Examen 1 Session 1 — corrigé

Lundi 8 novembre 2021 - 2h

Exercice 1

1. *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *est Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer son intégrale.*
2. *Montrer que la fonction* $f(x) = \ln(x)$ *est Lebesgue-intégrable sur* $[0,1]$ *et calculer son intégrale.*
3. *Pour quelles valeurs de* α *la fonction* $x \to \frac{1}{x^\alpha}$ *est-elle Lebesgue-intégrable sur* $[1,+\infty[$ *?*
   Calculer son intégrale dans ce cas.
4. *Enoncer le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions* (f_n).
   Application : pour $n \geq 0$ *soit la suite* $f_n(x) = \left(\cos(\frac{1}{x})\right)^n$. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ qui admet des limites finies en $\pm\infty$ donc f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ et
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}dx = [\operatorname{Arctan} x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$
2. Une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$ (ceci a été vu en TD et se fait par une simple intégration par parties) qui admet des limites finies en 0 et 1 car notamment $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. On a donc
$$\int_0^1 dx = [x\ln x - x]_0^1 = -1,$$
3. La fonction $x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ est Lebesgue-intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. On a alors
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.$$
4. <u>Théorème de convergence dominée</u> :
   Soit une suite de fonctions (f_n) Lebesgue-intégrables sur un intervalle I. Supposons que
   — pour presque tout $x \in I$, la suite $f_n(x)$ admet une limite $f(x)$ quand n tend vers l'infini ;
   — il existe une fonction g, Lebesgue-intégrable sur I, telle que pour tout n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in I$.
   Alors f est intégrable sur I et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_I f(x)dx.$$
   <u>Application</u> : On a la limite simple
$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n = 0 \text{ pp. } x \in \mathbb{R}^*;$$

(sauf en les points $x_k = 1/k\pi$, dont l'ensemble est de mesure nulle) et la majoration uniforme pour tout n

$$\left|\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n\right| \leq 1$$

et la fonction constante égale à 1 est Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 0 \; dx = 0.$$

Exercice 2
Déterminer, si elle existe, la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{n}\right)}{x^2}dx.$$

Posons $f_n(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{n}\right)}{x^2}$. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on calcule la limite simple

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{n}\right)}{x^2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Par ailleurs, on la majoration uniforme

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{n}\right)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \equiv g(x)$$

et la fonction g ainsi définie est Lebesgue-intégrable sur $[1,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{n}\right)}{x^2}dx = \int_1^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{n}\right)}{x^2}dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$$

d'après l'exercice 1.3. avec $\alpha = 2$.

Exercice 3

1. *Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,*

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\ln(x)(-1)^n x^{2n}.$$

2. *Montrer que la fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$.*
3. *Déterminer :*

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx.$$

1. On peut calculer la somme de la suite géométrique
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$
On a donc le résultat en multipliant les deux membres par $\ln(x)$.
2. On a la majoration
$$\left|\frac{\ln(x)}{1+x^2}\right| \leq |\ln(x)|$$
et la fonction majorante est Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$ d'après l'exercice 1.2. La fonction $x \to \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est donc également Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$.
3. Soit la somme partielle
$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \ln(x)(-1)^n x^{2n}$$
qui converge pour tout $x \in]0,1]$ vers $\frac{\ln(x)}{1+x^2}$ d'après la question 1. On peut écrire la majoration
$$f_N(x) \leq \sum_{n=0}^{N} |\ln(x)|x^{2n} \leq \frac{|\ln(x)|}{1-x^2}.$$
Cette fonction est intégrable au voisinage de 0 (on peut majorer localement par $2|\ln(x)|$) et admet une limite finie en 1^-. En effet $\ln(x) \sim x-1$ et $1-x^2 \sim 2(1-x)$, donc le rapport tend vers une limite finie. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_N(x)dx = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^1 \ln(x)(-1)^n x^{2n}dx.$$
Or
$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)(-1)^n x^{2n}dx &= \left[\ln(x)(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$
Donc
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 4

Soit $f(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ pour $(x,y) \in [0,1]\times[0,+\infty[$.

1. *Montrer que f est Lebesgue-intégrable sur $[0,1]\times[0,+\infty[$.*
2. *En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}(\sin y)^2 e^{-y}dy$.*

1. On a la majoration $|f(x,y)| \leq e^{-y}$ qui est Lebesgue-intégrable sur la bande $[0,1] \times [0,+\infty[$. En effet, c'est une fonction positive, donc d'après le théorème de Tonnelli

$$\int_{[0,1]\times[0,+\infty[} e^{-y}dxdy = \int_0^1 1dx \int_0^{+\infty} e^{-y}dy = 1 \times 1 = 1.$$

2. On peut donc appliquer le théorème de Fubini, on a d'une part

$$\int_{[0,1]\times[0,+\infty[} f(x,y)dxdy = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)dy\right)dx$$

et en faisant deux intégrations par parties

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)dy &= \left[-e^{-y}\sin(2xy)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}2x\cos(2xy)dy \\ &= 2x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(2xy)dy \\ &= 2x\left[-e^{-y}\cos(2xy)\right]_0^{+\infty} - 2x\int_0^{+\infty} e^{-y}2x\sin(2xy)dy \\ &= 2x - 4x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)dy \\ &= \frac{2x}{1+4x^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{[0,1]\times[0,+\infty[} f(x,y)dxdy = \int_{x=0}^1 \frac{2x}{1+4x^2}dx = \left[\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ln 5.$$

