Université de Lorraine **année 2019-2020**

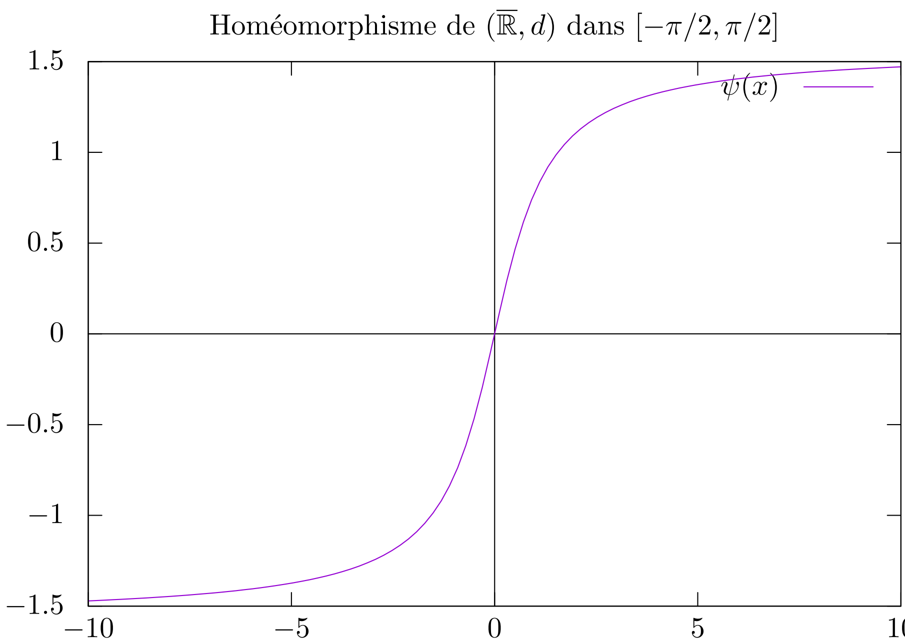
M2 MFA et Agrégation de Mathématiques

Liminf, limsup, valeurs d'adhérence, un peu de connexité (et de probabilités !).

1 Limsup, liminf

1.1 La droite réelle achevée

On ajoute deux points à $\mathbb{R}$ que l'on note $-\infty$ et $+\infty$. On définit ainsi la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Notons $\psi(x) = \operatorname{atan} x$ pour x réel $\psi(+\infty) = \pi/2$, $\psi(-\infty) = -\pi/2$.



Pour x, y dans $\overline{\mathbb{R}}$, on note $d(x,y) = |\psi(x) - \psi(y)|$. Il n'est pas très difficile de vérifier que pour tous x, y, z dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a

— $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

— $d(x,y)=0 \iff x=y$
— $d(x,y)=d(y,x)$.
On dit alors que $(\overline{\mathbb{R}},d)$ est un espace métrique.

Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on dit que (x_n) converge vers x si $d(x,x_n)$ tend vers 0.

On peut remarquer que ψ réalise un homéomorphisme croissant de $(\overline{\mathbb{R}},d)$ dans $[-\pi/2,\pi/2]$ (l'homéomorphisme réciproque est bien sûr un prolongement de la fonction tangente).

Corollaire 1. *De toute suite (a_n) à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}},d)$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. $\psi(a_n)$ est à valeurs dans l'intervalle compact $[-\pi/2,\pi/2]$, donc, il existe une suite $\phi(n)$ d'entiers strictement croissante et $y\in[-\pi/2,\pi/2]$ tel que $\psi(a_{\phi(n)})$ tend vers y. Par continuité de ψ^{-1}, $(a_{\phi(n)})$ tend vers $\psi^{-1}(y)$. □

Pour une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut vérifier que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers a dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle converge vers a dans $\mathbb{R}$, que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini, que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

On peut prolonger la relation d'ordre $\leq$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, en disant que sont vraies les relations "$-\infty\leq a$" "$a\leq+\infty$" pour tout $a\in\mathbb{R}$ ainsi que "$-\infty\leq+\infty$".

On peut alors énoncer le théorème suivant

Théorème 1. *Toute suite monotone de $\overline{\mathbb{R}}$ converge.*

Démonstration. On va le prouver pour une suite croissante. Si la suite est constante égale à $-\infty$, elle converge. Sinon, à partir d'un certain rang, elle est à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$, donc on peut se ramener au cas où elle est à valeurs $]-\infty,+\infty]$. Maintenant, si elle contient $+\infty$, elle est constante à partir d'un certain rang, donc elle converge. On s'est donc finalement ramené au cas où la suite est à valeurs réelles : si elle est croissante, majorée, elle converge dans $\mathbb{R}$, si elle est croissante non majorée, elle converge vers $+\infty$. □

1.2 Limite supérieure

La limite supérieure d'une suite (a_n) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n} a_k.$$

Cette limite existe bien car la suite (v_n) définie par $v_n = \sup_{k \geq n} a_k$ est décroissante. De même, la limite inférieure d'une suite (a_n) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Cette limite existe bien car la suite (w_n) définie par $w_n = \inf_{k \geq n} a_k$ est croissante.

