INTRODUCTION AUX PRODUITS DÉRIVÉS

PAGE DU COURS SUR CHAMILO

Hervé Guiol (IPS LJK)

Wolfgang Döblin
1915-1940

Kiyoshi Itō
1915-2008

PLAN DU COURS D'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. Premières propriétés du MBS.
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. **Intégrale d'Itō 1 : définitions et construction. Processus d'Itō. Variations.**
8. Intégrale d'Itō 2 : formule d'Itō.
9. Représentation des martingales Browniennes. Formule d'Itô multi-d. Formule de Cameron-Martin.
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itō.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

Outline

Intégrale d'Itō : processus de base prévisible

Définition 3.6

On appelle processus de base prévisible un processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$H_t = \Phi \cdot \mathbf{1}_{]u,v]}(t) \qquad (1)$$

où $0 \leq u < v$ et Φ une v.a. $\mathcal{F}_u$-mesurable de carré intégrable.
On note Π_0^2 l'espace vectoriel des processus de base prévisibles.
Pour tout $H \in \Pi_0^2$ de représentation (1) on définit son intégrale d'Itō par W, un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S., comme le processus $I(H) = (I_t(H))_{t\geq 0}$ vérifiant $\forall t \geq 0$

$$I_t(H) = \Phi \cdot (W_{v\wedge t} - W_{u\wedge t})$$

Proposition 5.8

Pour tout $H \in \Pi_0$ le processus $I(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues, de carré intégrable, nulle en $t = 0$. De plus le processus $(I_t^2(H) - \int_0^t H_s^2\, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues.

INTÉGRALE D'ITŌ : PROCESSUS DE BASE PRÉVISIBLE

- Continuité : $t \mapsto I_t(H) = \Phi \cdot (W_{v\wedge t} - W_{u\wedge t})$ et $t \mapsto I_t^2(H) - \int_0^t H_s^2 \, ds$
- Adaptabilité : $I_t(H) = \Phi \cdot (W_{v\wedge t} - W_{u\wedge t})$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $I_t^2(H) - \int_0^t H_s^2 \, ds$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- Intégrabilité : $\mathbb{E}((I_t(H))^2) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s^2) \, ds$
- Propriétés conditionnelles : $\forall 0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}(I_t(H)|\mathcal{F}_s) = I_s(H)$$

et

$$\mathbb{E}((I_t(H) - I_s(H))^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\int_s^t H_u^2 \, du|\mathcal{F}_s\right)$$

Définition 5.9

Soit $T > 0$ on appelle processus prévisible élémentaire sur $[0, T]$ tout processus $H = (H_t)_{t \geq 0}$ de la forme

$$H_t = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \cdot \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t) \qquad (2)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ et pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$ chaque Φ_i est une v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable de carré intégrable.

On note $\Pi_1^2([0, T])$ l'espace vectoriel des processus prévisibles élémentaires sur $[0, T]$.

Pour tout $H \in \Pi_1^2([0, T])$ de représentation (2) on définit son intégrale d'Itō par W, un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-M.B.S., comme le processus $I(H) = (I_t(H))_{t \geq 0}$ vérifiant $\forall t \geq 0$

$$I_t(H) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \cdot (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t})$$

Intégrale d'Itō : processus prévisible élémentaire

Corollaire 5.10

Pour tout $H \in \Pi_1^2([0,T])$ l'intégrale d'Itō $I(H)$ de H par W est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale de carré intégrable, à trajectoires continues, nulle en $t=0$. De plus le processus $(I_t^2(H) - \int_0^t H_s^2\, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues. Pour tout $t \in [0,T]$ on notera

$$\int_0^t H_u\, dW_u = I_t(H).$$

Théorème 5.11. Isométrie d'Itō

Pour tous $H \in \Pi_1^2([0,T])$ et $t \in [0,T]$ on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_u\, dW_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right]$$

Définition 5.12

On définit $\Pi_2^2([0,T])$ l'espace vectoriel des processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ continus à droite limité à gauche, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptés tels que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2\, ds\right) < +\infty$$

Remarque

L'espace $\Pi_1^2([0,T])$ est dense dans $\Pi_2^2([0,T])$ pour la $\|\|_2$.

