1 Chapitre 1 et 2

Exercice 1 . On lance deux dés non pipés. Calculer la probabilité des événements suivants

a) Obtenir au moins un six.
b) Obtenir au moins un numéro pair.
c) La somme des numéros obtenus est égale à 6.
d) La somme des numéros obtenus est paire.

Exercice 2 . Soit X un nombre positif mesuré à l'issue d'une épreuve aléatoire. On suppose que

$$\forall 0 \leq a \leq b < \infty\,, \quad \mathrm{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b e^{-x} dx\,.$$

a) Calculer $\mathrm{P}(X \geq t)$ pour tout $t \geq 0$.
b) Calculer $\mathrm{P}(\sin X \geq 0)$.
c) Soit U un nombre pris au hasard dans $[0,1]$ tel que

$$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1\,, \quad \mathrm{P}(U \in [a,b]) = b - a\,.$$

Calculer pour tout $0 \leq a \leq b$, $\mathrm{P}(\ln(1/U) \in [a,b])$.

Exercice 3 . Les algorithmes suivants jouent aux dés. Certains trichent. Lesquels ?

a) $X \longleftarrow \mathrm{int}(RANDOM * 6) + 1$
b) $X \longleftarrow \mathrm{round}(RANDOM * 5) + 1$
c) $X \longleftarrow \mathrm{int}(RANDOM * 10);\ X \longleftarrow (X \mathrm{mod} 6) + 1$
d) $X \longleftarrow \mathrm{int}(RANDOM * 12);\ X \longleftarrow (X \mathrm{mod} 6) + 1$
e) $X \longleftarrow \mathrm{int}(6 * \mathrm{sqr}(RANDOM)) + 1$

On considère que $RANDOM$ est un nombre pris au hasard dans $[0,1]$ comme dans l'exercice précédent c).

Exercice 4 . Ecrire un algorithme qui retourne 0 avec probabilité $\frac{1}{6}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$ à partir d'un (ou plusieurs) nombres pris au hasard dans $[0,1]$.

Exercice 5 . Ecrire un algorithme qui choisisse entre n éventualités $e_1, \ldots, e_n$, l'éventualité e_i avec la probabilité p_i (les probabilités $p_1, \ldots, p_n$ sont données et leur somme vaut 1).

Exercice 6 . Il y a une chance sur trois pour que l'équipe d'Allemagne soit en finale du championnat du monde de football, une chance sur deux pour que l'équipe du Brésil le soit et onze chance sur quinze qu'au moins une des deux soit en finale. Quelle est la probabilité pour que la finale oppose le Brésil et l'Allemagne ?

Exercice 7 . Soit A et B deux événements tels que :

$$P(A) = \frac{1}{3} \; ; \; P(B) = \frac{1}{4} \; ; \; P(A \cup B) = \frac{4}{9}.$$

Calculer $P(A|\ B)$, $P(\bar{A}|\ B)$, $P(A \cap \bar{B}|\ B)$.

Exercice 8 . Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ? Conclusion.

Exercice 9 . (Source Télécom : A. Bienvenüe) Jojo fait du ski à la station *Vallées Blanches*. Il est en haut du téléski des Cailloux, et a le choix entre les pistes de *Tout-plat* (une bleue), *Les Bosses* (une rouge) et *Les Rase-Mottes* (une noire). Il choisit une piste au hasard de telle façon qu'il emprunte la bleue et la noire avec la probabilité 1/4 et la rouge qu'il préfère avec la probabilité 1/2. Il descend ensuite la piste choisie. Jojo n'est pas encore très à l'aise cette saison. Il tombe avec une probabilité de 1/10 sur une piste bleue, 1/6 sur une piste rouge et 2/5 sur une piste noire.

a) Calculer la probabilité de l'événement *Jojo tombe sur la piste qu'il a choisie.*
b) Bernard, qui attend Jojo en bas des pistes, à la terrasse d'un café, voit arriver Jojo couvert de neige : il est donc tombé. Sachant cela, qu'elle est la probabilité que Jojo ait emprumpté la piste noire.

Exercice 10 . On simule le lancer de deux dés équilibrés à n faces. On note S la somme des deux dés.

a) Pour tout $1 \leq i \leq n+1$, montrer que

$$P(S = i) = \frac{i-1}{n^2}\,.$$

b) Pour tout $n+2 \leq i \leq 2n$, montrer que

$$P(S = i) = \frac{2n-i+1}{n^2}\,.$$

c) Calculer $P(S \leq n+1)$.