Lemme 1. *Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, f une fonction croissante continue de $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, d)$. Alors, $\sup\{f(x_i); i \geq 1\} = f(\sup\{x_i; i \geq n\})$.*

Démonstration. La suite $\max\{x_i; 1 \leq i \leq k\}$ converge vers $\sup\{x_i; i \geq 1\}$ lorsque k tend vers l'infini. Donc par continuité $f(\max\{x_i; 1 \leq i \leq k\})$ converge vers $f(\sup\{x_i; i \geq 1\})$. Or $f(\max\{x_i; 1 \leq i \leq k\}) = \max\{f(x_i); 1 \leq i \leq k\}$, qui elle-même converge vers $\sup\{f(x_i); i \geq 1\}$ lorsque k tend vers l'infini. Finalement $\sup\{f(x_i); i \geq 1\} = f(\sup\{x_i; i \geq n\})$. □

Théorème 2. $\limsup_{n \to +\infty} a_n$ *est la plus grande valeur d'adhérence de a_n dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Posons $\bar{l} = \limsup_{n \to +\infty} a_n$, et, comme précédemment $v_n = \sup_{k \geq n} a_k$. Commençons par montrer que toute valeur d'adhérence a de (a_n) vérifie $a \leq \bar{l}$. Soit $a = \lim_{n \to +\infty} a_{\phi(n)}$ une valeur d'adhérence. Si $a = -\infty$ ou $\bar{l} = +\infty$, il n'y a rien a montrer. Sinon, prenons $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geq N$ entraîne $v_n \leq \bar{l} + \epsilon$, et donc $a_k \leq \bar{l} + \epsilon$ pour $k \geq N$. Comme $\phi(n)$ tend vers l'infini, il existe M tel que $n \geq M$ entraîne $\phi(n) \geq N$. Finalement on a $a_{\phi(n)} \leq \bar{l} + \epsilon$ pour $n \geq M$, d'où $a \leq \bar{l} + \epsilon$. Comme ϵ est quelconque, on a $a \leq \bar{l}$. Reste à montrer que $\bar{l}$ est valeur d'adhérence.

On pose $\phi(1) = 1$, puis

$$\phi(k+1) = \inf\left\{n \geq \phi(k) + 1; \psi(v_{\phi(k)+1}) \geq \psi(a_n) \geq \psi(v_{\phi(k)+1}) - 1/k\right\}$$

$\phi(k+1)$ est bien défini, car $\sup_{n \geq \phi(k)+1} \psi(a_n) = \psi(\sup_{n \geq \phi(k)+1} a_n)$, d'après le lemme ($\psi$ est un homéomorphisme, donc est continu). Pour $k \geq 1$, on a

$$\psi(v_{\phi(k)+1}) \geq \psi(a_{\phi(k+1)}) \geq \psi(v_{\phi(k)+1}) - 1/k,$$

ce qui montre que $\psi(a_{\phi(k)})$ tend vers $\psi(\bar{l})$, et donc, comme ψ^{-1} est continue, que $a_{\phi(k)}$ tend vers $\bar{l}$. $\square$

De même

Théorème 3. $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ *est la plus petite valeur d'adhérence de* a_n *dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 4.

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sup\{x \in \overline{\mathbb{R}}; \{n \geq 1; a_n \geq x\} \textit{ est infini.}\}$$

Démonstration. Supposons que x est tel que $\{n \geq 1; a_n \geq x\}$ est infini. On peut donc en extraire une suite $\phi(n)$ strictement croissante d'entiers telle que $a_{\phi(n)}$ converge vers $z \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a_{\phi(n)} \geq x$ pour tout n : comme $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ est plus grand que toutes les valeurs d'adhérence, on a donc

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \geq z \geq x$$

En prenant le sup sur tous les x tels que $\{n \geq 1; a_n \geq x\}$ est infini, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \geq \sup\{x \in \mathbb{R}; \{n \geq 1; a_n \geq x\} \text{ est infini.}\}$$

Maintenant raisonnons par l'absurde et supposons que

$$L = \limsup_{n\to+\infty} a_n > S = \sup\{x \in \mathbb{R}; \{n \geq 1; a_n \geq x\} \text{ est infini.}\}$$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $L > S + \epsilon$. Comme L est la plus grande valeur d'adhérence de a_n, L est la limite d'une suite extraite $a_{\phi(n)}$. Pour n assez grand, on a $a_{\phi(n)} > S + \epsilon$, ce qui entraîne que l'ensemble des n tels que a_n dépasse $S + \epsilon$ est infini, ce qui contredit la définition de S. $\square$

De même

Théorème 5.

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}}; \{n \geq 1; a_n \leq x\} \textit{ est infini.}\}$$

Théorème 6. *Une suite (a_n) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge si et seulement si $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, qui est alors la limite.*

Démonstration. Si $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{n \geq 1; a_n \leq x\}$ est fini, ce qui montre que a_n tend vers $+\infty$. De même, si $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{n \geq 1; a_n \geq x\}$ est fini, ce qui montre que a_n tend vers $-\infty$. Passons au cas où $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Comme

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sup\{x \in \overline{\mathbb{R}}; \{n \geq 1; a_n \geq x\} \text{ est infini.}\} = l \in \mathbb{R},$$

l'ensemble des n tels que $a_n \geq l + \epsilon$ est fini. De même, comme

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}}; \{n \geq 1; a_n \leq x\} \text{ est infini.}\} = l \in \mathbb{R},$$

l'ensemble des n tels que $a_n \leq l - \epsilon$ est fini. Finalement, l'ensemble des n tels que $|a_n - l| \geq \epsilon$ est fini . Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, à partir d'un certain rang, $|a_n - l| < \epsilon$ ce qui montrer que a_n tend vers l.

