

Marchés à terme

Un **contrat à terme** (*forward contract* ou *future contract*) est un contrat dans lequel les deux parties, l'acheteur et le vendeur, s'engagent respectivement à recevoir et à livrer une quantité déterminée d'un actif sous-jacent à un prix et à une date (ou période) déterminés à l'avance. Une opération à terme se distingue d'une opération au comptant par le fait que les **opérations de règlement-livraison** (*settlement*) sont différées à une date ultérieure (généralement supérieure à deux jours ouvrés).

On distingue généralement les contrats négociés sur des marchés de gré à gré (*over-the-counter*), pour lesquels l'ensemble des caractéristiques sont négociables (*forward contracts*) des contrats négociés sur des places financières organisées (*future contracts*), qui sont standardisés et répondent à des règles de sécurité importantes (margin requirements). Les principales places financières proposant des contrats à terme standardisés sont : le CBOT et le [CME](#), [Euronext](#), l'[EUREX](#) ou l'[Intercontinental Exchange](#).

Les contrats peuvent porter sur différents types de sous-jacents : des taux de change, des matières premières, des instruments de taux d'intérêt, des actions ou indices boursiers, immobilier, énergie, météo, etc¹.

1. Spécifications des Futures et Appels de marge

Les contrats Futures, négociés sur des places financières organisées, se distinguent des contrats Forward, négociés sur des marchés de gré à gré, par leur standardisation et l'obligation pour les parties prenantes de mettre en place des garanties.

1.1. Spécifications des contrats Futures

Les spécifications les plus importantes portent sur 1/ l'actif sous-jacent, 2/ la taille du contrat et 3/ le calendrier de règlement-livraison.

a. Actif sous-jacent (Underlying asset)

L'**actif-sous-jacent** ou support est l'actif qui est délivré par le vendeur à l'acheteur du contrat à terme. L'actif sous-jacent peut exister physiquement (action, taux d'intérêt, matière première) ou pas (indice boursier, obligation notionnelle). Lorsque le contrat donne lieu à une livraison physique de l'actif sous-jacent, il spécifie également la qualité (*grade*) et la quantité des actifs qui peuvent être délivrés à l'échéance du contrat.

¹ Pour des raisons de simplicité, ce document ne présente que les contrats portant sur des instruments de taux d'intérêt. Le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage de Hull pour une description plus complète des autres produits.

Exemple : l'actif sous-jacent du contrat Euro-Bund négocié sur l'Eurex est une obligation notionnelle (fictive) émise par l'Etat allemand, de maturité résiduelle comprise entre 8,5 et 10,5 années, de maturité à l'émission de moins de 17 ans et versant un coupon annuel de 6%.

b. Taille du contrat (size)

Elle correspond à la quantité notionnelle d'actif sous-jacent qui doit être délivrée à l'échéance du contrat à terme.

Exemples : le contrat Euribor 3 mois a une taille de 1 million d'euros, le contrat Euro-Bund porte sur un notionnel de 100 000 euros.

c. Calendrier de règlement-livraison (settlement)

Le **mois d'échéance** (*delivery month*) représente le mois d'expiration du contrat. Pour chaque mois d'échéance, le calendrier de règlement-livraison définit le dernier jour de transaction (*last trading day*) et, si nécessaire, le **jour des réponses** (*repartition* ou *allotment day*) où les vendeurs annoncent quels actifs ils vont livrer aux acheteurs, et le **jour de livraison** (*delivery day*) ou la période de livraison (*delivery period*).

Exemple : Le calendrier de règlement-livraison du contrat Euro-Bund Décembre 2014 était :

- Dernier jour de transaction : 8 décembre 2014
- Jour des réponses : 9 décembre 2014
- Jour de livraison : 10 décembre 2014

1.2. Dépôts de garantie et appels de marge

Le marché des contrats Futures se caractérise par l'existence d'une chambre de compensation (*clearing house*) avec contrepartie centrale qui se substitue, dès qu'une transaction est enregistrée, en tant que contrepartie au vendeur et à l'acheteur initial. Ainsi, lorsqu'un opérateur achète un contrat à terme à un autre opérateur, la transaction est scindée en deux : une transaction liant l'acheteur à la chambre de compensation et une transaction liant le vendeur à la même chambre de compensation. Si l'une des parties au contrat fait défaut, l'autre partie n'en subirait aucune conséquence. Pour jouer efficacement son rôle, la chambre de compensation dispose de mesures de gestion des risques adaptées : le dépôt de garantie (*initial margin*) et les appels de marge (*variation margin*).

