Martingales

jeudi 5 décembre 2013

1. **Fonctions de martingales.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe positive. Montrer que $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale. Montrer que c'est aussi le cas lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale et f est convexe positive croissante.

2. **Un problème d'urnes.** On considére une urne contenant initialement au temps $n = 1$ une boule noire et une boule blanche. À chaque temps n, on prend au hasard une boule dans l'urne, et on la remplace par deux boules de même couleur. On note X_n la proportion de boules noires dans l'urne au temps n ; ainsi, $X_1 = \frac{1}{2}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale par rapport à la filtration qu'elle engendre, et qui converge p.s. et dans L^1 vers une variable $Z \in [0,1]$. Montrer que plus généralement, tous les moments de X_n convergent vers les moments de Z :

$$\forall k \geq 1,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n)^k] = \mathbb{E}[Z^k].$$

On fixe $k \geq 1$ et on note

$$Y_{n,k} = \frac{N_n(N_n+1)\cdots(N_n+k-1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)},$$

où $N_n = (n+1)X_n$ est le nombre de cartes noires dans l'urne au temps n. Montrer que $(Y_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, et en déduire la limite de $\mathbb{E}[(X_n)^k]$ pour tout k. Conclure quant à la loi de Z.

3. **Intégrale stochastique discrète.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sur-martingale, et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus à valeurs positives, prévisible et dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$. On rappelle que "prévisible" signifie que P_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Montrer que

$$(P\cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} P_k(X_k - X_{k-1})$$

est une sur-martingale. Soit $S \leq T$ deux temps d'arrêt bornés p.s. par une constante K. En posant $P_n = \mathbb{1}_{S<n\leq T}$, montrer que $\mathbb{E}[X_S] \geq \mathbb{E}[X_T]$.

4. **Une martingale sur** $[0,1]$**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus à valeurs dans $[0,1]$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ la filtration engendré par ce processus. On suppose que $X_0 = a \in (0,1)$ est constante p.s., et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_n = \frac{X_{n-1}}{2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] = 1 - X_{n-1} \qquad ; \qquad \mathbb{P}\left[X_n = \frac{1+X_{n-1}}{2} \,\middle|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] = X_{n-1}.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, et qu'elle converge p.s. et dans l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ vers une variable aléatoire Z à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2] = \frac{1}{4}\,\mathbb{E}[X_{n-1}(1-X_{n-1})]$, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[Z(1-Z)]$. Conclure quant à la loi de Z.

5. **Identité de Wald.** Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d., intégrables, et $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Si $m = \mathbb{E}[Y_1]$, on rappelle que $(X_n - nm)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à la filtration qu'elle engendre. Soit T un temps d'arrêt intégrable. Montrer que pour tout n, $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = m\,\mathbb{E}[n\wedge T]$. Si T est intégrable, montrer que S_T est intégrable et que
$$\mathbb{E}[S_T] = m\,\mathbb{E}[T].$$

6. **Supremum d'une marche aléatoire.** Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, telles que $\mathbb{E}[Y_1] = m < 0$. On suppose aussi $\mathbb{P}[Y_1 > 1] = 0$ et $\mathbb{P}[Y_1 = 1] > 0$. On s'intéresse à la loi de $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, où $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

   1. Montrer que M est fini presque sûrement.
   2. On introduit la transformée log-Laplace $\Lambda(t) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tY_1}]$. Montrer que Λ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, convexe et avec $\Lambda(0) = 0$ et $\Lambda(+\infty) = +\infty$. Calculer $\Lambda'(0)$ et montrer qu'il existe un unique réel $h > 0$ tel que $\Lambda(h) = 0$.
   3. Soit μ la loi de Y, et $\widetilde{\mu}$ la mesure sur $\mathbb{Z}$ donnée par $\widetilde{\mu}(k) = \mathrm{e}^{hk}\,\mu(k)$. Montrer que $\widetilde{\mu}$ est une nouvelle mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}$. On notera $\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\widetilde{\mu}$; et $\widetilde{X}_n = \sum_{k=1}^n \widetilde{Y}_k$. Montrer que $(\mathrm{e}^{hX_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des martingales par rapport aux filtrations qu'elles engendrent.
   4. Soit τ_k et $\widetilde{\tau}_k$ les temps aléatoires
   $$\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n \geq k\} \qquad ; \qquad \widetilde{\tau}_k = \inf\{n \in \mathbb{N},\ \widetilde{X}_n \geq k\}.$$
   Montrer qu'il s'agit en fait des temps d'atteinte de $k \geq 0$ par les marches aléatoires X_n et $\widetilde{X}_n$:
   $$\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = k\} \qquad ; \qquad \widetilde{\tau}_k = \inf\{n \in \mathbb{N},\ \widetilde{X}_n = k\}.$$
   Montrer ensuite que pour tout k et tout n,
   $$\mathbb{P}[\tau_k \leq n] = \mathbb{E}\left[1_{\widetilde{\tau}_k \leq n}\,\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_n}\right] = \mathrm{e}^{-hk}\,\mathbb{P}[\widetilde{\tau}_k \leq n].$$
   En déduire la valeur de $\mathbb{P}[\tau_k < \infty]$.
   5. Conclure quand à la loi de M.

1. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et f est convexe positive, alors les fonctions $f(X_n)$ sont positives, donc on peut considérer sans ambiguïté leurs espérances ou espérances conditionnelles. Par l'inégalité de Jensen, on a alors

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq f(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = f(X_n).$$

   Ainsi, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale. Dans le cas d'une fonction convexe positive croissante d'une sous-martingale, on a de même :

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq f(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \geq f(X_n)$$

   car $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ et f est croissante.

2. Comme $X_n \in [0,1]$ pour tout n, toutes les variables manipulées seront intégrables, et si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale, alors elle sera bornée dans tout espace L^k, donc convergera p.s. et dans tout espace L^k. Montrons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une martingale. Si $X_{n-1} = \frac{m}{n}$, alors $X_n = \frac{m+1}{n+1}$ avec probabilité $\frac{m}{n}$, et $X_n = \frac{m}{n+1}$ avec probabilité $\frac{n-m}{n}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \frac{(m+1)m + m(n-m)}{n(n+1)} = \frac{m(n+1)}{n(n+1)} = \frac{m}{n} = X_n.$$

   D'après ce qui précède, on a convergence en moments de X_n vers une variable aléatoire Z.

   Pour calculer les moments de la limite Z, on étudie les variables $Y_{n,k}$. Notons qu'il s'agit également de variables aléatoires dans $[0,1]$, donc s'il s'agit de martingales, elles convergent toutes p.s. et en moments, car elles sont bornées dans L^∞. De nouveau, si $N_{n-1} = m$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n,k}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \frac{m}{n}\,\frac{(m+1)\cdots(m+k)}{(n+1)\cdots(n+k)} + \left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{m\cdots(m+k-1)}{(n+1)\cdots(n+k)} \\ &= \frac{(m+1)\cdots(m+k-1)}{n(n+1)\cdots(n+k)}\,(m(m+k)+(n-m)m) \\ &= \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} = Y_{n-1,k}.\end{aligned}$$

   On en déduit la convergence de chaque $Y_{n,k}$ vers un limite Z_k, qui n'est autre que Z^k, car $Y_{n,k} \simeq (X_n)^k$. Or, $\mathbb{E}[Y_{1,k}] = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n)^k] = \mathbb{E}[Z^k] = \frac{1}{k+1}$$

   pour tout $k \geq 1$. Il s'agit des moments d'une loi uniforme sur $[0,1]$, donc $Z \sim \mathcal{U}([0,1])$.

3. Comme chaque P_n est borné (dans L^∞) par une constante K_n, chaque incrément $P_n(X_n - X_n - 1)$ est intégrable :

$$\mathbb{E}[|P_n(X_n - X_n - 1)|] \leq K_n(\mathbb{E}[|X_n - X_n - 1|]) < \infty.$$

On en déduit que le processus $((P \cdot X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est intégrable. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(P \cdot X)_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(P \cdot X)_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[P_n(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (P \cdot X)_{n-1} + P_n(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}) \\ &\leq (P \cdot X)_{n-1}\end{aligned}$$

car $P_n \geq 0$, et $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \leq 0$ par la propriété de sur-martingale. On obtient donc bien une sur-martingale.

Si $S \leq T$ sont des temps d'arrêt, alors $P_n = \mathbb{1}_{S<n\leq T} = \mathbb{1}_{S\leq n-1} - \mathbb{1}_{T\leq n-1}$ est bien prévisible, donc $(P \cdot X)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale. Évaluons alors $\mathbb{E}[(P \cdot X)_K] \leq 0$ pour K constante majorant T. Il s'agit aussi de

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=S+1}^{T} (X_n - X_{n-1})\right] = \mathbb{E}[X_T - X_S].$$

Ainsi, on a bien $\mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[X_S]$.

