E}[Z_t]$  et  $K_Z(s, t) = \text{cov}(Z_t, Z_s)$ .
3. Vérifier que le processus  $\tilde{Z}$  défini par :  $\tilde{Z}_t := Z_{1-t}$ , a la même loi que  $Z$ .

**Exercice 2.14 (Sommes de Riemann, cf. théorème 2.4, page 54)**

Soit  $\Delta : t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$  une division de  $[0, T]$ .

1. Calculer la limite en  $L^2$  (si elle existe) de la somme de type Riemann

$$S_1 = \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}); \quad (2.19)$$

lorsque  $|\Delta| \rightarrow 0$ .

2. Calculer la limite en  $L^2$  (si elle existe) de la somme de type Stratonovich

$$S_2 = \sum_{k=0}^{N-1} B_{\frac{t_k + t_{k+1}}{2}} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}); \quad (2.20)$$

lorsque  $|\Delta| \rightarrow 0$ .

**Exercice 2.15 (Une application du caractère gaussien)** On considère une application continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour tout réel  $t \geq 0$  on définit la variable aléatoire

$$X_t^f(\omega) = \int_0^t B_s(\omega) f(s) ds.$$

1. Justifier que pour tout  $t \geq 0$  la variable aléatoire  $X_t^f$  est bien définie et montrer que

$$X_t^f = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{f,n} \text{ presque sûrement où } X_t^{f,n} := \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}t} f\left(\frac{k}{n}t\right)$$

2. Vérifier que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $n \geq 1$ ,  $X_n^f$  est une variable aléatoire gaussienne. Calculer sa moyenne et sa variance. En déduire la loi de  $X_t^f$ .
3. Calculer  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t B_s ds \right]$  et  $\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t B_s ds \right)^2 \right]$ .
4. Le processus  $M = \left\{ M_t = \int_0^t B_s ds; t \geq 0 \right\}$  est-il un mouvement brownien ? Une martingale ?

**Exercice 2.16 (Changement de probabilité)** Soit  $0 < T < \infty$  et  $\lambda$  une constante strictement positive donnée ; nous considérons le processus :

$$L := \left\{ L_t = \exp \left\{ \lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right\}, t \in [0, T] \right\}. \quad (2.21)$$

1. Justifier que l'on peut définir sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T^B)$  une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}_T$  équivalente à  $\mathbb{P}$  en posant :  $\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = L_T$ .
2. Soit  $t \in [0, T]$  et  $\mathbb{Q}_t$  la probabilité de densité  $L_t$  par rapport à  $\mathbb{P}$ . Montrer que  $\mathbb{Q}_t$  et  $\mathbb{Q}_T$  coïncident sur  $\mathcal{F}_t^B$ .
3. Soit  $Z$  une variable aléatoire bornée et  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[Z | \mathcal{F}_t^B] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z L_T | \mathcal{F}_t^B]}{L_t}.$$

4. Montrer que le processus  $\{B_t^\lambda, 0 \leq t \leq T\}$  défini par :  $B_t^\lambda := B_t - \lambda t$ , est un mouvement brownien sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T^B, \mathbb{Q}_T)$ .
5. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de prendre  $T = \infty$  ; indication : utiliser par exemple la proposition 2.10 ou encore étudier la limite de  $L_T$  pour  $T \rightarrow \infty$ .



**Exercice 2.17 (Variation quadratique du mouvement brownien)** Soit  $t \geq 0$  fixé. Pour tout  $n \geq 1$  on note  $S^n$  la variable aléatoire.

$$S^n := \sum_{k=1}^{2^n} \left( B_{\frac{k}{2^n}t} - B_{\frac{(k-1)}{2^n}t} \right)^2$$

1. Calculer  $\mathbb{E}[S^n]$  et  $\text{var}(S^n)$ .
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrez que pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|S^n - t| > \varepsilon) \leq \frac{4t^2}{\varepsilon^2} 2^{-2n}$$

3. En déduire que  $S^n$  converge vers  $t$  presque sûrement.

**Exercice 2.18 (Martingale continue et variation d'ordre 1)** Soit  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  une martingale de carré intégrable.

1. Vérifier que pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,  $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_s^2]$ .
2. On suppose que  $M$  est à trajectoires continues. On suppose de plus que les trajectoires de  $M$  sont à variations bornées : il existe une constante  $C \geq 0$  telle que

$$\mathbb{P}\left(V_t^{(1)}(M) \leq C\right) = 1 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

- (a) Vérifier que pour toute subdivision  $\Delta = \{t_0 = 0 \leq \dots \leq t_n = t\}$  de l'intervalle  $[0, t]$

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_0)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left\{\sup_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|\right\} V_t^{(1)}(M, \Delta)\right]$$

- (b) En déduire que nécessairement  $M = M_0$  presque sûrement.

**Exercice 2.19 (Intégrale de Wiener, cf. proposition 2.22 page 54)**

Soit  $T > 0$  un horizon de temps fixé. Le but de cet exercice est d'étudier l'intégrale stochastique de la forme

$$\int_0^t f(u) dB_u$$

où  $t \in [0, T]$  et  $f$  est un élément de

$$L^2([0, T], \mathcal{B}_{[0, T]}, dx) = \left\{ f : ([0, T], \mathcal{B}_{[0, T]}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}), \int_0^T f^2(x) dx < \infty \right\}.$$

On écrira  $L^2([0, T]) = L^2([0, T], \mathcal{B}([0, T]), dx)$ . On note  $\mathcal{S}([0, T])$  l'ensemble des fonctions  $f$  de la forme

$$f : x \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(x)$$

où  $\Delta := \{0 = t_0 \leq \dots \leq t_N = T\}$  est une subdivision de  $[0, T]$  et  $(a_k)_{0 \leq k \leq N-1}$  est un élément de  $\mathbb{R}^N$ .

1. Pour une fonction  $f = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}$  dans  $\mathcal{S}([0, T])$ , on définit

$$I_{\mathcal{S}}(f) := \sum_{k=0}^{N-1} a_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

Montrer que  $I_{\mathcal{S}}(f)$  est une variable aléatoire gaussienne. Déterminer sa moyenne et sa variance.

2. On admet que l'espace  $\mathcal{S}$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dx)$  muni de la norme  $\|f\|_{L^2} := \left( \int_0^T f^2(x) dx \right)^{1/2}$ . Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $I$  définie sur  $L^2([0, T])$  à valeurs dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{S}[0, T]$

$$I(f) = I_{\mathcal{S}}(f) \quad \text{et} \quad \forall f \in L^2([0, T]), \quad \mathbb{E}[I(f)^2] = \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^T f^2(x) dx.$$

3. Soit  $f \in L^2([0, T])$ , on définit le processus  $M(f) = \{M_t(f), t \in [0, T]\}$  par

$$M_t(f) = I(\mathbf{1}_{[0, t]}(\cdot) f(\cdot)).$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , quelle est la loi de  $M_t(f)$  ? Montrer que  $M(f)$  est un processus  $\mathbb{F}^B$  adapté et que pour tout  $s \leq t \leq T$ ,  $M_t(f) - M_s(f)$  est une variable indépendante de  $\mathcal{F}_s^B$ .

4. Soit  $T > 0$  et  $f \in L^2([0, T])$ . On considère le processus,

$$L := \left\{ L_t = \exp \left\{ \int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds \right\}, t \in [0, T] \right\}.$$

(a) Montrer que  $L$  est une martingale.

(b) Soit  $\mathbb{Q}_T$  la mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T^B)$  obtenue en prenant  $\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = L_T$ . En s'inspirant de l'exercice 2.16 page 72 montrer que  $\{B_t^f, 0 \leq t \leq T\}$  défini par  $B_t^f = B_t - \int_0^t f(s) ds$  est un mouvement brownien sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T^B, \mathbb{Q}_T)$ .

**Exercice 2.20** Soit  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien réel issu de zéro.

1. Montrer que pour tout  $t \geq 0$  la variable aléatoire  $X_t = \int_0^t \sin(s) dB_s$  est bien définie.
2. Montrer que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien, donner sa loi.
3. Montrer que pour tout  $t \geq 0$  on a  $X_t = \sin(t)B_t - \int_0^t \cos(s)B_s ds$ .
4. Montrer que le processus  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  où pour tout  $t \geq 0$  on a

$$Y_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds$$

est une martingale.

**Exercice 2.21 (Intégrale d'Itô)** Soit  $T$  un horizon de temps fixé.

1. Justifier que le processus  $M = \{M_t := \int_0^t e^{\sigma B_u} dB_u, 0 \leq t \leq T\}$  est bien défini. Montrer que  $M$  est une martingale, déterminer  $\mathbb{E}[M_t]$  et  $\text{var}(M_t)$ .
2. Mêmes questions pour  $N = \{N_t := \int_0^t M_u dB_u, 0 \leq t \leq T\}$ .

**Exercice 2.22** 1. Calculer, avec puis sans utiliser la formule de Itô, la covariance des variables aléatoires définies par  $X = \int_0^1 \int_0^t 1 ds dB_t$  et  $Y = \int_0^1 \int_0^t 1 dB_s dt$ .

2. les variables aléatoires  $\int_0^1 \int_0^t 1 ds dB_t$  et  $\int_0^1 \int_0^t 1 dB_s dt$  sont-elles égales ?

**Exercice 2.23 (Formule d'Itô)** Montrer que chacun des processus suivants est un processus d'Itô

1.  $X_t = B_t^3, t \geq 0$ .
2.  $S_t = S_0 \exp \{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\}, t, S_0 \geq 0$ .
3.  $Y_t = u(t, S_t), t \geq 0$  où  $u$  est une application de classe  $C^{1,2}$ .
4.  $V_t = \sqrt{S_t}, t \geq 0$ .
5.  $Z_t = e^{rt}(S_t)^2, t \geq 0$ .
6.  $R_t = e^{-\int_0^t r_s ds} N_t, t \geq 0$ , où pour tout  $t \geq 0$  on a

$$r_t = r_0 + \int_0^t \alpha(\beta - r_s) ds + \int_0^t \sigma dB_s \text{ et } N_t = N_0 + \int_0^t r_s Y_s ds + \int_0^t \sigma Y_s dB_s,$$

$\alpha, \beta$  et  $\sigma$  étant des constantes réelles.

**Exercice 2.24** Soit  $T > 0$  un nombre réel fixé et  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard. Trouver le processus  $H_T(t, \omega), t \in [0, T]$ , tel que

$$B_T^3 = \int_0^T H_T(t, \omega) dB_t.$$

On commencera par écrire  $Y_T = \int_0^T B_t dt$  sous une forme similaire.

**Exercice 2.25** Démontrer la proposition 2.16 page 44. Indication : utiliser le résultat de l'exercice 2.8.

**Exercice 2.26 (Formule de Feynmann-Kac)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et bornée. Soit  $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  qui vérifie

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \frac{1}{2} \partial_{xx} u(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in ]0, T] \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On suppose de plus que  $\partial_x u$  est une fonction bornée. Montrer alors que :

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(x + B_t)], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 2.27 (E.D.S. pour quelques modèles financiers)** Soit  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  un mouvement brownien standard.

1. *Modèle de Black-Merton-Scholes : soit  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ . Démontrer, en utilisant un résultat du cours, que l'EDS suivante :*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(0) = S_0 \in \mathbb{R},$$

*admet une solution unique. Montrer que cette solution est*

$$S_t = e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t} S_0.$$

2. *Modèle de Vasicek : soit  $\alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\sigma > 0$ . Démontrer, en utilisant un résultat du cours, que l'EDS suivante :*

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad r(0) = r_0 \in \mathbb{R},$$

*admet une solution unique. Montrer que cette solution est*

$$r_t = r_0 e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s.$$

3. *Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) : soit  $\alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\sigma > 0$ . Dire si le résultat du cours peut être utilisé pour démontrer que l'EDS suivante admet une solution unique :*

$$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma \sqrt{|r_t|} dW_t, \quad r(0) = r_0 \geq 0.$$



## Chapitre 3

# Modèle de Black-Merton-Scholes

### 3.1 Présentation du modèle

On considère un marché formé par un actif sans risque  $S^0$  et un actif risqué  $S$ . On suppose que le prix de l'actif sans risque vérifie

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt}, \quad (3.1)$$

où  $r$  est une constante donnée,  $r \geq 0$ . Sauf mention explicite du contraire nous prendrons  $S_0^0 = 1$ .

Pour modéliser l'incertitude concernant le prix de l'actif risqué  $S$ , on introduit un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On suppose que le processus de prix de  $S$ ,  $S = \{S_t, t \geq 0\}$ , est décrit par le modèle de Black-Merton-Scholes

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (3.2)$$

où  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  est un mouvement brownien sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Ici  $\mu$  et  $\sigma$  sont deux constantes réelles données :

- $\mu$  est appelée « tendance » ou « rendement instantané » de  $S$ ,
- $\sigma > 0$  est appelée « volatilité » de  $S$ . Elle mesure la taille de l'incertitude sur  $S$ .

Dans tout ce chapitre, on note

$$\tilde{S} = \{S_t/S_t^0, t \geq 0\}$$

le prix de  $S$  exprimé dans le nouveau numéraire  $S^0$  et  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  la filtration naturelle du processus  $S$ . Remarquons que  $S_t$  et  $B_t$  étant en bijection par une application mesurable,  $\mathbb{F}$  est également la filtration naturelle du mouvement brownien  $B$ .

D'après lemme d'Itô on a

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\} \quad (3.3)$$

et, en notation différentielle,

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t.$$

Comme dans le chapitre 1, on suppose que le marché financier ne présente pas de frictions :

**Hypothèse 3.1 (Marché sans frictions)** *Les actifs de ce marché financier sont parfaitement divisibles et ne sont soumis à aucun coût de transaction.*

### 3.1.1 Stratégie financière

On suppose que les transactions se déroulent de manière continue sur l'horizon de temps  $[0, T]$ . Ainsi, à chaque instant  $t \in [0, T]$ , un agent peut modifier l'allocation de portefeuille entre l'actif  $S^0$  et l'actif  $S$ . Une stratégie financière est donc décrite par un couple de processus stochastiques

$$\alpha := \{\alpha_t, t \in [0, T]\} \quad \text{et} \quad \theta := \{\theta_t, t \in [0, T]\}$$

où

- $\alpha_t \in \mathbb{R}$  représente le nombre d'unités de l'actif  $S^0$  détenues à la date  $t$ ,
- $\theta_t \in \mathbb{R}$  représente le nombre d'unités de l'actif  $S$  détenues à la date  $t$ .



Notons  $V_t$  la valeur à la date  $t$  d'une stratégie et  $\tilde{V}_t := V_t/S_t^0$  la valeur de la même stratégie exprimée dans le numéraire  $S^0$ . Nous avons alors

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \theta_t S_t \quad \text{et} \quad \tilde{V}_t = \alpha_t + \theta_t \tilde{S}_t.$$

**Définition 3.1 (Stratégie autofinancée)** *La stratégie financière  $(\alpha, \theta)$  est dite autofinancée (ou encore « elle vérifie la condition d'autofinancement ») si la variation de sa valeur entre deux dates successives est totalement expliquée par la variation des prix des actifs.*

Dans notre modèle en temps continu, la condition d'autofinancement de la stratégie  $(\alpha, \theta)$  se traduit par l'égalité :

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \theta_t dS_t \quad (3.4)$$

ou encore par  $d\tilde{V}_t = \theta_t d\tilde{S}_t$  c'est-à-dire

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \theta_u (\mu - r) \tilde{S}_u du + \int_0^t \theta_u \sigma \tilde{S}_u dB_u. \quad (3.5)$$

On remarque que l'expression de la richesse actualisée d'une stratégie autofinancée est complètement déterminée par la richesse initiale  $V_0$  et  $\theta$ . Bien entendu, pour que l'expression (3.5) ait un sens, il faut imposer des conditions d'intégrabilité à  $\theta$ . Pour ce faire nous allons avoir besoin de la définition suivante. Notons  $\lambda^* := (\mu - r)/\sigma$  et considérons la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^*$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  par

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} := Z_t^{\lambda^*} \quad \text{où} \quad Z_t^{\lambda^*} := \exp \left\{ -\lambda^* B_t - \frac{(\lambda^*)^2}{2} t \right\}. \quad (3.6)$$

On appelle *ensemble des portefeuilles admissibles* et on note  $\mathcal{A}$ , l'ensemble des processus  $\theta = \{\theta_t, t \in [0, T]\}$  défini par

$$\mathcal{A} := \left\{ \theta \text{ } \mathbb{F}\text{-adapté} : \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ \int_0^T |\theta_u \tilde{S}_u|^2 du \right] < \infty \right\}. \quad (3.7)$$

Dans ce qui suit, nous allons décrire une stratégie financière autofinancée par la donnée d'un couple  $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$  où  $x$  représente le capital initial permettant de construire la stratégie et  $\theta$  est le processus décrivant l'investissement en actif risqué  $S$ ,  $\theta_t$  étant le nombre d'unités de  $S$  détenues à la date  $t$ . On note  $V_t^{x,\theta}$  la valeur à la date  $t$  de cette stratégie. On a  $V_t^{x,\theta} = S_t^0 \tilde{V}_t^{x,\theta}$  et

$$\tilde{V}_t^{x,\theta} = x/S_0^0 + \int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du + \int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u. \quad (3.8)$$

### 3.2 Condition d'absence d'opportunités d'arbitrage et changement de mesure

**Définition 3.2 [Opportunité d'arbitrage]** *Dans ce modèle, une opportunité d'arbitrage est une stratégie financière qui démarre à un capital initial égal à zéro  $(0, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$  et qui vérifie :  $\mathbb{P}(V_T^{0,\theta} \geq 0) = 1$  et  $\mathbb{P}(V_T^{0,\theta} > 0) > 0$ .*

Considérons le cas particulier où  $\mu = r$ . Dans ce cas,  $\tilde{S}_t$  est une martingale et pour  $\theta \in \mathcal{A}$  :

$$\tilde{V}_t^{0,\theta} = \int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u.$$

Comme  $\theta \in \mathcal{A}$  vérifie la condition :  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\theta_u \tilde{S}_u|^2 du \right] < \infty$ , on en déduit que le processus  $\tilde{V}^{0,\theta} = \{\tilde{V}_t^{0,\theta}, 0 \leq t \leq T\}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Par conséquent  $\mathbb{E}[\tilde{V}_T^{0,\theta}] = 0$  et on ne peut donc pas avoir  $\mathbb{P}(\tilde{V}_T^{0,\theta} \geq 0) = 1$  avec  $\mathbb{P}(\tilde{V}_T^{0,\theta} > 0) > 0$ .

Ainsi, dans le cas particulier où  $\mu = r$ , le marché financier considéré vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage.

**Proposition 3.1** *Le prix actualisé  $\tilde{S}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$  et pour toute stratégie financière  $(x, \theta) \in \mathcal{A}$ , la valeur actualisée  $\tilde{V}^{x,\theta}$  est aussi une  $\mathbb{F}$ -martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$ .*

**Preuve.** Nous vérifions d'après l'expression de  $\tilde{S}_t$  et la définition du processus  $B^* = B_t + \lambda^* t$  que  $\tilde{S}_t = \exp \left\{ \sigma B_t^* - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}$ . Comme  $B^*$  est un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$  on a que  $\tilde{S}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$ . Soit

$(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ . On a :  $\tilde{V}_t^{x, \theta} = x/S_0^0 + \int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u^*$ . Comme  $\theta$  satisfait la condition d'intégrabilité  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\theta_u \tilde{S}_u|^2 du \right] < \infty$ , d'après les propriétés de l'intégrale d'Itô, le processus  $\tilde{V}^{x, \theta}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$ .  $\square$

**Proposition 3.2 (A.O.A)** *Le modèle de marché financier considéré vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage.*

**Preuve.** Considérons la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^*$  définie par (3.6). Supposons qu'il existe une opportunité d'arbitrage  $(0, \theta)$ . Comme la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^*$  est équivalente à  $\mathbb{P}$ , on a :  $\mathbb{Q}^*(\tilde{V}_T^{0, \theta} \geq 0) = 1$  et  $\mathbb{Q}^*(\tilde{V}_T^{0, \theta} > 0) > 0$  donc  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[\tilde{V}_T^{0, \theta}] > 0$ . Or d'après la proposition 3.1, le processus  $\tilde{V}^{0, \theta}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$ , en particulier  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[V_T^{0, \theta}] = \tilde{V}_0^{0, \theta} = 0$  et ceci contredit ce qui a été dit plus haut. Nous obtenons alors qu'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier.  $\square$

**Technique importante 3.2.1** *Voici un résumé des formules utiles qui se révéleront utiles par la suite*

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ d\tilde{S}_t &= (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t \\ dV_t &= r\alpha_t S_t^0 dt + \theta_t dS_t \\ d\tilde{V}_t &= \theta_t d\tilde{S}_t = \theta_t(\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \theta_t \tilde{S}_t dB_t \\ dB_t^* &= dB_t + \lambda^* dt, \quad \lambda^* = \frac{\mu - r}{\sigma} \\ dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t dB_t^* \\ d\tilde{S}_t &= \sigma \tilde{S}_t dB_t^* \\ d\tilde{V}_t &= \theta_t d\tilde{S}_t = \theta_t \sigma \tilde{S}_t dB_t^*. \end{aligned}$$

### 3.3 Évaluation d'options européennes et équation de Black-Merton-Scholes

Nous considérons une actif option européenne de maturité  $T$  dont la valeur terminale est décrite par une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, notée  $G$ .

### 3.3.1 Évaluation par réplication

**Définition 3.3** *L'actif contingent de payoff  $G$  est dit répliquable, ou encore il est dit admettre une stratégie de réplication, s'il existe  $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$  tel que  $G = V_T^{x, \theta}$ .*

**Proposition 3.3** *Soit un actif contingent de payoff  $G$  pour lequel on suppose que  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[G^2] < \infty$ . Alors*

1. *l'actif  $G$  admet une stratégie de réplication  $(x^G, \theta^G)$  ;*
2. *sous la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage A.O.A., son prix à la date  $t$ , noté  $p_t^G$ , est donné par :*

$$p_t^G = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [G/S_T^0 | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [e^{-r(T-t)} G | \mathcal{F}_t]. \quad (3.9)$$

**Preuve.** Commençons d'abord par le point 2. Supposons donc disposer de  $\theta_t$  telle que la stratégie  $(x, \theta_t)$  qui donne le portefeuille  $V_t^{x, \theta}$  (ou en version actualisée  $\tilde{V}_t^{x, \theta} = x + \int_0^t \theta_u d\tilde{S}_u$ ) satisfasse  $V_T^{x, \theta} = G$ . Mais, sous la probabilité  $\mathbb{Q}^*$ , nous avons  $\tilde{V}_t^{x, \theta} = x + \int_0^t \theta_u \sigma \tilde{S}_u dB_u^*$  donc  $\tilde{V}_t^{x, \theta}$  est une martingale (l'intégrabilité est obtenue par définition des stratégies admissibles  $\theta$ ). Nous savons que, par A.O.A.,  $V_t^{x, \theta} = p_t^G$ . En particulier, en utilisant la propriété de martingale :

$$e^{-rt} p_t^G = \tilde{V}_t^{x, \theta} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [\tilde{V}_T^{x, \theta} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [G e^{-rT} | \mathcal{F}_t],$$

ce qui donne par la suite (3.9).

Revenons maintenant au point 1. Introduisons le processus

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [G e^{-rT} | \mathcal{F}_t].$$

Par définition  $M_t$  est une martingale et  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[M_T^2] = e^{-2rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[G^2] < \infty$  donc d'après l'inégalité de Jensen  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[M_t^2] < \infty$  pour tout  $t \geq 0$ . Donc d'après le théorème 2.8 page 65 il existe  $H_t$  avec  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$  telle que

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s^*.$$

Alors la stratégie  $Z^{(x,\theta)}$  avec  $x = M_0$  et  $\theta_t = H_t/(\sigma\tilde{S}_t)$  est une stratégie de réplication pour  $G$  car

1.  $x = M_0 \in \mathbb{R}$  car la filtration  $\mathcal{F}_0$  est triviale ;
2.  $Z^{(x,\theta)}$  vérifie  $d\tilde{Z}^{(x,\theta)} = \sigma\theta_t\tilde{S}_t dB_t^* = H_t dB_t^* = dM_t$  ce qui implique  $\tilde{Z}^{(x,\theta)} = M_t$  et donc  $Z_t^{(x,\theta)} = e^{rt}M_t$  ;
3. si  $G \geq 0$  la valeur  $e^{rt}M_t$  de cette stratégie à l'instant  $t$  est positive ;
4. sa valeur à l'instant  $T$  est  $e^{rT}M_T = G$ . □

**Proposition 3.4 (unicité)** *En A.O.A. la probabilité risque neutre est unique dans le modèle Black-Merton-Scholes.*

**Preuve.** Toute probabilité risque neutre  $\mathbb{P}^*$  rend martingale le processus  $\tilde{S}_t$ . Soit  $A$  un ensemble  $\mathcal{F}_T$  mesurable et  $G = \mathbf{1}_A$ . En particulier  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[G^2] < \infty$  et  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[G^2] < \infty$ . Alors, utilisant les mêmes arguments que dans le résultat précédent,  $G$  est répliquable par une stratégie  $(x, \theta)$  admissible. Cette stratégie (actualisée) est martingale par rapport à  $\mathbb{P}^*$  (l'intégrabilité résulte de  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[G^2] < \infty$ ) et donc en particulier  $x = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_A] = e^{-rT}\mathbb{P}^*(A)$ . Donc  $\mathbb{P}^*(A) = e^{rT}x$  et ainsi la mesure de tout ensemble  $A \in \mathcal{F}_T$  est uniquement déterminée. □

### 3.3.2 Approche Monte-Carlo pour l'évaluation d'options : calcul pratique du prix en utilisant la formule (3.9)

Nous distinguons deux cas : actifs généraux (dépendants du chemin) et actifs indépendants du chemin. Exemple d'actif dépendant du chemin : un call asiatique de maturité  $T$  et strike  $K$  est une option de payoff

$$G = \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right) - K \right]_+ . \quad (3.10)$$

1. Pour la valuation des actifs généraux à l'instant  $t \geq 0$  il faut :

- (a) garder en mémoire la trajectoire passée  $S_\tau, \tau \leq t$  ;

- (b) simuler l'EDS de l'actif sous la proba  $\mathbb{Q}^*$ , i.e. résoudre numériquement  $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^*$ . Ici  $B^*$  sera considéré comme un processus brownien standard et en particulier il ne dépend pas de  $\mu$ . En pratique ceci donnera un ensemble de scénarios  $S_v^\ell$ ,  $v \in [t, T]$ ,  $\ell = 1, \dots, L$  où  $L$  est le nombre de simulations ;
- (c) définir des scénarios sur  $[0, T]$  par assemblage de la trajectoire (passée) sur  $[0, t]$  et des scénarios simulés sur  $[t, T]$  :

$$\omega^\ell := \{S_\tau; \tau \leq t\} \cup \{S_v^\ell, v \in [t, T]\}, \quad \ell = 1, \dots, L.$$

- (d) calculer ensuite numériquement, par exemple par une moyenne empirique

$$p_t^G = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} G | \mathcal{F}_t \right] \simeq e^{-r(T-t)} \frac{\sum_{\ell=1}^L G(\omega^\ell)}{L}.$$

Il est important à noter que la moyenne empirique donnera l'espérance conditionnelle car les scénarios  $\omega^\ell$  ont la connaissance de la trajectoire passée  $S_\tau$ ,  $\tau \leq t$ .

2. Plaçons nous maintenant dans le cas où l'actif contingent  $G$  est une option indépendante du chemin sur  $S$  :  $G = \Phi(S_T)$  avec  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable donnée.

Supposons que  $\Phi$  est telle que  $G$  est de carré intégrable par rapport à  $\mathbb{Q}^*$ . Alors d'après la proposition 3.3  $G$  admet une stratégie de réplcation  $(x^G, \theta^G)$  et le prix de  $G$  à la date  $t$  est donné par :

$$\begin{aligned} p_t^G &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} \Phi(S_T) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} \Phi \left( S_t e^{\sigma(B_T^* - B_t^*) + (r - \sigma^2/2)(T-t)} \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= u^G(t, S_t), \end{aligned}$$

où  $u^G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par

$$u^G(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} \Phi \left( x \exp \left\{ \sigma B_{T-t}^* + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right\} \right) \right].$$

Pour la dernière égalité nous avons utilisé la propriété A.16 page 193 (voir aussi l'exercice 2.3 page 68). Comme sous  $\mathbb{Q}^*$  le processus  $B^*$  est un mouvement brownien l'incrément  $B_T^* - B_t^*$  est une variable normale centrée de variance  $T - t$ . Donc

$$u^G(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy. \quad (3.11)$$

Pour un call  $\Phi(x) = (x - K)_+$  et alors nous obtenons la formule de Black-Merton-Scholes pour le prix d'un call européen :

$$u^{call,K}(t, x) = xN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2) \quad (3.12)$$

avec

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy,$$

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\text{et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Nous voyons explicitement qu'ici encore, le prix de l'actif contingent ne dépend pas de  $\mu$ .

### 3.3.3 Équation de Black-Merton-Scholes

Soit un actif contingent de payoff  $G$  (v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable),  $(x^G, \theta^G)$  une stratégie de réplication de  $G$  et supposons que le prix  $u^G$  soit une fonction de classe  $C^{1,2}$ . Appliquons alors la formule d'Itô à la fonction

$$(t, x) \mapsto e^{-rt}u^G(t, x)$$

et au processus d'Itô  $S_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Rappelons que

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt = \sigma S_t dB_t^* + r S_t dt.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
e^{-rt}u^G(t, S_t) &= u^G(0, S_0) + \int_0^t e^{-rv} \left\{ \partial_x u^G(v, S_v) \sigma S_v \right\} dB_v^* \\
&+ \int_0^t e^{-rv} \left\{ -ru^G(v, S_v) + \partial_t u^G(v, S_v) + rS_v \partial_x u^G(v, S_v) \right. \\
&\left. + \frac{\sigma^2 S_v^2}{2} \partial_{xx} u^G(v, S_v) \right\} dv.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Par ailleurs :

$$u^G(t, S_t)e^{-rt} = \tilde{V}_t^{x^G, \theta^G} = x^G + \int_0^t \theta_v^G \tilde{S}_v \sigma dB_v^* \tag{3.14}$$

$$= u^G(0, S_0) + \int_0^t e^{-rv} \theta_v^G S_v \sigma dB_v^*. \tag{3.15}$$

Par identification nous en déduisons que :

$$\theta_u^G = \partial_x u^G(u, S_u), \tag{3.16}$$

et que la fonction  $u^G$  satisfait :

$$\partial_t u^G(u, S_u) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \partial_{xx} u^G(u, S_u) + r S_u \partial_x u^G(u, S_u) = r u^G(u, S_u).$$

Ce raisonnement nous permet de voir que la fonction prix d'un actif contingent  $G$  est liée à l'équation aux dérivées partielles (**E.D.P.**) :

$$\begin{aligned}
\partial_t u^G(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} u^G(t, x) + r x \partial_x u^G(t, x) &= r u^G(t, x), \\
\forall (t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+ &
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Cette **E.D.P.** est appelée **équation de Black-Merton-Scholes**. De plus, la fonction prix vérifie la condition terminale :

$$u^G(T, x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{3.18}$$

Nous constatons également que la stratégie de réplcation  $\theta^G$  est liée au pro-



cessus  $\{\partial_x u^G(t, S_t), 0 \leq t \leq T\}$ . Le théorème suivant permet de formaliser cette discussion :

**Théorème 3.1 (Équation de Black-Merton-Scholes)** *Soit  $v : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  solution de l'E.D.P. :*

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} v(t, x) + rx \partial_x v(t, x) = rv(t, x), \forall (t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+ \\ v(T, x) = \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (3.19)$$

*Nous supposons de plus que  $\partial_x v$  est telle que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ \int_0^T |\partial_x v(t, S_t) S_t|^2 dt \right] < \infty. \quad (3.20)$$

*Alors  $(v(0, S_0), \{\partial_x v(t, S_t), 0 \leq t \leq T\}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$  est une stratégie de réplication de  $G = \Phi(S_T)$  et le prix de  $G$  à la date  $t$  est  $v(t, S_t)$ .*

**Preuve.** Résultat admis. En particulier il est admis que la solution de l'E.D.P. existe et est unique.

### 3.3.4 Approche E.D.P. pour l'évaluation d'options, mise en pratique du delta-hedging

Pour le calcul pratique de la valeur d'une option en utilisant l'E.D.P. et pour la couverture de celle-ci il est possible de procéder comme suit :

1. l'E.D.P. (3.19) est résolue numériquement, d'une manière rétrograde en temps utilisant la donnée  $\Phi(x)$  à l'instant  $T$  ;
2. si  $S_0 = x$  le prix de l'option à l'instant  $t = 0$  sera la valeur  $v(0, x)$ . Le prix  $S_0$  est connu et donc le prix de l'option aussi ;
3. pour obtenir un portefeuille couvrant le risque d'une exposition à cette option (par exemple pour le vendeur d'options) il suffit de mettre en place une stratégie autofinancée  $(v(0, S_0), \theta)$  qui achète  $\partial_x v(0, S_0)$  parts de sous-jacent à l'instant initial. Cette stratégie est continûment adaptée pour avoir  $\partial_x v(t, S_t)$  parts de sous-jacent à l'instant  $t$ .

