ENSIMAG 1ère année (2010-11)

Méthodes Numériques

Examen du 11 Mai 2011

Durée : 3h.

Les seuls documents autorisés sont les notes du cours et des travaux dirigés de méthodes numériques. Les calculatrices sont interdites.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte pour l'évaluation des copies.

Exercice 1

On considère une matrice réelle $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que pour tout $j = 1, \dots, n$

$$|a_{jj}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer qu'il existe $L \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure de diagonale unité et $U \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = L\,U$.

3. La matrice A suivante admet-elle une factorisation $A = LU$? Calculer cette factorisation s'il y a lieu.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On considère la suite de matrices $(B_k)_{k\geq 0}$ définie par

$$B_{k+1} = B_k\,(2\,I - A\,B_k), \quad k \geq 0, \tag{1}$$

la matrice $B_0 \in M_n(\mathbb{R})$ étant fixée.

1. Montrer que si la suite (B_k) converge et que sa limite est une matrice inversible, alors cette limite vaut A^{-1}.

2. Vérifier que $I - A\,B_{k+1} = (I - A\,B_k)^2$.

3. Montrer que si $\rho(I - A\,B_0) < 1$ alors $\lim_{k\to+\infty} B_k = A^{-1}$. A quelle vitesse s'effectue cette convergence ?

Exercice 3

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive (on suppose que A n'est pas un multiple de la matrice identité). On note $\alpha > 0$ la plus petite valeur propre de A et β sa plus grande valeur propre. Etant donné $b \in \mathbb{R}^n$, on considère la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système linéaire

$$A\,x = b. \tag{2}$$

On souhaite calculer x en utilisant une méthode itérative de la forme

$$x_{k+1} = x_k + w_{k+1}\, r_k, \quad k \geq 0, \tag{3}$$

où l'on note $r_k = b - A\,x_k$, et où les coefficients w_k $(k \geq 1)$ sont des paramètres strictement positifs qui seront déterminés par les valeurs propres de la matrice A.

1. La méthode du gradient à pas optimal rentre-t-elle dans cette classe de méthodes itératives ?

2. On considère le polynôme q_k défini de la manière suivante pour tout entier $k \geq 1$

$$q_k(\lambda) = (1 - \omega_k \lambda)\,(1 - \omega_{k-1}\lambda)\, \ldots\, (1 - \omega_1 \lambda)$$

et on définit la matrice $q_k(A) = (I - \omega_k A)\,(I - \omega_{k-1}A)\, \ldots\, (I - \omega_1 A)$. Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a $r_k = q_k(A)\, r_0$.

3. En déduire que pour tout $k \geq 1$ on a

$$\|r_k\|_2 \leq M\, \|r_0\|_2,$$

où $\|\ \|_2$ désigne la norme euclidienne et

$$M = \operatorname*{Max}_{\lambda \in [\alpha,\beta]} |q_k(\lambda)|. \tag{4}$$

Dans la suite du problème, on se donne un entier $N \geq 1$ et une permutation $(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, k_N)$ de $(1, 2, \ldots, N-1, N)$. On fixe

$$\omega_i = 2\left[\beta + \alpha - (\beta - \alpha)\cos\left(\frac{2\,k_i - 1}{2N}\,\pi\right)\right]^{-1}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Remarques : Ce choix de coefficients ω_i minimise la constante (4) pour $k = N$. Par ailleurs, bien que le polynôme q_N soit indépendant de la permutation définissant l'ordre des coefficients ω_i, le schéma (3) nécessite un choix astucieux de permutation afin d'éviter des instabilités numériques dûes aux erreurs d'arrondis lors des calculs sur machine.

4. Montrer l'identité

$$q_N(\lambda) = \frac{T_N(\mu - \frac{2\lambda}{\beta - \alpha})}{T_N(\mu)},$$

où T_N désigne le Nième polynôme de Tchebychev (voir les rappels en fin d'exercice) et

$$\mu = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}.$$

5. On note κ_2 le conditionnement de la matrice A pour la norme euclidienne et on introduit

$$\sigma = \frac{\sqrt{\kappa_2} - 1}{\sqrt{\kappa_2} + 1}.$$

Vérifier que $\mu = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^{-1})$.

6. En déduire que $T_N(\mu) = \frac{1}{2}(\sigma^N + \sigma^{-N})$.

7. Montrer que

$$\|r_N\|_2 \leq \frac{2\,\sigma^N}{1 + \sigma^{2N}}\,\|r_0\|_2.$$

8. Etant donné $\epsilon > 0$, déterminer une borne $N(\epsilon)$ garantissant que $\|r_N\|_2 \leq \epsilon\,\|r_0\|_2$ pour tout $N \geq N(\epsilon)$. Comment cette borne se comporte-t-elle lorsque $\kappa_2 \to +\infty$?

Dans la méthode itérative (3), on fixe maintenant $N \geq 1$ et on considère la suite $(\omega_i)_{i\geq 1}$ de période N définie par (5) lorsque $1 \leq i \leq N$.

9. Montrer que pour tout $p \geq 0$ on a

$$\operatorname*{Max}_{1\leq i\leq N} \|r_{i+pN}\|_2 \leq C_N \left(\frac{2\,\sigma^N}{1+\sigma^{2N}}\right)^p \|r_0\|_2,$$

où

$$C_N = \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq N, \lambda\in[\alpha,\beta]} |q_i(\lambda)|.$$

10. Etudier la convergence du schéma (3) quand $k \to +\infty$.

11. Comment peut-on adapter cette méthode itérative si on ne connaît pas exactement α et β mais si on en a des estimations $\tilde{\alpha} \leq \alpha$ et $\beta \leq \tilde{\beta}$?

Rappels sur les polynômes de Tchebychev.

Les polynômes de Tchebychev T_k $(k \geq 0)$ sont définis par la relation de récurrence

$$T_{k+1}(\xi) = 2\,\xi\,T_k(\xi) - T_{k-1}(\xi),$$

avec $T_0 = 1$, $T_1 = \xi$. Ils vérifient par ailleurs pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(k\,z) = T_k(\cos z)$$

où $\cos z = \frac{1}{2}(e^{i\,z} + e^{-i\,z})$.