TD 10

Mamadou Thiongane, Lulian Vaz De Barros, Mohamed Yahiaoui (G3)

Questions de cours

- Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle.
- Rappeler la formule de conditionnement pour des variables aléatoires de loi continue.

Réponse.

-
  - L'esperence conditionnelle de Y sachant $X = x$:

    L'espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$ est l'espérance de la loi de densité $f_Y^{X=x}(y)$. Elle définit une fonction de la variable x

    $\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \varphi(x) = \int y f_Y^{X=x}(y)dy$.
  - Espérance conditionnelle de Y sachant X :

    L'espérance conditionnelle de Y sachant X est la variable aléatoire

    $\mathbb{E}[Y \mid X] = \varphi(X)$
- Formule de conditionnement :

  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y \mid X]\right] = \int \mathbb{E}[Y \mid X = x] f_X(x)dx$.

Exercice 1

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0, 1)$. Soit a un nombre tel que $0 < a < 1$. On définit la variable aléatoire $N(a)$ de sorte que

$$N(a) = \min\{n \geq 1 \mid X_1 + \cdots + X_n > a\}$$

Question 1

Soit $x \in (0, 1)$.

- En discutant selon les valeurs $x > a$ ou $x \leq a$, donner une expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(N(a) \mid X_1 = x)$ ne laissant plus apparaître le conditionnement.

Réponse.

- Si $x > a$:

  Alors : $\mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x] = \mathbb{E}[\min\{n \geq 1 \mid x + \cdots + X_n > a\}]$

  or comme $x > a$ on a évidemment $\mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x] = 1$
- Si $x < a$:

  $\mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x] = \mathbb{E}[\min\{n \geq 1 \mid x + \cdots + X_n > a\}] = \mathbb{E}[\min\{n \geq 1 \mid X_2 \cdots + X_n > a - x\}]$

Or on sait bien que les (X_n) sont indépendants,

Donc $X_2 + \cdots + X_n$ et $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ suivent la même loi .

Donc :

$\mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x] = \mathbb{E}[\min\{n-1 \geq 1 \mid X_1 \cdots + X_{n-1} > a - x\}] = \mathbb{E}[N(a-x)] + 1$

Question 2

- Déduire de la question précédente que, pour tout $a \in (0,1)$, nous avons

$$\mathbb{E}\left(N(a)\right) = 1 + \int_0^a \mathbb{E}\left(N(x)\right) \mathrm{d}x$$

Réponse. Par la formule de conditionnement on a :

$\mathbb{E}[N(a)] = \int_0^1 \mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x] f_X(x) dx$

Comme X_1 suit la loi uniforme sur $(0,1)$ on a $f_X(x) = 1$ pour tout x

et donc en utilisant les résultats de la question précédente :

$\mathbb{E}[N(a)] = \int_0^a \mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x] dx + \int_a^1 \mathbb{E}[N(a) \mid X_1 = x] dx$

$\mathbb{E}[N(a)] = \int_0^a 1 + N(a-x) dx + \int_a^1 dx$

$\mathbb{E}[N(a)] = a + \int_0^a N(a-x) dx + 1 - a$

$\mathbb{E}[N(a)] = 1 + \int_0^a N(a-x) dx$

En effectuant un changement de variable , on trouve la formule suivante :

$\mathbb{E}[N(a)] = 1 + \int_0^a \mathbb{E}[N(x)] dx$

Question 3

- Résoudre l'équation précédente pour trouver l'expression de $\mathbb{E}\left(N(a)\right)$.

Réponse. $\mathbb{E}[N(a)] = 1 + \int_0^a \mathbb{E}[N(x))] dx$

En posant $\mathbb{E}[N(a)] = f(a)$ et en dérivant on obtient (d'après le théorème fondamentale de l'analyse) :

$f'(a) = f(a)$

En résolvant l'équation différentielle on obtient que

$\mathbb{E}[N(a)] = e^a$

Exercice 2

On considère une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$ et on pose $U_0 = x$, $x \in (0,1)$. On dit qu'il y a record au temps m si la variable U_m est plus grande que toutes les variables précédentes. On note N_n le nombre de records au temps $n \geq 1$. On pose ensuite

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(x) = \mathbb{E}\left(N_n\right)$$

Question 1

- Calculer $f_1(x)$.
- Donner une formule reliant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left(N_{n+1} \mid U_1 = u\right)$.

Réponse.

- Soit $x \in]0,1[$.

$$f_1(x) = \mathbb{E}(N_1) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{U_1 > U_0}) = \mathbb{P}(U_1 > U_0) = \mathbb{P}(U_1 > x) = 1 - x$$

- Soit $u \in]0,1[$

$$\mathbb{E}(N_{n+1} \mid U_1 = u) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } u \leq x \\ 1 + f_n(u) & \text{si } u > x \end{cases}$$

Question 2

- Montrer que

$$1 - f_{n+1}(x) = x(1 - f_n(x)) - \int_x^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u \tag{1}$$

Réponse. D'après la formule de conditionnement,

$$f_{n+1}(x) = \mathbb{E}(N_{n+1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_{n+1} \mid U_1)) = \int_0^1 \mathbb{E}(N_{n+1} \mid U_1 = u)\,\mathrm{d}u$$

soit

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(x)\,\mathrm{d}u + \int_x^1 (1 + f_n(u))\,\mathrm{d}u = 1 - x(1 - f_n(x)) + \int_x^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

d'où

$$1 - f_{n+1}(x) = x(1 - f_n(x)) - \int_x^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Question 3

On suppose que $f_n(x)$ est dérivable et on appelle $g_n(x)$ sa dérivée.

- Trouver l'équation satisfaite par $g_n(x)$ puis la résoudre.
- En déduire que

$$f_n(x) = h_n - \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right)$$

où $h_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Réponse.

- En dérivant l'équation 1,

$$-f'_{n+1}(x) = 1 - f_n(x) - x f'_n(x) + f_n(x)$$

soit

$$g_{n+1}(x) = x g_n(x) - 1$$

Posons $\omega = -\frac{1}{1-x}$ de sorte que $\omega = x\omega - 1$.

$$g_{n+1}(x) - \omega = x(g_n(x) - \omega)$$

$(g_n(x) - \omega)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison x et de premier terme $g_1(x) - \omega$ avec $g_1(x) = -1$ (car $f_1(x) = 1 - x$) donc

$$g_n(x) = x^{n-1}(g_1(x) - \omega) + \omega = -x^{n-1}\left(1 - \frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{1-x} = -\frac{1-x^n}{1-x} = -\sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

- $f_n(1) = f_1(1) = 0$ donc

$$f_n(x) = f_n(1) + \int_1^x g_n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_x^1 t^k\,\mathrm{d}t\right)$$

soit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{x^k}{k}\right)$$

d'où

$$f_n(x) = h_n(x) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right)$$