Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Plus courts chemins : théorie et applications

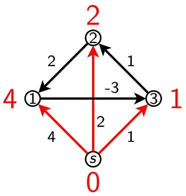
Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Théorie

Résultats

1. Caractérisation des réseaux sans circuit absorbant.
2. Théorème min-max sur la distance.
3. Résultat structurel : arborescences de plus courts chemins.



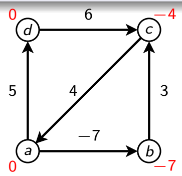
Caractérisation

Définitions

1. potentiel : une fonction $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ d'un réseau (G, c) telle que
$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \text{ pour tout arc } uv \text{ de } G.$$
2. arc uv π-serré : $\pi(v) - \pi(u) = c(uv)$.

Théorème (Gallai)

(G, c) est sans circuit absorbant $\iff$
(G, c) possède un potentiel.



Démonstration ($\Longleftarrow$) :

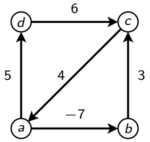
Soient π un potentiel et $C := \{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1} = v_1\}$ un circuit de G.

$$0 = \sum_{i=1}^{k} (\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) \leq \sum_{i=1}^{k} c(v_i v_{i+1}) = c(C).$$

Caractérisation

Démonstration ($\Longrightarrow$) :

1. Soit (G', c') le réseau obtenu à partir de (G, c) en ajoutant un nouveau sommet s et pour chaque sommet v l'arc sv avec coût 0.
2. (G', c') est un réseau sans circuit absorbant et s est une racine.
3. Pour $\forall u \in V(G)$, soit P_u un plus court (s, u)-chemin dans (G', c').
4. Alors $P_u + uv$ est un (s, v)-chemin.
5. $dist'(s, v) \leq c'(P_u + uv) = c'(P_u) + c'(uv) = dist'(s, u) + c'(uv)$.
6. $\pi(w) := dist'(s, w)$ est un potentiel de (G, c) : $\forall uv \in A(G)$, par 5, $\pi(v) - \pi(u) = dist'(s, v) - dist'(s, u) \leq c'(uv) = c(uv)$.



Théorème min-max

Théorème (Duffin)

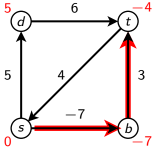
Pour un réseau (G, c) sans circuit absorbant, une racine s de G, $t \in V(G)$:
$\min\{c(P) : P\ (s,t)\text{-chemin de } G\} = \max\{\pi(t) - \pi(s) : \pi \text{ potentiel de } (G,c)\}$.

Démonstration

1. Pour tout (s,t)-chemin $P := \{s = v_1, \ldots, v_k = t\}$ et tout potentiel π, $c(P) = \sum_{i=1}^{k-1} c(v_i v_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^{k-1}(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = \pi(v_k) - \pi(v_1)$ $= \pi(t) - \pi(s)$, donc $\min \geq \max$.
2. Pour un (s,t)-chemin P^* de coût min et le potentiel $\pi^* = dist(s,v)$, $\pi^*(t) - \pi^*(s) = dist(s,t) - dist(s,s) = c(P^*)$, donc $\min = \max$.

Remarque

Si P est un (s,t)-chemin de G et π est un potentiel de (G,c) tel que $c(P) = \pi(t) - \pi(s)$, alors P est un (s,t)-chemin de coût minimum.



Résultat structurel : arborescences de plus courts chemins

Théorème

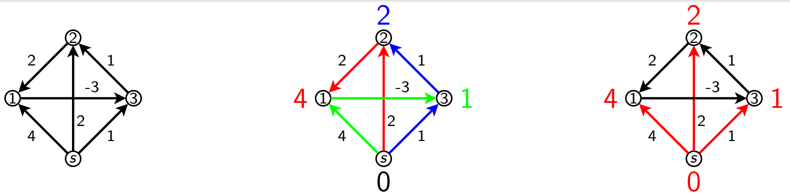
Pour tout réseau (G, c) sans circuit absorbant ayant une racine s, il existe une s-arborescence F de G telle que pour tout sommet v, le (s, v)-chemin dans F est un (s, v)-chemin de coût minimum dans (G, c).

Lemmes

1. Tous les arcs d'un plus court chemin sont dist-serrés.
   (Par l'optimalité des sous-chemins : $dist(s, v) = dist(s, u) + c(uv)$.
   Parce que si P est un plus court (s, v)-chemin et uv est son dernier arc, alors le sous-chemin $P[s, u]$ est un plus court (s, u)-chemin.)
2. Un chemin dont tous les arcs sont π-serrés est un plus court chemin.
   (Par la Remarque précédente, puisque
   $c(P) = \sum_{i=1}^{k-1} c(v_i v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1}(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = \pi(v_k) - \pi(v_1)$.)

