chamilo, TEIDE
olivier.francois@grenoble-inp.fr

Test ? à faire semaine du 23 en html
Appli pour convertir : RStudio

Probabilités appliquées

$\Omega = \{\text{eventualités}\}$ ensemble fondamental.

Variables aleatoires $X : \Omega \longrightarrow R = \{\text{resultats}\}$
$\omega \longmapsto X(\omega)$ → on ne l'écrira plus

exemple : lancer un dé : $R = \{1,2,3,4,5,6\}$
X = numéro du dé.
évènement : $(X=1) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 1\}$ → sous ensemble de Ω.

évènements : sous-ensemble de Ω formant une "tribu" $\mathcal{A}$

DEF : mesure de probabilité : $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$
$A \longmapsto P(A)$

i) $P(\Omega) = 1$
ii) Soit (A_n) une suite d'evt disjoints $P\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}_{\text{au moins un des evt se réalise}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

exemple : On joue à PIF On note X = rg d'apparition du premier "F"

$$P(X \text{ est pair}) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(X=2k)\Big) \underset{\text{car disjoints}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^k = \frac{1}{3}$$

$$n \geq 1 : P(X=n) = \underbrace{\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}}_{\text{pas app ds les n-1 lancers}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{appar n}^e} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

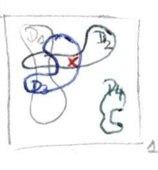
Valeurs moyennes – Espérance

Soit $X \in \mathbb{N}$ ($R = \mathbb{N}$) $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n . P(X=n)$ (eventuellement $+\infty$)

exemple : X = rang moyen d'apparition de F :
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n . \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = 2$$

Propriétés : $X \in \mathbb{N}$ et $Y \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

exercice : 1



$D_1, \dots D_K$ K domaines de $[0,1]^2$
U = point tiré au hasard dans $[0,1]^2$
N : nombre de domaines contenant U. (ici 2)
$\mathbb{E}[N] = ?$

$$N = \sum_{k=1}^{K} N_k \quad \text{où } N_k = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 & \text{si } U \in D_k \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}[N_k] = \sum_{k=1}^{K} P(N_k = 1) = \sum_{k=1}^{K} \underbrace{P(U \in D_k)}_{\text{aire } D_k} =$$

exemple 2 : Repetition d'epreuve dans lesquelles on observe X
Résultats : $x_1, x_2, \dots x_N$ observations.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} . \sum_{n=1}^{\infty} n \, \#\{i \text{ tq } x_i = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n . \underbrace{\frac{\#\{i \text{ tq } x_i = n\}}{N}}_{\text{frequence de } n \;\simeq P(X=n)}$$

Cours n°2 : Probabilités conditionnelles

Rque : evt noté avec lettres début alphabet
va " fin "

Soit C (condition) evt de proba $P(C) > 0$

Pour tt evt A, $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$

Soit X une va à val ds $\mathbb{N}$. La loi conditionnelle de X sachant C : $\forall n \geq 0 : P(X=n|C) = \frac{P(X=n \cap C)}{P(C)}$

Espérance cond de X sachant C : $\mathbb{E}[X|C] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X=n|C)$

Formule des probabilités totales :

Soit X et Y 2 va entières $P(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=k|Y=n)P(Y=n)$

Formule de conditionnement : $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X|Y=n] \cdot P(Y=n)$

Loi géométrique : Dans une suite d'épreuves indépendantes et identiques.
On s'interesse au rang d'apparition d'un evt de proba p.

$P(T=n) = (1-p)^{n-1} p \quad n \geq 1 \quad \mathbb{E}[T] = \frac{1}{p}$

Conditionnement : On repete une épreuve (id, indep) jusqu'à ce qu'une condition C se réalise.

$P_C(A) = P(A|C)$

Independance : A et B sont indep. si $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

Ex :
On lance deux dés numérotés (N_1, N_2) (6 faces)
Il y a 36 config. possibles $P(N_1 = i \cap N_2 = j) = \frac{1}{36}$ $i, j = 1, 6$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(N_1 = i) \cdot P(N_2 = j)$

Exercice 1 : On dit que U est pris au hasard ds $[0,1]$ si $\forall\ 0 \leq t \leq 1 : P(U \leq t) = t$
On lance un dé à 6 faces. Si le résultat est impair on note $N=1$, sinon $N=2$.
On suppose U et N sont indépendantes. $X = NU \in [0,2]$

Valeur médiane de X ? Val. m tq 50% des resultats soient en dessous. $= m$ tq $P(X \leq m) = \frac{1}{2}$

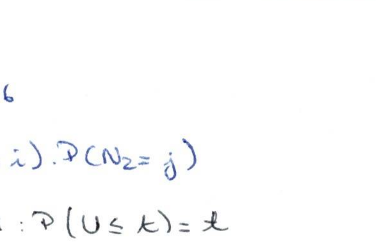
$X = \begin{cases} U \text{ si } N=1 \text{ (Proba 1/2)} \\ 2U \text{ si } N=2 \text{ (Proba 1/2)} \end{cases}$

Soit $m \in [0,2]$: $P(X \leq m) = P(X \leq m | N=1) \cdot P(N=1) + P(X \leq m | N=2) \cdot P(N=2)$
$= P(U \leq m | N=1) \cdot \frac{1}{2} + P(2U \leq m | N=2) \cdot \frac{1}{2}$
$= P(U \leq m) \cdot \frac{1}{2} + P(2U \leq m) \cdot \frac{1}{2}$ car evt indep.
$= P(U \leq m) \cdot \frac{1}{2} + P(U \leq \frac{m}{2}) \cdot \frac{1}{2}$

Soit $m \in [0,1]$: $P(X \leq m) = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} m$

Soit $m \in [1,2]$: $P(X \leq m) = 1 + \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $P(U \leq m)$ où $m \geq 1$ vaut 1.

$\frac{3}{4} m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$



Valeur moyenne de X ? $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{2} \mathbb{E}[X|N=n] \cdot P(N=n)$
$= \sum_{n=1}^{2} \mathbb{E}[nU | N=n] \cdot P(N=n)$
$= \sum_{n=1}^{2} \mathbb{E}[U|N=n] \cdot n P(N=n)$ par linéarité de l'esp.
& evt ind.
$= \sum_{n=1}^{2} \mathbb{E}[U] \cdot n P(N=n)$
$= \mathbb{E}[U] \cdot \sum_{n=1}^{2} n P(N=n)$
$= \mathbb{E}[U] \cdot \mathbb{E}[N]$

$\mathbb{E}[U] = \frac{1}{2}$ (on prend un nbr au hasard ds $[0,1]$)

1 ou 2 = 1,5

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

__Loi géométrique__ : $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p}$ (le tps est l'inverse de la fréq.)

$\mathbb{E}[T] = \underbrace{\mathbb{E}[T \mid T=1]}_{1} \cdot \underbrace{P[T=1]}_{} + \mathbb{E}[T \mid T>1] \cdot \underbrace{P(T>1)}_{}$ → car Σ des probas vaut 1 et $P(T=1)=p$.

$= \quad 1 \times p + (1 + \underbrace{\mathbb{E}[T]}_{}) \quad (1-p)$ → on peut décaler les épreuves car elles st indep.

