22. Variables aléatoires à densité

Dans ce chapitre de probabilités, on étudie un nouveau type de variable aléatoire réelle, les variables aléatoires à densité. Ce chapitre s'appuie sur le début du chapitre 17 pour tous les points généraux portant sur les VAR. Il est donc important de vérifier que le contenu de ce précédent chapitre est bien intégré avant de s'attaquer à celui-ci.

22.1 Introduction

22.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 22.1.1 — Variable aléatoire à densité. Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que X est une **VAR à densité** (ou simplement **variable aléatoire à densité**) si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Définition 22.1.2 — Densité. Soit X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle **densité de** X toute fonction f_X, à valeurs postives, et égale à F'_X sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a, dans ce cas, la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt\,.$$

R Une VARD n'est donc pas une VAR à densité puisque sa fonction de répartition est discontinue en toute valeur prise par X.

Théorème 22.1.1 — Caractérisation de la loi par la (une) densité. Soient X et Y deux VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, f_X et f_Y deux densités associées à ces variables aléatoires et $\mathscr{L}_X$ et $\mathscr{L}_Y$ les lois de X et Y respectivement. Alors on a :

$$f_X = f_Y \Rightarrow \mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y\,.$$

Démonstration. Ce résultat est admis. ■

Théorème 22.1.2 — Caractérisation d'une densité. Toute fonction f positive, continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ est la densité d'une variable aléatoire à densité.

Démonstration. Ce résultat est admis. ■

Les théorèmes qui précèdent impliquent que pour étudier une variable à densité, il suffit de s'intéresser à sa densité, et qu'étudier une densité revient à étudier une fonction postive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On ramène ainsi des problèmes de probabilités à des problèmes d'intégration.

Théorème 22.1.3 — Propriétés d'une VAR à densité. Soient X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et f_X une densité de X. Alors, on a les propositions qui suivent.

(i) $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(X = a) = 0$.

(ii) $\forall (a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$,

$$\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a < X \le b) = \mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)\,dt.$$

Démonstration. On a $0 \le \mathrm{P}(X = a) \le \mathrm{P}\left(a - \frac{1}{n} < X \le a\right)$. Or $\mathrm{P}\left(a - \frac{1}{n} < X \le a\right) = F_X(a) - F_X\left(a - \frac{1}{n}\right)$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par continuité de F_X. Ce qui permet de conclure pour le point (i).
Le deuxième point découle directement du premier point et de la proposition dans la définition d'une densité. ■

R Si f_X est nulle en dehors de $[a,b]$, on a $\mathrm{P}(X < a) = \mathrm{P}(X > b) = 0$. Ainsi, $X \in [a,b]$ presque sûrement.

22.1.2 Espérance et moments

Le programme d'ECS 1 ne traite que de l'espérance des variables à densité tandis que la variance et les autres moments d'ordre supérieurs ou égaux à 2 sont renvoyés au programme d'ECS 2. On introduit tout de même la notion de moment ici, afin de se familiariser avec certains calculs d'intégrales.

Définition 22.1.3 — Espérance. Soient X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et f_X une densité de X. On dit que X admet une **espérance** si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, on pose :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt\,.$$

R Cette définition est bien indépendante de la densité de X choisie car deux densités ne diffèrent qu'en un nombre fini de points.

Exercice 22.1 — Loi de Cauchy. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est la densité d'une variable X, puis montrer que X n'admet pas d'espérance. ■

Définition 22.1.4 — Moments. Soient X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors, on dit que X admet un **moment d'ordre** r si et seulement si X^r possède une espérance. Dans ce cas, le moment d'ordre r de X est $E(X^r)$.

Théorème 22.1.4 — Calcul des moments. Soient X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, f_X une densité de X et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors, X possède un moment d'ordre r si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a :

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,dt\,.$$

Démonstration. Ce théorème est un corollaire direct du théorème de transfert qui sera traité en ECS 2. ■

22.1.3 Transferts usuels

Théorème 22.1.5 — Transfert affine. Soient X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Alors, $Y = aX + b$ est une VAR à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. De plus, si F_X et F_Y sont les fonctions de répartition de X et Y respectivement, on a :

(i) $a > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$,

(ii) $a < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Enfin, si f_X est une densité de X, on a :

(iii) f_Y, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$, est une densité de Y.

