Question 1

Soient $\alpha, \beta \in]0,1[$. Pout $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n(t) = t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\left(\sin\frac{1}{t}\right)^n.$$

(a) Montrer que $u_n \in L^1(]0,1[)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

Nous allons ici utiliser le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème de comparaison)**.** *Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $]a,b]$, équivalentes au voisinage de a :*

$$\lim_{t\to a^+}\frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)dt$ converge.

On cherche à montrer que :

$$\int_0^1 |u_n(t)|dt < \infty.$$

Le terme $\sin\frac{1}{t}$ nous gène car il diverge en 0. On commence donc par majorer comme suit :

$$\int_0^1 |u_n(t)|dt \le \int_0^1 |t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}|dt = \int_0^1 t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt,$$

car les fonctions $t \mapsto t^{-\alpha}$ et $t \mapsto (1-t)^{-\beta}$ sont strictement positives sur $]0,1[$. On se ramène au théorème de comparaison en séparant notre intégrale en deux :

$$\int_0^1 t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt = \int_0^{1/2} t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt + \int_{1/2}^1 t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt$$

Or on à :

$$\lim_{t\to 0} t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} = t^{-\alpha} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 1} t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} = (1-t)^{-\beta},$$

On se demande donc si les intégrales :

$$\int_0^{1/2} t^{-\alpha}dt \qquad \text{et} \qquad \int_{1/2}^1 (1-t)^{-\beta}dt = \int_0^{1/2} u^{-\beta}du,$$

convergent. Pour $\alpha, \beta \in]0,1[$, on à :

$$\int_x^{1/2} t^{-\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} - x^{1-\alpha}\right],$$

de même pour $-\int_x^{1/2} u^{-\beta}du$, donc si $\alpha, \beta \in]0,1[$, alors :

$$\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x^{1-\beta} = 0,$$

les deux intégrales sont donc convergentes pour $\alpha, \beta \in]0,1[$. Nous avons donc $t \mapsto t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}$, une fonction continue, strictement positive sur $]0,1/2]$ équivalente au voisinage de 0 à $t^{-\alpha}$ qui est une une fonction continue, strictement positive et intégrable sur $]0,1/2]$, donc d'après le théorème de comparaison, l'intégrale $t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}$ converge. On applique le même raisonnement sur $[1/2,1[$.

Finalement :

$$\int_0^1 |u_n(t)|dt \leq \int_0^{1/2} t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt + \int_{1/2}^1 t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt < \infty.$$

(b) Etudier la limite de la suite

$$I_n = \int_0^1 u_n(t)dt.$$

Solution:
Il s'agis ici d'utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Commençons par étudier u_n quand $n \to \infty$.

On remarque que le seul terme dépendant de n est $\left(\sin \frac{1}{t}\right)^n$, or pour :

$$\begin{aligned} t = (2k\pi + \frac{\pi}{2})^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \sin \frac{1}{t} &= 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sin \frac{1}{t}\right)^n = 1. \\ t = (2k\pi + \frac{3\pi}{2})^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \sin \frac{1}{t} &= -1 \Rightarrow \left(\sin \frac{1}{t}\right)^n \text{ diverge.} \\ t \quad p.p \quad \left|\sin \frac{1}{t}\right| &< 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sin \frac{1}{t}\right)^n = 0. \end{aligned}$$

De plus $t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} < \infty$ pour $t \in]0,1[$, donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = 0 \quad t \text{ p.p }]0,1[$$

Comme nous l'avons vu plus haut :

$$\left| t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} \left(\sin \frac{1}{t}\right)^n \right| < t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} \quad \forall t \in]0,1[,$$

qui, comme nous l'avons vu plus haut, est une fonction intégrable.

On a donc vérifié les deux hypothèses du théorème de convergence dominée, et donc :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(t)dt = 0.$$

Question 2

On pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} dt$$

(a) Montrer que la fonction F est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution:
Commençons par montrer que F est définie. On remarque que :

$$\exp(-xt^2) \leq 1 \quad \forall t, x \in \mathbb{R}_+,$$

donc :

$$\left|\frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t, x \in \mathbb{R}_+,$$

dont la primitive est la fonction arctan et qui est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $F(x)$ est donc définie sur $\mathbb{R}^+$.