$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = \frac{1}{p}$

$p + 1 - p + \mathbb{E}[T] - p \cdot \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T]$

__Exercice 2__ : On dispose d'un dé à 6 faces et un jeu nécessite le lancer d'un dé à 5 faces. Comment faire ? Combien de lancers ?

__Loi de Poisson__ : ("comptage")

On dit que $X \in \mathbb{N}$ suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda > 0$ si

$\forall n \in \mathbb{N} : P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ $(\mathbb{E}[X] = \lambda)$ X = loi du nbr d'occurence d'un evt donné survenant au hasard ds une unité de temps.

__Processus de Poisson__ : Soit $(N_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{N}$ tq : (Nombre d'occurences)

i) $N_0 = 0$

ii) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda . h + o(h)$ $\qquad P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$

1 evt ds un intervalle de temps h

Pas possible que 2 evt soient synchronisés : on peut tjrs découper le tps en + petit intervalle pour voir que c'est pas en m̄ tps.

où $o(h)$ est une f^n tq $o(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

iii) accroissement indep : $\forall t_1 < t_2 < . < t_n$

$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ independants

$\Rightarrow P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$

__Propriétés__ :

* __Composition__ : Soit (N_t^1) et (N_t^2) 2 processus de Poisson independants de taux resp. λ^1 et λ^2, alors $(N_t^1 + N_t^2)$ est un processus de Poisson de param. $\lambda^1 + \lambda^2$

* __Temps d'attente de la 1ère occurence__ : $T_1 \in \mathbb{R}_+$ $\qquad (\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\lambda})$

$\forall t \geq 0 : P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$

* __Loi de T_1 sachant que $N_1 = 1$__ : $\forall t \in [0,1] : P(T_1 \leq t \mid N_1 = 1) = t$

<u>Loi binomiale</u> : On considère n épreuves ind. et identiques et on s'intéresse au nbr X_n d'occurences d'un evt de proba p. $0<p<1$.

$\forall\, 0 \le k \le n : P(X_n = k) = \binom{n}{k} . p^k (1-p)^{n-k}$

<u>Démonstration</u> : Par récurrence : $X_n = Y_1 + \dots Y_n$ où $Y_k = \begin{cases} 1 \text{ si} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Rqe : $\mathbb{E}[X_n] = np \; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i]$

PT = proba totales

$\forall\, 0<k<n : P(X_n = k) = P(X_{n-1} + Y_n = k)$

$\overset{PT}{=} P(X_{n-1} + \cancel{Y_n} = k \mid Y_n = 0)(1-p) + P(\underbrace{X_{n-1} + \overset{1}{\cancel{Y_n}} = k}_{X_{n-1} = k-1} \mid Y_n = 1) . p$

$= P(X_{n-1} = k)(1-p) + P(X_{n-1} = k-1) p.$

$\overset{HR}{=} \binom{n-1}{k} p^k + (1-p)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \Big[\underbrace{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}_{\text{pascal}} \Big] p^k (1-p)^{n-k}$

$= \binom{n}{k} . p^k (1-p)^{n-k}$

<u>Lien avec le processus de Poisson</u> :

$P(\text{occ dans } \Delta t) = \lambda \Delta t = \frac{\lambda}{n}$ $\quad N_b$ = nb d'occ. dans $[0,1]$ suit $Bin(n, p = \frac{\lambda}{n})$

$\Rightarrow P(N_n = 0) = (1-p)^n = (1 - \frac{\lambda}{n})^n \sim e^{-\lambda}$

$P(N_n = 1) = np . (1-p)^{n-1} = n\frac{\lambda}{n} . (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-1} = \lambda (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-1} = \lambda . e^{-\lambda}$

<u>Demo du processus de Poisson</u> : (N_t)

<u>Def</u> : $p_0(t) = p(N_t = 0) \quad \forall t \ge 0$

i) $p_0(0) = 1$

ii) $P(N_{t+h} = 0) = P(N_t = 0 \cap N_{t+h} - N_t = 0)$

$\overset{(iii)}{=} P(N_t = 0) . P(N_{t+h} - N_t = 0)$

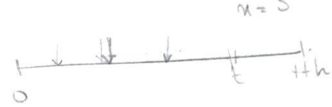
$= P(N_t = 0) . (1 - \lambda h) + o(h)$

$\Rightarrow p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h) + o(h)$

$\Rightarrow \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = - \frac{\lambda h\, p_0(t)}{h} + \frac{o(h)}{h}$ (Equa diff.)

$\underset{h \to 0}{\Rightarrow} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \Rightarrow p_0(t) = e^{-\lambda t}$ on prend $C = 0$ car $p_0(0) = 1$.

<u>Def</u> : $p_n(t) = P(N_t = n) \quad \forall t \ge 0$



$P(N_{t+h} = n) = P(N_t = n \cap N_{t+h} - N_t = 0) + P(N_t = n-1 \cap N_{t+h} - N_t = 1) + o(h)$

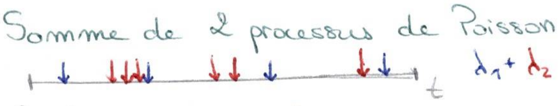
$\underset{\text{indépc) + ii)}}{\Rightarrow} \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_n(t) + \frac{o(h)}{h}$

$\underset{h \to 0}{\Rightarrow} p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$

$\underset{\text{par récurrence}}{\Rightarrow} p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow$ Loi de Poisson de param. λt.

Somme de 2 processus de Poisson ind



On considère $(N_t^1 + N_t^2)$

i) $N_0^1 + N_0^2 = 0$

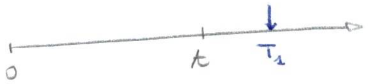
iii) acc. indep. par construct

ii) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = P(N_{t+h}^1 + N_{t+h}^2 - (N_t^1 + N_t^2) = 1) = P(N_{t+h}^1 - N_t^1 + N_{t+h}^2 - N_t^2 = 1) = P(N_{t+h}^1 - N_t^1 = 1) + P(N_{t+h}^2 - N_t^2 = 1) + o(h)$

$= \lambda^1 h + \lambda^2 h + o(h)$

PA

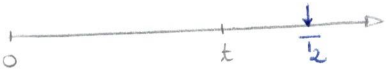
Temps d'attente de l'occ n°1 :



$\forall t \geq 0 : P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$

c'est en dehors de t donc entre 0 et t il ne s'est rien passé.

Temps d'attente de la 2nde occ.