Réciproquement, si a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ sont égales à l puisque ce sont des valeurs d'adhérence de (a_n). □

Théorème 7. *Soit (u_n), u'_n deux suites avec $u_n \leq u'_n$ pour tout n. On a $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} u'_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} u'_n$*

Démonstration. Pour tout n, $\sup\limits_{k\geq n} u_k \leq \sup\limits_{k\geq n} u'_k$, d'où la première inégalité en faisant tendre n vers $+\infty$. Pour tout n, $\inf\limits_{k\geq n} u_k \leq \inf\limits_{k\geq n} u'_k$, d'où la deuxième inégalité en faisant tendre n vers $+\infty$. □

Corollaire 2. *Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \geq l - \epsilon$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq l+\epsilon.$$

Alors, u_n converge vers l.

Démonstration. En faisant tendre $\epsilon > 0$ dans les deux inégalités, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \geq l$$

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq l.$$

Finalement

$$l \leq \liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n \leq l,$$

comme les termes extrêmes sont égaux, ceci entraîne que tous les termes sont égaux. □

1.3 Exercices sur les limsup, liminf

Exercice 1. $\liminf_{n\to+\infty} (-1)^n\big(1+\frac{1}{n}\big) \qquad \limsup_{n\to+\infty} (-1)^n\big(1+\frac{1}{n}\big)$

$$\liminf_{n\to+\infty} \cos n \qquad \limsup_{n\to+\infty} \cos n \qquad \liminf_{n\to+\infty} \tfrac{1}{1+\cos n} \qquad \limsup_{n\to+\infty} \tfrac{1}{1+\cos n}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} [0,|\cos n|] \qquad \limsup_{n\to+\infty} [0,|\cos n|].$$

Exercice 2. Soit $(a_i,\, i\in I)$ une famille non vide d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Démontrer que $\inf(a_i,\, i\in I) = -\sup(-a_i,\, i\in I)$.
2. Soit α un élément de $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\inf(\alpha+a_i,\, i\in I) = \alpha + \inf(a_i,\, i\in I)$$

   et en déduire que

$$\sup(\alpha+a_i,\, i\in I) = \alpha + \sup(a_i,\, i\in I).$$

Exercice 3. Démontrer que $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\limsup_{n\to+\infty} (-a_n)$, pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que
$$\liminf_{n\to+\infty}\ (a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to+\infty}\ a_n + \liminf_{n\to+\infty}\ b_n.$$
et
$$\limsup_{n\to+\infty}\ (a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty}\ a_n + \limsup_{n\to+\infty}\ b_n.$$
Montrer que les inégalités peuvent être strictes.
2. On suppose que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. Démontrer que
$$\liminf_{n\to+\infty}\ (a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty}\ a_n + \liminf_{n\to+\infty}\ b_n;\ \liminf_{n\to+\infty}\ (a_n-b_n) = \lim_{n\to+\infty}\ a_n - \limsup_{n\to+\infty}\ b_n$$
$$\limsup_{n\to+\infty}\ (a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty}\ a_n + \limsup_{n\to+\infty}\ b_n;\ \limsup_{n\to+\infty}\ (a_n-b_n) = \lim_{n\to+\infty}\ a_n - \liminf_{n\to+\infty}\ b_n$$

Exercice 5. *Suites sous-additives (lemme de Fekete)*

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite vérifiant
$$\forall n, p \geq 1 \quad u_{n+p} \leq u_n + u_p.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{u_n}{n}$ converge vers $\inf\limits_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$.

1. Soit k un entier naturel non nul fixé, r un entier entre 0 et $k-1$. Montrer que
$$\frac{u_{kn+r}}{nk+r} \leq \frac{nu_k}{nk+r} + \frac{u_r}{nk+r}.$$
En déduire $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{kn+r}}{nk+r} \leq \frac{u_k}{k}$.
2. Montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \inf_{k\geq 1} \frac{u_k}{k}$.
3. Conclure.
4. Application 1. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A||| = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}$.
Montrer que la suite $|||A^n|||^{1/n}$ converge vers un réel positif.
5. Application 2. Soit E une partie finie de $\mathbb{R}^d$. On note A_n l'ensemble des suites $(u_1, \dots u_n)$ qui vérifient
— $u_1 \in E$
— $u_{i+1} - u_i \in E$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$

— $i \mapsto u_i$ est injective
Montrer que la suite $|A_n|^{1/n}$ converge vers un réel positif.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de réels telles que, pour tout $n \geq 1$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^n = a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} (b_n)^n = b > 0$. Soient $p, q > 0$ avec $p + q = 1$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (pa_n + qb_n)^n$.

Exercice 7. Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une unique suite $(u_k)_{k\geq 1}$ vérifiant pour tout N

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=i}^{N} u_k \right)^{-\alpha}.$$

Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \zeta(\alpha)^{1/\alpha} \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite que l'on déterminera (cette dernière question est plutôt un défi, l'auteur de ces lignes ne connaît pas la réponse).