**Technique importante 3.3.1** *Un portefeuille qui met en place cette stratégie et qui vend une option à l'instant initial est garantie avoir une valeur finale nulle, peu importe le scénario suivi par le sous-jacent tant qu'il est conforme au modèle Black-Merton-Scholes.*

**Technique importante 3.3.2** *L'approche présentée ci-dessus est différente des approches présentées en section 3.3.2. Considérons par exemple une option indépendante du chemin.*

*La première approche calcule, à partir d'un prix initial  $S_0$  donné, la distribution de  $S_T$  et donc permet de connaître, sans effort additionnel notable, le prix de tous les actifs dérivés indépendants du chemin sur ce sous-jacent. Par contre en pratique le calcul de la stratégie de réplication est très peu robuste et des techniques plus avancées sont nécessaires pour en avoir une approximation de bonne qualité.*

*Le calcul à l'aide de l'E.D.P. permet lui aussi d'obtenir le prix d'une option donnée; par contre il faut un calcul E.D.P. pour toute nouvelle option. L'avantage du calcul E.D.P. est qu'il permet de connaître d'une manière très robuste la stratégie de réplication de l'option donc il offre une modalité pratique de couverture du risque apporté par l'actif contingent.*

### 3.3.5 Les Grecques

— **delta de l'option**  $\partial_x u^G(t, S_t)$

Ce terme indique la variation de prix de l'option par rapport à la variation du sous-jacent. Dans le modèle de Black-Merton-Scholes, ce terme correspond à la stratégie de réplication : nous parlons de stratégie de *couverture en delta* ou *delta-hedging* (en anglais) . Le delta d'un call est positif, celui d'un put est négatif (par la parité call-put leur différence doit être l'unité). Formule du delta d'un call européen (avec les notations précédentes) :

$$\Delta(t, S_t) = N(d_1). \quad (3.21)$$

— **gamma de l'option**  $\partial_{xx}u^G(t, S_t)$

Ce terme détermine la convexité du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent. Il représente également la sensibilité du delta par rapport aux variations du prix du sous-jacent, donc la sensibilité de la stratégie de couverture par rapport aux variations du sous-jacent. Lorsque le gamma est important il faut faire souvent des ré-allocations pour garder le portefeuille de couverture conforme aux exigences de la formule Black-Merton-Scholes. Le gamma est positif pour les calls et puts européens.

— **thêta de l'option**  $\partial_t u^G(t, S_t)$

Ce terme indique l'influence du temps qui passe sur la valeur de l'option.

### 3.4 Évaluation d'options américaines

Contrairement aux options européennes, les options américaines peuvent être exercées à n'importe quel moment, en particulier même **avant** la maturité  $T$ . Par exemple un call américain est une option qui donne le droit à l'acheteur d'exercer l'option à tout instant  $t \in [0, T]$  pour gagner  $(S_t - K)^+$ .

Il est évident que toute option américaine de même payoff qu'une option européenne doit avoir un prix plus grand puisqu'elle permet une plus grande souplesse dans l'exercice et donc peut théoriquement donner plus de chances de gagner de l'argent. En général les options américaines ont un prix strictement supérieur à leur analogues européennes. Il y a pourtant une exception. Considérons un call européen de maturité  $T$  et strike  $K$ , de prix noté  $C^E(t, S)$  et un call américain de maturité  $T$  et strike  $K$ , de prix noté  $C^A(t, S)$ . Nous avons donc  $C^A(t, S) \geq C^E(t, S)$ . Par ailleurs la formule (1.6) page 10) nous renseigne que

$$C^E(t, S) \geq (S - Ke^{-r(T-t)})^+ \geq (S - K)^+.$$

Donc le prix d'un call européen est toujours supérieur au gain d'exercice d'une option américaine.

Il est alors possible de faire le raisonnement suivant : si à un certain instant

$C^A(t, S_t) > C^E(t, S_t)$  alors on peut vendre un call américain et acheter un call européen (et rester avec une quantité positive en poche). Par la suite deux situations peuvent apparaître :

- soit l'acheteur de l'option américaine ne veut jamais exercer alors on atteint la maturité et les deux auront le même prix ;

- soit au contraire l'acheteur exerce à l'instant  $\tau > t$  alors à cet instant nous payons  $(S_\tau - K)^+$  en vendant le call européen de prix  $C^E(t, S_t) \geq (S_\tau - K)^+$  ; encore une fois nous empochons une quantité d'argent positive.

Donc dans les deux cas nous gagnons de l'argent : c'est une opportunité d'arbitrage. Ainsi, en A.O.A., on ne peut avoir  $C^A(t, S_t) > C^E(t, S_t)$  donc au contraire

$$C^A(t, S) = C^E(t, S), \forall t \in [0, T], \forall S \geq 0. \quad (3.22)$$

Le prix d'un call européen est donc égal au prix d'un call américain. Cette propriété est spécifique au call et ne marche plus, par exemple, pour le put.

### 3.5 Exercices

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$  un espace de probabilité filtré et  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard. On considère sur un horizon de temps fixé  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , un marché financier formé par un actif sans risque  $S^0$  et un actif risqué  $S$ . On se place dans le cadre du modèle de Black-Merton-Scholes en supposant que pour tout  $t \in [0, T]$

$$S_t^0 = e^{rt} \quad S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}.$$

Ici,  $r \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$  et  $\sigma > 0$  sont des constantes données. On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble

$$\mathcal{A} := \left\{ \theta \text{ processus } \mathbb{F}\text{-adapté t.q. : } \mathbb{E} \left[ \int_0^T |\theta_u|^2 du \right] < \infty \right\}$$

**Exercice 3.1 (Stratégie autofinancée)** Dans le modèle de Black-Merton-Scholes, une stratégie autofinancée est décrite par une couple  $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$  où  $x$  représente le capital initial et  $\theta_t$  le nombre d'unités de l'action  $S$  détenues à la date  $t$ . On note  $V_t^{x, \theta}$  la valeur à la date  $t$  de la stratégie  $(x, \theta)$  et  $\tilde{V}_t^{x, \theta} = V_t^{x, \theta} / S_t^0$

la valeur actualisée.

1. Donner  $\tilde{V}_t^{x,\theta}$  en fonction de  $x$  et de  $\theta$ . Calculer  $\mathbb{E}[\tilde{V}_t^{x,\theta}]$  et  $\text{var}(\tilde{V}_t^{x,\theta})$ .
2. Justifier que la mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^*$  définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} := \exp \left\{ -\frac{\mu-r}{\sigma} B_t - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 t \right\}$$

est une mesure de probabilité neutre au risque.

**Exercice 3.2 (Évaluation d'une option d'achat)** On considère une option d'achat sur  $S$  de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$ . Sa valeur terminale est égale à la variable aléatoire  $G = \max\{0, S_T - K\}$ .

1. On pose  $u(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [e^{-r(T-t)} G | S_t = x]$ . Exprimer  $u(t, x)$  en fonction de  $x, t, r, \sigma, K$  et de la fonction  $\mathbf{N} : y \mapsto \mathbf{N}(y) = \mathbb{P}[Z \leq y]$  où  $Z$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
2. Calculer la probabilité sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\mathbb{Q}^*$  que l'option soit exercée.
3. Vérifier que  $u$  est une fonction de classe  $C^{1,2}$  sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer les expressions de

$$\delta(t, x) := \partial_x u(t, x) \quad \gamma(t, x) := \partial_{xx} u(t, x) \quad \theta(t, x) := \partial_t u(t, x).$$

Montrer que la fonction  $u$  vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} u(t, x) + rx \partial_x u(t, x) &= ru(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+^* \\ u(T, x) &= \max\{x - K, 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

4. On considère le processus

$$\theta^* := \{\delta(t, S_t) = \partial_x u(t, S_t), \quad t \in [0, T]\}.$$

Vérifier que  $\theta^* \in \mathcal{A}$ .

5. On considère la stratégie financière  $(u(0, S_0), \theta^*)$ . Montrer que cette stratégie permet de répliquer l'option d'achat. Justifier alors que le prix à la date  $t$  de l'option d'achat est donné par  $p_t = u(t, S_t)$ .

**Exercice 3.3** Soit un actif contingent de payoff  $G \geq 0$  tel que  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[G^2] < \infty$  et de maturité  $T \in ]0, \infty[$ . Montrer qu'il n'est pas possible de répliquer  $G$  à l'aide d'une stratégie vérifiant  $\forall t \in [0, T[ : \theta_t = \frac{c}{S_t}$  avec  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ .

**Exercice 3.4** Soit, avec les notations du cours, un call européen de maturité  $T$  et strike  $K$  sur un actif  $S_t$  qui suit la dynamique Black-Merton-Scholes

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dB_t,$$

où  $\sigma_t \in L^2([0, T])$  ne s'annule jamais.

1. Trouver la formule du prix de l'option et montrer que le prix à l'instant zéro est égal au prix d'un call européen sur un sous-jacent de volatilité constante à préciser. Indication : utiliser un changement de probabilité comme celui donné dans l'exercice 2.19 page 73.
2. Trouver la formule du Delta et du Thêta.
3. Montrer que si  $\sigma_t$  n'est pas constante le prix de l'option sur  $t \in [0, T]$  n'est pas identique au prix d'un call européen sur un actif risqué de volatilité constante.

**Exercice 3.5** Soit, avec les notations du cours, un call asiatique  $G$  de maturité  $T$  et strike  $K$  sur un actif  $S_t$  qui suit la dynamique Black-Merton-Scholes :

$$G = \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right) - K \right]_+ \quad (3.23)$$

Montrer que son prix est inférieur à celui d'un call européen ayant les même caractéristiques.

**Exercice 3.6** Soit  $T > 0$  et  $C^E(t, S, K)$  le prix à l'instant  $t \in [0, T]$  d'un call européen de maturité  $T$  et strike  $K$  lorsque le prix du sous-jacent est égal à  $S$ . On introduit pour toute valeur de  $K$  un autre produit dérivé, appelé le call digital, qui est l'actif indépendant du chemin de pay-off  $G = 1_{S_T \geq K}$  ; son prix sera noté  $C^D(t, S, K)$ . On suppose que  $C^D$  est continue par rapport à  $K$  et que  $C^E$  est de classe  $C^1$  par rapport à  $K$ .

1. Pour tous  $K, \Delta K > 0$  on considère un portefeuille de valeur  $\Pi_t^1$  contenant  $\Delta K$  calls digitaux de strike  $K$  ainsi qu'un call européen de strike  $K + \Delta K$ . Soit un autre portefeuille de valeur  $\Pi_t^2$  contenant  $\Delta K$  calls digitaux de strike  $K + \Delta K$  et un call européen de strike  $K + \Delta K$ . Montrer que pour tout  $t \in [0, T]$  on a

$$\Pi_t^1 \geq C^E(t, S, K) \geq \Pi_t^2.$$

2. En déduire que  $C^D(t, S, K) = -\frac{\partial C^E(t, S, K)}{\partial K}$ .
3. Supposons que  $S_t$  suit le modèle de Black-Merton-Scholes ; trouver explicitement la stratégie  $x^G, \theta^G$  qui réplique  $G$  en fonction de  $K, T, \sigma, \mu, r$  et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

**Exercice 3.7** Soit  $T > 0$  et  $C^E(t, x)$  le prix d'un call européen de maturité  $T$ , strike  $K$  à l'instant  $t \leq T$  et lorsque le prix  $S_t$  du sous-jacent est égal à  $x$ . Le sous-jacent est supposé suivre le modèle de Black-Merton-Scholes. Nous introduisons aussi un autre produit dérivé, le call digital, qui est l'actif indépendant de chemin de payoff  $\mathbf{1}_{S_T \geq K}$  ; son prix, pour  $S_t = x$ , sera noté  $C^D(t, x)$ .

1. Calculer  $C^D(t, x)$  et  $\frac{\partial C^D(t, x)}{\partial x}$  ;
2. Donner le prix d'une option « titre ou rien » qui est un actif de payoff  $S_T \mathbf{1}_{S_T \geq K}$  ;
3. Peut-on répliquer un call digital avec un portefeuille qui ne contiendrait pas d'autre actif risqué que le call européen ?

**Exercice 3.8** Soit un marché composé d'un actif sans risque suivant la dynamique  $S_t^0 = e^{rt}$  et d'un actif risqué suivant la dynamique de Black-Merton-Scholes

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ . Soit un horizon de temps  $T > 0$  et  $T_1 \in ]0, T[$ . Pour tout  $t \in [0, T]$  on note  $C_t(T, S, K)$  le prix à la date  $t$  d'un call européen sur  $S$  de maturité  $T$  et strike  $K$ . Soit  $G$  un call européen de strike  $K_1$  et de maturité  $T_1$  dont

le sous-jacent est un call européen sur  $S$  de strike  $K$  et de maturité  $T$ . Son pay-off prend donc la forme  $G = (C_{T_1}(T, S, K) - K_1)_+$ .

1. Montrer que pour tout  $t \in [0, T_1]$  la valeur de  $G$  à la date  $t$  est donnée par  $v(T_1 - t, S_t)$  où

$$v(\theta, x) = \mathbb{E}[e^{-r\theta}(u(T_1, xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g}) - K_1)_+]$$

la fonction  $u(t, x)$  correspondant au prix à la date  $t$  du call européen sur  $S$  de strike  $K$  et de maturité  $T$  quand le sous-jacent de cette option est de valeur  $x$  (voir exercice 3.2 page 93) et  $g$  à une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

2. Montrer que

$$v(\theta, x) = \mathbb{E}[e^{-r\theta}u(T_1, xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g})1_{g>-d}] - K_1e^{-r\theta}\mathbf{N}(d)$$

avec

$$d = \frac{\log \frac{x}{x_1} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

où  $x_1$  est l'unique solution de  $u(T_1, x) = K_1$  et  $\mathbf{N}(y) = \mathbb{P}[Z \leq y]$  où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

3. Montrer qu'en prenant  $\theta = T_1 - t$  on a

$$v(\theta, x) + K_1e^{-r\theta}\mathbf{N}(d) = \mathbb{E}\left[\left(xe^{\sigma(\sqrt{\theta}g+\sqrt{\theta_1}g_1)-\frac{\sigma^2}{2}(\theta+\theta_1)} - Ke^{-r(\theta+\theta_1)}\right)1_A\right]$$

où  $\theta_1 = T - T_1$ ,  $g_1$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendante de  $g$  et  $A$  est défini par

$$A = \left\{ \sigma(\sqrt{\theta}g + \sqrt{\theta_1}g_1) > -(\log \frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(\theta + \theta_1)) \right\} \cap \{g > -d\}.$$

4. En déduire une expression de  $v(T_1 - t, x)$  à l'aide de  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}_2$  définie par  $\mathbf{N}_2(y, y_1, \rho) = \mathbb{P}(g < y, g + \rho g_1 < y_1)$ .
5. Montrer que l'on peut répliquer l'option composée à l'aide d'un portefeuille ne contenant que de l'actif sans risque et de l'actif risqué  $S$ .



## Chapitre 4

# Solution des exercices

### 4.1 Exercices du chapitre 1

**Exercice 1.1** Supposons que  $\theta$  est une stratégie auto-financée. D'après la formule (1.2) page 5, pour tout  $k = 1, \dots, N$  on a

$$\tilde{V}_{t_k} - \tilde{V}_{t_{k-1}} = \langle \theta_{t_k}, \Delta \tilde{S}_{t_k} \rangle = \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_k} \rangle - \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle. \quad (4.1)$$

Or, par définition,  $\tilde{V}_{t_k} = \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_k} \rangle$  et  $\tilde{V}_{t_{k-1}} = \langle \theta_{t_{k-1}}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle$ . Par conséquent

$$\tilde{V}_{t_k} - \tilde{V}_{t_{k-1}} = \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_k} \rangle - \langle \theta_{t_{k-1}}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle. \quad (4.2)$$

En comparant (4.1) et (4.2) on voit donc que pour tout  $k = 1, \dots, N$ , on a

$$\langle \theta_{t_{k-1}}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle = \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle. \quad (4.3)$$

Réciproquement, supposons (4.3) vérifiée pour tout  $k = 1, \dots, N$ . Alors

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{t_k} - \tilde{V}_{t_{k-1}} &= \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_k} \rangle - \langle \theta_{t_{k-1}}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle \\ &= \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_k} \rangle - \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle \\ &= \langle \theta_{t_k}, \Delta \tilde{S}_{t_k} \rangle, \end{aligned}$$

l'égalité (1.2) page 5 en découle immédiatement.

**Exercice 1.2** On peut traiter cet exercice en utilisant le corollaire 1.1 page 8 comme dans la preuve de la proposition 1.3 page 9. Cependant, on va plutôt procéder en montrant que si l'une des inégalités de la proposition n'est pas vérifiée on peut explicitement construire une stratégie d'arbitrage. Supposons donc qu'avec une probabilité strictement positive il existe une date  $t \in [0, T]$  telle que  $C_t(S, T, K) > S$ . Considérons un investisseur qui partant d'une richesse initiale nulle suit la stratégie suivante :

- i)* il ne procède à aucun investissement tant que  $C_t(S, T, K) \leq S$  et ce jusqu'à la date terminale  $T$ ,
- ii)* dès que  $C_t(S, T, K) > S$  (ce qui arrive à une date indéterminée  $t \in [0, T]$  avec une probabilité strictement positive), il vend un call sur  $S$  de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  et achète une unité du sous-jacent  $S$ . Le solde de ces opérations  $C_t(S, T, K) - S$  est strictement positif et l'investisseur le place en actif sans risque. Après cela il ne procède plus à aucune opération jusqu'à la date  $T$ . À ce moment là :
  - soit l'acheteur du call décide de l'exercer, l'investisseur lui livre alors le sous-jacent qu'il détient,
  - soit l'acheteur du call décide de ne pas l'exercer.

Dans tous ces sous-cas du cas *ii)* la fortune finale de l'investisseur est supérieure ou égale au montant qui a été placé sur l'actif sans risque modifié par l'action du taux d'intérêt.

Au final, en considérant les issues des deux cas *i)* et *ii)* on constate que si il existe une probabilité non-nulle qu'à un moment quelconque de  $[0, T]$  la borne supérieure sur le prix du call (1.6) n'est pas vérifiée on peut construire une stratégie d'arbitrage. Par conséquent, l'absence d'opportunité d'arbitrage suffit à elle seule pour impliquer, quel que soit le modèle, la validité de la borne supérieure de (1.6).

Pour prouver la borne inférieure sur le prix du call on doit prouver que pour tout  $t \in [0, T]$  on a à la fois  $C_t(S, T, K) \geq 0$  et  $C_t(S, T, K) \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$ . Prouvons la première inégalité en supposant qu'avec une probabilité non-nulle il existe une date  $t \in [0, T]$  telle que  $C_t(S, T, K) < 0$ , autrement dit, dans cette situation, l'acheteur du call reçoit  $-C_t(S, T, K)$  au moment de son achat.

Considérons un investisseur qui, partant d'une richesse initiale nulle, suit la stratégie suivante :

- i) il ne procède à aucun investissement tant que  $C_t(S, T, K) \geq 0$  et ce jusqu'à la date terminale  $T$ ,
- ii) dès que  $C_t(S, T, K) < 0$  (ce qui arrive à  $t \in [0, T]$  indéterminé avec une probabilité strictement positive), il achète un call sur  $S$  de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  et, ce faisant, perçoit donc  $-C_t(S, T, K) > 0$ . Il place cette somme en actif sans risque. Après cela il ne procède plus à aucune opération jusqu'à la date  $T$ . La fortune finale de l'investisseur est donc supérieure ou égale au montant qui a été placé à la date  $t$  sur l'actif sans risque modifié par l'action du taux d'intérêt puisque  $C_T(S, T, K) = (S_T - K)^+ \geq 0$ .

Par conséquent, on a montré que si la probabilité qu'il existe  $t \in [0, T]$  tel que  $C_t(S, T, K) < 0$  est non-nulle on peut mettre en place une stratégie d'arbitrage. Il s'ensuit que l'absence d'opportunité d'arbitrage suffit à elle seule pour impliquer, quel que soit le modèle, qu'avec probabilité égale à un on a toujours  $C_t(S, T, K) \geq 0$ .

Prouvons de façon analogue qu'avec probabilité un, pour tout  $t \in [0, T]$ , on a  $C_t(S, T, K) \geq S - Ke^{-r(T-t)}$ . Supposons donc qu'avec une probabilité non-nulle il existe un  $t \in [0, T]$  tel que  $C_t(S, T, K) < S - Ke^{-r(T-t)}$ . Considérons un investisseur qui partant d'une richesse initiale nulle suit la stratégie suivante :

- i) il ne procède à aucun investissement aussi longtemps que la condition est  $C_t(S, T, K) \geq S - Ke^{-r(T-t)}$  vérifiée,
- ii) dès que  $C_t(S, T, K) < S - Ke^{-r(T-t)}$  (ce qui arrive à une date indéterminée  $t \in [0, T]$  avec une probabilité strictement positive), il vend à découvert une unité de  $S$  en s'engageant à la livrer à la date  $T$  et achète un call sur  $S$  de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$ . Le solde de ces opérations  $S - C_t(S, T, K)$  est strictement supérieur à  $Ke^{-r(T-t)}$  et l'investisseur le place sur l'actif sans risque. Après cela il ne procède plus à aucune opération jusqu'à la date  $T$ . À ce moment là, il dispose d'un numéraire strictement supérieur à  $K$  et d'un call sur  $S$  de prix d'exercice  $K$  et alors :

- soit le prix de  $S$  en  $T$  est inférieur ou égal à  $K$  et l'investisseur peut faire face à sa vente à découvert à l'aide du numéraire,
- soit le prix de  $S$  en  $T$  est strictement supérieur à  $K$  et alors l'investisseur utilise son numéraire pour exercer le call qu'il possède et ainsi pouvoir livrer  $S$ .

Dans tous ces sous-cas du cas *ii*) la fortune finale de l'investisseur est strictement positive.

On a donc à nouveau montré que si l'inégalité considérée n'est pas vraie avec probabilité un on peut construire une stratégie d'arbitrage. Finalement, on a prouvé qu'avec probabilité un les trois inégalités dans (1.6) sont vérifiées pour tout  $t \in [0, T]$ .

La preuve des bornes sur le prix du put s'obtient en raisonnant de la même façon ou encore en partant de l'encadrement du prix du call et en utilisant la relation de parité Call-Put (proposition 1.3 page 9).

**Exercice 1.3** On commence par prouver la convexité du prix du call par rapport au prix d'exercice et pour cela on considère une date  $t \in [0, T]$ , deux prix d'exercice  $K_1, K_2 \geq 0$  et  $\lambda \in [0, 1]$  pour lesquels il s'agit donc de montrer que

$$C_t(S, T, \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2) \leq \lambda C_t(S, T, K_1) + (1 - \lambda)C_t(S, T, K_2). \quad (4.4)$$

Considérons la stratégie financière **str 1** qui consiste à acheter à la date  $t$  le call de prix d'exercice  $\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$  et à maintenir le portefeuille inchangé jusqu'à la maturité  $T$ . Sa valeur terminale est

$$V_T^{\text{str1}} = (S_T - \lambda K_1 - (1 - \lambda)K_2)^+.$$

Considérons maintenant la stratégie **str 2** qui consiste à acheter à la même date  $t$   $\lambda$  unités du call sur  $S$  de prix d'exercice  $K_1$  et  $1 - \lambda$  unités du call sur  $S$  de prix d'exercice  $K_2$ . La valeur terminale de cette stratégie est donnée par

$$V_T^{\text{str2}} = \lambda(S_T - K_1)_+ + (1 - \lambda)(S_T - K_2)_+.$$

Comme  $K \mapsto (S_T - K)_+$  est convexe on a

$$(S_T - \lambda K_1 - (1 - \lambda)K_2)^+ \leq \lambda(S_T - K_1)_+ + (1 - \lambda)(S_T - K_2)_+$$

donc  $V_T^{\text{str1}} \leq V_T^{\text{str2}}$  d'où  $V_t^{\text{str1}} \leq V_t^{\text{str2}}$  d'après le corollaire 1.1 page 9, ce qui prouve (4.4). La preuve de la convexité du prix du put par rapport au prix d'exercice s'obtient en raisonnant de la même façon ou encore en partant de la convexité du prix du call et en utilisant la proposition 1.3 page 9.

**Exercice 1.4** 1. D'après (1.1) page 2 on a  $S_{t_k}^0 = S_{t_0}^0 e^{r(t_k - t_0)}$  par conséquent  $S_{t_0}^0 = 100, S_{t_1}^0 = 106$  et  $S_{t_2}^0 = 112.36$ . Puisque  $\tilde{V}_{t_k} = V_{t_k}/S_{t_k}^0$  on obtient  $\tilde{V}_{t_0} = 10, \tilde{V}_{t_1} = 10$  et  $\tilde{V}_{t_2} = 9.274$ .

2. Le portefeuille étant auto-financé, d'après la formule (1.2) page 5 on a

$$\tilde{V}_{t_1} = \tilde{V}_{t_0} + \left( \theta \bullet \Delta \tilde{S} \right)_{t_1}.$$

Or  $\tilde{V}_{t_1} = \tilde{V}_{t_0}$  donc  $\left( \theta \bullet \Delta \tilde{S} \right)_{t_1} = \theta_{t_1}^1 \tilde{S}_{t_1}^1 - \theta_{t_1}^1 \tilde{S}_{t_0}^1 = 0$  et  $\theta_{t_1}^1 = 0$  puisque  $\tilde{S}_{t_1}^1 = 1.132$  et  $\tilde{S}_{t_0}^1 = 1$ . De plus on a  $V_{t_0} = \theta_{t_1}^0 S_{t_0}^0 + \theta_{t_1}^1 S_{t_0}^1$  donc  $\theta_{t_1}^0 = 10$ . De même on voit que  $\tilde{V}_{t_2} - \tilde{V}_{t_1} = \theta_{t_2}^1 \tilde{S}_{t_2}^1 - \theta_{t_2}^1 \tilde{S}_{t_1}^1 = -0.726$  donc  $\theta_{t_2}^1 = 3$  puisque  $\tilde{S}_{t_2}^1 = 0.89$  et  $\tilde{S}_{t_1}^1 = 1.132$ . Comme  $V_{t_1} = \theta_{t_2}^0 S_{t_1}^0 + \theta_{t_2}^1 S_{t_1}^1$  on obtient finalement  $\theta_{t_2}^0 = 6.604$ .

3. Une stratégie impliquant seulement l'actif sans risque et partant d'une valeur initiale  $V_{t_0} = 1000$  conduit à une valeur finale de  $V_{t_0} = 1123.6$ .

**Exercice 1.5** 1. Pour tout  $k = 1, \dots, N$  la valeur du portefeuille à la date  $t_{k-1}$  est  $V_{t_{k-1}} = \langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_{k-1}} \rangle$ . Puisque à chaque date l'investisseur décide d'une ré-allocation de sa richesse en en plaçant la moitié sur l'actif risqué on a

$$\begin{aligned} V_{t_{k-1}}/2 &= \langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_{k-1}} \rangle / 2 \\ &= \theta_{t_k}^1 S_{t_{k-1}}^1 \end{aligned}$$

d'où

$$\theta_{t_k}^1 = \langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_{k-1}} \rangle / (2S_{t_{k-1}}^1).$$

L'autre moitié de la richesse étant placée sur l'actif sans risque on voit que

$$\begin{aligned} V_{t_{k-1}}/2 &= \langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_{k-1}} \rangle / 2 \\ &= \theta_{t_k}^0 S_{t_{k-1}}^0 \end{aligned}$$

d'où

$$\theta_{t_k}^0 = \langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_{k-1}} \rangle / (2S_{t_{k-1}}^0).$$

2. Pour tout  $k = 1, \dots, N$ ,  $V_{t_k} = \theta_{t_k}^0 S_{t_k}^0 + \theta_{t_k}^1 S_{t_k}^1$  d'où, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} V_{t_k} &= \frac{V_{t_{k-1}}}{2S_{t_{k-1}}^0} S_{t_k}^0 + \frac{V_{t_{k-1}}}{2S_{t_{k-1}}^1} S_{t_k}^1 \\ &= V_{t_{k-1}} \left( \frac{1}{2} \frac{S_{t_k}^0}{S_{t_{k-1}}^0} + \frac{1}{2} \frac{S_{t_k}^1}{S_{t_{k-1}}^1} \right). \end{aligned}$$

**Exercice 1.6** 1. D'après la définition A.6 page 193 on doit vérifier que deux conditions sont remplies

i) pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ . D'après l'inégalité triangulaire, pour tout entier  $n \geq 1$  on a  $|X_n| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k|$  donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|] &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|\xi_k|] \\ &= n\mathbb{E}[|\xi_1|] \\ &< \infty \end{aligned}$$

puisque  $\xi_1, \dots, \xi_n$  ont tous même loi et que cette loi est de variance finie.

ii) pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ . Ici, pour tout  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[\xi_1 + \dots + \xi_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \xi_1 + \dots + \xi_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}] \\ &= X_n \end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}[\xi_1 + \dots + \xi_n|\mathcal{F}_n] = \xi_1 + \dots + \xi_n$  car les variables aléatoires  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sont

$\mathcal{F}_n$ -mesurables et  $\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = 0$  car  $\xi_{n+1}$  est indépendante de  $\mathcal{F}_n$  (proposition A.5 page 192).

2. Pour tout  $n \geq 0$  on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(\xi_1 + \cdots + \xi_n)^2 + 2\xi_{n+1}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) + \xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(\xi_1 + \cdots + \xi_n)^2|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[2\xi_{n+1}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)|\mathcal{F}_n] + \\ &\quad \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] \\ &= (\xi_1 + \cdots + \xi_n)^2 + 2(\xi_1 + \cdots + \xi_n)\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2] \\ &= X_n^2 + \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2]\end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}[2\xi_{n+1}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)|\mathcal{F}_n] = 2(\xi_1 + \cdots + \xi_n)\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$  car  $(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable (proposition A.5 page 192). Supposons qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  telle que  $a_0 = 0$  et  $(X_n^2 - a_n)_{n \geq 0}$  soit une martingale et montrons que cette suite est nécessairement unique. Si  $(X_n^2 - a_n)_{n \geq 0}$  est une martingale, pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathbb{E}[X_{n+1}^2 - a_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n^2 - a_n$ . Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}^2 - a_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - a_{n+1} \\ &= X_n^2 + \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2] - a_{n+1}\end{aligned}$$

donc pour tout  $n \geq 0$  on a  $a_{n+1} = a_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2]$  ce qui ajouté au fait que  $a_0 = 0$  détermine  $(a_n)_{n \geq 0}$  de façon unique. Réciproquement, prouvons qu'en prenant  $a_0 = 0$  et  $a_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\xi_k^2]$  on obtient une suite croissante  $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}$  telle  $(X_n^2 - a_n)_{n \geq 0}$  soit une martingale. Pour tout  $n \geq 0$  la variable aléatoire  $X_n^2 - a_n$  est clairement intégrable et on a de plus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}^2 - a_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - a_{n+1} \\ &= X_n^2 + \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2] - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}[\xi_k^2] \\ &= X_n^2 - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\xi_k^2] = X_n^2 - a_n\end{aligned}$$

alors que la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  est clairement croissante.