$\forall t \geq 0 : P(T_2 > t) = P(N_t = 0 \cup N_t = 1)$
$= e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$

(loi gamma $(2, \lambda)$)

T_1 sachant $N_1 = 1$: $\forall 0 \leq t \leq 1 : P(T_1 \leq t \mid N_1 = 1) = \dfrac{P(N_t = 1 \cap N_{1-t} = 0)}{P(N_1 = 1)}$

$= \dfrac{\cancel{\lambda} t e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda(1-t)}}{\cancel{\lambda \cdot e^{-\lambda}}}$

$= t$

Espérance mathématique

Variable de Bernoulli : Soit A un evt, tq $P(A) \geq 0$ $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 \text{ si } A \text{ se realise} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Dans ce cas $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = P(A)$

Variable etagée : Soit $A_1, \dots A_n$ n evt et $\alpha_1, \dots \alpha_n \geq 0$

$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_i$

Def : $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i)$

Espérance d'une var. positive Soit $X \geq 0$. Soit (X_n) une suite de variables étagées tq $X_n \to X$ $(X_n \leq X_{n+1})$

Alors $\mathbb{E}[X] = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X_n]$ (peut être $+\infty$)

Espérance de $X \in \mathbb{R}$: On suppose que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et on considère $X_+ = \max(0, x)$
$X_- = -\min(0, x)$

Alors $X = X_+ - X_-$ $\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-]$

Convergence monotone :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ~~une suite~~ tq $X_n \geq 0$ et $X_{n+1} \geq X_n$ alors $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n \to \infty} X_n]$

"Fubini"

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(X_t)_{t \geq 0}$ (param "t") $X_n \geq 0$ et $X_t \geq 0$. $\mathbb{E}[\sum_n X_n] = \sum_n \mathbb{E}[X_n]$

. $\mathbb{E}[\int_0^\infty X_t \, dt] = \int_0^\infty \mathbb{E}[X_t] dt$

Propriété 1 : linéarité de l'espérance.

Soit $a, b \geq 0$ et X $Y \geq 0$ alors $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.

Preuve : (idée) $X_n \uparrow X$, $Y_n \uparrow Y$ (etagées) $\Rightarrow \underbrace{aX_n + bY_n}_{\text{etagées}} \uparrow aX + bY$

$\lim \mathbb{E}[aX_n + bY_n] = a\mathbb{E}[X_n] + b\mathbb{E}[Y_n] = a\mathbb{E}[\lim X_n] + b\mathbb{E}[\lim Y_n] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[\lim aX_n + bY_n] = \mathbb{E}[aX + bY]$

Exemple 1 (var. étagée)

Soit $\{x_1, \dots x_n\}$ n scalaires ≥ 0 et $X \in \{x_1, \dots x_n\}$

$$X = \begin{cases} x_1 \text{ si } (X = x_1) \text{ se réalise} \\ \vdots \\ x_n \text{ si } (X = x_n) \text{ se réalise} \end{cases} \qquad X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{(X = x_i)}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple 2 : Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

$X \in \{0, 1, \dots n\}$ $X = \sum_{i=1}^{n} i . \mathbb{1}_{(X=i)}$

autre écriture : A_i = "succès à l'épreuve i" $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$

Par def : $\mathbb{E}[X] = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}$

$= n \times p$

Exemple 3 : Soit $N \in \mathbb{N}$, démontrer que : 1) $\mathbb{E}[N] = \sum_{n=1}^{\infty} n . \mathbb{P}(N = n)$

2) $\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > n)$

1) N_n var. étagées tq $N_n \uparrow N$

$$N_n = \sum_{i=0}^{n} i . \mathbb{1}_{(N=i)} \uparrow \sum_{i=0}^{\infty} i . \mathbb{1}_{(N=i)} = N$$

2) N'_n var étagées tq $N'_n \uparrow N$

$$N = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(i<N)}}_{\text{un entier est le nbr d'entier qui le précède (ex: 3 il y a 0,1,2 → 3 entiers)}} \Rightarrow \mathbb{E}$$

Exercice 2 :

1) Loi de Poisson de param. $\lambda > 0$. Mq $n \mathbb{P}(X = n) = \lambda . \mathbb{P}(X = n-1)$. En déduire $\mathbb{E}[X]$

2) Loi gé de ~~param.~~ proba p. Mq $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$

1) Soit $n \geq 0$. $\mathbb{P}(X = n) = n . \frac{\lambda^n}{n!} . e^{-\lambda} = \lambda . \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda . P(X = n-1)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \lambda . \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n-1)$$

2) $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$

Exercice 3 : Soit $X \geq 0$

Mq $\mathbb{E}[X] = \underbrace{\int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t) dt}_{f^{n} \text{ de survie}}$

Preuve : $X = \underbrace{\int_0^{X} dt}_{\text{un réel est la distance qui le sépare de 0}} = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{(t<X)} dt$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \mathbb{1}(t<X) dt\right]$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}(t<X)] dt$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X>t) dt$$

App : T = tps de 1e occurence d'un evt de freq $\lambda > 0$ ds le processus de Poisson

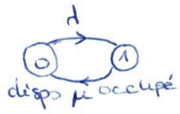
$\forall t \geq 0$: $\mathbb{P}(T > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

PA.

Rqe : $T = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{(N_t = 0)}\, dt$

Exercice 4 :

Sys à 2 états : 

$X_t = \{0, 1\}$

$P(X_{t+h} = 1 \mid X_t = 0) = \lambda h + o(h)$

$P(X_{t+h} = 0 \mid X_t = 1) = \mu . h + o(h)$

Disponibilité au temps t : (tps moyen de l'état 0) : $D(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{(X_s = 0)}\, ds\right]$

Fonctions de répartition.

Def : La loi d'une v.a. réelle est caracterisée par la f^n de répartition :

$$\forall t \in \mathbb{R} : F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \overset{def}{=} 1 - S(t)$$

Rqe : . $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ et la f^n F est ↗

. $\forall a < b$: $\mathbb{P}(X \in]a, b]) = F(b) - F(a)$

Def : La loi d'une variable Y admet $f(x)$ p. densité si :

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

iii) $\forall t \in \mathbb{R} : F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$

Rqe : Ds ce cas, F est continue.

Th. de transfert : Soit $\varphi(x) \geq 0$ où φ est intégrable, alors $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx$.

Loi exponentielle : $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \lambda . e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Loi normale : $\mathcal{N}(0, 1)$ (loi de Gauss)

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$ $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1$

<u>Interpretation de la densité</u> : $\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \in]x, x+dx]) = F(x+dx) - F(x)$

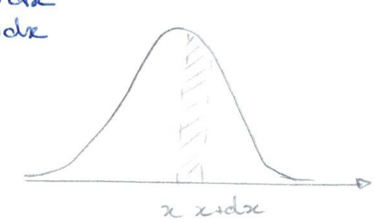
et s'il existe une densité $\simeq F'(x)dx$

$\approx f(x)dx$

Rqe : on utilise les dx car, sinon,

$$\mathbb{P}(X = x) = \int_x^x f(s)\, ds = 0$$

Sur un univers continu, l'evt $(X = x)$ est négligeable



Exercice : Soit U une va de loi uniforme sur $[0, 1]$

$\forall x \in \mathbb{R} : f_U(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ et $X = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ se realise} \\ U & \text{sinon} \end{cases}$ (?)

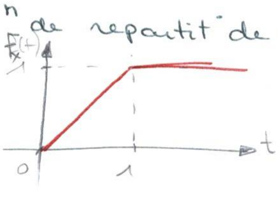
A est indep. du tirage de U.

Q : 1) F^n de repartit° de la loi de X.

2) $\mathbb{E}(X)$?

