Introduction à la formalisation en mathématiques

Stage de rentrée $1^{\text{ère}}$ année

S. Meignen

2020/2021

Table des matières

Chapitre 1

Propriétes élémentaires des fonctions, des suites et des séries

1.1 Continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

Définition 1 *Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble, $X \neq \emptyset$, $f : X \to \mathbb{R}$. Soit $a \in X$, on dit que f est continue en a s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ tende vers b lorsque x tend vers a.*

En termes mathématiques on écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow\ |f(x) - b| \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

On peut aussi définir la continuité à l'aide des suites :

Définition 2 *f est continue en a s'il existe b tel que quelquesoit la suite x_n tendant vers a, $f(x_n) \to b$.*

Définition 3 *On dit que f est continue en X si elle est continue en tout point de X*

Exercices :

1. Montrer que $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $E[x]$, où E désigne la partie entière de x est discontinue (considérer la suite $x_n = -\frac{1}{n}$).

1.2 Dérivabilité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

Définition 4 *On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est dérivable ($X \subset \mathbb{R}$) si pour tout $x \in X$:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. Dans ce cas, on pose $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

Remarque 1 *Une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue.*

Exemple : Soit $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$.

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Etudier la continuité de la dérivée de f en 0.

Proposition 1

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
1. Il existe un réel l tel que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = l$
2. Il existe un réel l et une application φ tel que pour tout h $f(x_0+h) = f(x_0) + hl + h\varphi(h)$ avec $\varphi(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Démonstration 1) $\Rightarrow$ 2) On pose $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - l$, alors on obtient $\varphi(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$ et

$$f(x+h) = f(x) + hl + \varphi(h),$$

ce qui prouve le résultat.
2) $\Rightarrow$ 1), $f(x+h) = f(x) + hl + \varphi(h)$ implique $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = l + \varphi(h) \underset{h\to 0}{\to} l$.

Exercices :
1. Montrer que toute application dérivable est continue.
2. Démontrer que $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
3. Calculer la dérivée de $u(x) = \frac{1}{v(x)}$.
4. Calculer la dérivée de $u(v(x))$.
5. Calculer la dérivée de $u(x)^n$, pour n dans $\mathbb{Z}$.

Utilisation de la proposition 1 pour calculer des limites. Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$,
2. $\lim\limits_{n\to +\infty} (1+\frac{1}{n})^n$,

Exercices de rappel sur la récurrence :
1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$u_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$$
Calculer u_n en fonction de u_0 et n.

1.3 Formule de Taylor-Young

On présente ici la formule de Taylor-Young qui consiste en une généralisation de la proposition 1 aux fonctions n fois dérivables.

Théorème 1 (Formule de Taylor-Young)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivables au point a, alors au voisinage de a, on a :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (t-a)^n \varphi(t-a)$$

avec $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t-a) = 0$.

Démonstration Soit f dérivable en a, on a : $f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + (t-a)\varphi(t-a)$, avec $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t-a) = 0$.
Supposons que pour toute fonction Ψ, $n-1$ fois dérivables en a on ait :

$$\Psi(t) = \Psi(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} \Psi^{(k)}(a) + (t-a)^{n-1} \varphi(t-a)$$

avec $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t-a) = 0$.
Soit f une fonction n fois dérivable en a. On a f', $n-1$ fois dérivable. On a donc :

$$f'(t) = f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k f^{(k+1)}(a)}{k!} + (t-a)^{n-1} \varphi(t-a)$$

En intégrant entre 0 et a, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} + \int_a^x (t-a)^{n-1} \varphi(t-a) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^x (t-a)^{n-1} \varphi(t-a) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + (x-a)^n \tilde{\varphi}(x-a) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\lim_{x \to a} \tilde{\varphi}(x-a) = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to a} \frac{\int_a^x (t-a)^{n-1} \varphi(t-a)}{(x-a)^n} = 0$.
Or,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta, \quad |t-a| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(t-a)| \leq n\varepsilon.$$

Ainsi, si :

$$|x-a| \leq \eta \Rightarrow |\tilde{\varepsilon}(x-a)| = |\frac{\int_a^x (t-a)^{n-1} \varphi(t-a)}{(x-a)^n}| \leq |n\nu \frac{\int_a^x (t-a)^{n-1}}{(x-a)^n}| \leq \varepsilon$$

Remarque : $(x-a)^n\tilde{\varphi}(x-a)$ peut aussi se noter $o((x-a)^n)$.

