Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Étape 1 de l'algorithme du simplexe

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Énoncé de l'EXO. 8.5.

- Dans un atelier on peut fabriquer quatre types de cartes électroniques **I**, **II**, **III** et **IV** qui se vendent toutes à prix unique de **40**€ l'unité.
- Les coûts de production sont différents pour chaque carte (respectivement **10**€, **18**€, **18**€ et **32**€ par carte) et varient linéairement en fonction du nombre de cartes fabriquées.
- Les composants sont disponibles en quantité illimitée mais la principale contrainte réside dans le temps.
- Chaque semaine l'atelier dispose de seulement
  1. **2000** heures de temps de production,
  2. **300** heures pour la vérification du fonctionnement et
  3. **160** heures peuvent être consacrées à l'empaquetage.
- Les cartes nécessitent respectivement :
  1. **40**, **40**, **30** et **10** minutes de production par pièce,
  2. **4**, **5**, **3** et **2** minutes pour la vérification du fonctionnement et
  3. **2**, **2**, **1** et **1** minute pour l'empaquetage.

Énoncé de l'EXO. 8.5.

(a) Ecrire et résoudre le programme linéaire qui modélise le problème de la maximisation du profit net, quand on décide de fabriquer seulement les cartes dont la marge bénéficiaire dépasse **25**% du prix unitaire de vente.

(b) Est-ce que la possibilité de l'introduction à la production de la carte abandonnée dans (a) change le plan optimal ? Que se passe-t-il ?

EXO. 8.5.

Solution (a)

1. Tableau de données :

Cartes	I	II	III	IV	disp.
Production	**40**	**40**	**30**	**10**	**120000**
Vérification	**4**	**5**	**3**	**2**	**18000**
Empaquetage	**2**	**2**	**1**	**1**	**9600**
Profit	**30**	**22**	**22**	**8**	

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV : $\frac{8}{40} = 20\%$,
on ne fabriquera donc pas la carte IV.

3. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

$$\begin{aligned}
40x_1 + 40x_2 + 30x_3 &\leq 120000 \\
4x_1 \;\; + 5x_2 \;\; + 3x_3 &\leq 18000 \\
2x_1 \;\; + 2x_2 \;\; + 1x_3 &\leq 9600 \\
x_1, \qquad x_2, \qquad x_3 &\geq 0 \\
30x_1 + 22x_2 + 22x_3 &= z(\max) - 0
\end{aligned}$$

EXO. 8.5.

Solution (a)

1. La forme standard du PL est la suivante :

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
4x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +1y_1 & & & = 12000 \\
4x_1 & +5x_2 & +3x_3 & & +1y_2 & & = 18000 \\
2x_1 & +2x_2 & +1x_3 & & & +1y_3 & = 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \\
30x_1 + 22x_2 + 22x_3 & & & & & & = z(\max) - 0
\end{array}
$$

2. C'est la forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{4, 5, 6\}$.
3. On peut donc le résoudre par l'Étape 2.

EXO. 8.5.

Solution (a)

$$\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
\boxed{4} & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 12000 \\
4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 18000 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9600 \\
\hline
30 & 22 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
1 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 3000 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 6000 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 3600 \\
\hline
0 & -8 & -\frac{1}{2} & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & -90000 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\ell'_1 = \ell_1/4 \\
\ell'_2 = \ell_2 - 4\ell'_1 \\
\ell'_3 = \ell_3 - 2\ell'_1 \\
\ell'_4 = \ell_4 - 30\ell'_1
\end{array}$$

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 5, 6\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (3000, 0, 0, 0, 6000, 3600)$ de valeur 90000.
- La solution optimale du PL initial est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = (3000, 0, 0)$.

EXO. 8.5.

Solution (b)

1. Le nouveau PL est le suivant :

$$\begin{array}{rrrrl} 4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 & \leq 12000 \\ 4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & \leq 18000 \\ 2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & \leq 9600 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \\ 30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & = z(\max) - 0 \end{array}$$

2. dont la forme standard est :

$$\begin{array}{rrrrrrrl} 4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 & + 1y_1 & & & = 12000 \\ 4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & & + 1y_2 & & = 18000 \\ 2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & & & + 1y_3 & = 9600 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \\ 30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & & & & = z(\max) - 0 \end{array}$$

3. C'est la forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{5, 6, 7\}$.
4. On peut donc le résoudre par l'Étape 2.

EXO. 8.5.

