Méthodes Numériques - Chapitre 1

Equations différentielles avec conditions aux limites : approximation par différences finies

Ensimag 1A

14 janvier 2021

Plan

Plan

Problème aux limites

= équation différentielle (ou aux dérivées partielles) avec conditions aux limites

Exemples :

- Equation de Debye-Hückel :

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr} = \lambda\,\varphi, \quad r \in]r_0, R[,$$

$$\varphi'(r_0) = \alpha, \quad \varphi'(R) = 0.$$

φ = potentiel électrique autour d'un cylindre chargé plongé dans une solution ionique (paramètre $\lambda > 0$).

Conditions aux limites de type Neumann : on fixe la valeur de φ' aux bornes de l'intervalle $]r_0, R[$.

Problème aux limites

Exemples (suite) :

- Equation de la chaleur stationnaire unidimensionnelle :

$$-\frac{d}{dx}(k(x)\,\frac{du}{dx}) = f(x), \quad x \in]0, L[,$$

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0.$$

milieu $1D$: barre, fil (ex : filament d'ampoule électrique),
$u =$ température d'équilibre,
$f =$ quantité de chaleur fournie par unité de temps et de longueur,
$k =$ conductivité thermique variable.

Conditions aux limites de type Dirichlet : on fixe la valeur de u aux bornes de l'intervalle $]0, L[$.

Problème aux limites

Exemples (suite) :

- Equation de la chaleur stationnaire bidimensionnelle :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f(x,y), \quad (x,y)\in]a,b[\times]c,d[,$$

$$u(a,y)=u(b,y)=u(x,c)=u(x,d)=0.$$

$u =$ température d'équilibre dans une plaque rectangulaire

$\longrightarrow$ *Ces équations n'admettent pas forcément de solutions explicites d'où la nécessité d'utiliser des méthodes numériques pour résoudre ces problèmes.*

Problème aux limites

Nous allons pour cela introduire la *méthode des différences finies*, qui sera appliquée au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -u''(x) + c(x)u(x) & = & f(x) & \quad x \in]0,1[\\ u(0) & = & \alpha & \\ u(1) & = & \beta & \end{array} \right.$$

avec

- f fonction C^0 sur $[0,1]$
- c fonction C^0 sur $[0,1]$ avec $c(x) \geq 0$.

On vérifie tout d'abord que le problème est bien posé :
Théorème :

Lorsque $c \geq 0$, il existe une unique solution u dans $C^2([0,1])$. De plus, si c, f sont C^k alors u est C^{k+2}.

Problème aux limites

Preuve du théorème : On montre d'abord l'unicité de la solution. Si u et $\tilde{u}$ sont deux solutions, alors $v = u - \tilde{u}$ vérifie l'équation homogène :

$$\begin{cases} -v''(x) + c(x)v(x) & = & 0 \qquad x \in]0,1[\\ v(0) = v(1) & = & 0 \end{cases}$$

Il faut montrer que $v = 0$ est la seule solution, ce qui impliquera $u = \tilde{u}$. On multiplie par v et on intègre :

$$-\int_0^1 v''\, v\, dx + \int_0^1 c\, v^2\, dx = 0$$

On intègre par parties en utilisant $v(0) = v(1) = 0$:

$$-\int_0^1 v'^2\, dx = \int_0^1 c\, v^2\, dx \geq 0 \text{ car } c \geq 0$$

Donc $\int_0^1 v'^2\, dx = 0$, d'où $v' = 0$, i.e. v est constante sur $[0,1]$. Puisque $v(0) = 0$, on a donc $v = 0$ sur $[0,1]$.

Problème aux limites

On montre maintenant l'existence. On note v_1, v_2 les solutions de l'équation homogène

$$-v''(x) + c(x)v(x) = 0$$

définies par

$$v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) = 1,$$

$$v_1(1) = 0, \quad v_1'(1) = \sigma \neq 0.$$

On a $v_2(1) \neq 0$ et $v_1(0) \neq 0$ d'après l'étude de l'unicité. En particulier, on peut choisir σ tel que $v_1(0) = 1$, quitte à changer σ en $\sigma / v_1(0)$.
La fonction suivante est solution de l'équation non homogène :

$$u(x) = \alpha\, v_1(x) + \beta\, \frac{v_2(x)}{v_2(1)} + v_1(x) \int_0^x f(s)\, v_2(s)\, ds - v_2(x) \int_1^x f(s)\, v_1(s)\, ds$$

En effet, $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ et $-u'' + c\, u = f\,(v_1 v_2' - v_1' v_2) = f$.