Démonstration. On suppose $a > 0$, le cas négatif se montrant de manière analogue. On vérifie facilement que Y est une VAR. Pour montrer qu'il s'agit d'une variable à densité, on montre (i). On suppose $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(aX+b \leq x) = P(aX \leq x-b) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right)$ car $a > 0$. C'est bien le résultat attendu. On note que F_Y est bien C^1, sauf éventuellement en un nombre fini de points, par composition de F_X et de la bijection de classe C^∞ : $x \mapsto \frac{x-b}{a}$.
Pour (iii), il suffit de remarquer qu'en tout point pour lequel F_Y est dérivable, on a $F'_Y = f_Y$ comme définie ci-dessus. Cela permet de conclure. ■

Théorème 22.1.6 — Espérance d'un transfert affine. Soient X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On suppose que X possède une espérance. Alors, $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$ possède une espérance et on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = a\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b\,.$$

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. On a $\displaystyle\int_\alpha^\beta t\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t-b}{a}\right)dt = \int_{a\alpha+b}^{a\beta+b} \frac{ax+b}{|a|}f(x)a\,dx$. Or on sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge absolument vers E(X) et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument vers 1. D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$ converge absolument vers $a\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$. ■

Définition 22.1.5 — Variable centrée. Soit X une VAR à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On dit que X est **centrée** lorsque X admet une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0$. Si X admet une espérance, on appelle **variable centrée associée à** X la VAR à densité $\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})$.

R Dans ce dernier cas, on a bien évidemment $\mathrm{E}(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) - \mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0$.

22.2 VAR à densité usuelles

22.2.1 Loi uniforme

Définition 22.2.1 — Loi uniforme. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Alors on dit que X suit une **loi uniforme sur** $[a,b]$ et on note $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}_{[a,b]}$ lorsque X admet pour densité la fonction $f_\mathrm{X} = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$.

R On a exactement la même définition pour tout type d'intervalle borné (i.e. $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$).

Exercice 22.2 Vérifer que la fonction f_X donnée dans la définition est bien une densité de probabilité. Représenter graphiquement cette fonction ainsi que la fonction de répartition de la variable X associée que l'on explicitera. ■

Théorème 22.2.1 — Espérance d'une loi uniforme. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et X une VAR telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$. Alors X admet une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}.$$

Démonstration. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_a^b \frac{t dt}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$ où l'intégrale est bien absolument convergente car la fonction intégrée est continue sur $[a,b]$ et nulle en dehors de $[a,b]$. ∎

Exercice 22.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, X une VAR et $Y = a + (b-a)X$. Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]} \Leftrightarrow Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$.

Exercice 22.4 — Moments d'une loi uniforme. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et X une VAR telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$. Montrer que X possède des moments d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et déterminer leur valeur.

22.2.2 Loi exponentielle

Définition 22.2.2 — Loi exponentielle. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ et X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors on dit que X suit une **loi exponentielle de paramètre** λ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ lorsque X admet pour densité la fonction f_X définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 22.5 Vérifier que la fonction f_X donnée dans la définition est bien une densité de probabilité. Représenter graphiquement cette fonction ainsi que la fonction de répartition de la variable X associée que l'on explicitera. ▪

Théorème 22.2.2 — Espérance de la loi exponentielle. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ et X une VAR telle que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Il découle du théorème 19.3.3 que X admet une espérance. On la calcule grâce à une intégration par parties. On a $\displaystyle\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t} dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x} - 1}{\lambda}$ qui tend vers $\dfrac{1}{\lambda}$ lorsque x tend vers $+\infty$. ∎

Exercice 22.6 Soit g une application définie sur $\mathbb{R}^+$, décroissante, telle que $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Le but de l'exercice est de montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = -\lambda x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{g(1)}{n}$.
2. Soient $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\frac{1}{n+1} < y < \frac{1}{n}$. Montrer alors que l'on a $\left|\frac{g(x+y)-g(x)}{y} - g(1)\right| \leq \frac{|g(1)|}{n}$. En déduire que g est dérivable à droite en tout point.
3. Montrer, de même, que g est dérivable à gauche en tout point et déterminer sa dérivée.
4. Conclure.

▪

Théorème 22.2.3 — Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire. Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Alors, X suit une loi exponentielle si et seulement si :

(i) $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{R}^+$,

(ii) $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$, $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} > x + y \mid \mathrm{X} > y\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x)$,

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} > x) \neq 0$.

