Corrigé examen d'Analyse pour l'ingénieur - Session 2

Lundi 26 janvier 2015 - 2h

Exercice 1 *Soit $F = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $E = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), \varphi(0)=\varphi(1)=0\right\}$ munis des normes :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, f \in F, \text{ et } \|\varphi\|_E = |\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_\infty, \varphi \in E$$

1. *Montrer que pour tout $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi'\|_\infty$, puis que $\|\varphi'\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_E$.*
   Vérifier que $\varphi \mapsto \|\varphi\|_E$ est bien une norme sur E.

2. *Montrer que l'application $\mathcal{G} : E \to F$, définie par $\mathcal{G}(\varphi) = \varphi'' - \varphi^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en $\varphi \in E$, appliquée à $h \in E$.*

3. *L'application $\mathcal{G}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?*

1. Soit $\varphi \in E$, alors par définition φ' est continue sur le compact $[0,1]$ donc d'après le théorème de Heine $\forall x \in [0,1], |\varphi'(x)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty$. Fixons $x \in [0,1]$, φ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ avec

$$\forall y \in]0,x[, |\varphi'(y)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty$$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x \in [0,1], \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right| \leqslant \|\varphi'\|_\infty$$

Puisque $\varphi(0)=0$ et $|x| \leqslant 1$ il vient

$$\forall x \in [0,1], |\varphi(x)| \leqslant |x|\|\varphi'\|_\infty \leqslant \|\varphi'\|_\infty$$

En passant au sup à gauche on a finalement

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi'\|_\infty$$

Puisque φ'' est continue sur $[0,1]$, on a de la même façon

$$\forall x \in [0,1], \left|\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x-0}\right| \leqslant \|\varphi''\|_\infty$$

Mais cette fois on a plus nécessairement $\varphi'(0)=0$, ainsi :

$$\forall x \in [0,1], ||\varphi'(x)| - |\varphi'(0)|| \leqslant |\varphi'(x)-\varphi'(0)| \leqslant |x|\|\varphi''\|_\infty \leqslant \|\varphi''\|_\infty$$

D'où

$$\forall x \in [0,1], |\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_\infty = \|\varphi\|_E$$

et par passage au sup à gauche :

$$\|\varphi'\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_E$$

Vérifions que $\varphi \mapsto \|\varphi\|_E$ définit bien une norme sur E :

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes, quant à la séparabilité on a pour $\varphi \in E$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_E = 0 &\Leftrightarrow \varphi'(0)=0 \text{ et } \|\varphi''\|_\infty = 0\\
&\Leftrightarrow \varphi'(0)=0 \text{ et } \varphi''=0\\
&\Leftrightarrow \varphi'(0)=0 \text{ et } \varphi' = cste\\
&\Leftrightarrow \varphi'=0 \text{ et } \varphi(0)=0 \text{ car } \varphi \in E\\
&\Leftrightarrow \varphi = cste \text{ et } \varphi(0)=0\\
&\Leftrightarrow \varphi = 0
\end{aligned}$$

Ou bien mieux remarquer grâce aux inégalités démontrées que

$$0 \leqslant \|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_E = 0 \Rightarrow \|\varphi\|_\infty = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

2. Considérons la fonctionnelle

$$\mathcal{G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \varphi & \longrightarrow & \varphi'' - \varphi^2 \end{array}$$

Soit $\varphi \in E$ fixée, et $h \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\varphi + h) &= (\varphi + h)'' - (\varphi + h)^2 \\ &= \varphi'' + h'' - \varphi^2 - 2\varphi h - h^2 \\ &= \mathcal{G}(\varphi) + \underbrace{h'' - 2\varphi h}_{d\mathcal{G}_\varphi(h)} - h^2 \end{aligned}$$

Etudions l'application

$$d\mathcal{G}_\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ h & \longrightarrow & h'' - 2\varphi h \end{array}$$

On a clairement

$$\forall (h_1, h_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, d\mathcal{G}_\varphi(h_1 + \lambda h_2) = h_1'' - 2\varphi h_1 + \lambda(h_2'' - 2\varphi h_2) = d\mathcal{G}_\varphi(h_1) + \lambda d\mathcal{G}_\varphi(h_2)$$

donc $d\mathcal{G}_\varphi \in L(E, F)$.