3. On commence par établir que  $\mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1}|\mathcal{G}_n] = X_nY_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\eta_{n+1}]$  pour tout  $n \geq 0$ . En effet, pour tout  $n \geq 0$ , puisque  $X_n$  et  $Y_n$  sont de carré intégrable alors  $X_nY_n$  est intégrable (par Cauchy-Schwartz) et

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= \mathbb{E}[(\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1})(\eta_1 + \cdots + \eta_{n+1})|\mathcal{G}_n] \\
 &= \mathbb{E}[(\xi_1 + \cdots + \xi_n)(\eta_1 + \cdots + \eta_n)|\mathcal{G}_n] \\
 &\quad + \mathbb{E}[\xi_{n+1}(\eta_1 + \cdots + \eta_n)|\mathcal{G}_n] \\
 &\quad + \mathbb{E}[\eta_{n+1}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)|\mathcal{G}_n] \\
 &\quad + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\eta_{n+1}|\mathcal{G}_n] \\
 &= (\xi_1 + \cdots + \xi_n)(\eta_1 + \cdots + \eta_n) \\
 &\quad + (\eta_1 + \cdots + \eta_n)\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{G}_n] \\
 &\quad + (\xi_1 + \cdots + \xi_n)\mathbb{E}[\eta_{n+1}|\mathcal{G}_n] + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\eta_{n+1}] \\
 &= X_nY_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\eta_{n+1}]
 \end{aligned}$$

d'après la proposition A.5 page 192. Supposons qu'il existe une suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  telle que  $d_0 = 0$  et  $(X_nY_n - d_n)_{n \geq 0}$  soit une martingale et montrons qu'elle est nécessairement unique. En effet, si  $(X_nY_n - d_n)_{n \geq 0}$  est une martingale, pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1} - d_{n+1}|\mathcal{G}_n] = X_nY_n - d_n$  et par ailleurs

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1} - d_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1}|\mathcal{G}_n] - d_{n+1} \\
 &= X_nY_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\eta_{n+1}] - d_{n+1}
 \end{aligned}$$

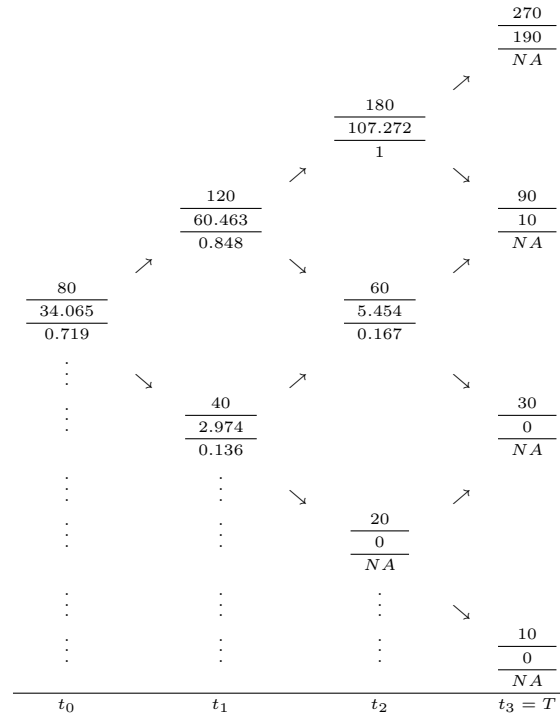
donc pour tout  $n \geq 0$  on a nécessairement  $d_{n+1} = d_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\eta_{n+1}]$  ce qui ajouté au fait que  $d_0 = 0$  détermine  $(d_n)_{n \geq 0}$  de façon unique. Réciproquement, prouvons qu'en prenant  $d_0 = 0$  et  $d_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\xi_k\eta_k]$  on obtient une suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  telle  $X_nY_n - d_n$  soit une martingale. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathbb{E}[|X_nY_n|] \leq (\mathbb{E}[X_n^2]\mathbb{E}[Y_n^2])^{1/2} < \infty$  et

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1} - d_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1}|\mathcal{G}_n] - d_{n+1} \\
 &= X_nY_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\eta_{n+1}] - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}[\xi_k\eta_k] \\
 &= X_nY_n - d_n.
 \end{aligned}$$





**Exercice 1.8** 1. D'après (1.8) page 16 on a  $q = 0.6$ .



2. Scénario  $80 \rightarrow 120 \rightarrow 60 \rightarrow 90$  : à  $t_0$  le vendeur du call reçoit 34.065 (prix du call). Pour se couvrir il doit acheter 0.719 unités de  $S$  ce qui lui coûte 57.52. Il doit donc emprunter  $57,52 - 34.065 = 23.455$ . À la date  $t_1$ , si une unité d'actif risqué coûte 120, le vendeur du call doit en posséder 0.848 unités pour se couvrir. Il va donc en acheter  $0.848 - 0.719 = 0.129$  unités supplémentaires, ce qui lui coûte  $0.129 \times 120 = 15.48$ . Pour faire face à cet achat il a dû emprunter ce qui porte le total de sa dette à  $23.455 \times 1.1 + 15.48 = 41,28$ . À la date  $t_2$ , si une unité d'actif risqué coûte 60, le vendeur du call ne doit plus en posséder que 0.167 unités pour se couvrir. Il vend donc  $0.848 - 0.167 = 0.681$  unités d'actif risqué ce qui lui rapporte  $0.681 \times 60 = 40.86$ . Avec cette somme il rembourse une partie de sa dette qui à cette date s'élève à  $41,28 \times 1.1 = 45.408$ . Il repart donc de  $t_2$  avec une dette de  $45.408 - 40.86 = 4.548$ . Finalement, si l'actif risqué vaut 90 en  $t_3$ , l'option sera exercée par l'acheteur. Le vendeur devra donc livrer une unité d'actif risqué en échange du prix d'exercice de l'option,

à savoir 80. Il devra donc se procurer  $1 - 0.167 = 0.833$  unités de l'actif risqué ce qui va lui coûter  $90 \times 0.833 = 74.97$ . Par ailleurs il lui reste à rembourser  $4.548 \times 1.1 = 5.003$  ce qui porte ses dépenses en  $t_3$  à  $74.97 + 5.003 = 79.973$ . Mais il perçoit 80 quand l'acheteur du call procède à l'exercice de l'option : il a pu faire face.

Scénario  $80 \rightarrow 120 \rightarrow 60 \rightarrow 30$  : La stratégie de couverture est la même puisque la seule différence entre les deux situations n'est observée qu'à  $t_3$ , moment où plus aucune prise de décision n'est possible pour le vendeur du call. Si le prix de l'actif risqué à ce stade est 30 l'option ne sera pas exercée. Cependant, le vendeur du call peut faire face à sa dette  $4.55 \times 1.1 = 5.003$  car la vente des 0.167 unités d'actif risqué lui rapporte  $0.167 \times 30 = 5.01$ .

*La théorie prévoit qu'à la date terminale le vendeur devrait équilibrer ses flux monétaires. On voit qu'ici on s'en écarte de l'ordre de quelques pour mille. C'est une conséquence d'erreurs d'arrondis.*

**Exercice 1.9** On suppose que l'actif risqué évolue sur un arbre trinomial : à chaque date sa valeur peut être multipliée par le facteur  $u$  (« up »), le facteur  $m$  (« middle ») ou le facteur  $d$  (« down ») avec  $0 < d < m < u$ . Comme pour l'arbre binomial il *suffit* que les v.a.  $Y_1, \dots, Y_N$  soient i.i.d. sous  $\mathbb{Q}$  et que  $\mathbb{Q}$  vérifie les deux conditions

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(Y_1 = d) + \mathbb{Q}(Y_1 = m) + \mathbb{Q}(Y_1 = u) &= 1 \\ d\mathbb{Q}(Y_1 = d) + m\mathbb{Q}(Y_1 = m) + u\mathbb{Q}(Y_1 = u) &= e^{r\Delta t}\end{aligned}$$

pour que  $\tilde{S}$  soit une martingale sous  $\mathbb{Q}$ . Mais ce système de deux équations à trois inconnues peut admettre plusieurs solutions donc la probabilité risquée neutre peut ne pas être unique.

**Exercice 1.10** Supposons que  $S_T^1$  prends ses valeurs dans  $\{s_1, \dots, s_M\}$ . Pour tout  $1 \leq j \leq M$  on considère l'actif contingent de pay-off  $G^j = \mathbf{1}_{S_T^1 = s_j}$ . Le marché étant complet  $G^j$  est répliquable et d'après la proposition 1.7 page 12 pour tout  $t_k \in \mathcal{T}$  on a

$$p_{t_k}^{G^j} = e^{-r(T-t_k)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G^j | \mathcal{F}_{t_k}].$$

En particulier en prenant  $t_k = t_0$  on a

$$p_{t_0}^{G^j} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{S_T^1 = s_j} | \mathcal{F}_{t_0}] = e^{-rT} \mathbb{Q}(S_T^1 = s_j).$$

On constate donc que la connaissance des prix de tous les actifs contingents de pay-off  $G^j = \mathbf{1}_{S_T^1 = s_j}$  nous donne la connaissance complète de la probabilité risque neutre. Si  $d > 1$ , en considérant de même tous les actifs contingents de payoff

$$G^{j_1, \dots, j_d} = \mathbf{1}_{S_T^1 = s_{j_1}, \dots, S_T^d = s_{j_d}}, \quad j_1, \dots, j_d \in \{1, \dots, M\},$$

on voit que la connaissance des prix des ces actifs contingents en  $t_0$  est équivalente à la connaissance de la loi jointe des  $S_T^1, \dots, S_T^d$  sous  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice 1.11** On commence par supposer que  $G$  est répliquable. D'après la proposition 1.7 page 12, pour tout  $t_k \in \mathcal{T}$  la valeur en  $t_k$  de l'actif contingent  $p_{t_k}^G$  est donnée par  $e^{-r(T-t_k)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_N}^1) | \mathcal{F}_{t_k}]$  qui est une fonction de  $S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1$ . En particulier la valeur en  $t_0$  de  $G$  est  $v = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G]$  et sa valeur en  $T$  est  $\phi(S_{t_0}^1, S_{t_1}^1, \dots, S_{t_N}^1)$ . Donc, pour tout  $k = 0, \dots, N-1$  on a

$$\begin{aligned} & p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t_k)} \phi(S_{t_0}^1, \dots, S_T^1) | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left[ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t_k)} \phi(S_{t_0}^1, \dots, S_T^1) | \mathcal{F}_{t_{k+1}}] \right] | \mathcal{F}_{t_k} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\Delta t} p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_{k+1}}^1) | \mathcal{F}_{t_k} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\Delta t} \left( \mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=u\}} + \mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=d\}} \right) p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_{k+1}}^1) | \mathcal{F}_{t_k} \right] \\ &= e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=u\}} p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1 u) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=d\}} p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1 d) | \mathcal{F}_{t_k} \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1 u)$  et  $p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1 d)$  sont  $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurables alors que  $\mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=u\}}$  et  $\mathbf{1}_{\{Y_{k+1}=d\}}$  sont indépendantes de  $\mathcal{F}_{t_k}$  on obtient l'expression (1.16) après utilisation des propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle (proposition A.5 page 192). Noter que (1.16), combiné à  $p_{t_N}^G = \phi$ , conduit de façon unique, par récurrence descendante, à une famille  $p_{t_k}^G, t_k \in \mathcal{T}$ , de fonctions définies sur les valeurs possibles de  $(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1)$ .

Montrons à présent, à l'aide de la famille  $p_{t_k}^G, t_k \in \mathcal{T}$ , que  $G$  est effectivement répliquable en considérant le problème de sa couverture. Nous procédons par récurrence en montrant que pour tout  $k = 0, \dots, N$  l'actif  $p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1)$  est répliquable en suivant la stratégie  $\theta$  donnée par l'énoncé. Ceci prouvera que  $G$  est répliquable puisque  $p_{t_N}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_N}^1) = \phi(S_{t_0}^1, \dots, S_T^1) = G$ . Le cas  $k = 0$  est trivial car  $p_{t_0}^G(S_{t_0}^1)$  est la constante réelle  $v$ , répliquable avec un portefeuille de valeur  $v$  investi uniquement en actif sans risque. Supposons à présent que nous avons montré pour  $k$  fixé que  $p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1)$  est répliquable à l'aide d'une stratégie de valeur initiale  $v$  et de  $\theta_{t_\ell}^1$  ( $\ell = 1, \dots, k$ ) définies comme indiqué; nous montrons que ceci est encore vrai pour  $k + 1$ . D'après (1.3) page 5, nous sommes donc à la recherche d'une variable  $\mathcal{F}_{t_k}$  mesurable  $\theta_{t_{k+1}}^1$  telle que

$$e^{r\Delta t} p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1) + \theta_{t_{k+1}}^1 (S_{t_{k+1}}^1 - S_{t_k}^1 e^{r\Delta t}) = p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_{k+1}}^1).$$

Ceci, selon les valeurs possibles de  $S_{t_{k+1}}^1$ , conduit à un système de deux équations

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1) + \theta_{t_{k+1}}^1 S_{t_k}^1 (u - e^{r\Delta t}) &= p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1, S_{t_k}^1 u) \\ e^{r\Delta t} p_{t_k}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1) + \theta_{t_{k+1}}^1 S_{t_k}^1 (d - e^{r\Delta t}) &= p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1, S_{t_k}^1 d) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\theta_{t_{k+1}}^1 = \frac{p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1, S_{t_k}^1 u) - p_{t_{k+1}}^G(S_{t_0}^1, \dots, S_{t_k}^1, S_{t_k}^1 d)}{S_{t_k}^1 u - S_{t_k}^1 d},$$

c'est-à-dire la formule attendue pour  $\theta^1$ . On remarque à nouveau que  $\theta^1$  est égal au quotient entre la variation du prix du dérivé et la variation du produit sous-jacent. La stratégie  $\theta$  ainsi construite permet de répliquer  $G$  ce qui conclut la preuve.

## 4.2 Exercices du chapitre 2

**Exercice 2.1** 1. Clairement, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_{B_0}(u) = 1$ . Quand  $t > 0$  la fonction caractéristique de  $B_t$  s'obtient comme solution d'une équation

différentielle. Tout d'abord remarquons que pour tout  $u \in \mathbb{R}$  le conjugué du nombre (a priori) complexe  $\Phi_{B_t}(u)$  est  $\Phi_{B_t}(-u)$  donc  $\Phi_{B_t}(u)$  puisque  $B_t$  est de loi symétrique. Ainsi, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_{B_t}(u)$  est un nombre réel. Ensuite, puisque d'une part  $u \mapsto e^{iuB_t}$  est dérivable  $\mathbb{P}$ -presque sûrement et que d'autre part  $|iB_te^{iuB_t}| \leq |B_t|$  est intégrable, il découle du théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre que  $\Phi_{B_t}(u)$  est dérivable en tout  $u \in \mathbb{R}$  et que  $\Phi'_{B_t}(u) = \mathbb{E}[iB_te^{iuB_t}]$ . Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\Phi'_{B_t}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} ix e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi t}} \left[ -te^{iux} e^{-\frac{x^2}{2t}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} ute^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= -ut\Phi_{B_t}(u).\end{aligned}$$

Ainsi  $\Phi_{B_t}$  est l'unique solution de l'équation différentielle  $f'(u) = -utf(u)$  vérifiant  $f(0) = 1$  donc  $\Phi_{B_t}(u) = e^{-t\frac{u^2}{2}}$ .

2. On a  $\mathbb{E}[|B_0|] = 0$  et pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}[B_0 \mathbf{1}_{B_0 \leq a}] = 0$ . Si  $t > 0$  on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|B_t|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \left[ -te^{-\frac{x^2}{2t}} \right]_0^{\infty} \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\end{aligned}$$

et pour tout  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t \mathbf{1}_{B_t \leq a}] &= \int_{-\infty}^a x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[ -te^{-\frac{x^2}{2t}} \right]_{-\infty}^a \\ &= -\sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2t}}.\end{aligned}$$

3. Une intégration par parties nous montre que si  $X$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^4] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 3.\end{aligned}$$

Comme pour tout  $t > 0$ ,  $\frac{B_t}{\sqrt{t}}$  est de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|B_t|^4] &= t^2 \mathbb{E}\left[\left|\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right|^4\right] \\ &= 3t^2\end{aligned}$$

tandis que si  $t = 0$  l'égalité est bien sûr vérifiée.

**Exercice 2.2** Puisque  $X$  est tel que pour tous  $0 \leq s < t$  l'accroissement  $X_t - X_s$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t - s)$  la v.a.  $\frac{X_t - X_s}{\sqrt{t - s}}$  est de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Donc, d'après l'exercice 2.1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_t - X_s|^4] &= (t - s)^2 \mathbb{E}\left[\left|\frac{X_t - X_s}{\sqrt{t - s}}\right|^4\right] \\ &= 3(t - s)^2.\end{aligned}$$

**Exercice 2.3** 1. Pour tout réel  $u$  on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{uX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2ux + u^2) + \frac{1}{2}u^2} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}u^2}\end{aligned}\tag{4.5}$$

puisque l'intégrale dans (4.5) est l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de la densité de la loi  $\mathcal{N}(u, 1)$ .

Pour tout  $t > 0$  on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_0 \exp \{\sigma B_t + \mu t\}] &= S_0 e^{\mu t} \mathbb{E}[e^{\sigma \sqrt{t} \frac{B_t}{\sqrt{t}}}] \\ &= S_0 e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t}\end{aligned}$$

alors que l'égalité demeure clairement vraie si  $t = 0$ . On montre de même que la variance de  $S_t$  vaut  $S_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t} [e^{\sigma^2 t} - 1]$  pour tout  $t \geq 0$ .

2. Pour tous  $0 \leq s \leq t$  on a

$$S_t = \exp\{\sigma(B_t - B_s) + \mu(t - s)\} S_0 \exp\{\sigma B_s + \mu s\}$$

donc  $S_t = \frac{S_t}{S_s} S_s$ . La variable  $\frac{S_t}{S_s}$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$  car  $B_t - B_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$  puisque  $B$  est un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien. On a aussi que  $B_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable, toujours parce que  $B$  est un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien. Le résultat annoncé est donc une conséquence de la formule (A.16) de la proposition A.5 page 193.

**Exercice 2.4** 1. Le processus  $B$  est  $\mathbb{F}$ -adapté et pour tout  $t \geq 0$  la v.a. de loi gaussienne  $B_t$  est intégrable. De plus

$$\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s] = B_s$$

car  $B$  étant un  $\mathbb{F}$  mouvement brownien on a que  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  donc  $\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$  et que  $B_s$  est  $\mathcal{F}_s$  mesurable donc  $\mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s] = B_s$ . Le processus  $\{B_t, t \geq 0\}$  est donc une  $\mathbb{F}$ -martingale.

2. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $B_t^2 - t$  est l'image par une application mesurable de  $B_t$  qui est lui même  $\mathcal{F}_t$  mesurable donc  $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$  est  $\mathbb{F}$ -adapté. La variable aléatoire  $B_t$  étant une variable aléatoire gaussienne  $B_t^2$  est intégrable. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 - t | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 - 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= t - s + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s\end{aligned}$$



car  $B_s$  étant  $\mathcal{F}_s$  mesurable on a  $\mathbb{E}[B_s^2|\mathcal{F}_s] = B_s^2$  et  $B_t - B_s$  étant indépendante de  $\mathcal{F}_s$  on a  $\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = B_s\mathbb{E}[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = B_s\mathbb{E}[(B_t - B_s)] = 0$  et  $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$ . Le processus  $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$  est donc une  $\mathbb{F}$ -martingale.

3. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente le processus est  $\mathbb{F}$ -adapté et intégrable. De plus

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[B_t^3 - 3tB_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^3 - 3t(B_t - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^3|\mathcal{F}_s] + 3\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + \\
 &\quad 3\mathbb{E}[B_s^2(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^3|\mathcal{F}_s] \\
 &\quad - 3t\mathbb{E}[(B_t - B_s)^3|\mathcal{F}_s] - 3t\mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^3] + 3B_s\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + \\
 &\quad 3B_s^2\mathbb{E}[(B_t - B_s)] + \\
 &\quad B_s^3 - 3t\mathbb{E}[(B_t - B_s)^3] - 3tB_s \\
 &= 3B_s(t - s) + B_s^3 - 3tB_s \\
 &= B_s^3 - 3sB_s
 \end{aligned}$$

du fait des propriétés de l'espérance conditionnelle déjà utilisées à la question précédente. Le processus  $\{B_t^3 - 3tB_t, t \geq 0\}$  est donc une  $\mathbb{F}$ -martingale.

4. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente le processus est  $\mathbb{F}$ -adapté. Il découle de l'exercice 2.3 que les exponentielles d'une variable aléatoire gaussienne sont intégrables. De plus

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2}|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s + B_s) - \sigma^2 t/2}|\mathcal{F}_s] \\
 &= e^{\sigma B_s - \sigma^2 t/2} \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s] \\
 &= e^{\sigma B_s - \sigma^2 t/2} \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}] \\
 &= e^{\sigma B_s - \sigma^2 t/2} e^{\sigma^2(t-s)/2} \\
 &= e^{\sigma B_s - \sigma^2 s/2}.
 \end{aligned}$$

Le processus étudié est donc bien une  $\mathbb{F}$ -martingale.

- Exercice 2.5** 1. Il n'y a rien à corriger :  $\{2 + B_t, t \geq 0\}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale.
2. Pour tous  $0 \leq s \leq t$  on voit que  $\mathbb{E}[2 + B_{2t} | \mathcal{F}_s] = 2 + B_s \neq 2 + B_{2s}$ . Cependant en introduisant la filtration  $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{2t}, t \geq 0\}$  on voit que  $\{2 + B_{2t}, t \geq 0\}$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale.
3. On va montrer que  $\{\frac{B_{3t}}{\sqrt{3}}, t \geq 0\}$  est un mouvement brownien. En effet, il s'agit d'un processus gaussien centré à trajectoires continues et à accroissements indépendants, puisque  $B$  est un mouvement brownien. De plus,  $B_{3t} - B_{3s}$  étant de loi  $\mathcal{N}(0, 3(t-s))$ , la variable aléatoire  $\frac{B_{3t}}{\sqrt{3}} - \frac{B_{3s}}{\sqrt{3}}$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t-s)$  donc  $\{\frac{B_{3t}}{\sqrt{3}}, t \geq 0\}$  est un mouvement brownien.
4. On va montrer que  $\{\frac{tB_{4/t}}{2}, t > 0\}$  prolongé avec 0 en  $t = 0$  est un mouvement brownien. En effet, il s'agit d'un processus gaussien centré à trajectoires continues pour tout  $t > 0$  et à accroissements indépendants, puisque  $B$  est un mouvement brownien. De plus, pour tous  $0 < s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(tB_{4/t} - sB_{4/s})^2] &= \mathbb{E}[t^2 B_{4/t}^2 - 2ts B_{4/t} B_{4/s} + s^2 B_{4/s}^2] \\ &= 4t - 8s + 4s \\ &= 4(t-s) \end{aligned}$$

donc  $\{\frac{tB_{4/t}}{2}, t > 0\}$  a même loi que  $\{B_t, t > 0\}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tB_{4/t}}{2} = 0$   $\mathbb{P}$ -p.s.. Il en découle que  $\{\frac{tB_{4/t}}{2}, t > 0\}$  prolongé avec 0 en  $t = 0$  est un mouvement brownien.

**Exercice 2.6** 1. Pour tout entier  $n \geq 1$  et tous réels  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , on a

$$\begin{pmatrix} B_{t_n} \\ \vdots \\ B_{t_j} \\ \vdots \\ B_{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \\ \vdots \\ B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \\ \vdots \\ B_{t_0} \end{pmatrix}.$$

Les accroissements du mouvement brownien étant des variables gaussiennes indépendantes, le vecteur de droite est un vecteur gaussien. Il en est donc de même du vecteur de gauche en tant qu'image d'un vecteur gaussien par une application linéaire. Ceci prouve que  $B$  est un processus gaussien.

2. Puisque pour tout  $t \geq 0$ ,  $B_t = B_t - B_0$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t)$  on a que  $\mathbb{E}[B_t] = 0$ . Par conséquent, pour tous réels  $0 \leq s \leq t$ , on a

$$\begin{aligned}
 \text{var}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_t B_s] \\
 &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s) B_s] \\
 &= \mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s | \mathcal{F}_s]] + s \\
 &= \mathbb{E}[B_s \mathbb{E}[(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s]] + s \\
 &= \mathbb{E}[B_s \mathbb{E}[(B_t - B_s)]] + s \\
 &= s
 \end{aligned}$$

grâce aux propriétés de l'espérance conditionnelle (proposition A.5 page 192).

**Exercice 2.7** On va démontrer qu'un processus gaussien  $B$  qui est une martingale continue vérifiant  $B_0 = 0$  et tel que  $B_t^2 - t$  est une martingale est nécessairement un mouvement brownien. D'après la proposition 2.6 page 35, il suffit de démontrer que pour un tel processus on a nécessairement  $\mathbb{E}[B_t] = 0$  et  $\text{var}(B_t, B_s) = \min(t, s)$ . Or  $B$  étant une martingale  $\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[B_0] = 0$  et pour tous réels  $0 \leq s \leq t$  on a

$$\begin{aligned}
 \text{var}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_t B_s] \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[B_t B_s | \mathcal{F}_s]] \\
 &= \mathbb{E}[B_s \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s]] \\
 &= \mathbb{E}[B_s^2] \\
 &= \mathbb{E}[B_s^2 - s] + s \\
 &= \mathbb{E}[B_0^2 - 0] + s \\
 &= s
 \end{aligned}$$

puisque  $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$  est une martingale.

**Exercice 2.8** Supposons que  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est un  $\mathbb{F}$  mouvement brownien. Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $t \geq 0$ ,  $M_t^\lambda$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable puisque  $M_t^\lambda$  est l'image de  $X_t$  par une application mesurable et  $|M_t^\lambda| = \exp(\lambda^2 t / 2)$  ainsi  $M_t$

est intégrable. Pour tous  $0 \leq s \leq t$  on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_t + \frac{\lambda^2}{2}t} \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(X_t - X_s) + \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} e^{i\lambda X_s + \frac{\lambda^2}{2}s} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= e^{i\lambda X_s + \frac{\lambda^2}{2}s} \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(X_t - X_s) + \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= e^{i\lambda X_s + \frac{\lambda^2}{2}s} \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(X_t - X_s) + \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \right] \\
 &= e^{i\lambda X_s + \frac{\lambda^2}{2}s}
 \end{aligned}$$

puisque  $X_t - X_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  et que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(X_t - X_s) + \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \right] &= e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(X_t - X_s)} \right] \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

d'après l'exercice 2.1. Supposons à présent que  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est tel que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  le processus  $M^\lambda$  est une  $\mathbb{F}$  martingale. Alors pour tous  $0 \leq s \leq t$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a  $\mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(X_t - X_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$ . Ainsi,  $X_t - X_s$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t-s)$  et indépendant de  $\mathcal{F}_s$ . Le processus  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  étant de surcroît continu, c'est un  $\mathbb{F}$ -mouvement brownien.

**Exercice 2.9** 1. Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\begin{aligned}
 A = \left\{ \overline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq x \right\} &= \left\{ \overline{\lim}_n \frac{B_n - B_m}{\sqrt{n}} \geq x \right\} \\
 &= \overline{\lim}_n \left\{ \frac{B_n - B_m}{\sqrt{n}} \geq x \right\} \\
 &= \bigcap_{l \geq 1} \bigcup_{k \geq l} \left\{ \frac{B_k - B_m}{\sqrt{n}} \geq x \right\} \\
 &= \bigcap_{l \geq m} \bigcup_{k \geq l} \left\{ \frac{B_k - B_m}{\sqrt{n}} \geq x \right\}.
 \end{aligned}$$

Or pour tout  $k \geq m$  et tout  $0 \leq s \leq m$ ,  $B_k - B_m$  est indépendant de  $B_s$  donc pour tout  $k \geq m$ ,  $B_k - B_m$  est indépendant de  $\mathcal{F}_m$  (Cf. Corollaire A.1 page 197) donc  $A$  est indépendant de  $\mathcal{F}_m$ . Mais  $A \in \sigma(\cup_{m \geq 1} \mathcal{F}_m)$  donc  $A$  est indépendant de lui-même :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$  donc  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou 1.

2. D'après la question précédente il suffit de d'établir que  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Mais on a  $A = \{\overline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq x\} = \cap_{l \geq 1} \cup_{k \geq l} \{\frac{B_l}{\sqrt{l}} \geq x\}$  par conséquent on a que  $\mathbb{P}(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cup_{k \geq l} \{\frac{B_l}{\sqrt{l}} \geq x\}) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\frac{B_l}{\sqrt{l}} \geq x\}) = \mathbb{P}(X \geq x)$  où  $X$  est de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Donc  $\mathbb{P}(A) > 0$  donc  $\mathbb{P}(A) = 1$ . Ceci ne dépendant pas de  $x$ , pour tout  $m$  on a  $\mathbb{P}(\{\overline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq m\}) = 1$ , donc  $\mathbb{P}(\{\overline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} = \infty\}) = 1$  car  $\mathbb{P}(\{\overline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} = \infty\}) = \mathbb{P}(\cap_{m \geq 1} \{\overline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq m\})$ . Par ailleurs,  $(-B_t)_{t \geq 0}$  est aussi un mouvement brownien par conséquent  $\mathbb{P}(\{\overline{\lim}_n \frac{-B_n}{\sqrt{n}} = \infty\}) = 1$  donc  $\mathbb{P}(\{\underline{\lim}_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty\}) = 1$ .

3. Posons

$$B = \left\{ \omega : \overline{\lim}_n \frac{B_n(\omega)}{\sqrt{n}} = \infty \text{ et } \underline{\lim}_n \frac{-B_n(\omega)}{\sqrt{n}} = -\infty \right\}.$$

D'après la question précédente on a  $\mathbb{P}(B) = 1$ . Les trajectoires browniennes étant continues on a  $B \subset \{\omega : \forall T \forall x \exists s \geq T, B_s(\omega) = x\}$  ce qui prouve la proposition 2.11 page 38 et  $B \subset \{\omega : \sup_{t \geq 0} B_t(\omega) = \infty \text{ et } \inf_{t \geq 0} B_t(\omega) = -\infty\}$  ce qui prouve la proposition 2.12 page 39.

**Exercice 2.10** 1. Pour tous  $s, v \in \mathbb{Q}_+, s < v$ ,

$$\{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [s, v]\} \subset F$$

donc

$$\bigcup_{s, v \in \mathbb{Q}_+, s < v} \{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [s, v]\} \subset F.$$

Soit  $\omega \in F$  : il existe deux réels  $\alpha, \beta$  tels que  $0 \leq \alpha < \beta$  et  $t \mapsto B_t(\omega)$  est monotone sur  $[\alpha, \beta]$ . Or  $\mathbb{Q}_+$  étant dense dans  $\mathbb{R}_+$  il existe  $\gamma, \delta \in \mathbb{Q}_+$  tels que  $\alpha < \gamma < \delta < \beta$  et  $t \mapsto B_t(\omega)$  est monotone sur  $[\gamma, \delta]$ . Ainsi

$$F \subset \bigcup_{s, v \in \mathbb{Q}_+, s < v} \{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [s, v]\}$$

d'où l'égalité annoncée.

2. Clairement pour tout  $n \geq 1$  on a  $A \subset A_n$ , donc  $A \subset \cap_{n \geq 1} A_n$ . Réciproquement, soit  $\omega \in \cap_{n \geq 1} A_n$ . Nous établissons d'abord que pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \alpha < \beta$  on a  $B_\beta - B_\alpha \geq 0$  : puisque  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

il existe un entier  $m \geq 1$  et deux entiers  $k, k', 0 \leq k < k' \leq m$ , tels que  $\alpha = k/m$  et  $\beta = k'/m$ . Puisque  $\omega \in \cap_{n \geq 1} A_n$  nécessairement  $\omega \in A_m$  donc  $B_\beta - B_\alpha = B_{\frac{k'}{m}} - B_{\frac{k}{m}} \geq 0$ . Supposons à présent que  $\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha < \beta$  : il existe deux suites  $(\alpha^n)_{n \geq 1}$  et  $(\beta^n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  telles que  $\alpha^n \rightarrow \alpha, \beta^n \rightarrow \beta$  et pour tout  $n \geq 1, \beta^n > \alpha^n$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 1$  on a  $B_{\beta^n} - B_{\alpha^n} \geq 0$ . Les trajectoires browniennes étant continues on a, par passage à la limite  $n \rightarrow \infty, B_\beta - B_\alpha \geq 0$ . Ainsi  $\cap_{n \geq 1} A_n \subset A$  d'où l'égalité annoncée.

3. Pour tout  $n \geq 1$  les v.a.  $(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}})_{i=0, \dots, n-1}$  sont indépendantes donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(\cap_{i=0}^{n-1} \{\omega \in \Omega, B_{\frac{i+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{i}{n}}(\omega) \geq 0\}) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, B_{\frac{i+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{i}{n}}(\omega) \geq 0\}) \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout  $n \geq 1$  on a  $A \subset A_n$  on a  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A_n)$  par conséquent  $\mathbb{P}(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ .

4. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est croissante sur } [0, 1]\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est décroissante sur } [0, 1]\}) \\ &= 2\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est croissante sur } [0, 1]\}) = 0 \end{aligned}$$

puisque  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  et  $(-B_t)_{t \in [0, 1]}$  ont même loi.

5. On va montrer à partir du résultat de la question précédente que pour tous  $s, v \in \mathbb{Q}_+, s < v, \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [s, v]\}) = 0$  ce qui suffit à prouver que  $\mathbb{P}(F) = 0$  car  $F$  est alors une réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle. Ainsi, soient  $s, v \in \mathbb{Q}_+, s < v$ . D'après la proposition 2.9 page 36  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  et  $(\frac{1}{\sqrt{v-s}} B_{t(v-s)})_{t \in [0, 1]}$  ont même loi donc  $\mathbb{P}(E) = 0$  implique  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [0, v-s]\}) = 0$ . Comme  $(B_t)_{t \in [0, v-s]}$  et  $(B_{t+s} - B_s)_{t \in [0, v-s]}$  ont même loi on déduit de l'éga-

lité précédente que  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega) \text{ est monotone sur } [s, v]\}) = 0$ , ce qui conclut la preuve.