Solution (b)

$\boxed{4}$	4	3	1	1	0	0	12000	ℓ_1
4	5	3	2	0	1	0	18000	ℓ_2
2	2	1	1	0	0	1	9600	ℓ_3
30	22	22	8	0	0	0	0	ℓ_4

1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	3000	$\ell'_1 = \ell_1/4$
0	1	0	$\boxed{1}$	-1	1	0	6000	$\ell'_2 = \ell_2 - 4\ell'_1$
0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3600	$\ell'_3 = \ell_3 - 2\ell'_1$
0	-8	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{2}$	0	0	-90000	$\ell'_4 = \ell_4 - 30\ell'_1$

1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1500	$\ell''_1 = \ell'_1 - \frac{1}{4}\ell'_2$
0	1	0	1	-1	1	0	6000	$\ell''_2 = \ell'_2$
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	600	$\ell''_3 = \ell'_3 - \frac{1}{2}\ell'_2$
0	$-\frac{17}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-7	$-\frac{1}{2}$	0	-93000	$\ell''_4 = \ell'_4 - \frac{1}{2}\ell'_2$

EXO. 8.5.

$$\begin{array}{ccccccc|r}
1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 1500 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 6000 \\
0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 600 \\
\hline
0 & -\frac{17}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -7 & -\frac{1}{2} & 0 & -93000
\end{array}$$

Solution (b)

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1,4,7\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (1500, 0, 0, 6000, 0, 0, 600)$.
- La solution optimale du PL initial est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = (1500, 0, 0, 6000)$ de valeur 93000.

Etape 1 de l'algorithme du simplexe

Définition

Un PL avec $b \geq 0$ et le PL auxiliaire :

$$(\text{P}) \quad \begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad (\text{P'}) \quad \begin{array}{rcl} & A \cdot x + I \cdot y = b & \\ & x, \qquad y \geq 0 & \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x & & = z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{array}$$

Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

Remarque

1. Les variables de y forment une base réalisable du (P'), puisque on a la matrice identité et $b \geq 0$,
2. (P') est sous forme standard par rapport à y.
3. On peut le résoudre avec l'Etape 2.

EXO 8.6.

Énoncé

Trouver une solution réalisable de base du système suivant en appliquant l'Etape 1 de l'algorithme du simplexe.

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 4 \\ 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution

1. Le PL auxiliaire est le suivant :

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1y_1 \qquad &= 4 \\ 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 \qquad + 1y_2 &= 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad y_1, \quad y_2 &\geq 0 \\ 2x_1 \qquad - 1x_3 - 2x_4 \qquad &= z(\max) + 6 \end{aligned}$$

2. On peut donc le résoudre avec l'Étape 2.

EXO 8.6.

Solution

1	1	1	1	1	0	4	ℓ_1
$\boxed{1}$	-1	-2	-3	0	1	2	ℓ_2
2	0	-1	-2	0	0	6	ℓ_3

0	2	3	$\boxed{4}$	1	-1	2	$\ell'_1 = \ell_1 - 1\ell'_2$
1	-1	-2	-3	0	1	2	$\ell'_2 = \ell_2$
0	2	3	4	0	-2	2	$\ell'_3 = \ell_3 - 2\ell'_2$

0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\ell''_1 = \ell'_1/4$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\ell''_2 = \ell'_2 - (-3)\ell''_1$
0	0	0	0	-1	-1	0	$\ell''_3 = \ell'_3 - 4\ell''_1$

Puisque $c_s = 0$, on s'arrête avec $z'(\max) = 0$, $\{4, 1\}$ est donc une base réalisable du PL initial.

EXO 8.6.

Remarque

$$\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

La forme standard du PL initial par rapport à $\{4,1\}$ est :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + 1x_4 & = & \frac{1}{2} \\
1x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \qquad & = & \frac{7}{2} \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

EXO 8.7.

Énoncé

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) En étudiant la soustraction de deux lignes conclure que ce système n'a pas de solution réalisable.

(b) Appliquer à ce système l'Etape 1 de l'algorithme du simplexe.

EXO 8.7.

Solution (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lemme de Farkas : Il n'existe pas de solution réalisable de ce système si et seulement si il existe un vecteur $\overline{y}$ tel que $\overline{y}^T A \geq 0$ et $\overline{y}^T b < 0$.

Pour $\overline{y}^T = (1, -1)$: $\quad 0 \leq 1x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -1 < 0.$

EXO 8.7.

Solution (b)

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 + & 3x_2 - & 5x_3 & & = 2 \\ 1x_1 - & 4x_2 - & 8x_3 & & = 3 \\ x_1, & x_2, & x_3 & & \geq 0 \end{array}$$

Le PL auxiliaire est le suivant:

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 + & 3x_2 - & 5x_3 + & 1y_1 & & = 2 \\ 1x_1 - & 4x_2 - & 8x_3 & & + 1y_2 & = 3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & y_1, & y_2 & \geq 0 \\ 3x_1 - & 1x_2 - & 13x_3 & & & = z'(\max) + 5 \end{array}$$

EXO 8.7.

