Feuille de TD n.9 de IPD 2022-2023, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Soit B un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère le processus X définit par $X_t = \mu(t^2 - 2t) + B_t$ pour tous $t \geq 0$. Définissez une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle X est un MBS.

Exercice 2. Martingale exponentielle.
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe mesurable telle que $\int_0^t h^2(s)\ ds < +\infty$ pour tout $t \geq 0$.
1. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t h(s)\ dB_s}\right] = e^{\frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\ ds}.$$

2. Calculer

$$\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t h(u)\ dB_u}\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

pour $s \leq t$.
3. En combinant les deux questions précédentes, en déduire que le processus M défini par

$$M_t = \exp\left(\int_0^t h(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\ ds\right),$$

pour $t \leq T$, est une martingale.
4. Montrer que M_t est un processus d'Itô et donner sa décomposition.
5. On pose

$$M_t^{-1} = \exp\left(-\int_0^t h(s)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\ ds\right),$$

donner la décomposition d'Itô de M^{-1}. Calculer sa moyenne. Est-ce une martingale?

Exercice 3. Processus d'Itô.
Soit B un mouvement brownien. Donner la décomposition d'Itô (si elle existe) des processus suivants

(a) $X_t = X_0\ e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B_t}$ pour $r > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$.

(b) $X_t = X_0\ e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}\ dBs$ pour $a \in \mathbb{R}$.

(c) $X_t = \dfrac{B_t}{1+t}$.

(d) $X_t = B_t - tB_1$ pour $t \in [0, 1]$.

(e) $X_t = B_t^2 - B_tW_t + W_t^2$ où W est un MBS indépendant de B.