TD n°2 de Probabilité

auteur: Adnet Chloé, Teimur Abu Zacki, Aymane Ait Taleb
relecteur: Avare Thomas, Quentin Blasiak, Adrien Bouchet

Octobre 2020

Exercice n°1

Q.1. Le rat n'a pas de mémoire.

$$\pi_i = P(X = i+1 \mid X > i) \quad i \in 0,1,2,3$$

$$\pi_0 = P(X = 1 \mid X > 0) = \frac{1}{4}, \quad \pi_1 = P(X = 2 \mid X > 1) = \frac{1}{4}$$

$$\pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{4}$$

X suit une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{4}$, donc E(x)=$\frac{1}{4}$

Q.2. Le rat a une mémoire parfaite.

$$\pi_i = P(X = i+1 \mid X > i) \quad i \in 0,1,2,3$$

$$\pi_0 = P(X = 1 \mid X > 0) = \frac{1}{4}, \quad \pi_1 = P(X = 2 \mid X > 1) = \frac{1}{3}$$

$$\pi_2 = P(X = 3 \mid X > 2) = \frac{1}{2}, \quad \pi_3 = P(X = 4 \mid X > 3) = 1$$

autrement dit $\pi_i = \frac{1}{4-i}$, $i \in 0,1,2,3$, car la rat restreint les portes dans lesquels il doit aller.

$$P(X = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}\,, \quad P(X = 3) = \frac{1}{4}$$

Finalement, X $\rightsquigarrow U(\frac{1}{4})$ (loi $uniforme$).

$$Son\, ésp\acute{e}rance\, est\; E(x) = \frac{5}{2}$$

Q.3. Le rat se souvient uniquement du résultat de la dernière expérience.

$$P(X=1)=\frac{1}{4} \quad (le\, rat\, ne\, connait\, rien)$$

$$\rho_i = P(X>i+1 \mid X>i) = 1-P(X=i+1 \mid X>i)$$

$$\rho_0 = P(X>1 \mid X>0) = 1-P(X=1 \mid X>0) = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\rho_1 = P(X>2 \mid X>1) = 1-P(X=2 \mid X>1) = 1-\frac{3}{4}\frac{4}{3}\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\rho_2 = P(X>3 \mid X>2) = 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\rho_3 = P(X>4 \mid X>3) = 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Donc , ρ_0=$\frac{1}{4}$ et pour i $\geqslant 1$, ρ_i=$\frac{2}{3}$

P(X=i)=P(X$\neq i-1)P(X=i-1 \mid i \neq i-1)$

On a 1=P(X=i+1| $X>i)+P(X>i+1 \mid X>i)$

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\frac{1}{3}=\frac{1}{12}\,, P(X=3)=\frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

$$P(X=i)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-2}\frac{1}{3}$$

Q.4.

$$Y \rightsquigarrow B(\frac{3}{4}),\; P(Y=1)=\frac{3}{4}$$

$$G \rightsquigarrow G(\frac{1}{3}), \forall n \in \mathbb{N}^*,\; P(G=n)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$Y\, et\, G\, sont\, indépendants$$

Z=1+YG, soit k$\in \mathbb{N}^*$

P(Z=k)=P(1+YG=k)=P(YG=k-1)=P(Y=1)P(G=k-1)=$\frac{1}{4}(\frac{2}{3})^{k-2}$=P(X=k)

$$Donc \quad 1+YG \rightsquigarrow X$$

Caculons l'éspérance de X:

$$E(x) = E(1+YG) = 1 + E(Y)E(G) = 1 + 3.\frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

Exercice n°2

P(D)= $\frac{1}{10^6}$, il suffit de faire 1 million d'essais pour que la fusée décolle

R=rang d'apparition du premier décollage

$$P(R=k) = \frac{1}{10^6}(\frac{999999}{10^6})^{k-1}, \quad R \rightsquigarrow G(\frac{1}{10^6})$$

$$P(R > \frac{1}{10^6}) = 1 - \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{10^6}(\frac{999999}{10^6})^{k-1} = 1 - \frac{1}{10^6}\frac{1-(\frac{999999}{10^6})^{10^6}}{1-\frac{999999}{10^6}} = \left(\frac{999999}{10^6}\right)^{10^6}$$

$$Donc \quad P(R > 10^6) = \left(\frac{999999}{10^6}\right)^{10^6}$$

Exercice 2

- Soit R : le rang d'apparition du premier decollage . $P(R=k) = \frac{1}{10^6} * (\frac{999999}{10^6})^{k-1}; R \approx G(\frac{1}{10^6})$
- $P(R > 10^6) = 1 - \sum_{k=1}^{10^6} P(R=k) = 1 - (1 - (\frac{999999}{10^6})^{10^6}) = (\frac{999999}{10^6})^{10^6}$

Deuxième Partie

Exercice 1

Question 1

- On applique le theorème de la divison euclidienne de x-1 par 6 : $\exists! p, r \in \{0,...,5\}$ $x-1 = 6q+r \iff x = 6q + \frac{r+1}{r}$ (on pose q'=q+1 et r' = r +1 , $q', r' \in \{1,...,6\}$) $\iff x = 6(q'-1)+r'$, on a unicité de q' et r' d'après l'unicité de r et q .

Question 2

- $N_1, N_2 \in \{1,..,6\}$

  X est est de la même forme que Q1 , X $\in \{1,...,36\}$, et pour chaque valeur de X , on a N_1, N_2 uniques , $P(X=k) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ donc $X \approx U(\frac{1}{36})$
- On perd du temps pour les valeurs {20,...,36}

Question 3

-

```
#faces 4 ou 5
de.f <- function(n,faces) {
  d <- NULL
  for (i in 1:n){
    while ((x <- de.6(1)) > faces){}
    d <- c(x, d)
  }
  return(d)
}
```

```
#10 faces
de.12 <- function(n) (de.6(n)-1) + de.6(n)
de.10 <- function(n) {
  d <- NULL
  for (i in 1:n){
    while ((x <- de.12(1)) > 10){}
    d <- c(x, d)
  }
  return(d)
}
```

```r
#20 faces
de.21 <- function(n) 3*(de.6(n)-1) + de.6(n)
de.20 <- function(n) {
  d <- NULL
  for (i in 1:n){
    while ((x <- de.21(1)) > 20){}
    d <- c(x, d)
  }
  return(d)
}
```

-

```r
#19 faces d'un dé de 20 faces
de.20 <- function(n) sample(1:20, n, replace = T)
de.19 <- function(n) {
  d <- NULL
  for (i in 1:n){
    while ((x <- de.20(1)) > 19){}
    d <- c(x, d)
  }
  return(d)
}
```

- Non