Montrons maintenant que F est continue sur $\mathbb{R}^+$. On remarque que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+,$$

de plus, nous avons montré plus que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \left|\frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

La fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Montrons maintenant que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt, \quad g(x,t) = \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}.$$

La fonction g est bien dérivable pour $x \in \mathbb{R}^+$ et sa dérivée est :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^2\exp(-xt^2)}{1+t^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Cependant, pour ~~où~~ $x = 0$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(0,t)\right| = \frac{t^2+1-1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2},$$

dont la primitive, $x \mapsto x - \arctan(x)$ diverge quand $x \to \infty$, et qui n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Prenons maintenant $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\exp(-xt^2) = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\exp(-xt^2) \leq \exp(-xt^2).$$

Il est difficile de majorer $\exp(-xt^2)$ pour $x < 1$, cependant :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \exp(-xt^2) \leq \exp(-at^2) \quad \forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*,$$

qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction g est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ pour t p.p (pour tout t en fait), et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|$ est bien majorable par une fonction intégrable $\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$,. La fonction F est donc bien dérivable en sur $\mathbb{R}_*^+$ et :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2}{1+t^2}\exp(-xt^2)dt.$$

(b) Calculer $\lim_{x\to\infty} F(x)$

Solution:
On commence par écrir :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} dt.$$

On commence par se rappeler que :

$$\lim_{x\to\infty} \exp(-xt^2) = \cancel{\delta(t) =} \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases},$$

~~c'est d'ailleurs une des définitions possible de la fonction δ.~~

On va maintenant se ramener à un cas où on peut utiliser les convergence~~s~~ dominé~~es~~, pour ce faire, on définis la suite monotone $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, et on remarque que :

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(-x_n t^2)}{1+t^2} = 0$ pour t p.p sur $\mathbb{R}^+$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\exp(-x_n t^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et que $\frac{1}{1+t^2}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc d'après le théorème de convergence dominées, on a :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(-x_n t^2)}{1+t^2} = 0.$$

(c) Montrer que F est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y'(x) - y(x) = -\frac{A}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

avec $A = \int_0^\infty \exp(-t^2)dt$.

Solution:
Il suffit d'appliquer ce qu'on a montré plus haut, on trouve :

$$F'(x) - F(x) = -\int_0^{+\infty} \exp(-xt^2)dt.$$

On retrouve A en posant le changement de variable :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x}t, \\ du &= \sqrt{x}dt, \\ t = 0 &\Rightarrow u = 0 \\ t = \infty &\Rightarrow u = \infty \end{aligned},$$

et on se retrouve avec :

$$F'(x) - F(x) = -\frac{\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du}{\sqrt{x}} = -\frac{A}{\sqrt{x}}.$$

(d) Intégrez cette équation différentielle et en déduire la valeur de $\int_0^\infty \exp(-t^2)dt$.

Solution:
Nous allons ici chercher à résoudre l'équation différentielle. Prenons l'équation homogène :

$$y_h'(x) = y_h(x) \quad x \in \mathbb{R}_+^*,$$

on en déduit qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $y_h(x) = K\exp(x)$. On utilise la méthode de la variation de la constante, c'est à dire qu'on cherche une solution y de la forme :

$$y(x) = k(x)y_h(x) = k(x)\exp(x).$$

On reporte cette solution dans l'équation initiale et on trouve :

$$k'(x)\exp(x) = -\frac{A}{\sqrt{x}},$$

finalement en intégrant, on trouve :

$$k(x) = -A\int_0^x \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}}dy.$$

La solution générale de l'équation s'écrit alors :

$$y(x) = (K + k(x))y_h(x) = \left[K - A\int_0^x \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}}dy\right]\exp(x) \quad K \in \mathbb{R}.$$

On se rappel qu'on a montré que F était solution de l'équation. Cela signifie que l'on peut trouver $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$F(x) = \left[K - A\int_0^x \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}}dy\right]\exp(x).$$

La continuité de F en $x = 0$ nous permet d'écrire :

$$F(0) = K \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = K.$$

Si on ne sait pas que $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, on se rappelle que $\arctan(\tan(x)) = x$ et que :

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \tan(\theta) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons donc :

$$\exp(-x)F(x) = \left[\frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}}dy\right].$$

En faisant tendre x vers l'infini, on trouve :

$$\frac{\pi}{2} = A\int_0^\infty \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}}dy.$$

On ne sait pas trop quoi faire du terme $\int_0^\infty \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}}dy$, mais on remarque qu'on peut se ramener à l'intégrale d'une gaussienne en posant :

$$\begin{aligned} y &= u^2, \\ dy &= 2udu, \\ y &= 0 \Rightarrow u = 0, \\ y &= \infty \Rightarrow u = \infty \end{aligned}.$$

On obtient alors :

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}}dy = 2\int_0^\infty \exp(-u^2)dy = 2A.$$

Finalement :

$$\frac{\pi}{4} = A^2 \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

car $\exp(-u^2)$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_*^+$.

