Feuille 3

Exercice 3.1. — Donner tous les arbres à $3, 4, 5$ sommets.

Exercice 3.2. — Montrer que si G est un arbre ayant au moins deux sommets, alors G admet un sommet de degré un. De plus, il en existe au moins deux.

Exercice 3.3. — Montrer que le nombre d'arêtes d'un arbre à n sommets est $n - 1$.

Exercice 3.4. — Quel est le nombre d'arêtes d'une forêt ayant n sommets et k composantes connexes ?

Exercice 3.5. — Est-il vrai qu'un graphe ayant n sommets et au moins n arêtes admet un cycle ?

Exercice 3.6. — Soit G un graphe ayant au moins 5 sommets. Montrer que l'un des deux graphes G ou $\overline{G}$ admet un cycle.

Exercice 3.7. — Montrer que si l'on enlève une arête d'un cycle d'un graphe connexe alors le graphe reste connexe.

Exercice 3.8. — Montrer qu'un graphe G admet un arbre couvrant si et seulement si G est connexe.

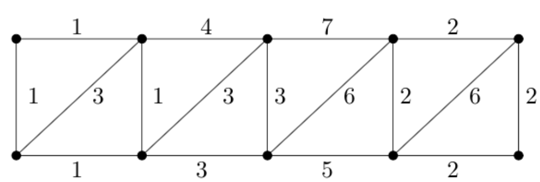
Exercice 3.9. — Montrer que tout graphe connexe G ayant au moins 2 sommets admet un sommet v tel que $G - v$ soit connexe.

Exercice 3.10. — Soit $F \subseteq E$ tel que le graphe partiel $G(F)$ est un arbre. Soit $e = uv \in E \setminus F$ et soit f une arête de la chaîne dans $G(F)$ entre u et v. Montrer que le graphe partiel $G(F + e - f)$ est un arbre.

ARBRES DE COÛT MINIMUM

Exercice 3.11. — **l'algorithme de Kruskal :** On suppose que le graphe G est connexe. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ l'ordre de E tel que $c(e_1) \leq c(e_2) \leq ... \leq c(e_m)$. Au début soit $H_0 := (V, F_0)$ où $F_0 := \emptyset$. Pour $1 \leq i \leq m$ soit $H_i = (V, F_i)$ où $F_i = F_{i-1} + e_i$ si $H_{i-1} + e_i$ est une forêt, et $F_i = F_{i-1}$ sinon. Montrer que l'algorithme de Kruskal trouve un graphe partiel $H_m = (V, F_m)$ qui est un arbre de coût minimum.

(b) Exécuter l'algorithme de Kruskal sur le graphe suivant :



Exercice 3.12. — **l'algorithme de Prim :** On suppose que le graphe G est connexe. Au début soit $H_0 := (V_0, F_0)$ où $V_0 := r \in V$ et $F_0 := \emptyset$. Si $V_i \neq V(G)$ alors soit $uv \in \delta_G(V_i)$ tel que $u \in V_i$ de coût minimum et soit $V_{i+1} := V_i + v$ et $F_{i+1} := F_i + uv$. Montrer que l'algorithme de Prim trouve un graphe partiel $H_{n-1} = (V, F_{n-1})$ qui est un arbre de coût minimum.

(b) Exécuter l'algorithme de Prim sur le graphe ci-dessus.

APPLICATIONS

Exercice 3.13. — (GI) Un opérateur téléphonique veut installer un nouveau réseau de communication haut débit connectant les principales villes de France : Brignoud, Gières, Lans en Vercors, Monestier de Clermont, Tullins et Uriage. Les coûts de connexion entre 2 villes dépendent de la distance et des lignes déjà existantes. Ils se trouvent dans le tableau ci-dessous. Quelles connexions permettent de relier les villes à moindre coût ?

	G	B	L	U	T	M
G	-	5	8	2	2	11
B		-	7	4	8	12
L			-	6	7	13
U				-	3	12
T					-	10
M						-

Exercice 3.14. — (Matej Stehlik) Un document important, rédigé en anglais, doit être traduit en huit autres langues : allemand, danois, espagnol, français, grec, italien, néerlandais et portugais. Parce qu'il est plus difficile de trouver des traducteurs pour certaines langues que pour d'autres, certaines traductions sont plus chères que d'autres. Les coûts (en euros) sont indiqués dans la table ci-dessous. On veut obtenir une version du document dans chaque langue à un coût total minimum. Modéliser le problème comme un problème d'un arbre couvrant de coût minimum.

de/à	dan.	néd.	ang.	fr.	all.	grec	it.	port.	esp.
dan.	∗	90	100	120	60	160	120	140	120
néd.	90	∗	70	80	50	130	90	120	80
ang.	100	70	∗	50	60	150	110	150	90
fr.	120	80	50	∗	70	120	70	100	60
all.	60	50	60	70	∗	120	80	130	80
grec	160	130	150	120	120	∗	100	170	150
it.	120	90	110	70	80	100	∗	110	70
port.	140	120	150	100	130	170	110	∗	50
esp.	120	80	90	60	80	150	70	50	∗

Exercice 3.15. — (Wojciech Bienia) A l'aide d'une scie à découper les courbes, on doit découper les 10 profils placés sur un morceau rectangulaire 35×25 de contre-plaqué comme l'indique le schéma de la Figure. Le problème consiste à trouver le tracé qui minimise la longueur totale de découpe réellement effectuée. Pour découper un morceau placé à l'intérieur de la planche il faut obligatoirement commencer le déplacement de la scie à partir du bord de la planche, pour des raisons techniques.

Modéliser le problème comme un problème d'un arbre couvrant de coût minimum.