Examen du 20 Mai 2009

Durée : 3h.

Les seuls documents autorisés sont les notes du cours et des travaux dirigés de méthodes numériques.

Exercice 1 On étudie dans cet exercice une méthode de résolution d'un système linéaire $Ax = b$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $b, x \in \mathbb{R}^n$. Cette méthode consiste à se ramener au système $A^t A x = A^t b$, puis à le résoudre par la méthode de Cholesky.

1- Montrer que la matrice $A^t A$ est symétrique définie positive.

2- Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, donner un équivalent du nombre d'opérations arithmétiques élémentaires nécessaires à la résolution du système $Ax = b$ avec cette méthode.

3- Comparer les coûts de l'algorithme précédent et de la résolution directe de $Ax = b$ par la méthode de Gauss lorsque n est grand.

Exercice 2 Déterminer si les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent pour le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

et $b = (1, \frac{3}{4}, 1)^t$.

La résolution du système linéaire n'est pas demandée.

Exercice 3 Dans ce problème on étudie un système modélisant un circuit électrique qui comporte $n+1$ résistances identiques R. On note x_k le potentiel électrique au noeud reliant les $k$ième et $(k+1)$ième résistances, et j_k l'intensité d'un courant d'entrée en ce point. Le circuit est construit de manière à avoir

$$2x_k - x_{k+1} - x_{k-1} = R\,j_k, \quad k = 1, \dots, n, \tag{1}$$

$$x_0 = x_{n+1} = 0, \tag{2}$$

avec $R > 0$. On considère pour l'instant $j_1, \ldots, j_n$ comme des paramètres et on souhaite calculer $x_1, \ldots, x_n$. En introduisant $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $b = R\,(j_1, \ldots, j_n)^t \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

le problème (1)-(2) s'écrit sous la forme $Ax = b$. On rappelle l'expression des valeurs propres de A

$$\lambda_m = 4 \sin^2 \Big(\frac{m\pi}{2(n+1)} \Big), \quad m = 1, \ldots, n.$$

Partie I

Dans cette partie on étudie le conditionnement κ_∞ de A pour la norme $\| \, \|_\infty$.

1. Calculer $\|A\|_\infty$.

2. Sans calculer explicitement A^{-1}, montrer que

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq c_n \, \frac{(n+1)^2}{8}, \qquad c_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est impair,} \\ 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

3. En utilisant l'expression des valeurs propres de A, trouver une constante $c > 0$ telle que $\|A^{-1}\|_\infty \geq c\,(n+1)^2$.

4. En déduire $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha(n+1)^2 \leq \kappa_\infty \leq \beta(n+1)^2$. La matrice A est-elle bien conditionnée pour la norme $\| \, \|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$?

5. Montrer que

$$\|A^{-1}\|_\infty = c_n \, \frac{(n+1)^2}{8}.$$

Indication : on pourra introduire la solution du système $Ax = b$ avec $b_i = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

6. En déduire la valeur exacte du conditionnement de A pour la norme $\| \, \|_\infty$.

7. On fixe dans cette question $n = 19$. On considère des données d'entrée $b + \delta b$ sur lesquelles on commet une erreur de mesure $\delta b \in \mathbb{R}^n$ pour laquelle $\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty \leq 10^{-4}$. On considère la solution $x+\delta x$ du système $A\,(x+\delta x) = b + \delta b$. Donner une majoration de l'erreur relative $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$.

Partie II

Dans cette partie on étudie d'un point de vue général la résolution numérique de systèmes linéaires dont la matrice est tridiagonale comme la matrice (3). On considère une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et tridiagonale

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_3 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

dont tous les coefficients sont supposés non nuls. On suppose que M admet une factorisation $M = L\,U$, avec $L \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure de diagonale unité, et $U \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Dans ce cas on peut montrer par récurrence que les matrices L et U sont bidiagonales et s'écrivent

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \gamma_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_3 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

(on ne demande pas de démontrer ce résultat).

8. Donner une relation de récurrence qui détermine les coefficients γ_k et α_k des matrices L et U.

9. Lorsque $n \to +\infty$, donner un équivalent du nombre d'opérations arithmétiques élémentaires nécessaires au calcul de L et U ainsi qu'à la résolution d'un système $M\,x = b$ ($x, b \in \mathbb{R}^n$) utilisant cette factorisation $L\,U$.

10. Lorsque M est symétrique définie positive, montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ et une matrice $L \in M_n(\mathbb{R})$ de la forme donnée dans (4) telles que $M = L\,D\,L^t$. Donner une relation de récurrence qui détermine les coefficients des matrices L et D.

11. Pour la matrice A donnée par (3), calculer explicitement les matrices L et D intervenant dans la factorisation $A = L\,D\,L^t$.

Partie III

On revient à l'étude du problème (1)-(2). On suppose maintenant que

$$j_k = \frac{1}{R_k}(v_k - x_k), \quad k = 1, \dots, n, \tag{5}$$

où $v_1, \dots, v_n$ sont des paramètres correspondant à des tensions d'entrée et $R_k > 0$ des résistances. On note par la suite $v = (v_1, \dots, v_n)^t$.

12. Montrer que le problème (1)-(2)-(5) conduit à résoudre un système linéaire $M\,x = D\,v$ pour $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, avec $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale et $M \in M_n(\mathbb{R})$ (on explicitera les matrices D et M).

13. Montrer que la matrice M est symétrique définie positive.

14. On souhaite résoudre (1)-(2)-(5) pour un grand nombre de valeurs du vecteur v contenant les tensions d'entrée. Quelle méthode numérique choisiriez-vous pour résoudre ce problème ? On justifiera soigneusement le choix de la méthode en question.

15. On remplace maintenant la relation (5) par

$$j_k = \rho_k(v_k - x_k), \quad k = 1, \dots, n, \tag{6}$$

où les fonctions $\rho_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe C^2 et donnent les caractéristiques courant-tension de résistances non linéaires. Donner une méthode numérique pour résoudre (1)-(2)-(6).

16. On suppose $v_k = v$ et $\rho_k = \rho$ indépendants de k, avec $\rho(x) = \operatorname{sh} x$. Le problème (1)-(2)-(6) s'écrit alors

$$x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = R\operatorname{sh}(x_k - v), \quad k = 1, \dots, n, \tag{7}$$

avec $x_0 = x_{n+1} = 0$. Montrer que ce problème admet une solution et que celle-ci est unique.

Indication : on pourra se ramener à un problème de minimisation.