On appelle développement limité (DL) à l'ordre n en a son développement de Taylor-Young à l'ordre n en a.
Calcul de développements limités usuels :

1. DL de $\cos(x)$ à l'ordre 4 en 0.
2. DL de $\sin(x)$ à l'ordre 4 en 0.
3. DL de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 4 en 0.
4. DL de $\ln(x)$ à l'ordre 4 en 1.

Calcul de développements limités, en utilisant des compositions de DL :

1. DL de $\tan(x)$ à l'ordre 4 en 0.
2. DL de $e^{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0.

1.4 Notion de primitive, formule d'intégration par parties et formule de Taylor avec reste intégral

Définition 5 *On dit que f est de classe C^1 en x_0 si f est dérivable en x_0 et que la dérivée est continue en x_0. On dit que f est de classe C^n en x_0 si f est n fois dérivable et si sa dérivée nième est continue.*

Rappelons maintenant la notion de primitive d'une fonction continue.

Définition 6 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ pour tout $c \in [a,b]$, on appelle primitive de f qui s'annule en c la fonction :*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

On a $F'(x) = f(x)$.

On peut alors énoncer le théorème d'intégration par parties

Théorème 2 Formule d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

La démonstration découle directement du fait que $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ et que f et g sont de classe C^1 sur $[a,b]$.
On donne alors quelques exemples de l'utilisation de la formule d'intégration par parties :

1. Calcul de l'intégrale $\int_1^x t^2\ ln(t)\ dt$.
2. Montrer que si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)dt = 0$$

3. Calculer $\int_0^x t^2 \sin(t)dt$
4. Calculer, si a et b sont deux réels non nuls et x un réel, en faisant deux intégrations par parties :
$$f(x) = \int_0^x e^{at} \cos(bt)dt$$
5. Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$ calculer
$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Une autre application du théorème d'intégration par parties est le théorème de Taylor avec reste intégral.

Théorème 3 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit f de classe C^{n+1} sur I, alors $\forall a, b \in I$:
$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Démonstration La démonstration se fait par récurrence, soit f de classe C^1, on a
$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

On suppose que la formule pour une fonction de classe C^n, i.e. :
$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt.$$

Soit alors f une fonction de classe C^{n+1} alors f est aussi de classe C^n donc vérifie l'écriture précédente, et en intégrant par parties ($f^{(n)}$ est C^1) on obtient le résultat :
$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \end{aligned}$$

.

1.5 Formule de changement de variables dans les intégrales

Théorème 4

Soit φ une application de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\varphi([a,b])$ et f une application continue de $\varphi([a,b])$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b (fo\varphi)(t)\varphi'(t)dt$$

Démonstration Considérons la fonction $F(x) = \int_a^x (fo\varphi)(t)\varphi'(t)dt$ et $G(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)dt$. on a tout de suite que $F'(x) = (fo\varphi)(x)\varphi'(x)$ et $G'(x) = F'(x)$ (on remarque que $G(x) : x \to \varphi(x) \to \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)dt$ et on applique le théorème de dérivation d'une composition de fonctions). $G(x)$ et $F(x)$ sont deux primitives d'une même fonctions et s'annulent toutes les deux en a donc sont égales. En pratique on dit que l'on pose $u = \varphi(t)$. Il s'agit d'identifer φ et φ' dans l'intégrale et de changer les bornes.