Lorsqu'un opérateur ouvre une position (acheteuse ou vendeuse), il doit effectuer un dépôt de garantie auprès de la chambre de compensation, via son intermédiaire financier. Ce dépôt est effectué soit en liquide ou en titres négociables. Chaque jour, après la clôture du marché, la chambre de compensation calcule les gains et pertes de chaque opérateur à l'aide d'un **cours de compensation** (*settlement price*). Toute perte est immédiatement imputée sur le compte de l'opérateur et déduite de son dépôt de garantie. Lorsque le niveau du compte devient inférieur à une certaine **marge de maintenance** (*maintenance margin*), l'opérateur subit un appel de marge (*variation margin*) et doit donc verser la somme nécessaire à la reconstitution de la marge initiale avant l'ouverture du marché le lendemain. A défaut, sa position est soldée sur le marché.

Exemple :

Un investisseur achète le 27 octobre 2010, 10 contrats USD/EUR d'échéance Novembre. Le contrat porte sur 20 000 dollars. Le cours du contrat est 72,81€ (pour 100\$). La marge initiale et la marge de maintenance sont fixées à 530€ par contrat.

Dès l'ouverture de la position, l'opérateur doit verser sur un compte dédié (*Margin account*) un dépôt de garantie de 5 300 € (10 contrats x 530 €). Comme le montre le Tableau 1, l'évolution de son compte va dépendre de l'évolution du cours du contrat jusqu'au dernier jour de transaction (ou jusqu'au moment où l'opérateur décide de clore sa position en revendant les contrats). Chaque soir la chambre de compensation publie un cours de compensation (*Daily settlement price*) qui sert à la compensation de la position.

Par exemple, si le soir du 27 octobre, le cours de compensation s'établit à 72,61 alors le cours du contrat a diminué de 0,20 (ou 20 pips) soit une perte de 400€. Cette perte est imputée sur le dépôt de garantie qui devient inférieur à la valeur de la marge de maintenance (fixée à 530 €) et l'opérateur subit un appel de marge de 400 €. Il doit donc apporter à nouveau 400 € sur son compte de façon à reconstituer le dépôt de garantie. A la clôture du marché le 28 octobre, le contrat a perdu 0,80 (ou 80 pips) par rapport à la veille. La perte du jour est donc de 1 600 € et l'opérateur doit à nouveau faire un appel de marge de 1 600 € pour combler sa perte.

Le 3 novembre, si l'on considère que l'opérateur clôture sa position en revendant les dix contrats au cours de 71,63, sa position fait apparaître une perte cumulée de 2 350 €. La perte de la dernière journée est imputée au dépôt de garantie et le solde sera restitué à l'opérateur le lendemain. A noter que la perte de 2 350 € a été compensée par la suite de flux suivante : - 5 300 € ; - 400 € ; - 1 600 € ; + 240 € ; - 580 € ; + 5 290 €. Ainsi, la chambre de compensation est toujours en capacité de faire face à la défaillance d'un opérateur.

Tableau 1 : Dépôt de garantie et appels de marge quotidiens

Date	Cours	Résultat quotidien	Résultat cumulé	Appel de marge	Solde
27/10	72,81			(5 300)	5 300
27/10	72,61	(400)	(400)	(400)	5 300
28/10	71,81	(1 600)	(2 000)	(1 600)	5 300
29/10	71,93	240	(1 760)	240	5 300
01/11	71,93	-	(1 760)	-	5 300
02/11	71,64	(580)	(2 340)	(580)	5 300
03/11	71,63	10	(2 350)	-	5 290

NB : sur certains marchés (notamment aux Etats-Unis, la marge de maintenance est inférieure à la marge initiale. Cela a pour conséquence de réduire la fréquence des appels de marge mais la marge initiale est plus élevée que sur les marchés européens. Lorsque les pertes cumulées sont telles que le compte devient inférieur à la marge de maintenance, l'opérateur subit un appel de marge équivalent à la perte cumulée (i.e. permettant de reconstituer la totalité de la marge initiale).

2. Contrats à terme sur instruments de taux courts

Cette partie présente les principaux contrats à terme portant sur des instruments de taux d'intérêt à court terme (*Short Term Interest Rates*, STIR).

2.1. Les contrats forward-forward

Une opération d'emprunt ou de prêt forward-forward est un contrat d'emprunt ou de prêt dont la date de valeur est reportée à une date ultérieure. Le montant principal de l'emprunt ou du prêt est transféré entre les parties et remboursé avec les intérêts à la maturité.