**Exercice 2.11** Soit  $T > 0$ . Si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en un point  $s$  de  $[0, T[$  alors il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $|f(t) - f(s)| \leq n(t - s)$  pour  $t - s$  suffisamment petit. Ainsi, en prenant un entier  $k$  suffisamment grand, en posant  $i = [ks] + 1$  et en considérant les entiers  $j$  tels que  $1 \leq j \leq i + 3$  on a

$$\begin{aligned} |f(\frac{j}{k}) - f(\frac{j-1}{k})| &\leq |f(\frac{j}{k}) - f(s)| + |f(s) - f(\frac{j-1}{k})| \\ &\leq \frac{7n}{k} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$D = \{\omega \in \Omega, \text{ il existe un } s \in [0, T[ \text{ tel que } t \mapsto B_t(\omega) \text{ est dérivable en } s\}$$

vérifie

$$D \subset \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \geq m} \bigcup_{0 < i < kT+1} \bigcap_{i \leq j \leq i+3} \left\{ \omega \in \Omega, |B_{\frac{j}{k}}(\omega) - B_{\frac{j-1}{k}}(\omega)| \leq \frac{7n}{k} \right\}.$$

En posant

$$F_{n,k} = \bigcup_{0 < i < kT+1} \bigcap_{i \leq j \leq i+3} \left\{ \omega \in \Omega, |B_{\frac{j}{k}}(\omega) - B_{\frac{j-1}{k}}(\omega)| \leq \frac{7n}{k} \right\}$$

on a  $D \subset \bigcup_{n \geq 1} \varliminf_k F_{n,k}$ . Or pour tous entiers  $n, k$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_{n,k}) &\leq (kT + 2) \left( \mathbb{P}(|X| \leq \frac{7n}{\sqrt{k}}) \right)^3 \\ &\leq (kT + 2) \left( \frac{14n}{\sqrt{k}} \right)^3. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le lemme de Fatou, pour tout entier  $n \geq 1$  on a  $\mathbb{P}(\varliminf_k F_{n,k}) \leq \varliminf_k \mathbb{P}(F_{n,k}) = 0$  d'où  $\mathbb{P}(D) = 0$ , ce qui prouve la proposition.

**Exercice 2.12** Soit  $t \geq 0$ . Raisonons par l'absurde en commençant par supposer que les trajectoires du mouvement brownien sont dérivables en  $t$

avec une probabilité non-nulle. Nécessairement

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)}{h} \text{ existe} \right\} \right) > 0. \quad (4.6)$$

Or c'est une conséquence de la propriété d'invariance par translation (proposition 2.9 page 36) que  $((B_{t+h} - B_t)/h)_{h>0}$  et  $(B_h/h)_{h>0}$  ont même loi donc (4.6) implique

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{B_h(\omega)}{h} \text{ existe} \right\} \right) > 0. \quad (4.7)$$

D'après la proposition 2.9 page 36,  $(B_h)_{h>0}$  a même loi que  $(hB_{1/h})_{h>0}$ , donc (4.7) implique que

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{h \rightarrow 0+} B_{1/h}(\omega) \text{ existe} \right\} \right) > 0$$

autrement dit que

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{h \rightarrow \infty} B_h(\omega) \text{ existe} \right\} \right) > 0$$

ce qui est en contradiction avec, par exemple, le résultat de l'exercice 2.9.

**Exercice 2.13** 1. Pour tout entier  $n \geq 1$  et tous  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$  toute combinaison linéaire de  $Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}$  est en fait une combinaison linéaire de  $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$  et  $B_1$  donc une variable aléatoire gaussienne puisque  $B$  est un processus gaussien. Ainsi,  $Z$  est un processus gaussien. Pour démontrer que  $Z$  et  $B_1$  sont indépendants il suffit, d'après le corollaire A.1 page 197 de montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  et tous  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$ ,  $B_1$  est indépendant de  $Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}$ . Le vecteur  $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}, B_1)$  étant un vecteur gaussien, il suffit donc de montrer que pour tout entier  $i, 1 \leq i \leq n$ ,  $\text{cov}(Z_{t_i}, B_1) = 0$ , ce qui est vrai puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t - tB_1)B_1] &= \mathbb{E}[B_t B_1] - t\mathbb{E}[B_1^2] \\ &= t - t \\ &= 0. \end{aligned}$$



2. Pour tout  $t, s \in [0, 1]$ ,  $\mathbb{E}[Z_t] = 0$  et

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_t, Z_s) &= \mathbb{E}[(B_t - tB_1)(B_s - sB_1)] \\ &= \min(t, s) - st - ts + ts \\ &= \min(t, s) - st. \end{aligned}$$

3. Le processus  $\tilde{Z}$  est clairement gaussien et centré. Pour tout  $t, s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_s) &= \text{cov}(Z_{1-t}, Z_{1-s}) \\ &= \min(1-t, 1-s) - (1-s)(1-t) \\ &= s + t - \max(s, t) - st \\ &= \min(t, s) - st, \end{aligned}$$

$Z$  et  $\tilde{Z}$  sont gaussiens, centrés, de même covariance : ils ont même loi.

**Exercice 2.14** On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_{k+1}}^2 - 2 \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k} B_{t_{k+1}} + \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_{k+1}}^2 - \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k}^2 - 2 \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k} B_{t_{k+1}} + 2 \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k}^2 \\ &= B_T^2 - 2S_1 \end{aligned}$$

d'où  $2S_1 = B_T^2 - \sum_{k=0}^{N-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2$ . Or, d'après la proposition 2.14 page 40,  $\sum_{k=0}^{N-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2$  tend dans  $L^2$  vers  $T$  quand  $|\Delta| \rightarrow 0$ . Ainsi  $S_1$  tend vers  $(B_T^2 - T)/2$  dans  $L^2$  quand  $|\Delta| \rightarrow 0$ .

2. On a

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} \left( B_{t_{k+1}} - B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} \left( B_{t_{k+1}} - B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} B_{t_k} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2. \end{aligned}$$

La somme des deux premiers termes tend vers  $(B_T^2 - T)/2$  dans  $L^2$  quand  $|\Delta| \rightarrow 0$  d'après la question précédente. On remarque que

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{N-1} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2 - \frac{T}{2} \right)^2 \right] \\
 = & \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{N-1} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right)^2 \right] \\
 = & \text{var} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2 \right) \\
 = & \sum_{k=0}^{N-1} \text{var} \left( \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

or pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ , on a

$$\begin{aligned}
 \text{var} \left( \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2 \right) &= \mathbb{E} \left[ \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^4 \right] - \left( \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right)^2 \\
 &= 3 \left( \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right)^2 - \left( \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right)^2 \\
 &= 2 \left( \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{N-1} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2 - \frac{T}{2} \right)^2 \right] &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right)^2 \\
 &\leq 2 \max_k \frac{|t_{k+1} - t_k|}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right) \\
 &\rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

ainsi  $\sum_{k=0}^{N-1} \left( B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} - B_{t_k} \right)^2$  tend vers  $T/2$  dans  $L^2$  quand  $|\Delta| \rightarrow 0$  si bien que  $\sum_{k=0}^{N-1} B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$  tend vers  $B_T^2/2$  dans  $L^2$  quand  $|\Delta| \rightarrow 0$ .

**Exercice 2.15** 1. On sait que  $\mathbb{P}$ -presque sûrement  $s \in \mathbb{R} \mapsto B_s(\omega)$  est continue. Ainsi,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement,  $X_t^f(\omega)$  est définie pour tout  $t \geq 0$  comme intégrale de Riemann d'une application continue. En particulier elle est limite des sommes de Riemann associées, ce qui justifie que pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t^f = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{f,n}$   $\mathbb{P}$ -presque sûrement où  $X_t^{f,n} := \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}t} f\left(\frac{k}{n}t\right)$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , la variable aléatoire  $X_t^{f,n}$  est une combinaison linéaire de composantes d'un processus gaussien, c'est donc une variable aléatoire gaussienne. On a

$$\mathbb{E}[X_t^{f,n}] = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[B_{\frac{k}{n}t}] f\left(\frac{k}{n}t\right) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}(X_n^f) &= \mathbb{E}[(X_n^f)^2] \\ &= \frac{t^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{E}[B_{\frac{l}{n}t} B_{\frac{k}{n}t}] f\left(\frac{l}{n}t\right) f\left(\frac{k}{n}t\right) \\ &= \frac{t^2}{n^2} \sum_{k,l=0}^{n-1} \min\left\{\frac{l}{n}t, \frac{k}{n}t\right\} f\left(\frac{l}{n}t\right) f\left(\frac{k}{n}t\right), \end{aligned}$$

ce dernier terme étant une somme de Riemann. Comme  $f$  est continue on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(X_n^f) = \int_0^t \int_0^t \min(x, y) f(x) f(y) dx dy.$$

Ainsi d'après la proposition A.4 page 191, pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t^f$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $\int_0^t \int_0^t \min(x, y) f(x) f(y) dx dy$ .

3. On considère ici le cas particulier  $f = 1$ . On a donc  $\mathbb{E}\left[\int_0^t B_s ds\right] = 0$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B_s ds\right)^2\right] &= \int_0^t \int_0^t \min(x, y) dx dy \\ &= \int_0^t \left(\int_0^y x dx\right) dy + \int_0^t \left(\int_y^t y dx\right) dy = \frac{t^3}{3}. \end{aligned}$$

4. Clairement  $M$  n'est pas un mouvement brownien. En effet, pour que  $M$  soit un mouvement brownien il faudrait par exemple que  $\mathbb{E}[M_t^2] = t$  ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente. Par ailleurs pour tous  $0 \leq s \leq t$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\int_0^s B_u du | \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_s^t B_u du | \mathcal{F}_s\right] \\ &= M_s + \int_s^t \mathbb{E}[B_u | \mathcal{F}_s] du \\ &= M_s + \int_s^t B_s du \\ &= M_s + (t - s)B_s \end{aligned} \tag{4.8}$$

car

- $M_s$  étant limite presque sûre de variables aléatoires  $\mathcal{F}_s$  mesurables elle est  $\mathcal{F}_s$  mesurable,
- on peut appliquer le théorème de Fubini dans (4.8). En effet, puisque  $(|B_s|)_{s \geq 0}$  est une sous-martingale on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_s^t |B_u| du | \mathcal{F}_s\right] &= \int_s^t \mathbb{E}[|B_u| | \mathcal{F}_s] du \\ &\leq \int_s^t \mathbb{E}[|B_t| | \mathcal{F}_s] du < \infty, \end{aligned}$$

- $(B_s)_{s \geq 0}$  étant une martingale, pour tout  $u \in [s, t]$  on a  $\mathbb{E}[B_u | \mathcal{F}_s] = B_s$ .

On voit donc que  $M$  n'est pas une martingale non plus.

**Exercice 2.16** 1. Il suffit que  $L_T$  soit  $\mathcal{F}_T^B$  mesurable, strictement positive et finie *p.s.* et d'espérance 1 sous  $\mathbb{P}$  pour que  $\mathbb{Q}^\lambda$  donné par l'énoncé soit bien une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T^B)$  équivalente à  $\mathbb{P}$ . Or  $L_T$  est l'image de  $B_T$  par une application mesurable, elle est donc  $\mathcal{F}_T^B$  mesurable. Puisque  $B_T$  est *p.s.* finie  $L_T$  est strictement positive et finie *p.s.* Finalement  $L^\lambda$  est une martingale d'après un résultat de l'exercice 2.4, donc  $\mathbb{E}[L_T^\lambda] = \mathbb{E}[L_0^\lambda] = 1$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{F}_t^B$ . Puisque  $L$  est une martingale on a

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_T(A) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[1_A L_T] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[1_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T | \mathcal{F}_t^B]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[1_A L_t] = \mathbb{Q}_t(A).\end{aligned}$$

3. Soit  $A \in \mathcal{F}_t^B$  et  $Z$  une variable aléatoire bornée et  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[1_A Z] &= E^{\mathbb{P}}[1_A Z L_T] \\ &= E^{\mathbb{P}}[1_A Z L_t \frac{L_T}{L_t}] \\ &= E^{\mathbb{P}}[1_A L_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t^B]] \\ &= E^{\mathbb{Q}_t}[1_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t^B]] \\ &= E^{\mathbb{Q}_T}[1_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t^B]]\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé, la dernière égalité étant une conséquence du résultat de la question précédente.

4. Il suffit de montrer que pour tous  $0 \leq s \leq t \leq T$  on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[e^{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)} | \mathcal{F}_s^B] = e^{-u^2(t-s)/2}.$$

Or, d'après les résultats des questions précédentes on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[e^{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)} | \mathcal{F}_s^B] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_t}[e^{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)} | \mathcal{F}_s^B] \\ &= (L_s)^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)} L_t | \mathcal{F}_s^B] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)} e^{\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} | \mathcal{F}_s^B] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)} e^{\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{(B_t - B_s)(\lambda + iu) - (t-s)(\frac{\lambda^2}{2} + i\lambda u)}] \\ &= e^{-u^2(t-s)/2}\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4. On a que pour tout  $t > 0$

$$L_t = \exp \left\{ t \left( \lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2} \right) \right\}$$

donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \left( \lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2} \right) = -\infty$  puisque d'après la proposition 2.10 page 37  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0$   $\mathbb{P}$  p.s. et que  $\lambda^2 > 0$ . Ainsi  $\lim_{t \rightarrow \infty} L_t = 0$   $\mathbb{P}$  p.s. ce qui explique que l'on ne peut pas prendre  $T = \infty$  dans le changement de probabilité.

**Exercice 2.17** 1. Pour tout  $n \geq 1$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &= \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E} \left[ \left( B_{\frac{k}{2^n}t} - B_{\frac{(k-1)}{2^n}t} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} \left( \frac{k}{2^n}t - \frac{(k-1)}{2^n}t \right) \\ &= t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}(S_n) &= \sum_{k=1}^{2^n} \text{var} \left( \left( B_{\frac{k}{2^n}t} - B_{\frac{(k-1)}{2^n}t} \right)^2 \right) \\ &= 2^n \text{var} \left( \left( B_{\frac{1}{2^n}t} - B_0 \right)^2 \right) \\ &= 2^n \left( \mathbb{E}[B_{\frac{1}{2^n}t}^4] - \mathbb{E}[B_{\frac{1}{2^n}t}^2]^2 \right) \\ &= 2^n \left( \frac{3}{2^{2n}}t^2 - \frac{1}{2^{2n}}t^2 \right) \\ &= \frac{2}{2^n}t^2. \end{aligned}$$

2. Pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$\mathbb{P}(|S^n - t| > \varepsilon) \leq \frac{4t^2}{\varepsilon^2} 2^{-2n},$$

d'après l'inégalité de Tchebychev.

3. On a

$$\begin{aligned} \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) \neq t \right\} &= \left\{ \omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(\omega) - t| > 0 \right\} \\ &= \cup_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ \omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(\omega) - t| > \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Ce dernier ensemble est une réunion dénombrable d'événements de probabilité 0 car pour tout  $m \geq 1$  on a

$$\left\{ \omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(\omega) - t| > \frac{1}{m} \right\} \subset \overline{\lim} \left\{ \omega : |S_n(\omega) - t| > \frac{1}{m} \right\}$$

et la majoration obtenue à la deuxième question avec  $t = 1/m$  implique que  $\mathbb{P}(\overline{\lim} \left\{ \omega : |S_n(\omega) - t| > \frac{1}{m} \right\}) = 0$  d'après le lemme de Borel-Cantelli. Ainsi  $S^n$  converge vers  $t$  presque-sûrement.

**Exercice 2.18** 1. Pour tous  $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] &= \mathbb{E}[M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2] - 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t M_s | \mathcal{F}_s]] + \mathbb{E}[M_s^2] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2] - 2\mathbb{E}[M_s \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]] + \mathbb{E}[M_s^2] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2] - 2\mathbb{E}[M_s^2] + \mathbb{E}[M_s^2] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_s^2]. \end{aligned}$$

2.a. D'après le résultat de la question précédente, pour toute subdivision  $\Delta : t_0 = 0 \leq \dots \leq t_n = t$  de l'intervalle  $[0, t]$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_t - M_0|^2] &= \mathbb{E}[|M_t|^2] - \mathbb{E}[|M_0|^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[|M_{t_i}|^2] - \mathbb{E}[|M_{t_{i-1}}|^2]) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|^2\right] \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ (M_t - M_0)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[ \left\{ \sup_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \right\} \sum_{i=1}^n |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left\{ \sup_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \right\} V_t^{(1)}(M, \Delta) \right]\end{aligned}$$

2.b. Si il existe  $C$  tel que  $\mathbb{P} \left( V_t^{(1)}(M) \leq C \right) = 1$  pour tout  $t \geq 0$  et toute subdivision  $\Delta : t_0 = 0 \leq \dots \leq t_n = t$  de l'intervalle  $[0, t]$  on a

$$\mathbb{E} \left[ (M_t - M_0)^2 \right] \leq C \mathbb{E} \left[ \left\{ \sup_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \right\} \right].$$

Pour tout  $n \geq 1$  considérons

$$\Delta^n = \left\{ 0 = t_0 < \frac{1}{n}t < \dots < \frac{n-1}{n}t < t = t_n \right\}.$$

Les trajectoires de  $M$  étant *p.s.* continues on a  $\sup_{i=0, \dots, n} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \rightarrow 0$  *p.s.*  
Par ailleurs, pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\sup_{i=0, \dots, n} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| &\leq \sum_{i=1}^n |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \\ &\leq V_t^{(1)}(M, \Delta^n) \\ &\leq C.\end{aligned}$$

On a donc  $\mathbb{E} \left[ \left\{ \sup_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \right\} \right] \rightarrow 0$  d'après le théorème de convergence dominée, donc  $\mathbb{E} \left[ (M_t - M_0)^2 \right] = 0$  donc  $M_t = M_0$   $\mathbb{P}$ -p.s..

**Exercice 2.19** 1. Pour tout élément  $f = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}$  de  $\mathcal{S}([0, T])$ ,  $I_{\mathcal{S}}(f)$  est une combinaison linéaire de composantes d'un processus gaussien, c'est donc une v.a. gaussienne. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_{\mathcal{S}}(f)] &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mathbb{E}[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}] \\ &= 0\end{aligned}$$



ainsi que

$$\begin{aligned}
 \text{var}(I_{\mathcal{S}}(f)) &= \text{var}\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \text{var}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2(t_{k+1} - t_k) \\
 &= \int_0^T f^2(x) dx
 \end{aligned}$$

le passage de la première à la deuxième ligne se justifiant par le fait que les variables aléatoires  $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}, 0 \leq k \leq N-1$  sont indépendantes.

2. Dans un premier temps on construit une application  $I$  remplissant toutes les conditions imposées par l'énoncé. On montrera ensuite qu'une telle application est unique. Soit  $f$  un élément de  $L^2([0, T])$ . L'ensemble  $\mathcal{S}([0, T])$  étant dense dans  $L^2([0, T])$  il existe (au moins) une suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathcal{S}([0, T])$  convergeant vers  $f$  dans  $L^2([0, T])$ . Cette suite est donc une suite de Cauchy et on a vu à la question précédente que  $\mathbb{E}[I_{\mathcal{S}}(f_n)^2] = \|f_n\|_{L^2}^2$ . La suite  $(I_{\mathcal{S}}(f_n))_{n \geq 1}$  est donc une suite de Cauchy de l'ensemble  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  donc une suite convergente puisque  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est complet. On va noter  $I(f)$  cette limite. Elle ne dépend pas du choix de l'approximation  $(f_n)_{n \geq 1}$  de  $f$  par des éléments de  $\mathcal{S}([0, T])$  car pour toute autre approximation  $(g_n)_{n \geq 1}$  de  $f$  on a  $\|f_n - g_n\|_{L^2} \rightarrow 0$  donc  $\mathbb{E}[(I_{\mathcal{S}}(f_n) - I_{\mathcal{S}}(g_n))^2] \rightarrow 0$  :  $(I_{\mathcal{S}}(f_n))_{n \geq 1}$  et  $(I_{\mathcal{S}}(g_n))_{n \geq 1}$  ont même limite. On constate qu'avec cette définition de  $I$ , pour tout  $f \in \mathcal{S}$  on a  $I(f) = I_{\mathcal{S}}(f)$  et  $I$  hérite par passage à la limite des propriétés de linéarité de  $I_{\mathcal{S}}$ . De plus, puisque pour tout  $n \geq 1, \mathbb{E}[I_{\mathcal{S}}(f_n)^2] = \|f_n\|^2$  on a  $\mathbb{E}[I(f)^2] = \|f\|^2$ . Finalement, supposons qu'il existe une autre application que  $I$  qui vérifie les conditions données par l'énoncé. Notons la  $J$  : il existe  $f \in L^2([0, T])$  telle que  $I(f) \neq J(f)$ . Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}([0, T])$  qui converge vers  $f$ . Nécessairement  $(I(f_n))_{n \geq 1}$  et  $(J(f_n))_{n \geq 1}$  convergent vers  $I(f)$  et  $J(f)$  chacune tandis que pour tout  $n \geq 1, I(f_n) = J(f_n)$  ce qui contredit  $I(f) \neq J(f)$ . L'application  $I$  est donc unique.

3. Soit  $f \in L^2([0, T])$  et  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}([0, T])$  qui approche  $f$  dans  $L^2([0, T])$ . Nécessairement pour tout  $t \geq 0$   $(1_{[0, t]} f_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{S}([0, T])$  qui approche  $1_{[0, t]} f$  dans  $L^2([0, T])$  donc  $(I_{\mathcal{S}}(1_{[0, t]} f_n))_{n \geq 1}$  approche  $M_t(f)$  dans  $L^2([0, T])$ . Donc la suite  $(I_{\mathcal{S}}(1_{[0, t]} f_n))_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $M_t(f)$  et aussi *p.s.* le long d'une sous-suite. D'après la première question, pour tout  $n \geq 1$   $I_{\mathcal{S}}(1_{[0, t]} f_n)$  est une variable gaussienne centrée de variance  $\int_0^t f_n^2(s) ds$ . Ainsi, d'après la proposition A.4 page 191  $M_t(f)$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $\int_0^t f^2(s) ds$ . Toujours d'après la première question, pour tout  $n \geq 1$  et tout  $t \in [0, T]$ ,  $I_{\mathcal{S}}(1_{[0, t]} f_n)$  est  $\mathcal{F}_t^B$  mesurable donc  $M(f)$  est  $\mathbb{F}^B$ -adapté. Finalement, pour tous  $0 \leq s \leq t$  et tout entier  $m \geq 1$  et  $0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m \leq s$  on a que  $(M_t(f) - M_s(f), B_{u_1}, \dots, B_{u_m})$  est un vecteur gaussien puisque c'est la limite dans  $L^2((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$  de la suite de vecteurs gaussiens  $(I_{\mathcal{S}}(1_{[s, t]} f_n), B_{u_1}, \dots, B_{u_m})$ , de matrice de covariance diagonale. Ainsi  $M_t(f) - M_s(f)$  est indépendant de  $(B_{u_1}, \dots, B_{u_m})$  par conséquent  $M_t(f) - M_s(f)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s^B$ .

4.a) D'après les propriétés de  $\int_0^t f(s) dB_s$  vues précédemment il suffit de montrer que pour tous  $0 \leq s \leq t \leq T$  on a  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t | \mathcal{F}_s^B] = L_s$ . Or

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \int_0^t f(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_s^B \right] \\ &= \exp \left\{ \int_0^s f(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^s f^2(u) du \right\} \\ & \quad \times \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \int_s^t f(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_s^t f^2(u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_s^B \right] \\ &= \exp \left\{ \int_0^s f(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^s f^2(u) du \right\} \\ & \quad \times \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \int_s^t f(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_s^t f^2(u) du \right\} \right] = L_s \end{aligned}$$

car  $\int_s^t f(u) dB_u \sim \mathcal{N}(0, \int_s^t f^2(u) du)$ .

4.b) Il suffit de montrer que pour tous  $0 \leq s \leq t \leq T$  on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} [e^{iu(B_t^f - B_s^f)} | \mathcal{F}_s^B] = e^{-u^2(t-s)/2}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[e^{iu(B_t^f - B_s^f)} | \mathcal{F}_s^B] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[e^{iu(B_t^f - B_s^f)} | \mathcal{F}_s^B] \\
&= (L_s)^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{iu(B_t^f - B_s^f)} L_t | \mathcal{F}_s^B] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{iu(B_t^f - B_s^f)} e^{\int_s^t f(v) dB_v - \frac{1}{2} \int_s^t f^2(v) dv} | \mathcal{F}_s^B] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{iu(B_t^f - B_s^f)} e^{\int_s^t f(v) dB_v - \frac{1}{2} \int_s^t f^2(v) dv}] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{\int_s^t (iu + f(v)) dB_v - iu(\int_s^t f(v) dv) - \frac{1}{2} \int_s^t f^2(v) dv}] \\
&= e^{-u^2(t-s)/2}.
\end{aligned}$$

**Exercice 2.20** 1. Pour tout  $t \geq 0$  le processus  $\{\sin(s), 0 \leq s \leq t\}$  est dans  $\mathcal{L}^2([0, t])$  puisque  $s \mapsto \sin(s)$  est bornée donc  $X_t$  est bien définie.

2. Le processus  $X$  est un processus gaussien centré car l'intégrale stochastique le définissant est une intégrale de Wiener, cf l'exercice précédent. Pour tous,  $0 \leq s \leq t$  on a

$$\text{cov}(X_t, X_s) = \int_0^s \sin^2(u) du.$$

3. D'après la formule d'intégration par parties on a

$$\sin(t)B_t = \int_0^t \cos(s)B_s ds + \int_0^t \sin(s)dB_s$$

d'où l'égalité demandée.

4. L'application  $s \mapsto \sin(s)$  étant de classe  $C^2$  on peut appliquer la formule d'Itô et on obtient

$$\sin(B_t) = \int_0^t \cos(B_s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s)ds.$$

donc

$$\sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s)ds = \int_0^t \cos(B_s)dB_s$$

or pour tout  $t \geq 0$ ,  $\{\cos(B_s), 0 \leq s \leq t\}$  est dans  $\mathcal{L}^2([0, t])$  donc le processus

$$Y_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s)ds = \int_0^t \cos(B_s)dB_s$$

est une martingale.

**Exercice 2.21** 1. Le processus  $\{e^{\sigma B_u}, 0 \leq u \leq T\}$  est dans  $\mathcal{L}^2([0, T])$  car pour tout  $t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{2\sigma B_u} du\right] = \int_0^t \mathbb{E}[e^{2\sigma B_u}] du = \int_0^t e^{2\sigma^2 u} du < \infty$$

donc le processus  $M$  est bien défini et c'est une martingale. Ainsi

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] = 0$$

et il découle de la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique que

$$\text{var}(M_t) = \mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{2\sigma B_u} du\right] = \frac{1}{2\sigma^2}(e^{2\sigma^2 t} - 1).$$

2. Pour tout  $t \geq 0$  on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t M_u^2 du\right] = \int_0^t \mathbb{E}[M_u^2] du = \int_0^t \frac{1}{2\sigma^2}(e^{2\sigma^2 u} - 1) du$$

qui est une quantité finie. Ainsi le processus  $\{M_u, 0 \leq u \leq T\}$  est un élément de  $\mathcal{L}^2([0, T])$  donc le processus  $N$  est bien défini et c'est une martingale. Par conséquent

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[N_0] = 0$$

et il découle de la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique que

$$\text{var}(N_t) = \mathbb{E}\left[\int_0^t M_u^2 du\right] = \int_0^t \frac{1}{2\sigma^2}(e^{2\sigma^2 u} - 1) du = \frac{1}{4\sigma^4}(e^{2\sigma^2 t} - 1) - \frac{t}{2\sigma^2}.$$

**Exercice 2.22** 1. On remarque que  $X = \int_0^1 t dW_t$  et  $Y = \int_0^1 W_t dt$ . La v.a.  $X$  est une intégrale de Wiener, limite dans  $L^2$  de  $X_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}\right)$ . La v.a.  $Y$  est une intégrale de Riemann (puisque les trajectoires de  $W_t$  sont continues), limite *p.s.* de la suite de sommes de Riemann  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}}$ . La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de v.a. gaussiennes, la convergence *p.s.* de  $X_n$  vers  $X$  est aussi valable dans  $L^2$ . Clairement pour tout  $n \geq 1$  on a  $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[Y_n] = 0$ ,

donc  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ . Ainsi  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n Y_n]$ . Or

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_n Y_n] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left( B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}} \right) \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{k'=0}^{n-1} B_{\frac{k'}{n}} \right) \right] \\
 &= \sum_{0 \leq k' \leq k \leq n-1} \frac{k}{n^2} \mathbb{E} \left[ \left( B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}} \right) B_{\frac{k'}{n}} \right] \\
 &\quad + \sum_{0 \leq k < k' \leq n-1} \frac{k}{n^2} \mathbb{E} \left[ \left( B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}} \right) B_{\frac{k'}{n}} \right] \\
 &= 0 + \sum_{0 \leq k < k' \leq n-1} \frac{k}{n^2} \frac{1}{n} \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq n-2} (n-k-1) \frac{k}{n^2} \frac{1}{n} \\
 &= \frac{(n-2)(n-1)}{2n^2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2n^3} - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6n^3}
 \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{E}[XY] = 1/6$ . L'utilisation de la formule d'Itô rend les calculs plus simples : d'après la formule d'intégration par parties (qui découle de la formule d'Itô) on a  $1 \times W_1 = \int_0^1 t dW_t + \int_0^1 W_t dt$  donc  $\mathbb{E}[XW_1] = \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[X^2]$ . En utilisant la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique

$$\mathbb{E}[XW_1] = \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^1 t dW_t \right) \left( \int_0^1 dW_t \right) \right] = \int_0^1 t dt = 1/2$$

et

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^1 t dW_t \right) \left( \int_0^1 t dW_t \right) \right] = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$$

d'où  $\mathbb{E}[XY] = 1/6$ .

2. Si  $X$  et  $Y$  étaient égales on aurait par exemple  $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[XY]$  alors que  $\mathbb{E}[X^2] = 1/3$  tandis que  $\mathbb{E}[XY] = 1/6$  donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas égales.

**Exercice 2.23** 1. On a  $X_t = f(B_t)$  où  $f(x) = x^3$  est de classe  $C^2$ . Ainsi on peut appliquer la formule d'Itô et l'on obtient

$$X_t^3 = X_0 + 3 \int_0^t B_s^2 dB_s + 3 \int_0^t B_s ds$$

qui montre que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est bien un processus d'Itô.

2. On a  $S_t = f(t, B_t)$  où  $f(t, x) = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x}$ . L'application  $f$  étant de classe  $C^{1,2}$  on peut appliquer la formule d'Itô

$$\begin{aligned} S_t &= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, B_u) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, B_u) dB_u \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, B_u) d\langle B \rangle_u \\ &= S_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2) S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 S_u du \\ &= S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u \end{aligned}$$

qui montre que  $(S_t)_{t \geq 0}$  est bien un processus d'Itô.

3. On a  $Y_t = u(t, B_t)$  où  $u$  est de classe  $C^{1,2}$ . On peut donc appliquer la formule d'Itô

$$Y_t = u(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(u, B_s) ds$$

qui montre que  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est bien un processus d'Itô.

4. On a  $V_t = g(S_t)$  mais  $g(x) = \sqrt{x}$  n'est pas de classe  $C^2$ . Cependant  $V_t = \sqrt{S_0} e^{(\mu/2 - \sigma^2/4)t + (\sigma/2)B_t} = h(t, B_t)$  où  $h(t, x) = \sqrt{S_0} e^{(\mu/2 - \sigma^2/4)t + (\sigma/2)x}$ . L'application  $h$  étant de classe  $C^{1,2}$ , en raisonnant comme à la deuxième question de cet exercice, il vient

$$\begin{aligned} V_t &= h(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(u, B_u) du + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x}(u, B_u) dB_u \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(u, B_u) d\langle B \rangle_u \\ &= \sqrt{S_0} + \int_0^t \left( \frac{\mu}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) V_u du + \int_0^t \left( \frac{\sigma}{2} \right) V_u dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\sigma^2}{4} \right) V_u du \\ &= \sqrt{S_0} + \int_0^t \left( \frac{\mu}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) V_u du + \int_0^t \left( \frac{\sigma}{2} \right) V_u dB_u \end{aligned}$$

qui montre que  $(V_t)_{t \geq 0}$  est bien un processus d'Itô.

5. On a  $Z_t = f(t, S_t)$  où  $f(t, x) = e^{rt} x^2$ . L'application  $f$  étant de classe  $C^{1,2}$

on peut appliquer la formule d'Itô

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t r Z_s ds + 2 \int_0^t e^{rs} S_s dS_s + \int_0^t e^{rs} d\langle S \rangle_s$$

qui montre que  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est bien un processus d'Itô.