1. Calcul de $\int_2^7 \frac{1}{xln(x)}dx$, et de $\int_0^x \frac{1}{3+e^{-t}}dt$.
2. Calcul de $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(t^2)dt$.
3. Quand la fonction à intégrer se présente comme une fraction rationnelles en x et $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, on pose $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, exemple $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

Il existe toute une série de changements de variable usuels dépendant du type d'intégrales étudiées. On peut alors étendre ce principe en dimension supérieure, bien qu'il faille alors définir la notion de continuité, et de fonction C^1.

$$\begin{array}{llcl} \varphi : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \to & (\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \end{array}$$

Les applications φ_i sont appelées applications partielles de φ, et φ est de classe C^1 si les applications partielles sont différentiables, c'est-à-dire que pour tout i et tout x_j,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, x_n) - \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, x_n)}{h} = l_{i,j}(x_j) < \infty$$

et que les applications $x \to l_{i,j}(x)$ sont continues.

Définition 7 *Lorsque les applications partielles sont différentiables, on appelle matrice jacobienne de φ en $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, la matrice définie par :*

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Alors on peut écrire :

Définition 8 *On appelle jacobien de φ le réel $|J_\varphi|$ égal au déterminant de la matrice jacobienne.*

On a alors le théorème de changement de variables.

Théorème 5 (changement de variables)

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^n$. Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (u_1, \cdots, u_n) & \rightarrow & (x_1 = \varphi_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_n = \varphi_n(u_1, \cdots, u_n)) \end{array}$$

tel que φ admette un jacobien $|J_\varphi|$. Le domaine D où varie $(x_1, \cdots, x_n)$ est l'image par φ d'un domaine Δ. Soit f une fonction continue et bornée sur D. Alors :

$$\int_D f(x)dx = \int_\Delta f(\varphi(u))|J_\varphi|du$$

Dans le plan, le changement classique de changement de variables est le passage en coordonnées polaires

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \rightarrow & (x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)) \end{array}$$

On a alors $|\tilde{J}_\varphi| = r$.
Exercices :

1. Calcul de l'aire d'un disque de rayon R
2. Calcul du volume de la sphère de rayon R
3. Calcul de l'aire délimitée par une ellipse d'axes de longueurs a et b
4. Calcul de la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (on calculera l'intégrale double $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$).

Correction du point 1 :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{x^2+y^2\leq R^2} dxdy = \int_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi[} \chi_{r^2\leq R^2} rdrd\theta = \int_{[0,2\pi[}\int_0^R rdrd\theta = \pi R^2$$

Correction du point 2 :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} dxdy &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi[} \chi_{r^2(\frac{\cos^2(\theta)}{a^2}+\frac{\sin^2(\theta)}{b^2})\leq 1} rdrd\theta \\
&= \int_{[0,2\pi[}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2(\theta)+a^2\sin^2(\theta)}}} rdrd\theta \\
&= \int_{[0,2\pi[} \frac{a^2b^2}{2(b^2\cos^2(\theta)+a^2\sin^2(\theta))}d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2(\theta)+a^2\sin^2(\theta)}d\theta \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2b^2}{b^2+a^2u^2}du = 2ab\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{au}{b})^2}\frac{a}{b}du = ab\pi
\end{aligned}$$

1.6 Notions d'intégrale impropre

Nous avons déjà vu la notion de primitive, si f est continue sur $]0,b]$, on définit

$$\int_0^b f(t)dt = \lim_{x\to 0}\int_x^b f(t)dt$$

qui peut être finie ou infinie selon les cas. Exemple : $\int_0^1 ln(t)\ dt$.
De la même manière, pour toute fonction f continue sur $[b,+\infty[$, on définit

$$\int_b^\infty f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_b^x f(t)dt$$

qui peut être finie ou infinie selon les cas. Exemple : $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$.
Remarque : soit f continue sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ convergent.
On présente alors les résultats classiques sur les intégrales de Riemann :

Proposition 2

Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Soit $\alpha\geq 0$.

