Déformation d'une membrane élastique sous l'effet d'une force extérieure

Plan :

- Hypothèses physiques et modèle mathématique (équation de Poisson)
- Discrétisation (différences finies)
- Résolution numérique (méthode de relaxation SOR)

Déformation d'une membrane élastique sous l'effet d'une force extérieure

Exemple classique :

On s’intéresse aux configurations d’équilibre (régime statique)…

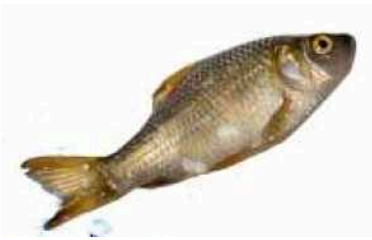
…avec une hypothèse de petites déformations :

Modèle linéaire : équation de Poisson

$$-\Delta u = f \text{ sur }]0,1[\times]0,1[$$

$$u(x,y) = 0 \text{ pour } x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1$$

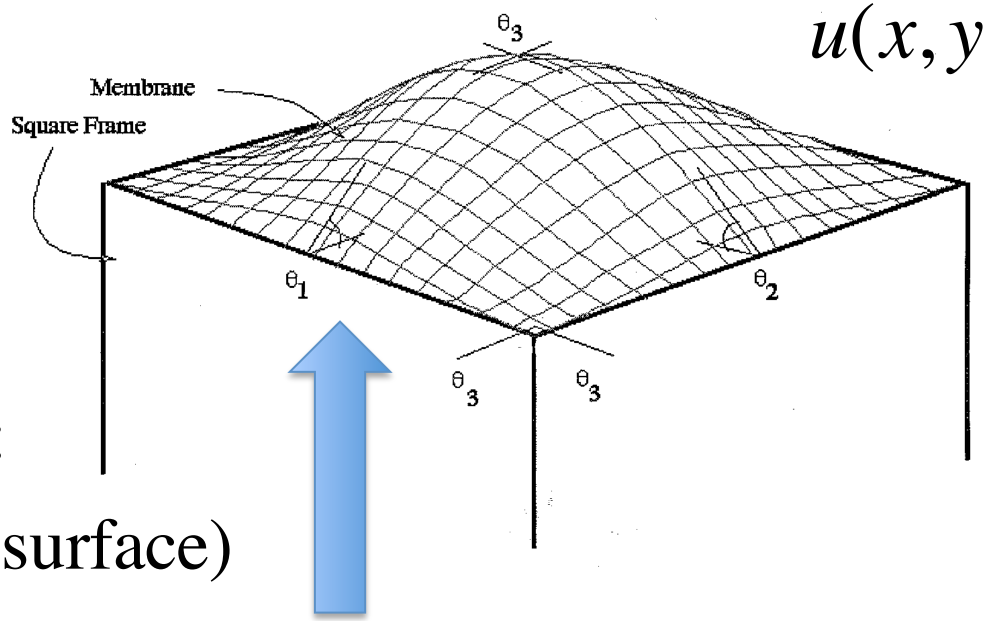
$$(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$$



On m'a appelé ???

déplacement vertical

$u(x,y)$

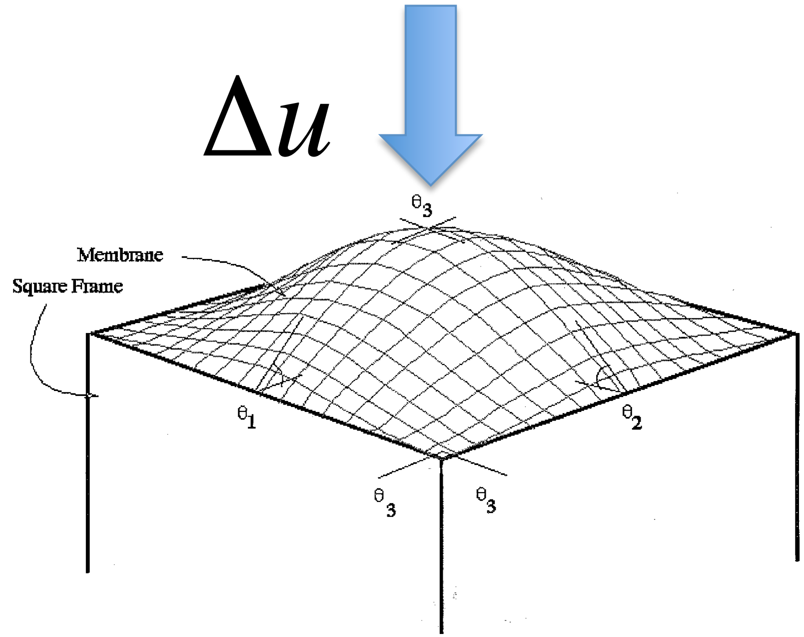


force $f(x,y)$:

