Stage de rentrée

1$^{\text{ère}}$ **année**

S. Meignen

2014/2015

Table des matières

Chapitre 1

Espace vectoriel

1.1 Notion de groupe et de corps

Pour définir la notion d'espace vectoriel, nous avons besoin de la notion de groupe.

Définition 1 *Un ensemble muni d'une loi $*$ est un groupe si :*
– *la loi est associative :* $\forall\ x, y, z \in G\ (x * y) * z = x * (y * z)$.
– *possède un élément neutre e_G tel que pour tout x dans G on ait :* $x * e_G = e_G * x = x$.
– *si tout élément de G admet un inverse dans G :* $\forall x \in G,\ \exists x^{-1} \in G,\ x * x^{-1} = x^{-1} * x = e_G$.

Ex : $(\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes.

Proposition 1

Dans un groupe l'inverse est unique.

Démonstration On procède par l'absurde : Soit x un élément du goupe. Supposons qu'il existe x_1 et x_2 dans le groupe tel que $x_1 * x = x * x_1 = e_G$ et $x_2 * x = x * x_2 = e_G$, alors $x_2 = x_2 * e_G = x_2 * (x * x_1) = (x_2 * x) * x_1 = e_G * x_1 = x_1$.

Définition 2 *On dit que le groupe G est Abélien ou commutatif si* $\forall x, y \in G,\ x * y = y * x$.

Définition 3 *Un corps est un triplet $(A, +, .)$ tel que $(A, +)$ est un groupe Abélien, la loi de multiplication est distributive par rapport à l'addition, possède un élément neutre et si tout élément admet un inverse pour la multiplication.*

Dans ce qui suit, on considère que : $(K, +, \times) = (\mathbb{R}, +, \times)$ ou $(\mathbb{C}, +, \times)$ (ce sont des corps).

1.2 Notion d'espace vectoriel

Définition 4 $(E, +_E, ._E)$ *est un espace vectoriel sur le corps K si $(E, +_E)$ est un groupe Abélien, si $._E$ est une loi de multiplication externe distributive par rapport à l'addition dans K et dans E, c'est-à-dire :*
– $\forall \lambda \in K\ \forall x, y \in E,\ \lambda ._E (x +_E y) = \lambda . x +_E \lambda . y$
– $\forall (\lambda, \beta) \in K\ \forall x \in E\ (\lambda + \beta) ._E x = \lambda ._E x +_E \beta ._E x$

De plus, doit aussi exister un élément 1_K dans K tel que pour tout x dans E, $1_K ._E x = x$ et enfin :

$$\forall(\alpha,\beta) \in K \ \forall x \in E \ (\alpha \times \beta)._E x = \alpha._E(\beta._E x)$$

.

Ex :
- $(\mathbb{R},+,\times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Soit E et F deux ensembles, tel que $(F,+_E,._E)$ soit un K-espace vectoriel. On appelle application de E dans F, une fonction qui à tout élément de E associe un unique élément de F. On note $\mathcal{A}(E,F)$ cet ensemble. On munit $\mathcal{A}(E,F)$, d'une adddition $+_\mathcal{A}$ et d'une loi de multiplication externe $._\mathcal{A}$ en posant :
  – $\forall x \in E, \forall f,g \in \mathcal{A}(E,F) : (f +_\mathcal{A} g)(x) = f(x) +_F g(x)$
  – $\forall x \in E, \forall g \in \mathcal{A}(E,F) : (\lambda._\mathcal{A} g)(x) = \lambda._F g(x)$.