Problème aux limites

Enfin si c, f sont C^k, on montre par récurrence que u est C^{k+2} :

Supposons que u est C^n avec $0 \leq n \leq k$, alors

$$u'' = c\,u - f \in C^n$$

donc $u' \in C^{n+1}$ et $u \in C^{n+2}$.

En général on ne connaît pas u explicitement, car les solutions de l'équation homogène ne peuvent souvent pas être explicitées (contrairement au cas d'une équation à coefficients constants), ainsi que les primitives qui apparaissent dans l'expression intégrale de u.

Nous allons donc décrire un schéma d'approximation numérique de u. La première étape consiste à approcher les dérivées continues par des taux d'accroissements appelés *différences finies*, ou dérivées numériques.

Plan

Rappel de quelques théorèmes

Formule de Taylor-Lagrange :

Soit une fonction $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$.
Alors il existe un réel ξ dans $]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Théorème des accroissements finis : cas particulier $n=0$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

pour un réel ξ dans $]a,b[$

Position du problème

Soit f fonction suffisamment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$

- On considère des points x_i, $i = 0, \ldots, n+1$ régulièrement espacés :

$$x_i = a + i\,h \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{b-a}{n+1}$$

- **Dérivée numérique :**

Approcher $f'(x_i)$ en utilisant seulement des valeurs de f en certains points x_j.
Estimer l'erreur commise pour cette approximation.

Outil utilisé : formule de Taylor-Lagrange

Formule à deux points pour la dérivée

On utilise la formule de Taylor-Lagrange en $x_{i+1} = x_i + h$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_i) \qquad \xi_i \in]x_i, x_i + h[$$

d'où

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_i)$$

Une approximation de $f'(x_i)$ est donc

$$\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

et l'erreur commise est

$$f'(x_i) - \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_i)$$

Approximations d'ordre 1 pour la dérivée

On peut donc approcher $f'(x_i)$ par des *différences finies* :

Différence finie avant :

$$\left\{\begin{array}{ccl} f'(x_i) & \approx & \Delta_x^+ f_i := \dfrac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} \\ f'(x_i)-\Delta_x^+ f_i & = & -\dfrac{h}{2}f''(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_i, x_i+h[\quad \text{erreur commise} \end{array}\right.$$

Différence finie arrière :

$$\left\{\begin{array}{ccl} f'(x_i) & \approx & \Delta_x^- f_i := \dfrac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h} \\ f'(x_i)-\Delta_x^- f_i & = & \dfrac{h}{2}f''(\xi_i^-), \quad \xi_i^- \in]x_i-h, x_i[\quad \text{erreur commise} \end{array}\right.$$

L'erreur commise tend vers 0 comme h, ces approximations sont donc d'**ordre** 1.

Approximation d'ordre 2 pour la dérivée

On utilise la formule de Taylor-Lagrange en $x_{i+1} = x_i + h$ et en $x_{i-1} = x_i - h$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_i^+) \qquad \xi_i^+ \in]x_i, x_i + h[$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_i^-) \qquad \xi_i^- \in]x_i - h, x_i[$$

En soustrayant membre à membre, on obtient

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2hf'(x_i) + \frac{h^3}{6}(f^{(3)}(\xi_i^+) + f^{(3)}(\xi_i^-))$$

$$\frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - f'(x_i) = \frac{h^2}{12}(f^{(3)}(\xi_i^+) + f^{(3)}(\xi_i^-))$$

Approximation d'ordre 2 pour la dérivée

Différence finie centrée

$$\begin{cases} f'(x_i) & \approx & \Delta_x^0 f_i := \dfrac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h} \\ f'(x_i)-\Delta_x^0 f_i & = & -\dfrac{h^2}{12}\left(f^{(3)}(\xi_i^-)+f^{(3)}(\xi_i^+)\right) \qquad \text{erreur commise} \end{cases}$$

avec $\xi_i^+ \in]x_i, x_i+h[$, $\xi_i^- \in]x_i-h, x_i[$.

L'erreur commise tend vers 0 comme h^2, l'approximation est donc d'**ordre** 2.

Si f est C^3, la formule centrée est d'ordre 2 donc plus précise que les deux premières formules.