Montrons enfin que $d\mathcal{G}_\varphi$ est continue. En effet

$$\forall h \in E, \|d\mathcal{G}_\varphi(h)\|_\infty \leqslant \|h''\|_\infty + 2\|\varphi\|_\infty \|h\|_\infty$$

et puisque $\|h''\|_\infty \leqslant \|h\|_E$ et qu'on a démontré que $\|h\|_\infty \leqslant \|h\|_E$ il vient

$$\forall h \in E, \|d\mathcal{G}_\varphi(h)\|_\infty \leqslant (1 + 2\|\varphi\|_\infty)\|h\|_E$$

ce qui prouve la continuité $d\mathcal{G}_\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a donc montré que $\mathcal{G}$ est différentiable sur E de différentielle

$$d\mathcal{G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ \varphi & \longrightarrow & d\mathcal{G}_\varphi \end{array}$$

3. Montrons à présent que $\mathcal{G}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour cela il faut vérifier que la différentielle $d\mathcal{G}$ est continue de E dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme triple

$$\forall \psi \in \mathcal{L}(E, F), |||\psi||| = \sup_{v \in E} \frac{\|\psi(v)\|_F}{\|v\|_E}$$

Soit $\varphi_0 \in E$ fixé. Montrons la continuité en φ_0 :

$$\forall v \in E, \|d\mathcal{G}_\varphi(v) - d\mathcal{G}_{\varphi_0}(v)\|_\infty = \|2v(\varphi_0 - \varphi)\|_\infty \leqslant 2\|v\|_\infty \|\varphi - \varphi_0\|_\infty \leqslant 2\|v\|_E \|\varphi - \varphi_0\|_E$$

autrement dit

$$\forall v \in E, \frac{\|d\mathcal{G}_\varphi(v) - d\mathcal{G}_{\varphi_0}(v)\|_\infty}{\|v\|_E} \leqslant 2\|\varphi - \varphi_0\|_E$$

d'où en passant au sup à gauche :

$$|||d\mathcal{G}_\varphi - d\mathcal{G}_{\varphi_0}||| \leqslant 2\|\varphi - \varphi_0\|_E$$

ce qui prouve la continuité de $d\mathcal{G}$ car $2-$lipschitzienne.

Exercice 2 *On considère une fonction* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *de la forme*

$$g(x,y) = \int_0^1 h(tx + (1-t)y)a(t)dt$$

où $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ *et* $a \in L^1(0,1)$.

1. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Montrer que la fonction* $t \mapsto h(tx + (1-t)y)$ *est bornée sur* $[0,1]$.

2. *Montrer que* g *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
Indication : étant donné deux suites convergentes $(x_n)_{n\geqslant 0}, (y_n)_{n\geqslant 0}$ *vers* x *et* y, *on pourra étudier* $lim_{n\to+\infty} g(x_n, y_n)$ *par convergence dominée.*

3. *On suppose maintenant* $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. *Montrer que* g *est dérivable suivant* x *et* y, *et exprimer ses dérivées partielles à l'aide d'intégrales.*

4. *On pose* $h = f'$ *avec* $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, *et* $a = 1$. *Montrer que*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Quelle est la régularité de g *?*

1. La fonction $f : t \mapsto h(tx + (1-t)y)$ est continue par composée de fonctions continues, sur le compact $[0,1]$, donc d'après le théorème de Heine elle est bornée et atteint ses bornes.

2. Soit deux suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. On définit la suite de fonctions suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], f_n(t) = h(tx_n + (1-t)y_n)a(t)$$

Par continuité de $f : t \mapsto h(tx + (1-t)y)$ quelque soit x et y on a ponctuellement

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(tx + (1-t)y)a(t) = f(t)$$

Plus précisément à partir d'un certain rang N, $\forall n \geqslant N, x_n \in [x - \epsilon, x + \epsilon], y_n \in [y - \epsilon, y + \epsilon]$ qui sont des compacts de $\mathbb{R}$.

Ainsi d'après 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], |f_n(t)| \leqslant \|h\|_{\infty,[x-\epsilon,y+\epsilon]} a(t)$$

et la fonction $t \mapsto \|h\|_{\infty,[x-\epsilon,y+\epsilon]} a(t)$ est dans $L^1(0,1)$.

Par conséquent le théorème de convergence dominée s'applique

$$g(x_n, y_n) = \int_0^1 f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt = g(x,y)$$

ce qui correspond à la caractérisation séquentielle de la continuité, donc g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $y \in \mathbb{R}^2$ et

$$x \mapsto g(x,y) = \int_0^1 \underbrace{h(tx + (1-t)y)a(t)}_{f(x,t)} dt$$

(a) $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(b) L'application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ pour $t \in [0,1]$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |th'(tx + (1-t)y)a(t)| \leqslant \|h'\|_\infty |a(t)|$$

car h' est continue sur un compact donc bornée, et $a \in L^1(0,1)$.

