TD n°10

Questions de cours

- Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle.
- Rappeler la formule de conditionnement pour des variables aléatoires de loi continue.

Exercice 1

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Soit a un nombre tel que $0 < a < 1$. On définit la variable aléatoire $N(a)$ de sorte que

$$N(a) = \min\{n \geq 1 \mid X_1 + \cdots + X_n > a\}$$

Question 1

Soit $x \in (0, 1)$.

- En discutant selon les valeurs $x > a$ ou $x \leq a$, donner une expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x]$ ne laissant plus apparaître le conditionnement.

Question 2

- Déduire de la question précédente que, pour tout $a \in (0, 1)$, nous avons

$$\mathbb{E}[N(a)] = 1 + \int_{a0} \mathbb{E}[N(x)]dx$$

Question 3

- Résoudre l'équation précédente pour trouver l'expression de $\mathbb{E}[N(a)]$.

Exercice 2

On considère une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$, et on pose $U_0 = x,\ x \in (0, 1)$. On dit qu'il y a record au temps m si la variable U_m est plus grande que toutes les variables précédentes. On note N_n le nombre de records au temps $n \geq 1$. On pose ensuite

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(x) = \mathbb{E}[N_n]$$

Question 1

- Calculer $f_1(x)$.
- Donner une formule reliant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[N_{n+1}|U_1 = u]$ à la fonction $f_n(x)$.

Question 2

- Montrer que

$$1 - f_{n+1}(x) = x(1 - f_n(x)) - \int_{1x} f_n(u)du$$

Question 3

On suppose que $f_n(x)$ est dérivable et on appelle $g_n(x)$ sa dérivée.

- Trouver l'équation satisfaite par $g_n(x)$ puis la résoudre.
- En déduire que

$$f_n(x) = h_n - \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right)$$

où $h_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$