Théorie des Langages 1

Cours 2 : Opérations sur les langages, automates finis

L. Rieg

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

Année 2022-2023

Opérations sur les langages

Définition

Soient L et M deux langages sur V (L et $M \subseteq V^*$).
Par analogie avec les opérations sur les mots, on définit :

$$\begin{aligned} L \cup M &\stackrel{\text{def}}{=} \\ L.M &\stackrel{\text{def}}{=} \\ \forall i > 0,\ L^i &\stackrel{\text{def}}{=} \\ L^0 &\stackrel{\text{def}}{=} \\ L^* &\stackrel{\text{def}}{=} \qquad\qquad \text{et} \qquad L^+ \stackrel{\text{def}}{=} \end{aligned}$$

Notation : on pourra noter LM au lieu de $L.M$.

Exemples

Exemple

Soient $L = \{ab, cd\}$ et $M = \{ab, bba\}$. Alors

$$L \cup M = \{ab, cd, bba\} \text{ et } LM = \{abab, abbba, cdab, cdbba\}$$

Exemple

Soient $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $M = \left\{c^n d^{2n} \mid n \geq 0\right\}$. Alors

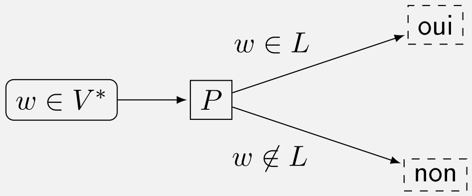
$$\begin{aligned} LM &= \\ L^* &= \end{aligned}$$

Question

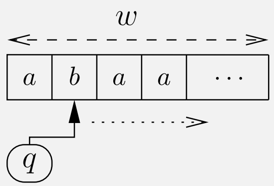
Si L est un langage, peut-on avoir $\varepsilon \in L^+$?

Les automates finis

On s'intéresse à définir des « programmes » qui reconnaissent des langages.



Les programmes les plus « simples » sont les automates finis.

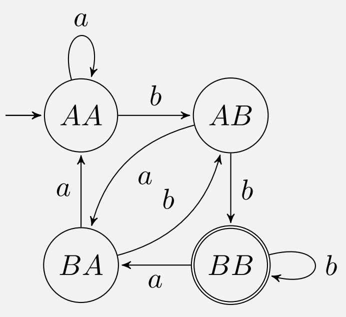


À chaque pas d'exécution, l'automate peut changer d'état et/ou lire un symbole et se positionner sur le symbole suivant.

Exemple d'automate fini

Voici un automate fini.
Il contient :

- des états
- le vocabulaire
- des transitions
- des états initiaux
- des états acceptants



$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = V^*.\{bb\}$

Utilisation d'un automate :

1. commencer dans un état initial
2. lire les lettres d'un mot en suivant les transitions
3. à la fin du mot, regarder si l'état est acceptant

Définition formelle

Définition

Un automate fini (AF) est un quintuplet $\langle Q, V, \delta, I, F\rangle$, où :

- Q est un ensemble fini d'états
- V est le vocabulaire d'entrée
- $\delta \subseteq Q \times (V \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ est la relation de transition
- $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants (ou finaux ou finals)

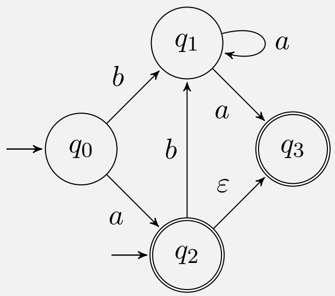
Relation de transition

- Pour $a \in V$, si $(p, a, q) \in \delta$, alors étant dans l'état p et lisant un a, l'automate peut passer dans l'état q et avancer dans le mot.
- Si $(p, \varepsilon, q) \in \delta$, alors étant dans l'état p, l'automate peut passer à l'état q sans avancer dans le mot.