4. Si $x \in [0,1]$, alors $x/2$ et $(1+x)/2$ sont tous les deux dans $[0,1]$, donc toutes les variables aléatoires X_n prennent leurs valeurs dans $[0,1]$, et sont intégrables. On calcule ensuite

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \frac{X_{n-1}}{2}\,(1 - X_{n-1}) + \frac{1 + X_{n-1}}{2}\,X_{n-1} = X_{n-1}.$$

On a donc bien une martingale, et comme elle est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, elle converge p.s. et dans L^2 vers une variable Z. Pour calculer $\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2]$, on procède par conditionnement :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_n)^2 - 2X_{n-1}X_n + (X_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] - (X_{n-1})^2] \\ &= \mathbb{E}\left[(1 - X_{n-1})\,\frac{(X_{n-1})^2}{4} + X_{n-1}\,\frac{(1 + X_{n-1})^2}{4} - (X_{n-1})^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\,\mathbb{E}[X_{n-1}(1 - X_{n-1})].\end{aligned}$$

Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2, le terme de gauche de la précédente égalité tend vers 0, donc il en va de même pour le terme de droite, qui tend vers $\frac{1}{4}\,\mathbb{E}[Z(1 - Z)]$. On en déduit que $\mathbb{E}[Z(1 - Z)] = 0$ et que $Z \in \{0,1\}$ presque sûrement. La convergence L^2 impliquant la convergence dans L^1, on a aussi $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_0] = a$, donc Z est une variable de Bernoulli de paramètre a.

5. Par le théorème d'arrêt, $(S_{n\wedge T} - m(n \wedge T))_{n\in\mathbb{N}}$, qui est la version arrêtée au temps T de $(S_n - mn)_{n\in\mathbb{N}}$, est de nouveau une martingale. En particulier, pour tout temps n,

$$\mathbb{E}[S_{n\wedge T} - m(n \wedge T)] = \mathbb{E}[S_{0\wedge T} - m(0 \wedge T)] = 0.$$

Supposons T intégrable. Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_T|] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[|S_n|\,\mathbb{1}_{T=n}] &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|Y_k|\mathbb{1}_{T=n}] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|Y_k|\,\mathbb{1}_{T\geq k}].\end{aligned}$$

Notons maintenant que $\mathbb{1}_{T\geq k} = 1 - \mathbb{1}_{T<k}$ est indépendant de Y_k, car $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable. Par conséquent, on peut réécrire la borne précédente sous la forme :

$$\mathbb{E}[|S_T|] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|Y_k|]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{T\geq k}] = \mathbb{E}[|Y_1|]\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T\geq k}]\right) = \mathbb{E}[|Y_1|]\,\mathbb{E}[T] < \infty.$$

La variable S_T est donc intégrable. De plus, en adaptant la preuve qui précède, on voit que les variables $S_{n\wedge T} - m(n\wedge T)$ sont dominées par $\sum_{k=1}^{T} |Y_k| + mT$, qui est intégrable :

$$\begin{aligned}|S_{n\wedge T} - m(n\wedge T)| &\leq \sum_{k=1}^{n\wedge T} |Y_k| + |m|(n\wedge T) \leq \sum_{k=1}^{T} |Y_k| + |m|T \\ \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} |Y_k| + mT\right] &\leq (\mathbb{E}[|Y_1|] + m)\mathbb{E}[T] \leq 2\mathbb{E}[|Y_1|]\mathbb{E}[T] < \infty.\end{aligned}$$

Par convergence dominée, on en déduit que $\mathbb{E}[S_T - mT] = 0$.

6. Comme $m = \mathbb{E}[Y_1] < 0$, par la loi des grands nombres, $X_n/n \to m$ p.s. et en particulier, $X_n \to -\infty$ presque sûrement. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une borne supérieure finie $M \in \mathbb{N}$. La transformée de log-Laplace est bien définie, car
$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tY_1}] \leq \mathbb{P}[Y_1 = 1]\,\mathrm{e}^t + (1 - \mathbb{P}[Y_1 = 1]) < \infty.$$
Par l'inégalité de Hölder,
$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{psY_1+(1-p)tY_1}] \leq \mathbb{E}[\mathrm{e}^{sY_1}]^p\,\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tY_1}]^{1-p}$$
pour $0 < p < 1$ et $0 < s < t$. En prenant les logarithmes, on en déduit que
$$\Lambda(ps + (1-p)t) \leq p\Lambda(s) + (1-p)\Lambda(t),$$
c'est-à-dire que Λ est convexe. Comme $\Lambda(t) \geq \mathbb{P}[Y_1 = 1]\,\mathrm{e}^t$,
$$\lim_{t\to+\infty} \Lambda(t) = +\infty,$$
et d'autre part, $\Lambda(0) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^0] = \log 1 = 0$. Comme $\Lambda'(0) = m < 0$, la courbe $t \to \Lambda(t)$ part donc de 0 en 0, est négative pendant un certain temps, puis repasse par 0 en un unique point $h > 0$, avant de tendre vers l'infini. Cette valeur h donne bien une nouvelle mesure de probabilité $\widetilde{\mu}$, car
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mu}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(k)\,\mathrm{e}^{hk} = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{hY_1}] = \exp\Lambda(h) = \exp(0) = 1.$$