(par unité de surface)

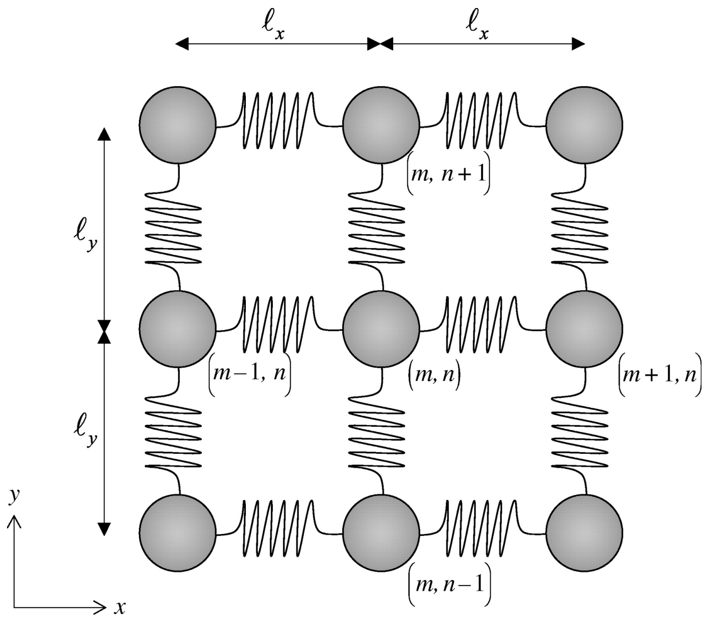
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ décrit la force de rappel de la membrane élastique

Δu



Interprétation "masses-ressorts" (ou différences finies) :

$$k(u[(m+1)l, nl] - u[ml, nl])$$
$$+k(u[(m-1)l, nl] - u[ml, nl])$$
$$+k(u[ml, (n+1)l] - u[ml, nl])$$
$$+k(u[ml, (n-1)l] - u[ml, nl])$$
$$= kl^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(ml, nl) + O(l^4)$$



Discrétisation par différences finies

Maillage :

points de coordonnées (x_i, y_j)

$x_i = i\,h,\ y_j = j\,h,\ h = 1/(N+1)$ et $0 \leq i, j \leq N+1$

N^2 inconnues :

$$v = (u_{1,1}, u_{2,1}, \ldots, u_{N,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, \ldots, u_{N,2}, \ldots, u_{1,N}, u_{2,N}, \ldots, u_{N,N})^t$$

Système linéaire:

$$-\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\right) = f(x_i, y_j), \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

$$u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0, \quad 0 \leq i, j \leq N+1.$$

Ecriture matricielle: $$A\,v = b$$

$$b = h^2\left(f_{1,1}, f_{2,1}, \ldots, f_{N,1}, f_{1,2}, f_{2,2}, \ldots, f_{N,2}, \ldots, f_{1,N}, f_{2,N}, \ldots, f_{N,N}\right)^t$$

$$A = \begin{pmatrix} S & -I & 0 & \cdots & 0 \\ -I & S & -I & 0 & \vdots \\ 0 & -I & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & S & -I \\ 0 & \cdots & 0 & -I & S \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 4 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrice carrée de dimension $N^2 \times N^2$

Matrice carrée de taille N

- structure par blocs de dimension $N \times N$
- matrice creuse
- symétrique définie positive

On résout le système linéaire par la méthode SOR (relaxation)

Méthode de relaxation

Paramètre de relaxation : ω

$$(L+\frac{1}{\omega}D)\,v_{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega}D-U)\,v_k + b$$

(si ω=1 : Gauss-Seidel)

$$A = L + D + U$$

$$L = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij}\ (i>j) & & \ddots \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \ddots & & a_{ij}\ (j>i) \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{N^2N^2})$$

Ici $D = 4\,I$

Théorème :

Pour toute matrice A symétrique définie positive, la méthode de relaxation converge si et seulement si $\omega \in]0,2[$