Par conséquent on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 th'(tx+(1-t)y)a(t)dt$$

De même on montre que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 (1-t)h'(tx+(1-t)y)a(t)dt$$

4. Pour le cas particulier $h = f'$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $a = 1$ on a

$$x \neq y \Rightarrow g(x,y) = \int_0^1 f'(tx+(1-t)y)dt = \left[\frac{1}{x-y} f(tx+(1-t)y)\right]_0^1 = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

$$x = y \Rightarrow g(x,x) = \int_0^1 f'(x)dt = f'(x)$$

$h = f'$ est $\mathcal{C}^1$ donc $\mathcal{C}^0$, et $a = 1$ est dans $L^1(0,1)$, alors d'après 2. la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Autre méthode : Soit $x_n \to x$ et $y_n \to y$ avec $x \neq y$, alors par continuité de f :

$$g(x_n,y_n) = \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = g(x,y)$$

Soit maintenant $x_n \to x$ et $y_n \to x$, alors par le théorème des accroissements finis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n \in]x_n, y_n[, f'(c_n) = \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = g(x_n,y_n)$$

Ainsi en faisant tendre $n \to +\infty$ on a $c_n \to x$ et par continuité de f'

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} f'(c_n) = f'(x) = g(x,x)$$

Exercice 3 1. *Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ est :*

$$\hat{h}(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}, \quad \nu \in \mathbb{R}$$

En déduire la transformée de Fourier de la fonction h_a définie par :

$$h_a(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$$

2. *Pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction :*

$$f_a(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi tx}}{1+4\pi^2x^2} e^{-a|x|}dx$$

En utilisant la question précédente et le théorème de Fubini (justifié !), montrer que

$$f_a(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2+4\pi^2(y+t)^2} e^{-|y|}dy$$

3. *Calculer la limite de $f_a(t)$ quand $a \to 0$ dans chacune des expressions précédentes.*

4. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction :*

$$g(x) = \frac{1}{1+4\pi^2x^2}$$

1. Calculons la transformée de Fourier de $h_a(x) = e^{-a|x|}$:

$$\begin{aligned}
\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{h}_a(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu x} e^{-a|x|} dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} e^{-ax} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-2i\pi\nu x} e^{ax} dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} e^{-ax} dx + \int_0^{+\infty} e^{2i\pi\nu x} e^{-ax} dx \\
&= \int_0^{+\infty} (e^{-2i\pi\nu x} + e^{2i\pi\nu x}) e^{-ax} dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi\nu x) e^{-ax} dx \\
&= 2\Re\left\{\int_0^{+\infty} e^{i2\pi\nu x} e^{-ax} dx\right\} \\
&= 2\Re\left\{\int_0^{+\infty} e^{x(-a+i2\pi\nu)} dx\right\} \\
&= 2\Re\left\{\left[\frac{1}{-a+i2\pi\nu} e^{x(-a+i2\pi\nu)}\right]_{x=0}^{x=+\infty}\right\} \\
&\overset{(*)}{=} 2\Re\left\{\frac{1}{a-i2\pi\nu}\right\} \\
&= 2\Re\left\{\frac{a+i2\pi\nu}{a^2+4\pi^2\nu^2}\right\} \\
&= \frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}
\end{aligned}$$

$(*)$ en effet $\left|e^{x(-a+i2\pi\nu)}\right| = e^{-ax} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

On pouvait aussi calculer la transformée de Fourier de h_1 et déduire celle de h_a par dilatation

$$\hat{h}_a(\nu) = \frac{1}{a}\hat{h}_1\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

2. Partons de la seconde expression pour retrouver la première :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, f_a(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2+4\pi^2(y+t)^2} e^{-|y|} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[e^{-ax}](y+t) e^{-|y|} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(y+t)x} e^{-a|x|} dx\right) e^{-|y|} dy
\end{aligned}$$

