2-4- Comment financer un investissement?

2-4-1 L'autofinancement

et la politique de dividende

Introduction:

Est-ce dans l'intérêt de l'entreprise de distribuer des dividendes?

Politique de dividende : décision affectant le financement de l'entreprise

Distribution de dividende

Amputation de la CAF

Intérêt de l'entreprise?

Autofinancement et partage des profits

Politique de dividende et valeur de la firme

Le partage des profits

3 logiques s'affrontent

- Actionnaires (vision CT?)
 - salariés

entreprise (vision LT)

Quelles règles de distribution des bénéfices?

En fait, pas de règle, cela est variable dans les entreprises. Dividende : intérêt à court terme

Investissement : intérêt à long terme

Quel est le coût de l'autofinancement?

- Quel doit être la rentabilité exigée ?
 - Cela dépend de la structure financière,
 l'autofinancement n'est pas une ressource gratuite!

Entreprise financée uniquement par fonds propres

Entreprise financée uniquement par dettes

Rentabilité exigée par les actionnaires

Autofinancement : servira au remboursement des dettes.

Pour maintenir la structure financière constante faire de nouvelles dettes : coût des nouvelles dettes

Les flux de fonds libérés par l'entreprise doivent être réinvestis si et seulement si leur rentabilité est >= au CMP

La politique de dividende

A première vue : question subalterne par rapport aux décisions d'investissement et de financement

Pour les professionnels question essentielle

Quelles pratiques ?

Avis partagés :
distribution - fiscalité ?

La controverse théorique

Si l'entreprise doit restituer aux actionnaires le capital ne pouvant pas être investi à un taux satisfaisant

Rentabilité des opérations industrielles et commerciales ?

On devrait observer des modifications importantes selon les années

A l'inverse, si la rentabilité des bénéfices était systématiquement supérieure à celle du marché, les dirigeants ne devraient jamais verser des dividendes

Existe-t-il une politique de dividendes optimale?

- Optimale car:
 - Maximise la valeur de la firme?
 - Ou crée de la valeur pour les actionnaires?
- 3 thèses en matière de politique de dividendes:
 - La distribution maximale
 - La neutralité
 - La distribution minimale

Distribution maximale

- Nécessité de verser des dividendes et de les augmenter
- La valeur d'une action est égale à la somme actualisée à l'infini des dividendes futurs
- □ Si on fait l'hypothèse d'un taux de croissance g des dividendes, on obtient le modèle de Gordon Shapiro :

$$P_0 = \frac{D_1}{R - g}$$

Plus on verse de dividendes, plus le taux de croissance g est grand, plus le cours de l'action devrait être élevé pour un même coût R des FP.

=>le montant des dividendes distribués et leur taux de croissance sont importants.

Formule de Gordon Shapiro quelques fois mal comprise!

Exemple : une entreprise a un capital d'un million d'actions et verse un dividende de 4 euros sur un BPA de 10 euros supposons g=12 % et R=16 %

$$P_0 = \frac{4}{0.16 - 0.12} = 100$$

Si l'entreprise décide de verser 8 euros - application « aveugle » : P0 = 200

4 euros par actions : sortie de fonds de 4 millions supplémentaires. Pour maintenir son programme d'investissement et sa structure financière :

l'entreprise va devoir procéder à une augmentation de capital (le nombre d'actions augmente de 4%)

Si le BN croît de 12 % par an, le BPA et le dividende augmenteront de 12-4 = 8%

$$P_0 = \frac{8}{0.16 - 0.08} = 100$$
 Valeur inchangée!