Pour illustrer le fonctionnement de ce type de contrat, considérons une banque qui est approchée par une entreprise souhaitant emprunter une somme de dix millions d'euros dans trois mois pour une durée de trois mois. Elle peut se rapprocher d'une banque et s'engager à lui emprunter la somme souhaitée dans trois mois pour une durée de trois mois à un taux fixé aujourd'hui (**taux fixe garanti**). Pour la banque, il s'agit désormais de prêter 10 millions d'euros dans trois mois pour trois mois à un taux fixe garanti par le contrat. Pour se protéger contre le risque de hausse des taux auquel elle est confrontée, elle peut dès aujourd'hui réaliser les opérations suivantes : 1/ prêter la valeur actuelle de dix millions d'euros sur une période de trois mois, et 2/ emprunter la même somme sur une période de six mois.

Si les taux du marché pour les maturités 3 et 6 mois sont respectivement 1,00%-1,20% et 1,80%-2,00%, les opérations réalisées par la banque sont les suivantes :

- Prêt à trois mois de la valeur actuelle de 10 millions d'euros au taux emprunteur du marché, (1,00%) : 9 975 062,34 €
- Emprunt à six mois du même montant : 9 975 062,34 €.

Le flux net initial pour la banque est donc nul.

Trois mois plus tard, la banque récupère le principal du prêt augmenté des intérêts, soit 10 millions d'euros, et les prête à son client dans le cadre du contrat forward-forward. Le flux est donc nul.

A l'échéance, trois mois plus tard, la banque doit rembourser son emprunt, soit 10 074 812,96 €. Pour ce faire, elle va demander à son client de lui rembourser a minima la même somme dans le cadre du contrat forward-forward. De ce fait, le flux net sera nul et l'opération sera blanche pour la banque (absence d'opportunité d'arbitrage).

Globalement, la suite des flux dans le cadre du contrat de forward-forward peut être résumée comme suit :

0	3 mois	6 mois
0 €	10 000 000 €	-10 074 812,96 €

Le taux de rendement actuariel d'une telle suite de flux est 2,99%. Il représente le taux futur garanti minimum que la banque peut proposer dans le contrat à terme.

De façon générale, le taux futur garanti dans le cadre d'une opération de type forward-forward est donné par :

$$F(0, t1, t2) = \left[\frac{\left(1 + r(0, t2) \times \frac{N2}{360}\right)}{\left(1 + r(0, t1) \times \frac{N1}{360}\right)} - 1 \right] \times \frac{360}{N2 - N1}$$

Avec $F(0, t1, t2)$ le taux à terme implicite calculé en 0

$r(0, t1)$ le taux d'intérêt pour la maturité $t1$

$r(0, t2)$ le taux d'intérêt pour la maturité $t2$

$N1$ et $N2$ représentent le nombre de jours exacts entre 0 et $t1$ et $t2$ respectivement

2.2. Les FRA

Un *Forward Rate Agreement* (FRA) est un contrat de gré à gré qui garantit un taux d'intérêt, à une date future, pour un montant et une durée déterminés dans le contrat. C'est un engagement sur un taux et non un engagement de prêt ou d'emprunt. Contrairement au forward – forward, le FRA est un contrat sans mouvement de fonds. A l'échéance, le FRA est liquidé par le versement du différentiel entre le taux fixe du FRA (taux futur garanti) et le taux de référence variable, actualisé et ajusté par le montant négocié (montant notionnel) et la durée de l'opération sous-jacente (durée du taux de référence) :

$$AD = N \times \frac{(REF - FRA) \times \frac{d}{360}}{1 + REF \times \frac{d}{360}}$$

Où AD est le montant dû, REF est le taux de référence variable, FRA est le taux fixe garanti par le contrat et d représente le nombre exact de jours de la période de référence.

Pour illustrer le fonctionnement de ce type de contrat, considérons une entreprise qui doit placer un million d'euros dans trois mois pour six mois. Un FRA 3x9 se négocie au prix de 2,75% - 3,00%.

Dans la mesure où l'entreprise souhaite se protéger contre un risque de baisse du taux de référence, elle va vendre un FRA (pour payer le taux de référence variable et recevoir le taux fixe garanti) au taux acheteur du marché de 2,75%.

A l'échéance, si le taux de référence observé est 2,50%, l'entreprise recevra le différentiel actualisé, soit 1 234,56 €. Elle pourra donc placer sur le marché le million d'euros augmenté du gain sur le FRA, soit une somme de 1 001 234,56 € durant six mois au taux de 2,50%. Le capital reçu en fin de période sera donc de 1 013 750 €, soit un taux de rendement actuariel de 2,75%.

Alternativement, si le taux de référence observé à l'échéance est de 3%, l'entreprise devra payer le différentiel actualisé, soit 1 231,52 €. Elle ne pourra donc placer que 998 768,48 € durant six mois au taux de 3%. Le capital reçu en fin de période sera donc de 1 013 750 €, soit un taux de rendement actuariel de 2,75%.

Cet exemple montre que la vente d'un contrat permet à l'entreprise de fixer le taux de rendement de son placement futur.

