Fiche 1 IPD :

Exercice 1 : Transformation de Box-Muller :

- $R \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$
- $\Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$
- $R \perp\!\!\!\perp \Theta$

On pose $X = \sqrt{R}\cos(\Theta)$ et $Y = \sqrt{R}\sin(\Theta)$

Mq $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$.

On pose $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(r, \theta) \longmapsto (\sqrt{r}\cos\theta, \sqrt{r}\sin\theta)$

φ est C^1-difféomorphisme sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$

et On a le couple VA $(X, Y) = \varphi(R, \Theta)$

donc

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

On a

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{R,\Theta}(\varphi^{-1}(x,y))\, |\det(Jac_{\varphi^{-1}}(x,y))|\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}(x,y).$$

* On calcul $\varphi^{-1}(x,y)$: soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$

On a $\varphi(r, \theta) = (\sqrt{r}\cos\theta, \sqrt{r}\sin\theta) = (x,y)$

d'où $\begin{cases} x = \sqrt{r}\cos\theta \\ y = \sqrt{r}\sin\theta \end{cases}$ donc $\begin{cases} x^2 + y^2 = r \\ \frac{y}{x} = \tan\theta \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} r = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \pm \pi \end{cases}$

donc $\boxed{\varphi^{-1}(x,y) = (r, \theta) = (x^2 + y^2, \arctan(\frac{y}{x}) \pm \pi)}$.

$*\ \left|\det\left(Jac_{\varphi^{-1}}(x,y)\right)\right|$?

On a $\det\left(Jac_{\varphi^{-1}}(x,y)\right) = \dfrac{1}{\det\left(Jac_{\varphi}(\varphi^{-1}(x,y))\right)}$

donc il suffit de calculer $Jac_{\varphi}(r,\theta)$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[$

on a $Jac_{\varphi}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2\sqrt{r}} & \frac{\sin\theta}{2\sqrt{r}} \\ -\sqrt{r}\sin\theta & \sqrt{r}\cos\theta \end{pmatrix}$

$\det\left(Jac_{\varphi}(r,\theta)\right) = \dfrac{1}{2}$

d'où $\boxed{\left|\det\left(Jac_{\varphi^{-1}}(x,y)\right)\right| = 2}$.

- de plus comme R et Θ sont indépendants on a

$$f_{R,\Theta} = f_R \times f_\Theta$$

donc

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{R,\Theta}\left(x^2+y^2, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi\right) \times 2$$

or $\begin{cases} R \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) & f_R(r) = \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r) \quad \forall r \in \mathbb{R} \\ \Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi]) & f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$

d'où

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x^2+y^2)}_{=1} \times \frac{1}{2\pi} \underbrace{\mathbb{1}_{[0,2\pi]}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi\right)}_{=1} \times \cancel{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_{X,Y}(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\right)$

Ainsi

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\forall y \in \mathbb{R} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

et $f_{X,Y} = f_X f_Y$

Donc

$$\boxed{\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(0,1),\ Y \sim \mathcal{N}(0,1) \\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{cases}}$$

(qFD).

TD1 (IPD) : Variables gaussiennes.

Exercice 2 . (Loi Log-Normale)

* $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
* $X = e^Y$ (Log-Normale)

1)

a) f_X ?

. On a X à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$, soit $x \in \mathbb{R}$

i) si $x \in \mathbb{R}_-$

on a $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$

ii) si $x \in \mathbb{R}^*_+$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(e^Y \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq \ln(x)) = F_Y(\ln(x))$

avec F_Y : La fonction de répartition de Y.

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_Y(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme F_X est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

donc X admet une densité définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+}(x).$$

b) $\mathbb{E}(X)$?, $var(X)$?

