Rappels de calcul différentiel en dimension finie :

Définition Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$.
f est de classe C^1 sur Ω si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ existent et sont continues sur Ω.

Définition Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.
f est de classe C^2 sur Ω si $\forall i = 1 \dots n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$

Les définitions s'étendent à $f : \Omega \subset E \to F$
avec E, F espaces vectoriels normés réels de dimensions finies
(identifier E à $\mathbb{R}^n$ et F à $\mathbb{R}^m$ en choisissant des bases).
Exemple : si $F = M_n(\mathbb{R})$ alors $m = n^2$.

Développement limité à l'ordre 1 Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, alors $\forall x \in \Omega$ et h assez petit :

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \to 0$$

$$Df(x) \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad (Df(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

$o(\|h\|) :=$ de la forme $\|h\| \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ dans $\mathbb{R}^m$.

- De plus, si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ alors

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + O(\|h\|^2)$$

$\|O(\|h\|^2)\| \leq C\|h\|^2$ $\forall h$ dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. et une certaine constante $C \geq 0$.

Composition d'applications :
Soit $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $f \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^p)$ $(g(\Omega) \subset \tilde{\Omega}$ ouvert de $\mathbb{R}^m)$
alors $f \circ g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ $\left((f \circ g)(x) := f(g(x)) \right)$
et $D(f \circ g)(x) = Df(g(x))\, Dg(x)$.