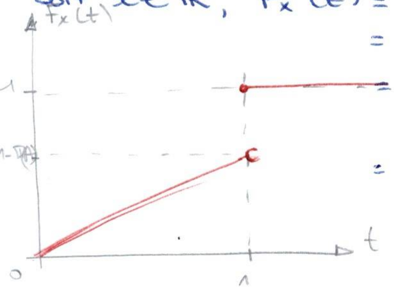
3) densité.

1) F^n de repartit° de U : $\forall t \in \mathbb{R} : F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t dx = t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$



F^n de répartit° de X : On va utiliser la formule des probas totales.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t)$



$$= \mathbb{P}_A(X \le t).\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\bar{A}}(X \le t).\mathbb{P}(\bar{A})$$ $\rhd$ car si A est réalisée, $X = 1$

$$= \mathbb{P}_A(1 \le t)\,\mathbb{P}_A + \mathbb{P}(\ \le t).$$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t.(1-\mathbb{P}(A)) & t \in]0,1[\\ \mathbb{P}(A)+1-\mathbb{P}(A) = 1 & t \ge 1. \end{cases}$$

2). Exemple de calcul <u>faux</u>

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1-\mathbb{P}(A) & 0<x<1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x.f(x)\,dx = \frac{1-\mathbb{P}(A)}{2}$$

FAUX car F_X n'est pas $\mathcal{C}^0$ partout et dérivable p.p.

- Exemple de calcul <u>juste</u>

$$E(X) = \mathbb{E}(X\,|\,A).\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X\,|\,\bar{A}).\mathbb{P}(\bar{A})$$
$$= \mathbb{E}(1\,|\,A).\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(U).\mathbb{P}(\bar{A})$$
$$= \int_{\mathbb{R}} u.\mathbb{1}_{[0;1]}(u)\,du = \int_0^1 u\,du = \frac{1}{2}$$
$$= \mathbb{P}(A) + \frac{1-\mathbb{P}(A)}{2} = \frac{\mathbb{P}(A)+1}{2}$$

3) Il n'y a pas de f^n densité car F_X n'est pas $\mathcal{C}^0$.

<u>Exo</u>: Loi exponentielle.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad E(X^2) = ?$$

<u>Solut°</u>: $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \lambda.x.e^{-\lambda x}\,dx$ ou aussi $= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\,dx$

F^n de repart°: $\mathbb{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ \int_0^t \lambda.e^{-\lambda x}\,dx = 1-e^{-\lambda t} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx$ (th. de transfert)

ou bien $= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X^2 > x)\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > \sqrt{x})\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sqrt{x}}\,dx$$

on pose $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2y}\,dx$

$$= \frac{2}{\lambda}.\int_0^{+\infty} \lambda.y.e^{-\lambda y}\,dy$$

$$= \frac{2}{\lambda}\,\mathbb{E}[X]$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

Variance & co-variance

On suppose que les v.a. considérées sont de carrés intégrable (ie admette une var.)

Def : Soit $X \in \mathbb{R}$,

$$Var(X) = \mathbb{E}[\underbrace{(X - \mathbb{E}(X))^2}_{\text{ecart quadratique}}]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Def : ~~S~~ $X, Y \in \mathbb{R}$,

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Rqe : $cov(X,X) = Var(X)$
$cov(X,Y) = cov(Y,X)$

Indépendance : Si X et Y sont indep alors $cov(X,Y) = 0$

Inégalité de Markov : Soit $X > 0$, $t > 0$, $\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{t^2}$

Inégalité de Chebychev : Soit $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}$

Loi des grands nombres : Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ une suite de v.a. indep, de m̂ loi ($Var(X) < \infty$)

i) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i / n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

ii) Faible : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mathbb{E}[X_i]\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

iii) Forte : $\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[X_i]\right) = 1$.

Exemple 1 : $X = \mathbb{1}_A \in \{0,1\}$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ $\quad \Rightarrow \quad var(X) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$

$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$

Exemple 2 : Loi bin (n, p), N = nb de succès lors de n epreuves indep.

$X = X_1 + X_2 + \dots X_n$ où $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ $\quad A_i$ = "succès lors de l'epreuve i"

or $var(X_1 + X_2) = cov(X_1 + X_2, X_1 + X_2)$
$= var(X_1) + var(X_2) + 2\,cov(X_1, X_2)$

Par récurrence : $var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$
$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i)) = np(1-p)$

$$Var\Big(\underbrace{\frac{N}{n}}_{\text{freq. de succès}}\Big) = \frac{1}{n^2} \cdot var(N)$$
$$= \frac{\cancel{n} \cdot p(1-p)}{n^{\cancel{2}}}$$

$\mathbb{E}[\frac{N}{n}] = \frac{np}{n} = p$

Interprétat°n "statistique" de la covariance :

$$\underbrace{Y}_{\text{poids du chat}} = \beta \underbrace{X}_{\text{qté de croquettes}} + \overbrace{\varepsilon}^{\text{bruit de moy nulle, de var } \sigma^2 \text{ (indep. de X)}}$$

β = effet de X sur Y.

On normalise : $Y \to Y/\sqrt{V(Y)} = Y'$
$X \to X/\sqrt{V(X)} = X'$

$\Rightarrow Y' = \beta' X' + \varepsilon'$ (on note qd m̂ $Y = \beta X + \varepsilon$)

$cov(X,Y) = cov(X, \beta X + \varepsilon)$
$= \beta \cdot cov(X,X) + \overset{0}{cov(X,\varepsilon)}$ 0 car X et ε indep.
$= \beta\, cov(X,X)$ normalisat°
$= \beta\, var(X)$

$\Rightarrow cov(X,Y) = \beta$

Si les variables ne sont pas normalisées, $\beta = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}$

Démo, inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X>t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X>t)}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(\frac{X^2}{t^2}>1)}]$$

$$\leq \mathbb{E}[\frac{X^2}{t^2}.\mathbb{1}_{(\frac{X^2}{t^2}>1)}]$$

$$\leq \mathbb{E}[\frac{X^2}{t^2}] = \frac{1}{t^2}.\mathbb{E}[X^2]$$

Exemple 2 :

Def : On dit que X suit la loi normale $N(m,\sigma^2)$ si $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$

Autrement dit, $X = m + \sigma Z$

Rqe : $\mathbb{E}[Z] = 0$, $\mathbb{E}[Z^2] = \mathrm{var}(Z) = 1$.

Conséquence : $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[m+\sigma Z] = m$.