6. D'abord remarquons que  $U_t = \{e^{-\int_0^t r_s ds}, t \geq 0\}$  est un processus d'Itô puisque  $M_t = \{\int_0^t r_s ds, t \geq 0\}$  est un processus d'Itô et que l'application  $x \mapsto e^{-x}$  est de classe  $C^2$ . On a

$$M_t = M_0 + \int_0^t r_s ds + \int_0^t 0 dB_s$$

donc d'après la formule d'Itô

$$\begin{aligned} U_t &= U_0 - \int_0^t U_s dM_s \\ &= U_0 - \int_0^t U_s r_s ds. \end{aligned}$$

D'après la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} R_t &= U_0 N_0 + \int_0^t U_s dN_s + \int_0^t N_s dU_s + \int_0^t d\langle U, N \rangle_s \\ &= U_0 N_0 + \int_0^t U_s r_s N_s ds + \int_0^t \sigma U_s N_s dB_s - \int_0^t N_s U_s r_s ds \\ &= U_0 N_0 + \int_0^t r_s R_s ds + \int_0^t \sigma R_s dB_s - \int_0^t R_s r_s ds \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $(R_t)_{t \geq 0}$  est un processus d'Itô.

**Exercice 2.24** D'après la formule d'intégration par parties on a

$$TB_T = \int_0^T B_t dt + \int_0^T t dB_t$$

donc

$$\begin{aligned} Y_T &= T \int_0^T dB_t - \int_0^T t dB_t \\ &= \int_0^T (T - t) dB_t. \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la formule de Itô on a  $B_T^3 = \int_0^T 3B_t^2 dB_t + 3 \int_0^T B_t dt$  donc  $B_T^3 = \int_0^T (3B_t^2 + 3(T-t))dB_t$ .

**Exercice 2.25** D'après le résultat de l'exercice 2.8 il suffit de montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  le processus  $N^\lambda = \{N_t^\lambda, t \geq 0\}$  défini par  $N_t^\lambda = e^{i\lambda M_t + \frac{\lambda^2}{2}t}$  est une martingale. D'après la formule d'Itô

$$\begin{aligned} N_t^\lambda &= 1 + \int_0^t N_s^\lambda (i\lambda dM_s + \frac{1}{2}\lambda^2 ds) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t N_s^\lambda d\langle M \rangle_s \\ &= 1 + i\lambda \int_0^t N_s^\lambda dM_s. \end{aligned}$$

Mais  $N^\lambda$  est une martingale puisque  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t |N_s^\lambda|^2 d\langle M \rangle_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{\lambda^2 s} ds \right] < \infty$ .

**Exercice 2.26** Considérons pour tout  $T > 0$  et tout  $z \in \mathbb{R}$  le processus défini par  $V_t = u(T-t, z+B_t), 0 \leq t \leq T$ . La fonction  $u$  étant de classe  $C^{1,2}$  on peut appliquer la formule d'Itô ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned} V_t &= u(T, z) - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(T-s, z+B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(T-s, z+B_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T-s, z+B_s) ds \\ &= u(T, z) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(T-s, z+B_s) dB_s \end{aligned}$$

puisque  $u$  est solution de l'E.D.P. donnée dans l'énoncé. Par ailleurs,  $\partial_s u$  étant bornée, le processus  $\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(T-s, z+B_s) dB_s$  est une martingale issue de 0. Par conséquent pour tout  $0 \leq t \leq T$   $\mathbb{E}[u(T-t, z+B_t)] = u(T, z)$ . En particulier, pour  $t = T$  on obtient  $u(T, z) = \mathbb{E}[u(0, z+B_T)] = \mathbb{E}[f(z+B_T)]$  d'où la représentation de  $u$  donnée dans l'énoncé.

**Exercice 2.27** 1. L'E.D.S. est de la forme  $dS_t = a(t, S_t)dt + b(t, S_t)dB_t$  où  $a(t, x) = \mu x$  et  $b(t, x) = \sigma x$ . Ces fonctions remplissent les conditions du théorème 2.7 page 64, l'E.D.S. admet donc une unique solution. La solution proposée est de la forme  $S_t = f(t, B_t)$  où  $f(t, x) = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x}$ . L'application



$f$  étant de classe  $C^{1,2}$  on peut appliquer la formule d'Itô

$$\begin{aligned} S_t &= f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, X_u) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) dX_u + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_u) d\langle X \rangle_u \\ &= S_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2) S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 S_u du \\ &= S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u \end{aligned}$$

le processus  $S_t$  est donc bien l'unique solution de l'E.D.S. considérée.

2. L'E.D.S. est de la forme  $dr_t = a(t, r_t)dt + b(t, r_t)dB_t$  où  $a(t, x) = \alpha(\beta - x)$  et  $b(t, x) = \sigma$ . Ces fonctions remplissent les conditions du théorème 2.7 page 64, l'E.D.S. admet donc une unique solution. Si  $(r_t)_{t \geq 0}$  est tel que proposé par l'énoncé on a

$$\begin{aligned} dr_t &= -\alpha r_0 e^{-\alpha t} dt + \beta \alpha e^{-\alpha t} dt - \alpha \sigma e^{-\alpha t} \left( \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right) dt + \sigma dW_t \\ &= \alpha \left( \beta - \beta - r_0 e^{-\alpha t} dt + \beta e^{-\alpha t} dt - \sigma e^{-\alpha t} \left( \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right) \right) dt + \sigma dW_t \\ &= \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Le processus  $r_t$  est donc bien l'unique solution de l'E.D.S. considérée.

3. L'E.D.S. considérée est de la forme  $dr_t = a(t, r_t)dt + b(t, r_t)dB_t$  avec les fonctions  $a(t, x) = \alpha(\beta - x)$  et  $b(t, x) = \sigma\sqrt{|x|}$ . Cette dernière fonction n'étant pas lipschitzienne le théorème 2.7 page 64 ne peut pas s'appliquer.

### 4.3 Exercices du chapitre 3

**Exercice 3.1** 1. D'après (3.8) page 82 on a

$$\tilde{V}_t^{x,\theta} = x/S_0^0 + \int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du + \int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u.$$

Puisque  $\theta \in \mathcal{A}$  le processus  $\int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u$  est une martingale, par conséquent

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_t^{x,\theta}] = x/S_0^0 + \mathbb{E}\left[\int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du\right]$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}(\tilde{V}_t^{x,\theta}) &= \text{var}\left(\int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du + \int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u\right) \\ &= \text{var}\left(\int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du\right) + \text{var}\left(\int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u\right) \\ &\quad + 2\text{cov}\left(\int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du, \int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u\right) \\ &= \text{var}\left(\int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du\right) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma^2 \theta_u^2 \tilde{S}_u^2 du\right] \\ &\quad + 2\text{cov}\left(\int_0^t (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du, \int_0^t \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u\right). \end{aligned}$$

2. D'après le théorème de Girsanov (théorème 2.27 page 67), le processus  $B_t^* = B_t + \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t$  est un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}^*$ . Or

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \\ &= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t^*}. \end{aligned}$$

Le processus  $\tilde{S}_t = S_0 \exp(\sigma B_t^* - \frac{\sigma^2}{2}t)$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}^*$  (voir par exemple l'exercice 2.4 page 69), donc  $\mathbb{Q}^*$  est une mesure de probabilité neutre au risque.

**Exercice 3.2** 1. Dans le modèle de Black-Merton-Scholes on a, pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B_T^*} \\ &= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t^* + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T^* - B_t^*)} \end{aligned}$$

donc

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T^* - B_t^*)},$$

où  $(B_t^*)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien sous la probabilité  $\mathbb{Q}^*$  définie par (3.6)

page 81. Donc

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | S_t = x \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} (S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T^* - B_t^*)} - K)^+ | S_t = x \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} (x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T^* - B_t^*)} - K)^+ | S_t = x \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T-t)} (x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T^* - B_t^*)} - K)^+ \right]
\end{aligned}$$

puisque sous  $\mathbb{Q}^*$ ,  $B_T^* - B_t^*$  est indépendant de  $S_t = x$ . Comme  $B_T^* - B_t^*$  est de loi gaussienne centrée de variance  $T - t$  il vient

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} (x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} - K)^+ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= \int_{\{y \geq -d_2\}} e^{-r(T-t)} (x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} - K) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy
\end{aligned}$$

où

$$d_2 = \frac{\log \frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

donc

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \int_{\{y \geq -d_2\}} x e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}y + \sigma^2(T-t))} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{\{y \geq -d_2\}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= x \int_{\{y \geq -d_2\}} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{T-t})^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy - K e^{-r(T-t)} \int_{\{y \geq -d_2\}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= x \int_{\{u \geq -d_2 - \sigma\sqrt{T-t}\}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - K e^{-r(T-t)} \int_{\{y \geq -d_2\}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy
\end{aligned}$$

en ayant effectué dans la première intégrale de la dernière ligne le changement

de variable  $u = y - \sigma\sqrt{T-t}$ . Donc

$$u(t, x) = x\mathbf{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2)$$

où

$$d_1 = \frac{\log \frac{x}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et  $d_2$  donné ci-dessus vérifie  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ .

2. On a

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 e^{\sigma B_T^* + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \\ &= S_0 e^{\sigma B_T + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \end{aligned}$$

où  $B$  est un mouvement brownien sous  $\mathbb{P}$  et  $B^*$  un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}^*$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_T \geq K) &= \mathbb{P}\left(B_T \geq \frac{\log \frac{K}{S_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}\right) \\ &= \mathbf{N}\left(\frac{\log \frac{S_0}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

et on montre de la même manière que

$$\mathbb{Q}^*(S_T \geq K) = \mathbf{N}\left(\frac{\log \frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

3. L'application  $\mathbf{N}$  est infiniment dérivable et les applications  $(t, x) \mapsto d_1$  et  $(t, x) \mapsto d_2$  sont de classe  $C^{1,2}$  sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}_+^*$  donc l'application  $(t, x) \mapsto u(t, x)$  est de classe  $C^{1,2}$  sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $(t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+^*$  on a

$$\delta(t, x) = \mathbf{N}(d_1) + x\mathbf{N}'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial x} - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial x}$$

or  $\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{\partial d_2}{\partial x}$  donc

$$\delta(t, x) = \mathbf{N}(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial x} \left( x\mathbf{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2) \right).$$

Mais  $\frac{\mathbf{N}'(d_1)}{\mathbf{N}'(d_2)} = e^{-\frac{d_1^2 - d_2^2}{2}}$  et

$$\begin{aligned} \frac{d_1^2 - d_2^2}{2} &= \frac{1}{2}(d_1 + d_2)(d_1 - d_2) \\ &= \frac{1}{2}(2d_1 - \sigma\sqrt{T-t})\sigma\sqrt{T-t} \\ &= \log \frac{x}{K} + r\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

donc

$$x\mathbf{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2) = 0$$

d'où  $\delta(t, x) = \mathbf{N}(d_1)$ . Également, pour tout  $(t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+^*$  on a

$$\gamma(t, x) = \mathbf{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{\mathbf{N}'(d_1)}{x\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$\theta(t, x) = x\mathbf{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial t} - rKe^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial t}$$

or

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} - \frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \theta(t, x) &= -rKe^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) + \frac{\partial d_1}{\partial t} \left( x\mathbf{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2) \right) \\ &\quad - \frac{\sigma Ke^{-r(T-t)}}{2\sqrt{T-t}}\mathbf{N}'(d_2) \\ &= -rKe^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) - \frac{\sigma Ke^{-r(T-t)}}{2\sqrt{T-t}}\mathbf{N}'(d_2). \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  on a

$$\begin{aligned} u(T, x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ (S_T - K)^+ | S_T = x \right] \\ &= (x - K)^+ \end{aligned}$$

et pour tout  $(t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 \theta(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \gamma(t, x) + rx\delta(t, x) \\
 &= -rKe^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) - \frac{\sigma Ke^{-r(T-t)}}{2\sqrt{T-t}}\mathbf{N}'(d_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\mathbf{N}'(d_1)}{x\sigma\sqrt{T-t}} + rx\mathbf{N}(d_1) \\
 &= \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}} \left( x\mathbf{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2) \right) \\
 &\quad + r(x\mathbf{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2)) \\
 &= ru(t, x)
 \end{aligned}$$

puisque  $x\mathbf{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2) = 0$ .

4. Nécessairement  $\delta(t, S_t) = \mathbf{N}(S_t)$  est adapté puisque  $\mathbf{N}$  est une fonction de répartition et  $\mathbb{E}[\int_0^T |\delta(t, S_t)|^2 dt] \leq T$  donc  $\theta^* \in \mathcal{A}$ .

5. Ceci découle du théorème 3.1 page 89.

**Exercice 3.3** Si  $G$  était répliquable par une telle stratégie, le portefeuille correspondant vérifierait

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_T^{x,\theta} &= x/S_0^0 + \int_0^T (\mu - r)\theta_u \tilde{S}_u du + \int_0^T \sigma \theta_u \tilde{S}_u dB_u \\
 &= x/S_0^0 + \int_0^T (\mu - r) du + \int_0^T \sigma dB_u
 \end{aligned}$$

or  $\int_0^T \sigma dB_u = \sigma B_T$  donc  $\tilde{V}_T^{x,\theta}$  pourrait prendre des valeurs négatives avec une probabilité non-nulle ce qui n'est pas possible.

**Exercice 3.4** 1. En appliquant la formule d'Itô à  $\log S_t$  on obtient

$$\log S_t = \log S_0 + \int_0^t \left( \mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

donc

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \left( \mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \right\}.$$

D'après l'exercice 2.19 page 73 le processus

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \left( \frac{\mu - r}{\sigma_s} \right) ds$$

est une martingale sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T^B, \mathbb{Q}^*)$  où  $\mathbb{Q}^*$  est définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}_T^*}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{ \int_0^T \left( \frac{\mu - r}{\sigma_s} \right) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\mu - r}{\sigma_s} \right)^2 ds \right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &= e^{-rt} S_0 \exp\left\{ \int_0^t \left( r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s dB_s^* \right\} \\ &= S_0 \exp\left\{ \int_0^t \sigma_s dB_s - \int_0^t \frac{\sigma_s^2}{2} ds \right\} \end{aligned}$$

qui est une martingale sous  $\mathbb{Q}^*$  d'après l'exercice 2.19 page 73. Par conséquent  $\mathbb{Q}_T^*$  est une mesure de probabilité neutre au risque et d'après la proposition 3.3 page 84 le prix du call à la date  $t$  quand le sous-jacent vaut  $x$  est donné par  $u(t, x)$  où

$$u(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ \left( S_0 \exp \left\{ \int_0^T \left( r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^T \sigma_s dB_s^* \right\} - K \right)_+ \middle| S_t = x \right]$$

ce qui conduit en raisonnant comme dans l'exercice 3.2 page 93 à

$$u(t, x) = x \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)$$

où

$$d_1 = \frac{\log \frac{x}{K} + \left( \int_t^T \left( r + \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds \right)}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}}$$

et  $d_2$  vérifie  $d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}$ . Si  $t = 0$  on voit que la loi de

$$\exp\left\{ \int_0^T \left( r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^T \sigma_s dB_s^* \right\}$$

sous  $\mathbb{Q}^*$  est la même que celle de  $\gamma B_T^* + \left( r - \frac{\gamma^2}{2} \right) T$  sous  $\mathbb{Q}^*$  où  $\gamma = \sqrt{\int_0^T \sigma_s^2 ds}$

donc le prix du call sur  $S$  est donné par le prix d'un call sur un sous-jacent de volatilité constante  $\gamma$ .

2. En raisonnant comme dans l'exercice 3.2 page 93 on obtient  $\delta(t, x) = \mathbf{N}(d_1)$  et

$$\theta(t, x) = -rKe^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\sigma_t^2}{2\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}}\mathbf{N}'(d_2)$$

3. S'il devait être égal sur tout  $t \in [0, T]$  au prix d'un call sur un sous-jacent de volatilité constante cette volatilité devrait être  $\gamma$  donné ci-dessus mais ceci contredit par exemple la forme des delta et theta trouvés précédemment.

**Exercice 3.5** D'après la proposition 3.3 page 84 le prix du call asiatique est donné par

$$p_0^G = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+ \right].$$

L'application  $x \mapsto (x - K)_+$  étant convexe, on a d'après l'inégalité de Jensen,

$$\left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+ \leq \frac{1}{T} \int_0^T (S_t - K)_+ dt$$

donc

$$p_0^G \leq \frac{1}{T} \int_0^T e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [(S_t - K)_+] dt.$$

De plus,  $(\tilde{S}_t = \frac{S_t}{e^{rt}})_{t \in [0, T]}$  étant une martingale sous  $\mathbb{Q}^*$  et  $x \mapsto (x - \frac{K}{e^{rT}})_+$  étant convexe,  $((\tilde{S}_t - \frac{K}{e^{rT}})_+)_{t \in [0, T]}$  est une sous-martingale. Ainsi pour tout  $t \in [0, T]$  on a

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [(S_t - K)_+] &\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ \left( \frac{S_t}{e^{rt}} - \frac{K}{e^{rT}} \right)_+ \right] \\ &\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ \left( \frac{S_T}{e^{rT}} - \frac{K}{e^{rT}} \right)_+ \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [(S_T - K)_+] \end{aligned}$$

donc  $p_0^G \leq e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [(S_T - K)_+]$  ce qui prouve le résultat annoncé.



**Exercice 3.6** 1. La valeur finale du call européen de strike  $K$  est  $(S_T - K)^+$ . La valeur finale de  $\Pi^1$  est  $\Pi_T^1 = \Delta K 1_{S_T \geq K} + (S_T - (K + \Delta K))^+$ . La valeur finale de  $\Pi^2$  est  $\Pi_T^2 = \Delta K 1_{S_T \geq K + \Delta K} + (S_T - (K + \Delta K))^+$ . Distinguons 3 cas :

- si  $S_T < K$  alors  $\Pi_T^1 = C^E(T, S, K) = \Pi_T^2 = 0$ ,
- si  $K \leq S_T < K + \Delta K$  alors  $\Pi_T^1 = \Delta K$ ,  $C^E(T, S, K) = S_T - K < \Delta K$  et  $\Pi_T^2 = 0$  donc  $\Pi_T^1 \geq C^E(T, S, K) \geq \Pi_T^2$ ,
- si  $S_T \geq K + \Delta K$  alors  $\Pi_T^1 = \Delta K + S_T - K - \Delta K = S_T - K$ ,  $C^E(T, S, K) = S_T - K$  et  $\Pi_T^2 = \Delta K + S_T - K - \Delta K = S_T - K$  donc  $\Pi_T^1 = C^E(T, S, K) = \Pi_T^2$ .

Ainsi, dans tous les cas,  $\Pi_T^1 \geq C^E(T, S, K) \geq \Pi_T^2$  donc en A.O.A. pour tout  $t \in [0, T]$  on a  $\Pi_t^1 \geq C^E(t, S, K) \geq \Pi_t^2$ .

2. D'après la question précédente, pour tout  $t \in [0, T]$  on a

$$\begin{aligned} \Delta K C^D(t, S, K) + C^E(t, S, K + \Delta K) &\geq C^E(t, S, K) \geq \\ &\geq \Delta K C^D(t, S, K + \Delta K) + C^E(t, S, K + \Delta K) \end{aligned}$$

donc

$$C^D(t, S, K) \geq \frac{C^E(t, S, K) - C^E(t, S, K + \Delta K)}{\Delta K}$$

et

$$\frac{C^E(t, S, K) - C^E(t, S, K + \Delta K)}{\Delta K} \geq C^D(t, S, K + \Delta K).$$

Comme  $C^D$  est continue par rapport à  $K$  et  $C^E$  est de classe  $C^1$  par rapport à  $K$ , en prenant dans les inégalités ci-dessus la limite  $\Delta K \rightarrow 0$  il vient  $C^D(t, S, K) = -\frac{\partial C^E(t, S, K)}{\partial K}$ .

3. Dans le modèle de Black-Merton-Scholes  $C^E(t, S, K) = u(t, S_t)$  où  $u$  est donnée par

$$u(t, x) = x \mathbf{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathbf{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\log \frac{x}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

et  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ . Donc  $C^D(t, S, K) = v(t, S_t)$  où  $v$  est donnée par

$$\begin{aligned} v(t, x) &= -\frac{\partial u}{\partial K}(t, x) \\ &= -x\mathbf{N}'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial K} + e^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) + Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial K}. \end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial d_1}{\partial K} = \frac{\partial d_2}{\partial K}$  donc

$$\begin{aligned} v(t, x) &= e^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) + \frac{\partial d_1}{\partial K} [x\mathbf{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2)] \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) \end{aligned}$$

car  $x\mathbf{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2) = 0$ , voir la correction de l'exercice 3.2 page 93.

Ayant ainsi obtenu une expression pour la valeur du call digital on en déduit la stratégie de réplcation en raisonnant comme dans la preuve du théorème 3.1 page 89. En particulier  $x^G = v(0, S_0)$  et pour tout  $t \in [0, T[$  on a

$$\theta_t^G = \frac{\partial v}{\partial x}(T, S_t)$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) &= e^{-r(T-t)}\frac{\partial d_2}{\partial x}\mathbf{N}'(d_2) \\ &= e^{-r(T-t)}\frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}\mathbf{N}'(d_2). \end{aligned}$$

**Exercice 3.7** 1. Le prix en  $t$  du call digital quand le prix du sous-jacent est  $x$  est donné par

$$\begin{aligned} u(t, x) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{Q}^*(S_T \geq K | S_t = x) \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{Q}^*(xe^{\sigma(B_T - B_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K) \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbf{N}(d_2) \end{aligned}$$

et  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = e^{-r(T-t)}\mathbf{N}'(d_2)\frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}$  où  $\mathbf{N}$  et  $d_2$  sont les quantités déjà vues à l'exercice 3.2 page 93.

2. En raisonnant comme dans l'exercice 3.2 page 93 on obtient que le prix en

$t$  de l'option « titre ou rien » quand le prix du sous-jacent est  $x$  est donné par

$$\begin{aligned} u(t, x) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [S_T 1_{S_T \geq K} | S_t = x] \\ &= x \mathbf{N}(d_1). \end{aligned}$$

3. D'après l'exercice 3.2 page 93 on peut couvrir un call européen à l'aide d'un portefeuille comportant  $\mathbf{N}(d_1)$  unités de l'actif risqué et d'après la première question de cet exercice on peut couvrir un call digital à l'aide d'un portefeuille comportant  $e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2) \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}$  unités de l'actif risqué quand le prix de celui-ci est  $x$ . Finalement, on peut couvrir une option digitale à l'aide d'un portefeuille auto-finançant ne comportant que  $e^{-r(T-t)} \mathbf{N}'(d_2) \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}\mathbf{N}(d_1)}$  unités de call et de l'actif sans risque.

**Exercice 3.8** 1. D'après la proposition 3.3 page 84 la valeur de  $G$  à la date  $t \in [0, T]$  quand  $S_t = x$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [e^{-r(T_1-t)} G | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [e^{-r(T-t)} (u(T_1, S_{T_1}) - K_1)_+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [e^{-r(T_1-t)} (u(T_1, S_{T_1}) - K_1)_+ | S_t = x] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} \left[ e^{-r(T_1-t)} \left( u(T_1, S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+\sigma(B_{T_1}^* - B_t^*)}) - K_1 \right)_+ \middle| S_t = x \right] \\ &= \mathbb{E} [e^{-r\theta} (u(T_1, x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g}) - K_1)_+]. \end{aligned}$$

quand  $\theta = T_1 - t$ .

2. D'après l'exercice 3.2 on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(T_1, x) > 0, \lim_{x \rightarrow 0} u(T_1, x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(T_1, x) = +\infty.$$

Ainsi il existe une unique solution à l'équation  $u(T_1, x) = K_1$  que l'on note  $x_1$ . Dès que  $g > -d$  on a  $u(T_1, x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g}) - K_1 \geq 0$  d'où l'expression demandée.

3. On sait que pour tout  $t \in [0, T], x \geq 0$  on a

$$u(t, x) = \mathbb{E}_{g_1} \left[ e^{-r(T-t)} (x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}g_1} - K)_+ \right]$$

donc

$$\begin{aligned} & u(T_1, xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g}) \\ &= \mathbb{E}_{g_1} \left[ e^{-r(T-T_1)} (xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-T_1)+\sigma\sqrt{T-T_1}g_1} - K)_+ \right], \end{aligned}$$

par conséquent en prenant  $\theta = T_1 - t$  on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_g [e^{-r\theta} u(T_1, xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g}) 1_{g>-d}] \\ &= \mathbb{E}_g e^{-r\theta} \left[ \mathbb{E}_{g_1} \left[ e^{-r(T-T_1)} (xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta+\sigma\sqrt{\theta}g} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta_1+\sigma\sqrt{\theta_1}g_1} - K)_+ \right] 1_{g>-d} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( xe^{\sigma(\sqrt{\theta}g+\sqrt{\theta_1}g_1)-\frac{\sigma^2}{2}(\theta+\theta_1)} - Ke^{-r(\theta+\theta_1)} \right) 1_A \right]. \end{aligned}$$

4. On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} v(T_1 - t, x) &= \mathbb{E} \left[ \left( xe^{\sigma(\sqrt{\theta}g+\sqrt{\theta_1}g_1)-\frac{\sigma^2}{2}(\theta+\theta_1)} - Ke^{-r(\theta+\theta_1)} \right) 1_A \right] - K_1 e^{-r\theta} \mathbf{N}(d) \\ &= xe^{-\frac{\sigma^2}{2}(\theta+\theta_1)} \mathbb{E} \left[ e^{\sigma(\sqrt{\theta}g+\sqrt{\theta_1}g_1)} 1_A \right] \\ &\quad - Ke^{-r(\theta+\theta_1)} \mathbb{E} [1_A] - K_1 e^{-r\theta} \mathbf{N}(d). \end{aligned}$$

Or  $(g, g_1)$  et  $(-g, -g_1)$  ont même loi donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P} \left( g < d, g + \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta}} g_1 < \frac{\log \frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(\theta + \theta_1)}{\sigma\sqrt{\theta}} \right) \\ &= \mathbf{N}_2 \left( d, \frac{\log \frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(\theta + \theta_1)}{\sigma\sqrt{\theta}}, \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta}} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{\sigma(\sqrt{\theta}g+\sqrt{\theta_1}g_1)} 1_A \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_A e^{\sigma(\sqrt{\theta}g+\sqrt{\theta_1}g_1)} e^{-\frac{g^2}{2}-\frac{g_1^2}{2}} dg dg_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{\sigma^2}{2}(\theta+\theta_1)} \int_A e^{-\frac{1}{2}(g-\sigma\sqrt{\theta})^2-\frac{1}{2}(g_1-\sigma\sqrt{\theta_1})^2} dg dg_1 \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{2}(\theta+\theta_1)} \int_{A'} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}h_1^2} dh dh_1 \end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, on a procédé au changement de variables  $h = g - \sigma\sqrt{\theta}$ ,  $h_1 = g_1 - \sigma\sqrt{\theta_1}$  conduisant à

$$A' = \left\{ \sigma(\sqrt{\theta}h + \sqrt{\theta_1}h_1) > -\left(\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(\theta + \theta_1)\right) \right\} \cap \left\{ h > -d - \sigma\sqrt{\theta} \right\},$$

d'où

$$\begin{aligned} v(T_1 - t, x) &= x\mathbf{N}_2 \left( d + \sigma\sqrt{\theta}, \frac{\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(\theta + \theta_1)}{\sigma\sqrt{\theta}}, \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta}} \right) \\ &\quad - Ke^{-r(\theta + \theta_1)}\mathbf{N}_2 \left( d, \frac{\log \frac{x}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\theta + \theta_1)}{\sigma\sqrt{\theta}}, \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta}} \right) \\ &\quad - K_1 e^{-r\theta}\mathbf{N}(d). \end{aligned}$$

5. C'est une conséquence du théorème 3.1 page 89.



## Chapitre 5

# Travaux pratiques en Octave et Matlab

Dans ce chapitre nous présentons quelques implémentations informatiques dans le but illustrer les chapitres précédents. Nous avons choisi le langage Matlab<sup>®</sup> [10] ou sa version gratuite Octave [3] pour sa facilité de programmation et l'utilisation courante qui en est faite dans la pratique. Octave implémente le même langage de programmation que Matlab.

R est un autre langage, souvent utilisé en recherche quantitative en finance et, plus généralement, en statistiques et calcul numérique [14]. Nous donnons en Section 5.4 les versions en R des implémentations précédemment données en Matlab/Octave.

### 5.1 Programmes pour le chapitre 1

Il s'agit ici de deux programmes implémentant le calcul du prix et du delta d'un call et d'un put européens dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein présenté au chapitre 1. Nous suivons essentiellement les idées de l'article [4] tout en les adaptant à notre situation.

Nous reprenons les notations du chapitre 1. Avec les notations du théorème 1.2 si  $G$  est un actif dérivé alors son prix  $v$  à l'instant 0 est  $e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G]$ .

Par ailleurs si  $G$  est indépendant du chemin,  $G = \phi(S_T^1)$ , nous obtenons

$$v = e^{-rT} \sum_{\omega_1, \dots, \omega_N} \mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_N) \phi(S_0^1 u^{\text{card}\{k:\omega_k=u\}} d^{\text{card}\{k:\omega_k=d\}}). \quad (5.1)$$

Mais l'ensemble des chemins  $(\omega_1, \dots, \omega_N)$  aboutissant au même facteur

$$u^{\text{card}\{k:\omega_k=u\}} d^{\text{card}\{k:\omega_k=d\}} = u^n d^{N-n}$$

est de cardinal

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Donc en utilisant l'équation (1.11) on obtient

$$v = e^{-rT} \sum_{n=0}^N q^n (1-q)^{N-n} \binom{N}{n} \phi(S_0^1 u^n d^{N-n}). \quad (5.2)$$

Il suffit donc, en principe, d'implémenter cette formule. Néanmoins, celle-ci est parfois instable du point de vue numérique car elle fait intervenir des nombres potentiellement trop petits. Pour comprendre le problème prenons  $N = 1000$ ,  $d = 0.2$  et calculons  $d^N$  :

```
1 octave:2>(0.2)^1000
2 ans = 0
```

Les erreurs d'arrondi font que le résultat est considéré nul. Par contre le calcul de  $\log(d^N) = N \log(d)$  se fait sans problème

```
1 octave:3>1000*log(0.2)
2 ans = -1609.4
```

Il faut donc travailler avec  $\log\left(q^n(1-q)^{N-n}\binom{N}{n}\right)$  que l'on ré-écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \log\left(q^n(1-q)^{N-n}\binom{N}{n}\right) &= \log(N!) - \log(n!) - \log((N-n)!) + \log(q^n) \\ &\quad + \log((1-q)^{N-n}) \\ &= \sum_{k=1}^N \log(k) - \sum_{k=1}^n \log(k) - \sum_{k=1}^{N-n} \log(k) + n \log(q) + (N-n) \log(1-q). \end{aligned}$$



Les programmes 5.1 et 5.9 implémentent de cette façon le calcul du prix des options call et put européennes :

Programme 5.1 – Implémentation calcul de prix pour arbre binomial

```

1  function [Call, Put] = crr_binomial_price(Price, Strike, Rate, Time
    , Steps, Up, Down)
2  %%% input:
3  %%
4  %%% Price: le prix du sous-jacent aujourd'hui
5  %%% Strike: le Strike de l'option
6  %%% Rate: le taux d'intérêt sans risque exprimé en années
7  %%% Time: temps restant jusqu'à maturité exprimé en années
8  %%% Steps: le nombre de pas de temps
9  %%% Up, Down: les facteurs multiplicatifs du modèle, vers le haut
    et bas
10
11  % calcul du delta d'une option pour un modèle binomial de Cox-Ross
    Rubinstein Binomial
12  % Adaptée de Higham, SIAM Review paper Vol. 44, No. 4, pp. 661-677 2002
13  % Utilise une solution explicite (expansion binomiale)
14  % Vectorisée basée sur les logs pour éviter les erreurs d'arrondi
    pour les valeurs trop petites
15
16  if (Time*Steps == 0) % nous sommes à maturité
17  Call = max(Price - Strike, 0);
18  Put = max(Strike - Price, 0);
19  return;
20  end % end if
21  dt = Time / Steps;
22  p = (exp(Rate*dt) - Down) / (Up - Down); % calcul de la proba risque neutre
23  % Les valeurs finales
24  Finalvalue = Price * Down.^([Steps:-1:0]') .* Up.^([0:Steps]');
25  Wcall = max(Finalvalue - Strike, 0); % call
26  Wput = max(Strike - Finalvalue, 0); % put
27  % version log/cumsum
28  csl = cumsum(log([1; [1:Steps]']));
29  tmp = csl(Steps+1) - csl - csl(Steps+1:-1:1) + log(p)*([0:Steps]')
    + log(1-p)*([Steps:-1:0]');
30  Call = exp(-Rate*Time) * sum(exp(tmp) .* Wcall);
31  Put = exp(-Rate*Time) * sum(exp(tmp) .* Wput);
32  end % end function

```

Exemple d'utilisation du programme ci-dessus pour le calcul du prix de l'option proposé dans l'exercice 1.8 page 22. Le premier calcul est au temps initial, le deuxième calcul est au temps  $dt$  pour un prix du sous-jacent de 40 :

```

1 octave:1>[Call_Put]=crr_binomial_price(80,80,log(1.1)
    ,3,3,1.5,0.5)
2 Call=34.080
3 Put=14.185
4 octave:2>[Call_Put]=crr_binomial_price(40,80,log(1.1),2,2,1.5,0.5)
5 Call=2.9752
6 Put=29.091

```

Les programmes 5.2 et 5.10 calculent la couverture de l'option (dite « le delta » et que l'on note cependant  $\theta$ ) à partir de l'expression donnée dans le théorème 1.3 : page 17

Programme 5.2 – Implémentation calcul de la couverture pour arbre binomial

```

1 function[DeltaCall,DeltaPut]=crr_binomial_delta(Price,Strike,
    Rate,Time,Steps,Up,Down)
2 %%%input:
3 %%
4 %%%Price:Le prix du sous-jacent aujourd'hui
5 %%%Strike:le Strike de l'option
6 %%%Rate:le taux d'interet sans risque exprime en annes
7 %%%Time:temps restant jusqu'a maturite exprime en annes
8 %%%Steps:le nombre de pas de temps
9 %%%Up,Down:les facteurs multiplicatifs du modele, vers le haut
    et bas
10
11 %%%calcule le delta d'une option pour un modele binomial de Cox
    RossRubinsteinBinomial
12 %%%utilise la fonction crr_binomial_price
13
14 if(Time*Steps==0)%nous sommes a maturite
15 DeltaCall=Price>=Strike;%call
16 DeltaPut=Strike>=Price;%put
17 return;
18 end%endif
19 dt=Time/Steps;
20 diffprice=Price*(Up-Down);
21 [callup,putup]=crr_binomial_price(Price*Up,Strike,Rate,Time-dt,
    Steps-1,Up,Down);
22 [calldown,putdown]=crr_binomial_price(Price*Down,Strike,Rate,
    Time-dt,Steps-1,Up,Down);
23 DeltaCall=(callup-calldown)/diffprice;
24 DeltaPut=(putup-putdown)/diffprice;
25 end%endfunction

```

Exemple d'utilisation du programme ci-dessus pour le calcul du delta de l'option dans l'exercice 1.8 page 22. Le premier calcul est au temps initial, le deuxième calcul est au temps  $dt$  et pour un prix du sous-jacent de 40 :

```

1 octave:18> [DeltaCall_DeltaPut]=crr_binomial_delta(80,80,log(1.1)
    ,3,3,1.5,0.5)
2 DeltaCall_ = 0.71901
3 DeltaPut_ = -0.28099
4 octave:19> [DeltaCall_DeltaPut]=crr_binomial_delta(40,80,log(1.1)
    ,2,2,1.5,0.5)
5 DeltaCall_ = 0.13636
6 DeltaPut_ = -0.86364

```

## 5.2 Programmes pour le chapitre 2

Construisons une réalisation d'un mouvement brownien standard dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous enregistrons dans un vecteur  $W$  les valeurs du mouvement brownien aux instants  $t_n = n\delta t$ , pour une réalisation donnée. Attention : comme la numérotation des indices commence à 1 en Octave le terme  $W(1)$  représente la valeur en  $t = 0$ , le terme  $W(4)$  la valeur en  $3\delta t$  et ainsi de suite.