L'effet informatif des dividendes et le contrôle des actionnaires

Malgré l'argument fiscal et les coûts du marché, les entreprises versent des dividendes

Dividendes : revenus plus sûrs que les plus-values

Mais il existe des moyens plus sûrs encore: les obligations

Rôle informatif

Asymétrie d'information

Informations sur les perspectives d'avenir de l'entreprise

Rôle de contrôle des dirigeants

Dividende

Appel au marché

Renforce le pouvoir des actionnaires

Conclusion

- Dividendes : nombreuses interrogations
- De plus : différentes formes



Thèse la plus probable : l'effet informationnel

2-4-2 Le financement

par Fonds Propres

L'origine des Fonds Propres

Les capitaux propres regroupent tous les montants mis à la disposition de l'entreprise par les actionnaires:

- □ capital social (directement apporté par les actionnaires)
- □réserves (montants que les actionnaires ont préféré laisser à l'entreprise au lieu de les percevoir sous forme de dividendes)

Une fois par an, les actionnaires des sociétés par action décident de l'affectation du résultat (distribué aux actionnaires sous forme de dividendes ou réinvesti dans l'entreprise sous forme de réserves).

Tous les montants mis en réserve constituent des fonds que les actionnaires laissent à la disposition de l'entreprise pour lui permettre de financer son activité.

Les augmentations de capital

- □Elles permettent aux actionnaires actuels de la société ou à de nouveaux actionnaires d'apporter des ressources nouvelles qui viendront augmenter le capital social de l'entreprise.
- □ En échange de leur apport, les apporteurs de capitaux reçoivent des actions nouvelles qui sont créées à cette occasion.
- □ Pour augmenter leurs fonds propres les entreprises procèdent à une augmentation de capital en numéraire.
- □ Lorsque l'entreprise est cotée en bourse, les nouvelles actions sont émises à un cours inférieur au cours coté de manière à ne pas faire échouer l'opération.

Typologie des opérations en capital

- Augmentation de capital par souscriptions d'actions nouvelles en numéraire.
- Augmentation de capital par apports en nature.
- Augmentation de capital par incorporation de réserves.
- Augmentation de capital par conversion de dettes.
- Réduction de capital

Décisions financières et création de valeur, M. Albouy, Economica

Augmentation de capital par apport en numéraire

Principale source de fonds externes

Augmente les liquidités donc améliore la trésorerie

Augmentation du FRN, donc de la structure financière (capacité d'endettement)

Pratique:

- nouveau capital < 15-20 % de la capitalisation existante
- coût : 6 % du produit brut de l'opération (frais légaux, intermédiaires...)

Problèmes possibles

Dilution du résultat par action

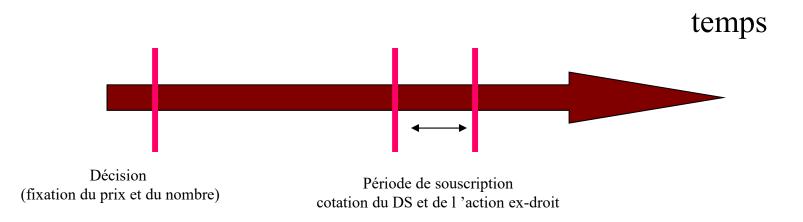
Dilution du pouvoir des anciens actionnaires (souvent obstacle essentiel à l'émission)

Fixation du prix d'émission et choix d'une date

Prix de souscription inférieur au cours de l'action
 Pour s'assurer de la réalisation de l'opération

Décote du prix émission de 20 à 30% selon la qualité de l'émetteur

Variables influençant sur la décote : volatilité du cours, croissance du dividende, cours /valeur nominale, année d émission...



Droit de souscription

- Modification mécanique du cours
- mécanisme correcteur afin de prendre en compte le différentiel de prix

Les anciens actionnaires reçoivent un droit préférentiel de souscription (DS) au prorata du nombre de titres détenus

DS = coupon attaché à l'action ancienne négociable et côté sur le marché



Baisse du cours mais pas de la richesse car les actionnaires peuvent vendre ou exercer leur droit

Calcul du droit de souscription

- P0 : cours de l'action avant détachement du droit (cours cum droit)
- P': cours théorique de l'action ex-droit
- □ Pe: prix d'émission
- N0 : nombre d'actions anciennes
- Ne : nombre d'actions émises (N0 / Ne est généralement entier) N0P0 + NePe = (N0 + Ne) P'

