ENSIMAG 1ère année — Méthodes Numériques

Examen du 25 Avril 2022

Durée : 3h.

Documents, calculatrices, ordinateurs et téléphones portables interdits.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans l'évaluation des copies.

2 points

Exercice 1 : *Questions de cours sur les équations différentielles*

1 **1.** Rappeler la *définition* d'un schéma consistant d'intégration en temps d'une équation différentielle.

1 **2.** Peut-on déterminer si un schéma est consistant sans calculer son ordre ?

3 points

Exercice 2 : *Factorisation LU*

Pour les matrices inversibles A suivantes, calculer la factorisation $A = LU$ (sans permutation de lignes de A) lorsque celle-ci existe, ou bien en justifier la non-existence :

$$\underset{1,5}{} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 17 & 4 \\ 15 & 5 & 26 & 10 \\ 12 & 14 & 46 & 21 \end{pmatrix}, \quad \underset{1,5}{} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 points

Exercice 3 *Factorisation de Cholesky*

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On souhaite calculer la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système linéaire :

$$A^2 x = b. \tag{1}$$

1,5 **1.** On considère une première méthode qui consiste à calculer A^2 (par l'algorithme de multiplication matricielle standard) puis résoudre (1) par la méthode de Cholesky. Donner un équivalent du coût de cet algorithme (nombre d'opérations arithmétiques élémentaires) lorsque $n \to +\infty$.

1,5 **2.** Montrer qu'on peut résoudre (1) sans calculer A^2, en utilisant la factorisation de Cholesky de A. Donner un équivalent du coût de cet algorithme lorsque $n \to +\infty$, et comparer son efficacité à celle de la méthode précédente lorsque n est grand.

4,5 points

Exercice 4 : *Résolution itérative d'une équation non linéaire*

Etant donnés une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, on cherche $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ solution du système non linéaire

$$A\,x = \sin x + b, \tag{2}$$

dans lequel on note $\sin x = (\sin x_1, \dots, \sin x_n)^T$.

0,5 **1.** Reformuler (2) comme la recherche d'un point fixe x d'une application dans $\mathbb{R}^n$.

1,5 ∃! 1,5 schéma **2.** Lorsque $|||A^{-1}|||_\infty < 1$, montrer que (2) admet une unique solution x et écrire un schéma itératif permettant de la calculer (inclure une condition d'arrêt et formuler le schéma pour réduire le nombre d'opérations).

1 **3.** Lorsque A est à diagonale strictement dominante, donner une condition sur les coefficients de A garantissant que $|||A^{-1}|||_\infty < 1$ sans avoir à calculer A^{-1}.

7 points

Exercice 5 : *Etude d'une méthode itérative linéaire à deux pas*

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour résoudre le système $A\,x = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$, on considère la méthode itérative :

$$x_{k+1} = (I - \alpha\, A)\, x_k + \alpha\, b + \beta\,(x_k - x_{k-1}) \quad \forall\, k \geqslant 1, \tag{3}$$

où $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres et $x_k \in \mathbb{R}^n$ (x_0, x_1 initialisent la méthode).

0,5 **1.** Vérifier que si $(x_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers x alors $A\,x = b$.

1 **2.** Afin d'étudier la convergence de la méthode (3), on introduit :

$$z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

et on reformule (3) en

$$z_{k+1} = M\, z_k + c$$

avec $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^{2n}$. Expliciter la matrice M (on pourra écrire une matrice par blocs) et le vecteur c.

2 **3.** Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si il existe une valeur propre μ de A telle que

$$\lambda^2 + \lambda\,(\alpha\,\mu - 1 - \beta) + \beta = 0.$$

2 **4.** En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur α et β pour que $\rho(M) < 1$. *Pour obtenir ce résultat, on pourra utiliser la propriété suivante (sans la démontrer) : toutes les racines d'un polynôme réel unitaire du second degré $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0$ sont de module < 1 si et seulement si $|a_1| - 1 < a_0 < 1$.*

1 **5.** Peut-on trouver des conditions suffisantes sur α et β pour avoir $\rho(M) < 1$ lorsque les valeurs propres de A ne sont pas connues explicitement ?

0,5 **6.** Lorsque $\rho(M) < 1$, justifier que $\lim_{k\to+\infty} x_k = x$ quels que soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$.

0,5 points présentation + rédaction.