Question 3

On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction $G(x) = \exp(-\pi x^2)$ est égale à $\hat{G}(\nu) = \exp(-\pi\nu^2)$.

(a) Pour $a > 0$, on pose :

$$G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$$

Calculer la transformée de Fourier $\hat{G}_a$ de G_a.

Solution:
Écrivons transformée de Fourier de G_a :

$$\hat{G}_a(\nu) = \int_{-\infty}^\infty G_a(x)\exp(-2i\pi\nu x)dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\exp(-2i\pi\nu x)dx.$$

On effectue un changement de variable pour se ramener au cas connu :

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{2a\pi}}, \\ dy &= \frac{dx}{\sqrt{2a\pi}}, \\ x = -\infty &\Rightarrow y = -\infty \\ x = +\infty &\Rightarrow y = +\infty \end{aligned},$$

et on obtient :

$$\hat{G}_a(\nu) = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\pi y^2\right)\exp(-2i\pi[\nu\sqrt{2a\pi}]y)dy.$$

D'où :

$$\hat{G}_a(\nu) = \sqrt{2\pi}\hat{G}(\nu\sqrt{2a\pi}) = \sqrt{2\pi}\exp(-2a\pi^2\nu^2).$$

(b) Soit $a, b > 0$ deux réels,

i. Calculer la transformée de Fourier du produit de convolution $G_a * G_b$.

Solution:
La transformée de Fourier du produit de convolution $G_a * G_b$ s'écrit :

$$G_a \hat{*} G_b(\nu) = \int_{-\infty}^\infty G_a * G_b(\tau)\exp(-2i\pi\nu\tau)d\tau,$$

où encore :

$$G_a \hat{*} G_b(\nu) = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty G_a(\tau - x)G_b(x)dx\right)\exp(-2i\pi\nu\tau)d\tau,$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut inverser les intégrales :

$$G_a \hat{*} G_b(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_a(\tau - x) \exp(-2i\pi\nu\tau) d\tau \right) G_b(x) dx,$$

On pose le changement de variable :

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \tau - x, \\ dy(\tau) &= d\tau, \\ x = -\infty &\Rightarrow y = -\infty, \\ x = +\infty &\Rightarrow y = +\infty \end{aligned}$$

et on obtiens l'intégrale suivante :

$$G_a \hat{*} G_b(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_a(y) \exp(-2i\pi\nu(y + x)) dy \right) G_b(x) dx,$$

d'où :

$$G_a \hat{*} G_b(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_a(y) \exp(-2i\pi\nu y) dy \right) G_b(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx.$$

On remarque que le terme $\int_{-\infty}^{\infty} G_a(y) \exp(-2i\pi\nu y) dy$ est indépendant de x, on a donc :

$$\begin{aligned} G_a \hat{*} G_b(\nu) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_a(y) \exp(-2i\pi\nu y) dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_b(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \right). \\ &= \hat{G}_a(\nu) \hat{G}_b(\nu). \end{aligned}$$

On réutilise le résultat précédant pour obtenir :

$$\begin{aligned} G_a \hat{*} G_b(\nu) &= \sqrt{2\pi} \exp(-2a\pi^2\nu^2) \sqrt{2\pi} \exp(-2b\pi^2\nu^2) \\ &= 2\pi \exp(-2(a + b)\pi^2\nu^2) \end{aligned}$$

ii. En déduire que $G_a * G_b = \alpha G_c$ où α et c sont des constantes à préciser.

Solution:
On a vu plus haut que :

$$G_a \hat{*} G_b(\nu) = 2\pi \exp(-2(a + b)\pi^2\nu^2),$$

et que :

$$\hat{G}_d(\nu) = \sqrt{2\pi} \exp(-2d\pi^2\nu^2) \quad d > 0.$$

on en déduit :

$$G_a \hat{*} G_b(\nu) = \sqrt{2\pi} \hat{G}_{a+b}.$$

Par linéarité de la transformée de Fourier inverse, on trouve :

$$G_a * G_b(\tau) = \sqrt{2\pi} G_{a+b}(\tau).$$