10 Conséquence du théorème du codage canal

Soit X une source simple d'alphabet $\{0, 1\}$ avec une probabilité du 1 égale à 0.135.

1. Quelques questions de révision :
   (a) Quelles sont les deux redondances possibles d'une source ?
   (b) Quelle est l'entropie de la source X ?
   (c) Quelle est la longueur minimale des mots d'un code de compression entropique pour un codage binaire instantané de cette source ?
   (d) Comment procéder pour approcher pratiquement cette longueur moyenne minimale à l'aide d'un codage de Huffman ?
   (e) Le codage de source étant réalisé de manière à être très près de la borne, quelle est approximativement la statistique des caractères en sortie du codeur ?
   (f) On considère un Canal Binaire Symétrique (CBS) de probabilité de transition $p = 0.08$.
   Quelle est la capacité de ce canal ?
2. Dans la suite, on suppose qu'un code de Hamming $(7, 4)$ est utilisé. On souhaite étudier ce codage de Hamming dans le contexte posé par les questions précédentes.
   (a) On suppose le codage source utilisé très proche de la borne minimale théorique et l'on place un codeur canal en sortie du codeur de source. Quelle est l'entropie moyenne par symbole binaire après codage canal (n, k) ?
   (b) Quel est le rendement maximum d'un codeur canal qui assure que l'hypothèse de validité du second théorème de Shannon est vérifiée ? Que dit alors le second théorème de Shannon ?
   (c) En pratique, pourquoi est-il important que la loi soit uniforme sur l'ensemble des mots du code ?

(d) On utilise le code de Hamming $(7,4)$, qu'en conclure par rapport aux questions précédentes à propos de la validité du second théorème de Shannon ? Qu'en conclure par rapport à sa probabilité d'erreur par mot ?

(e) Quelle est la probabilité pour qu'un mot de code soit décodé de manière erronée ? Evaluer numériquement cette probabilité pour $p = 0,08$, $p = 10^{-3}$ et $p = 10^{-6}$.

Que dire sur la probabilité d'erreur binaire ?