Exercice 8.
1. Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Par la méthode de votre choix, montrer que $H_n \sim \log n$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.
   Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} f(\frac{k}{n})$. Après avoir justifié l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que $|f(0) - f(k/n)| \leq \epsilon$ pour $0 \leq k \leq \alpha n$, montrer que
   $$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n - f(0)H_n|}{H_n} \leq \epsilon.$$
   Conclure.
3. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin \frac{k}{n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

2 Valeurs d'adhérences, points d'accumulation

On définit usuellement les valeurs d'adhérences en l'infini d'une suite (u_n) à valeurs dans l'espace métrique (E, d) comme

$$\{\ell \in E; \exists (n_k)_{k\geq 1} \text{ suite d'entiers strictement croissante}\,; \lim u_{n_k} = \ell\}.$$

On peut aussi définir l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une fonction f en un point x comme

$$\{\ell \in E; \exists (x_k)_{k\geq 1} \text{ suite de réels de limite } x\,; \lim f(u_{x_k}) = \ell\}.$$

En réfléchissant un peu, on voit que le premier cas est un cas particulier du deuxième, en prenant $E = \overline{\mathbb{N}}$ et $x = +\infty$. Pour la distance, on peut prendre la même que sur $\overline{\mathbb{R}}$, ou peut être plus simplement $d(x, y) = |2^{-x} - 2^{-y}|$. La caractérisation suivante, plus topologique, est très importante.

L'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) en l'infini est

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\{u_k; k \geq n\}}.$$

L'ensemble des valeurs d'adhérences de f en x est

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{f(B(x, 1/n)\backslash\{x\})}.$$

On vérifie facilement que si on remplace $B(0, 1/n)$ par une suite quelconque décroissante de voisinages de l'origine dont l'intersection est x, on obtient toujours le même ensemble. En particulier, on peut prendre les boules ouvertes ou fermées.

Dans le cas des suites. Si ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_k)_{k\geq 1}$ c'est aussi une valeur d'adhérence de $(u_k)_{k\geq n}$, donc c'est dans $\overline{\{u_k; k \geq n\}}$. En faisant l'intersection sur les n, on récupère $\ell \in \cap_{n\geq 1}\overline{\{u_k; k \geq n\}}$.

Réciproquement, soit $\ell \in \cap_{n\geq 1}\overline{\{u_k; k \geq n\}}$. Posons $n_0 = 1$, puis

$$n_{k+1} = \inf \{i \geq n_k + 1; d(u_i, \ell) \leq 1/(k + 1)\}.$$

Par construction, $n_{k+1} > n_k$. Montrons que $n_k < +\infty$. Supposons $n_k \in \mathbb{N}$. Comme $\ell \in \overline{\{u_i; i > n_k\}}$, il existe $i > n_k$ avec $d(u_i, \ell) \leq 1/(k + 1)$, ce qui montre que $n_{k+1} \in \mathbb{N}$. Ensuite, par construction, n_k est strictement croissante et on a pour tout $k \geq 1$, $d(u_{n_k}, \ell) \leq 1/k$, ce qui montre que la suite u_{n_k} tend vers ℓ. □

Ces résultats sont à connaître et il faut savoir refaire la preuve sans hésitation.

Cette écriture est très importante car elle permet d'établir des propriétés plus ou moins complexes de l'ensemble des valeurs d'adhérences.

En particulier, sur cette écriture, il est évident que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un fermé, ce qui n'était pas si évident a priori.

De même, si la suite est à valeurs dans un compact, l'ensemble des valeurs d'adhérences apparaît comme une intersection de compacts emboîtés non-vides : elle est donc non-vide.

2.1 Exercices sur les valeurs d'adhérence

Exercice 9. Soit (u_n) le terme général d'une série semi-convergente. Montrer que pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\phi(n)}$. La fiche ≪ Sur des séries semi-convergentes ≫ donne la preuve dans le cas $u_n = 1/n$. Le cas général est très similaire.

Exercice 10. *Valeurs d'adhérence de la suite $\phi(n)/n$.*

1. Montrer que pour toute série divergente positive dont le terme général (u_n) tend vers 0, et pour tout $\ell > 0$, on peut extraire une sous-série (u_{n_k}) telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n_k} = \ell$.
2. On note $\phi(n)$ l'indicatrice d'Euler (voir exercice **??**). Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(\phi(n)/n)_{n\geq 1}$ est l'intervalle $[0,1]$ tout entier.

Exercice 11. *Valeurs d'adhérence de certaines suites.*
Rappel : pour x réel, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x (c'est-à-dire $x - \mathrm{Ent}(x)$).

1. Soit $(s_n)_{n\geq N}$ une suite croissante de réels de limite $+\infty$. On suppose que $x \in]0,1[$ est tel que pour tout $n \geq N$, $s_{n+1} - s_n < \min(x, 1-x)$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq N$ tel que $s_{n+1} - s_n = \{s_{n+1}\} - \{s_n\}$ et $\{s_n\} \leq x \leq \{s_{n+1}\}$.
2. Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels de limite $+\infty$ et telle que $\lim(s_{n+1} - s_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\{s_n\})_{n\geq 1}$ est l'intervalle $[0,1]$.
3. Soit z un nombre complexe de module 1 qui n'est pas une racine de l'unité. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z^n)_{n\geq 1}$ est le cercle unité $\mathbb{U}$ tout entier.
4. Pour θ irrationnel, on considère les suites $(\cos(2n\pi\theta))$ et $(\sin(2n\pi\theta))$. Quelles en sont les valeurs d'adhérence ? En déduire les limites supérieure et inférieure de chacune de ces suites.