2.3. Les contrats Futures sur instruments de taux courts

Comme indiqué précédemment, les contrats Future sont des contrats à terme négociés sur des places financières organisées. Les sous-jacents des contrats Future sur instruments de taux courts sont en général les taux de dépôts à trois mois (LIBOR 3 mois, Euribor 3 mois, etc.), voire à un mois (EONIA 1 mois). Les modes de fonctionnement de ces contrats étant similaires, seul le contrat Euribor 3 mois sera présenté dans cette note.

Les caractéristiques de ce contrat sur les marchés d'ICE et d'Euronext sont données dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Spécifications du contrat Euribor 3 mois

	ICE	EUREX
Taille du contrat	1 million €	
Cotation (1)	100,00 – impo	
Tick	0,5 bp soit 12,5 €	
Echéances	24 échéances trimestrielles du cycle Mars, Juin, Septembre et Décembre, et 4 échéances mensuelles les plus proches de sorte que 28 échéances soient cotées en permanence, dont les 6 prochains mois	20 échéances trimestrielles du cycle Mars, Juin, Septembre, Décembre.
Dernier jour de transaction	Deux jours de bourse précédant le troisième mercredi du mois d'échéance à 11h.	
Jour de livraison	Premier jour suivant le dernier jour de négociation	

(1) impo représente le taux implicite dans le contrat (ou taux futur garanti).

Pour illustrer le fonctionnement de ce type de contrat, considérons le cas d'une entreprise qui, le 2 novembre 2009, anticipe qu'elle devra placer 10 millions d'euros pour une période de trois mois à partir du 16 décembre 2009 (date de règlement-livraison du contrat Euribor 3 mois). Le contrat d'échéance décembre 2009 se négocie aux prix de 99,260 – 99,265.

Dans la mesure où l'entreprise souhaite se protéger contre un risque de baisse du taux Euribor, elle doit acheter un certain nombre de contrats Euribor 3 mois. En effet, si le taux d'intérêt baisse, le cours du contrat devrait augmenter (du fait de la cotation 100 – taux) et la revente à l'échéance générer un

gain. La taille du contrat étant fixée à un million d'euros, il faut acheter 10 contrats d'échéance décembre 2009 au prix de 99,265 (soit un taux implicite de 0,735%). Cette opération ne génère aucun flux de trésorerie, à l'exception du paiement du dépôt de garantie qui est autofinancé.

Le Tableau 3 simule le résultat de l'opération de couverture en fonction du taux Euribor 3 mois observé le dernier jour de négociation du contrat, soit le 14 décembre 2009. Du fait u mode de cotation des contrats, le dernier cours de compensation est nécessairement égal à la différence entre 100,000 et le taux Euribor 3 mois observé sur le marché. A défaut, un arbitrage instantané pourrait être réalisé.

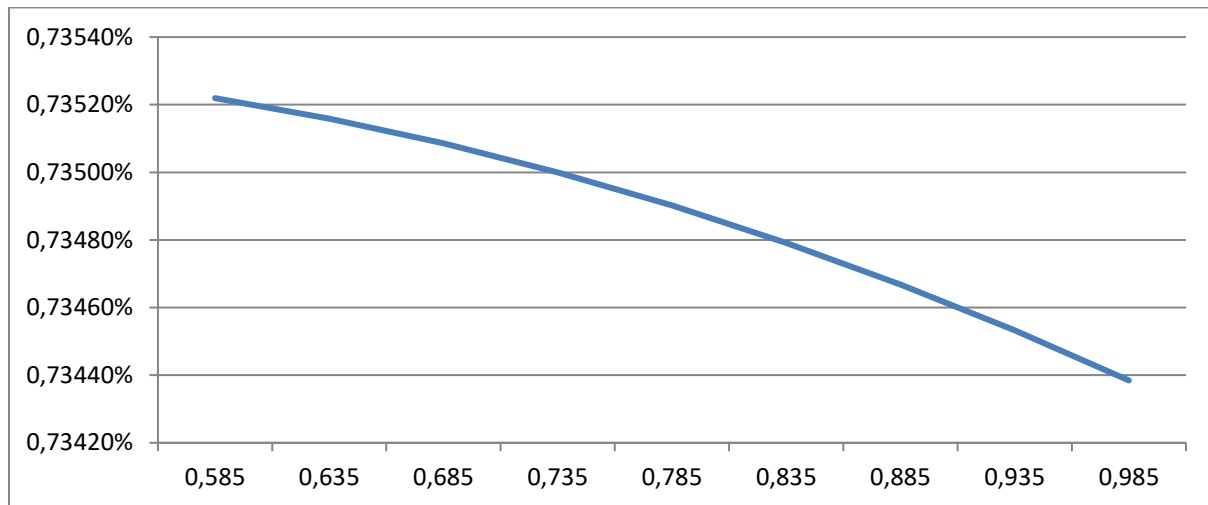
Tableau 3 : Couverture parfaite avec contrat Euribor 3 mois