D 'où P' =
$$(N0P0 + NePe) / (N0+Ne)$$

Si
$$n = N0/Ne$$
 alors $P' = (nP0+Pe) / n+1$

D'où
$$DS = P0-P' = (P0-Pe) / (n+1) = (P'-Pe) / n$$

Décisions financières et création de valeur, M. Albouy, Economica

exemple

- Une société émet 1 action nouvelle pour 4 anciennes à 500 euros
- Dernier cours côté : 675 euros

Valeur théorique du droit de souscription : (675-500) / 5 = 35

Richesse de l'actionnaire ancien inchangée bien que le cours baisse à 640 euros

S'il ne souscrit pas : il vendra son droit et recevra 35 euros par action

S'il souscrit et possède 4 actions : 4 * 675 + 500 = 5 * 640

Pour le souscripteur, aucun cadeau : 1 action + 4 droits = 640 euros

Conclusions

Augmentation de capital : opérations importantes

Apport de nouvelles ressources

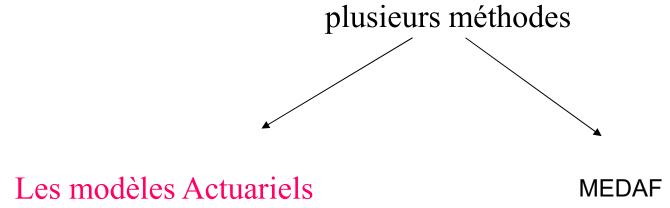
Modification de la structure de propriété

Mais nécessité de nombreux ajustements pour comparer valablement l'évolution des cours dans le temps

Le coût des Fonds Propres

Fonds propres : **PAS** une ressource gratuite !

Versement de Augmentation de la valeur de l'action



Le coût des fonds propres

 \square coût des fonds propres (FP) = taux de rentabilité que les actionnaires attendent de leur apport.

□l'investisseur qui préfère investir en FP risqués plutôt qu'en emprunts sans risque exige une rémunération Ka telle que

 $Ka = taux \ sans \ risque \ R0 + prime \ de \ risque$

La prime de risque est d'autant plus importante que le risque perçu par l'actionnaire est élevé.

Les modèles actuariels

Dividende, plus-value et taux de rentabilité

Le modèle de Gordon- Shapiro

Coût des Fonds Propres et coefficient de capitalisation des bénéfices

Dividende, plus-value et taux de rentabilité

- Gain pour l'actionnaire : dividende + plus-value
- Soit P0 le prix actuel d'une action i que l'on espère revendre dans un an au prix P1 et toucher un dividende D1

Taux de rentabilité espéré

$$E(Ri) = \frac{(P1 - P0) + D1}{P0}$$

$$E(Ri)=14 \%$$

Le prix aujourd'hui?

On peut réécrire l'équation :

$$P0 = \frac{D1 + P1}{1 + E(Ri)}$$

En fonction des anticipations sur P1, D1 et E(Ri) On fixe la valeur attribuée à l'action.

Exemple: $\sin P1 = 112$, D1 = 2 et E(Ri) = 16%

P0 = 98.3

L'action, qui cote 100 est surévaluée!

Un investisseur exigeant 16% de rentabilité pourra aussi évaluer l'action à 100 si il anticipe une plus value de 14 au lieu de 12!

Développement de l'équation de P0

Hypothèse : la rentabilité espérée par le marché n'est pas modifiée d'une année sur l'autre

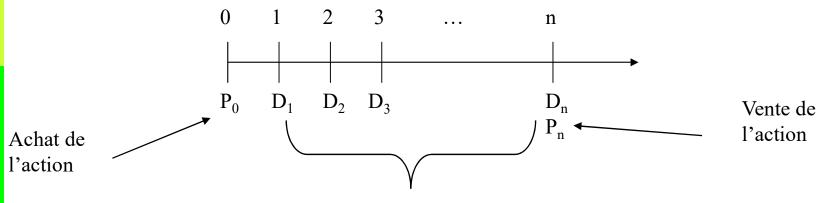
$$P1 = \frac{D2 + P2}{1 + E(Ri)}$$
 D'où
$$P0 = \frac{D1}{1 + E(Ri)} + \frac{D2}{(1 + E(Ri))^2} + \frac{P2}{(1 + E(Ri))^2}$$

$$P0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{Dt}{(1+Ri)^{t}} + \frac{Pn}{(1+Ri)^{n}}$$

(Par abus de langage on écrit E(Ri)=Ri)

Valeur d'une action : somme actualisée des dividendes futurs + prix à l'horizon n

Le coût des fonds propres: illustration



Encaissement de dividendes

La valeur de l'action est égale à la valeur actuelle des revenus futurs qu'elle génère.