Proposition 2

$(\mathcal{A}(E,F),+_\mathcal{A},._\mathcal{A})$ est un K-espace vectoriel

Démonstration $(\mathcal{A}(E,F),+_\mathcal{A})$ est un groupe Abélien.
$\forall x \in E,\ f,g,h \in \mathcal{A}(E,F)$, $[(f +_\mathcal{A} g) +_\mathcal{A} h](x) = [f +_\mathcal{A} (g +_\mathcal{A} h)](x)$.
L'application nulle est l'élément neutre.
Si $f \in \mathcal{A}(E,F)$, $-f$ est l'application inverse. Enfin comme $(F,+)$ est Abélien, $\forall x \in E,\ \forall f,g \in \mathcal{A}(E,F)$, $(h +_\mathcal{A} g)(x) = (g +_\mathcal{A} h)(x)$.
Vérifions maintenant les propriétés de la multiplication externe :
– $\forall(\lambda,\beta) \in K,\ \forall f \in \mathcal{A}(E,F)(\lambda+\beta)._\mathcal{A} f = \lambda._\mathcal{A} f +_\mathcal{A} \beta._\mathcal{A} f$
  $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ (\lambda+\beta)._F f(x) = \lambda._F f(x) +_F \beta._F f(x)$
– $\forall \lambda \in K, \forall(f,g) \in \mathcal{A}(E,F)\ \lambda._\mathcal{A}(f +_\mathcal{A} g) = \lambda._\mathcal{A} f +_\mathcal{A} \lambda._\mathcal{A} g$
  $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \lambda._F(f(x) +_F g(x)) = \lambda._F f(x) + \lambda.g(x)$.

Enfin : $1_K._\mathcal{A} f = f$
$\forall(\lambda,\beta) \in K,\ (\lambda \times \beta)._\mathcal{A} f = \lambda._\mathcal{A}(\beta._\mathcal{A} f)$.

Applications :
– La suite u_n est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des suites forment donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
– De même l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel.
– L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La loi interne est l'addition de deux matrices. La loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire. L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls). Le symétrique de la matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$. De même, l'ensemble $M_{n,p}(K)$ des matrices à coefficients dans K est un K-espace vectoriel.

1.3 Notion d'espace produit

Proposition 3

Soit E et F deux K-espaces vectoriels, on définit l'espace produit $E \times F$ par :
$\forall (x,y),(x_1,y_1) \in E \times F, (x,y) +_{E\times F} (x_1,y_1) = (x +_E x_1, y +_F y_1)$
$\forall \lambda \in K \lambda ._{E\times F}(x,y) = (\lambda ._E x, \lambda ._F y)$
Alors $(E \times F, +_{E\times F}, ._{E\times F})$ est un espace vectoriel.

Ex : $(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, ._{\mathbb{R}^2})$ est un espace vectoriel. De façon plus générale, $(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n}, ._{\mathbb{R}^n})$ est un espace vectoriel.

1.4 Notion de sous-espace vectoriel

Définition 5 *Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée sous-espace vectoriel de E si :*
- $0_E \in F$
- $u +_E v \in F$ pour tout $u, v \in F$
- $\lambda ._E u \in F$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $u \in F$.

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \emptyset$ et $\forall (\alpha,\beta) \in K,\ \forall x,y \in F,\ \alpha ._E x +_E \beta ._E y \in F$.

Théorème 1

Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un K-espace vectoriel pour les lois induites par E.

Démonstration Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. La stabilité de F pour les deux lois permet de munir cet ensemble d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe, en restreignant à F les opérations définies dans E. Les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition, ainsi que les quatre axiomes relatifs à la loi externe sont vérifiés, car ils sont satisfaits dans E donc en particulier dans F, qui est inclus dans E . L'existence d'un élément neutre découle de la définition de sous-espace vectoriel. Il reste seulement à justifier que si $u \in F$, alors son symétrique $-u$ appartient à F. Fixons u dans F . Comme on a aussi u dans E et que E est un espace vectoriel alors il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0_E$. Comme u est élément de F, $-u = (-1).u$ appartient à F.

