Feuille de TD n.8 de IPD 2022-2023, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. En utilisant la formule d'Itô trouver les équations différentielles stochastiques vérifiées par :
1) $X_t = \sin(W_t)$;
2) $Y_t = (W_t)^n$, où $n \geq 2$;
3) $Z_t = \exp(W_t - t/2)$;
4) $V_t = t^p (W_t)^n$, où $p \geq 1$ et $n \geq 2$.

Exercice 2. a) Calculer $\mathbb{E}(\sin(W_t))$ par calcul direct puis en utilisant l'EDS obtenue dans l'exercice 1.
b) En utilisant l'EDS de l'exercice 1 calculer $\mathbb{E}(W_t^n)$. Indication on pourra utiliser que

$$\int_0^t \int_0^{t_{n-1}} \int_0^{t_{n-2}} \cdots \int_0^{t_1} dt_0 \cdots\ dt_{n-2}\ dt_{n-1} = \frac{t^n}{n!}.$$

c) Déduire de l'exercice 1 que le processus (Z_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale et un processus d'Itô. Calculer $\langle Z \rangle_t$.

Exercice 3. Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. et $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ des paramètres. On considère le processus $S = (S_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$S_t = s_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right)$$

où $s_0 > 0$ est une constante.
(a) Quelle est la loi de S_t?
(b) Montrer que

$$S_t = s_0 + \int_0^t \mu S_s\ ds + \int_0^t \sigma S_s\ dW_s$$

et retrouver $\mathbb{E}(S_t)$.
(c) Dans quel cas le processus S est-il une $(\mathcal{F}_t)$-Martingale?

Exercice 4. Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. et $\mu = (\mu_t)_{t\geq 0}$ et $\sigma = (\sigma_t)_{t\geq 0}$ où $\sigma_t > 0$, sont des processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptés. On considère le processus $S = (S_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$S_t = s_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right)\ ds + \int_0^t \sigma_s\ dW_s\right)$$

où $s_0 > 0$ est une constante.
(a) Ce processus est-il toujours défini? Lorsque c'est le cas montrer que

$$S_t = s_0 + \int_0^t \mu_s S_s\ ds + \int_0^t \sigma_s S_s\ dW_s$$

(b) Donner une condition suffisante pour que S soit une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingale?