3 Chapitre 4

Exercice 49 . Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de densité $f_{(X,Y)}$. Montrer que le support de $f_{(X,Y)}$ est le produit cartésien de deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$.

Exercice 50 . Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. Calculer la probabilité de l'événement $(U < V)$. Même question lorsque U suit la loi exponentielle de paramètre λ et V la loi exponentielle de paramètre μ.

Exercice 51 . Dans une galette des rois de rayon R, Mamie Markov a placé une fève circulaire de rayon r. Mickey coupe la galette en pointant le bout du couteau pile au centre. Quelle est la probabilité de couper la fève ?

Exercice 52 . Soit Θ un angle aléatoire de loi $\mathcal{U}_{[-\pi/2,\pi/2]}$. On pose $X = \cos\Theta$, $Y = \sin\Theta$. Les variables X et Y sont-elles corrélées ? Sont-elles indépendantes ?

Exercice 53 . On considère une variable X de loi de fonction de répartition $F(t)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\,, \\ t/2 & \text{si } 0 \leq t < 1\,, \\ 1 & \text{si } t \geq 1\,. \end{cases}$$

1) Rappeler le principe de simulation par inversion et écrire un algorithme de simulation par inversion pour cette loi.
2) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. On considère la variable Y définie par

$$Y = \begin{cases} U & \text{si } V \leq 1/2\,, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la fonction de répartition de Y. À quel type d'algorithme de simulation la construction de Y fait elle appel ?
3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 54 . Soit $c > 0$ et $f(x)$ une densité de probabilité définie par

$$f(x) = c\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathbf{1}_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer c.
2) Écrire $f(x)$ comme la somme pondérée de deux densités facilement simulables par inversion et décrire les deux algorithmes d'inversion.
3) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. Déduire de la question précédente que la loi de la variable aléatoire définie par

$$X = \begin{cases} \sqrt{U} & \text{si } V \leq 1/5, \\ U^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

admet $f(x)$ pour densité.
4) Déduire les valeurs de $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{E}[X^2]$.

Exercice 55 . On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} cye^{-x} & \text{si } (x,y) \in \Delta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où c est une constante positive et Δ est le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Delta = \{(x,y) \ : \ 0 < y < x\}.$$

1) Déterminer la constante c.
2) Déterminer les lois marginales des variables X et Y ainsi que la covariance du couple (X, Y).
3) Déterminer la loi conditionnelle de la variable Y sachant $X = x$. En déduire l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}[Y|X = x]$.
4) Soit X une variable de loi $G(3,1)$ et U une variable de loi $\mathcal{U}(0,1)$ indépendante de X. Déterminer la loi du couple $(X, \sqrt{U}X)$. En déduire un algorithme de simulation du couple de densité f.

Exercice 56 . On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité conjointe

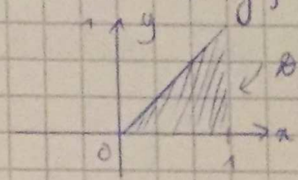
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = ce^{-x}\mathbf{1}_D(x,y),$$

où c est une constante positive et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < y < x\}$.

1) Déterminer la valeur de c, la loi de la variable Y, la densité de la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, et l'espérance conditionnelle $E[X|Y]$.
2) Écrire un algorithme de simulation d'un couple de densité f.
3) Calculer $E[XY]$.
4) On pose $Z = Y/X$. Démontrer que Z est de loi uniforme sur $(0,1)$.

Exo 50 On a U et V dans $\mathcal{U}(0,1)$ indépendantes

① $P(U<V) = P((U,V)\in\mathcal{D})$ avec $\mathcal{D} = \{(x,y)\in[0,1]^2 / x<y\}$



On a $f_{(U,V)}(x,y) = f_U(x) \times f_V(y)$ par indépendance

$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

D'où $P(U<V) = \iint_{\mathcal{D}} f_{(U,V)}(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^y dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$$

② Maintenant $U \in \exp(\lambda)$ et $V \in \mathrm{Exp}(\mu)$ indépendantes

Dès lors $f_{(U,V)}(x,y) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mu e^{-\mu y}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x,y)$

D'où $P(U<V) = \int_0^\infty \lambda\mu \left(\int_0^y e^{-\lambda x}\,dx\right) e^{-\mu y}\,dy$

$$= \mu\left(\int_0^\infty e^{-\mu y}\,dy - \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)y}\,dy\right)$$

$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Exo 55 On choisit (X,Y) tq $f_{(X,Y)}(x,y) = cye^{-x}\mathbb{1}_\Delta(x,y)$

avec $c>0$ et $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0<y<x\}$

① Par définition $\iint_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Ainsi $1 = \int_0^\infty \int_0^x cye^{-x}\,dx\,dy = c\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{2}x^2\,dx = c\,\frac{\Gamma(3)}{2} = c$

D'où $c = 1$

② On a $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$

$= \int_0^x cye^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,dx$

$= c\frac{x^2}{2}e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

Et $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$

$= \int_y^\infty cye^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\,dx$

$= cye^{-y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$

Ainsi $\mathrm{Cov} = E[XY] - E[X]E[Y]$

Avec $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \frac{c}{2}\int_0^\infty x^3e^{-x}\,dx = \frac{c}{2}\Gamma(4) = 3$

$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = c\int_0^\infty y^2e^{-y}\,dy = c\Gamma(3) = 2$

Et $E(XY) = \iint_{\mathbb{R}} xy f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty c\int_0^x xy^2e^{-x}\,dy\,dx = c\int_0^\infty \frac{x^4}{3}e^{-x}\,dx$

$= \frac{c}{3}\Gamma(5) = 8$

D'où $\mathrm{Cov}(X,Y) = 8 - 3\times 2 = 2$

③ On a $f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = 2\frac{y}{x^2}\mathbb{1}_\Delta(x,y)$