Taux Euribor 3 mois observé le 14/12/09 (i _t)	Dernier cours de compensation (F _t)	Intérêts reçus	Appels de marge cumulés	Position globale	Taux de rendement
0,635	99,365	15 875,00 €	2 500,00 €	18 375,00 €	0,735%
0,685	99,315	17 125,00 €	1 250,00 €	18 375,00 €	0,735%
0,735	99,265	18 375,00 €	- €	18 375,00 €	0,735%
0,785	99,215	19 625,00 €	- 1 250,00 €	18 375,00 €	0,735%
0,835	99,165	20 875,00 €	- 2 500,00 €	18 375,00 €	0,735%

La position permet donc à l'entreprise de figer implicitement le taux de rendement de son placement au taux fixe garanti dans le contrat à terme, soit 0,735%.

Il existe toutefois une différence entre le gain réalisé sur les contrats Futures et le flux d'intérêt sur le prêt. En effet, le gain sur les contrats Futures est perçu dès la date de départ du prêt (16 décembre) alors que le flux d'intérêt sur le prêt est reçu en date de maturité du prêt (16 mars). La couverture du prêt est donc **parfaite à un facteur d'actualisation près**. En capitalisant les appels de marge cumulés au taux Euribor 3 mois observé le 14 décembre, le taux de rendement n'est plus fixe à 0.735% mais dépend marginalement du taux observé. Ainsi, le taux de rendement du placement sera de 0,73509% pour un taux Euribor 3 mois de 0,685% et 0,73490% pour un taux de 0,785%. Le graphique ci-après montre l'impact de cette imperfection sur la couverture.

Figure 1 : Couverture parfaite avec contrat Euribor 3 mois – taux de rendement actuariel



La standardisation des contrats Futures introduit mécaniquement un risque de corrélation (de base) lorsque l'opération que l'on souhaite couvrir contre le risque de taux n'a pas les mêmes caractéristiques que le sous-jacent du contrat, soit :

- lorsque la date de départ de l'opération à couvrir (prêt ou emprunt futur) ne correspond pas à la date d'échéance du contrat Futures,
- lorsque la maturité de l'opération à couvrir (prêt ou emprunt futur) ne correspond pas à la maturité du sous-jacent du contrat Futures.

Dans ces deux cas, la couverture n'est pas parfaite.

3. Contrats à terme sur instruments de taux longs

Plusieurs types de produits sont disponibles sur les marchés organisés. Les produits les plus classiques sont des contrats à terme sur obligations d'Etat qui donnent lieu à une livraison physique d'une obligation émise par un Etat et ayant des caractéristiques précises. Certains marchés proposent des contrats à terme similaires mais dont le règlement-livraison se fait en cash et non par la livraison physique d'un actif sous-jacent. Par exemple, ICE propose des contrats de swapnotes à maturité 2, 5, 10 et 30 ans. Enfin, certains marchés proposent des contrats dont le sous-jacent est un indice obligataire. Comme pour les swaps, le règlement-livraison s'effectue donc en cash. Par exemple, EUREX propose un contrat sur l'indice obligataire EURO STOXX 50 composé uniquement d'émetteurs privés. Cette note ne présente que les contrats classiques, c'est-à-dire portant sur des obligations d'Etat.

3.1. Spécifications des contrats

Comme tout contrat à terme négocié sur un marché organisé, les contrats à terme sur obligations d'Etat sont standardisés. Le Tableau 4 synthétise les principales spécifications du contrat Euro-Bund négocié sur le marché de l'EUREX.

Tableau 4 : Caractéristiques du contrat Euro-Bund

Sous-jacent	Obligations de l'Etat allemand (Bund) de maturité comprise entre 8,5 et 10,5 ans, remboursables in fine, servant un intérêt annuel de 6 %.
Unité de transaction	100 000 euros
Cotation	En pourcentage du nominal, avec deux décimales
Fluctuation minimum (tick)	1 bp, soit 10 euros
Cycle	3 échéances trimestrielles successives du cycle Mars, Juin, Septembre et Décembre.
Jour de livraison	10 ^{ème} jour calendaire du mois de livraison ou, à défaut, le premier jour de bourse qui suit.
Dernier jour de Transaction	2 jours de bourse précédant le jour de livraison à 12h30 (ECT)

A l'échéance du contrat, le vendeur doit livrer un titre ayant les caractéristiques du notionnel. Comme ce produit n'existe pas sur le marché au comptant, il en choisit un dans une liste établie par la chambre de compensation (le gisement) dix jours au moins avant le dernier jour de transaction. Les titres admissibles à la livraison doivent avoir une maturité comprise entre 8,5 et 10,5 années à la date du 10^{ème} jour de bourse du mois de livraison, servir un coupon annuel fixe et avoir un encours d'au moins 5 milliards d'euros. Par exemple, pour l'échéance Décembre 2008, le calendrier de livraison ainsi que les valeurs du gisement sont donnés dans le Tableau 5.