Le module de l'intégrande $(x,y) \mapsto e^{-a|x|}e^{-|y|}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ car les fonctions

$$x \mapsto e^{-a|x|}e^{-|y|} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$y \mapsto e^{-a|x|}e^{-|y|} \in L^1(\mathbb{R})$$

donc le théorème de Fubini s'applique et on peut échanger l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, f_a(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi tx} e^{-a|x|}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}e^{-i2\pi xy}dy\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi tx}e^{-a|x|}\mathcal{F}[e^{-|y|}](x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i2\pi tx}}{1+4\pi^2x^2}e^{-a|x|}dx\end{aligned}$$

3. Désignons par $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par $\forall t \in \mathbb{R}, g_n(t) = f_{\frac{1}{n}}(t)$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, g_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i2\pi tx}}{1+4\pi^2x^2}e^{-\frac{|x|}{n}}dx$$

La suite de fonctions $\psi_n(x) = \dfrac{e^{-i2\pi tx}}{1+4\pi^2x^2}e^{-\frac{|x|}{n}}$ converge ponctuellement vers la fonction

$$\psi(x) = \frac{e^{-i2\pi tx}}{1+4\pi^2x^2}$$

et de plus on a la majoration :

$$|\psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Le théorème de convergence dominée donne ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i2\pi tx}}{1+4\pi^2x^2}dx = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4\pi^2x^2}\right](t)$$

La deuxième est plus sournoise, car on serait tenté de faire tendre $a \to 0$ dans l'intégrande

$$\frac{a}{a^2+4\pi^2(y+t)^2}e^{-|y|}$$

ce qui donnerait comme fonction limite la fonction nulle. Or ce n'est pas possible car cela signifierait que la transformée de Fourier ci-dessus est nulle ! Le problème est qu'avec cette expression on ne peut pas majorer l'intégrande par une fonction ne dépendant pas de a puisque ce quotient tend précisément vers 0. Il faut donc au préalable modifier l'expression de l'intégrale en effectuant les changements de variables $x = y + t$ puis $u = nx$:

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, g_n(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2(y+t)^2}e^{-|y|}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1+4\pi^2n^2(y+t)^2}e^{-|y|}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1+4\pi^2n^2x^2}e^{-|x-t|}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+4\pi^2u^2}e^{-\left|\frac{u}{n}-t\right|}du\end{aligned}$$

La suite de fonctions $\varphi_n(u) = \dfrac{1}{1+4\pi^2u^2}e^{-\left|\frac{u}{n}-t\right|}$ converge ponctuellement vers la fonction

$$\varphi(u) = e^{-|t|}\frac{1}{1+4\pi^2u^2}$$

et de plus on a la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, |\varphi_n(u)| \leqslant \frac{1}{1+4\pi^2u^2} = O\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

Le théorème de convergence dominée donne ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = e^{-|t|}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+4\pi^2u^2}du = e^{-|t|}\frac{1}{2\pi}\left[\arctan(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}e^{-|t|}$$

Nous visualisons sur la figure 1 la convergence des g_n vers la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-|t|}$.

4. Par unicité de la limite on en conclut que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4\pi^2x^2}\right](t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$$