$V(X) = V(m+\sigma Z) = \sigma^2$

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(Z < \frac{t-m}{\sigma}) = F_Z(\frac{t-m}{\sigma})$

~~Soit~~ $\Rightarrow p_X(x) = \frac{1}{\sigma}.p_Z(\frac{x-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 :

Def : Entropie de p_X : $h(p_X) = -\int \ln p_X(x).p_X(x)\,dx$

$$= -\mathbb{E}[\ln p_X(X)]$$

(où $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$)

$$-\ln(p_X(x)) = \frac{1}{2}.\ln 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2}\frac{(x-m^2)}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow h(p_X(x)) = \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}[(X-m)^2]}{\sigma^2} \quad = \mathrm{var}(X) = \sigma^2$$

$$= \frac{1}{2}(1+\ln(2\pi\sigma^2))$$

Théorème : Soit $q(x)$ une densité de proba sur $\mathbb{R}$, de var σ^2. $h(q) \leq \underbrace{\frac{1}{2}(1+\ln(2\pi\sigma^2))}_{h(N(m,\sigma^2))}$

Preuve : On admet que : . Soit $q(x)$ une densité d'esp. m, de var. σ^2

$$d_{KL}(q\|p) = \mathbb{E}[\log\frac{q(X)}{p(X)}] \text{ où } X \sim q$$

$$\geq 0$$

$$d_{KL}(q\|\underbrace{N(m,\sigma^2)}_{p}) = -h(q) + \mathbb{E}[-\ln p(X)] = -h(q) + \frac{1}{2}(1+\ln(2\pi\sigma^2)) \geq 0$$

Méthodes de Monte-Carlo

Objectif : Calculer une $\int$ de la forme $I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\,dx$ où $f(x)$ est une densité de proba. pour la va X

Énoncé 1 : Soit X_1, X_2, une suite de v.a. indep de m̂ loi de densité $f(x)$. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) f(x)\,dx < \infty$. Nous avons $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$ (LGN)

$Var(Z_n) = \frac{1}{n} Var(\varphi(X_1)) = \frac{1}{n}\left(E[\varphi^2(X_1)] - I^2\right)$

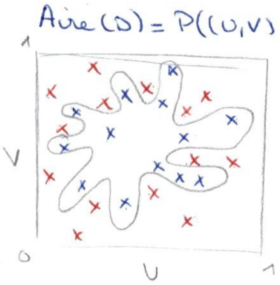
Énoncé 2 : Soit Y_1, Y_2 une suite de v.a indep de m̂ loi, de densité $g(x)$, de même support que $f(x)$.
On suppose que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi^2(y)}{g(y)} f(y)\,dy < \infty$. Nous avons $Z_n' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(Y_i)}{g(Y_i)} \cdot f(Y_i)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$ (LGN)

$Var(Z_n') = \frac{1}{n}\left(E\left[\frac{\varphi^2(Y_1)}{g(Y_1)} \cdot f(Y_1)\right] - I^2\right)$

Meth. de Monte-Carlo.

$Aire(D) = P((U,V) \in D) \underset{mc}{\approx} \frac{\#\{(u_i, v_i) \in D\}}{n_R + n_B = n}$ ← nbr de croix ds D

$= \frac{13}{27}$



Pourquoi ça marche ?

Énoncé 1 : $Z_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)$

$E[Z_n] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(\varphi(X_i))$

$= \frac{n}{n} \cdot E\varphi(X_1) = I$

Énoncé 2 : $E[Z_n'] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{\varphi(Y_i)}{g(Y_i)} \cdot f(Y_i)\right]$

$= E\left[\frac{\varphi(Y_1)}{g(Y_1)} \cdot f(Y_1)\right]$

$\overset{\text{transfert}}{=} \int_{D_g} \frac{\varphi(y)}{\cancel{g(y)}} \cdot f(y) \cdot \underbrace{\cancel{g(y)}}_{\text{densité de } y}\,dy = I$

$E\left[\frac{\varphi^2(Y_i)}{g^2(Y_i)} \cdot f^2(Y_i)\right] = \int_{D_g} \frac{\varphi^2(y)}{g^{\cancel{2}}(y)} f^2(y) \cdot \cancel{g(y)}\,dy$

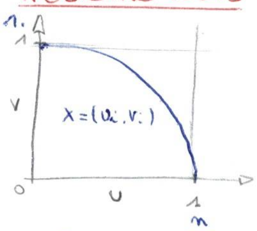
$= \int \left[\frac{\varphi^2(x)}{g(x)} f(x)\right] f(x)\,dx$

$= E\left[\frac{\varphi^2(X_1)}{g(X_1)} \cdot f(X_1)\right]$

Problème 2018

$I = \frac{\pi}{4}$

1.



$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i^2 + V_i^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p = \underbrace{P(U_i^2 + V_i^2 \leq 1)}_{= \pi/4})$

2. $Z_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\qquad n Z_n$ = nb de succès de $(U_i^2 + V_i^2 \leq 1)$ $\hookrightarrow B(n, p = \frac{\pi}{4})$

- $E[nZ_n] = n\frac{\pi}{4} \Rightarrow E[Z_n] = \frac{\pi}{4}$
- $Var(nZ_n) = n\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad Var(Z_n) = \frac{1}{16n} \pi(4-\pi) = \frac{1}{16n}(2{,}70)$

5. $I = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$

$\underbrace{P(U_1^2 + V_1^2 \leq 1)}_{\text{"aire D" } \pi/4} = \underbrace{E\left[\sqrt{1-U_1^2}\right]}_{I \text{ transfert}}$

$P(U^2 + V^2 \leq 1) = P(V^2 \leq 1 - U^2)$ $\qquad$ U et V indep de loi $\mathcal{U}(0,1)$

$= P(V \leq \sqrt{1-U^2})$

$= \int_0^1 P(\sqrt{1-U^2} \geq v \mid V = v) \cdot f_V(v)\,dv$

$P(U^2+V^2\leq 1) = \int_0^1 \underbrace{P(\sqrt{1-U^2} > v)}_{f^n \text{ de survie}} dv$ on peut la condit° car indep.

$\overset{\text{cours}}{=} \mathbb{E}[\sqrt{1-u^2}]$

$\overset{\text{transfert}}{=} \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du = I$

7. $Z_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1-U_i^2}$

$\mathbb{E}[Z_n^{(2)}] = I = \frac{\pi}{4}$

$Var(Z_n^{(2)}) = \frac{1}{n} . Var(\sqrt{1-U^2})$

$Var(\sqrt{1-U^2}) = \mathbb{E}[1-U^2] - (\mathbb{E}[\sqrt{1-U^2}])^2$

$= 1 - \underbrace{\mathbb{E}[U^2]}_{2/3} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{16}\left(\frac{32}{3} - \pi^2\right)$

$\mathbb{E}[U^2] \overset{\text{transfert}}{=} \int_0^1 u^2 \underbrace{f_U(u)}_{1} du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$

$Var(Z_n^{(2)}) = \frac{1}{16n}\left(\frac{32}{3} - \pi^2\right) = \frac{1}{16n}.(0{,}8)$

$I = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du$

$= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{c.\sqrt{1-u}} . c.\sqrt{1-u}\, du$

$= \frac{1}{c} . \int_0^1 \sqrt{1+w}\,.g(w) dw$, $g(w) = c.\sqrt{1-w}$ est une densité sur $(0,1)$ si $c = \left(\int_0^1 \sqrt{1-w}\,dw\right)^{-1}$

$= \left(\int_0^1 \sqrt{w}\,dw\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

$I = \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{1+w}\, g(w)\, dw$.