1. $b\in\mathbb{R}$, $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha<1$
2. $a>0$, $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha>1$

Démonstration

1. Le problème est en 0, $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0}\int_x^b t^{-\alpha}dt$. Si $\alpha\neq 1$ on a, $\int_x^b t^{-\alpha}dt = [\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_x^b = \frac{1}{-\alpha+1}[x^{-\alpha+1} - b^{-\alpha+1}]$, qui tend, lorsque x tend vers 0, vers $\frac{b^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$ si $\alpha<1$ et vers $+\infty$ sinon. Si $\alpha=1$, $\int_x^b\frac{dt}{t} = ln(b)-ln(x)$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.
2. Le raisonnement est analogue au cas précédent.

Proposition 3

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}_+$. Si

$$\exists l\in\overline{\mathbb{R}}\ \exists\alpha\in\mathbb{R}_+ \text{ tq } \lim x^\alpha f(x) = l$$

Alors :

1. Si $l\in\mathbb{R}^*$: $\int_a^\infty f(t)dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha>1$
2. Si $l=0$ et $\alpha>1$ alors $\int_a^\infty f(t)dt$ CV
3. Si $l=+\infty$ et $\alpha<1$ alors $\int_a^\infty f(t)dt$ DIV

Démonstration

1. Par définition de la limite, on peut écrire :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \geq A,\ \frac{l}{2} \leq x^\alpha f(x) \leq 2l,$$

donc $\forall x \geq A$, $\frac{l}{2x^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{2l}{x^\alpha}$, d'où le résultat.

2. si $l = 0$, on a

$$\exists A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \geq A,\ 0 \leq x^\alpha f(x) \leq \varepsilon,$$

donc, si $\alpha > 1$, alors comme $\int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^\alpha} dx$ converge, on a le résultat.

3. $l = +\infty$, soit $B > 0$, on a alors :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \geq A,\ B \leq x^\alpha f(x),$$

donc, si $\alpha < 1$ comme $\int_a^{+\infty} \frac{B}{x^\alpha} dx$ diverge, on a le résultat.

Exercices :

1. Montrer que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ est bien définie.
2. Pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante est-elle définie ?

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1.7 Application : Calcul des séries de Riemann

Étant donnée une suite de terme général u_n, étudier la série de terme général un c'est étudier la suite obtenue en prenant la somme des premiers termes de la suite (u_n) (on utilise cette notation pour définir l'ensemble des termes de la suite), autrement dit la suite de terme général S_n défini par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

L'étude d'une série peut passer par la recherche d'une écriture simplifiée des sommes finies en jeu et par la recherche éventuelle d'une limite finie quand n tend vers l'infini. Quand cette limite existe, la série est dite convergente, et la limite de la suite (Sn) est alors appelée somme de la série, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Un cas particulier est l'étude des séries de Riemann :

Théorème 6

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration On fait la démonstration en faisant des comparaisons avec une intégrale. En effet si $\alpha \geq 0$ la série diverge grossièrement. Maintenant si α est négatif, nous pouvons écrire pour tout entier $n \geq 1$, que tout $x \in [n, n+1]$:

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

et alors en utilisant la relation de Chasles, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Donc, l'inégalité de gauche nous dit que si $\alpha > 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ est finie et l'inégalité de droite nous dit que si $\alpha < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est infini. Si $\alpha = 1$, on a :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

donc la série diverge aussi.

1.8 Intégrale absolue convergence et semi-convergente

Définition 9 *Soit f continue sur $[a, \alpha[$ alors $\int_a^\alpha f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_a^\alpha |f(t)|dt$ converge*

Théorème 7

Si f est continue sur $[a, \alpha[$ alors si $\int_a^\alpha f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Définition 10 *L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite semi convergente ssi $\int_a^b f(t)dt$ converge mais $\int_a^b |f(t)|dt$ diverge*

Exemple fondamental : $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$. On calcule $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. On fait une intégration par parties en posant $u'(t) = sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$. On a donc

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{1-\cos(t)}{t}]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

on a $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue en 0 donc l'intégrale converge, et le premier terme tend vers 0.
Sans faire d'astuces dans l'intégration par parties, on peut remarquer que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge}$$