Approximation d'ordre 2 pour la dérivée

Remarque : l'écriture de l'erreur se simplifie en utilisant le :

Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit une fonction g continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors pour tout réel u compris entre $g(a)$ et $g(b)$, il existe un réel ξ dans $[a, b]$ tel que $g(\xi) = u$.

En effet, il existe ξ_i dans $[\xi_i^-, \xi_i^+]$ tel que

$$f^{(3)}(\xi_i) = \frac{1}{2}(f^{(3)}(\xi_i^-) + f^{(3)}(\xi_i^+))$$

$$-\frac{h^2}{12}(f^{(3)}(\xi_i^-) + f^{(3)}(\xi_i^+)) = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_i)$$

Approximation d'ordre 2 pour la dérivée

Différence finie centrée

$$\begin{cases} f'(x_i) & \approx \quad \Delta_x^0 f_i := \dfrac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} \\ f'(x_i) - \Delta_x^0 f_i & = \quad -\dfrac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_i - h, x_i + h[\quad \text{erreur commise} \end{cases}$$

Symbole d'ordre de Landau : O

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x = a$ avec $g \geq 0$. On a

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{lorsque } x \to a$$

s'il existe $M, \delta > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq M\, g(x) \quad \text{lorsque } |x - a| < \delta$$

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur $[b, +\infty[$ avec $g \geq 0$. On a

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{lorsque } x \to +\infty$$

s'il existe $M > 0, c \geq b$ tels que

$$|f(x)| \leq M\, g(x) \quad \text{lorsque } x \geq c.$$

Résumé des formules précédentes

On a lorsque $h \to 0$ (avec $h > 0$) :

Si f est C^2 :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + O(h)$$

Si f est C^3 :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + O(h^2)$$

Approximation de la dérivée seconde

Nous allons donner une formule d'ordre 2 pour le calcul de la dérivée seconde $f''(x_i)$.
On procède de la même manière que pour la dérivée première :

$$f(x_i+h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_i) + O(h^4)$$

$$f(x_i-h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_i) + O(h^4)$$

En additionnant, on a :

$$f(x_i+h) + f(x_i-h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + O(h^4)$$

$$\frac{1}{h^2}\left(f(x_i+h) + f(x_i-h) - 2f(x_i)\right) = f''(x_i) + O(h^2)$$

Approximation de la dérivée seconde

On obtient ainsi le résultat suivant

$$\begin{cases} f''(x_i) & \approx & \Delta_{xx} f_i := \dfrac{f(x_i+h) - 2f(x_i) + f(x_i-h)}{h^2} \\ f''(x_i) - \Delta_{xx} f_i & = & O(h^2) \quad \text{erreur commise} \end{cases}$$

Cette formule est d'ordre 2.

On peut noter les relations suivantes entre l'approximation par différences finies de la dérivée seconde et les approximations décentrées (avant et arrière) de la dérivée première :

$$\Delta_{xx} = \frac{\Delta_x^+ - \Delta_x^-}{h} = \Delta_x^+ \, \Delta_x^- = \Delta_x^- \, \Delta_x^+$$

Plan

Problème aux limites

On revient au problème :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -u''(x)+c(x)u(x) & = & f(x) & \quad x\in]0,1[\\ u(0) & = & \alpha & \\ u(1) & = & \beta & \end{array}\right.$$

avec

- f fonction C^2 sur $[0,1]$
- c fonction C^2 sur $[0,1]$ avec $c(x)\geq 0$.

Nous avons vu qu'il existe une unique solution u dans $C^4([0,1])$.

Maillage

On subdivise de façon régulière l'intervalle $[0,1]$. On appelle $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n+1$ les points de la subdivision.

Vocabulaire :

- La subdivision est appelée **maillage** uniforme de $[0,1]$
- Les points x_i sont les **nœuds** du maillage
- $h = \dfrac{1}{n+1}$ est le **pas** du maillage

Le nombre de nœuds du maillage (soit $n+2$) est destiné à tendre vers l'infini et donc h vers 0.

Construction du schéma numérique

Comme les fonctions c et f sont données, on peut calculer $c(x_i) = c_i$ et $f(x_i) = f_i$.

Notons $\tilde{u}_i = u(x_i)$ la solution à approcher.

- $\tilde{u}_0 = \alpha$ et $\tilde{u}_{n+1} = \beta$ sont les conditions aux limites.