$G(t) = \int_0^t g(w) dw$, $t \in (0,1)$

$= 1 - (1-t)^{3/2}$

$W = 1 - U^{2/3} \in (0,1)$

$P(W \leq t) = \mathbb{P}(U^{2/3} \geq 1-t) = 1 - (1-t)^{3/2} = G(t)$

8\.
$Z_n^{(3)} = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} \sqrt{2 - U_i^{2/3}} \longrightarrow I$

$I = \frac{2}{3} . \int_0^1 \sqrt{1+w}\, g(w) dw$

$Var(Z_n^{(3)}) = \frac{1}{n} . Var\left(\frac{2}{3}\sqrt{2-U^{2/3}}\right)$

$= \frac{1}{16n}\left(16 . \mathbb{E}\left[\frac{4}{9}(2-U^{2/3})\right] - \pi^2\right)$

$\frac{48}{9}(2 - \underbrace{\mathbb{E}(U^{2/3})}_{3/5})$

$Var(Z_n^{(3)}) = \frac{1}{16n}\left(\frac{448}{45} - \pi^2\right) = \frac{1}{16n} . (0{,}09)$

facteur 5 de précision !

Ch 8 : Couples de variables aléatoires

Soit (X,Y) un couple de var

Def : Soit $p(x,y)$ une f^n positive tq $\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)\,dx\,dy = 1$. On dit que la loi de (X,Y) admet $p(x,y)$ pour densité ssi

$$\forall B \subset \mathbb{R}^2 : \mathbb{P}((X,Y) \in B) = \iint_B p(x,y)\,dx\,dy$$

Def : La loi (marginale) de la v.a. X admet p. densité :

$$\forall x \in \mathbb{R} : p_X(x) = \int p(x,y)\,dy$$

Def : La loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ admet p. densité : $\forall y \in \mathbb{R} : p_Y(y \mid X=x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$ (si $p_X(x) > 0$)

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y \mid X=x)$$

Propriété : X et Y sont indep ssi $p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

Formule de transfert : Soit $\varphi(x,y) \geq 0$ ou intégrable : $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) \cdot p(x,y)\,dx\,dy$.

Cas particulier : Si X et Y st indep. $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ (cov = 0)

Exercice 1 : Problème des rencontres

1) u_1 et $u_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ indep. $\mathbb{P}(|u_1 - u_2| \leq t)$? où $t \in (0,1]$

2) $\mathbb{E}[|u_1 - u_2|]$?

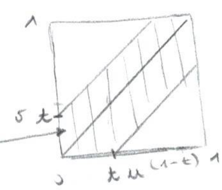
1) $p(|u_1 - u_2| \leq t) = p((u_1, u_2) \in C_t)$ $\qquad C_t = \{(u,v) \in (0,1]^2 . |u - v| \leq t\}$

$$= \iint_{C_t (u_1,u_2)} p(u_1, v)\,du\,dv$$

$$= \iint_{C_t} p_{u_1}(u) \cdot p_{u_2}(v)\,du\,dv$$

$$= \iint_{C_t} du\,dv = \text{Aire}(C_t)$$

$$= 1 - (1-t)^2$$



2) $\mathbb{E}[|u_1 - u_2|] = \int_0^1 p(|u_1 - u_2| \geq t)\,dt$

$$= \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 t^2\,dt$$

Exercice 2 : Soit U, V 2 v.a. indep de loi $\mathcal{U}(0,1)$. Soit $Y = U \cdot V$

1) Densité de Y ? $\qquad$ Rqe : pas d'ordre p. les questions.

Indication : $X = U$, $Y = UV$ $\quad p(x,y)$?

2) $E[XY]$?

3) $\text{cov}(X,Y)$?

$P(X,Y) = p_{X=U}(x) \cdot p_{Y=UV}(y = UV \mid X=x) =$

1) $p_X(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ $\qquad$ U suit la loi uniforme sur $(0,x]$. $p_Y(y \mid X=x) = \frac{\mathbb{1}_{[0,x]}(y)}{x}$ $\quad y \in [0,1]$.

Sachant $X = x$, $Y = xV$ suit la loi uniforme sur $(0,x]$

$$\Rightarrow p(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{\{0<y<x<1\}} \quad x, y \in [0,1].$$

La loi de Y est donnée par $p_Y(y) = \int_0^1 p(x,y)\,dx \quad \forall y \in]0,1]$

$$= \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln(y)$$

2) $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 -y \ln y \, dy = \mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U].\mathbb{E}[V] = \frac{1}{4}$

3) $\text{cov}(X,Y)? = \mathbb{E}[XY] - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{1/2}\underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{1/4}$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[UUV] = \mathbb{E}[U^2V] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{24}$

Exercice 3 : On divise de manière aléatoire un segment (de long. 1) en 3 intervalles. Quelle est la probabilité que l'on puisse former un carré avec les 3 intervalles?

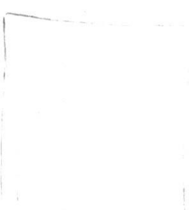
$U, V \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$

$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ a+b \geq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 1-c \\ c \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \leq \frac{1}{2} \\ b \leq \frac{1}{2} \\ c \leq \frac{1}{2} \end{matrix}$

$P(\text{Triangle}) = P(\min(U,V) \leq \frac{1}{2} ; |U-V| \leq \frac{1}{2} ; \max(U,V) \geq \frac{1}{2})$

Rqe: $a = \min(U,V)$
$b = |U-V|$ (loi $1-(1-t)^2$)
$c = 1 - \max(U,V)$

$P(\text{Triangle}) = 2.P(U \leq \frac{1}{2}, |U-V| \leq \frac{1}{2}, V \geq \frac{1}{2})$



Ch 9 : Formules de conditionnement

Soit (X,Y) couple de va réelle dont la loi admet p. densité $p(x,y)$.

Def : Soit $x \in \mathbb{R}$, $p(x) \geqslant 0$. On appelle espérance conditionnelle de ~~t.a.~~ Y sachant $X=x$, la f^n $\varphi : x \mapsto E[Y|X=x] = \int y \cdot p_Y(y|X=x) \cdot dy$

Def : On appelle espérance cond. $E[Y|X]$ ~~sur~~ la v. aléatoire $E[Y|X] \underset{def}{=} \varphi(X)$

Théorème :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[E[Y|X]] = \mathbb{E}[Y].$$

en d'autres termes : $\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} E[Y|X=x]\, p_X(x)\, dx$.

Proposition : Soit A un evt

$$P(A) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|X]]$$
$$= \int_{\mathbb{R}} P(A|X=x)\, p_X(x) dx.$$

⚠ Ne découle pas des th. précédents car $\mathbb{1}_A$ n'admet pas de densité.