On montre que $(\mathrm{e}^{hX_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale :

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{hX_n}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{hY_n}]\,\mathrm{e}^{hX_{n-1}} = \mathrm{e}^{hX_{n-1}}\,\exp\Lambda(h) = \mathrm{e}^{hX_{n-1}}.$$

De même, $(\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une martingale :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_n}|\widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}\right] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-h\widetilde{Y}_n}]\,\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_{n-1}}$$

et $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-h\widetilde{Y}_n}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mu}(k)\,\mathrm{e}^{-hk} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu(k) = 1$.

Comme Y_1 et $\widetilde{Y}_1$ ne charge que 1 parmi les entiers positifs, les temps τ_k et $\widetilde{\tau}_k$ sont effectivement les temps d'atteinte de l'entier $k \geq 0$ (pour atteindre un niveau plus grand que k, il faut effectivement d'abord passer exactement par k). Notons maintenant que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau_k \leq n] &= \sum_{j_1,\ldots,j_n}\mu^{\otimes n}(j_1,\ldots,j_n)\,1\!\!1_{\left(\sup_{m\leq n}(j_1+\cdots+j_m)\geq k\right)}\\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_n}\widetilde{\mu}^{\otimes n}(j_1,\ldots,j_n)\,1\!\!1_{\left(\sup_{m\leq n}(j_1+\cdots+j_m)\geq k\right)}\,\mathrm{e}^{-h(j_1+\cdots+j_n)}\\ &= \mathbb{E}\left[1\!\!1_{\widetilde{\tau}_k\leq n}\,\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_n}\right].\end{aligned}$$

Ceci constitue la première partie de la suite d'égalités annoncée dans l'énoncé. Pour la seconde partie, on peut décomposer l'espérance en fonction de la valeur de $\widetilde{\tau}_k$:

$$\mathbb{E}\left[1\!\!1_{\widetilde{\tau}_k\leq n}\,\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_n}\right] = \sum_{m=0}^{n}\mathbb{E}\left[1\!\!1_{\widetilde{\tau}_k=m}\,\mathrm{e}^{-h\widetilde{X}_n}\right] = \mathrm{e}^{-hk}\sum_{m=0}^{n}\mathbb{E}\left[1\!\!1_{\widetilde{\tau}_k=m}\,\mathrm{e}^{-h(\widetilde{Y}_{m+1}+\cdots+\widetilde{Y}_n)}\right]$$

Notons alors que pour m fixé, la variable $1\!\!1_{\widetilde{\tau}_k=m}$ est $\widetilde{\mathcal{F}}_m$-mesurable, tandis que $\widetilde{Y}_{m+1},\ldots,\widetilde{Y}_n$ sont indépendantes de cette tribu. On peut donc décomposer ce qui précède en

$$\mathrm{e}^{-hk}\sum_{m=0}^{n}\mathbb{E}[1\!\!1_{\widetilde{\tau}_k=m}]\,\left(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-h\widetilde{Y}_1}]\right)^{n-m} = \mathrm{e}^{-hk}\sum_{m=0}^{n}\mathbb{E}[1\!\!1_{\widetilde{\tau}_k=m}] = \mathrm{e}^{-hk}\,\mathbb{P}[\widetilde{\tau}_k \leq n].$$

En effet, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-h\widetilde{Y}_1}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mu}(k)\,\mathrm{e}^{-hk} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu(k) = 1$. On remarque alors que $\mathbb{E}[\widetilde{Y}_1] = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu(k)\,k\,\mathrm{e}^{hk} = \Lambda'(h) > 0$, car h est l'endroit où la transformée log-Laplace repasse au-dessus de 0. Donc, par la loi des grands nombres, $\widetilde{X}_n$ tend vers l'infini p.s., donc $\widetilde{\tau}_k$ est fini presque sûrement. Il s'ensuit, par passage à la limite dans l'expression précédente, que

$$\mathbb{P}[\tau_k < \infty] = \mathrm{e}^{-hk}\,\mathbb{P}[\widetilde{\tau}_k < \infty] = \mathrm{e}^{hk}.$$

Comme $\mathbb{P}[\tau_k < \infty] = \mathbb{P}[M \geq k]$, on conclut que M suit une loi géométrique :

$$\mathbb{P}[M = k] = (1-\mathrm{e}^{-h})\mathrm{e}^{-hk}.$$