Alors

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [-\frac{\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

or $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ donc $\int_1^x |\frac{\cos(t)}{t^2}|dt$ converge donc $\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ converge. Comme le premier terme tend vers $\cos(1)$ on a la convergence globale.
Maintenant intéressons nous à l'absolue convergence. Pour tout $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k\pi}$, donc

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{k\pi}dt.$$

Or $t \to |\sin(t)|$ est π-périodique, positive donc $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|dt = C$ constante, d'où :

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{k\pi}$$

qui est une série divergente donc $\int_0^{\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ diverge.

1.9 Intégrales dépendant d'un paramètre

Pour étudier en détails les intégrales dépendant d'un paramètre, on a besoin de la notion de continuité uniforme.

Définition 11 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ alors f est uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ , \ \forall (x,y) \in I \ \ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Rq : Il est évident que toute fonction uniformément continue est continue.
Inversement, on a le théorème suivant :

Théorème 8 (Heine)

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est uniformément continue. De même, toute fonction continue sur un produit d'intervalle fermé de $\mathbb{R}^n$ est uniformément continue.

La notion de continuité et continuité uniforme s'étant naturellement aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, par

— Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}^n$, alors f est continue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ , \ \forall x \in I \ \ \|x - x_0\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

La valeur absolue étant remplacée par une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

— Soit I produit d'intervalles de $\mathbb{R}^n$ alors f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ , \ \forall (x,y) \in I \ , \ \|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

On a alors une application directe de ce théorème :

Théorème 9

Soit f continue sur $[a,b] \times [c,d]$ alors

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

est continue sur $[c,d]$.

Démonstration Soit t_0 un point de $[c,d]$. Le théorème de Heine (théorème 6) s'applique alors à la fonction f sur $[a,b]\times[c,d]$: elle est donc uniformément continue. En particulier, pour tout $t\in[c,d]$:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\eta>0\ \text{ tel que },\forall t\in[c,d],\qquad |t-t_0|\leq\eta\Rightarrow|f(x,t)-f(x,t_0)|\leq\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Dans ce cas, pour tout t tel que $|t-t_0|\leq\eta$

$$|F(t)-F(t_0)|=|\int_a^b(f(x,t)-f(x,t_0))dx|\leq(b-a)\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Donc F est continue en t_0.

— Montrer que la fonction $F(x)=\int_0^\pi\sin(x+t)e^{xt^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$, trouver la limite quand x tend vers 0 de $F(x)$.
— Pour $x\geq1$, on pose $F(x)=\int_0^\pi\sqrt{x+\cos(t)}dt$.
  1. Vérifier que F est bien définie sur $[1,+\infty[$.
  2. Montrer que F est bien continue sur $[1,+\infty[$.

  Correction : 1) Soit $x\in[1,+\infty[$. La fonction $t\to\sqrt{x+\cos(t)}$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ donc intégrable, et $F(x)$ existe.
  2) Soit $A>1$. Pour $(x,t)\in[1,A]\times[0,\pi]$, la fonction $f(x,t)=\sqrt{x+\cos(t)}$ est uniformément continue sur $[1,A]\times[0,\pi]$. Donc F est continue en x.

Par ailleurs, on a le théorème suivant de dérivation sous le signe intégrale, des intégrales dépendant d'un paramètre.

Théorème 10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J=[a,b]$, alors
1. $(x,t)\to f(x,t)$ continue sur $I\times J$.
2. $(x,t)\to\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ continue sur $I\times J$.
3. $F(x)=\int_a^b f(x,t)dt$ classe C^1, et $F'(x)=\int_a^b\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$

Ex : Calculer la dérivée de $F(x)=\int_0^1\frac{dt}{x^2+t^2}$ et montrer que

$$\int_0^1-\frac{2x}{(x^2+t^2)^2}dt=-\frac{1}{x^2}\arctan(\frac{1}{x})-\frac{1}{x(1+x^2)}.$$