Examen final

Vendredi 25 janvier 2013 - 2h

Documents manuscrits et polycopié du cours autorisés. Tout autre document interdit.

Exercice 1

Soient A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle , \rangle$. Calculer la différentielle en 0 de l'application F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \exp[\frac{1}{2} \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c].$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$ on pose

$$f_n(x) = \exp(-n \sin^2(\frac{1}{x}))\,.$$

Montrer que $f_n \in L^1([0,1])$ et étudier la limite de la suite :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx\,.$$

quand $n \to \infty$.

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de résoudre, pour $g \in L^1(\mathbb{R})$ donnée, l'équation

$$(E) \qquad f(x) - \frac{1}{2}\int_x^{x+1} f(s)ds = g(x)$$

1. *Soit χ la fonction caractéristique de $[-1,0]$ et K l'application qui à une fonction h associe $\chi * h$.*
   (a) *Montrer que pour $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\|Kh\|_{L^1} \leq \|h\|_{L^1}$.*
   (b) *En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} K^n h$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$.*
2. *Exprimer l'équation (E) au moyen de l'opérateur K.*
3. *Donner une solution de (E) dans $L^1(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de l'unicité de la solution de (E)?*

Exercice 4

Calculez les intégrales suivantes en vous aidant des transformées de Fourier usuelles ($a > 0$, $w \in \mathbb{R}$) :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\omega x)\;dx$$

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(\omega x)\ dx$$

$$K = \int_{-1}^{1} (1 - |x|) \cos(\omega x)\ dx$$

Indications :

- Pour calculer I et J, commencer par calculer $I - iJ$.

- Pour calculer K, commencer par calculer la transformée de Fourier de la fonction “triangle’ (fonction qui vaut $1 - |x|$ sur $[-1, 1]$ et 0 sinon).