Exercice 11 . On répète le lancer d'un dé (que l'on suppose équilibré) à 10 faces jusqu'à ce que le dé produise un résultat inférieur ou égal à 6. On note alors X le résultat produit. Déterminer la probabilité de l'événement $(X = k)$, $k = 1, \ldots, 6$.

Exercice 12 . On choisit un nombre N au hasard entre 1 et 4 puis un nombre X au hasard entre 1 et N. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = k)$, $k = 1, \ldots, 4$.

Exercice 13 . On répète le lancer d'un dé (que l'on suppose équilibré) à 12 faces jusqu'à ce que le dé produise un résultat pair que l'on divise finalement par deux. Le résultat final est-il uniformément réparti dans $\{1, \ldots, 6\}$?

Exercice 14 . Un jeu nécessite le lancer d'un dé à 33 faces. Comment peut-on jouer à ce jeu avec un dé à six faces ? Même question avec un dé à 19 faces.

Exercice 15 . (Source AB) On lance un dé à cinq faces plein de fois. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire. Calculer p_1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n.

Exercice 16 . Un questionnaire à choix multiples comprend huit questions. Pour chacune d'entre elles quatre réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Un candidat décide de répondre au hasard et indépendamment à chacune des questions. Soit X le nombre de bonnes réponses qu'il donne.

a) Déterminer la loi de X.
b) Pour être reçu, il faut donner au moins cinq bonnes réponses. Quelle est la probabilité pour que ce candidat soit reçu ?
c) Ecrire un algorithme de simulation de la variable X.
d) Un autre candidat connait la réponse à trois des questions posées et répond au hasard aux autres. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ?

Exercice 17 . Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique et revient à son point de départ. On note X le nombre d'essais nécessaires au rat pour sortir du labyrinthe et on envisage successivement trois hypothèses sous lesquelles on déterminera la loi de X.

a) Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des quatre portes.
b) Le rat a une mémoire immédiate. A chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.
c) Le rat a une bonne mémoire. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.

Ecrire un algorithme de simulation de la variable X dans chacune des trois hypothèses.

Exercice 18 . (Source : A. Bienvenüe) Blanche-Neige passe la serpillière quand la méchante reine se présente, grimmée en pauvre vieille, pour lui offrir un panier de cinq pommes bien rouges, dont une empoisonnée et deux véreuses. Blanche-Neige prend les pommes une par une pour les croquer. Si elle tombe sur une pomme véreuse, elle jette le reste du panier au cochon, sinon elle continue. Calculer la probabilité pour que

a) le cochon trépasse,
b) Blanche-Neige mange toutes les pommes.

Exercice 19 . Dérangements. Ecrire un algorithme de simulation d'une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ au hasard (une permutation est une application bijective $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même).

a) Quelle est la probabilité qu'une telle permutation ne modifie pas le numéro 1 ?
b) Quelle est la probabilité qu'une telle permutation ne modifie pas les k premiers numéros ?
c) Démontrer, pour toute famille finie d'événements $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$, la relation suivante

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}).$$

d) Calculer la probabilité que la permutation simulée modifie tous les numéros.

Exercice 20 . Mickey Markov est très fier de son beau parapluie. Surtout que la région est trés pluvieuse et qu'il doit effectuer $n = 20$ trajets entre son domicile et son lieu de travail chaque mois. Il démarre de son domicile. Lorsqu'il fait beau, Mickey n'emporte jamais son parapluie. Lorsqu'il pleut, il le prend dans la mesure ou il est disponible. Lors d'un trajet, il pleut avec la probabilité p. On définit la variable X_n de la manière suivante.

$$\begin{aligned} X_n &= 1 \text{ si l'individu est en possession du parapluie à l'issue du } n^{\text{e}}\text{trajet} \\ X_n &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

a) Ecrire un algorithme de simulation pour la variable X_n.
b) En utilisant un argument de récurrence, calculer $\mathrm{P}(X_n = 0)$.
c) Calculer la probabilité pour que Mickey se mouille lors du $n$ième trajet.
d) C'est novembre et $p = 1/3$. Donner une valeur approchée de la probabilité.