On a Y admet une fonction génératrice que l'on note M_Y

et comme $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M_Y(t) = \exp\left(-t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right) \quad \left(M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{-tY})\right)$$

On a
$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(e^Y) = M_Y(-1) \\ var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = M_Y(-2) - (M_Y(-1))^2 \end{cases}$$

or $M_Y(-1) = e^{+\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ et $M_Y(-2) = e^{+2\mu + 2\sigma^2}$

donc
$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ var(X) = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2} \end{cases}$$

2]

* Soient $X_1, \ldots, X_n$ sont v.a indépendants de loi Log-Normale

i.e. $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\exists\, Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ tq $X_i = e^{Y_i}$

On pose $Z = \prod_{i=1}^{n} X_i$

Mq Z suit loi Log-Normale

$$Z = \prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} e^{Y_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

Comme $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants

Donc $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes

Ainsi $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$

donc $Z = e^{Y_n}$ avec $Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$

donc $\boxed{Z \text{ suit une loi Log-Normale}}$.

Exercice 3 : (Queue de distribution de la loi Normale)

* soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Mq

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \mathbb{P}(|Z| > x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{x}\, e^{-x^2/2}$$

* $\mathbb{P}(|Z| > x) = 1 - \mathbb{P}(|Z| \leq x)$

$$= 1 - (\varphi(x) - \varphi(-x))$$

avec φ : la fonction de répartition de loi $\mathcal{N}(0,1)$

or $\varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$

donc

$$\mathbb{P}(|Z| > x) = 2(1 - \varphi(x)) = 2\varphi(-x)$$

$$= 2\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

par un changement de variable $x \mapsto -t$

on a

$$\mathbb{P}(|Z| > x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

donc

Il s'agit de montrer que

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$$

donc Il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$$

i) ~~Mq~~ $\frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \geq 0$

soit $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt$

par intégration par parties on

$$\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[\frac{-1}{t}e^{-t^2/2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$$

$$= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$$

d'où

$$\frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt \geq 0$$

car la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}$ est positive

donc $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$ --- (1)

ii) soit $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^4} e^{-t^2/2}\, dt$

par intégration par parties ~~et~~ en utilisant $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$

on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^4} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}\right) e^{-x^2/2} + \frac{1}{3}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

donc

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} = 3\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^4} e^{-t^2/2}\, dt \geq 0$$

donc

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \quad \text{--- (ii)}$$

D'après (i) et (ii)

~~on a~~

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \mathbb{P}(|Z| > x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

C.Q.F.D

* D'après l'inégalité précédente on déduit que

$$\mathbb{P}(|Z| > x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$* \ \mathbb{P}(Z > x)$?

On a $\mathbb{P}(|Z| > x) = 1 - \mathbb{P}(|Z| \leq x) = 2(1 - \mathbb{P}(Z \leq x))$

$= 2\,\mathbb{P}(Z > x)$

donc $\mathbb{P}(Z > x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|Z| > x)$

<u>donc</u>

$$\mathbb{P}(Z > x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Exercice 5 : (Processus Gaussien) :

1) Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ tq $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad X_t = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\, G_j$.

i) Mq X est un processus gaussien

Soit $k \geq 1$

Soient $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_k$

Il s'agit de : Mq v-a $\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_k} \end{pmatrix}$ est gaussien

On a $\forall i \in [\![1, k]\!] \quad X_{t_i} = \sum_{j=1}^{n} f_j(t_i)\, G_j$

on pose $A = \left(f_j(t_i) \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{k \times n}$

et $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}$ et $X_k = \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_k} \end{pmatrix}$

Ainsi $X = AG$

et comme (G_i) i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$

Donc G est gaussien

D'où X est aussi gaussien CQFD.

(La transformation linéaire d'un vecteur gaussien est aussi gaussien).

ii)

* soit $t \in \mathbb{R}^+$ $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$?

on a $X_t = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, G_i$

$$\mathbb{E}(X_t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, \underbrace{\mathbb{E}(G_i)}_{=0} = 0$$

donc $\mu(t) = 0$

* soit $t \in \mathbb{R}^+$, $s \in \mathbb{R}^+$

$K(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t)$?

$$K(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(s) G_i , \sum_{j=1}^{n} f_j(t) G_j\right)$$

et comme cov est une fonction bilinéaire

donc

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(t)\, \mathrm{cov}(G_i, G_j)\right)$$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$ $j \neq i$ $\mathrm{cov}(G_i, G_j) = 0$ car $G_i \perp\!\!\!\perp G_j$

d'où

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, f_i(t)\, \underbrace{\mathrm{var}(G_i)}_{=1}$$

Donc

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, f_i(t)$$