Pour $H \in \Pi_2^2([0,T])$ et tout $n \geq 1$ on prend

$$H_t^n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{2^n}{T} \int_{\frac{(k-1)T}{2^n}}^{\frac{kT}{2^n}} H_s\, ds \right) \mathbf{1}_{]kT/2^n,(k+1)T/2^n]}(t)$$

Lemme 5.14

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t (H_s - H_s^n)^2\, ds\right) = 0$$

Intégrale d'Itō : processus de $\Pi_2^2([0,T])$

Théorème 5.13

Il existe une unique application linéaire $J : \Pi_2^2([0,T]) \to \mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales de carré intégrable à trajectoires continues vérifiant

1. $\forall H \in \Pi_1^2$ on a $J(H) = I(H)$;
2. Pour tout $H \in \Pi_2^2([0,T])$ le processus $J(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale de carré intégrable, à trajectoires continues, nulle en $t=0$ vérifiant pour tout $t \geq 0$ l'isométrie d'Itō

$$\mathbb{E}\left(J_t(H)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 \, ds\right)$$

3. Pour tout $H \in \Pi_2^2([0,T])$ le processus $(J_t^2(H) - \int_0^t H_s^2 \, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues.

On notera à nouveau

$$\int_0^t H_u \, dW_u = J_t(H).$$

INTÉGRALE D'ITŌ : PROCESSUS DE $\Pi_3^2([0, T])$

DÉFINITION 5.15

On définit $\Pi_3^2([0, T])$ l'espace vectoriel des processus $H = (H_t)_{t \geq 0}$ continus à droite limité à gauche, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-adaptés tels que

$$\int_0^T H_s^2 \, ds < +\infty \text{ p.s.}$$

PROPOSITION 5.16

Soit $H \in \Pi_3^2([0, T])$ et τ un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-temps d'arrêt alors

$$\int_0^{t \wedge \tau} H_s \, dW_s = \int_0^t H_s \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) \, dW_s$$

REMARQUE

L'intégrale étendue aux processus de $\Pi_3^2([0, T])$ n'est plus une martingale, mais une martingale locale. L'isométrie d'Itô n'est plus nécessairement vérifiée.

OUTLINE

Processus d'Itō

Définition

Soit W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. On appelle processus d'Itō tout processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$$

où X_0 v.a. $\mathcal{F}_0$ mesurable, $K = (K_t)_{t\geq 0}$ et $H = (H_t)_{t\geq 0}$ deux processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptés vérifiant $\forall t \geq 0$

$$\int_0^t (|K_s| + H_s^2)\, ds < \infty$$

Proposition

La décomposition d'un processus d'Itō est unique presque sûrement.

Variation quadratique et processus crochet

Définition. Variation quadratique d'une martingale.

La variation quadratique d'une martingale $M = (M_t)_{t\geq 0}$ de carré intégrable à trajectoire continue est définie comme l'unique processus croissant, continu, noté $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ tel que $\langle M\rangle_0 = 0$ et vérifiant que que le processus $N = (N_t)_{t\geq 0}$, définit par $N_t = M_t^2 - \langle M\rangle_t$ pour tout $t \geq 0$, est une martingale.

Exemple

Soit B un M.B.S. alors $\langle B\rangle_t = t$

Définition. Processus crochet.

Pour tout processus d'Itō X de décomposition $X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s$ on appelle processus crochet le processus $\langle X\rangle$ définit par

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds$$

Variation quadratique et processus crochet

Proposition

Si $X_t = X_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$ avec
$H \in \Pi_2^2 := \{H$ càd-làg, adapté et t.q. $\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 \, ds) < +\infty, \ \forall t \geq 0\}$ alors les processus crochet et variation quadratique de X coïncident

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$$

De plus on a dans L^2

$$\langle X \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{t_i \in \Delta_n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

où $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_k^n = t\}$ est une subdivision de l'intervalle $[0, t]$ vérifiant $\lim_{n \to \infty} \sup_{t_i \in \Delta_n} (t_i - t_{i-1}) = 0$.

Covariation quadratique

Définition. Covariation quadratique.

La **covariation quadratique** entre 2 processus X et Y est définie par

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{4}(\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle)$$

Propriétés.

1. L'application $(X, Y) \to \langle X, Y\rangle$ est bilinéaire.
2. Pour X et Y deux processus d'Itō de décomposition

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t L_s\, ds + \int_0^t M_s\, dB_s \end{aligned}$$

On a $\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s M_s\, ds$.