Démonstration de la formule de "l'espérance totale" :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \underset{transfert}{=} \int \varphi(x) p_X(x)\, dx$$
$$\underset{def}{=} \int \left(\int y\, p_Y(y|X=x)\, dy \right) p_X(x)\, dx$$
$$= \iint y \cdot p(x,y)\, dy\, dx$$
$$\overset{Fubini}{=} \int y \left(\int p(x,y)\, dx \right) dy$$
$$= \int y\, p_Y(y)\, dy$$
$$= \mathbb{E}[Y]$$

Exercice 1 : Soit $Y = U.\sqrt{V}$ où U et V sont indep. de loi $\mathcal{U}(0,1)$

Dem : Soit $t \in (0,1)$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(U\sqrt{V} \leq t)$$
$$= \int_0^1 P(Y \leq t | U=u) \cdot \cancel{p_U(u)}^{\,1 \text{ car uniforme}}\, du$$
$$= \int_0^1 P(u\sqrt{V} \leq t | \cancel{U=u})\, du$$
$$= \int_0^1 P\left(V \leq \left(\frac{t}{u}\right)^2\right) du.$$
$$= \int_0^t 1\, du + \int_t^1 \frac{t^2}{u^2}\, du$$
$$= t + t^2 \left[-\frac{1}{u}\right]_t^1$$
$$= t + t^2 \left[\frac{1}{t} - 1\right]$$
$$= 2t - t^2$$
$$= 1 - (1-t)^2$$

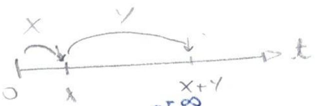
$$F_Y(t) = P(|U-V| \leq t)$$
$$= P(\min(U,V) \leq t)$$

Exercice 2 : Soit X, Y deux v.a. indep. de lois exp. de param. 1.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad p_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

X est la loi d'attente de la 1ère occurrence ds un processus de Poisson de taux 1
(ds un intervalle unité il y a en moy. une occurrence)

Loi de $X+Y$?



$X+Y$ est le tps d'attente de la 2e occurrence.

Soit $t \geq 0$. $P(X+Y \leq t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(Y + x \leq t \mid X = x)\, p_X(x)\, dx$

$$= \int_0^t P(Y \leq t - x) . p_X(x)\, dx \quad (\text{si } x \geq t \quad t - x \leq 0 \text{ or } Y \geq 0)$$

$$= \int_0^t F_Y(t-x) p_X(x)\, dx \underset{\text{def}}{=} F_Y . p_X(t) \quad \text{pdt de convolution (?)}$$

$$= \int_0^t e^{-x}(1 - e^{-(t-x)})\, dx$$

$$= \int_0^t e^{-x} - e^{-t}\, dx$$

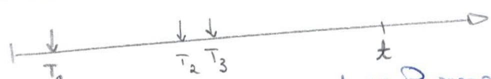
$$= 1 - e^{-t} - t e^{-t}$$

$$= 1 - e^{-t}(1+t)$$

Question subsidiaire :

$cov(T_1, T_2) = cov(X, X+Y) = var(X) \geq 0$
$= 1$

Exercice 3 : Loi du temps de la n^e occurrence ds le processus de Poisson de taux 1.



Soit $N_t = \#$occurences du temps $t \sim \text{Poisson}(t)$.

$$T_n \leq t \iff N_t \geq n$$

Donc $P(X+Y \leq t) = 1 - e^{-t}(1+t) = 1 - P(N_t = 0) - P(N_t = 1)$

Hypothèse : $P(T_n \leq t) = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)$

Dem. par recurrence : $T_n = T_{n-1} + X_n$ où $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

$$P(T_n \leq t) = P(T_{n-1} + X_n \leq t) = F_{T_{n-1}} * p_{X_n}(t) = \int_0^t e^{-(t-x)}\left(1 - e^{-x}\left(1 + \dots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)\right) dx$$

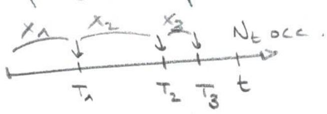
$$= 1 - e^{-t}\left(1 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

La densité est $p_{T_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ch 9.

Exercice 4 :

On considère un processus de renouvellem^t, où les temps interarrivés st indep. et de loi de f^n de répartition. $F(t)$.



$T_N \le t \iff N_t \ge n$

$X_n \hookrightarrow F$.

Quelle est l'équation à laquelle $\mathbb{E}[N_t]$ obéit ?

Réponse : Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $\mathbb{E}[N_t] = t$.

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_t | T_1]]$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{E}[N_t | T_1 = x] . p_{T_1}(x)\,dx.$$

$$= \int_0^{t} \mathbb{E}[N_t | T_1 = x]\, p_{T_1}(x)\,dx + \cancelto{0}{\int_t^{+\infty} \mathbb{E}[0 | T_1 = x] . p_{T_1}(x)\,dx}$$

$$= \int_0^{t} (1 + \mathbb{E}[N_{t-x}])\, p_{T_1}(x)\,dx$$

Si $m(t) = \mathbb{E}[N_t]$

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) . p_{T_1}(x)\,dx$$

$$m(t) = F(t) + m * p_{T_1}(t).$$

Solut° hors du cours, cf transf. de Fourier.

Probabilités appliquées
Ch 10
Simulation de v. aléatoires

Hyp: unif(0,1) générateur aléatoire de loi uniforme ds [0,1] produisant des var. indep.

Soit F une f^n de répartition (sur $\mathbb{R}$) et $Q: u \mapsto \inf\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq u\} = F^{-1}(u)$.

Algorithme: $X \leftarrow Q(\text{unif}(0,1))$ génère une v.a. de loi F.

Soit (X,Y) un couple de va de densité $p(x,y)$

Algo de simulation:

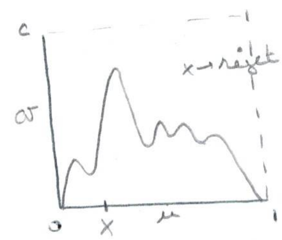
1) Simuler X de loi $q_X(x) = \int p(x,y)\,dy$
2) Sachant $(X=x)$, simuler Y de loi $P_Y(y|X=x)$

Justification: $p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y|X=x)$

Soit f une densité de proba définie sur $[0,1]$ tq $f(x) \leq c$ $\forall x \in [0,1]$

Algorithme de rejet

Repeter
 $U \leftarrow \text{unif}(0,1)$
 $V \leftarrow \text{unif}(0,1)$
Jusqu'à $(cV \leq f(U))$
 $X \leftarrow U$



Prop: En sortie, la loi de X admet $f(x)$ p. densité.

① Algorithme d'inversion

Preuve: Soit $u \in [0,1]$. $Q(u) \leq t \Leftrightarrow F(t) \geq u$

Soit U une v.a. de loi $\mathcal{U}(0,1)$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $P(X = Q(U) \leq t) = P(U \leq \underbrace{F(t)}_{\in[0,1]})$
$= F(t)$

Exemple: Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

$$t \mapsto F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

t $\quad u = 1 - e^{-\lambda t}$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u) = t$

algo: $X \leftarrow -\ln(\overline{\text{unif}(0,1)})/\lambda$ → car unif et 1-unif ont la même loi

Vérif: $P(-\ln(1-U)/\lambda \leq t) = P(U \leq 1 - e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t}$

Rqe: Si X suit la loi de f^n de répartit° F alors $U = F(X) \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$.