Solution (b)

$\boxed{2}$	3	-5	1	0	2	ℓ_1
1	-4	-8	0	1	3	ℓ_2
3	-1	-13	0	0	5	ℓ_3

1	$\frac{3}{2}$	-$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\ell'_1 = \ell_1/2$
0	-$\frac{11}{2}$	-$\frac{11}{2}$	-$\frac{1}{2}$	1	2	$\ell'_2 = \ell_2 - 1\ell'_1$
0	-$\frac{11}{2}$	-$\frac{11}{2}$	-$\frac{3}{2}$	0	2	$\ell'_3 = \ell_3 - 3\ell'_1$

Puisque c_s =-$\frac{3}{2} < 0$, on s'arrête avec $z'(\max) = -2 \neq 0$,
il n'existe donc pas de solution réalisable du PL initial.

EXO 8.8.(a)

Énoncé

Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre ce programme linéaire.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\geq 2 \\
1x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 4 \\
x_1 \qquad x_2 &\geq 0 \\
3x_1 - 1x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

EXO 8.8.(a)

Solution

1. On ajoute les nouvelles variables $x_3,\ x_4,\ x_5$ qui sont non-négatives et on obtient le programme linéaire suivant (P_2) :

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 1x_2 & \geq & 2 \\
1x_1 + 3x_2 & \leq & 3 \\
x_2 & \leq & 4 \\
x_1 \quad x_2 & \geq & 0 \\
3x_1 - 1x_2 & = & z(\max)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrcl}
2x_1 & 1x_2 & -1x_3 & & & = & 2 \\
1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & = & 3 \\
 & x_2 & & & +1x_5 & = & 4 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \\
3x_1 & -1x_2 & & & & = & z(\max)
\end{array}
$$

2. (P_2) est sous forme standard mais on n'a pas une base réalisable. $(\{3,4,5\}$ est une base mais elle n'est pas réalisable.)
3. On a donc besoin de l'Etape 1.

EXO 8.8.(a)

Solution

1. Pour avoir la matrice identité il faut ajouter une nouvelle variable y_1 qui est non-négative et on veut minimizer $y_1 \iff$ maximiser $-y_1$.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \qquad\qquad\qquad + 1y_1 &=& 2 \\ 1x_1 + 3x_2 \qquad + 1x_4 \qquad\qquad &=& 3 \\ 1x_2 \qquad\qquad + 1x_5 \qquad &=& 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad y_1 &\geq& 0 \\ -1y_1 &=& z'(\max) \end{array}$$

2. Maintenant la base $J' = \{6,\ 4,\ 5\}$ est réalisable mais $c'_{J'} \neq 0$.
3. En ajoutant la première ligne, on obtient (P^*) :

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \qquad\qquad\qquad + 1y_1 &=& 2 \\ 1x_1 + 3x_2 \qquad + 1x_4 \qquad\qquad &=& 3 \\ 1x_2 \qquad\qquad + 1x_5 \qquad &=& 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad y_1 &\geq& 0 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 &=& z'(\max) + 2 \end{array}$$

EXO 8.8.(a)

Solution

1. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2 pour résoudre (P^*).

$$\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
\boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

2. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive,
3. la base $J'' := \{1,\ 4,\ 5\}$ est donc optimale et
4. la valeur de la fonction objectif pour la solution de base associée est 0.
5. J'' est donc une base réalisable de (P_2).

EXO 8.8.(a)

1	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-$\frac{1}{2}$	2
0	1	0	0	1	0	4
0	0	0	0	0	-1	0

Solution

1. En utilisant le dernier tableau et la fonction objectif originale on a un PL (P_2') qui est équivalent à (P_2) et pour qui on a $A''_{J''} = I$.
2. Il faut encore changer la fonction objectif car $c_{J''} \neq 0$ $(c_1 \neq 0)$.
3. Il faut soustraire 3 fois la première ligne de la fonction objectif.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 \quad 1x_2 - 1x_3 & & = 2 \\ 1x_1 + 3x_2 \quad + 1x_4 & & = 3 \\ 1x_2 \quad + 1x_5 & & = 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 & & \geq 0 \\ 3x_1 - 1x_2 & & = z(\max) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & = 1 \\ + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 1x_4 & & = 2 \\ 1x_2 \quad + 1x_5 & & = 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 & & \geq 0 \\ - \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & = z(\max) - 3 \end{array}$$

EXO 8.8.(a)

Solution

1. On a finalement le PL sous forme standard par rapport à J''.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & = 1 \\ + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 & & = 2 \\ 1x_2 & + x_5 & = 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, & x_5 & \geq 0 \\ - \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & = z(\max) - 3 \end{array}$$

2. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2.