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+Ka)^t} + \frac{P_n}{(1+Ka)^n}$$

Le modèle de Gordon-Shapiro

- Comment connaître Pn ?
- Faisons tendre l'horizon vers l'infini :

$$P0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Dt}{(1+Ri)^t}$$

Cours de l'action : somme actualisée à l'infini des dividendes futurs

Mais nécessité de faire des prévisions à très long terme sur les dividendes

Gordon & Shapiro (1956)

Pour simplifier, hypothèse sur le taux de croissance des dividendes

Hypothèse g constant à l'infini

- Hypothèse forte, surtout sur le long terme:
 - Soit g le taux de croissance des dividendes supposé constant à l'infini

$$D2 = D1 (1+g)$$
 Par récurrence : $Dt = D1 [(1+g)^{(t-1)}]$

En remplaçant Dt par sa valeur :
$$P0 = \frac{D1}{1+Ri} + \frac{D1(1+g)}{(1+Ri)^2} + \dots + \frac{D1(1+g)^{t-1}}{(1+Ri)^t} + \dots$$

Si Ri > g
$$P0 = \frac{D1}{Ri - g}$$

$$P0 = \frac{D1}{1+Ri} \left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+Ri}\right)^t}{1-\left(\frac{1+g}{1+Ri}\right)} \right]$$

Et donc
$$Ri = \frac{D1}{P0} + g$$

Le coût des fonds propres Modèle de Gordon-Shapiro

Quelle est la rentabilité du placement (action) sur la période ?

→ Si le dividende est constant (Di=Dj, i≠j).

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1 + Ka)^t} + \frac{P_n}{(1 + Ka)^n} \xrightarrow{n} \underbrace{n \longrightarrow \infty} \quad P_0 = \frac{D_1}{Ka} \longrightarrow Ka = \frac{D_1}{P_0}$$

→ Si le dividende à un taux de croissance de g% par an (Di+1 = Di (1+g))

$$P_{0} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{1}(1+g)^{t-1}}{(1+Ka)^{t}} + \frac{P_{n}}{(1+Ka)^{n}} \xrightarrow{n \to \infty} P_{0} = \frac{D_{1}}{ka - g} \to \left(Ka = \frac{D_{1}}{P_{0}} + g\right)$$

Le coût des fonds propres Exemple

Le directeur financier d'une grande entreprise cotée a publié le communiqué suivant :

« Le prochain dividende servi par action s'élèvera à 30€. Dans l'avenir celui-ci devrait croître en moyenne de 3% par an »

A la suite de cette annonce, le cours de l'action s'est stabilisé à 200 €. Dans ces conditions, quel est le taux de rémunération requis par les actionnaires ?

$$Ka = \frac{30}{200} + 3\% = 18\%$$

Coût des Fonds propres

$$Ri = \frac{D1}{P0} + g$$

Taux de rentabilité des actions : somme du rendement en dividendes (D1/P0) et du taux de croissance futur des dividendes

Exemple: action delta

cours : 70 euros - dividende anticipé : 2.1 euros -croissance à long terme : 11 %

$$Ri = (2.1/70) + 0.11 = 14\%$$

L'essentiel du coût des Fonds propres est contenu dans le taux de croissance anticipé des dividendes

Si la société ne verse pas de dividende?

pas de dividende, selon GS, P0 = 0!