Démonstration

1. Soit P_v un plus court (s,v)-chemin dans (G,c) pour tout $v \in V - s$.
2. Tous les arcs de P_v sont dist-serrés d'après Lemme 1.
3. Soit $G' := (V, A')$ où $A' = \bigcup\{A(P_v) : v \in V - s\}$.
4. Puisque s est une racine de G',
5. il existe une s-arborescence F de G', donc de G.
6. Le (s,v)-chemin unique dans F est de coût minimum dans (G,c) d'après Lemme 2, pour tout sommet v.



Application : Ordonnancement

Motivation

Organisation d'un projet : Comment réaliser les tâches d'un projet

1. avec des machines disponibles,
2. sous de nombreuses contraintes,
3. de la façon optimale ?

Ordonnancement simple

1. tâches : avec durée + contraintes d'antériorité,
2. machines : universelles + nombre de machines est infini,
3. objectif : durée totale minimale.

Remarque

On va le résoudre par des plus longs chemins dans un réseau sans circuit.

Ordonnancement simple

Exemple : la pose des fondations d'une maison.

- Supposons que ce projet se décompose en cinq tâches élémentaires :
  - T - terrassement - durée 3 jours;
  - G - mise en place de la grue - durée 1 jour;
  - R - branchements aux réseaux d'eau et EDF - durée 2 jours;
  - B - coulage d'une dalle de béton - durée 3 jours;
  - S - installation de la fosse septique - durée 4 jours.
- Les tâches T, G et R peuvent démarrer tout de suite, par contre on ne peut installer la fosse Septique ni couler la dalle de Béton qu'après avoir effectué les travaux de Terrassement. Il est évident que la pose d'une dalle de Béton nécessite de l'eau (R) et la présence de la Grue.
- Le problème est de proposer un calendrier d'exécution des tâches
  - respectant les contraintes d'antériorité et
  - permettant de réaliser l'ensemble des tâches en un temps minimum.

Tâches	T	G	R	B	S
Durée	3	1	2	3	4
Prédécesseurs	–	–	–	T, G, R	T

Ordonnancement simple

Définition

On va chercher pour chaque tâche X :

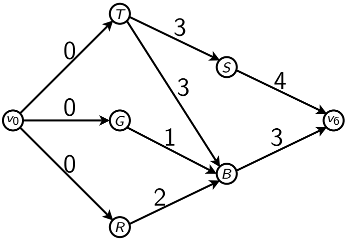
1. la date au plus tôt $\pi(X)$: date minimale à laquelle on peut démarrer l'exécution de la tâche X compte tenu de toutes les contraintes.
2. la date au plus tard $\eta(X)$: date limite à laquelle on doit commencer l'exécution de la tâche X sans retarder l'exécution optimale du projet.
3. marge $m(X)$: délai dont on dispose pour démarrer la tâche X respectant la durée optimale, $m(X) = \eta(X) - \pi(X)$.
4. tâche critique : $m(X) = 0$, tout retard d'une tâche critique entraîne un retard du projet.

Méthode potentiel-tâches

Définition

réseau potentiel-tâches $(G = (V, A), c)$ d'un problème d'ordonnancement:

1. $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ où
   1. $v_1, \ldots, v_n$ correspondent aux tâches $A_1, \ldots, A_n$,
   2. v_0 et v_{n+1} correspondent au début et à la fin du projet et,
2. $A = \{v_i v_j$: si contrainte A_j doit commencer après la fin de A_i existe$\}$,
3. $c(v_i v_j) =$ durée $d(i)$ de la tâche A_i.



Tâches	T	G	R	B	S
Durée	3	1	2	3	4
Prédécesseurs	–	–	–	T, G, R	T

Méthode potentiel-tâches

Théorème

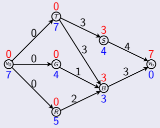
Soient (G, c) le réseau potentiel-tâches d'un problème d'ordon. simple

- π_i la date au plus tôt de la tâche A_i,
- η_i la date au plus tard de la tâche A_i,
- t_i le coût maximum d'un (v_0, v_i)-chemin dans (G, c) et
- t'_i le coût maximum d'un (v_i, v_{n+1})-chemin dans (G, c).

(a) G est sans circuit, v_0 est une racine de G et v_{n+1} est atteignable à partir de chaque sommet v_i.

(b) $\pi_i = t_i \ \forall i$.