D'autre part

$$\int_{[0,1]\times[0,+\infty[} f(x,y)dxdy = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}\left(\int_{x=0}^1 \sin(2xy)dx\right)dy$$

et

$$\int_{x=0}^1 \sin(2xy)dx = \left[-\frac{1}{2y}\cos(2xy)\right]_0^1 = -\frac{1}{2y}(\cos(2y)-1) = \frac{\sin^2 y}{y}.$$

Ainsi on a également

$$\int_{[0,1]\times[0,+\infty[} f(x,y)dxdy = \int_{y=0}^{+\infty} e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}dy = \frac{1}{4}\ln 5.$$

Exercice 5

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt.$$

1. *Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*
2. *Calculer $F'(x)$ et montrer que F est solution de l'équation différentielle du premier ordre : $y' = -\frac{x}{2}y$*
3. *En déduire F.*

1. Soit $f(x,t) = \cos(xt)e^{-t^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x,t)| \leq e^{-t^2} \equiv g(t)$, et la fonction g ainsi définie est Lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$ (vu en TD). Donc $F(x)$ est bien (dé)finie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue en x pour tout t et est uniformément bornée par g, donc d'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre $F(x)$ est continue.
   On calcule la dérivée partielle $\partial_x f(x,t) = -t\sin(xt)e^{-t^2}$. Cette fonction est continue en x pour tout t et est uniformément bornée par $h(t) = te^{-t^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty]$ (car de primitive $-\frac{1}{2}e^{-t^2}$ qui admet des limites finies en 0 et $+\infty$). D'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, $F(x)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Toujours d'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre
$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)dt = \int_0^{+\infty} -t\sin(xt)e^{-t^2}dt \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-t^2}x\cos(xt)dt \\ &= -\frac{x}{2}F(x). \end{aligned}$$
3. Résolvons l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{2}y$:
$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{x}{2} \\ \ln(y(x)) - \ln(y(0)) &= -\frac{x^2}{4} \\ y(x) &= y(0)\exp\left(-\frac{x^4}{4}\right). \end{aligned}$$
   Ici, on a $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (vu en TD). Donc
$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{x^4}{4}\right).$$

Exercice 6
Soit $f \in L^1(0,1)$, on cherche dans cet exercice à calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)dx.$$
On pose $f_n(x) = n\ln(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2})$.
1. *Rappeler pourquoi on a $|f(x)| < +\infty$ presque partout sur $[0,1]$.*
2. *En déduire la limite simple presque partout de la suite (f_n).*
3. *Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $\ln(1+t) \leq 2\sqrt{t}$.*
4. *En déduire la limite demandée.*

1. La fonction $|f|$ est supposée intégrable $[0,1]$, elle est donc finie presque partout sur $[0,1]$.
2. Là où f est finie (et donc presque partout)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f(x)|^2}{n^2} = 0$$
et la fonction logarithme est continue, donc $f_n(x) \to 0$ pp. $x \in [0,1]$.
3. Première méthode : Posons $h(t) = \ln(1+t) - 2\sqrt{t}$. On a $h(0) = 0$ et pout $t > 0$,
$$h'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}-1-t}{(1+t)\sqrt{t}} = \frac{-(\frac{\sqrt{t}}{2}-1)^2 - \frac{3t}{4}}{(1+t)\sqrt{t}} < 0.$$
Donc $h(t) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
Deuxière méthode : La fonction exponentielle étant strictement croissante, cela revient à montrer que $1+t \leq \exp(2\sqrt{t})$. Développons l'exponentielle en série :
$$\exp(2\sqrt{t}) = 1 + 2\sqrt{t} + 2t + \text{des termes postifs} \geq 1+t.$$
4. On a donc
$$f_n(x) \leq 2n\frac{|f(x)|}{n} = 2|f(x)|$$
qui est intégrable. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) dx = 0.$$

Exercice 7
Calculer
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x dx \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx.$$

Effectuons le changement de variables $y = \sqrt{\sin x}$, qui envoie $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1]$ bijectivement. On a $2ydy = \cos x dx$, ainsi
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x dx = \int_0^1 (1-y)^n 2ydy.$$
D'après le corollaire du théorème de convergence monotone, comme $(1-y)^n 2y \geq 0$, on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (1-y)^n 2ydy = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-y)} 2ydy = 2.$$
Pour la deuxième limite, on a la majoration
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \chi_{[0,n]}(x) \leq g(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,1], \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{sur } [1,+\infty[, \end{cases}$$

et g est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \chi_{[0,n]}(x) = 0 \text{ pp. } x \in [0,+\infty[\text{ (sauf en } x = 0).$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)dx = \int_0^{+\infty} 0\ dx = 0.$$