Le paramètre de relaxation ω optimal minimise le rayon spectral de $(L+\frac{1}{\omega}D)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D-U)$

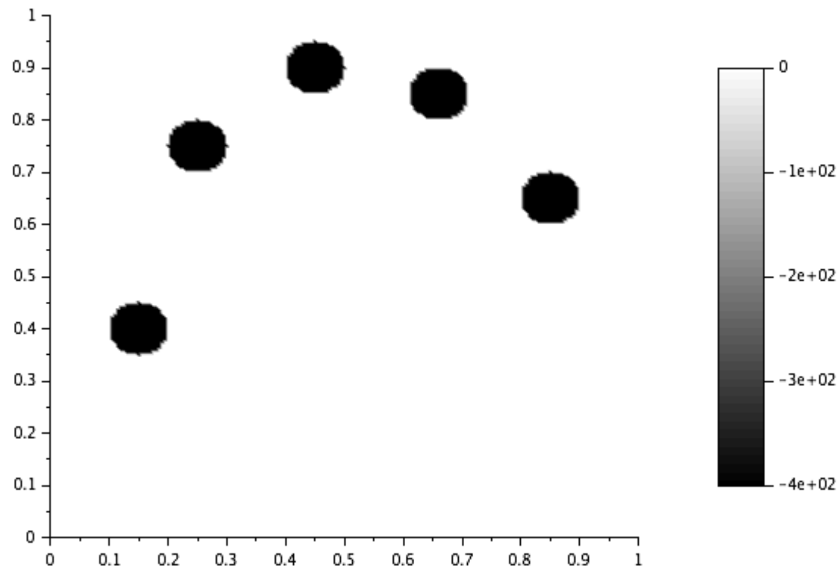
On montre que le paramètre de relaxation optimal vaut ici :

$$\omega = \frac{2}{1+\sin(\pi h)}$$

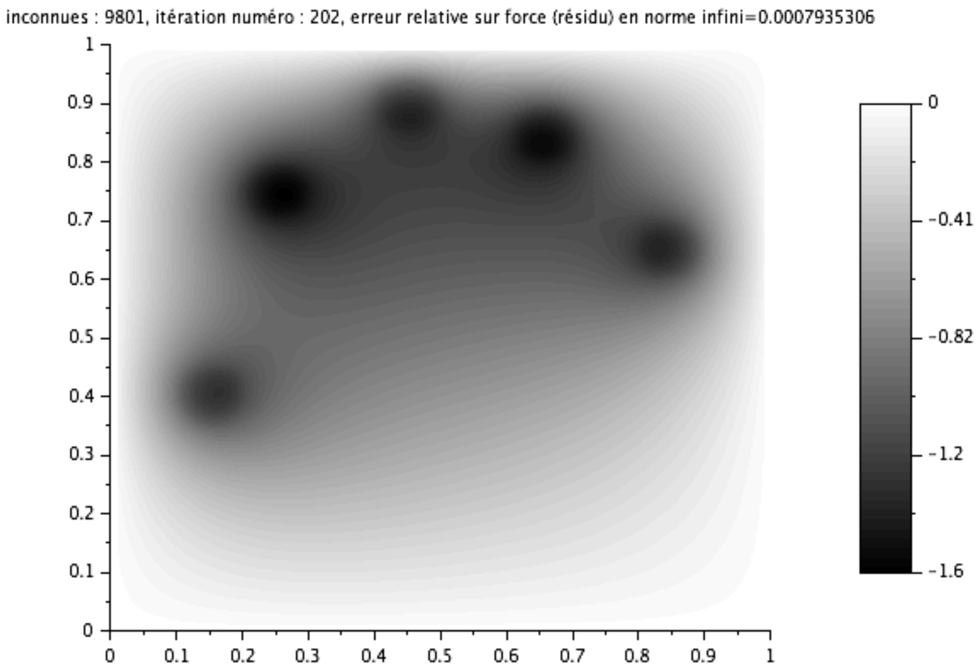
Application :

déformation d'une membrane sous la pression de cinq doigts

Force f(x,y) appliquée ➔ (niveaux de gris)



Déformation u(x,y):



pas $h = 1/100 \;\; (N = 99)$

$N^2 = 9801$ inconnues

Solution pour 202 itérations

Résidu < 0.001

(erreur relative en norme infini)