Ex :

1. L'ensemble F des suites arithmétiques est un sous-espace de l'espace des suites.
   $(u_n) = 0$ suite arithmétique de raison $0 \Rightarrow\ F \neq \emptyset$.
   (u_n) et (v_n) deux suites arithmétiques, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est-elle arithmétique ? Soit $u_{n+1} = u_n + a$ et $v_{n+1} = v_n + b$. Alors $\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n + \alpha a + \beta b$ donc $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est une suite arithmétiques de raison $\alpha a + \beta b$, donc F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

2. Soit F, l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$, est un sous-espace de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, F contient l'application nulle et si P et Q appartiennent à F, et sont respectivement de degré p et q alors $\alpha P + \beta Q$ est un polynôme de degré $\max(p, q)$.
3. Soit E et F deux espaces vectoriels. On appelle application linéaire, une application f de E dans F telle que : $\forall(\alpha, \beta) \in K\ \forall(x, y) \in E,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans F noté $L(E, F)$ est un sous-espace de l'espace des applications de E dans F. En effet, l'application nulle est bien linéaire et

$$\begin{aligned}&\forall(\alpha,\beta) \in K,\ \forall f, g \in L(E,F),\ \forall(\nu,\mu) \in K,\ \forall(x,y) \in E\\ &(\alpha.f + \beta.g)(\nu.x + \mu.y) = \nu.[\alpha.f + \beta.g](x) + \mu.[\alpha.f + \beta.g](y)\\ &\Rightarrow \alpha.f + \beta.g \in L(E,F)\end{aligned}$$

   Donc $L(E, F)$ est un sous-espace vectoriel des applications de E dans F.
4. Tout plan F passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Le plan admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz = 0 \tag{1.1}$$

   où a, b et c sont des réels non tous nuls (a, b, c) est le vecteur normal au plan.
   Un élement de F est donc un triplet (x, y, z) tel que (1.1) est satisfait. Comme le plan passe par l'origine il contient l'élément neutre de $\mathbb{R}^3$ et $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall X, Y \in F,\ \alpha X + \beta Y \in F$.

Exrcices : Parmi les ensembles suivant lesquels sont des espaces vectoriels ?

a) L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
d) L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda.x = x^\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
e) L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
f) L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

1.5 Intersection de sous-espaces

Proposition 5

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. L'intersection $F \bigcap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E : $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc $0_E \in F \bigcap G$. Soient u et v deux vecteurs de $F \bigcap G$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F$ implique $u + v \in F$. De même $u, v \in G$ implique $u + v \in G$. Donc $u + v \in F \bigcap G$. Soient $u \in F \bigcap G$ et $\lambda \in K$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\lambda.u \in F$. Comme G est un sous-espace vectoriel, alors $u \in G$ implique $\lambda.u \in G$, donc $u \in F \bigcap G$. Ainsi, $F \bigcap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Ex : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 0\}$.

Remarque 1 *La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y),\ x = 0\}$ et $G = \{(x, y),\ y = 0\}$. Alors $F \bigcup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, mais n'est pas dans $F \bigcup G$.*

1.6 Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 6 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u + v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F + G$. On a donc $F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$.*

Proposition 6

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du K-espace vectoriel E.

1. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

Démonstration 1. Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel.
- $0_E \in F$, $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.

- Soient w et w' des éléments de $F + G$. Comme w est dans $F + G$, il existe u dans F et v dans G tels que $w = u + v$. Comme w' est dans $F + G$, il existe u' dans F et v' dans G tels que $w' = u' + v'$. Alors $w + w' = (u + v) + (u' + v') = (u + u') + (v + v') \in F + G$, car $u + u' \in F$ et $v + v' \in G$.
- Soit w un élément de $F + G$ et $\lambda \in K$. Il existe u dans F et v dans G tels que $w = u + v$. Alors $\lambda.w = \lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v \in F + G$, car $\lambda.u \in F$ et $\lambda.v \in G$.

2.
- L'ensemble $F + G$ contient F et contient G : en effet tout élément u de F s'écrit $u = u + 0$ avec u appartenant à F et 0 appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc u appartient à $F + G$. De même, pour un élément de G.
- Si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G, alors montrons que $F + G \subset H$. C'est clair : si $u \in F$ alors en particulier $u \in H$ (car $F \subset H$), de même si $v \in G$ alors $v \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $u + v \in H$.

Exemples :

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z = 0\}$, $F + G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$.
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$. $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \bigcap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = 0\}$. Montrer qu'un élément de $\mathbb{R}^3$ ne se décompose pas de manière unique sur $F + G$.

