Feuille 7

Discrétisation d'équations différentielles

Exercice : Méthode à pas séparés

On considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0,$$

avec $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose f lipschitzienne par rapport à y (uniformément en $t \in [a, b]$). On introduit une classe de méthodes à pas séparés pour calculer numériquement la solution $y(t) \in \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy lorsque $t \in [a, b]$. Ces schémas s'écrivent

$$y_{k+1} = y_k + h\,\phi(t_k, y_k, h),$$

$$\phi(t_k, y_k, h) = \beta f(t_k, y_k) + \gamma f[t_k + \alpha h, y_k + \alpha\, h\, f(t_k, y_k)],$$

où α, β, γ désignent trois paramètres réels.

1- Donner une condition sur les paramètres pour que le schéma soit consistant (dans la suite de l'exercice, on supposera cette condition satisfaite).

2- Montrer que le schéma est stable.

3- Montrer que le schéma est convergent.

4- Etudier l'ordre de la méthode en fonction des paramètres. Que retrouvez-vous pour les méthodes d'ordre maximal ?