Fiche d'exercices n°3

Exercice 1. Dans un laboratoire d'astrophysique, on s'intéresse à un certain type de particules cosmiques. Un détecteur a relevé les durées d'attente en heures entre les réceptions successives des premières particules captées.

75	265	225	402	35	105	411	346	159	229
62	256	431	177	56	144	354	178	386	294

On admet que ces durées sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Les principaux indicateurs statistiques de cet échantillon sont $\bar{x}_n = 229.5$, $s'_n = 129$, $\tilde{x}_n = 227$ et $cv_n = 0.548$.

1. Déterminer une loi de probabilité vraisemblable pour ces données.
2. Estimer le paramètre de cette loi par la méthode des moments.
3. Estimer ce paramètre par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. Comparer les qualités de ces estimateurs. Que choisir comme estimateur ?
5. Quand, en moyenne arrivera la prochaine particule ? Quelle est la probabilité que la prochaine particule arrive avant les 100 prochaines heures ? Combien de particules peut-on s'attendre à recevoir en un an ?

Exercice 2. On considère un échantillon de taille n de la loi exponentielle $\exp(\lambda)$. On sait que l'estimateur de maximum de vraisemblance et l'estimateur des moments de λ sont égaux à $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$.

1. Montrer que cet estimateur est biaisé. Proposer un estimateur sans biais $\hat{\lambda}'_n$.
2. Montrer que cet estimateur sans biais est convergent, asymptotiquement efficace, mais pas efficace.
3. Déterminer une fonction pivotale pour λ.
4. Construire un intervalle de confiance bilatéral de seuil α pour λ.
5. Construire des intervalles de confiance unilatéraux du type $[0, \lambda_{sup}]$ et $[\lambda_{inf}, +\infty[$.