3 Un peu de connexité

Théorème 8. *Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ une famille décroissante de connexes compacts d'un espace métrique. Alors $C = \cap_{n\geq 1} C_n$ est un connexe compact.*

Démonstration. C est compact comme intersection de compacts. On raisonne par l'absurde et on suppose que C n'est pas connexe : C peut donc s'écrire comme union de deux ensembles F_1 et F_2 fermés pour la topologie induite. Comme C est fermé, F_1 et F_2 le sont aussi et ils sont même compacts, comme fermés d'un compact. On définit sur l'espace métrique la fonction $\phi(x) = d(F_1, x) - d(F_2, x)$. Pour tout n, la fonction ϕ prend à la fois des valeurs positives et négatives sur C_n. En effet, elle est strictement positive sur F_2 et strictement négative sur F_1. Comme C_n est connexe et ϕ continue, $\phi(C_n)$ contient 0, donc $C'_n = C_n \cap \phi^{-1}(0)$ est un compact non-vide. La suite des C'_n est une suite décroissante de compacts non vides, donc son intersection est non-vide. Or cette intersection est $C \cap \phi^{-1}(0)$; on a donc une contradiction, car on a vu que ϕ est strictement positive sur F_2 et strictement négative sur F_1.

□

Par exemple, si f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$ et prenant ses valeurs dans un compact, l'ensemble des valeurs d'adhérences de f en l'infini est connexe puisque c'est

$$\bigcap_{n\geq 1} f([n, +\infty[),$$

et que l'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

En fait, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, il n'est pas nécessaire que f soit bornée. En effet, dans $\mathbb{R}^n$, une intersection décroissante de fermés connexes est connexe.

Démonstration. Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fermés connexes. On pose $C = \cap_{n\geq 1} C_n$. Pour tout $M > 0$, on a

$$C \cap B_F(0, M)) = \bigcap_{n\geq 1} (C_n \cap B_F(0, M))$$

Ainsi, $C \cap B_F(0, M)$ est une intersection décroissante de compacts connexes, c'est donc un connexe. Maintenant

$$C = \bigcup_{M\geq 1} (C \cap B_F(0, M)),$$

or une réunion croissante de connexes est connexe, donc C est connexe. □

3.1 Exercices sur la connexité

Exercice 12. Dans la preuve qui précède, on a dit qu'une réunion croissante de connexes est connexe. Montrez-le.

Exercice 13. On définit, pour $x > 0$,

$$f(x) = (1 + \frac{1}{x}) \sin(x + \frac{1}{x}).$$

Déterminer les limites supérieures et inférieures de f en 0^+ et en $+\infty$. En déduire les valeurs d'adhérence de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires (pas forcément continue). Montrer que si $P \circ f$ est continue alors f est continue.

4 Une parenthèse probabiliste

Les trois exercices qui suivent sont un peu éloignés du thème de la fiche. Ils présentent des preuves probabilistes de résultats de théorie des nombres utilisés dans l'exercice 10. Une preuve alternative de ces résultats est proposée dans les exercices corrigés 40 et 41 de Garet–Kurtzmann, page 56-57, chapitre 2.

Exercice 15. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que les événements $A_1^c, \ldots, A_n^c$ sont indépendants. Une preuve détaillée de ce résultat – et même un peu plus – est donnée dans la correction de l'exercice 40 p 56 de Garet–Kurtzmann (chapitre 3).

Exercice 16. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements indépendants, tous de probabilité non nulle. On pose

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

et

$$B = \liminf_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{n=1} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(B) = 0$

Exercice 17. Le but de cette exercice est de montrer qu'il est impossible de construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X à valeurs entières sur cet espace tels que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(n \text{ divise } X) = \frac{1}{n}.$$

On note $p_1, \dots, p_n, \dots$ la suite des nombres premiers.

1. Posons $E = \liminf_{n \to +\infty} \{p_n \text{ ne divise pas } X\}$. Montrer $E = \Omega$.
2. On pose $D_n = \bigcap_{k=1}^{n} \{p_k \text{ ne divise pas } X\}$. Montrer
$$\frac{1}{\mathbb{P}(D_n)} \geq \sum_{i=1}^{p_n} \frac{1}{i}$$
3. En déduire que $\mathbb{P}(D) = 0$, où on a posé $D = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{p_k \text{ ne divise pas } X\}$.
4. Conclure.
5. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{p_i}$ diverge.

Exercice 18. *Calcul probabiliste de la formule de l'indicatrice d'Euler* ϕ corrigé dans GK édition 2,exercice 43 On note Ω_n l'ensemble des entiers de 1 à n. On note $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de n en produits de facteurs premiers. Le but de cet exercice est de déterminer le nombre $\phi(n)$ qui est le cardinal de l'ensemble G_n des d'entiers entre 1 et n qui sont premiers avec n. On note $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur Ω_n.

1. Pour d divisant n, on note $A_d = \{k \in \Omega_n; d|k\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_d)$.
2. Soit $d_1, \dots, d_r$ des diviseurs de n premiers entre eux. Calculer $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{r} A_{d_i})$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(G_n) = 1 - \mathbb{P}(\cup_i A_{p_i})$.
4. En déduire que $\phi(n)/n = \prod_i (1 - 1/p_i)$.