Cas n°1

L'entreprise n'a pas versé à la suite de mauvais résultats

L'entreprise ne verse pas de dividende pendant les 2 prochaines années mais compte verser un dividende de 4.5 euros dans 3 ans Si Ri = 15% et g = 10% à partir de la 3 ème année

$$P2 = \frac{D3}{Ri - g} = \frac{4.5}{0.15 - 0.10} = 90$$
 $P0 = \frac{P2}{(1 + Ri)^2} = \frac{90}{1.15^2} = 68$

Coût des fonds propres :

$$P0 = \frac{D3}{(1+Ri)^2(Ri-g)}$$

Cas n°2

L'entreprise a décidé de ne jamais verser de dividendes (DELL)

Coût des FP : plus value espérée

Si le prix théorique est très différent du prix du marché

- Le marché a toujours raison!
- Si le prix est différent, cela provient des anticipations erronées des analystes

Comment faire Si l'entreprise n'est pas cotée ?

Entreprises moyennes : pas cotées et versent peu de dividendes Comment calculer leur coût des FP?

Demander aux actionnaires majoritaires la rentabilité qu'ils attendent de leur capital

Conclusion

- Nous avons vu la méthode actuarielle:
 - Donnent estimation du coût des FP dans une vision à LT de l'entreprise
 - Cet horizon à LT adapté avec celui des projets investissement
 - Mais...ces modèles ignorent le prix du risque sur les marchés financiers
 - Sur un plan théorique, le MEDAF semble particulièrement solide puisqu'il permet de calculer le prix du risque sur les marchés

2-4-3 Les emprunts à moyen et long terme

Le financement par dettes

Il peut se faire par recours à des dettes bancaires ou à des dettes obligataires

Dettes bancaires: unique prêteur, la banque

Dette obligataire: multiples prêteurs, les obligataires

Les emprunts

Les emprunts sont la principale source de financement extérieure des entreprises:

- → Avantage fiscal
- → Ne modifie pas la structure de propriété de l'entreprise

L'entreprise peut emprunter des fonds en ayant recours aux banques ou à des établissements spécialisés qui lui accorderont des emprunts. Elle peut aussi avoir directement recours à l'épargne publique en émettant des obligations.



Obligation:

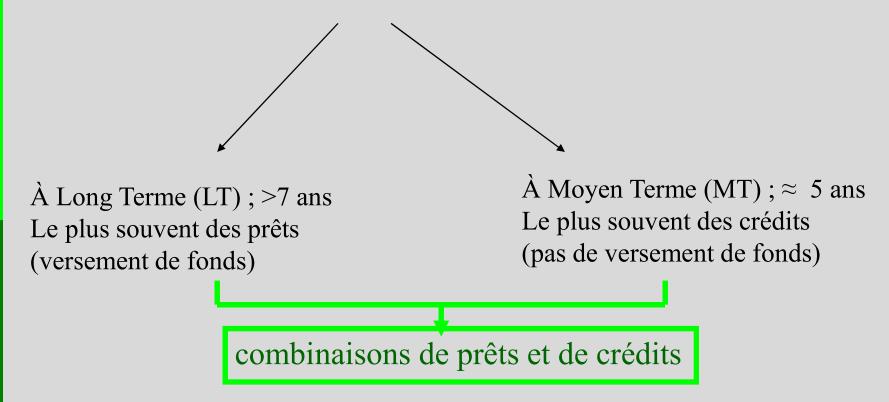
- → large public (nombreux prêteurs potentiels)
- →titre de créance représentatif d'une dette

Emprunt indivis:

→contracté auprès d'un seul organisme financier (le plus souvent une banque

Les emprunts « indivis » (dette indivisible)

Toute entreprise peut émettre de la dette auprès des institutions de crédit moyennant des garanties (banques, établissements financiers spécialisés)



Les remboursements d'emprunts

L'annuité d'un emprunt correspond à la trésorerie déboursée annuellement pour le <u>remboursement</u> de la dette et la charge <u>d'intérêt</u>.