Exercice 2: Simulation du couple de densité:

$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Loi jointe des 2 premiers temps d'arrivée dans le processus de Poisson)

factorisation: $p(x,y) = \underbrace{e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}_{p_X(x)} e^{-(y-x)} \cdot \mathbb{1}_{(x,+\infty)}(y) = P_X(x) \cdot P_Y(y|X=x)$

pour que x soit positif.

$$\begin{cases} P_X(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ P_Y(y|X=x) = e^{-(y-x)} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y-x), \; x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ X suit la loi exp. de param. 1.
Sachant $X=x$, Y suit la même loi que $x+Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

Simulation:

$$\begin{cases} X \leftarrow -\ln(\text{unif}(0,1)) \\ Y \leftarrow X - \ln(\text{unif}(0,1)) \end{cases} \quad \text{math} \begin{cases} X = -\ln U \\ Y = -\ln U - \ln V \end{cases}$$ où U, V sont $\mathcal{U}(0,1)$ indep.

Rqe: Y = temps de la 2^{nde} occurence du processus de Poisson.

$$\Rightarrow p_Y(y) = \int p(x,y)\,dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,y)}(x)\,dx$$
$$= e^{-y} \cdot \int_0^y dx$$
$$= y \cdot e^{-y} \quad , y > 0$$

③ Algo de rejet : Soit $t \in (0,1]$.

$$P(X \leq t) = P(U \leq t \mid \text{Condition}) = \frac{P(U \leq t \cap cV \leq f(U))}{P(cV \leq f(U))}$$

U, V de loi $\mathcal{U}(0,1)$, indep.

$$P(U \leq t \cap cV \leq F(U)) = \int_0^1 P(u \leq t, cV \leq f(u) \mid U = u) \cdot p_U(u) \cdot du$$
$$= \int_0^t P(V \leq \underbrace{\tfrac{f(u)}{c}}_{\in (0,1]})\,du \qquad c \geq F(u)\ !$$
$$= \frac{1}{c} \cdot \int_0^t f(u)\,du$$

$$P(cV \leq F(U)) = \frac{1}{c} \cdot \int_0^1 f(u)\,du = \frac{1}{c}$$

$$P(X \leq t) = P(U \leq t \mid \text{Condition})$$
$$= F(t) = \int_0^t f(u)\,du. \quad \Rightarrow X \text{ suit la loi de densité } f(u)$$

$$P(\text{Condition}) = \frac{1}{c}$$

Exemple: $f(x) = \frac{10}{9} \cdot (x + 2x^4) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

Algo d'inversion: $F(t) = \frac{5}{9} t^2 + \frac{4}{9} t^5 \qquad \forall t \in (0,1]$

Rejet. $\forall x \in (0,1]$: $c \leq \frac{10}{9}$

Proba (rejet) $= 1 - \frac{1}{c} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$\mathbb{E}[\text{Nb d'appels}] = 2 \times c = \frac{20}{3}$

Rqe: $F(t) = \frac{5}{9} \cdot F_1(t) + \frac{4}{9} \cdot F_2(t)$

$F_1(t)$ est la f^n de répartit° de la va $\sqrt{U}$

$F_2(t)$ " $U^{1/5}$

$U \leftarrow$ unif$(0,1)$

$V \leftarrow$ "

Si $(V < 5/9)$ alors $X \leftarrow U^{1/2}$ sinon $X \leftarrow U^{1/5}$

Probabilités appliquées :
Révision : exam 2016

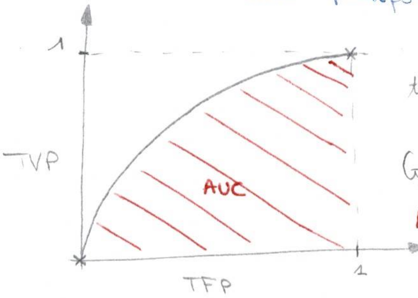
Courbe ROC :

1) Z score (on choisit un score positif)

seuil t

		V	F
$Z>t$	P	VP	FP
$Z\leq t$	N	VN	

- Le taux de faux positifs est appelé sensibilité ou erreur de type I
- Le taux de vrai positifs " la puissance du test.



t fixé

&.

Courbe ROC

AUC = Area Under Curb $\in [0,1]$

Score Z pour F : "loi nulle" : Z_0 ≠

Score Z pour V : "loi alternative" : Z_λ

On dit que $(Z_\lambda)_{\lambda>0}$ est normalisable si il existe Z_0 de variance 1 et $\forall \lambda$, un scalaire $s(\lambda)>0$ tq

$Z_\lambda/s(\lambda)$ et Z_0 ont la même loi

1. a) Prop 1 : $s(\lambda)^2 = Var(Z_\lambda)$

$Var(Z_\lambda/s(\lambda)) = Var(Z_0)$ m̂ loi

$\Leftrightarrow \frac{1}{s(\lambda)^2} \cdot Var(Z_\lambda) = Var(Z_0) = 1$

$\Leftrightarrow Var(Z_\lambda) = s(\lambda)^2$

b) Loi $\mathcal{E}(\lambda)$: $Var(Z_\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$ et $Z_\lambda = \frac{1}{\lambda}\ln(U)$ $U \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$

Donc $\lambda Z_\lambda = -\ln U = 1.Z_1$ (de var 1) $s(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$

c) $N(0,\lambda^2)$ - $Var(Z_\lambda) = \lambda^2$, $s(\lambda) = \lambda$, $Z_0 = N(0,1)$

$Z_\lambda = 0 + \lambda Z_0$ d'après le cours

d) $Z_\lambda = Y_\lambda^2$ où $Y_\lambda \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\lambda^2)$

Def : Scores : famille $Z_\lambda \geq 0$, $s(\lambda) > 1$

Z_λ : variable d'intérêt ou alternative

Z_0 : variable de référence ou nulle.

2. $\forall t \geq 0$: $P(Z_\lambda > t) \geq P(Z_0 \geq t)$

Preuve : $P(Z_\lambda > t) = P(s(\lambda) Z_0 > t) = P(Z_0 > \frac{t}{s(\lambda)})$

$(Z_0 > t) \subset (Z_0 > \frac{t}{s(\lambda)})$ car $s(\lambda) > 1$

Donc $P(Z_0 > t) \leq P(Z_0 > \frac{t}{s(\lambda)})$

$\Rightarrow \int_0^\infty P(Z_\lambda > t)dt \geq \int_0^\infty P(Z_0 > t)dt$

$\Rightarrow E(Z_\lambda) \geq E(Z_0)$

&

3. Notion de u-valeur

Soit $F_0(t)$ la f^n de répartit° de Z_0.

a) On pose $U_0 = 1 - F_0(Z_0)$ loi ?

Soit $0 \leq t \leq 1$. $P(U_0 \leq t) = P(1 - F_0(Z_0)) \leq t)$

$= P(Z_0 \geq F_0^{-1}(1-t))$ $\Rightarrow U_0 \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$

$= 1 - F_0(F_0^{-1}(1-t)) = t$

b) $U_1 = 1 - F_0(Z_1)$

Soit $0 \leq \theta \leq 1$: $\alpha(\theta) = P(U_1 \leq \theta) = P(2 - F_0(Z_1) \leq \theta)$

$= P(1 - \theta \leq F_0(Z_\theta))$

$= P(F_0^{-1}(1-\theta) \leq Z_1)$

Or $t = F_0^{-1}(1-\theta) \Rightarrow P(Z_1 \geq t) \geq P(Z_0 \geq t)$

$\geq 1-$ $= 1 - F_0(F_0^{-1}(1-\theta))$

$= \theta$