Nous savons que les composantes  $W(k+1)$  suivent des lois  $\mathcal{N}(0, t_k)$ . Une première implémentation exploitant ceci est proposée dans le programme 5.3 (et sa version R 5.11); un résultat de ce programme est présenté dans la figure 5.1 (à gauche) et il est très éloigné de ce que l'on pense intuitivement être un mouvement brownien.

Programme 5.3 – Implémentation d'un calcul erroné de trajectoire brownienne

```

1 %programme_brownien1_faux.m
2 set(0,"defaultlinelength",20);%dessin_2D_plus_gros
3 set(0,"defaultaxeslinewidth",6);%axes_plus_grosses
4 set(0,"defaultaxesfontsize",16);%etiquettes_des_axes
5 set(0,"defaulttextfontsize",18);%
6 %set(0,'defaultsurfcelinewidth',20);%les_edges_des_surfaces_plus_grosses
7 %set(0,'defaultpatchlinewidth',20);%concerne_les_surfaces_plus_complexes(patches)
8
9 randn('seed',100);
10 T=1;%temps_final
11 N=255;%nombre_de_pas_de_temps

```

```

12 dt=T/N; %le pas de temps
13 for jj=1:N+1
14 W(jj)=randn(1,1)*sqrt(dt*(jj-1));
15 end
16 plot(0:dt:T,W);
17
18 %Pour sauvegarder le dessin dans un fichier pdf
19 %set(gca,"fontsize",24);
20 print-dpdf-mono-brownien1-faux.pdf

```

Où est l'erreur ? Dans cette implémentation les composantes  $W(k+1)$  ont bien des loi  $\mathcal{N}(0, t_k)$  mais leurs covariances sont nulles alors que pour le mouvement brownien  $cov(W(k+1), W(\ell+1)) = \min(t_k, t_\ell)$ . Pour corriger ce défaut il suffit de se rappeler que, pour un mouvement brownien  $W_t$  les incréments  $W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$  sont des v.a. indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, t_{n+1} - t_n)$ . Ainsi, pour simuler un mouvement brownien aux instants  $t_n$ , il suffit de sommer des v.a. normales indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, t_{n+1} - t_n)$ .

Programme 5.4 – Implémentation correcte d'un calcul de trajectoire brownienne

```

1 %programme brownien1.m
2 set(0,"defaultlinelength",30); %dessin 2D plus gros
3 set(0,"defaultaxeslinewidth",6); %axes plus grosses
4 set(0,"defaultaxesfontsize",16); %etiquettes des axes
5 set(0,"defaulttextfontsize",18); %
6 %set(0,'defaultsurfacelength',20); %les edges des surfaces plus
   grosses
7 %set(0,'defaultpatchlinewidth',20); %concerne les surfaces plus
   complexes (patches)
8 randn('seed',100);
9 T=1; %temps final
10 N=255; %nombre de pas de temps
11 dt=T/N; %le pas de temps
12 W=zeros(N+1,1); %ici sera stockée la trajectoire
13 W(1)=0; %valeur initiale
14 for jj=2:N+1
15 W(jj)=W(jj-1)+randn(1,1)*sqrt(dt);
16 end
17 plot(0:dt:T,W);
18
19 %Pour sauvegarder le dessin dans un fichier pdf
20 %set(gca,"fontsize",24);
21 print-dpdf-mono-brownien1.pdf

```

La différence entre une exécution du programme 5.4 et une exécution du programme 5.3 apparaît clairement dans la figure 5.1.

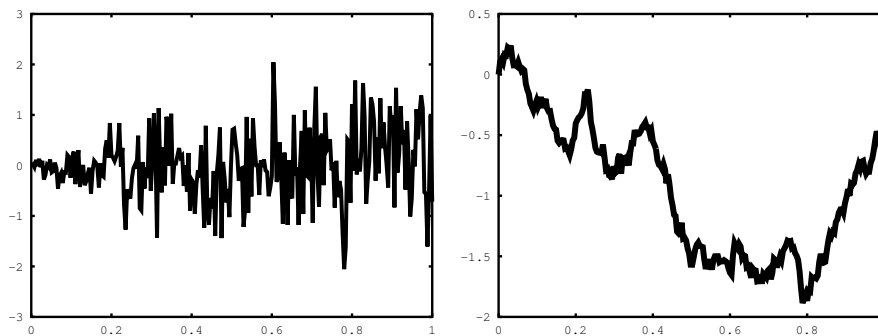


FIGURE 5.1 – Résultats du programme 5.3 (à gauche) et 5.4 (à droite). À gauche il n'y a pas de corrélation entre les valeurs à des instants différents, contrairement à la définition d'un mouvement brownien.

En pratique, il est souvent utile de calculer simultanément plusieurs réalisations du mouvement brownien. Il est bien sûr possible d'utiliser plusieurs fois le programme précédent. Néanmoins, il est plus efficace de tout exécuter d'un seul coup en utilisant les capacités du langage de programmation qui est conçu pour manipuler des vecteurs et matrices entières plutôt que des composantes prises une par une. Voici donc un programme qui calcule plusieurs réalisations simultanément :

Programme 5.5 – Calcul d'une trajectoire brownienne, version vectorielle

```

1  %programme_brownien2.m
2  set(0,"defaultlinelength",15);%dessin_2D_plus_gros
3  set(0,"defaultaxeslinewidth",6);%axes_plus_grosses
4  set(0,"defaultaxesfontsize",16);%etiquettes_des_axes
5  set(0,"defaulttextfontsize",18);%
6
7  randn('seed',100);
8  T=1;%temps_final
9  N=255;%nombre_de_pas_de_temps
10 M=30;%nombre_de_realisations
11 dt=T/N;%le_pas_de_temps
12 W=zeros(N+1,M);
13 randn("seed",100);%pour_generer_toujours_la_meme_trajectoire,
14 dW=randn(N+1,M)*sqrt(dt);%les_increments_du_mvt_Brownien

```

```

15 W_ = cumsum(dW); % la fonction cumsum fait la somme cumulative par
    colonne, c'est le brownien
16
17 %affichage
18 set(gca, "fontsize", 24);
19 plot(0:dt:T, W);
20 % sauvegarde du graphique sous forme pdf
21 print -dpdf -mono brownien2.pdf;

```

Le résultat du programme 5.5 (voir aussi la version R 5.13) est donné dans la figure 5.2 à gauche.

Continuons en simulant des trajectoire de solutions d'E.D.S. Considérons  $\{X_t, t \geq 0\}$  un processus qui vérifie l'E.D.S. (2.16) page 65. Nous utilisons le schéma numérique d'Euler-Maruyama (voir [5] pour une présentation détaillée) qui conduit à une approximation  $Y_{t_n}$  d'une discrétisation  $X_{t_n}$  de  $\{X_t, t \geq 0\}$ . Les  $Y_{t_n}$  sont définis récursivement par

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= X_0, \\
 Y_{t_{n+1}} &= Y_{t_n} + a(t_n, Y_{t_n})(t_{n+1} - t_n) + b(t_n, Y_{t_n})(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}).
 \end{aligned}$$

Ci-dessous un programme pour un modèle de type Black-Merton-Scholes, qui suit donc l'E.D.S. (3.2) (page 79) c'est-à-dire que  $a(t, X) = \mu X$  et  $b(t, X) = \sigma X$  (voir 5.14 pour la version R). Ce programme est facile à adapter à des situations plus générales où, par exemple,  $\mu$  et  $\sigma$  varient dans le temps.

Programme 5.6 – Implémentation du calcul d'une trajectoire Black-Merton-Scholes par Euler-Maruyama

```

1 %programme sous jacent.m
2 set(0, "defaultlinelength", 15); % dessin 2D plus gros
3 set(0, "defaultaxeslinewidth", 6); % axes plus grosses
4 set(0, "defaultaxesfontsize", 16); % étiquettes des axes
5 set(0, "defaulttextfontsize", 18); %
6
7 randn('seed', 100);
8 T=1; % temps final
9 N=255; % nombre de pas de temps
10 M=30; % nombre de réalisations
11 dt=T/N; % le pas de temps
12 mu=0.1; % taux de rendement annualisé
13 sigma=0.25; % volatilité dans l'évolution Black-Scholes

```

```

14 S0=100; %valeur initiale du sous-jacent
15 S=zeros(N+1,M);
16 S(1,:)=S0; %initialisation de la valeur
17 randn("seed",100); %pour generer toujours la meme trajectoire,
18 dW=randn(N+1,M)*sqrt(dt); %les increments du mut Brownien
19 for jj=2:N+1
20 %ci-dessous utilisation du schema Euler Maruyama
21 S(jj,:)=S(jj-1,:)+mu*S(jj-1,:)*dt+sigma*S(jj-1,:).*dW(jj-1,:);
22 end
23
24 %affichage
25 set(gca,"fontsize",24);
26 plot(0:dt:T,S);
27 %sauvegarde du graphique sous forme pdf
28 print-dpdf-mono-sousjacent.pdf;

```

Il convient de noter la multiplication «  $S.*dW$  » qui permet de multiplier deux vecteurs ligne composante par composante.

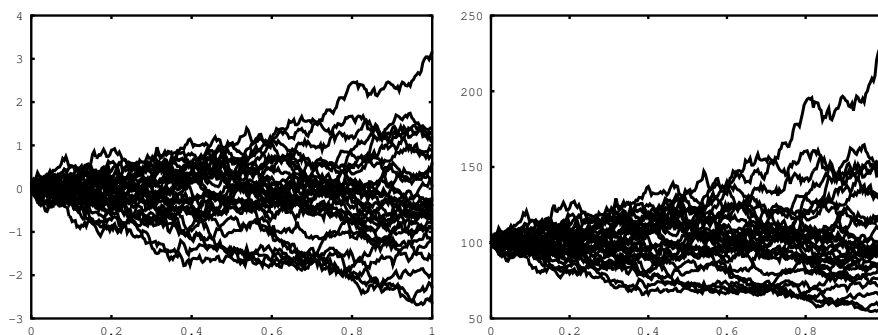


FIGURE 5.2 – Exécution du programme 5.5 (gauche) et 5.6 (droite,  $\mu = 0.10$ ,  $\sigma = 0.25$ ).

### 5.3 Programmes pour le chapitre 3

Le programme 5.7 implémente la formule (3.12) page 87 et une formule analogue pour le put ; le programme 5.8 ci-dessous calcule la couverture (« le delta ») des options call et put européennes (Matlab dispose de programmes remplissant ces fonctions dans son « toolbox finance »). Se reporter aux listings 5.15 et 5.16 pour les versions en langage R de ces programmes.

Programme 5.7 – Implémentation du calcul du prix Black-Merton-Scholes

```

1  function [call,put]=blsprice(Price,Strike,Rate,TimeToMaturity,
    Volatility,DividendRate)
2  %%%input:
3  %%
4  %%%Price: Le prix du sous-jacent aujourd'hui
5  %%%Strike: le Strike de l'option
6  %%%Rate: le taux d'interet sans risque exprime en annees
7  %%%TimeToMaturity: temps restant jusqu'a maturite exprime en
    annees
8  %%%Volatility: volatilité
9  %%%DividendRate: le taux continu de dividendes; s'il manque il
    est pris zero_count
10
11  %met le dernier argument (dividendes) a zero
12  if (nargin==5) DividendRate=0; end;
13
14  if (TimeToMaturity==0) %l'option est deja expiree
15  call=max(Price-Strike,0);
16  put=max(Strike-Price,0);
17  else
18
19
20  d1=log(Price./Strike)+(Rate-DividendRate+Volatility.^2/2).*
    TimeToMaturity;
21  d1=d1./(Volatility.*sqrt(TimeToMaturity));
22  d2=d1-(Volatility.*sqrt(TimeToMaturity));
23
24  d1(isnan(d1))=0;%met a zero les divisions par zero ou calculs pas
    definis
25  d2(isnan(d2))=0;%idem
26
27  call=Price.*exp(-DividendRate.*TimeToMaturity).*normcdf(d1)-
    Strike.*exp(-Rate.*TimeToMaturity).*normcdf(d2);
28  put=Strike.*exp(-Rate.*TimeToMaturity).*normcdf(-d2)-Price.*
    exp(-DividendRate.*TimeToMaturity).*normcdf(-d1);
29  end
30
31  end

```

Programme 5.8 – Implémentation du calcul du delta Black-Merton-Scholes

```

1  function [call,put]=blsdelta(Price,Strike,Rate,TimeToMaturity,
    Volatility,DividendRate)
2  %%%input:
3  %%
4  %%%Price: Le prix du sous-jacent aujourd'hui

```



```

5  %%%Strike: le Strike de l'option
6  %%%Rate: le taux d'interet sans risque exprime en annees
7  %%%TimeToMaturity: temps restant jusqu'a maturite exprime en
    annees
8  %%%Volatility: volatilité
9  %%%DividendRate= le taux continu de dividendes; s'il manque il
    est pris zero_count
10
11  %met le dernier argument (dividendes) a zero
12  if (nargin==5); DividendRate=0; end;
13
14  if (TimeToMaturity==0) %l'option est deja expiree
15  %call=Price>=Strike; %1 si c'est dans la monnaie, zero
    sinon
16  %put=Price<=Strike; %pareil pour le put
17  else
18
19
20  d1=log(Price./Strike)+(Rate-DividendRate+Volatility.^2/2).*
    TimeToMaturity;
21  d1=d1./(Volatility.*sqrt(TimeToMaturity));
22  d2=d1-(Volatility.*sqrt(TimeToMaturity));
23
24  d1(isnan(d1))=0; %met a zero les divisions par zero ou calculs pas
    definis
25  d2(isnan(d2))=0; %idem
26
27  call=exp(-DividendRate.*TimeToMaturity).*normcdf(d1);
28  put=exp(-DividendRate.*TimeToMaturity).*normcdf(-d1);
29  end %end if
30
31  end %end function

```

Ci-dessous une exécution avec  $\sigma = 0.25$ ,  $r = 0.03$ ,  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$ ,  $T = 1$  :

```

1  octave:20> [prixcall_prixput]=blsprice(100,100,0.03,1.0,0.25)
2  prixcall=11.348
3  prixput=8.3930
4  octave:21> [deltacall_deltaput]=blsdelta(100,100,0.03,1.0,0.25)
5  deltacall=0.59677
6  deltaput=-0.40323
7  octave:22> deltacall-deltaput
8  ans=1
9  octave:23> prixput+100-100*exp(-0.03*1)
10 ans=11.348

```

Comme prévu la différence entre les delta du call et du put est 1 ; par ailleurs les prix du call et du put satisfont la relation de parité (1.5) page 9.

## 5.4 Versions R des programmes

Pour le lecteur plus habitué à utiliser le langage R [14] nous donnons ci-dessous les versions R des programmes présentés dans ce chapitre.

Programme 5.9 – Implémentation du calcul de prix pour arbre binomial

```

1  crr_binomial_price<-function(price,strike,rate,time,steps,up
   ,down){
2  #price: prix du sous-jacent aujourd'hui
3  #strike: strike de l'option
4  #rate: taux d'intérêt en années
5  #time: temps restant jusqu'à maturité exprimé en années
6  #steps: nombre de pas
7  #up: facteur multiplicatif vers le haut
8  #down: facteur multiplicatif vers le bas
9
10 #calcule le prix du call et du put sur l'arbre binomial
11
12 if(time*steps==0){
13   return(list(Call=max(price-strike,0),Put=max(strike-price,0)))
14 }
15 else{
16   dt<-time/steps
17   p<-(exp(rate*dt)-down)/(up-down)
18
19   #Les valeurs finales
20
21   finalvalue<-price*down^(steps:0)*up^(0:steps)
22   Wcall<-pmax(finalvalue,strike,0)
23   Wput<-pmax(strike-finalvalue,0)
24
25   #Version log/cumsum
26
27   csl<-cumsum(log(c(1,1:steps)))
28   tmp<-csl[steps+1]-csl-rev(csl)+log(p)*(0:steps)+log(1-p)
   *(steps:0)
29
30   return(list(Call=exp(-rate*time)*sum(exp(tmp)*Wcall),Put=exp(-rate
   *time)*sum(exp(tmp)*Wput)))
31 }
32 }
```

Programme 5.10 – Implémentation du calcul de la couverture pour arbre binomial

```

1  crr_binomial_delta<-function(price,strike,rate,time,steps,up
   ,down){
2  #price: prix du sous-jacent aujourd'hui
3  #strike: strike de l'option
4  #rate: taux d'interêt en années
5  #time: temps restant jusqu'à maturité exprimé en années
6  #steps: nombre de pas
7  #up: facteur multiplicatif vers le haut
8  #down: facteur multiplicatif vers le bas
9
10 # calcule le delta du call et du put sur l'arbre binomial
11
12 #ATTENTION: utilise la fonction crr_binomial_price
13
14 if(time*steps==0){
15   return(list(couverture_call=as.integer(price>=strike),
16               couverture_put=as.integer(strike>=price)))
17 }
18 else{
19   dt<-time/steps
20   diffprice<-price*(up-down)
21   callup_putup<-c(crr_binomial_price(price*up,strike,rate,time-
22     dt,steps-1,up,down)[[1]],crr_binomial_price(price*up,
23     strike,rate,time-dt,steps-1,up,down)[[2]])
24   calldown_putdown<-c(crr_binomial_price(price*down,strike,rate,
25     time-dt,steps-1,up,down)[[1]],crr_binomial_price(price*down
26     ,strike,rate,time-dt,steps-1,up,down)[[2]])
27
28   return(list(couverture_call=(callup_putup[1]-calldown_putdown
29     [1])/diffprice,couverture_put=(callup_putup[2]-
30     calldown_putdown[2])/diffprice))
31 }
32 }
```

Programme 5.11 – Implémentation d'un calcul erroné de trajectoire brownienne

```

1  T<-1#temps final
2  N<-255#nombre de pas de temps
3  dt<-T/N#le pas de temps
4  w<-sqrt(dt)*(0:N)*rnorm(N+1)
5  plot((0:N),w,type="l",col="red",main="Fausse simulation brownien")
```

Programme 5.12 – Implémentation correcte d'un calcul de trajectoire brownienne

```

1  T<-1######temps_final
2  N<-255######nombre_de_pas_de_temps
3  dt<-T/N######le_pas_de_temps
4  w<-rep(0,N+1)######ici sera stockée la trajectoire
5  for(i in 1:N+1){
6    w[i]<-w[i-1]+rnorm(1)*sqrt(dt)
7  }
8  plot((0:N),w,type="l",col="red",main="Simulation_brownien")

```

Programme 5.13 – Implémentation du calcul d'une trajectoire brownienne, version vectorielle

```

1  T<-1######temps_final
2  N<-255######nombre_de_pas_de_temps
3  M<-5######nombre_de_réalisations
4  dt<-T/N######le_pas_de_temps
5  s<-sqrt(dt)*matrix(c(rep(0,M),rnorm(M*N,0,1)),nrow=M)
6  w<-t(apply(s,1,cumsum))
7
8  plot((0:N),w[1,],type="l",col="red",main="Simulation_brownien")

```

Programme 5.14 – Implémentation du calcul d'une trajectoire Black-Merton-Scholes par Euler-Maruyama

```

1  T<-1######temps_final
2  N<-5######nombre_de_pas_de_temps
3  M<-5######nombre_de_réalisations
4  dt<-T/N######le_pas_de_temps
5  mu<-0.1######taux_de_rendement_annualisé
6  sigma<-0.25######volatilité dans l'évolution Black-Scholes
7  S0=100######valeur initiale du sous-jacent
8  s<-matrix(c(rep(S0,M),rep(0,N*M)),nrow=M)
9  w<-sqrt(dt)*matrix(rnorm(N*M),nrow=M)######les increments du
#####mouvement brownien
10 for(i in 1:N+1){
11   s[,i]<-s[,i-1]+mu*s[,i-1]*dt+sigma*s[,i-1]*w[,i-1]######schéma d'
#####Euler-Maruyama
12 }
13 plot((0:N),s[1,],type="l",col="red",main="Simulation d'un brownien géométrique")

```

Programme 5.15 – Implémentation du calcul du prix Black-Merton-Scholes

```

1  bls_price<-function(price,strike,rate,time_to_maturity,
    volatility){
2  ##price#####:prix du sous-jacent aujourd'hui
3  ##strike#####:strike de l'option
4  ##rate#####:taux d'interêt en années
5  ##time_to_maturity##:temps restant jusqu'à maturité exprimé en
    années
6  ##volatility#####:volatilité
7
8
9  ##calcule le prix du call et du put pour le modèle de Black &
    Scholes
10
11  if(time_to_maturity==0){
12    return(list(Call=max(price-strike,0),Put=max(strike-price,0)))
13  }
14  else{
15    d1<-(log(price/strike)+(rate+(volatility^2)/2)*
        time_to_maturity)/(volatility*sqrt(time_to_maturity))
16    d2<-d1-volatility*sqrt(time_to_maturity)
17
18    prix_call<-price*pnorm(d1,0,1)-strike*exp(-rate*
        time_to_maturity)*pnorm(d2,0,1)
19    prix_put<-strike*exp(-rate*time_to_maturity)*pnorm(-d2,0,1)-
        price*pnorm(-d1,0,1)
20
21    return(list(Call=prix_call,Put=prix_put))
22  }
23  }

```

Programme 5.16 – Implémentation du calcul du delta Black-Merton-Scholes

```

1  bls_delta<-function(price,strike,rate,time_to_maturity,
    volatility){
2  ##price#####:prix du sous-jacent aujourd'hui
3  ##strike#####:strike de l'option
4  ##rate#####:taux d'interêt en années
5  ##time_to_maturity##:temps restant jusqu'à maturité exprimé en
    années
6  ##volatility#####:volatilité
7
8
9  ##calcule le delta du call et du put pour le modèle de Black &
    Scholes
10
11  if(time_to_maturity==0){

```

```
12  return(list(couverture_call=as.integer(price>=strike),  
13             couverture_put=as.integer(strike>=price)))  
14  }  
14  else{  
15      d1<-(log(price/strike)+(rate+(volatility^2)/2)*  
16          time_to_maturity)/(volatility*sqrt(time_to_maturity))  
17      return(list(couverture_call=pnorm(d1,0,1),couverture_put=pnorm  
18          (-d1,0,1)))  
19  }
```

## Chapitre 6

# Quelques études de cas

### 6.1 Couverture d’option (delta-hedging) et négociation (trading) de volatilité

Nous considérons dans cette étude de cas la situation d’un vendeur d’options qui, pour couvrir ses ventes, utilise le modèle de Black-Merton-Scholes présenté précédemment.

#### 6.1.1 Implémentation d’une couverture de type delta-hedging

Le programme 6.1 et sa version R 6.5 implémentent le delta-hedging. La variable « cash » indique à chaque moment la valeur du compte trésorerie. Elle est augmentée en  $t = 0$  lors de l’encaissement du prix de l’option et décrémentée pour payer la construction de la couverture. Elle varie donc suivant l’évolution du delta ( $\theta$  dans la notation des chapitres précédents) calculée pour le modèle de Black-Merton-Scholes. À maturité, le « cash » est modifié lors de la livraison et lors de la liquidation de la position de couverture sur le sous-jacent. Le reste du temps le « cash » est capitalisé au taux sans risque  $r$ . Il convient de remarquer que le « cash » peut prendre des valeurs négatives, ce qui correspond à une dette. Le programme correspondant à cette stratégie est le programme 6.1, illustré par la figure 6.1 :

Programme 6.1 – Implémentation d’une couverture d’option (delta-hedging) suivant le modèle de Black-Merton-Scholes

```

1  %programme_delta_hedging.m
2  %_implemente_une_strategie_de_type_delta-hedging
3  %
4  randn('seed',100);
5
6  %donnees
7  T=1;%_temps_en_annees
8  N=255*8*4;%_no._de_pas_de_temps,_jours_boursiers
9  dt=T/N;%_taille_d'un_pas_de_temps
10 M=1000;%_nombre_de_realisations_du_mvt_brownien,_no._de_scenarios
11 S0=100;
12 mu=0.1;
13 sigma=0.15;
14 S0=100;
15 r=0.03;
16 K=100;
17
18 %initialisation
19 S=zeros(N+1,M);%_contient_les_valeurs_du_sous-jacent
20 cash=zeros(N+1,M);%_la_tresorerie_du_portefeuille
21 S(1,:)=S0;
22 prix=blsprice(S(1,:),K,r,T,sigma);%prix_initial
23 cash(1,:)=prix;
24 delta=zeros(N+1,M);
25 delta(1,:)=blsdelta(S(1,:),K,r,T,sigma);%calcul_du_delta
26 cash(1,:)=cash(1,)-delta(1,:).*S(1,:);%paiement_de_la_couverture
27
28 dW=_sqrt(dt)*randn(N+1,M);
29
30 for jj=2:N
31 S(jj,:)=S(jj-1,:).*(1+_mu*dt+_sigma*dW(jj-1,:));
32 cash(jj,:)=cash(jj-1,:)*exp(dt*r);%_capitalisation_de_la_
    tresorerie
33 delta(jj,:)=blsdelta(S(jj,:),K,r,T-dt*(jj-1),sigma);%mise_a_jour_
    du_delta
34 cash(jj,:)=cash(jj,)-(delta(jj,)-delta(jj-1,)).*S(jj,);%_
    paiement_de_l'ajustement_de_couverture
35 end
36
37 %fin_et_livraison
38 S(N+1,:)=S(N,:).*(1+_mu*dt+_sigma*dW(N,:));
39 cash(N+1,:)=cash(N,)*exp(dt*r);%capitalisation
40 cash(N+1,:)=cash(N+1,)+delta(N,).*S(N+1,);%vente_de_la_
    position_sur_sous_jacent

```



```

41 cash(N+1,:)=cash(N+1,:)-max(S(N+1,:)-K,0);%livraison,possible_
    perte
42
43 %graphique
44 set(0,"defaultlinelength",15);%dessin_2D_plus_gros
45 set(0,"defaultaxeslinewidth",6);%axes_plus_grosses
46 set(0,"defaultaxesfontsize",20);%etiquettes_des_axes
47 set(0,"defaulttextfontsize",18);%
48 colormap(gray(256));
49 hist(cash(N+1,:)*100./prix,30);%histogramme_de_la_valeur_a_l'
    instant_final
50 std(cash(N+1,:)*100./prix)%variance_du_resultat
51
52 set(gca,"fontsize",24);
53 print-dpdf_hist_delta_hedging.pdf;

```

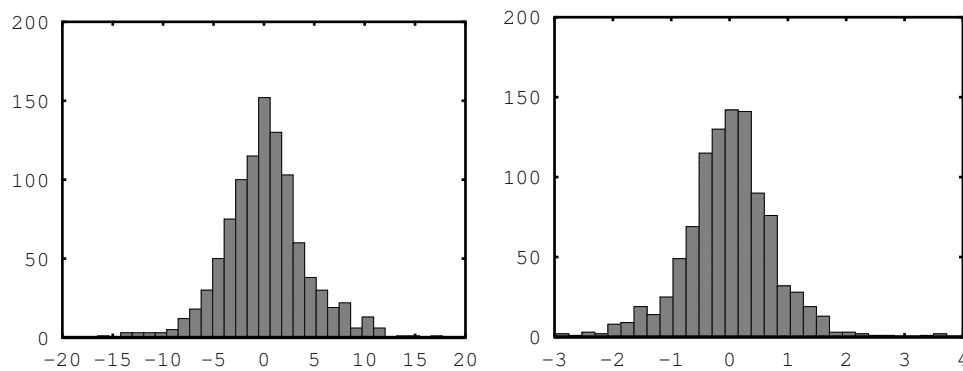


FIGURE 6.1 – Exécution du programme 6.1. A gauche  $N = 255$  (ajustement du delta une fois par jour), à droite  $N = 255 * 8 * 4$  (ajustement du delta tous les quarts d'heure).

Notons qu'ici nous ne sommes pas dans une vision risque-neutre mais bien dans le cadre d'un calcul de résultat (dit « Profit and Loss » ou encore P&L) dans le monde « réel ». En pratique, la ligne qui enregistre l'évolution du sous-jacent ne résulte pas d'une simulation mais correspond aux cotations du sous-jacent observées sur les marchés. La partie à gauche de la figure 6.1 montre l'histogramme pour une exécution avec remise en conformité avec le modèle de Black-Merton-Scholes une fois par jour. La théorie nous dit que le résultat devrait être toujours zéro, pour **toutes** les réalisations. Or ceci ne

semble pas être le cas, certaines réalisations font état de pertes de l'ordre de 10% par rapport au prix de l'option. L'explication de cet écart réside dans le choix de l'intervalle  $dt$  entre deux mises en conformité avec le modèle (qui lui est en temps continu, c'est-à-dire  $dt = 0$ ). En effet, la partie à droite de la figure 6.1 montre l'histogramme équivalent pour des mises en conformité avec le modèle toutes les 15 minutes. On observe que la variance  $y$  est bien moindre. Il convient de noter qu'ici nous prenons  $N = 255$  comme étant le nombre de jours ouvrés dans une année (pas de cotation les week-ends, jour fériés, etc.) avec 8 heures de cotations par jour.

