Probabilités Appliquées : Cours Magistral 3

Cours

Définition 1 : Soit N une variable aléatoire à valeurs entières. N suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda > 0$ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Proposition 1 : Soit N une loi de Poisson de moyenne $\lambda > 0$.

$$E[N] = \lambda$$

Processus de Poisson : Un processus de Poisson est une famille croissante de variables aléatoires $(N_t)_{t \geq 0}$ à valeurs entières, dépendant du temps et vérifiant certaines propriétés :

(i) $N_0 = 0$

(ii) $\forall t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, ..., N_{t_1} - N_{t_0}$ sont indépendantes (on parle d'indépendance des accroissements)

(iii) Avec h proche de zéro, $P(\text{"une occurence dans } [t, t+h]\text{"}) = P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ et $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$

Ce processus modélise un comptage d'évènements indépendants qui surviennent de manière aléatoire dans un intervalle de temps donné (par exemple l'arrivée d'une personne dans une file d'attente). Plus λ est grand, plus on a de chance d'oberserver des occurences de l'évènement étudié. On déduit les propriétés suivantes :

(1) N_t suit une loi de Poisson de moyenne λt

(2) Soit T_1 le temps d'apparition de la première occurence du processus de Poisson, alors $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$. (i.e. T_1 suit une loi exponentielle et donc $P(T_1 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$)

Remarques : - Dans la proposition (iii), $o(h)$ représente une fonction négligeable devant h, au voisinage de 0 (i.e. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$).
- La loi géométrique est réservée à la modélisation de processus évoluant selon un "temps discret". La loi de Poisson modélise plutôt des processus "continus".

Exercices

Exercice 1 : Au foot, on suppose que le nombre de buts marqués dans une partie suit un processus de Poisson. Le nombre total de buts marqués dans une partie est en moyenne 2,4. Quelle est la loi du nombre de buts marqués à la mi-temps ? Sachant que le score est 1-0 à la mi-temps, quelle est la probabilité qu'il y ait 2 buts marqués à la fin du match ?

Soit T la durée totale d'un match de foot. On a $E[N_T] = T\lambda = 2,4$. La variable aléatoire $N_{\frac{T}{2}}$, modélisant le nombre de buts marqués à la première mi-temps, suit une loi de Poisson de moyenne $\frac{T\lambda}{2} = 1,2$.

$$P(N_T = 2|N_{\frac{T}{2}} = 1) = \frac{P(N_T=2, N_{\frac{T}{2}}=1)}{P(N_{\frac{T}{2}}=1)} = \frac{P(N_{\frac{T}{2}}=1, N_T - N_{\frac{T}{2}}=1)}{P(N_{\frac{T}{2}}=1)}$$

L'évènement $\{N_T - N_{\frac{T}{2}} = 1\}$ représente le nombre de buts marqués durant la deuxième mi-temps. Par indépendance des accroissements on a

$$P(N_T = 2|N_{\frac{T}{2}} = 1) = P(N_T - N_{\frac{T}{2}} = 1) = 1,2\,\mathrm{e}^{-1,2} \approx 0,36$$

Exercice 2 : On suppose qu'il passe en moyenne un cycliste toutes les trois minutes devant l'ENSIMAG. Quelle est la probabilité d'attendre plus de deux minutes avant de voir passer le premier cycliste ?

Soit T_1 le temps d'attente avant de voir le premier cycliste. On a $E[N_T] = 3\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$. Les évènement $\{T_1 > 2\}$ et $\{N_2 = 0\}$ sont équivalents. On a donc

$$P(T_1 > 2) = P(N_2 = 0) = \mathrm{e}^{-2\lambda} = \mathrm{e}^{\frac{-2}{3}} \approx 0,51$$

Exercice 3 : On suppose que la variable aléatoire N_t vérifie les hypothèses (i), (ii) et (iii) du cours. Soient $p_0(t) = P(N_t = 0)$ et $p_1(t) = P(N_t = 1)$. Montrer que $p_0(t)$ et $p_1(t)$ sont solutions d'équations différentielles.

$$p_0(t+h) = P(N_{t+h} = 0) = P(N_t = 0, N_{t+h} - N_t = 0) = P(N_t = 0)P(N_{t+h} - N_t = 0) = p_0(t)(1 - h\lambda + o(h))$$

$$\text{Donc } \lim_{h\to 0} \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = \lim_{h\to 0}(-\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h}) \Rightarrow p_0'(t) + \lambda p_0(t) = 0$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy en $x_0 = 0$, en effet $p_0(x_0) = 1$.

$$p_1(t+h) = P(\{N_t = 0, N_{t+h} - N_t = 1\} \cup \{N_t = 1, N_{t+h} - N_t = 0\})$$

$$\Leftrightarrow p_1(t+h) = P(N_t = 0)P(N_{t+h} - N_t = 1) + P(N_t = 1)P(N_{t+h} - N_t = 0)$$

$$\Leftrightarrow p_1(t+h) = p_0(t)(h\lambda + o(h)) + p_1(t)(1 - h\lambda + o(h))$$

$$\text{Donc } \lim_{h\to 0} \frac{p_1(t+h) - p_1(t)}{h} = p_1'(t) = \lambda(p_0(t) - p_1(t))$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy en $x_0 = 0$, en effet $p_1(x_0) = 0$.