Exemple et représentation graphique

Soit A l'automate défini par :

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \; V = \{a, b\},$$
$$\delta = \{(q_0, b, q_1), (q_0, a, q_2), (q_1, a, q_1), (q_1, a, q_3), (q_2, b, q_1), (q_2, \varepsilon, q_3)\}$$
$$I = \{q_0, q_2\}, \; F = \{q_2, q_3\}$$



Langage reconnu par un automate et chemins

$\mathcal{L}(A)$
= « Ens. des mots permettant de passer d'un état initial à un état final »
= « Les mots qui étiquettent un chemin d'un état initial à un état final »

Définition (Chemin)

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F\rangle$ un automate. L'ensemble des chemins dans A est défini inductivement de la façon suivante :

Base Pour tout $p \in Q$, $()$ est un chemin (vide) dans A de p à p ;

Induction Pout tous $p, q, q' \in Q$ et $a \in V \cup \{\varepsilon\}$,
si $(p, a, q) \in \delta$ et χ est un chemin dans A de q à q',
alors $(p, a, q).\chi$ est un chemin dans A de p à q'.

Convention

Dans un chemin non vide, on ne note en général pas le « () » final.

Trace, longueur d'un chemin

Définition

Soit $(q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \cdots (q_{n-1}, a_n, q_n)()$ un chemin dans A.
Ce chemin est de longueur n et de trace $a_1 a_2 \cdots a_n$.

$$\text{lgr} : \begin{cases} () & \mapsto & 0 \\ (p, a, q)\chi & \mapsto & 1 + \text{lgr}(\chi) \end{cases} \qquad \text{tr} : \begin{cases} () & \mapsto & \varepsilon \\ (p, a, q)\chi & \mapsto & a \cdot \text{tr}(\chi) \end{cases}$$

Exemples

$\chi_1 = (q_0, a, q_1)(q_1, a, q_1)(q_1, b, q_2)(q_2, \varepsilon, q_3)()$	longueur :	trace :
$\chi_2 = (q_0, a, q_1)(q_1, a, q_3)(q_3, b, q_4)()$	longueur :	trace :

Définition (Mot reconnu par un automate)

Un mot w est reconnu par A si et seulement si

.

Exercices

Exercice 1

Construire un automate fini qui reconnaît le langage

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ne contient } \textbf{pas plus de} \text{ deux } b \text{ consécutifs}\}$$

Exercices

Exercice 2

Construire un automate fini qui reconnaît le langage

$$L = \{w \in \{a, b\}^+ \mid w \text{ ne contient } \textbf{pas plus de} \text{ deux } b \text{ consécutifs}\}$$

Automate non-déterministe

Un AF $\langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ est dit non-déterministe si

1. Card$(I) > 1$ (plus d'un état intial), et/ou
2. $\exists\, (q, a, p)$ et $(q, a, r) \in \delta$ avec $p \neq r$, et/ou
3. $\exists\, (q, \varepsilon, p) \in \delta$

Dans les trois cas, « on ne sait pas quoi faire » :

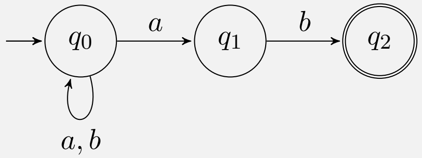
1. « où dois-je commencer ? »
2. « je suis en q, je vois le symbole a, où vais-je ? »
3. « je suis en q, $\forall$ symbole je peux choisir de passer en p ou non »

Non-déterminisme :

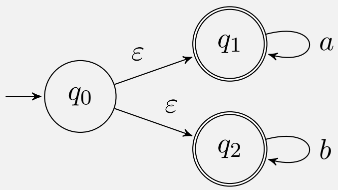
- ne donne pas immédiatement un « programme » reconnaisseur
- mais facilite la définition des automates !