5 Indications des exercices

1 On rappelle que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ou de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \geq 0$. Il en résulte notamment que $\{n + 2m\pi \; ; \; n, m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ce sont des résultats "biens connus". Pour une preuve, voir la fiche « Sous-groupes de $\mathbb{R}$ »

2 On peut faire la remarque simple suivante, très utile dans les problèmes d'inf et de sup : pour a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$(a = b) \iff (\forall x \in \mathbb{R} \quad (x > a) \iff (y > a)).$$

3 On peut utiliser le résultat de la première question de l'exercice précédent.

4

1. À partir d'un certain rang, $a_n \ldots$et $b_n \ldots$donc $a_n + b_n \ldots$
2. On pourra comparer l'ensemble des valeurs d'adhérence de (b_n) et l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(a_n + b_n)$.

5

1. Commencer par remarquer que $u_{kn+r} \leq u_{kn} + u_r$, puis procéder par récurrence sur n.
2. Commencer par montrer que pour tout k, $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}$.
3. $\inf\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.
4. On pourra considérer $u_n = \log |||A^n|||$.
5. On pourra considérer $u_n = \log |A_n|$ et construire une injection de A_{n+p} dans $\subset A_n \times A_p$.

6 Pour n assez grand, $(1 - \epsilon)a \leq (a_n)^n \leq (1 + \epsilon)a$.

7 Commencer par montrer que la série de terme général u_k diverge. A partir de là, on peut remarquer que pour tout i_0

$$1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=i_0}^{N} (\sum_{k=i}^{N} u_k)^{-\alpha},$$

ce qui donnera les inégalités sur les limites inférieure et supérieure de la suite.

8

1. On peut faire une comparaison avec une intégrale ou remarquer que $\log(n) - \log(n-1) \sim \frac{1}{n}$.
2. Dans la somme représentant $S_n - f(0)H_n$, traiter séparément les k tels que $k/n \leq \alpha$ et les autres.
3. Choisir g telle que $\frac{g(x)}{\sin x}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.

10

1. On pose $n_0 = 0$, $s_0 = 0$, puis pour $k \geq 0$:
$n_{k+1} = \inf\{n > n_k; s_k + u_n < \ell\}$ et $s_{k+1} = s_k + u_{n_{k+1}}$.

2. Utiliser la formule donnant $\phi(n)/n$ en fonction de ses facteurs premiers et utiliser la divergence de la série des inverses des nombres premiers.

11 1. On pourra d'abord traiter le cas où $\{s_N\} \leq x$, puis s'y ramener.

2. Commencer par montrer que les points de $]0,1[$ sont valeurs d'adhérence.
3. Noter que la suite (z^n) a au moins une valeur d'adhérence et en déduire qu'on peut trouver une puissance de z arbitrairement proche de 1.
4. Noter que $z = \exp(2i\pi\theta)$ n'est pas une racine de l'unité.

12 Utiliser la caractérisation des connexes par les fonctions continues.

13 Si on pose $x_n = n\pi + \pi/2$, on peut calculer $f(x_{2n})$, $f(x_{2n+1})$, $f(1/x_{2n})$, $f(1/x_{2n+1})$.

14 Attention, là ce n'est pas vraiment une indication, c'est plutôt la solution : $\overline{f([x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}])}$ est un connexe compact de $\overline{\mathbb{R}}$.
Donc, $\cap_{n\geq 1}\overline{f([x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}])}$ est un connexe compact de $\overline{\mathbb{R}}$: ce sont les valeurs d'adhérences de f en x, plus $f(x)$. Cet ensemble est donc un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$; il doit être réduit à un point, sinon, en composant par P, on aurait une contradiction avec la continuité de $P \circ f$ en x (un polynôme non constant n'est constant sur aucun intervalle de longueur non nulle).

15 On pourra commencer par remplacer un seul élément de la famille par son complémentaire.

16 Remarquer qu'une union dénombrable d'événements est de probabilité nulle si et seulement si chacun est de probabilité nulle.

17 1. Remarquer qu'aucun entier n'a une infinité de diviseurs premiers.

2. On pourra remarquer que
$$(1-\frac{1}{p_i})^{-1} \geq \sum_{k=0}^{N} p_i^{-k},$$
où N est choisi tel que $p_i^{N+1} > p_n$.
3. Utiliser la continuité séquentielle décroissante.
4. Utiliser le résultat de l'exercice précédent.

5. Reprendre la preuve de (c).

18
1. $A_d = d\mathbb{N} \cap \Omega_n$.
2. On déterminera un entier d tel que $\cap_{i=1}^r A_{d_i} = A_d$.
3. On remarquera que deux nombres sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de diviseur premier commun.
4. Deux méthodes sont possibles : utiliser la formule du crible (formule de Poincaré) ou utiliser le résultat de l'exercice 1. Cette dernière méthode est utilisée dans le sujet du capes 2003.