Exercice 21 . Quelle est la probabilité pour que sur n personnes prises au hasard, toutes aient des dates d'anniversaires différentes ? Calculer n pour que cette probabilité soit supérieure à 0.5.

Exercice 22 . Un logiciel comporte $n = 5$ fautes. A chaque exécution, toute faute a la probabilité $p = \frac{1}{3}$ d'être corrigée. Les corrections sont indépendantes les unes des autres. Combien de fois faut-il exécuter ce logiciel pour que la probabilité qu'il ne reste aucune faute soit de 0.90 ?

Exercice 23 . Nous inhalons à chaque inspiration environ 2.2 10^{22} molécules d'air. L'atmosphère est composée au total de 10^{44} molécules d'air. Quelle est la probabilité d'inhaler au moins une des molécules du dernier soupir de Jules César lors d'une inspiration ?

Exercice 24 . Pour deux joueurs A et B, une partie de dés se déroule de la manière suivante. A commence et jette deux dés. Si la somme des points marqués sur les deux dés est six, A est vainqueur et le jeu s'arrête. Sinon, B lance à son tour les deux dés. Si la somme des points marqués est sept, B est vainqueur et le jeu s'arrête. Sinon, une autre partie est jouée. Tous les lancers de dés sont supposés indépendants.

a) Quelle est la probabilité que A gagne à la première partie ? Même question pour B.
b) Quelle est la probabilité pour que la $n$ième partie soit effectivement jouée et que ce soit A qui la gagne ? Même question pour B.
c) Quelle est la probabilité que A (resp. B) termine vainqueur ? A et B vont-ils jouer indéfiniment ?

Exo 1 Soit X_1, (resp X_2) le résultat du premier (resp second) dé.

On suppose que les dés sont différenciés $\Omega = \{(i,j) : (i,j) \in \{1,\dots,6\}^2\}$

Il est clair que $(\forall i \in \{1,\dots,6\})$ $P(X_1 = i) = P(X_2 = i) = \frac{1}{6}$

a) $P(\text{obtenir au moins un } 6) = P(X_1 = 6 \cup X_2 = 6)$

$$= P(X_1 = 6) + P(X_2 = 6) - P(X_1 = 6 \cap X_2 = 6)$$

indépendance $= 1/6 + 1/6 - 1/6 \times 1/6 = 11/36$

Rmq On peut aussi ne pas différencier les dés

Dans ce cas

$$\Omega = \{\{i,j\} : (i,j) \in \{1,\dots,6\}^2\}$$
$$= \{\{i,j\} : 1 \leq i \leq j \leq 6\}$$

redondance des ensembles.

On a $P(\{i,j\}) = 1/18$ et $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{5} \{i,6\} \cup \{6,6\}) = 5/18 + 1/36 =$

$P(\{i,i\}) = 1/36$

b) $P(B) = P(X_1 : \text{pair} \cup X_2 : \text{pair}) = 1/2 + 1/2 - 1/2 \times 1/2 = 3/4$

c) $P(C) = P(X_1 + X_2 = 6) = 5 \times \frac{1}{36}$

En effet $(X_1, X_2) \in \{(1,5)(5,1)(2,4)(4,2)(3,3)\}$

d) $P(D) = P((X_1 \text{ pair} \cap X_2 \text{ pair}) \cup (X_1 \text{ impair} \cap X_2 \text{ impair}))$

$= 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 = 1/2$

Exo 2 a) Dans la définition de b on a $b < +\infty$

Ainsi on ne connaît pas $P(X \in [a,b[)$ a priori

Mais $P(X \in [a,b]) = P(X \in [a,b[\cup \{b\}) = P(X \in [a,b[) + \cancel{P(X=b)}^{0}$

On peut donc élargir le signe à $+\infty$ et par intégrabilité de $x \mapsto e^{-x}$ on a $P(X \geq t) = \int_t^{\infty} e^{-x} dx = e^{-t}$

b) On a $\sin X \geq 0 \iff X \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

par disjonction mutuelle des segments

$$P(\sin X \geq 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X \in [2k\pi, (2k+1)\pi])$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2k\pi} - e^{-(2k+1)\pi}\right)$$
$$= \left(1 - e^{-\pi}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\pi}\right)^k$$
$$= \frac{1 - e^{-\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

c) On a $\ln(1/U) \in [a,b] \iff \ln(U) \in [-b,-a]$
$\iff U \in [e^{-b}, e^{-a}] \subset]0,1]$