Exemples

1. Non-déterministe, sans ε-transition



2. Non-déterministe, avec ε-transition



Automate déterministe

À l'inverse, un AF $\langle Q, V, \delta, I, F\rangle$ est dit déterministe si

1. $\mathrm{Card}(I) = 1$ (exactement un état intial), et
2. Si (q, a, p) et $(q, a, r) \in \delta$, alors $p = r$, et
3. $\nexists\, (q, \varepsilon, p) \in \delta$

Ainsi, « on sait toujours quoi faire » : les transitions possibles sont uniques.
Sera en particulier utilisé en architecture/CEP et en TL2

Conséquences de la définition

-
-
-
-

Automate complet

Définition

Un automate est complet si de chaque état et chaque symbole, une transition est toujours possible : $\forall (q, a) \in Q \times V, \exists p \in Q, (q, a, p) \in \delta$.

Pour un AF déterministe complet, δ est une fonction totale : $Q \times V \to Q$.
Un automate peut être non-déterministe mais complet !

Comment compléter un automate (sans changer son langage) ?

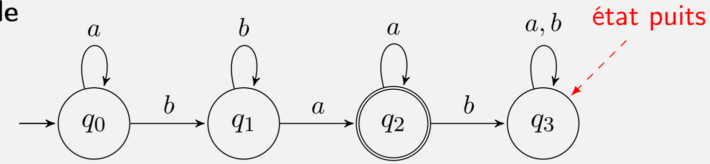
Questions : Veut-on toujours un automate déterministe complet ?
Est-ce toujours mieux ?

Extension de la fonction de transition aux mots

Définition

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F\rangle$ un AFD complet. On définit la fonction $\delta^* : Q \times V^* \to Q$ par induction de la façon suivante : pour tout $p \in Q$,

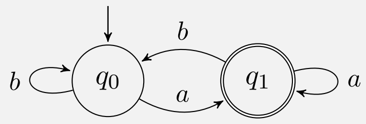
Exemple



L'extension de la fonction de transition est parfois notée δ au lieu de δ^*.

Test d'appartenance pour les AFD complets

$L = \{a, b\}^* \{a\}^+$



$bbaba \in L \iff \dots$

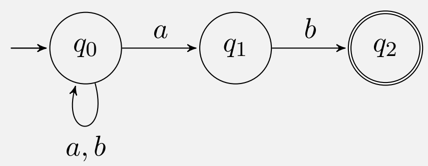
$\iff q_1 \in F$

fonction reconnaître(q : état, w : mot) **renvoie Booléen** =
  tant que $w \neq \varepsilon$ **faire**
    $s \leftarrow$ premier_symbole(w)
    $w \leftarrow$ reste_mot(w)
    $q \leftarrow \delta(q, s)$
  fin tant que
  renvoyer ($q \in F$)

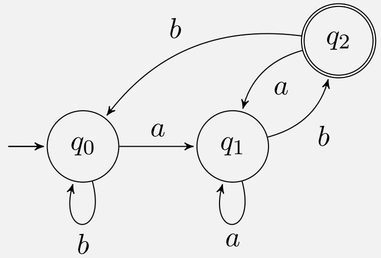
Automates équivalents

Deux automates A et A' sont équivalents ssi $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$.

- Automate A :



- Automate A' :



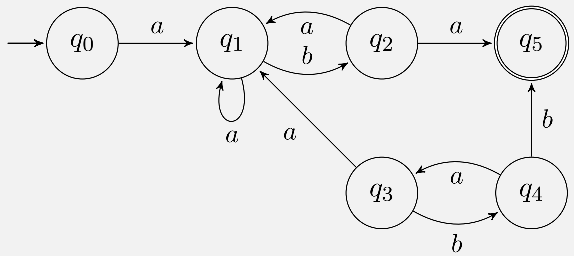
Langages réguliers – États accessibles

Définition

On appelle langage régulier tout langage reconnu par un automate fini.

Définition

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate.
Un état $p \in Q$ est accessible si on peut passer d'un état $q_0 \in I$ à p en se servant des transitions de δ.
Un automate est initialement connecté si tous ses états sont accessibles.



Propriétés

Définitions équivalentes

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$

- Langage reconnu par A

- L'automate A est initialement connecté si et seulement si