Annuité = amortissement de l'emprunt + Intérêt

Différents types d'emprunts:

- □L'emprunt à amortissement constant (peu courant)
- □ L'emprunt à remboursement in fine (emprunt obligataires)
- □L'emprunt à annuités constantes (le plus courant)
- L'emprunt à annuités progressives (parfois dans l'immobilier)
- ☐L'emprunt à coupon zéro (obligations)

Le taux actuariel des emprunts

Le coût des emprunts \(\neq \) La somme des intérêts

= Le taux actuariel

Le taux actuariel tient compte :

- ✓Du taux indiqué par la banque
- ✓ Des frais de dossier, assurances etc...
- ✓ Du mode d'amortissement choisi
- ✓ De la fiscalité

Rembourser un emprunt...

Plusieurs méthodes pour rembourser un emprunt indivis ou obligataire

Remboursement de la totalité à échéance

Amortir le capital de façon régulière

Annuités constantes ou progressives ...

A- Emprunt à amortissement constant

□ Pas le plus courant

La part en capital remboursée chaque période est identique.

Les intérêts payés à chaque période varient (décroissants).

L'annuité payée à chaque période varie (décroissante).

L'emprunt à amortissement constant: exemple

emprunt :

 montant : 100 000 euros , taux annuel : 8%, durée : 5 ans , amortissement constant (linéaire) = 20 000 euros par an

Année	Capital	Amortissement	Intérêts	Annuité
1	100000	20000	8000	28000
2	80000	20000	6400	26400
3	60000	20000	4800	24800
4	40000	20000	3200	23200
5	20000	20000	1600	21600
Total		100000	24000	124000

$$100000 = \frac{28000}{1+i} + \frac{26400}{(1+i)^2} + \frac{24800}{(1+i)^3} + \frac{23200}{(1+i)^4} + \frac{21600}{(1+i)^5}$$

$$i = 8\%$$

Coût actuariel : taux d'actualisation tel que la VA est égal au montant du capital prêté

Si la banque prélève 2000 euros de frais de dossier ? i = 8.81 %

B- Emprunt à remboursement in fine

Totalité du capital emprunté est remboursée en une seule fois, à la date d'échéance.

Pendant la durée du prêt, l'emprunteur ne paie que les intérêts (c'est-à-dire l'usage du capital).

L'annuité payée à chaque période précédant l'échéance est restreinte aux intérêts.

L'emprunt à remboursement in fine: exemple (1)

Même exemple que précédemment mais avec remboursement in fine

Année	Capital	Amortissement	Intérêts	Annuité
1	100000	0	8000	8000
2	100000	0	8000	8000
3	100000	0	8000	8000
4	100000	0	8000	8000
5	100000	100000	8000	108000
Total		100000	40000	140000

Le cumul des intérêts est supérieur à l'amortissement constant parce que le capital est remboursé en totalité en 5ème année.

L'emprunt à remboursement in fine : exemple (2)

Coût actuariel :

$$100000 = \frac{8000}{1+i} + \frac{8000}{(1+i)^2} + \frac{8000}{(1+i)^3} + \frac{8000}{(1+i)^4} + \frac{108000}{(1+i)^5}$$

$$i = 8 \%$$

Avec 2000 euros de frais de dossier : 8.51 %

L'impact des frais de dossier n'est pas identique.

Il sera d'autant plus fort que l'amortissement est rapide.

Quel emprunt doit-on choisir?

Dépend de la situation financière et de ses opportunités de refinancement futur

C- Emprunt à annuités constantes

- □ Type d'emprunt très courant
- □ L'annuité remboursée chaque période est identique.
- Les intérêts payés à chaque période varient (décroissants).
- L'amortissement remboursé à chaque période (remboursement du capital) varie (croissant).