Tableau 5 : Gisement du contrat Euro-Bund Décembre 2008

Code ISIN	Taux nominal	Echéance	Facteur de concordance
DE0001135333	4,25	04.07.2017	0,885104
DE0001135341	4,00	04.01.2018	0,863086
DE0001135358	4,25	04.07.2018	0,874950

3.2. Facteur de concordance et titre le moins cher à livrer

Comme les titres du gisement n'ont pas les mêmes caractéristiques (taux, maturité), il est impossible qu'ils aient le même rendement. Il est par ailleurs impossible que leur rendement corresponde à celui du notionnel. Cette situation est vraie à tout moment et en particulier lors de la livraison. Elle induit une triple difficulté :

- Les titres livrables ne sont pas identiques entre eux,
- Les titres livrables ne remplissent pas les spécifications du notionnel,
- Les taux de rendement propre à chaque titre livrable diffèrent du taux de rendement du notionnel.

L'idéal serait qu'à l'échéance du contrat, tous les titres du gisement aient un rendement identique à celui du notionnel. C'est pour tendre vers cette situation idéale que la chambre de compensation a mis en place le système du **facteur de concordance**. Ce système a pour objectif de corriger les distorsions qui sont susceptibles de se produire du fait des différences existant, d'une part, entre les caractéristiques des différents titres du gisement, d'autre part, entre les caractéristiques de chacun des titres du gisement et celles du notionnel. En quelque sorte, l'idée sous-jacente du facteur de concordance est d'établir une parité d'échange entre un actif fictif (le notionnel) et un titre réel (le titre à livrer).

Le système du facteur de concordance consiste donc à actualiser au taux du notionnel l'ensemble des flux générés par chaque titre du gisement. Le facteur de concordance d'un titre du gisement représente donc la valeur actuelle de ce titre pour un taux d'actualisation égal à celui du notionnel. De ce fait, tous les titres du gisement deviennent identiques puisqu'ils ont le même rendement malgré la disparité de leurs caractéristiques. Ils sont également comparables au notionnel. Il devrait donc être indifférent au vendeur de livrer tel ou tel titre.

Le facteur de concordance peut être déterminé à l'aide de la formule suivante :

$$FC = 1,06^{-f} \left[c \times \frac{d2}{act2} + \frac{c}{6} \times (1,06 - 1,06^{-n}) + 1,06^n \right] - CC$$

$$CC = c \times \left(\frac{d2}{act2} - \frac{d1}{act1} \right)$$

Avec :

DD	Jour de livraison
NCD	Date du prochain coupon
NCD1y	1 an avant le prochain coupon
NCD2y	2 ans avant le prochain coupon
LCD	Date du dernier coupon (date de départ des intérêts sinon)
c	Taux nominal du coupon
n	Nombre entier d'années entre NCD et l'échéance du titre
d1	NCD1y – DD
act1	NCD – NCD1y si d1 < 0 NCD1y – NCD2y si d1 ≥ 0
d2	NCD1y – LCD
act2	NCD – NCD1y si d2 < 0 NCD1y – NCD2y si d2 ≥ 0
f	1 + d1/act1

Le Tableau 6 ci-après présente les étapes de calcul des facteurs de concordance des titres du gisement du contrat Euro-Bund d'échéance Décembre 2008 (cf. Tableau 5).

Tableau 6 : Détermination du facteur de concordance – Contrat Euro-Bund Décembre 2008

	DE0001135333	DE0001135341	DE0001135358
Date de livraison (DD)	10/12/08	10/12/08	10/12/08
Maturité	04/07/17	04/01/18	04/07/18
Prochain coupon (NCD)	04/07/09	04/01/09	04/07/09
Dernier coupon (LCD)	04/07/08	16/11/07 ⁽¹⁾	30/05/08 ⁽¹⁾
NCD1y	04/07/08	04/01/08	04/07/08
NCD2y	04/07/07	04/01/07	04/07/07
Coupon (c)	4.25	4.00	4.25
n	8	9	9
d1	-159.00	-341.00	-159.00
d2	0.00	49.00	35.00
act1	365	366	365
act2	365	365	366
f	0.564383562	0.068306011	0.564383562
Facteur de concordance (FC)	0.885104	0.863086	0.874950
Coupon couru (CC)	1.851370	4.263760	2.257790

⁽¹⁾ Ces deux titres n'ont pas encore détaché de coupon. La date indiquée est donc la date d'émission des titres (date de jouissance).

