Examen 1 Session 1

Lundi 8 novembre 2021 - 2h

Merci d'indiquer de manière bien lisible sur votre copie votre numéro de groupe d'analyse

Documents et calculatrices interdits, hormis une feuille A4 Recto-Verso manuscrite.
N.B. : *La rédaction sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est toutefois préférable de conserver l'ordre proposé (difficulté croissante)*

Exercice 1

1. *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *est Lebesgue-intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer son intégrale.*

2. *Montrer que la fonction* $f(x) = \ln(x)$ *est Lebesgue-intégrable sur* $[0,1]$ *et calculer son intégrale.*

3. *Pour quelles valeurs de* α *la fonction* $x \to \frac{1}{x^\alpha}$ *est-elle Lebesgue-intégrable sur* $[1, +\infty[$*? Calculer son intégrale dans ce cas.*

4. *Enoncer le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions* (f_n).
   Application : pour $n \geq 0$ *soit la suite* $f_n(x) = \left(\cos(\frac{1}{x})\right)^n$. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 2

Déterminer, si elle existe, la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right)}{x^2}\, dx$$

Exercice 3

1. *Montrer que pour tout* $x \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(x)(-1)^n x^{2n}$$

2. *Montrer que la fonction* $x \to \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ *est Lebesgue intégrable sur* $[0,1]$.

3. *Déterminer :*

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx$$

   On mettra le résultat sous forme d'une série.

Exercice 4

Soit $f(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ *pour* $(x,y) \in [0,1] \times [0, +\infty[$.

1. *Montrer que* f *est Lebesgue intégrable sur* $[0,1] \times [0, +\infty[$.

2. *En déduire la valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(\sin y)^2\, e^{-y}\, dy$

Exercice 5

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$*:*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t^2}\, dt$$

1. *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*.*
2. *Calculer* $F'(x)$ *et montrer que* F *est solution de l'équation différentielle du premier ordre:* $y' = -\frac{x}{2}y$
3. *En déduire* F*.*

Exercices facultatifs. NB : ces exercices sont plus difficiles et il n'est pas conseillé de commencer par ceux-ci.

Exercice 6

Soit $f \in L^1(0,1)$*, on cherche dans cet exercice à calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n \ln(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2})dx.$$

On pose $f_n(x) = n\ln(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2})$*.*

1. *Rappeler pourquoi on a* $|f(x)| < +\infty$ *presque partout sur* $[0,1]$*.*
2. *En déduire la limite simple presque partout de la suite* (f_n)*.*
3. *Montrer que pour tout* $t \geq 0$ *on a* $\ln(1+t) \leq 2\sqrt{t}$*.*
4. *En déduire la limite demandée.*

Exercice 7

Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$$