Définition 7 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe dans E si :*

- $F \bigcap G = 0_E$
- $F + G = E$

On note alors $F \oplus G = E$ et on dit que F et G sont supplémentaires dans E

Proposition 7

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Démonstration -Supposons $E = F \oplus G$ et montrons que tout élément $u \in E$ se décompose de manière unique. Soient donc $u = v + w$ et $u = v' + w'$ avec $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$. On a alors $v + w = v' + w'$, donc $v - v' = w' - w$. Comme F est un sous-espace vectoriel alors $v - v' \in F$, mais d'autre part G est aussi un sous-espace vectoriel donc $w' - w \in G$. Conclusion : $v - v' = w' - w \in F \bigcap G$. Mais par définition d'espaces supplémentaires $F \bigcap G = 0_E$, donc $v - v' = 0_E$ et aussi $w' - w = 0_E$. On en déduit $v = v'$ et $w = w'$, ce qu'il fallait démontrer.
-Supposons que tout $u \in E$ se décompose de manière unique et montrons $E = F \oplus G$.

- Montrons $F \bigcap G = 0_E$. Si $u \in F \bigcap G$, il peut s'écrire de deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G : $u = 0_E + u$ et $u = u + 0_E$. Par unicité de la décomposition, $u = 0_E$.
- Montrons $F + G = E$. Il n'y rien à prouver, car par hypothèse tout élément u se décompose en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

Ex :

1. Soient $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer $F \oplus G = \mathbb{R}^3$
2. $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$. idem

1.7 Combinaisons linéaires et notion d'espace engendré

Définition 8 *Soit $n \geq 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \cdots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ (où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$) sont des éléments de K est appelé combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.*

Théorème 2

Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un K-espace vectoriel E. Alors :

1. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$.

Ce sous-espace vectoriel est appelé sous-espace engendré par $v_1, \cdots, v_n$ et est noté $Vect(v_1, \cdots, v_n)$. On a donc

$$u \in Vect(v_1, \cdots, v_n) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K \text{ tels que } u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Démonstration 1. On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \cdots, v_n\}$. $0_E \in F$ car F contient la combinaison linéaire particulière $0.v_1 + \cdots + 0.v_n$. Si $u, v \in F$ alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + + \lambda_n v_n$ et $\mu_1, \cdots, \mu_n \in K$ tels que $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$. On en déduit que $u + v = (\lambda_1 + \mu_1).v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n).v_n$ appartient bien à F. De même, $\lambda.u = (\lambda\lambda_1).v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n).v_n \in F$. Conclusion : F est un sous-espace vectoriel.
2. Si G est un sous-espace vectoriel contenant $\{v_1, \cdots, v_n\}$, alors il est stable par combinaison linéaire ; il contient donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, \cdots, v_n\}$. Par conséquent F est inclus dans G : F est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $\{v_1, \cdots, v_n\}$.

Exemples :
- Si u et v sont deux vecteurs de E, alors $Vect(u, v) = \{\lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in K\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires, alors $Vect(u, v)$ est un plan vectoriel.
- Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $P = Vect(u, v)$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Vect(u, v) &\Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda u + \mu v \text{ pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \lambda + \mu \\ y &=& \lambda + 2\mu \\ z &=& \lambda + 3\mu \end{array} \right. \end{aligned}$$

Nous obtenons bien une équation paramétrique du plan P passant par l'origine et contenant les vecteurs u et v.

1.8 Bases d'un espace vectoriel

Définition 9 *Soit E un espace vectoriel et $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que X est une base de E si :*
– X est génératrice, c'est-à-dire $Vect(X) = E$.
– X est libre, $\forall \alpha \in K$ tel que $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \alpha_i = 0$.

Proposition 8

La deuxième condition entraine l'unicité de la décomposition

Démonstration Par l'absurde, on suppose que :

$$\left. \begin{array}{l} x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \\ x = \sum_{i \in I} \beta_i x_i \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i \in I} (\beta_i - \alpha_i) x_i = 0 \quad \Rightarrow \forall i \in I \alpha_i = \beta_i$$

Définition 10 *On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une base de cardinal fini ($|I| < +\infty$). $|I|$ signifie cardinal de I.*

Exemples :
- Dans $\mathbb{R}$ n'importe quel vecteur non nul est une base. Dans $\mathbb{R}^2$, une base est $(1, 0)$, $(0, 1)$ (cette base est appelée base canonique). Un autre exemple de base : $(1, 0)$, $(1, 1)$.

