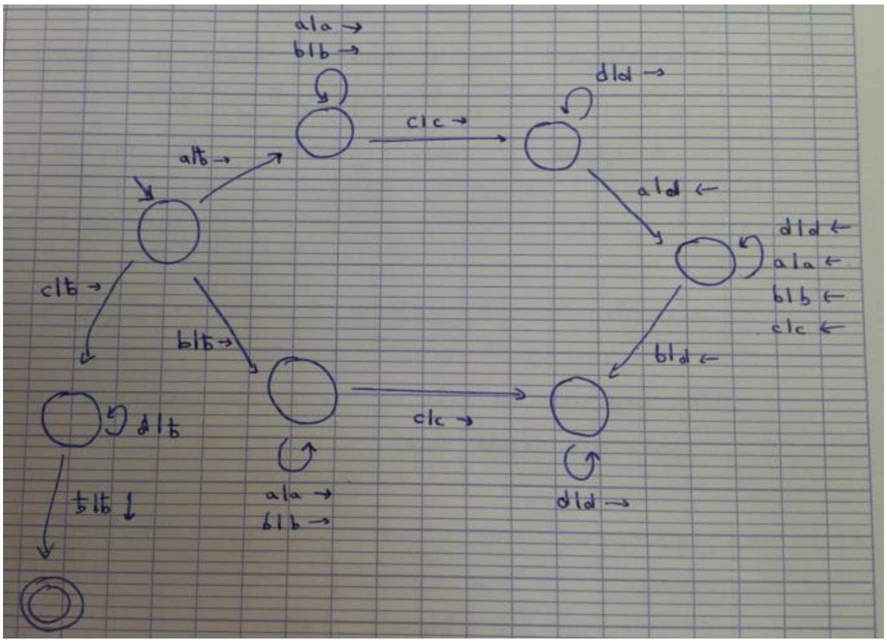
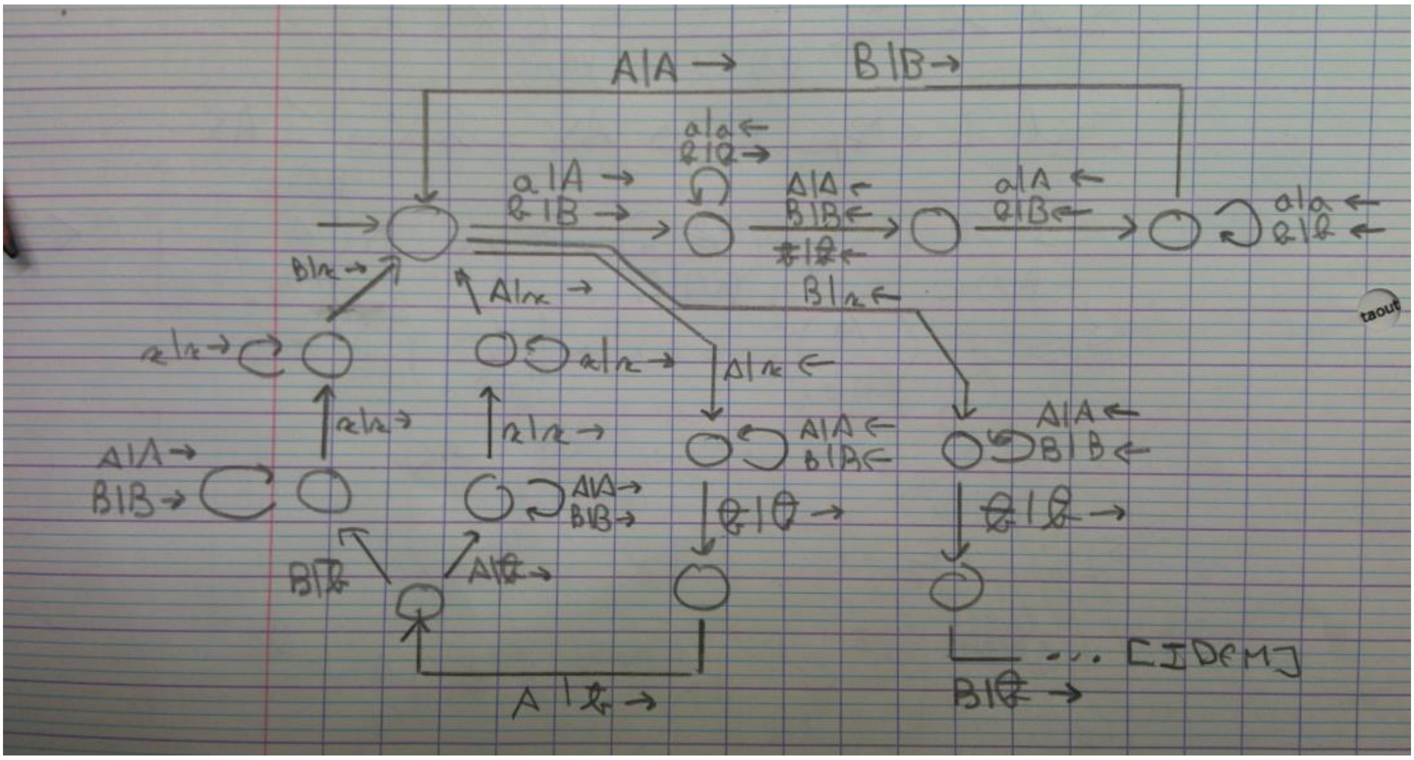
# Exercice 1

