Examen de IPD 2015-2016, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Mardi 3 mai 2016, 15h00-17h00

Feuille A4 manuscrite autorisée. Tout autre document, ordinateur, calculette, portable ou objet communicant interdit.
Le sujet comporte deux pages.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre : il convient cependant d'indiquer chaque fois très clairement quelle question est traitée.
Le barème est indicatif et pourra être sujet à modifications. Il va de soit que toute réponse doit être suffisamment justifiée.

Exercice 1. (5 points)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{0 \leq t}$ un mouvement brownien standard. On se place dans les conditions habituelles et on notera $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle (complétée) de B, on supposera de plus que que $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$. On rappelle que dans ces conditions $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale ($\{\emptyset, \Omega\}$) complétée par tous les $\mathbb{P}$-négligeables.
Soit X une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable et de carré intégrable.
On note $M = (M_t)_{t \geq 0}$ le processus définit par $M_t = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t)$ pour tout $t \geq 0$.
1.1. Que vaut M_0?
1.2. Montrer que M est une martingale de carré intégrable.
1.3. Justifier qu'il existe un processus K dont on précisera les propriétés tel que $M_t = M_0 + \int_0^t K_s \, dB_s$.
1.4. Quel est $\langle M \rangle_t$?

Exercice 2. (5 points)
Soient r, a, σ trois réels strictement positifs et R le processus satisfaisant à

$$dR_t = a(r - R_t) \, dt + \sigma dB_t \text{ avec } R_0 = r. \tag{1}$$

2.1. Montrer que

$$R_t = r + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} \, dB_s$$

est solution de (1).
2.2. En déduire la loi de R, calculer sa moyenne et sa fonction de covariance.

On note $S = (S_t)_{t \geq 0}$ le processus défini pour tout $t \geq 0$ par $S_t = f(t, R_t)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ bornée à support compact.
2.3. Ecrire S comme un processus d'Itô et donner $\langle S \rangle_t$.

Exercice 3. (10 points)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles. On considère $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ mouvement brownien standard.
Soient x_0, μ et σ trois réels fixés. On considère le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ définit pour tout $t \geq 0$ par $X_t = x_0 + \mu t + \sigma B_t$.

3.1. Dire en justifiant (dans l'ordre qui vous plaira) si le processus X_t est : adapté? continu? gaussien? une martingale? un processus d'Itô? à accroissement stationnaire? à accroissement indépendant?

3.2. Calculer sa variation quadratique.

3.3) Soit $T > 0$. On pose $L = (L_t)_{0 \le t \le T}$ le processus définit par

$$L_t = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}B_t - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{t}{2}\right)$$

3.3.1. Montrer que L_T définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}_T$ sous laquelle $W = (W_t)_{0 \le t \le T}$ définit par $W_t := (\mu/\sigma)t + B_t$ est un MBS .

3.3.2. Montrer que $(X_t)_{0 \le t \le T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T$. En déduire $\langle X \rangle$ et remarquez que la variation quadratique ne dépend pas de la mesure de probabilité sous laquelle on regarde le processus.

3.4) On suppose dorénavant que $\sigma > 0$ et $a > 0$ et on pose $T_a = \inf\{t > 0 : X_t \ge x_0 + \sigma a\}$.
3.4.1. Montrer que

$$\{T_a \le t\} = \{\max_{s \in [0,t]} W_s \ge a\}$$

3.4.2. En déduire que pour tous $0 \le t < T$

$$\mathbb{P}(T_a \le t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\exp\left(\frac{\mu}{\sigma}W_t - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{t}{2}\right)\mathbf{1}_{\{\max_{s\in[0,t]} W_s \ge a\}}\right]$$

3.4.3. Selon que $x < a$ ou $x \ge a$ calculer

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\exp\left(\frac{\mu}{\sigma}W_t - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{t}{2}\right)\mathbf{1}_{\{\max_{s\in[0,t]} W_s \ge a\}}|W_t = x\right]$$

Pour cela on rappelle que (c.f. TD) $\mathbb{Q}_T(\max_{s\in[0,t]} W_s \ge a | W_t = x) = \exp(-2a(a-x)/t)$.

3.4.4. En déduire que

$$\mathbb{P}(T_a \le t) = \exp\left(\frac{2\mu a}{\sigma}\right)\int_{-\infty}^{-a-\frac{\mu t}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\, dy + \int_{a-\frac{\mu t}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\, dy$$

3.4.5. En déduire que $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$ si $\mu \ge 0$. Donner $\mathbb{P}(T_a < \infty)$ lorsque $\mu < 0$.

3.4.6. Dans le cas où $\mu \ge 0$ montrer que la densité de T_a est

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{(a - \frac{\mu t}{\sigma})^2}{2t}\right)$$