Chapitre 10 :

LOIS CONTINUES CLASSIQUES

1 Loi uniforme **2**
1.1 Description et transformations affines . . . 2
1.2 Moments . . . 2

2 Loi exponentielle **3**
2.1 Desription et transformations linéaires . . . 3
2.2 Moments . . . 3
2.3 Caractérisation par l'absence de mémoire . . . 3

3 Loi gamma **4**
3.1 Description . . . 4
3.2 Moments . . . 4
3.3 Stabilité . . . 4

4 Loi normale ou gaussienne **5**
4.1 Description et transformations affines . . . 5
4.2 Étude de la loi normale centrée réduite . . . 5
4.3 Moments . . . 6
4.4 Stabilité . . . 6

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité.

1. Loi uniforme

Dans tout ce paragraphe, $a < b$ désignent deux réels.

1.1 Description et transformations affines

Définition 1.1 *On dit qu'une variable aléatoire réelle* X *suit une loi uniforme sur l'intervalle* $[a, b]$, *et l'on note* $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, *si* X *admet pour densité la fonction*

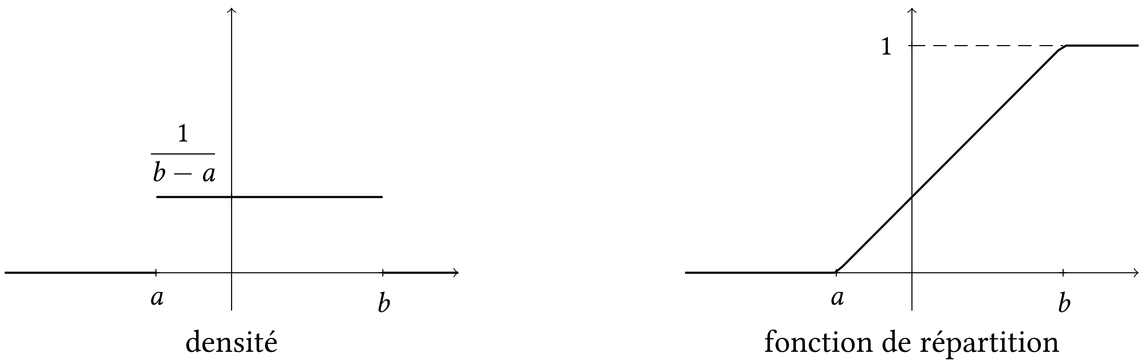
$$f_{\mathrm{X}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque 1.2 La loi précédente est qualifiée d'*uniforme* car si X suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$, la probabilité que X appartienne à un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ donné ($\alpha < \beta$) ne dépend que de la longueur $\beta - \alpha$ de celui-ci.

Proposition 1.3 *Soit* X *une variable aléatoire de loi* $\mathcal{U}([a, b])$.
La variable aléatoire X *admet pour fonction de répartition*

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.$$

Ci-dessous les représentations de la densité et de la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$.



Proposition 1.4 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* X *une variable aléatoire réelle.*
Si X *suit une loi* $\mathcal{U}([a, b])$ *et* $\alpha > 0$, *alors* $\alpha\mathrm{X} + \beta$ *suit une loi* $\mathcal{U}([\alpha a + \beta, \alpha b + \beta])$.

1.2 Moments

Proposition 1.5 *Soit* X *une variable aléatoire de loi* $\mathcal{U}([a, b])$.
On a :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Loi exponentielle

2.1 Desription et transformations linéaires

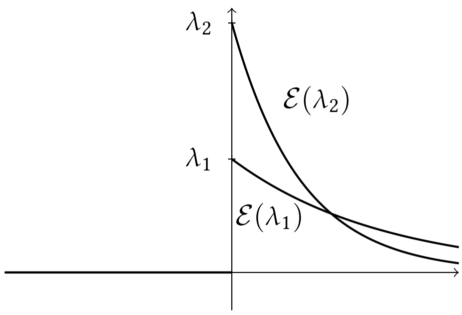
DÉFINITION 2.1 *On dit qu'une variable aléatoire réelle* X *suit une* **loi exponentielle** *de paramètre* $\lambda > 0$, *et l'on note* $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ *si elle admet pour densité la fonction*

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \lambda \mathbf{e}^{-\lambda x} & si\ x \geqslant 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}.$$

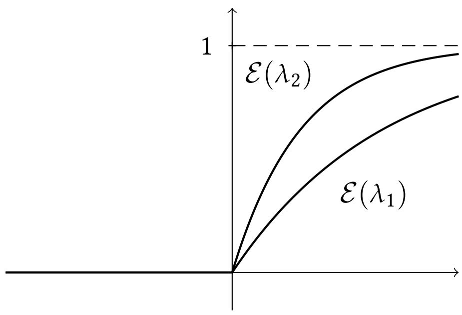
PROPOSITION 2.2 *Soit* X *une variable aléatoire de loi* $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
La variable aléatoire X *admet pour fonction de répartition*

$$F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - \mathbf{e}^{-\lambda x} & si\ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ci-dessous les représentations de la densité et de la fonction de répartition de deux lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$. On constate que plus λ est grand, plus la variable est concentrée au voisinage de 0 (à droite).



densité



fonction de répartition

PROPOSITION 2.3 *Soient* $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* X *une variable aléatoire réelle.*
Si X *suit une loi* $\mathcal{E}(\lambda)$ *et* $\alpha > 0$, *alors* αX *suit une loi* $\mathcal{E}(\lambda/\alpha)$.

2.2 Moments

PROPOSITION 2.4 *Soit* X *une variable aléatoire de loi* $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
On a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad et \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.3 Caractérisation par l'absence de mémoire

THÉORÈME 2.5 *Une variable aléatoire réelle* X *suit une loi exponentielle si, et seulement si,* $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X > x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$ *et :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}_{[X>y]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x). \tag{2.1}$$

Remarque 2.6 On interprète la condition (2.1) en disant que X suit une loi sans mémoire.

3. Loi gamma

3.1 Description

LEMME 3.1 *Pour $\nu > 0$, la fonction*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

est une densité de probabilité.

DÉFINITION 3.2 *Soient X une variable aléatoire réelle et $\nu > 0$.*
On dit que X suit une ***loi** γ *de paramètre ν, et l'on note $\mathrm{X} \hookrightarrow \gamma(\nu)$, si elle admet la fonction* (3.1) *pour densité.*

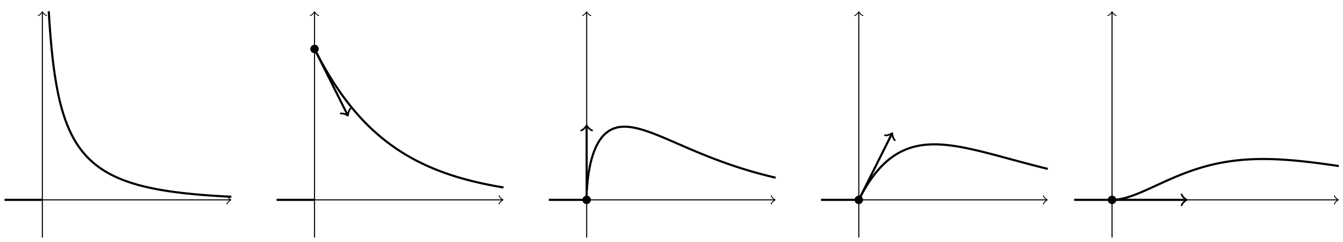
Remarques 3.3 • Pour $b, \nu > 0$ et X une variable aléatoire de loi $\gamma(\nu)$, la variable $b\mathrm{X}$ est à densité donnée par

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)b^{\nu}}\mathrm{e}^{-x/b} = \dfrac{1}{b\Gamma(\nu)}\left(\dfrac{x}{b}\right)^{\nu-1}\mathrm{e}^{-x/b} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Cette loi (hors-programme) est notée $\Gamma(b, \nu)$ et le réel b est appelé paramètre d'échelle. La loi $\gamma(\nu)$ est parfois appelée loi γ-standard par opposition aux lois Γ générales.

• La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ coïncide avec la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, 1)$. En particulier, la loi $\mathcal{E}(1)$ coïncide avec la loi $\gamma(1)$.

Ci-dessous la représentation graphique de la densité de la loi $\gamma(\nu)$ pour différentes valeurs de ν.