vendredi 7 avril 2017 15:36





# Exercice 4

vendredi 14 avril 2017 16:18

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calculable, bijective
Soit $m$ une machine de Turing implémentant $f$
On peut définir $f^{-1}(n)$ :
while $f(i)$ $!= n$
    $i += 1$

Dans. le cas surjectif, non injectif, $f^{-1}$ n'est pas défini mais l'algorithme ci-dessus peut trouver le plus petit antécédent.
Si la fonction est injective mais non surjective, l'algorithme ne peut pas terminer.

# Exercice 5

vendredi 14 avril 2017 16:04

Soient $L_1 \in R, L_2 \in \mathbb{R}$.
Montrons que $L_1 \cup L_2 \in \mathbb{R}$

Soit $f_1(w) = \begin{cases} 0 \text{ si } w \notin L_1 \\ 1 \text{ si } w \in L_1 \end{cases}$

$f_\cup(w) = f_2(w)$ si $f_1(w) = 0$, sinon 1
$f_\cap(w) = f_2(w)$ si $f_1(w) = 1$, sinon 0

Montrons que $L_1, L_2 \in R \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in R_E$
$f_1(w) = 1$ si $w \in L_1$
$f_2(w) = 1$ si $w \in L_2$
$f_\cup = f_1 || f_2$

$\rightarrow$ Exécuter un pas de $f_1$
Exécuter un pas de $f_2$
Si $f_1$ reconnaît alors 1
Sinon si $f_2$ reconnaît alors 1

Montrons que $L, \bar{L} \in R_E \Rightarrow L, \bar{L} \in R$
$f(w) = 1$ si $w \in L$
$\bar{f}(w) = 1$ si $w \in \bar{L}$

$(f\, || \bar{f})w$
Exécution pas à pas :
Si $f$ s'arrête en 1 alors 1
Si $\bar{f}$ s'arrête en 1 alors 0

# Exercice 7

vendredi 28 avril 2017 15:44

$E_n = \{x | \exists \text{ MT à } n+1 \text{ états, tq MT}(n) = x\}$
Montrons que cet ensemble est fini et non vide.
Pour une machine de Turing donnée, les états possibles sont :
$\delta\left(\underbrace{q_i}_{n+1 \text{ possibilités}} + \underbrace{x}_{3 \text{ possibilités}}\right) = \left(\underbrace{q_j}_{n+1 \text{ possibilités}} + \underbrace{y}_{3 \text{ possibilités}} + \underbrace{m}_{3 \text{ possibilités}}\right) \text{ ou } \emptyset$
$\Rightarrow \text{Card}(E_n) \leq 2^{n+1}(9n+10)^{3(n+1)}$

Soit $g(n) = \max E_n$
Supposons $g$ calculable.
On pose : $f(x) = g(x) + 1$. $f$ est calculable, donc $f(k) > \max E_k$ : absurde !

# Exercice 8

vendredi 28 avril 2017 16:17

Soit $h(n) = \begin{cases} 1 \text{ si la MTU}(n, n) \text{ s'arrête} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Supposons $h$ calculable.