(c) $\eta_i = t_{n+1} - t'_i \ \forall i$.



Démonstration

(a) S'il y avait un circuit dans G on ne pourrait pas exécuter le projet.

Démonstration de (b)

$$
\begin{aligned}
\pi_i &= \min\{\pi(i) - \pi(0) : \pi(\ell) \geq \pi(k) + d(k) \ \forall \text{ contrainte } (k,\ell)\} \\
&= \min\{\pi(i) - \pi(0) : \pi(\ell) - \pi(k) \geq d(k) \ \forall \text{ contrainte } (k,\ell)\} \\
&= \min\{\pi(v_i) - \pi(v_0) : \pi(v_\ell) - \pi(v_k) \geq c(v_k v_\ell) \ \forall v_k v_\ell \in A\} \\
&= -\max\{\pi'(v_i) - \pi'(v_0) : \pi'(v_\ell) - \pi'(v_k) \leq -c(v_k v_\ell) \ \forall v_k v_\ell \in A\} \\
&= -\max\{\pi'(v_i) - \pi'(v_0) : \pi' \text{ est un potentiel de } (G, -c)\} \\
&= -\min\{-c(P) : P \text{ est un } (v_0, v_i)\text{-chemin dans } (G, -c)\} \\
&= \max\{c(P) : P \text{ est un } (v_0, v_i)\text{-chemin dans } (G, c)\} \\
&= t_i.
\end{aligned}
$$

Démonstration de (c)

Similairement à (b).

Exemple

Exemple

On considère le problème d'ordonnancement précédent.

Tâches	T	G	R	B	S
Durée	3	1	2	3	4
Prédécesseurs	–	–	–	T, G, R	T

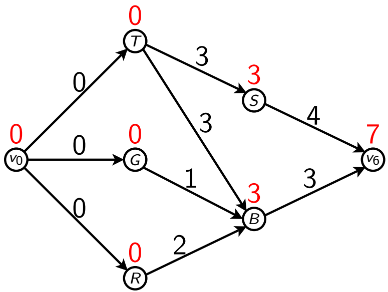
(a) Quelle est la durée minimale de la réalisation de ce projet ?

(b) Donner la liste des tâches critiques et un chemin critique (un (v_0, v_{n+1})-chemin de coût maximum).

Exemple

Solution de (a)

- Pour trouver les dates au plus tôt $\pi(A_i)$,
- il faut trouver les coûts t_i des plus longs (v_0, v_i)-chemins dans (G, c),
- on exécute l'algorithme de Bellman avec max au lieu de min dans la formule.

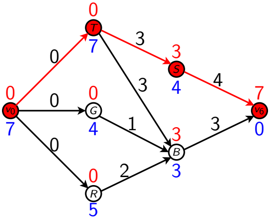


La durée minimale de la réalisation de ce projet est 7.

Exemple

Solution de (b)

- Pour trouver les tâches critiques ($\pi(A_i) = \eta(A_i)$),
- on a besoin des dates au plus tard $\eta(A_i)$ et pour cela on doit connaître
- le coût t'_i du plus long chemin de chaque sommet v_i à v_{n+1},
- on exécute donc l'algorithme de Bellman dans (G, c) avec
  - max au lieu de min dans la formule et
  - arc sortant au lieu d'arc entrant aux Etapes 2 et 3.



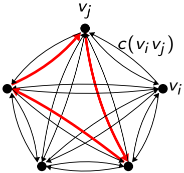
- Tâches critiques $\Longleftrightarrow$ $t_i + t'_i = \pi_i + (t_{v_6} - \eta_i) = t_{v_6} = 7 \Longleftrightarrow$ v_0, T, S, v_6.
- Il y a un seul chemin critique $v_0 TS v_6$.

Échanges de devises

Etant donnés les taux de change t_{ij} pour tout couple de devises i et j, peut-on trouver une série d'échanges de devises pour gagner de l'argent?

Définition : réseau de devises $(G = (V, A), c)$:

1. $V := \{v_1, \dots, v_n\}$ où v_i correspond à la devise i,
2. $A := \{v_i v_j :$ tout couple (i, j) de devises$\}$,
3. $c(v_i v_j) := -log(t_{ij})$.



Solution

Il s'agit de trouver un circuit absorbant C dans le réseau (G, c), puisque

$$1 < \prod_{v_i v_j \in C} t_{ij} \iff 0 > -log(\prod_{v_i v_j \in C} t_{ij}) = \sum_{v_i v_j \in C} -log(t_{ij}) = \sum_{v_i v_j \in C} c(v_i v_j) = c(C).$$