Tout vendeur de contrat n'ayant pas clôturé sa position avant l'échéance est contraint de livrer un des titres du gisement pour 100 000 euros de valeur nominale. S'il choisit de livrer un titre en particulier, pour un contrat vendu, compte tenu de la parité d'échange représentée par le facteur de concordance, il doit livrer 100 000 / FC obligations. De façon équivalente, pour FC contrat vendus, il doit livrer 100 000 obligations.

Ainsi, pour 100 000 obligations livrées à l'échéance, le vendeur du contrat reçoit (en dehors des appels de marge) le prix de livraison, soit $1000 \times (FC \times F_L + CC_L)$. Or, ces obligations ont un prix sur le marché égal à $1000 \times (P_L + CC_L)$. Si le facteur de concordance jouait bien son rôle de parité d'échange, il devrait donc être indifférent pour le vendeur de livrer l'un ou l'autre des titres du gisement et l'on devrait observer la relation d'équilibre suivante :

$$FC \times F_L = P_L$$

En pratique, cette relation d'équilibre n'est jamais vérifiée. Le vendeur calcule donc, pour chaque titre du gisement, la différence entre ce qu'il reçoit et ce qu'il débourse pour se procurer les titres sur le marché au comptant. Il retiendra alors le titre pour lequel la différence est la plus grande (ou la moins négative). Ce titre est le **titre le moins cher à livrer** (*cheapest to deliver bond*). Les mécanismes concrets de livraison aboutissent à ce qu'un titre du gisement est toujours, à un instant donné, moins cher à livrer que les autres. Il est tout à fait évident que les variations de l'offre et de la demande sur chacun des titres négociés sur le marché au comptant ont pour conséquence de changer le titre le moins cher à livrer.

3.3. Titre le moins cher à livrer anticipé et évaluation du contrat

Comme mentionné précédemment, le titre le moins cher à livrer représente le titre qui génère le plus grand profit d'arbitrage pour le vendeur du contrat à la date de règlement-livraison. A toute date antérieure à la date de règlement-livraison ($t < L$), un opérateur peut construire un portefeuille

d'arbitrage composé d'une position courte sur le contrat et une position longue sur l'actif sous-jacent (*cash-and-carry arbitrage*). En date initiale (date t), l'opérateur réalise les opérations suivantes :

Achat de l'obligation (pour 100 000 € de nominal)	$-(P_t + CC_t)$
Emprunt	$+(P_t + CC_t)$
Vente de FC contrats Euro-Bund	0
Flux total	0

A l'échéance du contrat (date L), la position courte sur le contrat à terme est dénouée par la livraison de l'obligation. Le résultat de la stratégie est la suivante :

Appels de marge cumulés	$FC \times (F_t - F_L)$
Prix de livraison	$CF \times F_L + CC_L$
Remboursement de l'emprunt initial	$-(P_t + CC_t) \times [1 + r_{t,L} d/360]$
Coupons perçus (éventuellement)	C
Flux total	$CF \times F_t + CC_L - (P_t + CC_t) \times [1 + r_{t,L} d/360] + C$

Le résultat de la stratégie d'arbitrage est donc :

$$\begin{aligned}
 R &= FC \cdot F_t + CC_L - (P_t + CC_t) \cdot \left(1 + \frac{r_{t,L} \cdot d}{360}\right) + C \\
 &= (FC \cdot F_t - P_t) + (CC_L + C - CC_t) - (P_t + CC_t) \cdot \frac{r_{t,L} \cdot d}{360}
 \end{aligned}$$

Par définition, le titre le moins cher à livrer est le titre qui maximise ce résultat.

De façon équivalente, le **taux de repo implicite** (*implied repo rate*) est le taux de rendement de l'opération consistant à acheter l'obligation sur le marché au comptant en date t et à la revendre à un prix fixe via le dénouement de la vente d'un contrat à terme. Par conséquent, le titre le moins cher à livrer est celui qui offre le plus taux de repo implicite le plus élevé.

$$\text{repo} = \frac{(FC \cdot F_t - P_t) + (CC_L + C - CC_t)}{(P_t + CC_t) \cdot \frac{d}{360}}$$

Illustration :

Le 21 octobre 2008, le prix du contrat Euro-Bund d'échéance décembre 2008 était 115,25 et le taux d'intérêt à deux mois était 4,787%. A la même date, les prix des titres du gisement étaient les suivants :