Si il faut tenir compte de frais de transaction alors le nombre d'ajustements aura un impact sur la valeur finale du portefeuille. Dans la réalité, cet effet est tellement important que les vendeurs d'options négocient rarement une seule option : ils tentent de limiter les ajustements à faire en vendant simultanément des calls et des puts pour arriver ainsi à une certaine insensibilité du delta total du portefeuille par rapport aux évolutions du sous-jacent. Ceci revient à minimiser la dérivée seconde de la valeur du portefeuille par rapport au sous-jacent. C'est pour cette raison que cette stratégie de gestion s'appelle gestion  $\Gamma$ -neutre.

### 6.1.2 Incertitude sur les paramètres : volatilité implicite, volatilité réelle, négociation de volatilité

Continuons l'étude de la couverture d'une option en nous interrogeant sur sa robustesse par rapport à l'estimation des paramètres. Ce faisant on constatera que les options permettent de négocier la volatilité d'un sous-jacent tout en éliminant les risques directionnels sur celui-ci.

Considérons d'abord le paramètre  $\mu$ . Tout vendeur d'options peut craindre que si le sous-jacent croît beaucoup alors il aura d'importantes sommes à rembourser à l'acheteur. La figure 6.2 montre le résultat de l'exécution du programme 6.1 pour  $\mu = 0.6$ . La crainte n'est pas justifiée, les résultats sont tout aussi bons que ceux de la figure 6.1. Ceci s'explique par le fait que le prix et le delta de l'option dans le modèle de Black-Merton-Scholes ne dépendent pas de  $\mu$ .

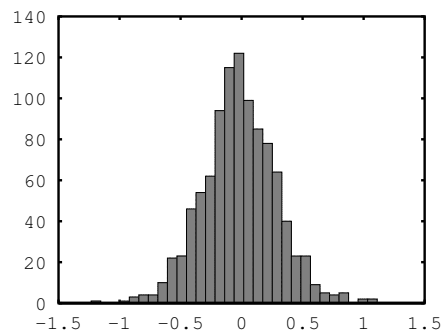


FIGURE 6.2 – Résultat de l'exécution du programme 6.1 pour  $\mu = 0.6$  (rendement annuel 60%),  $N = 255 * 8 * 4$ .

Considérons maintenant le problème de l'incertitude sur le paramètre  $\sigma$ . Plus précisément, nous considérons dorénavant que les intervenants sur le marché estiment sa volatilité égale à un certain  $\sigma$  mais que le marché évolue avec une autre volatilité  $\sigma_{reel}$  qui est peut-être différente des attentes des acteurs du marché. Le programme est donc le même que le programme 6.1 avec comme seule différence l'introduction d'une variable  $\sigma_{reel}$  (par exemple `sigmareeel=0.5`) utilisée dans le calcul de «  $S(jj, :)$  » à la place de  $\sigma$  :

```
1  S(jj,:) = S(jj-1,:) .* (1 + mu*dt + sigmareeel*dW(jj-1,:));
```

Les histogrammes P&L sont présentés dans la figure 6.3. Il est intéressant de voir que lorsque  $\sigma_{reel} = 0.5 > \sigma = 0.15$  le portefeuille est toujours négatif alors que lorsque  $\sigma_{reel} = 0.05 < \sigma = 0.15$  le portefeuille est toujours positif. Ce portefeuille agit donc comme un pari sur la volatilité à venir : si jamais la volatilité à venir est supérieure aux attentes alors le détenteur du portefeuille perdra, sinon il gagnera. Détenir un tel portefeuille permet de faire fructifier un décalage entre l'estimation du détenteur et les estimations des autres participants au marché. C'est un portefeuille dont l'établissement ne comporte pas de frais et dont la valeur finale sera positive ou négative selon le résultat du pari.

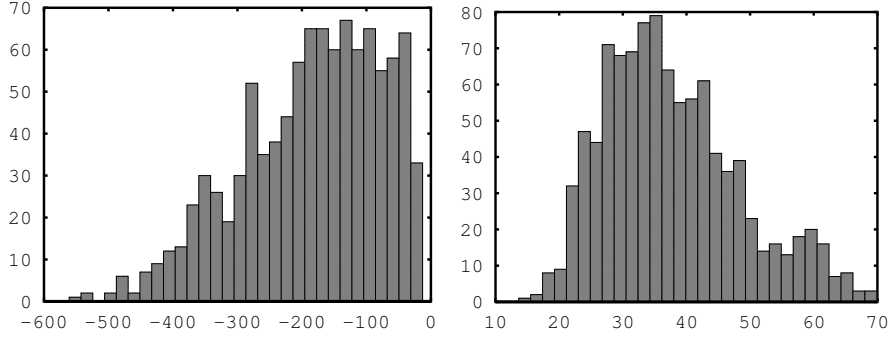


FIGURE 6.3 – Exécution du programme 6.1 avec  $\sigma_{reel}$  dans l'évolution du sous-jacent. Ici  $N = 255$ . A gauche  $\sigma_{reel} = 0.5$ , à droite  $\sigma_{reel} = 0.05$ .

Comment expliquer le signe du portefeuille de couverture ? Rappelons que le prix et le delta dans le modèle de Black-Merton-Scholes sont des fonctions dépendantes de la volatilité ; les fonctions utilisées pour la couverture sont basées sur la volatilité estimée  $\sigma$  mais pas sur la volatilité réelle  $\sigma_{reel}$ . Notons  $C(t, S_t; \sigma)$  le prix du call de strike  $K$ . Le portefeuille considéré  $\Pi_t$  est composé de

- $-1$  call de strike  $K$ ,
- $\Delta_t^\sigma = \partial_S C(t, S_t; \sigma)$  parts de sous-jacent  $S_t$ ,
- $\Pi_t - (-1)C(t, S_t; \sigma) - \Delta_t^\sigma S_t$  est investi dans l'actif sans risque.

En tant que portefeuille auto-financé  $\Pi_t$  vérifie

$$\begin{aligned}
 d\Pi_t &= (-1)dC(t, S_t; \sigma) + \Delta_t^\sigma dS_t + (\Pi_t - (-1)C(t, S_t; \sigma) - \Delta_t^\sigma S_t)rdt \\
 &= -\left(\partial_t C(t, S_t; \sigma)dt + \partial_S C(t, S_t; \sigma)dS_t + \partial_{SS} C(t, S_t; \sigma)\frac{(\sigma_{reel} S_t)^2}{2}dt\right) \\
 &\quad + \partial_S C(t, S_t; \sigma)dS_t + (\Pi_t + C(t, S_t; \sigma) - \partial_S C(t, S_t; \sigma)S_t)rdt. \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

On rappelle que la fonction  $C(\cdot, \cdot; \sigma)$  est, en tant qu'objet mathématique, une fonction de deux variables qui satisfait l'E.D.P. (3.19) (avec  $\sigma$  pas  $\sigma_{reel}$ ). Par contre  $(S_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique dépendant de  $\sigma_{reel}$  donc dans le calcul de  $C(t, S_t; \sigma)$  que l'on obtient en appliquant la formule d'Iô le terme

$\sigma_{reel}^2 S_t^2$  apparaît. En utilisant l'E.D.P. satisfaite par  $C(\cdot, \cdot; \sigma)$  nous obtenons :

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt + \left( \frac{(\sigma^2 - \sigma_{reel}^2) S_t^2}{2} \right) \partial_{SS} C(t, S_t; \sigma) dt,$$

ce qui montre que le portefeuille actualisé  $\tilde{\Pi}_t = e^{-rt} \Pi_t$  satisfait

$$d\tilde{\Pi}_t = e^{-rt} \left( \frac{(\sigma^2 - \sigma_{reel}^2) S_t^2}{2} \right) \partial_{SS} C(t, S_t; \sigma) dt.$$

Mais ceci est une évolution déterministe, le seul aléa est dans la valeur de  $S_t$ . Comme pour un call  $\partial_{SS} C(t, S; \sigma) \geq 0$  quelle que soit la valeur de  $S$ , nous constatons que le signe de  $\tilde{\Pi}_t$  et donc le signe de  $\Pi_t$  sont complètement déterminés par le signe de  $\sigma^2 - \sigma_{reel}^2$ . Ceci explique que les histogrammes de la figure 6.3 aient pour support des domaines à droite ou à gauche de l'origine.

## 6.2 Assurance de portefeuille : stop-loss et C.P.P.I.

Dans cette section on présente des techniques qui permettent de se protéger contre certains événements perçus comme indésirables dans le cadre de la gestion d'un portefeuille contenant des actifs risqués comme, par exemple, des actions.

### 6.2.1 Une fausse bonne idée : prendre le meilleur actif

Prenons l'exemple d'un gérant qui doit conseiller son client. Supposons également que le client veut se faire conseiller entre 2 actifs risqués  $S^1$  et  $S^2$ . A priori il n'est pas évident de savoir lequel choisir. Imaginons qu'arrive alors le chef du gérant et qu'il propose la solution suivante : on garde toujours l'actif dont le prix est supérieur au prix de l'autre. En suivant cette stratégie il se peut qu'il y ait des pertes dues aux frais de transaction. Cependant, en principe, cette stratégie assure qu'au terme du mandat de gestion le portefeuille sera constitué du meilleur des deux actifs à cette date-là. L'idée proposée par le chef du gérant est illustrée par la figure 6.4.

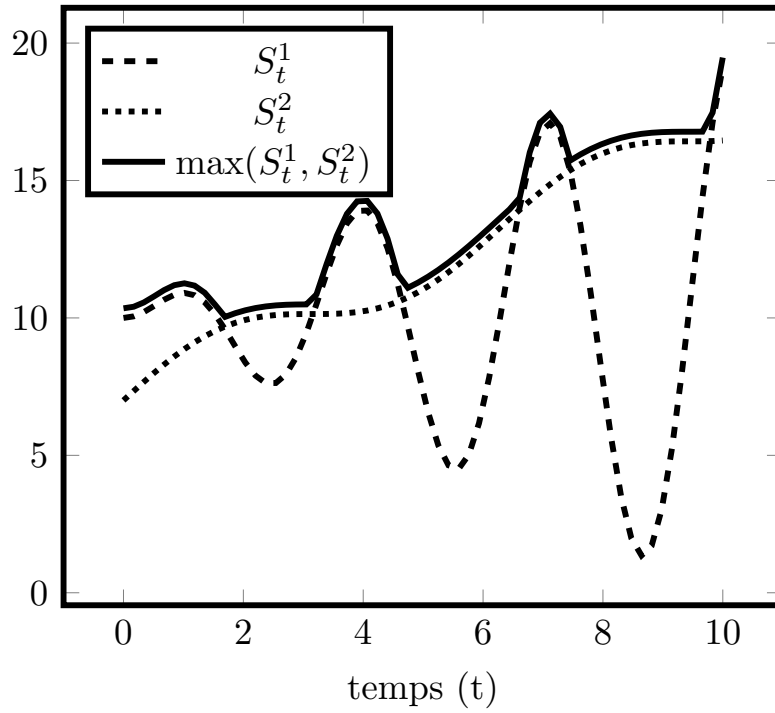


FIGURE 6.4 – Illustration de l'idée consistant en prendre le meilleur actif. Dès qu'un actif dépasse l'autre l'investisseur l'achète tout en vendant complètement celui d'en dessous.

Avant de mettre en œuvre cette stratégie il est prudent de faire quelques simulations. Nous supposons que  $S^1$  et  $S^2$  suivent des processus de Black-Merton-Scholes :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t^1}{S_t^1} &= \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1, \quad S_0^1 = 100, \\ \frac{dS_t^2}{S_t^2} &= \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2, \quad S_0^2 = 100, \end{aligned}$$

et, pour simplifier, nous supposons que les mouvements browniens  $W_t^1$  et  $W_t^2$  sont indépendants. Le programme 6.2 (pour la version R voir 6.6) implémente et teste cette idée :

Programme 6.2 – Implémentation d'une stratégie de type « meilleur de deux actifs ».

```

1  %Programme_étude_cas_max.m
2  %_implémente_une_stratégie_de_type_max_entre_deux_actifs:
3  %
4  T=1; %_temps_en_annees
5  N=255; %_no._de_pas_de_temps, _jours_boursiers
6  dt=T/N; %_taille_d'un_pas_de_temps
7  M=1000; %_nombre_de_realisations_du_mvt_brownien, _no._de_scenarios
8  S0=100;
9  mu1=0.1; %sigma1=0.3;
10 %mettre_a_zero_les_valeurs_pour_STOP-LOSS
11 mu2=0.15; %sigma2=0.6;
12 %mu2=0.0; %sigma2=0.0;
13 r=0.03;
14
15 randn('seed',100);
16
17 %creation_d'un_vecteur_vide_ayant_N+1_lignes
18 S1=zeros(N+1,M); S2=zeros(N+1,M);
19 V=zeros(N+1,M); V(1,:)=S0;
20 delta1=zeros(N+1,M); delta2=zeros(N+1,M);
21 S1(1,:)=S0; S2(1,:)=S0; %initialisation_de_l_evolution_des_ss-
    %jacents
22 delta1(1,:)=0.5; delta2(1,:)=0.5; %choix, _toute_autre_
    %distribution_d1+d2=1_ok_aussi
23 for ii=2:N+1
24 S1(ii,:)=S1(ii-1,:)+S1(ii-1,:)*mu1*dt+randn(1,M)*sqrt(dt).*sigma1
    .*S1(ii-1,:); %simulation_du_marché
25 S2(ii,:)=S2(ii-1,:)+S2(ii-1,:)*mu2*dt+randn(1,M)*sqrt(dt).*sigma2
    .*S2(ii-1,:);
26 %calcul_de_la_valeur_du_portefeuille
27 V(ii,:)=delta1(ii-1,:).*S1(ii,:)+delta2(ii-1,:).*S2(ii,:);
28 %calcul_du_meilleur
29 decision= S1(ii,:) >= S2(ii,:);
30 %calcul_du_nouveau_delta
31 delta1(ii,:)=decision.*V(ii,:)./S1(ii,:);
32 delta2(ii,:)=(1-decision).*V(ii,:)./S2(ii,:);
33 end
34
35 %PARTIE_GRAPHIQUE
36 colormap(gray(256)); %pour_dessiner_en_noir_et_blanc
37 %histogramme
38 figure(1); set(gca,'fontsize',24);
39 hist(V(N+1,:)-max(S1(N+1,:),S2(N+1,:)),15);
40 if(sigma2==0)

```

```

41 print_dpdf_histogramme_stoploss.pdf
42 else
43 print_dpdf_histogramme_choix_meilleur.pdf
44 end;
45 %evolution_quantite_totale_d'actifs_en_portefeuille_pour_quelques
    realisations
46 figure(2); plot(delta1(:,1:10)+delta2(:,1:10));
47 %print_dpdf_evolution_quantite_totale_choix_meilleur.pdf
48 %evolution_portefeuille_par_rapport_au_max_prevu_pour_quelques
    realisations
49 figure(3); plot(V(:,1:10)./max(S1(:,1:10),S2(:,1:10)));
50 %print_dpdf_evolution_portefeuille_choix_meilleur.pdf

```

Les résultats sont dans la figure 6.5.

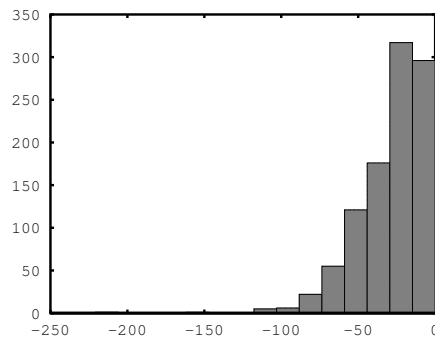


FIGURE 6.5 – Résultat du programme 6.2 ( $\mu_2 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ).

La valeur finale est toujours négative, le portefeuille perd toujours de l'argent. Pourquoi ? Nous allons le comprendre dans la section suivante.

### 6.2.2 Stratégie stop-loss

Simplifions la situation précédente en considérant que le prix du deuxième actif est constant dans le temps et notons  $K$  cette constante. Cette stratégie revient à acheter  $S_t^1$  lorsque il est plus grand que  $K$  et à le vendre dès qu'il devient inférieur à  $K$ . En pratique ceci protège des excursions dans la région  $S_t^1 \leq K$  et en particulier des situations où la valeur finale de l'actif risqué est inférieure à  $K$ .



Cette stratégie porte le nom de « stop-loss » car son but est de limiter les pertes au niveau  $K$ . Si en plus il y a achat lorsque  $S_t^1$  dépasse  $K$  elle porte aussi le nom de « start gain ». L'idée est illustrée par la figure 6.6.

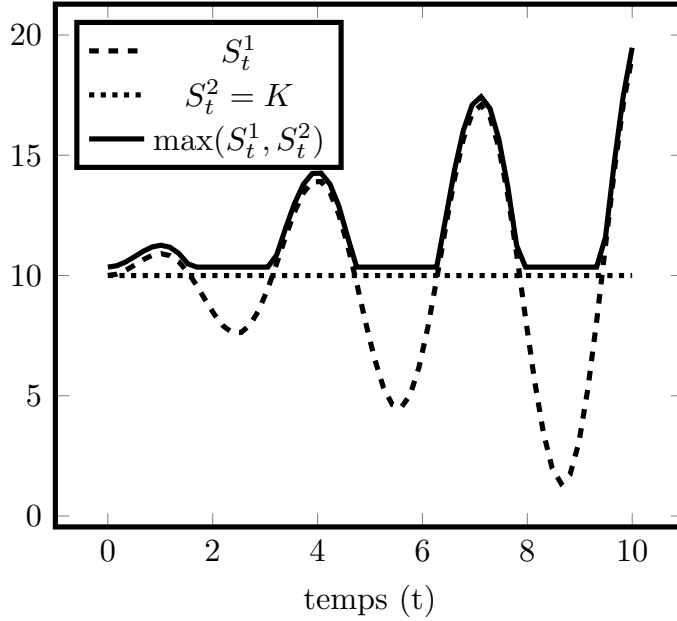


FIGURE 6.6 – Illustration de l'idée consistant en prendre le meilleur actif.

Mais les résultats (à gauche de la figure 6.7) sont décevants : la valeur finale du portefeuille est toujours négative. Pourquoi ? Une première explication est que les pertes arrivent lorsque  $S_t^1$  croise le niveau  $K$  ; prenons le cas où  $S_{t_k}^1 > K > S_{t_{k+1}}^1$ . La vente de la position se fait au prix  $S_{t_{k+1}}^1$  et non au prix  $K$  comme prévu par conséquent une perte de  $K - S_{t_{k+1}}^1$  est enregistrée par rapport à ce qu'on attendait. Cette perte arrive aussi lorsque  $S_{t_\ell}^1 < K < S_{t_{\ell+1}}^1$  car l'achat se fait au prix  $S_{t_{\ell+1}}^1 > K$  et non au prix  $K$  comme prévu. Donc chaque croisement du niveau  $K$  entraîne des pertes. Ces pertes sont d'autant plus importantes que l'intervalle non-surveillé  $]t_k, t_{k+1}[$  est important. Une première idée serait de rendre  $t_{k+1} - t_k$  petit ; la partie droite de la figure 6.7 présente le résultat de l'application d'une telle stratégie pour une longueur d'intervalle  $t_{k+1} - t_k$  beaucoup plus petite qu'avant (ajustements tous les quarts d'heure plutôt

que tous les jours). Cependant, le résultat final n'est pas meilleur. Puisque les pertes unitaires sont moins importantes il se peut qu'il y en ait plus, entraînant un phénomène de « compensation » : de moindres pertes à chaque croisement combinées à un plus grand nombre de croisements. Ceci est plausible puisque le mouvement brownien est récurrent : il visite une infinité de fois chaque nombre réel et, en particulier, s'il a croisé le niveau  $K$  à un certain instant alors il le croquera plusieurs fois autour de ce moment-là avant de s'en éloigner. Cependant faire une estimation correcte du nombre de croisements et comparer avec la taille d'un saut entre  $S_{t_\ell}^1 < K$  et  $S_{t_{\ell+1}}^1 > K$  dépasse de loin le niveau de cet ouvrage.

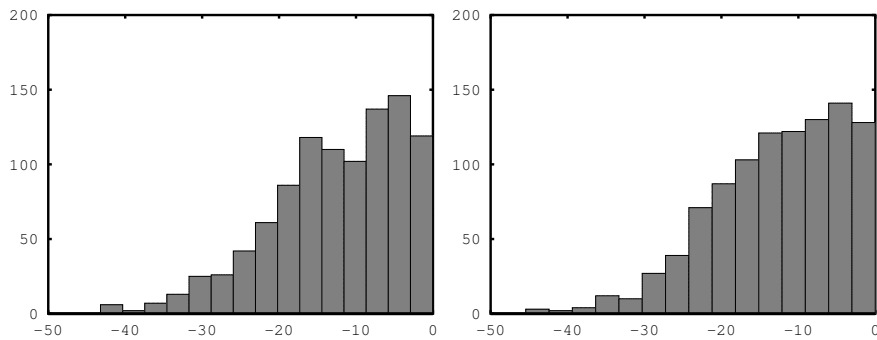


FIGURE 6.7 – Résultat du programme 6.2 pour  $\mu_2 = 0, \sigma_2 = 0$  (à gauche : ajustements tous les jours ; à droite : ajustements tous les quarts d'heure).

Mais la « bonne » explication est encore plus simple. En cherchant à obtenir in fine  $S_T^1$  si celui-ci est supérieur à  $K$  et  $K$  si  $S_T^1$  est inférieur à  $K$  nous demandons que notre stratégie se comporte comme un produit dérivé de payoff  $\phi(S_T^1) = \max(S_T^1, K) = K + (S_T^1 - K)_+$ , c'est-à-dire une option call européenne (plus un terme sans risque  $K$ ). Mais répliquer tout produit dérivé a un coût, il n'est donc pas possible de trouver de stratégie qui fasse toujours  $K + (S_T^1 - K)_+$  à moins de payer le prix d'un call de strike  $K$  et maturité  $T$  (auquel on ajoute  $Ke^{-rT}$  pour avoir  $K$  à maturité  $T$ ).

### 6.2.3 C.P.P.I.

Nous présentons dans cette section la stratégie « Constant Proportion Portfolio Insurance » (C.P.P.I.) qui consiste en gérer un portefeuille de valeur totale  $V_t$  sous la contrainte de gestion  $V_t \geq P_t$ . La quantité  $C_t = V_t - P_t$ , appelée « le coussin » doit donc toujours être positive. En pratique le client donne en gestion à l'instant  $t = 0$  une somme  $V_0$  et spécifie qu'il souhaite pouvoir retirer la somme  $P_t$  (le plancher) à tout moment ; pour simplifier nous supposons que  $P_t$  évolue comme un actif sans risque, c'est-à-dire que  $dP_t = rP_t dt$ . Nous supposons aussi que le marché contient un produit risqué  $S_t$  qui suit une évolution de type Black-Merton-Scholes (équation (3.2) page 79).

Le gestionnaire doit satisfaire la contrainte de gestion mais il désire également que son client profite d'une éventuelle évolution positive de la partie risquée. Une première possibilité est d'investir totalement  $C_t$  dans l'actif sans risque, et ainsi satisfaire la contrainte de gestion. Mais ceci peut donner des rendements assez réduits. Le gestionnaire propose alors la façon de faire suivante : il investit  $X_t = mC_t$  dans l'actif risqué et  $M_t = V_t - X_t$  dans l'actif sans risque. Ici le facteur  $m \geq 1$  mesure combien le gestionnaire sur-investit dans la partie risquée.

Le gestionnaire raisonne ainsi : si jamais  $C_t$  est grand alors la marge de manœuvre est importante et donc le client pourra profiter encore plus des éventuelles évolutions favorables de  $S_t$ . Au contraire lorsque  $C_t$  diminue  $X_t$  diminuera aussi et si jamais  $C_t = 0$  alors  $X_t = 0$  donc la contrainte de gestion sera dans tous les cas satisfaite.

Le programme 6.3 (dont la version R est présentée dans le programme 6.7) implémente la stratégie C.P.P.I. et calcule l'écart entre la valeur du portefeuille et le plancher  $P_t$  qui est présenté en figure 6.8.



**Mise en garde 6.2.1** *Il est important de prendre bien soin, dans l'écriture de ce programme de faire les calculs de  $V$ ,  $C$ ,  $X$  et  $M$  dans cet ordre. Le gestionnaire constate chaque jour quelle est la nouvelle valeur de  $V_t$ , ensuite il calcule le coussin  $C_t$ , ensuite le montant  $X_t$  à investir dans*

*l'actif risqué et ensuite le montant  $M_t$  à investir dans l'actif sans risque. Tout autre ordre dans les calculs, par exemple faire  $M_{t+\Delta t} = M_t e^{r\Delta t}$  (ou la même chose pour  $X_t$ ) rendrait l'implémentation de la stratégie fausse et irréaliste.*

On constate que si l'ajustement n'arrive pas assez souvent le portefeuille peut perdre de la valeur au delà du plancher. Est-ce qu'augmenter le nombre d'ajustements peut résoudre le problème ? Ceci n'est pas le cas car le marché a souvent des « gaps » c'est-à-dire que le cours ne sont pas continus. Ceci arrive chaque matin lors de l'ouverture mais également et surtout lors des grands crash bousiers. Dans ce cas le portefeuille C.P.P.I. ne pourra pas développer sa stratégie et enregistrera des pertes d'autant plus importantes que  $m$  est grand.

Programme 6.3 – Implémentation de la stratégie C.P.P.I.

```

1  %_fichier_cppi.m
2  %_Programme_ qui_ implémente_ une_ stratégie_ de_ type_ CPPI :
3  %
4  randn('seed',100);
5
6  T=1; %_temps_ en_ années
7  N=12; %_no_ de_ pas_ de_ temps :_ jours, _ semaines, _ mois, ...
8  dt=T/N; %_taille_ d'_un_ pas_ de_ temps
9  M=1000; %_nombre_ de_ réalisations_ du_ mv_ brownien, _no_ de_ scénarios
10 S0=100; %P0=90; %m=5; V0=100; C0=V0-P0; %X0=m*C0; %Monetaire0=V0-X0;
11 sigma=0.3; %r=0.05; %mu=0.15;
12 %creation_ d'_un_ vecteur_ vide_ ayant_ N+1_ lignes
13 S=zeros(N+1,M); %Monetaire=S; C=S; X=S; V=S;
14 P=zeros(N+1,1);
15 S(1,:)=S0; %_initialisation_ de_ l'_évolution_ du_ ss- jacent_ et_ des_
    autres
16 V(1,:)=V0; %Monetaire(1,:)=Monetaire0; %C(1,:)=C0; %P(1,:)=P0; %X(1,:)=X0
    ;
17
18 for ii=2:N+1
19 P(ii)=P(ii-1)*exp(r*dt);
20 S(ii,:)=S(ii-1,:)+S(ii-1,:)*mu*dt+randn(1,M)*sqrt(dt).*sigma.*S(ii-1,:); %_simulation_ du_ marche
21 %calcul_ de_ la_ valeur_ du_ portefeuille
22 V(ii,:)=Monetaire(ii-1,:)*exp(r*dt)+X(ii-1,:).*S(ii,:)./S(ii-1,:);
23 C(ii,:)=V(ii,:)-P(ii);
24 X(ii,:)=m*max(C(ii,:),0); %_pour_ respecter_ la_ contrainte_ de_ gestion,

```

```

25 %on_arrete_d'investir_si_valeur_du_portefeuille_inferieure_au_
    plancher
26 Monetaire(ii,:)=V(ii,:)-X(ii,:);
27 end
28
29
30 %PARTIE_GRAPHIQUE
31 %affichage_de_la_quantite_totale_d'actifs_en_portefeuille
32 %affichage_de_l'histogramme
33 figure(11);set(gca,'fontsize',24);
34 colormap(gray(256));%pour_dessiner_en_noir_et_blanc
35 hist(100*(V(N+1,:)-P(N+1))/S0,50);
36 print-dpdf_histogramme_CPPI.pdf

```

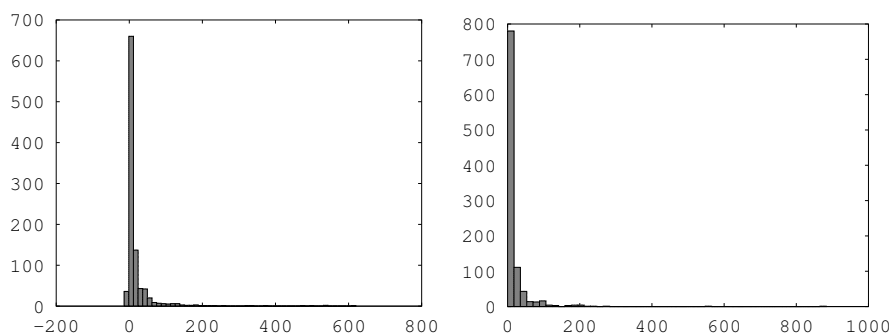


FIGURE 6.8 – Exécution du programme 6.3. À gauche  $N = 12$  (ajustement une fois par mois), à droite  $N = 255$  (ajustement une fois par jour). L'histogramme de gauche présente des valeurs négatives.

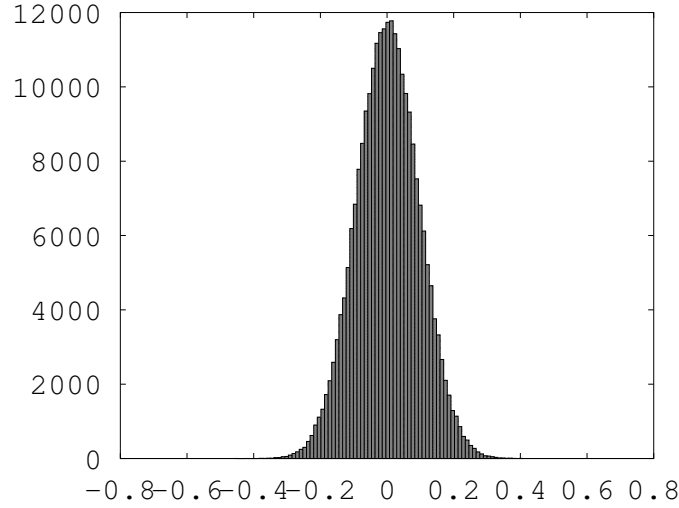
Pour comprendre plus en détail le comportement du portefeuille remarquons que dans ce modèle tout se passe comme si le portefeuille  $V_t$  contenait de l'actif sans risque (le plancher  $P_t$ ) et un certain actif risqué, le coussin  $C_t$ . Étudions les rendements de cet actif synthétique  $C_t$ ; il suffit pour cela d'exécuter, à la suite du programme 6.3 les instructions du programme 6.4 pour obtenir les résultats de la figure 6.9. On note une très forte ressemblance avec l'histogramme d'une loi normale. À ce degré de détail et précision il est fort probable que la distribution soit effectivement normale. Ceci nous conduit à nous intéresser à l'évolution de  $C_t$ .

Programme 6.4 – Rendements du CPPI

```

1 figure(21); set(gca, 'fontsize', 24);
2 hist(reshape(C(2:N+1,:), ./C(1:N,:), -1, N*M, 1), 80);
3 print_dpdf('hist_rendements_cppei.pdf');

```

FIGURE 6.9 – Résultat du calcul du rendement du coussin  $C_t$  dans le programme 6.4.

Étudions donc l'évolution du portefeuille  $V_t$ ; en tant que portefeuille autofinancé composé de  $X_t/S_t$  parts de sous-jacent  $S_t$  et de  $M_t/e^{rt}$  parts d'actif sans risque (de valeur unitaire  $e^{rt}$ ). Son évolution est donnée par

$$\begin{aligned}
 dV_t &= \frac{X_t}{S_t} dS_t + \frac{M_t}{e^{rt}} d(e^{rt}) = X_t(\mu dt + \sigma dW_t) + rM_t dt \\
 &= mC_t(\mu dt + \sigma dW_t) + r(V_t - mC_t)dt.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Par ailleurs  $V_t = P_t + C_t$  et aussi  $dV_t = dP_t + dC_t$  ce qui donne, après remplacement dans l'équation précédente et simplification du terme en  $P_t$  (car  $dP_t = rP_t dt$ ) :

$$\frac{dC_t}{C_t} = [r + m(\mu - r)] dt + m\sigma dW_t. \tag{6.3}$$

Les rendements de  $C_t$  sont effectivement des v.a. normales. Par ailleurs l'actif

$C_t$  crée par la stratégie C.P.P.I. a une plus forte volatilité mais un rendement moyen plus fort aussi. Il a le même ratio de Sharpe (i.e., rapport  $\frac{\mu-r}{\sigma}$ ) que  $S_t$  :

$$\frac{r + m(\mu - r) - r}{m\sigma} = \frac{\mu - r}{\sigma}. \quad (6.4)$$

Par contre  $C_t$  reste un produit synthétique et peut en particulier prendre des valeurs négatives lors des discontinuités importantes et soudaines de  $S_t$ .