$0 < \nu < 1$ $\qquad$ $\nu = 1$ $\qquad$ $1 < \nu < 2$ $\qquad$ $\nu = 2$ $\qquad$ $\nu > 2$

3.2 Moments

PROPOSITION 3.4 *Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(\nu)$, $\nu > 0$.*
On a :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \nu \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = \nu.$$

3.3 Stabilité

THÉORÈME 3.5 *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$ avec $\nu_1, \nu_2 > 0$.*
Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors la variable aléatoire $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

COROLLAIRE 3.6 *Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles* mutuellement indépendantes.
(i) Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i suit une loi $\gamma(\nu_i)$, alors $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \cdots + \nu_n)$.
(ii) Si $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ suivent toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, alors $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ suit la loi $\gamma(n)$.

Exemple 3.7 Déterminer une densité de $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ lorsque $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

4. Loi normale ou gaussienne

4.1 Description et transformations affines

LEMME 4.1 *Pour $(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction*

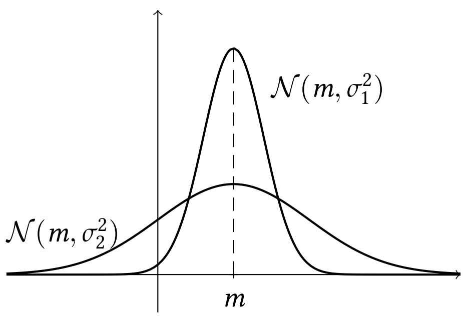
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big) \tag{4.1}$$

est une densité de probabilité.

DÉFINITION 4.2 *Soit $(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.*
*On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi normale** (ou **loi gaussienne**) de paramètres (m,σ^2), et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, si X admet pour densité la fonction* (4.1).

Remarque 4.3 Le programme définit la notation $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ mais on rencontre aussi la notation $\mathcal{N}(m,\sigma)$ pour désigner la loi précédente.

Ci-dessous la superposition des densités de deux lois normales $\mathcal{N}(m,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m,\sigma_2^2)$ avec $\sigma_1 < \sigma_2$:



PROPOSITION 4.4 *Soient $(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle.*
Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors $\alpha X + \beta$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\alpha m + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.

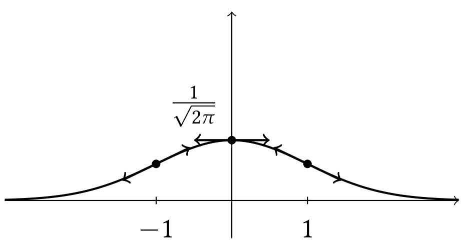
4.2 Étude de la loi normale centrée réduite

La loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée ***loi normale centrée réduite*** (car elle est centrée réduite comme on le verra plus tard...). Elle a pour densité la fonction

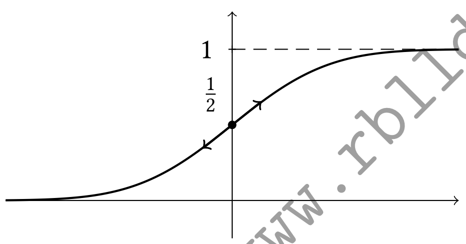
$$f_{0,1} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}^{-x^2/2}.$$

PROPOSITION 4.5 *La fonction $f_{0,1}$ est paire, croissante sur $\mathbb{R}_-$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est convexe sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ et concave sur l'intervalle $[-1,1]$. Sa courbe représentative présente une tangente horizontale au point d'abscisse* 0.

Ci-dessous les représentations graphiques de la densité f et de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:



densité



fonction de répartition

On note Φ la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.6 *On a* $\Phi(0) = 1/2$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Remarque 4.7 La propriété précédente signifie que la courbe représentative de Φ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 1/2)$. Ce centre de symétrie est aussi point d'inflexion de la courbe, la fonction Φ étant convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

4.3 Moments

Théorème 4.8 *Soit* X *une variable aléatoire suivant une loi normale* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *où* $\sigma > 0$.
On a :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = m, \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = \sigma^2, \qquad \sigma(\mathrm{X}) = \sigma.$$

4.4 Stabilité

Théorème 4.9 *Soient* $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ *des variables aléatoires réelles où pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, X_i *suit une loi normale* $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.
Si les variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ *sont mutuellement indépendantes, alors* $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}(m_1 + \cdots + m_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.