1

Exercice 1 :

1) On intègre numériquement $y' = f(t,y)$ $(y(t) \in \mathbb{R}^n)$ pour $t \in [t_0, T]$.
On considère un schéma à un pas $y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k, h)$,
où $t_k = t_0 + kh$ $\left(h = \frac{T-t_0}{N}\right)$, y_k est l'approximation numérique de $y(t_k)$, et $\phi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définit le schéma. Par définition, le schéma est consistant si et seulement si $\forall$ solution y de l'éq. diff.,

$$\sup_{t\in[t_0, T-h]} \left\| \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \phi(t, y(t), h) \right\| \to 0 \text{ lorsque } h \to 0.$$

2) Lorsque ϕ est continue, on peut déterminer si le schéma est consistant sans calculer son ordre en utilisant le résultat suivant : le schéma est consistant si et seulement si $\phi(t,y,0) = f(t,y)$ $\forall t, y$.

Exercice 2 Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 17 & 4 \\ 15 & 5 & 26 & 10 \\ 12 & 14 & 46 & 21 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ ? & 1 & & \\ ? & ? & 1 & \\ ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix} \text{ à déterminer}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 10 & 30 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 5L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{matrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 5 & ? & 1 & \\ 4 & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 - 0L_2 \\ L_4 - 2L_2 \end{matrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 5 & 0 & 1 & \\ 4 & 2 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_4 - 2L_3 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :
qu'observe-t-on pour L et U ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ est inversible (indiqué dans l'énoncé) donc

admet une factorisation $A = LU$ si et seulement si toutes ses sous-matrices principales $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ sont inversibles. Or Δ_3 n'est pas inversible :

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ vérifie $\Delta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, donc $\mathrm{Ker}\, \Delta_3 \neq \{0\}$, donc Δ_3 non inversible

Donc A n'admet pas de factorisation $A = LU$.

Exercice 3

1) $(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$ se calcule en $2n-1$ opérations ($n \times$ et $n-1$ $+$)

et il y a $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients à calculer puisque A^2 est symétrique.

Le calcul de A^2 nécessite donc $\sim n^3$ opérations. La résolution du système $A^2 x = b$ par la méthode de Cholesky nécessite $\sim \frac{1}{3} n^3$ opérations. Le coût du calcul de x avec cette méthode est donc $\sim \frac{4}{3} n^3$.

2) La résolution de $A^2 x = b$ peut s'effectuer comme suit :

a) factoriser $A = T\, {}^tT$ (Cholesky)

b) résoudre $T\, {}^tT y = b$

c) résoudre $T\, {}^tT x = y$

Le coût de a) est $\sim \frac{1}{3} n^3$, le coût de b) est $O(n^2)$ (résolution de deux systèmes triangulaires, calcul vu en cours) et il en va de même pour c). Le coût du calcul de x est donc $\sim \frac{1}{3} n^3$.

Cette méthode est donc plus économique que la méthode décrite en 1).

Remarque Le conditionnement euclidien de A^2 étant le carré du conditionnement de A, la première méthode est également plus sensible aux erreurs d'arrondi dans les calculs sur machine.

Exercice 4

1) $Ax = \sin x + b \iff x = A^{-1}\sin x + A^{-1}b := \phi(x)$

Donc x est solution de l'équation non linéaire si et seulement si x est un point fixe de ϕ.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\ \|_\infty$. Vérifions que l'application $\sin : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\sin x = (\sin x_1, \dots, \sin x_n)^T$) est lipschitzienne de rapport 1. D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall i = 1 \dots n$, $|\sin x_i - \sin y_i| \leq |x_i - y_i|$ donc par passage au max sur i :

$\|\sin x - \sin y\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty$.

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|\phi(x) - \phi(y)\|_\infty = \|A^{-1}(\sin x - \sin y)\|_\infty \leq |||A^{-1}|||_\infty \|x-y\|_\infty$

Donc ϕ est contractante sur $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ si $|||A^{-1}|||_\infty < 1$.

D'après le théorème du point fixe contractant (*), ϕ admet alors un unique point fixe x, donc l'équation $Ax = \sin x + b$ admet une solution unique.

((*) Thm énoncé en cours pour une applic. contractante sur un fermé de $\mathbb{R}^n$)

Cette solution peut s'obtenir par la méthode des approximations successives : $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = \phi(x_k)$ converge vers x (d'après le théorème du point fixe contractant).

Pour éviter de calculer A^{-1} et réduire le coût de chaque itération, on peut formuler la méthode comme suit, en utilisant $Ax_{k+1} = \sin x_k + b$:

- factoriser $PA = LU$
- pour tout $k \geq 0$, résoudre :

  $LU\, x_{k+1} = P \sin x_k + Pb$.