On pose $f(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } h(n) = 0 \\ \text{boucle sinon} \end{cases}$

Cette fonction est partielle et calculable.

$\text{MTU}(\hat{f}, \hat{f}) = f(\hat{f}) = \begin{cases} 1 \text{ si } h(\tilde{f}) = 0 \\ \text{boucle sinon} \end{cases}$

$h(\hat{f}) = 0 \Rightarrow \underbrace{\text{MTU}(\hat{f}, \hat{f})}_{f(\hat{f})}$ boucle mais $f(\hat{f}) = 1$

(S'arrête)

$h(\hat{f}) = 1 \Rightarrow$ idem

# Exercice 9

vendredi 28 avril 2017 16:33

$H = \{n | h(n) = 1\}$
(Définie dans l'exercice 8)
$H = \{n | \mathrm{MTU}(n, n) \text{ s'arrête}\}$
$H$ n'est pas récursif (sinon $h$ serait calculable)
$H$ est récursif énumérable car MT$(n, n)$ s'arrête si $n \in H$.
$\overline{H}$ n'est pas récursif énumérable, sinon $H$ (et $\overline{H}$) seraient récursif.

# Exercice 10

vendredi 28 avril 2017 16:39

Soient deux suites de mots (D'un alphabet de plus de 2 lettres)
$\alpha_1 \dots \alpha_n$
$\beta_1 \dots \beta_n$
Existe-t-il une suite d'indices $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ tel que :
$\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} = \beta_{i_1} \dots \beta_{i_k}$ ?
Exemple :

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | ab | bba | baa | aa | bb | 3 | 2 | 3 | 1 |

En effet, on forme bbaabbbaa.

Reste à trouver un codage pour faire le lien entre les deux problèmes :
Post = oui $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$
Post = non $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

$S_1 \rightarrow \alpha_1 S_1 \#_1 | \dots | \alpha_n S_1 \#_n | \alpha_1 \#_1 \dots | \alpha_n \#_n$
$S_2 \rightarrow \beta_1 S_2 \#_1 | \dots | \beta_n S_2 \#_n | \beta_1 \#_1 | \dots | \beta_n \#_n$

# Exercice 12

vendredi 5 mai 2017 15:51

## Théorème de Rice

Toute proposition non triviale (c’est-à-dire, pas vraie partout) sur toutes les MT/programmes est indécidable.

## Question 1

1) $L_w = \{\langle m\rangle | w \in L(m)\}$
$L_{m_1} = \emptyset \to w \notin L_{m_1}, w \in L_{m_2}$
$\Rightarrow$ "$w \in L(m)$" non triviale $\Rightarrow L_w$ non récursif d'aprèse Rice.

2) $L_{ne} = \{\langle m\rangle | L(m) \neq \emptyset\}$
$L_1 = \emptyset, L_2 = \{\varepsilon\} \Rightarrow$ non récursif

3) $L_e = \{\langle m\rangle | L(m) = \emptyset\}$
$L_1 = \emptyset, L_2 = \{\varepsilon\} \Rightarrow$ non récursif

4) $L_k, k > 0 : L_1 = \emptyset, L_2 = \{a^*\}, \{a, b, c\} \in \Sigma$

5) $L_f, L_1 = \emptyset, L_2 = \{a^*\}$

6) $L_{\text{reg}}, L_1 = \{a^n b^n c^n | n > 0\}, L_2 = \emptyset$

7) $L_{hc}, L_1 = \{a^n b^n c^n | n > 0\}, L_2 = \emptyset$

8) $L_r, L_1 = \emptyset, L_2 = L_u$

9) $L_{nr}, L_1 = \emptyset, L_2 = L_u$.

## Question 2

$L_w$ est r.e $m \in L_w \Leftrightarrow (m, w) \in L_u$ qui est R.E

# Exercice 13

vendredi 5 mai 2017 16:25

$L, L'$ RE.

1) "$L = L'$" décidable ?

"$L = \emptyset$" indécidable ?

$L_1 = \emptyset, L_2 = \{\varepsilon\} \underset{\text{Rice}}{\Longrightarrow}$ "$L = \emptyset$" indécidable

Si "$L = L'$" décidable ($L' = \emptyset$) alors "$L = \emptyset$" devient décidable