Code ISIN	Taux nominal (%)	Echéance	Facteur de concordance	Coupon couru au 10/12/08	Cours	Coupon couru au 23/10/08
DE0001135333	4.25	04.07.2017	0.885104	1.85137	101.80	1.29000
DE0001135341	4.00	04.01.2018	0.863086	4.26376	100.44	3.74000
DE0001135358	4.25	04.07.2018	0.874950	2.25779	102.54	1.70000

L'utilisation des deux formules précédentes permet de déterminer que le titre le moins cher à livrer anticipé est le premier des trois titres du gisement. En effet, pour ce titre on observe un taux de repo implicite de 5,60% très supérieur au taux d'intérêt, et un résultat positif de 0,112% de la valeur nominale, soit environ 112 euros.

$$R = (0.885104 \cdot 115.25 - 101.80) + (1.85137 + 0 - 1.29000) - (101.80 + 1.29000) \cdot \frac{4.787\% \cdot 48}{360} = 0.112$$

$$\text{repo} = \frac{(0.885104 \cdot 115.25 - 101.80) + (1.85137 + 0 - 1.29000)}{(101.80 + 1.29000) \cdot \frac{48}{360}} = 5.60\%$$

	DE0001135333	DE0001135341	DE0001135358
Base initiale ($FC \cdot F_t - P_t$)	0.208	-0.969	-1.702
Coupons reçus ($CC_T + C - CC_t$)	0.561	0.524	0.558
Intérêts payés ($P_t + CC_t$) $\cdot \frac{r \cdot d}{360}$	0.658	0.665	0.665
Coût de portage	0.097	0.141	0.108
Résultat d'arbitrage	0.112	-1.111	-1.810
Taux de repo implicite	5.60%	-3.21%	-8.23%

A l'équilibre du marché, le cours du contrat doit être tel qu'aucun gain d'arbitrage ne soit possible. Des relations précédentes, il vient donc que le cours théorique d'un contrat à terme est tel que :

$$F_t = \frac{1}{FC} \left(P_t + (P_t + CC_t) \cdot \frac{r_{t,L} \cdot d}{360} - (CC_T + C - CC_t) \right)$$

Le cours théorique du contrat Décembre 2008 est donc de 115,12. Avec un cours observé de 115,25 le 21 octobre 2008, le contrat est surévalué par le marché. Pour profiter de ce déséquilibre, il faut vendre le contrat et acheter l'actif sous-jacent (le titre le moins cher à livrer), donc réaliser un arbitrage de type *cash-and-carry*.

3.4. Couverture du risque de taux

Les opérateurs souhaitant couvrir une position longue (une position courte) sur un titre à revenu fixe contre un mouvement défavorable des taux d'intérêt doivent vendre (acheter) un certain nombre de contrats à terme. Le nombre de contrats à négocier est déterminé en utilisant la sensibilité des titres obligataires aux mouvements de taux d'intérêt (*duration-based hedging strategy*) :

$$N = \frac{V_p \times S_p \times 0,01\%}{100000 \times P_{ctd} \times S_{ctd} \times 0,01\%} \times FC$$

Avec

V_p	la valeur de marché du titre ou portefeuille à couvrir
S_p	la sensibilité du titre ou portefeuille à couvrir
P_{ctd}	le prix (cours + coupon couru) du titre le moins cher à livrer anticipé
S_{ctd}	la sensibilité du titre le moins cher à livrer
FC	le facteur de concordance du titre le moins cher à livrer anticipé

Illustration

Un investisseur institutionnel souhaite couvrir son portefeuille contre une possible augmentation des taux au cours des deux prochains mois. Les paramètres sont les suivants :

- Valeur de marché du portefeuille :	40 millions €
- Sensibilité du portefeuille :	-8,20
- Cours du contrat Euro-Bund :	112,59
- Prix du titre le moins cher à livrer :	95,98
- Sensibilité du titre le moins cher à livrer :	-7,18
- Facteur de concordance :	0,849220

$$N = \frac{40000000 \times -8,20 \times 0,01\%}{100000 \times 95,98\% \times -7,18 \times 0,01\%} \times 0,849220 = 404$$

Pour couvrir la position, l'investisseur doit donc vendre 404 contrats au cours de 112,59 et clore sa position à l'échéance en les rachetant à un prix inférieur. Supposons que d'ici à deux mois, les taux

d'intérêt augmentent effectivement de 30 bps. La valeur du portefeuille est désormais de 38 987 750 euros et le cours du contrat est 110,09. Le résultat de la position est le suivant :

- Résultat sur les contrats : $404 \times 100\,000 \times (112,59 - 110,09) = 1\,010\,000 \text{ €}$
- Perte sur le portefeuille : 1 012 250 €

La couverture est ici plus que parfaite puisqu'un gain apparaît.