ENSIMAG 2^{e}année - Décembre 2014

Examen de Théorie financière

Durée 3 heures — Documents de cours autorisés

Exercice n^o 1 : Questions diverses

Vous répondrez aux questions suivantes, **en les argumentant.**

1. Un actif financier verse dans un an un flux aléatoire X, d'espérance $\mathbb{E}(X) = 100$€. Le taux sans risque est de 10% par an. On suppose que les agents sont riscophobes et que X est le seul actif risqué. Le prix d'équilibre de X, aujourd'hui, peut-il être égal à 30€, 70€, 92€ 102€ ?
2. Dans quelles proportions un agent neutre vis-à-vis du risque détient-il un actif risqué A qui rapporte en moyenne 10% par an et un actif risqué B qui rapporte en moyenne 15% par an ? Dans quelles proportions un agent riscophobe détient-il ces mêmes actifs A et B ?
3. Si, pour financer l'achat d'un portefeuille d'actifs risqués, je vends à découvert (pour la même somme) un autre portefeuille d'actifs financiers (risqués ou non), au total, cette stratégie vaut-elle toujours 0€ dans le futur ?
4. Comment peut-on aujourd'hui, reproduire à une date T future, le flux $S(T)$ produit par une action, à partir d'une option d'achat, d'une option de vente et d'un zéro-coupon d'échéance T.

Exercice n^o 2 : Frontière efficiente et droite de marché

On considère un marché qui comprend 3 actifs risqués A, B et C et un actif sans risque. Sur ce marché, les agents sont insatiables, riscophobes et choisissent leur portefeuille dans l'espace "Moyenne - Variance".

On a les propriétés suivantes sur ce marché :

- Le portefeuille d'actifs risqués T choisi par l'ensemble des investisseurs est composé de 20% de A, 50% de B et 30% de C.
- La matrice de covariance du vecteur des rentabilités des actifs risqués est diagonale.
- Si on note R_T la rentabilité du portefeuille T, on a $\mathbb{E}(R_T) = 1\%$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_T) = 0,0256$.
- Le taux sans risque $r_f = 4\%$.

Dans les questions suivantes, R_p est la rentabilité d'un portefeuille P, $\mathbb{E}(R_p)$ l'espérance de sa rentabilité et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_p)$ la variance de sa rentabilité.

1. Quelle est la composition et l'espérance de rentabilité d'un portefeuille P_1 d'actifs risqués, moyenne - variance efficient et tel que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_{p_1}) = 0,04$?
2. Un portefeuille P_2 vérifiant $\mathbb{E}(R_{p_2}) = 3\%$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_{p_2}) = 0,0064$ est-il efficient sur ce marché ? Expliquez.
3. Un portefeuille contenant les actifs A, B et le zéro-coupon mais ne contenant pas l'actif C peut-il être efficient sur ce marché ?
4. Que vaut $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_A)$ sachant que $\mathbb{E}(R_A) = 15\%$?

$\mathbb{E}(R_a) = \mathbb{E}(R_T)$

$\mathbb{E}(R_p) = \mathbb{E}(R_{p_1})$

Exercice n° 3 : Option "as you like it"

Une option *"chooser"* ou *"as you like it"* est un actif dérivé qui donne le droit à son détenteur, de décider à une date T_C, si cette option *"chooser"* se transforme en option d'achat européenne ou bien en option de vente européenne, de prix d'exercice K et de date d'exercice $T > T_C$. L'objectif de cet exercice est d'évaluer le prix de cette option *"chooser"*.

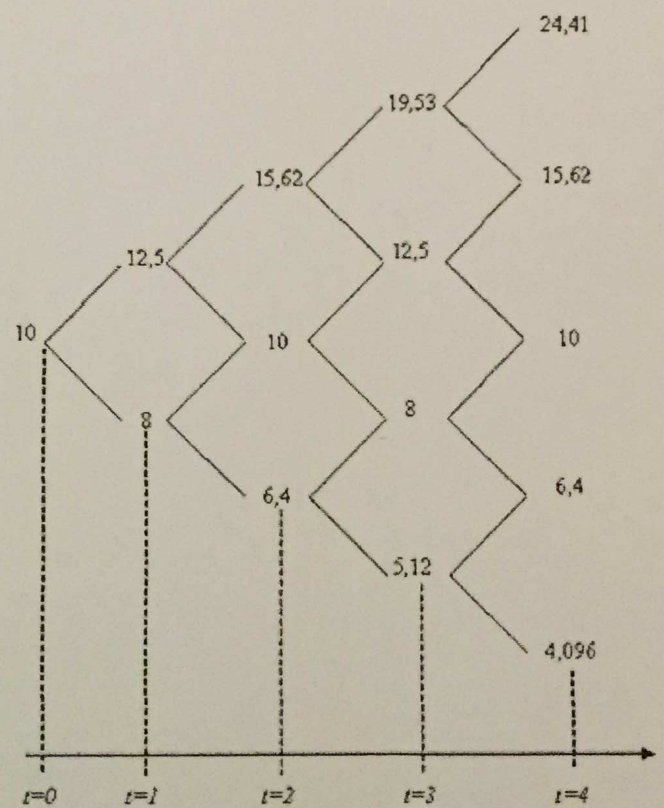
On note $C(S(t), t, T)$ (respectivement $P(S(t), t, T)$, respectivement $A(S(t), t, T_C, T)$) le prix, à la date t de l'option d'achat européenne (respectivement de l'option de vente européenne, respectivement de l'option *"chooser"* pour laquelle la date de choix est T_C) de date d'exercice T, de prix d'exercice K, lorsque le cours du support vaut $S(t)$.

