Feuille 1
Approximation de problèmes aux limites par différences finies

On considère l'équation différentielle

$$-u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \tag{1}$$

où $q \in C^2([0,1])$ désigne une fonction strictement positive et $f \in C^2([0,1])$. On complète (1) par les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

On rappelle que (1)-(2) admet une solution unique $u \in C^4([0,1])$.

On considère la *méthode des différences finies* introduite en cours, qui permet d'approcher u aux points x_j définis par

$$x_j = jh, \quad j = 1, \ldots, N,$$

avec $h = 1/(N+1)$. Par la suite $A \in M_N(\mathbb{R})$ désigne la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2+h^2\,q(x_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+h^2\,q(x_2) & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2+h^2\,q(x_{N-1}) & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+h^2\,q(x_N) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

1- On note $\tilde{U} = (u(x_1), \cdots, u(x_N))^T$ et $F = (f(x_1), \cdots, f(x_N))^T$. Montrer que le vecteur

$$E = \frac{1}{h^2}\,A\tilde{U} - F \tag{4}$$

vérifie

$$\|\, E \,\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{12} \|\, u^{(4)} \,\|_\infty. \tag{5}$$

On remplace maintenant (1)-(2) par le système linéaire

$$\frac{1}{h^2} A\, U = F, \tag{6}$$

où $U = (u_1, \cdots, u_N)^T$ et u_j représente une approximation de $u(x_j)$. L'estimation (5) montre que *l'erreur de troncature* E tend vers 0 quand $h \to 0$; on dit alors que le schéma (6) est *consistant*. Il s'agit maintenant de démontrer la convergence de U vers $\tilde{U}$.

2- On considère une matrice $M \in M_N(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante, i.e. dont les coefficients $m_{i,j}$ vérifient

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Min}_{1 \leqslant i \leqslant N} \Big(|m_{ii}| - \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \Big) > 0.$$

Montrer que M est inversible et que $|||M^{-1}|||_\infty \leqslant \delta^{-1}$.

Indications : étant donnés $x \in \mathbb{R}^N$ et $y = M\,x$, montrer que $\|y\|_\infty \geqslant \delta\, \|x\|_\infty$ en utilisant les inégalités triangulaires $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ et $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$. On rappelle par ailleurs la définition de la norme matricielle subordonnée

$$|||M^{-1}|||_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{\|M^{-1}\, y\|_\infty}{\|y\|_\infty}.$$

3- En déduire une estimation de $|||A^{-1}|||_\infty$.

4- Montrer que $\|\, U - \tilde{U} \,\|_\infty = O(h^2)$ lorsque $h \to 0$. On dit alors que le schéma (6) est *convergent à l'ordre 2* pour la norme $\|\ \|_\infty$.