- Plus généralement, $\mathbb{R}^N$ admet pour base : $(1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 1)$. Ces espaces sont de dimension finie.
- Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, -1, 7), e_2 = (-5, 2, 3)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Montrons que cette famille est libre. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ 7\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Par utilisation du pivot de Gauss, ce système équivaut à

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

On a donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre. Montrons ensuite que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. Etant donné un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, il s'agit de trouver trois réels α, β et γ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (x, y, z)$. Cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = x \\ -\alpha + 2\beta = y \\ 7\alpha + 3\beta + \gamma = z. \end{cases}$$

En appliquant de nouveau le pivot de Gauss, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = 0 \\ \beta = -\frac{1}{3}(x + y) \\ \gamma = \frac{1}{3}(17x + 38y + 3z) \end{cases}$$

La solution est $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{3}(-2x - 5y, -x - y, 17x + 38y + 3z)$. Le système a au moins une solution. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$. Puisqu'on a aussi montré qu'elle est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 9

Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{l_1, \cdots, l_p\}$ une famille libre de E, alors $p \leq n$

Proposition 10

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même nombre d'éléments.

Remarque 2 *Cela justifie a posteriori pourquoi la dimension d'un espace vectoriel correspond au cardinal de l'une de ses bases.*

Proposition 11

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{E}$ une famille de n vecteurs de E. Alors :
- si $\mathcal{E}$ est libre, c'est une base de E
- si $\mathcal{E}$ engendre E, c'est une base de E.

1.9 Dimension et somme

Proposition 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base de F_1 et $\{e_{p+1}, \cdots, e_{p+q}\}$ une base de F_2. Les sous-espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\{e_1, \cdots, e_{p+q}\}$ est une base de E.

Proposition 13

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si $E = F_1 \oplus F_2$ alors $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

1.10 Matrice de changement de bases

Définition 11 *Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace de dimension n et $\mathcal{B}'$ une famille à n vecteurs de cet espace. La matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ s'appelle la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On la note $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.*

Remarque 3 *: On peut montrer que la matrice de passage d'une base à une autre est inversible. De plus une famille est une base si et seulement si la matrice de passage de cette famille à n'importe quelle base est inversible.*

Théorème 3

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. Soit x un vecteur de E. On note X le vecteur colonne formé des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et X' le vecteur colonne formée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. Alors $X = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')X'$ ou encore $X' = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}X$.

Démonstration On note $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}, \mathcal{B}' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$ et $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i b'_i$$

Or

$$\begin{array}{rcl} b'_1 & = & p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \cdots + p_{n1}b_n \\ b'_2 & = & p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \cdots + p_{n2}b_n \\ \vdots & = & \vdots \\ b'_n & = & p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \cdots + p_{nn}b_n \end{array}$$

On a donc,

$$x = x'_1(p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \cdots + p_{n1}b_n) + x'_2(p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \cdots + p_{n2}b_n) + \cdots + x'_n(p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \cdots + p_{nn}b_n)$$

qu'on peut réécrire

$$x = (p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n)b_1 + (p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n)b_2 + \cdots + (p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n)b_n.$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n \\ x_2 & = & p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n & = & p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n \end{array}$$

ce qui se réécrit matriciellement $X = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')X'$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$ la base $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$, calculer la matrice de passage de la base canonique dans cette base, calculer les coordonnées dans la base canonique du vecteur de coordonnées $(2, 3)$ dans cette base.
2. Dans $M_2(\mathbb{R})$ on considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calculer la matrice de passage de la base canonique à cette famille de matrices. Montrer que c'est une base.