1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
0	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	2
0	1	0	0	1	4
0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	-3

1	3	0	1	0	3
0	5	1	2	0	4
0	1	0	0	1	4
0	-10	0	-3	0	-9

3. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive,
4. une solution optimale est donc $(\overline{x}_1, \ \overline{x}_2) = (3, \ 0)$ de valeur 9.

EXO 8.8.(b)

Énoncé

Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre ce programme linéaire :

$$
\begin{array}{rcl}
1x_1 + 1x_2 - 2x_3 & \leq & 4 \\
1x_1 - 1x_2 \phantom{{}+1x_3} & \leq & -3 \\
1x_1 + 1x_2 + 1x_3 & \leq & 5 \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0 \\
3x_1 + 2x_2 + 1x_3 & = & z(\max)
\end{array}
$$

Solution : Forme standard

1. On ajoute les nouvelles variables $x_4,\ x_5,\ x_6$ qui sont non-négatives et on obtient le programme linéaire suivant P_2:

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 & & = 4 \\ -1x_1 + 1x_2 \qquad\qquad - 1x_5 & & = 3 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad\qquad + 1x_6 & & = 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 & & \geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 & & = z(\max) \end{array}$$

2. Pour trouver d'abord une base réalisable on a besoin de l'Etape 1. Pour avoir la matrice identité, il faut ajouter une nouvelle variable $y_1 \geq 0$ et l'ancienne deuxième ligne sera la fonction objectif.

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 & & = 4 \\ -1x_1 + 1x_2 \qquad\qquad - 1x_5 \qquad + y_1 & & = 3 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad\qquad + 1x_6 & & = 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ y_1 & & \geq 0 \\ -1x_1 + 1x_2 \qquad\qquad - 1x_5 & & = z'(\max) + 3 \end{array}$$

EXO 8.8.(b)

Solution : Etape 2 pour Etape 1

1. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2 pour résoudre (P^*).

$$\begin{array}{|ccccccc|c|} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccccccc|c|} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \ell'_1 = \ell_1 - 1\ell'_2 \\ \ell'_2 = \ell_2 \\ \ell'_3 = \ell_3 - 1\ell'_2 \\ \ell'_4 = \ell_4 - 1\ell'_2 \end{array}$$

2. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive donc la base $J = \{4,\ 2,\ 6\}$ est optimale et la valeur de la fonction objectif pour la solution de base associée est 0.
3. $J = \{4,\ 2,\ 6\}$ est donc une base réalisable de (P_2).

EXO 8.8.(b)

Solution : Etape 2

1. En utilisant le dernier tableau et la fonction objectif originale, on a un programme linéaire (P_2') qui est équivalent à (P_2) et pour qui on a $A_J = I$.
2. Il faut encore changer la fonction objectif car $c_J \neq 0$ $(c_2 \neq 0)$.
3. Il faut soustraire deux fois la deuxième ligne de la fonction objectif.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
2x_1 & & -\,2x_3 & +\,1x_4 & +\,1x_5 & & = 1 \\
-1x_1 & +\,1x_2 & & & -\,1x_5 & & = 3 \\
2x_1 & & +\,1x_3 & & +\,1x_5 & +\,1x_6 & = 2 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0 \\
5x_1 & & +\,1x_3 & & +\,2x_5 & & = z(\max) - 6
\end{array}$$

EXO 8.8.(b)

Solution : Etape 2

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
\hline
\boxed{2} & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \ell_1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & \ell_2 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & \ell_3 \\
\hline
5 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -6 & \ell_4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
\hline
1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ell'_1 = \ell_1/2 \\
0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} & \ell'_2 = \ell_2 - (-1)\ell'_1 \\
0 & 0 & \boxed{3} & -1 & 0 & 1 & 1 & \ell'_3 = \ell_3 - 2\ell'_1 \\
\hline
0 & 0 & 6 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{17}{2} & \ell'_4 = \ell_4 - 5\ell'_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \ell''_1 = \ell'_1 - (-1)\ell''_3 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{23}{6} & \ell''_2 = \ell'_2 - (-1)\ell''_3 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ell''_3 = \ell'_3/3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{21}{2} & \ell''_4 = \ell'_4 - 6\ell''_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive, une solution optimale est donc $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{x}_3) = (\frac{5}{6},\ \frac{23}{6},\ \frac{1}{3})$ de valeur $\frac{21}{2}$.