L'emprunt à annuités constantes : montant de l'annuité

□ E = montant de l'emprunt de durée n

A : montant de l'annuité constante

i : taux actuariel de l'emprunt

$$E = \sum_{t=1}^{n} \frac{A}{(1+i)^{t}} = \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^{2}} + \dots + \frac{A}{(1+i)^{n}}$$



$$E = \left(\frac{A}{1+i}\right) \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}}\right] \qquad \longrightarrow \qquad E = \frac{A}{i} \left(1 - (1+i)^{-n}\right)$$

$$A = \frac{iE}{1 - (1+i)^{-n}}$$

L'emprunt à annuités constantes : exemple (1)

Avec le même exemple que précédemment:

$$A = \frac{0.08 \times 100000}{1 - (1.08)^{-5}} = 25045.65$$

Année	Capital	Amortissement	Intérêts	Annuité
1	100000	17046	8000	25046
2	82954	18410	6636	25046
3	64544	19882	5164	25046
4	44662	21473	3573	25046
5	23189	23189	1855	25046
Total		100000	25227,92	125230

L'emprunt à annuités constantes: exemple (2)

Les *Manufactures Ardéchoises* envisagent d'emprunter 4 millions d'euros dans les conditions suivantes:

- → Le remboursement est prévu par annuités constantes sur 5 ans au taux de 9,2%
- →Les frais de dossier de 73 480 €, payables dès le déblocage des fonds, ne sont pas amortis
- → L'entreprise est imposée au taux de 30%.

Déterminer le coût net de ce financement.

D- Emprunt à annuités progressives

- Fréquent lorsque l'emprunteur ne peut pas payer des annuités élevées les premières années
- L'annuité payée à chaque période est croissante.
- Les intérêts payés à chaque période sont décroissants.
- L'amortissement de la part en capital est croissant.

L'emprunt à annuités progressives: calcul de l'annuité

$$E = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+i)^t} = \frac{A_1}{1+i} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+i)^n}$$

$$E = \frac{A_1}{(1+i)} \left[1 + \frac{1+g}{1+i} + \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^2 + \dots \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^{n-1} \right]$$



$$A_{1} = \frac{E(i-g)}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n}}$$

L'emprunt à annuités progressives: exemple

Emprunt de 100 000 € pendant 5 ans, g = 5%, i=8%

$$A_1 = \frac{100000 (0.08 - 0.05)}{1 - \left(\frac{1 + 0.05}{1 + 0.08}\right)^5} = 22833.79$$

Connaissant A₁, on en déduit les quatre autres

Année	Capital	Amortissement	Intérêts	Annuité
1	100000	14834	8000	22834
2	85166	17162	6813	23975
3	68004	19734	5440	25174
4	48271	22571	3862	26433
5	25699	23189	2056	27755
Total		100000	26171,214	126171

E- Emprunt zéro-coupon

□ Le capital et les intérêts capitalisés sont remboursés à l'échéance.

Aucun flux (intérêt ou amortissement) avant échéance.

L'emprunt zéro coupon: exemple

- Emprunt de 100 000 € sur 5 ans à 8%.
- Un seul paiement à la fin de la 5^{ème} année de:

$$A_5 = 1000000 * (1.08)^5 = 146932 .81$$

Le capital restant dû à chaque période augmente des intérêts

Intéressant si l'entreprise peut réinvestir à un taux supérieur à celui de l'emprunt.

Coût des emprunts et fiscalité (1)

- Dette : avantage fiscal sur les fonds propres car les intérêts sont déductibles du bénéfice imposable
- Coût actuariel d'un emprunt après impôts=taux avant impôt diminué de l'économie fiscale procurée par les intérêts de la dette

$$a = i(1 - t)$$

Coût des emprunts et fiscalité (2)

Exemple: Emprunt avec remboursement in fine

E= emprunt d'une durée n, i = taux actuariel avant impôt, a= taux actuariel après impôt, t= taux d'imposition des bénéfices

Montant des intérêts après impôt = i E (1-t)

$$E = \frac{iE(1-t)}{1+a} + \frac{iE(1-t)}{(1+a)^{2}} + \dots + \frac{iE(1-t)}{(1+a)^{n-1}} + \frac{iE(1-t)+E}{(1+a)^{n}}$$

$$E = \frac{iE(1-t)}{1+a} \left[1 + \frac{1}{1+a} + \dots + \frac{1}{(1+a)^{n-1}} \right] + \frac{E}{(1+a)^{n}}$$

$$E \left[1 - (1+a)^{-n} \right] = \frac{iE(1-t)}{a} \left[1 - (1+a)^{-n} \right] \qquad a = i(1-t)$$