6 Solutions

Solution 7 Si $1 \leq i \leq N$, on a $1 \geq \left(\sum_{k=i}^N u_k\right)^{-\alpha}$, donc

$$\sum_{k=i}^N u_k \geq 1,$$

ce qui montre que la série de terme général (u_n) ne vérifie pas le critère de Cauchy. Maintenant,

$$\sum_{i=i_0}^N (\sum_{k=i}^N u_k)^{-\alpha} = 1 - \sum_{i=1}^{i_0-1} (\sum_{k=i}^N u_k)^{-\alpha},$$

et chacun des termes de la somme tend vers 0 quand N tend vers l'infini, d'où

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=i_0}^N (\sum_{k=i}^N u_k)^{-\alpha}.$$

Soit $\ell < \liminf u_n$. Il existe i_0 tel que $u_k \geq \ell$ pour $k \geq i_0$. On a alors pour $N \geq i_0$

$$\sum_{i=i_0}^N (\sum_{k=i}^N u_k)^{-\alpha} \leq \sum_{i=i_0}^N ((N - i_0 + 1)\ell)^{-\alpha} = \ell^{-\alpha} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha},$$

d'où en passant la limite supérieure

$$1 \leq \ell^{-\alpha} \zeta(\alpha),$$

soit $\ell \leq \zeta(\alpha)^{1/\alpha}$. La limite supérieure se traite de manière analogue.

Solution 10 1. On pose $s_0 = 0$, $n_0 = 0$, puis

$$n_{k+1} = \inf\{p \geq n_k + 1; s_k + u_p < \ell\} \text{ et } s_{k+1} = s_k + u_{n_{k+1}}.$$

Comme (u_n) tend vers 0, on montre par récurrence que pour tout k, $s_k < \ell$ et $n_k < +\infty$. La suite (s_n) est croissante, majorée par ℓ, donc converge vers une limite $r \leq \ell$. Montrons que $r = \ell$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $r < \ell$.

Alors $\lim\limits_{k \to +\infty} (s_k + u_{n_k+1}) = r + 0 = r < \ell$, donc il existe k tel que $k \geq k_0$ entraîne $s_k + u_{n_k+1} < \ell$, ce qui entraîne $n_{k+1} = n_k + 1$. Alors $r = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_{n_k} \geq \sum\limits_{k=k_0}^{+\infty} u_{n_k} = \sum\limits_{p=n_{k_0}}^{+\infty} u_p = +\infty$: contradiction.

Remarquons qu'il n'y a pas unicité. Par exemple, de la série divergente des $1/n$, on peut extraire les sous-séries $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k}$ qui ont toutes les deux comme somme 1.

2. Comme $\phi(n)/n$ prend ses valeurs dans le fermé $[0, 1]$, les valeurs d'adhérence restent dans $[0, 1]$.

   Soit $x \in]0, 1[$. Il existe $\ell > 0$ tel que $x = e^{-\ell}$. Si $(p_i)_{i\geq 1}$ est la suite des nombres premiers, on sait que la série des $-\log(1 - p_i^{-1})$ diverge (voir par exemple l'exercice **??**). Donc d'après la question précédente, il existe une suite (n_k) telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} -\log(1 - p_{n_k}^{-1}) = \ell.$$

   Ainsi, si on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} -\log(1 - p_{n_k}^{-1})$, $s_n \to \ell$, donc

$$e^{-s_n} = \prod_{k=1}^{n} (1 - p_{n_k}^{-1}) \to e^{-\ell} = x.$$

   Mais si on a posé $E_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_{n_k}$, alors

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - p_{n_k}^{-1}) = \frac{\phi(E_n)}{E_n},$$

   donc x est une valeur d'adhérence de $\phi(n)/n$. Ainsi l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\phi(n)/n$ contient $]0, 1[$. Mais l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé, donc il contient l'adhérence de $]0, 1[$, soit $[0, 1]$, ce qui achève la preuve.

Solution 11 1. On pose $x_{n+1} = s_{n+1} - s_n$. Premier cas : $\{s_N\} \le x$. On pose $L = \lfloor s_N \rfloor$ On a donc $s_N \le L + x$. Soit n le plus grand entier tel que $s_n \le L + x$. On a

$$L = \lfloor s_N \rfloor \le s_N \le s_n \le s_{n+1} = s_n + (x_{n+1}) < (L+x) + (1-x) = L+1,$$

donc $\lfloor s_n \rfloor = \lfloor s_{n+1} \rfloor = L$, ce qui fait que les inégalités $s_n - L \le x$ et $s_{n+1} - L > x$ se traduisent respectivement en $\{s_n\} \le x$ et $x < \{s_{n+1}\}$. Par ailleurs

$$s_{n+1} - s_n = (L + \{s_{n+1}\}) - (L + \{s_n\}) = \{s_{n+1}\} - \{s_n\}.$$

Deuxième cas : $\{s_N\} > x$. Posons $L = \lfloor s_N \rfloor$ Bien sûr, $s_N < L + 1$. Prenons pour n le dernier terme avec $s_n < L + 1$. On a

$$L + 1 \le s_{n+1} = s_n + x_{n+1} \le L + 1 + x_{n+1} < L + 1 + x < L + 2,$$

d'où $\lfloor s_{n+1} \rfloor = L + 1$, et l'inégalité $s_{n+1} < L + 1 + x$ devient $\{s_{n+1}\} < x$: on est ramené au cas précédent.