- Ecrivons l'équation différentielle en x_i avec $i = 1, \ldots, n$:

$$-u''(x_i) + c_i \tilde{u}_i = f_i$$

Construction du schéma numérique

On a vu précédemment que l'on pouvait approcher la dérivée seconde de u en un point donné à l'aide de la formule :

$$u''(x_i) = \frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

On a donc pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$-u''(x_i) + c_i\tilde{u}_i = \frac{-\tilde{u}_{i+1} + 2\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + c_i\tilde{u}_i + O(h^2)$$

$$\frac{-\tilde{u}_{i+1} + 2\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + c_i\tilde{u}_i + O(h^2) = f_i$$

Construction du schéma numérique

On a donc pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{-\tilde{u}_{i+1} + 2\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + c_i \tilde{u}_i - f_i = R_i$$

$$\text{avec } R_i = O(h^2) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Plus précisément, on montre avec la formule de Taylor-Lagrange que *l'erreur de consistance* $\max_{1 \le i \le n} |R_i|$ vérifie :

$$\max_{1 \le i \le n} |R_i| \le \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|$$

Le vecteur $R = (R_1, \dots, R_n)^T$ est appelé *résidu*.

Schéma aux différences finies

Notons u_i l'approximation de $u(x_i)$ obtenue en négligeant les termes $O(h^2)$ dans les n équations précédentes.

- On cherche $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ (vecteur colonne) tel que pour tout $i = 1, \ldots n$:

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i$$

- $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \beta$ sont donnés par les conditions limites.

Ce système linéaire définit un **schéma aux différences finies** pour l'approximation de la solution u du problème aux limites.

Remarque : comme $\|R\|_\infty = O(h^2)$, on dit que le schéma est *consistant à l'ordre* 2 avec le problème aux limites.

Formulation matricielle

On écrit le système à résoudre pour trouver les u_i $(i = 1, \ldots, n)$ sous la forme :

$$A\,U = B$$

avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$ (vecteur colonne). On a :

$$\begin{aligned}
\frac{-u_2 + 2u_1 - u_0}{h^2} + c_1\,u_1 &= f_1 \\
\frac{-u_3 + 2u_2 - u_1}{h^2} + c_2\,u_2 &= f_2 \\
&\ldots \\
\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + c_i\,u_i &= f_i \\
&\ldots \\
\frac{-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}}{h^2} + c_n\,u_n &= f_n
\end{aligned}$$

Formulation matricielle

Puisque $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \beta$, on obtient :

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2+c_3h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2+c_nh^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

Formulation matricielle

De manière équivalente, après multiplication par h^2 :

$$
\begin{pmatrix}
2+c_1h^2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 2+c_2h^2 & -1 & 0 & & \vdots \\
0 & -1 & 2+c_3h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2+c_nh^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
h^2\, f_1 + \alpha \\ h^2\, f_2 \\ \vdots \\ h^2\, f_{n-1} \\ h^2\, f_n + \beta
\end{pmatrix}
$$

Formulation matricielle

Le schéma aux différences finies s'écrit donc comme un système linéaire dont le second membre est

$$B = (h^2\, f_1 + \alpha, h^2\, f_2, \ldots, h^2\, f_{n-1}, h^2\, f_n + \beta)^T$$

et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 + c_3 h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 2 + c_n h^2 \end{pmatrix}$$

Résolution du système

Définition : Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive si

$$x^T M x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Théorème : Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont > 0.

Corollaire : Toute matrice symétrique définie positive est inversible.

Proposition : Si $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ alors la matrice A du schéma aux différences finies est symétrique définie positive.

Corollaire : Si $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ alors la matrice A du schéma aux différences finies est inversible, et le système $A\,U = B$ possède une solution unique $U \in \mathbb{R}^n$.

Remarque : si $c > 0$, la matrice A est à diagonale strictement dominante :

$$\forall i = 1, \ldots, n, \ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

et donc A est inversible.