D'où $P(\ln(1/U) \in [a,b]) = e^{-a} - e^{-b} = P(X \in [a,b])$

Exo 3 Pour savoir s'il triche ou pas il faut voir si $P(X=k)_{,k\in\{1,\dots,6\}} = 1/6$

a) OK car $P(X=k) = P(\text{Random} \in [\frac{k-1}{6}, \frac{k}{6}]) = 1/6$

b) NOT OK car $P(X=k) = P(\text{Random} \in [\frac{(k-1)+1/2}{5}, \frac{k+1/2}{5}]) = 1/5$

c) $(X \bmod 6 + 1) = k \iff X = k-1$ ou $k+5 \iff \text{Random} \in [\frac{k-1}{10}, \frac{k}{10}] \cup [\frac{k+5}{10}, \frac{k+6}{10}]$

D'où $P(X=k) = 1/5$ NOT OK

d) OK $P(X=k) = P(\text{Random} \in [\frac{k-1}{12}, \frac{k}{12}] \cup [\frac{k+5}{12}, \frac{k+6}{12}]) = 1/12 + 1/12 = 1/6$

e) NOT OK $P(X=k) = P(\text{Random} \in [\frac{\sqrt{k-1}}{6}, \frac{\sqrt{k}}{6}]) \neq 1/6$

Exo 4

$1/6$	$1/3$	$1/2$
A=0	A=1	A=2

$P(A=0) = 1/6$ etc...

De $P(\text{Random} \in [a,b]) = b-a$ on tire

```
X ← Random
if X ≤ 1/6 then A ← 0
elsif X ∈ [1/6, 1/2] then A ← 1
elsif X ∈ [1/2, 1] then A ← 2
return A
```

Exo 5 Idem

Exo 7

- $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)} = 5/9$

- $P(\bar{A}|B) = \overline{P(A|B)} = 1 - P(A|B) = 4/9$

- $P(A\cap\bar{B}\,|\,B) = 0$

Exo 11

A « Résultat $\leqslant 6$ pour un dé à 10 faces »
N « Resultat d'un dé à 10 faces »
X « Résultat d'un dé à 10 faces sachant que c'est inférieur à 6 »

Pour $k = 1, \ldots 6$ on a

$$P(X=k) = P_A(N=k) = P(N=k\,|\,A) = \frac{P(N=k \cap N\leqslant 6)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(N=k)}{P(N\leqslant 6)}$$

D'où $P(X=k) = \dfrac{1/10}{6/10} = \dfrac{1}{6}$

Exo 12 On va user de la loi de proba totale

Soit N : " Résultat de RandomInt (1..4) "
Soit X : " Résultat de RandomInt (1..N) "

On pose $(\forall i \in \{1,..,4\})$ $B_i = (N = i)$

$(B_i)_{i=1,..,4}$ sont disjoints et forment une partition de Ω

Pour $k \in \{1,..,4\}$ on a selon la LPT :

$$P(X=k) = \sum_{i=1}^{4} P(X=k \mid B_i) P(B_i)$$

Or $(\forall i \in \{1,..,4\})$ $P(B_i) = 1/4$

et $P(X=k \mid N=i) = \begin{cases} 1/i & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$

D'où $P(X=k) = \frac{1}{4} \sum_{i=k}^{4} \frac{1}{i}$

Retrouver les lois classiques

Loi géométrique $X \in \mathcal{G}(p)$

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$ ← Au k-ième lancé, l'év^t s'est réalisé une fois (p) mais pas $(k-1)$ fois $(1-p)^{k-1}$

Loi binomiale $X \in \mathcal{B}(n,p)$

$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ← Dans n'importe quelle ordre (C_n^k) l'év^t s'est réalisé k fois (p^k) et pas réalisé n-k fois $(1-p)^{n-k}$

Exo 14 ① simuler un dé 36 $\{1, \dots, 36\}$
ie $1 + \{0, \dots, 35\}$

En base 6 : $(\forall x \in \{0, \dots, 35\}) \left(\exists! (a,b) \in \{0, \dots, 5\}^2\right) / x = a + 6b$