1. On se place dans le cadre du modèle binomial. Si $S(t)$ est le prix du support des options à la date t, on a

$$S(t+1) = \begin{cases} u\,S(t) & \text{avec une probabilité } p \\ d\,S(t) & \text{avec une probabilité } 1-p \end{cases}$$

où $d = \frac{1}{u} < 1 < u \in \mathbb{R}_+^*$ sont donnés et $p \in]0,1[$ est la probabilité historique. On note $r-1$ le taux d'intérêt constant par unité de temps.

La figure FIG. 1 donne l'évolution du cours du support lorsque $S(0) = 10$, $u = 1,25$, $d = \frac{1}{u} = 0,8$. Donnez en chaque noeud de l'arbre, le prix de l'option d'achat et de



l'option de vente d'échéance $T = 4$ et de prix d'exercice $K = 10$. Le taux d'intérêt dans cet économie vaut $r - 1 = 10\%$. Donnez de même, le prix de l'option *"chooser"* de prix d'exercice $K = 10$, d'échéance $T = 4$ et dont la date de choix est $T_C = 2$.

2. Dans le même cadre que la question précédente, donnez le prix du portefeuille composé d'une option d'achat d'échéance $T = 4$ et de prix d'exercice $K = 10$ et d'une option de vente d'échéance $T' = T_C = 2$ et de prix d'exercice $K' = \frac{K}{1{,}1^2} = 8,264$.
3. Expliquez pourquoi, quelque soit le modèle d'évolution du cours du support des options, on a

$$A(S(T_C), T_C, T_C, T) = \max\left(C(S(T_C), T_C, T), P(S(T_C), T_C, T)\right)$$

Partiel TF Dec 2014

Exercice 1

① loterie ⓐ $S_0 \xrightarrow{x} E[X] = 100$ €

loterie ⓑ $S_0 \xrightarrow{1} (1,1) \times S_0$

Les agents étant riscophobes et insatiable ils choisiront la loterie ⓑ dès lors que $(1,1) \times S_0 \geq 100$ €

En particulier, il n'est pas raisonnable d'avoir un prix d'équilibre de X $S_0 = 92$ ou $S_0 = 102$ car alors on a $(1,1) S_0 > 100$ € et l'actif est sur-évalué

Pour les deux autres $S_0 = 30, 70$ c'est possible.

② L'agent neutre vis à vis du risque et insatiable va donc prendre l'actif qui rapporte le plus en moyenne {100% Actif B, 0% Actif A}

L'agent riscophobe va diversifier son portefeuille pour maximiser le gain sous contrainte de risque

Il aura alors un mélange des deux actifs

③ * Portefeuille d'actif risqué vendu à découvert : P_1
* Portefeuille d'actif acheté grace à la vente de P_1 : P_2

A $t=0$, Prix portefeuille $\{ P_1(0) - P_2(0) = 0$ €

A $t>0$, Prix Portefeuille $\{ P_1(t) - P_2(t) = ?$

En effet, les actifs étant risqués on ne peut pas savoir son prix futur qui peut être différent de P_2

④ Portefeuille à $t=0$ $\begin{cases} \text{On achète un call} \\ \text{On vend un put} \\ \text{On achète } K \text{ ZC} \end{cases}$