2. Soit $x \in]0, 1[$. Soit $N \ge 1$ fixé et $\epsilon > 0$. On peut trouver $N_0 \ge N$ tel que pour $n \ge N_0$, $s_{n+1} - s_n < \min(x, 1 - x, \epsilon)$. Alors d'après le lemme, il existe $n \ge N_0$, avec $\{s_n\} \le x \le \{s_{n+1}\}$ et $s_{n+1} - s_n = \{s_{n+1}\} - \{s_n\}$. On a donc $0 \le x - \{s_n\} \le \{s_{n+1}\} - \{s_n\} = s_{n+1} - s_n \le \epsilon$. En particulier, on a trouvé $n \ge N$ avec $|x - \{s_n\}| \le \epsilon$. On a donc montré que x est une valeur d'adhérence de $(\{s_n\})$. Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\{s_n\})$ contient $]0, 1[$. Comme c'est un fermé, il contient $[0, 1]$. Bien sûr, il est inclus dans $[0, 1]$, donc c'est $[0, 1]$.
3. On écrit $z = e^{2i\pi\theta}$, avec θ irrationnel. Soit $Z \in \mathbb{U}$, avec $Z \ne 1$. On peut écrire $Z = e^{2i\pi\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$. Soit $N \ge 1$, $\epsilon > 0$. On doit montrer qu'il existe $n \ge N$, avec $|z^n - Z| \le \epsilon$. Quitte à remplacer ϵ par un réel plus petit, on peut supposer que $\epsilon < \min(\alpha, 1 - \alpha)$.

   La suite (z^n) est à valeurs dans $\mathbb{U}$ qui est compact : on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers (n_k) de limite Z^* avec $Z^* \in \mathbb{U}$. On a $\lim \frac{z^{n_{k+1}}}{z^{n_k}} = 1$, donc il existe $k \ge 1$ tel que $|z^{n_{k+1} - n_k} - 1| \le \frac{\epsilon}{2}$. On pose $K_0 = n_{k+1} - n_k$. On écrit $\{\theta K_0\} = L + r$, avec $L \in \mathbb{Z}$ et $|r| \le \frac{1}{2}$. On a

$$|e^{2i\pi r} - 1| = |e^{2i\pi\{\theta K_0\}} - 1| = |e^{2i\pi\theta K_0} - 1| \le \frac{\epsilon}{2} \le \frac{1}{2},$$

   donc $|r| \le \frac{1}{4}$. La concavité du sinus sur $[0, \pi/2]$ nous donne

$$\frac{2}{\pi} 2\pi |r| \le |\sin(2\pi r)| \le |1 - e^{2i\pi r}| \le \frac{\epsilon}{2},$$

soit $|r| \leq \frac{\epsilon}{8}$.
Si $r > 0$, on considère la suite $(s_n)_{n \geq N}$ définie par $s_n = nr$. On a $s_{n+1} - s_n = r \leq \frac{\epsilon}{8} < \epsilon < \min(1-\alpha, \alpha)$, donc d'après le lemme, il existe $n \geq N$, avec $\{s_n\} \leq \alpha \leq \{s_{n+1}\}$ et $s_{n+1} - s_n = \{s_{n+1}\} - \{s_n\}$. On a donc $0 \leq \alpha - \{s_n\} \leq \{s_{n+1}\} - \{s_n\} = s_{n+1} - s_n = r \leq \frac{\epsilon}{8}$. On en déduit

$$|e^{2i\pi rn} - e^{2i\pi\alpha}| = |e^{2i\pi\{rn\}} - e^{2i\pi\alpha}|$$
$$\leq 2\pi|\{rn\} - \alpha| = 2\pi(\alpha - \{rn\}) \leq \frac{2\pi\epsilon}{8} \leq \epsilon.$$

Si $r < 0$, on applique le même raisonnement avec $(-rn)$ à la place de (rn) et $1-\alpha$ à la place de α : on trouve alors $n \geq N$, avec

$$|e^{2i\pi(-r)n} - e^{2i\pi(1-\alpha)}| \leq \epsilon,$$

ce qui en conjuguant, donne encore $|e^{2i\pi rn} - e^{2i\pi\alpha}| \leq \epsilon$. On a traité tous les cas : r ne peut être nul, sinon z serait une racine K_0-ième de l'unité. Finalement, on a trouvé $n \geq N$ avec

$$|z^{nK_0} - Z| = |e^{2i\pi\theta K_0 n} - e^{2i\pi\alpha}| = |e^{2i\pi rn} - e^{2i\pi\alpha}| \leq \epsilon,$$

et on a évidemment $nK_0 \geq N.1 = N$. On a donc montré que Z est une valeur d'adhérence. Par suite, l'ensemble des valeurs d'adhérence contient $\mathbb{U}\backslash\{1\}$, donc $\mathbb{U}$; c'est donc $\mathbb{U}$ puisque la suite prend ses valeurs dans $\mathbb{U}$.

4. On remarque que $z = \exp(2i\pi\theta)$ n'est pas une racine de l'unité. Pour $x \in [-1, 1]$, on peut trouver α réel, avec $x = \cos\alpha$. Si $(z^{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite d'entiers de limite $e^{i\alpha}$, alors en prenant la partie réelle, on obtient $\lim\cos(2\pi\theta n_k) = \cos(\alpha) = x$: x est bien valeur d'adhérence de la suite $(\cos(2\pi\theta n)_{n\geq 1}$. L'ensemble de ces valeurs d'adhérences est donc $[-1, 1]$ tout entier, la $\limsup$ vaut 1 et la $\liminf$ vaut -1. Le sinus se traite de manière semblable.