

## PSAF- Feuille d'exercices 5

### Exercice 1.

A Griville s'il fait beau un jour, il pleut le lendemain avec probabilité  $3/4$ . S'il pleut un jour, il fait beau le lendemain avec probabilité  $1/8$ . Il en est ainsi depuis la fondation de la ville, en l'an 1200. On se propose de calculer la probabilité qu'il fasse beau demain (sans information sur le temps d'aujourd'hui).

- 1) Modéliser le problème à l'aide d'une chaîne de Markov  $X$  et écrire sa matrice de transition  $Q$ .
- 2) On note  $B$  l'état "beau". On note  $P(n) = \mathbb{P}(X_n = B \mid X_0 = B)$ . Montrer que

$$P(n) = \frac{6}{7} \left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{7},$$

puis que

$$Q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1/7 & 6/7 \\ 1/7 & 6/7 \end{pmatrix}.$$

**Indication:** Une possibilité est de montrer que  $P(n)$  est solution de

$$\begin{cases} P(0) &= 1 \\ P(n) &= \frac{1}{8}P(n-1) + \frac{1}{8} \end{cases}$$

et résoudre.

- 3) Commenter le résultat obtenu en 2). Que constate-t-on ? Quelle est donc la probabilité (approximative) qu'il fasse beau demain ?

### Exercice 2. (Source: O. François)

Un rat se trouve dans un labyrinthe face à deux portes. Il choisit la première de ces deux portes avec probabilités  $1/3$  et la deuxième avec probabilité  $2/3$ . Quand il choisit la première porte, il revient à son point de départ en une minute. Quand il choisit la deuxième porte, il effectue un trajet d'une minute (jusqu'à un point intermédiaire) puis rebrousse chemin avec probabilité  $1/2$  (le retour lui prend alors une minute) ou sort du labyrinthe en une minute. Tous les choix du rat se font indépendamment les uns des autres. Soit  $T$  le temps passé par le rat dans le labyrinthe. Montrer que

$$\mathbb{E}(T) = 5.$$

**Indication:** Se souvenir que pour  $T$  variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  on a

$$E(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(T > k),$$

et se servir du fait que  $\mathbb{P}(T \leq k) = \mathbb{P}(X_k = S)$  où  $S$  est l'état "sortie" de la chaîne  $X$  introduite pour modéliser le problème (à justifier).