Nous avons établi en cours la borne d'erreur :

$\|x_k - x\|_\infty \leq \dfrac{K}{1-K} \|x_k - x_{k-1}\|_\infty$ avec $K = |||A^{-1}|||_\infty$ constante de Lipschitz de ϕ. Donc si ε désigne une tolérance d'erreur, on peut arrêter l'itération lorsque $\|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon\left(\frac{1}{K} - 1\right)$, ce qui garantit $\|x_k - x\|_\infty \leq \varepsilon$.

3) Notons $\delta = \min_{1 \le i \le n} \left(|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\dots n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \right) > 0$

Nous avons montré en TD que $|||A^{-1}|||_\infty \le \frac{1}{\delta}$.

Donc si $\underline{\delta > 1}$, on a $|||A^{-1}|||_\infty \le \frac{1}{\delta} < 1$ et les résultats de la question 2 s'appliquent.

<u>Exercice 5</u>

1) Si $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x$ alors $x = (I - \alpha A)x + \alpha b$ par passage à la limite dans (3) d'où $Ax = b$ (puisque $\alpha \neq 0$).

2) $$z_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((1+\beta)I - \alpha A)x_k - \beta x_{k-1} + \alpha b \\ x_k \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix} + c$$

avec $M = \begin{pmatrix} (1+\beta)I - \alpha A & -\beta I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} \alpha b \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) $\lambda \in Sp(M)$ si et seulement si l'équation $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ admet des solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nulles. Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} ((1+\beta)I - \alpha A)x - \beta y = \lambda x & (a) \\ x = \lambda y & (b) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \lambda y \\ (\lambda^2 I + \lambda(\alpha A - (1+\beta)I) + \beta I)y = 0 \quad (c) \end{cases}$$ (substitution de (b) dans (a))

Il existe des solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ si et seulement si l'équation (c) admet des solutions $y \neq 0$. Notons $Q_\lambda(A) = \alpha\lambda A + \gamma I$ ($\gamma = \lambda^2 - \lambda(1+\beta) + \beta$) la matrice de (c). Alors $Sp(Q_\lambda(A)) = \{Q_\lambda(\mu), \mu \in Sp(A)\}$ ($A = P \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \mu_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$ donne $Q_\lambda(A) = P \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & Q_\lambda(\mu_i) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$). Donc $\operatorname{Ker} Q_\lambda(A) \neq \{0\}$ si et seulement si $\exists \mu \in Sp(A)$ tel que $Q_\lambda(\mu) = 0$, c'est à dire : $\lambda^2 + \lambda(\alpha\mu - 1 - \beta) + \beta = 0$

4) $\rho(M)<1 \iff |\lambda|<1 \quad \forall \lambda \in Sp(M)$

$\iff |\alpha\mu-1-\beta| -1<\beta<1 \quad \forall \mu \in Sp(A)$ ($\mu \in \mathbb{R}$ puisque A est symétrique réelle)

$$\iff \begin{cases} \beta<1 \\ |\alpha\mu-1-\beta|<1+\beta \quad \forall \mu\in Sp(A) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta<1 \\ 0<\alpha\mu<2(1+\beta) \quad \forall \mu \in Sp(A) \end{cases}$$

Or $\alpha>0$ et $\mu>0 \ \forall \mu \in Sp(A)$ puisque A est symétrique définie positive

Donc $\rho(M)<1 \iff \begin{cases} \beta<1 \\ \alpha < \dfrac{2(1+\beta)}{\rho(A)} \end{cases}$

5) Si $\| \ \|$ désigne une norme matricielle sous-multiplicative calculable explicitement (p.ex. $||| \ |||_\infty$, $||| \ |||_1$, norme de Schur) alors puisque $\rho(A) \leq \|A\|$, on a $\dfrac{2(1+\beta)}{\|A\|} \leq \dfrac{2(1+\beta)}{\rho(A)}$, donc les conditions

$\begin{cases} \beta<1 \\ \alpha < \dfrac{2(1+\beta)}{\|A\|} \end{cases}$ impliquent celles de la question 4) et donc $\rho(M)<1$.

6) Lorsque $\rho(M)<1$, la suite $z_{k+1} = M z_k + c$ converge quel que soit $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ vers la solution $z = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ de $z = Mz + c$

(d'après la condition nécessaire et suffisante de convergence des méthodes itératives linéaires). Puisque $z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$, x_k converge $\forall x_1, x_0$ vers x solution de $Ax=b$ (équivalent à la 1ère équation de $z = Mz + c$).