Algorithme
$A \leftarrow dé(6) - 1$ = 5 Random
$B \leftarrow dé(6) - 1$ = 5 Random
$X \leftarrow A + 6B + 1$

A partir de deux dés 6 on trouve un dé 36
En effet $(\forall k \in \{1, \dots, 36\}) \left(\exists! (\alpha, \beta) \in \{0, \dots, 5\}^2\right) / k = \alpha + 6\beta + 1$

D'où $P(X = k) = P(A = \alpha \cap B = \beta) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ cqfd

Maintenant on sait passé à un dé inférieur :

Algo dé(33)
loop
$A \leftarrow dé(6) - 1$
$B \leftarrow dé(6) - 1$
$X \leftarrow A + 6B$
exit when $X <= 32$
end loop
$R \leftarrow X + 1$

processus de rejet

On a alors $(\forall k \in \{1, \dots, 33\})$

$$P(R = k) = P_{X \leqslant 32}(X = k-1) = P(X = k-1 \mid X \leqslant 32) = \frac{P(X = k-1 \cap X \leqslant 32)}{P(X \leqslant 32)}$$

$$= \frac{P(X = k-1)}{P(X \leqslant 32)} \quad (k - 1 \leqslant 32)$$

$$= \frac{1/36}{33/36} = \frac{1}{33}$$ cqfd

1: N : nombre de lancé de dé et T : Nombre de boucle

Alors $N = 2 \times T$

et $T \in \mathcal{G}\left(\frac{33}{36}\right)$ Ainsi $E(T) = \frac{36}{33}$

Ainsi pour avoir un dé à 33 faces à partir de deux dés à 6 faces il faut en moyenne $2 \times \frac{36}{33}$ lancés de dé

② Pour le dé à 19 faces $\Rightarrow$ exit when $X \leq 18$

Ainsi $T \in \mathcal{G}\left(\frac{19}{36}\right)$ et $N = 2 \times \frac{36}{19} \simeq 4$ lancés

---

Exo 16 ⓐ Il est évident que $X \in \mathcal{B}(8, 1/4)$

ⓑ $P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)$

$\simeq 2{,}5\ \%$

En moyenne le candidat aura $8 \times \frac{1}{4} = 2$ bonnes réponses

ⓒ Algo

```
X <- 0
for I in 1..8 loop
    if Random < 1/4 then
        X <- X+1 ;
    end if;
end loop;
R <- X ;
```

ⓓ Dans ce cas on a $X \in \mathcal{B}(5, 1/4)$

et il est reçu pour $P(X \geq 2) = 1 - p(X<2)$

$= 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - (1-p)^5 - 5(p)(1-p)^4$

$\simeq 37\ \%$

Exo 17 (a) Rat sans mémoire : Epreuves indépendantes

$X = \#\text{essai} \in \mathcal{G}(1/4) \Rightarrow E(X) = 4$

D'où il lui faut en moyenne 4 essais pour sortir

et $(\forall k \in \{1,\dots,n\})\ P(X=k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

Algo : loi géométrique

(b) Rat à mémoire immédiate (Epreuve précédente mémorisée)

On a $P(X=1) = 1/4$; $P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

D'où loi de X $\begin{cases} P(X=1) = 1/4 \\ (\forall k > 1)\ P(X=k) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \end{cases}$

La loi étant discrète, on a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{2} + \sum_{k \geq 0} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \frac{d}{dx}\left(\sum_{k \geq 0} x^k\right)_{|x = 2/3}\right)$$

$$= \frac{13}{4} \simeq 3$$

Algo

```
X = 1
if Rand > 1/4 then
   loop
   |  X <- X+1;
   exit when Rand < 1/3
   end loop
end if
return X
```

c) Le Rat patient test

$P(X=1) = 1/4$, $P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = 1/4$, $P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$
$= 1/4$

et $P(X=4) = \dots = 1/4$

D'où $P(X=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 4 \\ 1/4 & \text{si } k \in \{1, \dots, 4\} \end{cases}$

$E(X) = \sum_{k=1}^{4} k \frac{1}{4} = 2,5$

Algo

```
x = 1
if Random > 1/4 then x = 2 ;
    if Random > 1/3 then x = 3
    else x = 4
    end if
end if
return x
```