Ex 1 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sym. déf. pos, tridiagonale.

1) A s.p.d $\Rightarrow$ A inversible et Δ_k inversible, $\forall k$.

↳ $\exists!\ L, U$ tq $A = LU$.

- $A^T = A \Rightarrow A = U^T L^T = \underbrace{(U^T D^{-1})}_{=L} \underbrace{(D L^T)}_{=U}$ avec $D = \mathrm{diag}(U)$ par unicité de LU.

↳ $A = LDL^T$

- A déf. pos $\Rightarrow Sp(A) > 0 \Rightarrow Sp(D) > 0 \Rightarrow u_{ii} > 0, \forall i$.

On peut donc écrire $D = \Delta^2 = \Delta\Delta^T$ avec $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{u_{ii}})$

et on obtient $A = TT^T$ avec $T = L\Delta$.

- A tridiagonale $\Rightarrow$ L bidiagonale (cf TD 4)

D'où $T = L \cdot \mathrm{Diag}(\sqrt{u_{ii}})$ bidiagonale.

2) $A = TT^T \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} t_{ik} t_{jk} = \sum_{k=1}^{j} t_{ik} t_{jk}$ en général

↳ récurrence colonne par colonne. (a_{ii} ; a_{ij}, $i > j$).

Ici : A tridiag, T bidiag.

$$\hookrightarrow \begin{cases} a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} t_{jk}^2 = t_{j,j-1}^2 + t_{jj}^2 & (T \text{ bidiag}) \\ a_{j+1,j} = \sum_{k=1}^{j} t_{j+1,k}\, t_{jk} = t_{j+1,j} \cdot t_{jj} & (T \text{ bidiag}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{jj} = \sqrt{a_{jj} - t_{j,j-1}^2} \\ t_{j+1,j} = \dfrac{a_{j+1,j}}{t_{jj}} \end{cases} ;\ j = 2, \dots, n \quad \text{et} \quad t_{11} = \sqrt{a_{11}},\ t_{21} = \frac{a_{21}}{t_{11}}.$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & 0 \\ t_{21} & 1 & \\ 0 & 2 & \\ & & t_{n,n-1}\ t_{nn} \end{pmatrix}$$

j

On a donc n "$\sqrt{\cdot}$" et $3(n-1)$ "$+ - *$"

(+1 pour t_{21})

Ex 1 s : On va calculer T tq $A = TT^T$ directement.

3) A tridiag $\Rightarrow$ $t_{11} = 1$, $t_{21} = -1$

et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $t_{jj} = \sqrt{2 - t_{j,j-1}^2}$ et $t_{j+1,j} = -\dfrac{1}{t_{jj}}$

$\hookrightarrow$ $t_{jj} = \sqrt{2 - \dfrac{1}{t_{j-1,j-1}^2}}$. On remarque que $t_{jj} = 1$ est point fixe de l'itération, et $t_{11} = 1$.

D'où $t_{jj} = 1$ et $t_{j+1,j} = -1$, $\forall j$ i.e. $T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

De plus, $t_{jj} > 0$, $\forall j$ $\Rightarrow$ A déf. positive.

$\left(\forall x \neq 0,\ x^T A x = x^T T T^T x = (T^T x)^T (T^T x) = \|T^T x\|_2^2 > 0 \right.$

car T inversible).

Ex 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $M = A^T A$.

1) $\forall x \neq 0$, on a $x^T M x = x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2$

A inversible $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ $\Rightarrow$ $x^T M x = \|Ax\|_2^2 > 0$.

D'où M sym. déf. pos.

2) * Calcul de $M = A^T A$: M sym $\Rightarrow$ $m_{ij} = m_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$.

$\hookrightarrow$ $\underbrace{\dfrac{n(n+1)}{2}}_{\text{sym : } m_{ij} \text{ pour } i \geq j} \cdot \underbrace{(2n-1)}_{(n \text{ `}*\text{' et } n-1 \text{ `}+\text{'})} \simeq n^3$ opérations.

* Calcul de $A^T b$: $(A^T b)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_k$, $i = 1, \dots, n$.

$\hookrightarrow$ $\underbrace{n}_{i=1,\dots,n} \cdot \underbrace{(2n-1)}_{n \text{ `}*\text{' et } n-1 \text{ `}+\text{'}} \simeq 2n^2$ opérations.

* Résolution de $Mx = y$ (Cholesky) : $\simeq \frac{1}{3} n^3$ opérations.

$\hookrightarrow$ Coût total $\simeq \frac{4}{3} n^3$ op. $\rightarrow$ 2 fois plus coûteux que LU $\left(\frac{2}{3} n^3\right)$.

Ex 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sym. positive (~~déf~~)

1) $\forall x \neq 0$, $x^T(A + \frac{1}{k}I)x = \underbrace{x^T A x}_{\geq 0} + \frac{1}{k}\|x\|_2^2 \geq \frac{1}{k}\|x\|_2^2 > 0$

↳ $A + \frac{1}{k}I$ sym. déf. pos. → décomposition de Cholesky :

$\exists !\, T_k$ triang. inf avec $(T_k)_{ii} > 0$, $\forall i$ tq. $A + \frac{1}{k}I = T_k T_k^T$.

2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$ est un espace vectoriel de dimension finie

↳ Thm de Bolzano-Weierstrass : Toute suite bornée de $\mathbb{R}^{n\times n}$ admet une sous-suite convergente.

Mq $(T_k)_{k\geq 1}$ est bornée.

Rq : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dim. finie, les normes sont équivalentes.
On choisit donc d'utiliser la norme de Frobenius :

$$\|M\|_F = \sqrt{\mathrm{TR}(M^T M)}.$$

$$\|T_k\|_F = \sqrt{\mathrm{TR}(T_k^T T_k)} = \sqrt{\mathrm{TR}(A + \tfrac{1}{k}I)} = \sqrt{\mathrm{TR}\,A + \tfrac{n}{k}} \leq \sqrt{\mathrm{TR}\,A + n}.$$

$(T_k)_{k\geq 1}$ est donc bornée, et admet une sous-suite

$$(T_{k_p})_{p\geq 1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} T.$$

3) Les normes étant équivalentes, on a en particulier

$$\|T_{k_p} - T\|_{max} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \quad (\text{avec } \|M\|_{max} = \max_{i,j} |m_{ij}|)$$

ie $\forall i, j$, $(T_{k_p})_{ij} \xrightarrow[p\to+\infty]{} T_{ij}$ d'où T triang. inférieure

et $T_{ii} = \lim_{p\to+\infty} \underbrace{(T_{k_p})_{ii}}_{>0} \underline{\underline{\geq 0}}$.

Enfin, $\forall i, j$, $(TT^T)_{ij} = \lim_{p\to+\infty} (T_{k_p} T_{k_p}^T)_{ij} = \lim_{p\to+\infty} (A + \frac{1}{k_p}I)_{ij} = a_{ij}$.

ie $A = TT^T$.

Rq : On a généralisé la déc. de Cholesky au cas semi-défini, en perdant cependant l'unicité, eg.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$. L'approche précédente aurait sélectionné $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.