Résolution du système

Preuve de la proposition : on a $A = M + Q$, où la matrice Q est diagonale avec $Q_{ii} = c_i h^2 \geq 0$, et donc $x^T Q\, x \geq 0$, et

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est symétrique définie positive, car ses valeurs propres λ_k sont > 0 :

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \left(\frac{k\,\pi}{2(n+1)} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$x^T A\, x = x^T M\, x + x^T Q\, x \geq x^T M\, x > 0$$

Résolution du système

$\rightarrow$ Résolution du système $A\,U = B$ par une méthode numérique appropriée (voir cours suivants) :

- méthodes itératives (SOR, méthodes de descente)
- méthodes directes (LU, Cholesky)

Caractéristiques de la matrice A (important pour le choix et les performances des méthodes de résolution) :

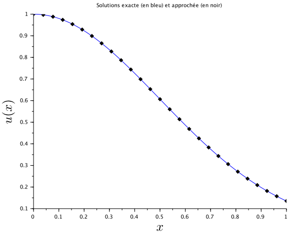
- taille n grande lorsque h est petit
- matrice creuse (seulement $3n - 2$ coefficients non nuls)
- matrice tridiagonale : $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$
- matrice symétrique définie positive
- matrice à diagonale strictement dominante si $c > 0$

Résolution du système

On teste le schéma dans un cas où la solution est connue explicitement :

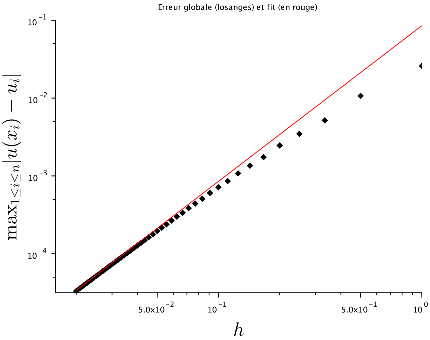
$$\begin{cases} -u''(x) + 16\,x^2\,u(x) &= 4\,e^{-2x^2} \qquad x \in]0,1[\\ u(0) &= 1 \\ u(1) &= e^{-2} \end{cases}$$

admet pour solution $u(x) = e^{-2\,x^2}$.
Comparaison des solutions numérique (points) et exacte (courbe) pour $n = 25$:



Résolution du système

D'après un fit linéaire, $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |u(x_i) - u_i| \leq C\, h^2$ avec $C \approx 0.085$:



On observe que l'écart maximal entre les solutions numérique et exacte tend vers 0 lorsque $h \to 0$ au même ordre que l'erreur de consistance.

Convergence du schéma aux différences finies

Proposition :

L'approximation numérique $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ de la solution exacte u vérifie :

$$\max_{1\leq i\leq n} |u(x_i) - u_i| = O(h^2) \quad \text{quand } h \to 0.$$

Le schéma est donc **convergent d'ordre 2**

Preuve : L'approximation numérique vérifie :

$$A\,U - B = 0$$

La solution exacte $\tilde{U} = (u(x_1), \ldots, u(x_n))^T$ vérifie :

$$\frac{1}{h^2}\left(A\,\tilde{U} - B\right) = R, \quad \text{avec } \|R\|_\infty = O(h^2) \text{ (schéma consistant à l'ordre 2)}$$

L'erreur $\tilde{U} - U$ vérifie donc :

$$\frac{1}{h^2}\,A\,(\tilde{U} - U) = R$$

Convergence du schéma aux différences finies

Nous allons montrer la *stabilité du schéma par rapport aux erreurs* :

$$\|\tilde{U} - U\|_\infty \leq M\,\|R\|_\infty$$

avec M indépendant de h (ici $M = 1$)
Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a l'estimation :

$$\begin{aligned}
\|y\|_\infty &\leq \|(y_1, y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1})\|_1 \\
&\leq \sqrt{n}\,\|(y_1, y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1})\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{h}}\,(y^T M\, y)^{1/2}
\end{aligned}$$

Puisque $y^T M\, y \leq y^T A\, y$, on en déduit pour $y = \tilde{U} - U$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{U} - U\|_\infty^2 &\leq \frac{1}{h}\,(\tilde{U} - U)^T A\,(\tilde{U} - U) = h\,(\tilde{U} - U)^T\,R \\
&\leq h\,\|\tilde{U} - U\|_\infty\,\|R\|_1
\end{aligned}$$

$$\|\tilde{U} - U\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}\,\|R\|_1 \leq \|R\|_\infty$$

Convergence du schéma aux différences finies

La stabilité et la consistance du schéma impliquent sa convergence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{U} - U\|_\infty \leq M \, \|R\|_\infty \\ \|R\|_\infty = O(h^2) \end{array} \right. \Longrightarrow \|\tilde{U} - U\|_\infty = O(h^2)$$

Remarque :
Lorsque $c > 0$, on peut montrer la stabilité du schéma (et donc sa convergence) plus simplement en utilisant la diagonale strictement dominante de A (approche également intéressante pour des matrices non symétriques).