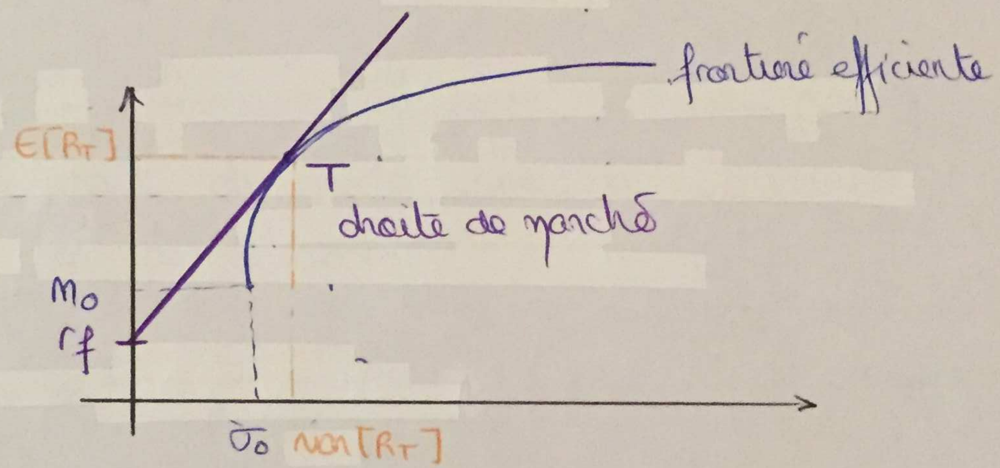
Prix à $t=0$ $\left\{ C_0 - P_0 + K B(0,T) \right.$

A $t=T$, $\left\{ (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ + K \right.$

$$= S_T$$ ok !

Exercice 2

① On a



Dans ce marché, le choix du portefeuille se fait sur la droite du marché.

En particulier $R_{p_1} = \alpha R_T + (1-\alpha) r_f$

et $Var[R_{p_1}] = \alpha^2 Var[R_T]$ nous donne la composition $\alpha = \sqrt{\dfrac{Var[R_{p_1}]}{Var[R_T]}} = 1{,}25$

Son esperance est alors $E[R_{p_1}] = \alpha E[R_T] + (1-\alpha) r_f = 0{,}25\,\%$

2 On cherche donc α tq (s'il existe donné)

$$\text{et}\begin{cases} 3 = \alpha \times 1 + (1-\alpha)\times 4 \\ 0{,}0064 = \alpha^2\, 0{,}0256 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

et $\alpha + (1-\alpha)\times 4 = 2{,}5 \neq 3$

Donc ce portefeuille n'est pas efficient.

3 Non il ne peut pas être efficient car il doit être combinaison linéaire de T et de l'actif risqué et T contient l'actif C. (Sauf dans le cas où on prend le portefeuille sans risque $\alpha = 0$))

4 /

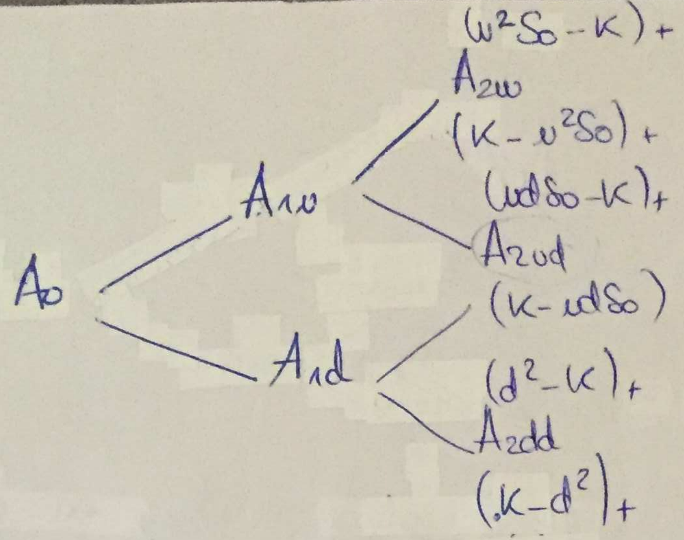
Exo3

1 D'après le cours, on a $q^* = \frac{r-d}{u-d} =$ pour n'importe quel horizon.

$C_{3N3} = \frac{1}{r} E_Q[C_4] =$

$C_{2ud} = \frac{1}{r} E_Q[C_3] =$

etc ... on trouve de même pour les put



par AOA, $A_{2u^2} = \max\left(C_{2u^2} ; P_{2u^2}\right) =$ choix $\Longrightarrow$

$A_{2ud} = \max\left(C_{2ud} ; P_{2ud}\right) =$ choix $\Longrightarrow$

$A_{2dd} = \max\left(C_{2d^2}, P_{2d^2}\right) =$ choix $\Longrightarrow$

D'où après on a les flux du choix utilisé