## 6.3 Versions R des programmes

Pour le lecteur plus habitué à utiliser le langage « R » nous donnons ci-dessous les versions « R » des programmes utilisés dans ce chapitre.

Programme 6.5 – Implémentation d’une couverture d’option (delta-hedging) suivant le modèle Black-Merton-Scholes

```

1  T<-1000000000#temps en années
2  N<-255*8*400000#nombre de pas de temps
3  dt<-T/N#taille d'un pas de temps
4  M<-1000#nombre de scénarios
5  S0<-100#valeur initiale du sous-jacent
6  mu<-0.1
7  sigma<-0.15
8  r<-0.03
9  K<-100
10
11 prix<-bls_price(S0,K,r,T,sigma)[[1]]
12 S<-matrix(c(rep(S0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
13 cash<-matrix(c(rep(bls_price(S0,K,r,T,sigma)[[1]]-bls_delta(S0,K,
    r,T,sigma)[[1]]*S0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
14 delta<-matrix(c(rep(bls_delta(S0,K,r,T,sigma)[[1]],M),rep(0,M*N)),
    ,nrow=M)
15
16 dW<-sqrt(dt)*matrix(rnorm(N*M),nrow=M)
17
18 for(i in 2:N){
19   S[,i]<-S[,i-1]+mu*S[,i-1]*dt+sigma*S[,i-1]*dW[,i-1]
20   cash[,i]<-cash[,i-1]*exp(r*dt)#capitalisation de la trésorerie
21   delta[,i]<-bls_delta(S[,i],K,r,T-dt*(i-1),sigma)[[1]]#mise à
    jour du delta
22   cash[,i]<-cash[,i]-(delta[,i]-delta[,i-1])*S[,i]
23 }
24
```

```

25 S[,N+1]_<-_S[,N]_+_mu*S[,N]*dt+_sigma*S[,N]*dW[,N]
26 cash[,N+1]_<-_cash[,N]*exp(r*dt)_+_delta[,N]*S[,N+1]_+_pmax(S[,N
    +1]-K,0)_#capitalisation_de_la_trésorerie_et_vente_du_sous-
    jacent
27
28 hist(cash[,N+1]*100/prix,_col="red")

```

Programme 6.6 – Implémentation d’une stratégie de type « meilleur de deux actifs ».

```

1 T_<-_1_#temps_en_années
2 N_<-_255_#nombre_de_pas_de_temps
3 dt_<-_T/N_#taille_d'un_pas_de_temps
4 M_<-_10000_#nombre_de_scénarios
5 S0_<-_100_#valeur_initiale_du_sous-jacent
6 mu_1_<-_0.1
7 sigma_1_<-_0.3
8 mu_2_<-_0.15
9 sigma_2_<-_0.6
10 r_<-_0.03
11
12 S1_<-_matrix(c(rep(S0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
13 S2_<-_matrix(c(rep(S0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
14 V_<-_matrix(c(rep(S0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
15
16 delta1_<-_matrix(c(rep(0.5,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
17 delta2_<-_matrix(c(rep(0.5,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
18
19 w1_<-_sqrt(dt)*matrix(rnorm(N*M),nrow=M)
20 w2_<-_sqrt(dt)*matrix(rnorm(N*M),nrow=M)
21
22 for_(i_in_1:N+1){
23   _S1[,i]_<-_S1[,i-1]_+_mu_1*S1[,i-1]*dt+_sigma_1*S1[,i-1]*w1[,i-1]
24   _S2[,i]_<-_S2[,i-1]_+_mu_2*S2[,i-1]*dt+_sigma_2*S2[,i-1]*w2[,i-1]
25   _V[,i]_<-_delta1[,i-1]*S1[,i]+delta2[,i-1]*S2[,i]
26   _decision_<-_as.integer(S1[,i]>=S2[,i])
27   _delta1[,i]_<-_decision*_V[,i]/S1[,i]
28   _delta2[,i]_<-_(1-decision)*_V[,i]/S2[,i]
29 }
30
31 hist(V[,N+1]-pmax(S1[,N+1],S2[,N+1]),_col="green")

```

Programme 6.7 – Implémentation de la stratégie C.P.P.I.

```

1 T_<-_1_#temps_en_années
2 N_<-_255_#nombre_de_pas_de_temps

```



```

3  dt<-T/N#taille d'un pas de temps
4  M<-1000#nombre de scénarios
5  S0<-100#valeur initiale du sous-jacent
6  mu<-0.1
7  sigma<-0.3
8  r<-0.05
9
10 P0<-90
11 m<-5
12 V0<-100
13 C0<-V0-P0
14 X0<-m*C0
15 Monetaire0<-V0-X0
16
17 S<-matrix(c(rep(S0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
18 V<-matrix(c(rep(V0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
19 Monetaire<-matrix(c(rep(Monetaire0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
20 C<-matrix(c(rep(C0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
21 P<-matrix(c(P0,rep(0,N)),nrow=1)
22 X<-matrix(c(rep(X0,M),rep(0,M*N)),nrow=M)
23 w<-sqrt(dt)*matrix(rnorm(N*M),nrow=M)
24
25 for(i in 1:N+1){
26   uP[1,i]<-uP[1,i-1]*exp(r*dt)
27   uS[,i]<-uS[,i-1]+mu*S[,i-1]*dt+sigma*S[,i-1]*w[,i-1]
28   uV[,i]<-uMonetaire[,i-1]*exp(r*dt)+(X[,i-1]*S[,i])/S[,i-1]
29   uC[,i]<-uV[,i]-P[1,i]
30   uX[,i]<-m*pmax(C[,i],0)
31   uMonetaire[,i]<-uV[,i]-X[,i]
32 }
33
34 hist(100*(V[,N+1]-P[1,N+1])/S0,col="blue")

```



## Annexe A

# Quelques prérequis de probabilités

### A.1 Variable normale ou gaussienne

Une variable aléatoire de loi normale  $X$  est soit une constante soit une variable aléatoire continue de densité

$$\rho(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad (\text{A.1})$$

où  $m$  est la moyenne de  $X$  et  $\sigma^2 > 0$  sa variance.

Nous notons  $\mathcal{N}(0, 1)$  la loi de la variable normale centrée (i.e. de moyenne 0) réduite (i.e. de variance 1). Une variable aléatoire de loi  $m + \sigma\mathcal{N}(0, 1)$  est donc une variable aléatoire de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

### A.2 Fonction caractéristique

**Définition A.1** Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . La fonction définie sur  $\mathbb{R}^d$  par

$$\Phi_X(\xi) = \mathbb{E} \left[ e^{i\langle \xi, X \rangle} \right] \quad (\text{A.2})$$

est appelée fonction caractéristique de la variable aléatoire  $X$ . Ici  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposition A.1** *La fonction caractéristique a les propriétés suivantes :*

1. *injectivité : si pour deux v.a.  $X$  et  $Y$  nous avons  $\Phi_X = \Phi_Y$  alors  $X$  et  $Y$  ont la même loi ;*
2. *indépendance et séparabilité : soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Alors les v.a.  $X_k$  sont indépendantes si et seulement si il existe des fonctions  $\phi_k$  telles que*

$$\Phi_X(\xi_1, \dots, \xi_d) = \prod_{k=1}^d \phi_k(\xi_k). \quad (\text{A.3})$$

*Idem pour deux sous-vecteurs de  $X$  à composantes disjointes ;*

3. *la fonction caractéristique d'une variable normale de moyenne  $m$  et variance  $\sigma^2$  est  $\Phi_X(\xi) = \exp(im\xi - \frac{\sigma^2 \xi^2}{2})$ .*

### A.3 Espaces $L^p$

#### A.3.1 Espace $L^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. On rappelle que  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  est la structure borélienne canonique sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  est la tribu engendrée par les ouverts de  $\mathbb{R}$ .

**Définition A.2** *L'ensemble de fonctions mesurables de  $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  vers  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  obtenu par identification des fonctions qui diffèrent sur un ensemble négligeable est noté  $L^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .*

Remarque : ceci est un espace un peu particulier. Chaque fois qu'on parlera des espaces  $L^p$  il s'agira de  $p \in [1, \infty[$ , cf. section suivante.

#### A.3.2 Espaces $L^p(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , $p \in [1, \infty[$

**Définition A.3** *L'ensemble  $L^p(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est défini par :*

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \{f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mathbb{P}) : \mathbb{E}[|f|^p] < \infty\}. \quad (\text{A.4})$$

L'espace  $L^p$  est normable avec la norme définie par  $\|f\|_p = \left(\mathbb{E}[|f|^p]\right)^{1/p}$ .

## A.4 Convergence des suites de variables aléatoires

**Définition A.4** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

1. La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $X$  si pour toute fonction continue bornée  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]. \quad (\text{A.5})$$

Notation :  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

2. La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $X$  si

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Notation :  $\mathbb{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ .

3. La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers  $X$  si

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1. \quad (\text{A.7})$$

Notation :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-p.s.}} X$ .

4. Soit  $p \geq 1$ . La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $L^p$  (ou encore en moyenne d'ordre  $p$ ) vers  $X$  si  $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$  pour tout  $n \geq 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Notation :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$ .

**Remarque A.1** Une convergence dans  $L^p$  n'entraîne pas nécessairement une convergence presque sûre (ponctuelle) ; pour s'en convaincre il suffit de consi-

déré la suite de v.a.  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbf{1}_{[0,1]}, \quad f_2 = \mathbf{1}_{[0,1/2]}, \quad f_3 = \mathbf{1}_{[1/2,1]}, \quad f_4 = \mathbf{1}_{[0,1/4]}, \\ f_5 &= \mathbf{1}_{[1/4,2/4]}, \quad f_6 = \mathbf{1}_{[2/4,3/4]}, \quad f_7 = \mathbf{1}_{[3/4,1]}, \quad f_7 = \mathbf{1}_{[0,1/8]}, \quad \dots \\ f_{2^k+\ell} &= \mathbf{1}_{[\ell/2^k, (\ell+1)/2^k]}, \quad \ell = 0, 2^k - 1, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Cette suite converge vers zéro dans  $L^2$  mais ne converge pas presque sûrement.

**Proposition A.2 (Propriétés concernant la convergences de suites)**

1. La convergence presque sûre ou dans  $L^p$  implique la convergence en probabilité ;
2. La convergence en probabilité (ou presque sûre, ou dans  $L^p$ ) implique la convergence en loi ;
3. De toute suite qui converge en probabilité il est possible d'extraire une sous-suite qui converge presque sûrement ;
4. Si  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité (ou presque sûrement) vers  $X$  et qu'il existe  $p \geq 1$  tel que la famille  $|X_n|^p$  soit uniformément intégrable (par exemple car bornée par une même fonction) alors  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $L^p$  vers  $X$  ;
5. La convergence dans  $L^p$  implique la convergence en  $L^q$  pour tout  $q \leq p$ .

Ces propriétés sont résumées dans la figure A.1.

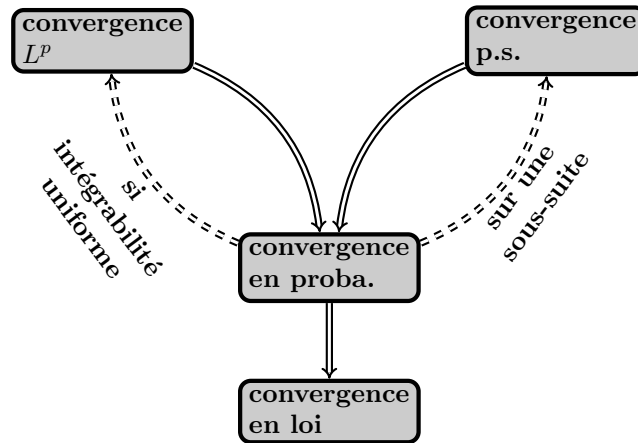


FIGURE A.1 – Illustration de la Proposition A.2.

**Proposition A.3 (Lemme de Fatou)** *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables à valeurs dans  $[0, +\infty]$ . Alors la limite inférieure de la suite est mesurable et :*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu. \quad (\text{A.10})$$

Les suites de variables aléatoires gaussiennes ont des propriétés remarquables.

**Proposition A.4 (Convergence des suites de v.a. gaussiennes)**

*Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles, chacune étant de loi  $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ .*

1. *La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable réelle  $Y$  si et seulement si les deux suites  $(m_n)_{n \geq 1}$  et  $(\sigma_n^2)_{n \geq 1}$  convergent. Dans ce cas  $Y$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  où  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$  et  $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2$ .*
2. *Si la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers une variable aléatoire  $Y$  alors  $Y$  est de loi gaussienne et  $Y$  est aussi limite de la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  dans  $L^2$ .*

## A.5 Espérance conditionnelle

Soient  $X, X_1, X_2$  des v.a. intégrables définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ .

**Théorème A.1 (Existence de l'espérance conditionnelle)** *Il existe une variable aléatoire  $Y$ , unique à un ensemble négligeable près,  $\mathcal{G}$ -mesurable et intégrable, telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{G} : \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A]. \quad (\text{A.11})$$

**Définition A.5** *Dans le cadre du Théorème A.1 :*

1. *nous introduisons pour la variable aléatoire  $Y$  la notation  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := Y$  et nous l'appelons espérance de  $X$  conditionnellement à  $\mathcal{G}$ .*

2. soit  $Z$  une variable aléatoire et  $\sigma(Z)$  la tribu engendrée par  $Z$ . Nous notons d'une manière abrégée

$$\mathbb{E}[X|Z] := \mathbb{E}[X|\sigma(Z)]. \quad (\text{A.12})$$

**Proposition A.5 (Propriétés de l'espérance conditionnelle)**

*L'espérance conditionnelle vérifie :*

1. *linéarité* :  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 | \mathcal{G}] = \alpha_1 \mathbb{E}[X_1 | \mathcal{G}] + \alpha_2 \mathbb{E}[X_2 | \mathcal{G}] ;$
2. *espérance* :  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X] ;$
3. *si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable alors  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = X ;$*
4. *si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{G}$  alors  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R} ;$*
5. *si  $Z$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable alors  $\mathbb{E}[XZ | \mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$  pour toute v.a.  $X ;$*
6. *emboîtement* : si  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} : \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{H}] ;$
7. *monotonie* : si  $X_1 \leq X_2$  alors  $\mathbb{E}[X_1 | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_2 | \mathcal{G}] ;$
8. *convergence* : si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite croissante de variables aléatoires réelles positives qui converge presque sûrement vers  $X$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] ;$
9. *inégalité de Jensen* : si  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe telle que  $\mathbb{E}[\phi(X)] < \infty$  alors

$$\phi(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X) | \mathcal{G}] ; \quad (\text{A.13})$$

10. *en particulier* :  $|\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X| | \mathcal{G}], |\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]|^2 \leq \mathbb{E}[|X|^2 | \mathcal{G}] ;$
11. *en particulier aussi* : si  $X_n \rightarrow X$  dans  $L^2$  alors  $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \rightarrow \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$  dans  $L^2 ;$
12. *(Doob-Dynkin)* : pour tout couple de v.a.  $X, Z$  il existe une fonction mesurable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (qui dépend de  $X$  et  $Z$ ) telle que, presque sûrement,

$$\mathbb{E}[X | Z] = f(Z). \quad (\text{A.14})$$

13. *supposons que  $X$  est une v.a. indépendante de  $\mathcal{G}$  et  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable ;*



pour toute fonction mesurable  $g(\cdot, \cdot)$  à valeurs positives on pose

$$\Phi : y \mapsto \int g(x, y) P_X(dx).$$

Alors  $\Phi$  est mesurable et pour toute v.a.  $Z$  qui est  $\mathcal{G}$  mesurable :

$$\mathbb{E}[g(X, Y)Z] = \mathbb{E}[\Phi(Y)Z]. \quad (\text{A.15})$$

En particulier

$$\mathbb{E}[g(X, Y)|\mathcal{G}] = \int g(x, Y) P_X(dx). \quad (\text{A.16})$$

## A.6 Martingales en temps discret

Dans tout ce qui suit nous considérons  $(t_k)_{k \geq 0}$  une suite croissante réelle et  $M = \{M_{t_k}, k \in \mathbb{N}\}$  un processus  $\mathbb{F}$ -adapté défini sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ .

**Définition A.6 Martingale - temps discret** On dit que  $M$  est une martingale si :

1. pour tout  $k$ ,  $\mathbb{E}[|M_{t_k}|] < \infty$  ;
2. pour tout  $k \geq 1$ ,  $\mathbb{E}[M_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = M_{t_{k-1}}$ .

Lorsque à la place du point 2 le processus  $M$  vérifie  $\forall k \leq \ell : M_{t_k} \leq \mathbb{E}(M_{t_\ell} | \mathcal{F}_{t_k})$  (ou  $\forall k \leq \ell : M_{t_k} \geq \mathbb{E}(M_{t_\ell} | \mathcal{F}_{t_k})$ ) le processus  $M$  est appelé sous-martingale (respectivement sur-martingale).

**Définition A.7 (Temps d'arrêt)** Une variable aléatoire  $\tau$  définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\{t_k, k \in \mathbb{N}\}$  est un  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt si pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\{\tau \leq t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}. \quad (\text{A.17})$$

**Proposition A.6** Soit  $M = \{M_{t_k}, k \in \mathbb{N}\}$  un processus stochastique  $\mathbb{F}$ -adapté et  $S, T$  deux  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt. Alors :

1. si  $M$  est une martingale (respectivement sous-martingale) alors le processus  $M^T = \{M_{t_k \wedge T}, k \in \mathbb{N}\}$  est une martingale (respectivement une sous-martingale) ;
2. si  $M$  est une martingale (respectivement sous-martingale) et s'il existe  $K \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall \omega \in \Omega : S \leq T \leq K$  alors  $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_0]$  (respectivement  $\mathbb{E}[M_T] \geq \mathbb{E}[M_S] \geq \mathbb{E}[M_0]$ ).

**Proposition A.7** Soit  $F = \{s_1 \leq \dots \leq s_N\} \subset \mathbb{R}_+$  un ensemble fini d'indices. Considérons une sous-martingale en temps discret  $M = \{M_s, s \in F\}$ . Alors, pour tout  $\lambda > 0$  on a

$$\lambda \mathbb{P} \left( \max_{s \in F} M_s \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left[ M_{s_N} \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ |M_{s_N}| \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}} \right]$$

**Intuition A.6.1** Nous savons que pour les sous-martingales en temps discret plus on s'arrête tard plus on gagne. Soient donc deux stratégies : la première s'arrête dès que la valeur  $\lambda$  est atteinte. Cette stratégie paie au moins  $\lambda$  lorsque  $\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}$  et paie  $M_{s_N}$  lorsque  $\{\max_{s \in F} M_s < \lambda\}$ . Nous considérons aussi la stratégie qui s'arrête toujours à l'instant final  $s_N$ . Écrire que la première paie moins que la 2<sup>ème</sup> (en moyenne) donne :

$$\lambda \mathbb{P} \left( \max_{s \in F} M_s \geq \lambda \right) + \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s < \lambda\}} M_{s_N} \right] \leq \mathbb{E} [M_{s_N}], \quad (\text{A.18})$$

ce qui après simplifications conduit à l'inégalité à ci-dessus.

**Preuve.** Soit  $\lambda > 0$  et  $T$  la variable aléatoire définie par :

$$T(\omega) := \inf \{s \in F : M_s(\omega) \geq \lambda\} \wedge s_N$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ . La variable aléatoire  $T$  est un temps d'arrêt borné sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration naturelle du processus  $M$ . Par le

théorème d'arrêt de Doob puisque  $T \leq s_N$  :  $\mathbb{E}[M_{s_N}] \geq \mathbb{E}[M_T]$ . Ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{s_N}] &\geq \mathbb{E} \left[ M_T \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}} \right] + \mathbb{E} \left[ M_T \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s < \lambda\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ M_T \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}} \right] + \mathbb{E} \left[ M_{s_N} \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s < \lambda\}} \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[ \lambda \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}} \right] + \mathbb{E} \left[ M_{s_N} \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s < \lambda\}} \right] \end{aligned}$$

où les deux dernières lignes sont des conséquences de la définition du temps d'arrêt  $T$ . En retranchant le terme  $\mathbb{E} \left[ M_{s_N} \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s < \lambda\}} \right]$  dans la dernière inégalité on obtient :

$$\mathbb{E} \left[ M_{s_N} \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}} \right] \geq \mathbb{E} \left[ \lambda \mathbf{1}_{\{\max_{s \in F} M_s \geq \lambda\}} \right] = \lambda \mathbb{P} \left( \max_{s \in F} M_s \geq \lambda \right).$$

## A.7 Changement de probabilité

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Une probabilité  $\mathbb{Q}$  est dite absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$  si

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \text{ implique } \mathbb{Q}(A) = 0. \quad (\text{A.19})$$

**Intuition A.7.1** *Les objets étant assez souvent définis à un ensemble négligeable près, il est très usuel, lors d'un changement de probabilité, de laisser négligeables les ensembles qui l'étaient avant, ceci afin d'avoir une définition non-ambigüe de l'objet dans le nouvel espace probabilisé.*

**Théorème A.2 (Théorème de Radon-Nicodym)** *Une probabilité  $\mathbb{Q}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$  si et seulement si il existe une variable aléatoire positive  $Z$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurable, telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{Q}(A) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A Z d\mathbb{P}(\omega). \quad (\text{A.20})$$

La v.a.  $Z$  est dite densité de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$ , ou encore dérivée de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$ , et est notée

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}. \quad (\text{A.21})$$

**Remarque A.2** Pour toute v.a. intégrable  $X$  il s'en suit que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{Q}(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ]. \quad (\text{A.22})$$

## A.8 Résultat de type théorème de classe monotone

**Intuition A.8.1** Soient  $X_1, X_2, X$  trois variables aléatoires telles que  $X$  est indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$ . Ceci ne veut pas dire pour autant que  $X$  est indépendante de  $\sigma(X_1, X_2)$ . Il faut donc prendre en compte les relations entre le couple  $(X_1, X_2)$  et  $X$ . Lorsque par contre nous avons un ensemble non-dénombrable d'indices  $I$  et des variables aléatoires  $X_i$  la question se pose : si  $X$  est indépendant de tout vecteur de taille finie  $(X_{i_k})_{k \in K}$  ( $K \subset I$  ensemble fini arbitraire) ceci suffit-il pour dire que  $\sigma(X)$  et  $\sigma(X_i; i \in I)$  sont indépendantes ? La réponse est affirmative et s'obtient à l'aide du résultat suivant.

**Théorème A.3** Soit  $f_i : \Omega \rightarrow (E_i, \mathcal{F}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille de fonctions à valeurs dans les espaces mesurables  $(E_i, \mathcal{F}_i)$  et soit pour tout  $i \in I$  une sous-classe  $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{F}_i$  fermée pour les intersections finies et telle que  $\sigma(\mathcal{M}_i) = \mathcal{F}_i$ . Soit

$$\mathcal{M} = \left\{ \bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(A_k) \mid \forall K \subset I, K \text{ sous-ensemble fini, } \forall A_k \in \mathcal{M}_k \right\}.$$

Alors  $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(f_i, i \in I)$ .

**Preuve.** Résultat admis.

**Intuition A.8.2** *L'utilité d'un tel résultat est de pouvoir travailler avec des  $\sigma$ -algèbres générées par un nombre infini d'applications  $f_i$  en utilisant des arguments relatifs à des sous-ensembles finis parmi elles.*

**Corollaire A.1** *Soit  $f_i$  comme dans le Théorème A.3 et  $f_i : \Omega \rightarrow (E_i, \mathcal{F}_i)$ ; alors si pour tout sous-ensemble fini  $K \subset I$  la tribu  $\sigma(f)$  est indépendante de  $\sigma(f_k, k \in K)$  alors  $\sigma(f)$  est indépendante de  $\sigma(f_i, i \in I)$ .*

## A.9 Construction du mouvement brownien

**Théorème A.4 (de continuité de Kolmogorov)** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique à valeurs réelles pour lequel il existe trois constantes  $\alpha, \beta, C > 0$  telles que :*

$$\forall t, s \geq 0 : \mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t - s|^{1+\beta}. \quad (\text{A.23})$$

*Alors il existe une version  $Y$  de  $X$  (au sens de la Définition 2.3 point 2) à trajectoires continues presque sûrement.*

**Preuve.** Voir [15] Théorème 1.8 page 19. Aussi voir Théorème 2.1 page 26 pour une version pour processus à valeurs dans un espace de Banach. Il est en fait possible de montrer que les trajectoires de  $Y_t$  sont Hölder continues d'ordre  $\gamma \in [0, \beta/\alpha[$  car pour un tel  $\gamma$  :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sup_{s \neq t} \frac{|Y_t - Y_s|}{|t - s|^\gamma} \right) \right] < \infty. \quad (\text{A.24})$$

Ce résultat permet de démontrer l'existence d'une version continue du mouvement brownien en utilisant l'exercice 2.2.

## A.10 Ensemble de scénarios et mesure de Wiener

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard  $d$ -dimensionnel. Pour tout  $\omega \in \Omega$  l'application  $t \mapsto B_t(\omega)$  est un élément de l'espace des fonctions

continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^d$  ayant comme valeur 0 en  $t = 0$  que l'on note  $C_0^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ . Soit donc  $\Psi : \Omega \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  qui associe à  $\omega$  l'application continue  $t \mapsto B_t(\omega)$ . Cette application est mesurable.

**Définition A.8** *La mesure image de la mesure  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  par l'application  $\Psi$  est appelée mesure de Wiener; nous la notons  $\mathbb{P}_0$  ou encore  $\mu_W$ .*

Par le théorème de classe monotone A.3 cette mesure sur  $C_0^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  ne dépend que des lois finies-dimensionnelles  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$  (pour tout  $n$  fini et  $t_k \geq 0$  pour tout  $k \leq n$ ). Mais la loi du vecteur  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$  est donnée d'une manière unique par la définition du mouvement brownien (nous en connaissons explicitement son opérateur moyenne et covariance), donc deux mouvements browniens différents donneront la même mesure image  $\mathbb{P}_0$  sur  $C_0^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ . La définition A.8 est donc non-ambiguë.

**Intuition A.10.1** *La mesure de Wiener est une mesure de probabilité sur l'ensemble des « scénarios », i.e. des trajectoires dans  $C_0^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ . Puisque cette mesure est indépendante du choix précis de mouvement brownien (tant que c'en est un) nous obtenons donc que toute propriété trajectorielle (par exemple) peut être obtenue avec le choix de mouvement brownien le plus adapté à nos arguments, cf. l'exemple ci-dessous.*

**Exemple A.1** *Soit le mouvement brownien  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  et  $\lambda > 0$ ; alors avec les notations de la Proposition 2.9 page 36*

$$P(\sup_{s \geq 0} B_s > 1) = P(\sup_{s \geq 0} B_s^{\otimes \lambda} > 1).$$

*Mais  $B_s^{\otimes \lambda} > 1$  est la même chose que  $B_{\lambda s} \geq \sqrt{\lambda}$  donc nous obtenons :*

$$\forall \lambda > 0 : \mathbb{P}(\sup_{s \geq 0} B_s > 1) = \mathbb{P}(\sup_{s \geq 0} B_s > \lambda).$$

# Bibliographie

- [1] J. C. COX, S. A. ROSS ET M. RUBINSTEIN, *Option pricing : a simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7 (1979), p. 229–263.
- [2] J. L. DOOB, *Measure theory*, vol. 143 de Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [3] J. W. EATON, D. BATEMAN ET S. HAUBERG, *Gnu Octave Version 3.0.1 Manual : A High-Level Interactive Language for Numerical Computations*, CreateSpace, 2009.
- [4] D. J. HIGHAM, *Nine ways to implement the binomial method for option valuation in MATLAB*, SIAM Rev., 44 (2003), p. 661–677 (electronic).
- [5] P. E. KLOEDEN ET E. PLATEN, *Numerical solution of stochastic differential equations*, vol. 23 de Applications of Mathematics (New York), Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [6] D. LAMBERTON ET B. LAPEYRE, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses, 1998.
- [7] A. LEJAY, *An introduction to rough paths*, in Séminaire de Probabilités XXXVII, vol. 1832 de Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2003.
- [8] P.-L. LIONS, *Remarques sur l'intégration et les équations différentielles ordinaires*, in Séminaire « Mathématiques appliquées », Collège de France, 6 Novembre 2009.
- [9] T. J. LYONS, *Differential equations driven by rough signals*, Rev. Mat. Iberoamericana, 14 (1998), p. 215–310.
- [10] MATLAB, *version R2013b*, The MathWorks Inc., 2013.

- 
- [11] M. MUSIELA ET M. RUTKOWSKI, *Martingale methods in financial modeling*, vol. 36 de Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, second éd., 2005.
  - [12] B. ØKSENDAL, *Stochastic differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, sixth éd., 2003.
  - [13] E. PARDOUX, *Processus de Markov et applications : algorithmes, réseaux, génome et finance*, Sciences sup, Dunod, 2007.
  - [14] R CORE TEAM, *R : A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, 2013.
  - [15] D. REVUZ ET M. YOR, *Continuous martingales and Brownian motion*, vol. 293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, third éd., 1999.
  - [16] L. C. YOUNG, *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration*, Acta Math., 67 (1936), p. 251–282.



# Index

- $\langle X \rangle_t$ , 43
- $\langle X, Y \rangle_t$ , 43
- A.O.A., 7
- absence d'opportunité d'arbitrage, 7
- accroissements
  - indépendants, 26
  - stationnaires, 26
- actif
  - contingent, 12
  - dérivé, 12
  - dérivé dépendant du chemin, 15
  - dérivé indépendant du chemin, 15
- arbre binomial, 14
- Black-Merton-Scholes
  - équation, 88
  - modèle, 79
- call asiatique, 85
- changement de probabilité, 195
- convergence
  - $L^p$ , 189
  - en loi, 189
  - en probabilité, 189
  - presque sure, 189
- couverture en delta, 90
- covariation quadratique
  - pour des processus d'Itô multi-d, 63
- Cox-Ross-Rubinstein, 14
- delta d'une option, 90
- delta hedging, 90
- E.D.S., 64
- équation
  - de Black-Merton-Scholes, 88
- équation différentielle stochastique, 64
- espace
  - $L^0$ , 188
  - $L^1$ , 188
  - $L^2$ , 188
  - $L^p$ , 188
  - de scénarios, mesure sur, 197
  - de probabilité complet, 26
  - filtré complet, 27
- espace de probabilité complet, 26
- espérance conditionnelle, 191
  - inégalité de Jensen, 192
  - propriétés, 192
- filtration, 27
  - engendrée par un processus, 28

- naturelle d'un processus, 28
- fonction caractéristique, 28, 187
- formule
  - de Itô, 59
  - de Itô multi-dimensionnelle, 63
- gamma d'une option, 91
- Girsanov
  - théorème de, 67
- i.i.d., 21
- identité polaire pour un produit scalaire, 50
- intégrale
  - d'Itô, 54
  - de Stieltjes, 45
- intégration par parties, 62
- inégalité de Jensen
  - pour espérance conditionnelle, 192
  - pour martingales, 32
- lemme
  - de Itô, 59
  - de Itô multi-dimensionnel, 63
  - Fatou, 191
- Levy
  - théorème de, 36, 44
- lois fini-dimensionnelles, 26
- marché
  - complet, 13
- martingale
  - en temps continu, 31
  - inégalité de Jensen, 32
  - locale, 31
  - temps discret, 193
- mesure
  - de probabilité neutre au risque, 11, 82
  - sur espace de scénarios, 197
  - Wiener, 198
  - équivalentes, 10
- modèle
  - de Cox-Ross-Rubinstein, 14
  - binomial, 13
  - de Black-Merton-Scholes, 79
- mouvement brownien, 30, 35
  - caractérisation de Levy, 36, 44
  - multi-dimensionnel, 39
- opportunité d'arbitrage, 7
- option
  - delta, 90
  - gamma, 91
  - thêta, 91
- pont brownien, 30
- probabilité risque neutre, 11, 82
- processus
  - adapté, 28
  - d'Itô, 56
  - d'Itô multi-dimensionnel, 63
  - gaussien, 30
  - martingale discrete, 193
  - mesurable, 27
  - modification, 26
  - progressif, 28
  - prévisible, 4
  - stationnaire, 26

- stochastique, 26
- trajectoire, 27
- version, 26
- à accroissements indépendants, 26
- à accroissements stationnaires, 26
- élémentaire, 46
- équivalents, 26
- produit scalaire euclidien, 188
- Radon-Nicodým, théorème de, 195
- représentation de martingales, 65
- réplication, 12
- temps d'arrêt, 31, 193
- théorème
  - représentation de martingales, 65
  - de Girsanov, 67
  - Levy, 36, 44
  - Radon-Nicodým, 195
- thêta d'une option, 91
- trajectoire d'un processus, 27
- variation
  - d'ordre  $p$ , 39
  - quadratique, 40, 43
  - quadratique, covariation, 43
  - totale, 40
- variation quadratique, 43
- vecteur gaussien, 28