Feuille 5
Méthode de Cholesky

Exercice 1
On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et sa factorisation de Cholesky $A = T\,{}^tT$. On suppose A tridiagonale, i.e. telle que $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| \geqslant 2$.

1. Montrer que T est bidiagonale, i.e. $t_{ij} = 0$ si $j \neq i, i-1$.
Indication : utiliser l'existence d'une factorisation $A = LU$ avec L et U bidiagonales (cf. feuille 4).

2. Donner une relation de récurrence qui détermine les coefficients de T. Quel est le nombre d'opérations nécessaires pour calculer T ? (On distinguera les opérations arithmétiques élémentaires et calculs de racines carrées.)

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est symétrique définie positive et calculer sa factorisation de Cholesky.

Exercice 2
On étudie dans cet exercice une méthode de résolution d'un système linéaire $A\,x = b$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $b, x \in \mathbb{R}^n$. Cette méthode consiste à calculer $M = {}^tA\,A$ (par l'algorithme de multiplication matricielle standard) puis à résoudre le système $M\,x = {}^tA\,b$ par la méthode de Cholesky.

1- Montrer que M est symétrique définie positive.

2- La matrice A est supposée pleine. Lorsque $n \to +\infty$, donner un équivalent du nombre d'opérations arithmétiques élémentaires nécessaires à la résolution du système $A\,x = b$ avec cette méthode.

3- Comparer les coûts de l'algorithme précédent et de la résolution directe de $A\,x = b$ par la méthode de Gauss lorsque n est grand.

Exercice 3

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique positive (i.e. telle que ${}^t x\, A\, x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$).

1- Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe une unique matrice triangulaire inférieure $T_k \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A + \frac{1}{k}\, I = T_k\, {}^t T_k$.

2- Montrer qu'on peut extraire de la suite $(T_k)_{k \geqslant 1}$ une sous-suite $(T_{k_p})_{p \geqslant 1}$ qui converge dans $M_n(\mathbb{R})$. On notera T sa limite.

3- Montrer que la matrice T est triangulaire inférieure, à coefficients diagonaux positifs, et que $A = T\, {}^t T$ (factorisation de Cholesky pour une matrice symétrique positive).