TD7 Probabilités 1A

Lafarge Victor, Lin Pierre, Kone Madou

Exercice 1

Question 1

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$
$$= e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-t)^2}{2}}}_{\mathcal{N}(t,1)}$$
$$= e^{\frac{t^2}{2}}$$

Question 2

$$\phi'(t) = te^{\frac{t^2}{2}}$$
$$\phi''(t) = (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$Var(X) = \phi''(0) - \phi'(0) = 1$$

Question 3

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!2^n}$$

*Ainsi en derivant quatre fois, on obtient:

$$\phi^{(4)}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} (2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\frac{t^{2n-4}}{n!2^n}$$

*La somme evaluée en 0 est nulle sauf quand n prend la valeur 2. Donc , on a:

$$\phi^{(4)}(0) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{4 \times 2} = 3$$

De plus, $\mathbb{E}(X^4) = \phi^{(4)}(0) = 3$

Exercice 2 :

$$X = \nVdash_{(U<1/3)} V + \nVdash_{(U \geq 2/3)} (1+V)$$

Question 1 :

- Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var[X]$.

Calculer $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\nVdash_{(U<1/3)}V + \nVdash_{(U\geq 2/3)}(1+V)]$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\nVdash_{(U<1/3)}V] + \mathbb{E}[\nVdash_{(U\geq 2/3)}(1+V)]$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}\mathbb{E}[V] + \frac{1}{3}\mathbb{E}[(1+V)]$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2})$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{3}$$

Calculer $Var(X)$:

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$
$$Var(X) = \mathbb{E}[\nVdash_{(U<1/3)}V^2 + \nVdash_{(U\geq 2/3)}(1+V)^2]] - (\frac{2}{3})^2$$
$$Var(X) = \mathbb{E}[\nVdash_{(U<1/3)}]\ \mathbb{E}[V^2] + \mathbb{E}[\nVdash_{(U\geq 2/3)}]\ \mathbb{E}[(1+V)^2]] - \frac{4}{9}$$
$$Var(X) = \frac{1}{3}\mathbb{E}[V^2] + \frac{1}{3}\mathbb{E}[1+2V+V^2] - \frac{4}{9}$$
$$Var(X) = \frac{1}{3}\mathbb{E}[V^2] + \frac{1}{3}(1+\mathbb{E}[2V]+\mathbb{E}[V^2]) - \frac{4}{9}$$

$\mathbb{E}[V^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_V(x)dx$ avec $f_V(x) = 1$ (densité loi uniforme entre 0 et 1) $\mathbb{E}[V^2] = \int_0^1 x^2 dx$
$\mathbb{E}[V^2] = 1/3[x^3]_0^1$
$\mathbb{E}[V^2] = 1/3$

$$Var(X) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1+1+\frac{1}{3}) - (\frac{4}{9})$$
$$Var(X) = \frac{4}{9}$$

Question 2 :

- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

$$F(X) = P(X \leq x)$$

théoreme des probas total :

$$= P(X \leq x \mid U < \frac{1}{3}) + P(X \leq x \mid \frac{1}{3} \leq U < \frac{2}{3}) + P(X \leq x \mid \frac{2}{3} \leq U)$$

$$= \frac{1}{3}(P(V \leq x \mid U < \frac{1}{3}) + P(0 \leq x) + P(1+V \leq x))$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{3} \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 3 :

Question 1 :

Soit $t \in]1; e[$, on a :
$F(t) = P(X \leq t) = P(e^U \leq t) = P(U \leq \ln(t)) = \ln(t)$ car $\ln(t) \in]0; 1[$.

Comme $U \in]0; 1[$,
si $t \leq 1$, alors $F(t) = 0$ car $e^U > 1$.
si $t \geq e$, alors $F(t) = 1$ car $e^U < e$.

Soit $f(t) = F'(t) = \frac{1}{t}$ si $t \in]1; e[$, sinon $f(t) = 0$.
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_1^e \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^e = 1$.
De plus, f est positive sur $\mathbb{R}$ donc X admet une densité de loi f.

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
$= \int_1^e x(\frac{1}{x})dx = \int_1^e dx = [x]_1^e = e - 1$.

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$X^2 = e^{2U}$. Par des calculs similaires, on trouve pour $t \in]1; e^2[, F_{X^2}(t) = \ln(t)/2$. De plus, X^2 admet une densité de loi $f_{X^2}(t) = \frac{1}{2t}$.
Enfin, $E(X^2) = \int_1^{e^2} x(\frac{1}{2x})dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

Donc $Var(X) = \frac{-e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}$.

Question 2 :

Comme $e^{sU} > 0$ pour tout s,
$\phi(s) = E(e^{sU}) = \int_0^{+\infty} P(e^{sU} > t)dt = \int_0^{+\infty} P(U > \frac{\ln(t)}{s})dt$
$= \int_0^1 1dt + \int_1^{e^s} (1 - \frac{\ln(t)}{s})dt$
$= 1 + e^s - 1 - \frac{1}{s}\int_1^{e^s} \ln(t)dt$
$= e^s - [t\ln(t) - t]_1^{e^s} = \frac{e^s}{s} - \frac{1}{s}$.

$\phi'(\alpha) = \frac{1+e^\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2}$,
et $\phi'(\alpha) = E(Ue^{\alpha U})$.

$E(Y) = E(X^\alpha \ln(X)) = E(e^{\alpha U}U) = \phi'(\alpha) = \frac{1+e^\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2}$