Ainsi $E(Y|X=x) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y^{X=x}(y)dy = 2\int_0^x y^2/x^2\, dy = \frac{2}{3}x$

④ On prend $U \in \mathcal{U}(0,1)$ et $X \in G(3,1)$ indépendants

$\left(G(a,\lambda) \Rightarrow \text{loi Gamma} \Rightarrow f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}(\lambda x)^{a-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\right)$

D'où $f_X(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

On pose $\varphi\begin{pmatrix}X\\U\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}Z\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\\sqrt{U}X\end{pmatrix}$

On a $\varphi^{-1}\begin{pmatrix}Z\\T\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}X\\U\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Z\\(T/Z)^2\end{pmatrix}$

Et $\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2T^2/Z^3 \\ 0 & 2T/Z^2 \end{vmatrix} = \frac{2T}{Z^2} > 0$

La formule du changement de variable donne $(\forall\, 0<t<z)$

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \frac{2t}{z^2} f_{(X,U)}(x(z,t),u(z,t)) = \frac{2t}{z^2}\frac{z^2}{2}e^{-z}\mathbb{1}_{[0,1]}\left(\left(t/z\right)^2\right)$$

Car $f_{(X,U)}(x,u) = f_X(x)f_U(u) = \frac{x^2}{2}e^{-x}\mathbb{1}_{[0,1]\times\mathbb{R}^+}(u,x)$ par indépendance

Et la loi marginale est

$$f_{(\sqrt{U}X)}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,T)}(z,t)dz = \int_t^{+\infty} te^{-z}dz = te^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Ex 54

① Par définition on a $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

d'où $\int_0^1 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{1}{c} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow c = 2/5$

② $f(x) = p f_1(x) + (1-p) f_2(x)$

Avec $f_1(x) = \alpha x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \longrightarrow \int_0^1 \alpha x = \frac{\alpha}{2} = 1 \Longrightarrow \alpha = 2$

$f_2(x) = \frac{\beta}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \Longrightarrow \int_0^1 \frac{\beta}{\sqrt{x}} dx = 2\beta = 1 \longrightarrow \beta = 1/2$

Alors $f(x) = \left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \times \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \frac{1}{5} f_1(x) + \frac{4}{5} f_2(x)$

On trouve $p = 1/5$

③ On a $F(x)(t) = \frac{1}{5} P(X \leq t \mid V \leq 1/5) + \frac{4}{5} P(X \leq t \mid V \geq 1/8)$

$= \frac{1}{5} P(U \leq t^2) + \frac{4}{5} P(U \leq \sqrt{t})$

$= \frac{1}{5} t^2 + \frac{4}{5} \sqrt{t}$ sur $[0,1]$

En dérivant $f_{(x)}(t) = \frac{1}{5} f_1(t) + \frac{4}{5} f_2(t) = f(t)$

④ Ainsi $X = \sqrt{U} \mathbb{1}_{V \leq 1/5} + U^2 \mathbb{1}_{V > 1/5}$

$E(X) = \frac{1}{5} E(\sqrt{U}) + \frac{4}{5} E(U^2) = \frac{1}{5} \int_0^1 \sqrt{t}\,dt + \frac{4}{5} \int_0^1 t^2\,dt = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = E\left(U \mathbb{1}_{V \leq 1/5} + U^4 \mathbb{1}_{V > 1/5}\right) = \frac{1}{10} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{5+8}{50} = \frac{13}{50}$

Exo 56 (X,Y) tq $f(x,y) = ce^{-x} \mathbb{1}_D(x,y)$

où $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < x \right\}$

① On a $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1 \iff c = 1$

. $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_D(x,y)\,dx = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$

$= e^{-y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) \implies$ loi exponentielle (1)

. $(\forall y > 0)$ $f_X^{Y=y}(x) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = e^{y-x} \mathbb{1}_{[y+\infty[}(x)$

. $(\forall y \geq 0)$ $E[X \mid Y=y] = \int_{\mathbb{R}} x f_X^{Y=y}(x)\,dx = e^y \int_y^{+\infty} xe^{-x} dx$

$= e^y \left(\left[-xe^{-x} \right]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} e^{-x} dx \right)$

$= y + 1$

②. Algo par inversion de Y

$F_Y(t) = (1 - e^{-t}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$

et $(\forall t \geq 0)(\forall u \in [0,1])$ $F_Y(t) = u \iff 1 - u = e^{-t}$

$\iff t = \ln(1/1-u)$

$U \leftarrow \text{Random}$

$Y \leftarrow \ln\left(\dfrac{1}{1-U}\right)$

- Algo d'inversion de $X|Y=y$

On a $F_X^{Y=y}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X^{Y=y}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} e^{y-x} \mathbb{1}_{[y,+\infty[}(x)\,dx$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq y \\ \int_y^t e^{y-x}\,dx = 1 - e^{y-t} & \text{si } t \geq y \end{cases}$$

$$= (1 - e^{y-t})\,\mathbb{1}_{[y+\infty[}(t)$$

Soit $t \geq y$, $u \in [0,1]$ $F_X^{Y=y}(t) = u \iff t = y + \ln\left(\frac{1}{1-u}\right)$

$U = \text{Random}$

$X|Y=y \leftarrow y + \ln\left(\frac{1}{1-U}\right)$

- Algorithme de simulation de (X,Y)

$U \leftarrow \text{Random}$

$V \leftarrow \text{Random}$

$Y \leftarrow \ln\left(\frac{1}{1-U}\right)$

$X \leftarrow Y + \ln\left(\frac{1}{1-V}\right)$

3 4 faits sur la leçon