Démonstration. On suppose que $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Sans difficulté, on a (i) et (iii). Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$, on a $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} > x + y \mid \mathrm{X} > y\right) = \frac{\mathrm{P}([\mathrm{X}>x+y]\cap[\mathrm{X}>y])}{\mathrm{P}(\mathrm{X}>y)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}>x+y)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}>y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x)$. Réciproquement, on suppose (i), (ii) et (iii). Alors, on a $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} > x + y) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x)\mathrm{P}(\mathrm{X} > y)$. On pose alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(\mathrm{P}(\mathrm{X} > x))$. Par l'exercice qui précède, on a $g(x) = -\lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} > x) = e^{-\lambda x}$ et $\mathrm{F_X}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F_X}(x) = 1$ d'où $\lambda \neq 0$. Ce qui permet de conclure. ■

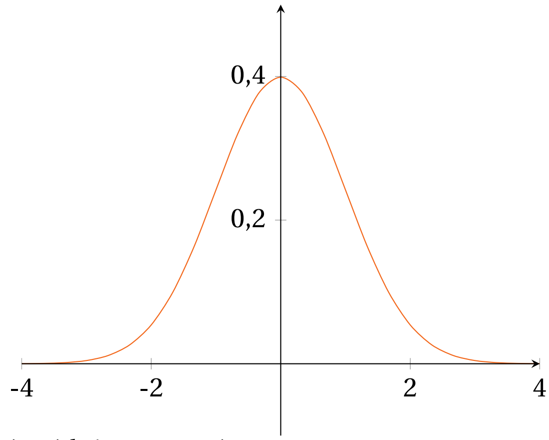
R On peut utiliser la loi exponentielle pour modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire : la probabilité que le phénomène dure au moins $x + y$ heures sachant qu'il a déjà duré y heures sera la même que la probabilité qu'il dure x heures après qu'il a débuté.

Exercice 22.7 Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, X une VAR et $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{X}$. Montrer que $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \Leftrightarrow \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. ■

22.2.3 Loi normale

Définition 22.2.3 — Loi normale centrée réduite. Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors on dit que X suit une **loi normale centrée réduite** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ lorsque X admet pour densité la fonction φ définie et représentée ci-dessous.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array}$$



La fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite est notée Φ.

R La courbe représentative de la densité d'une loi normale est souvent appelée **bell curve** en anglais, en référence à sa forme en cloche.

Exercice 22.8 Vérifier que la fonction φ donnée dans la définition est bien une densité de probabilité. ■

Exercice 22.9 Montrer que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Interpréter ce résultat graphiquement. ■

Théorème 22.2.4 — Espérance d'une loi normale centrée réduite. Soit X une VAR telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors X admet une espérance et $E(X) = 0$.

Démonstration. On sait déjà que X admet une espérance (voir théorème 19.3.5). Or l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction impaire vaut 0 si cette intégrale converge. Comme $t \mapsto t\varphi(t)$ est impaire, on obtient bien $E(X) = 0$. ■

Définition 22.2.4 — Loi normale. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{*+}$ et X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors on dit que X suit une **loi normale de paramètres** μ **et** σ^2 (ou **loi de Laplace-Gauss**) et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ lorsque X admet pour densité la fonction f_X définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Exercice 22.10 Vérifier que la fonction f_X donnée dans la définition est bien une densité de probabilité. Représenter f_X pour $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 4$. ■

Exercice 22.11 Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{*+}$, X une VAR et $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

1. Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
2. Que peut-on dire de l'espérance d'une loi normale ?
3. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $P\left(X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]\right)$ ne dépend que de k.
4. À l'aide de Scilab, déterminer $P\left(X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]\right)$ pour $k = 1$, 2 et 3 à 10^-3 près.
5. Donner une interprétation de ce résultat.

■

Lire une table de loi normale

Bien que son utilisation tend à diminuer grâce à une utilisation simplifiée d'outils informatiques, les tables de lois sont encore très souvent utilisées pour calculer la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Généralement, une telle table donne la probabilité qu'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite soit supérieure à un nombre réel x positif, en fonction de ses chiffres des unités et des dixièmes d'une part, et des centièmes d'autre part. Dans le tableau suivant, la première colonne correspond aux chiffres des unités et des dixièmes de x et la première ligne aux chiffres des centièmes de x. On utilise ensuite la symétrie de la densité pour les valeurs négatives de x et un changement de variables pour les lois normales non centrées réduites.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Ici, pour $x = 1,22$, on lit $P(X \geq x) \simeq 0,8888$.

Exercice 22.12 Retrouver le résultat obtenu avec Scilab lors de l'exercice précédent grâce à la table ci-dessus. ■