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés et applications

2.1 Définition et premiers exemples

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel. On dit que l'application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est une norme si*
- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemples en dimension finie :

1. $(\mathbb{R}, |.|)$
2. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
3. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
4. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2}$

Exercice : Montrer que $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
Exemples en dimension infinie :
Soit $E = C^0[0, 1]$, l'ensemble des applications continues sur $[0, 1]$. Comme l'ensemble des applications continues est stable par combinaison linéaire et que l'application nulle est continue, cet ensemble forme un sous espace des vectoriels des application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On peut définir sur cet espace plusieurs types de normes :

1. $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$
2. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$

Exercice : Montrer que ces différentes applications définissent bien des normes sur E.

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel réel. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes ssi il existe $c, C > 0$ telles que pour tout x dans E,*

$$cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$

Définition 3 *Soit (u_k) une suite dans E et $l \in E$. On dit que la suite (u_k) converge vers l pour la norme N si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} N(u_k - l) = 0$.*

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. Alors si N_1 et N_2 sont équivalentes, pour toute suite (u_k) de E et pour tout $l \in E$,

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = l \text{ pour } N_1 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} u_k = l \text{ pour } N_2$$

Démonstration Montrons que, si u_k tend vers l pour N_1 alors u_k tend vers l pour N_2 (la preuve dans l'autre sens est identique). Puisque N_1 et N_2 sont équivalentes, en particulier : $\exists C > 0,\ \forall x \in E,\ N2(x) \leq CN1(x)$.
Or la convergence, $u_k \to l$ pour N_1 signifie que :

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N > 0,\ \forall k \geq N, \Rightarrow N_1(u_k - l) \leq \varepsilon'.$$

Nous en déduisons la convergence pour N_2 : $\forall \varepsilon > 0$, soit $\varepsilon' = \varepsilon/C$, alors

$$N_2(u_k - l) \leq CN_1(u_k - l) \leq C\varepsilon' = \varepsilon$$

Donc $u_k \to l$ pour N_2.

Théorème 2

Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

Démonstration On montre que pour tout x dans E,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Plus généralement, on a le résultat suivant (difficile à démontrer)

Théorème 3

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Contre-exemple en dimension infinie :
$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On introduit à présent les normes N_1,

N_2 et N sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ définies pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X_n$ appartenant à $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\begin{aligned} N_1(P) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|. \\ N_2(P) &= \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2}. \\ N_\infty(P) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \end{aligned}$$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
Considèrons à présent la famille de polynômes $(P_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ définie par la relation :

$$P_q = 1 + X + ... + X^{q-1}.$$

On a : $N_1(P_q) = q$, $N_2(P_q) = \sqrt{q}$ et $N_\infty(P_q) = 1$. Remarquons de plus que : $\frac{N_1(P_q)}{N_2(P_q)} = \sqrt{q}$ et $\frac{N2(P_q)}{N_\infty(P_q)} = \sqrt{q}$. Il suffit de faire tendre q vers $+\infty$ pour comprendre que les quotients ci-dessus ne sont pas bornés, ce qui contredit l'équivalence des trois normes.

2.2 Norme induite

Dans ce qui suit, on considère E et F deux espaces vectoriels normés et on note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Définition 4 *On appelle norme induite, l'application de $L(E, F)$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout u dans $L(E, F)$ par :*

$$\begin{aligned} |||u||| &= \sup_{x\in E, \|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F \\ &= \sup_{x\in E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{x\in E, \|x\|_E \le 1} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \end{aligned}$$

Exercice : Montrer qu'il s'agit bien d'une norme et que les trois expressions la définissant sont bien égales.
Exemple : Applications linéaires en dimension finie
Ecriture sous forme matricielle d'une application linéaire. Supposons E de dimension n, et $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base E. Soit $(e_j)_{1\le j\le m}$ une base de F et f une application linéaire de E dans F. Alors, si on pose $y = f(x)$, on peut écrire :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i),$$

d'où l'on déduit $y = Ax$ avec la matrice $m \times n$ égale à $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$.
Trouver la norme d'un application linéaire revient à étudier la norme des matrices. Elle dépend à la fois du choix des bases sur E et F et du choix de la norme.
Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, on définit les normes (induites) de matrice suivantes :

- $|||A|||_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$
- $|||A|||_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$
- $|||A|||_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$

Exercice :

1. Démontrer que $|||A|||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$
2. Démontrer que $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$