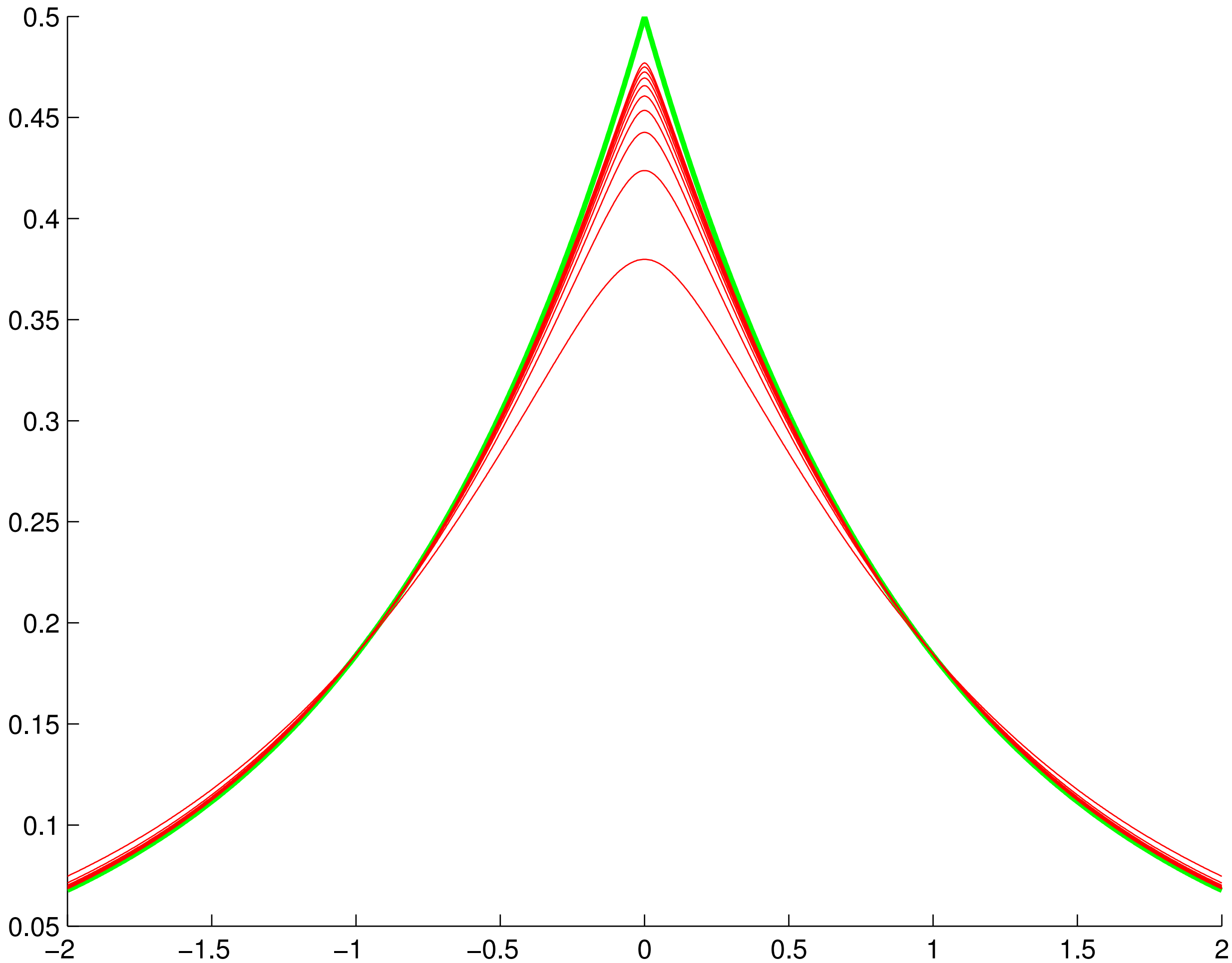

FIGURE 1 – Tracé des fonctions g_n pour $n = 1..10$ (en rouge) qui convergent vers $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-|t|}$ (en vert)

Exercice 4 *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de* $\mathcal{L}^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ouvert) telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_\Omega |f_n|d\mu < +\infty$$

alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ *converge presque partout sur* Ω *et*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n d\mu$$

Notons $S_N(x) = \sum_{-N}^{N} |f_n(x)|$. La suite de fonctions (S_N) est naturellement croissante.

Pour x fixé, la suite $(S_N(x))$ soit converge soit diverge vers $+\infty$ (dans tous les cas sa limite $\ell(x) \in \bar{\mathbb{R}}$).

Donc la suite de fonctions (S_N) converge vers une fonction $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.

Les deux hypothèses du théorème de convergence monotone sont ainsi vérifiées, donc :

$$\int_\Omega \lim_{N\to+\infty} F_N d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int_\Omega F_N d\mu \Longleftrightarrow \int_\Omega \sum_n |f_n| d\mu = \sum_n \int_\Omega |f_n| d\mu < +\infty$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto \sum_n |f_n(x)|$ est intégrable donc d'après l'exercice 2 qu'elle est finie p.p, autrement dit que $\sum_n |f_n|$ converge p.p sur Ω. La série de fonctions est absolument convergente donc convergente (car $\mathbb{R}$ est complet).

$$\sum_n f_n \text{ converge p.p sur } \Omega$$

Notons maintenant $P_N = \sum_{-N}^{N} f_n$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, |P_N(x)| \leqslant \sum_{-N}^{N} |f_n(x)| \leqslant \sum_n |f_n(x)|$$

Et on a vu que la fonction $x \mapsto \sum_n |f_n(x)| \in L^1(\Omega)$.

On a donc (P_N) qui converge simplement vers $\sum_n f_n$ finie p.p, et les P_N dominées par une fonction de $L^1(\Omega)$ donc le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega P_N d\mu = \int_\Omega \sum_n f_n d\mu \Leftrightarrow \sum_n \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \sum_n f_n d\mu$$