Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Ordonnancement

Zoltán Szigeti

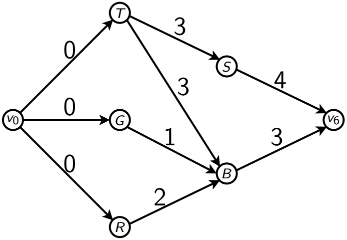
Ensimag, G-SCOP

Méthode potentiel-tâches

Définition

réseau potentiel-tâches $(G = (V, A), c)$ d'un problème d'ordonnancement:

1. $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ où
   1. $v_1, \ldots, v_n$ correspondent aux tâches $A_1, \ldots, A_n$,
   2. v_0 et v_{n+1} correspondent au début et à la fin du projet et,
2. $A = \{v_i v_j$: si contrainte A_j doit commencer après la fin de A_i existe$\}$
3. $c(v_i v_j)$ = durée de la tâche A_i.



Tâches	T	G	R	B	S
Durée	3	1	2	3	4
Prédécesseurs	–	–	–	T, G, R	T

Méthode potentiel-tâches

Théorème

Soit (G, c) le réseau potentiel-tâches d'un problème d'ordonnancement simple. Soient

1. π_i la date au plus tôt quand on peut commencer la tâche A_i,
2. η_i la date au plus tard quand il faut commencer la tâche A_i pour finir tout le projet en temps optimal,
3. t_i le coût maximum d'un (v_0, v_i)-chemin dans (G, c) et
4. t'_i le coût maximum d'un (v_i, v_{n+1})-chemin dans (G, c).

(a) G est sans circuit, v_0 est une racine de G et v_{n+1} est atteignable à partir de chaque sommet v_i.

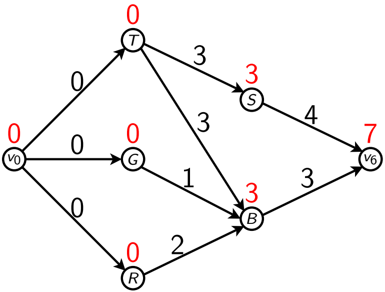
(b) $\pi_i = t_i \ \forall i$.

(c) $\eta_i = t_{n+1} - t'_i \ \forall i$.

Exemple

Solution de (a)

- Pour trouver la date au plus tôt π_i, on doit connaître
- le coût t_i du plus long chemin de v_0 à chaque sommet v_i,
- on exécute donc l'algorithme de Bellman dans (G, c)
  - avec max au lieu de min dans la formule.

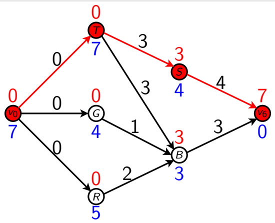


La durée minimale de la réalisation de ce projet est 7.

Exemple

Solution de (b)

- Pour trouver les tâches critiques ($\pi_i = \eta_i$),
- on a besoin des dates au plus tard η_i et pour cela on doit connaître
- le coût t'_i du plus long chemin de chaque sommet v_i à v_{n+1},
- on exécute donc l'algorithme de Bellman dans (G, c)
  - avec max au lieu de min dans la formule et
  - arc sortant au lieu d'arc entrant aux Etapes 2 et 3.



Tâches critiques $\Longleftrightarrow$
$t_i + t'_i = \pi_i + (t_{v_6} - \eta_i) = t_{v_6} = 7 \Longleftrightarrow$
v_0, T, S, v_6.

EXO 6.3

Énoncé

On considère un problème d'ordonnancement simple comportant 5 tâches A, B, C, D, E. Pour chacune des tâches on donne sa durée et la liste des tâches qui doivent la précéder.

Tâches	A	B	C	D	E
Durée	10	2	5	3	6
Prédécesseurs	–	–	A, B, D	–	A

(a) Donner la formulation potentiel-tâches de ce problème.

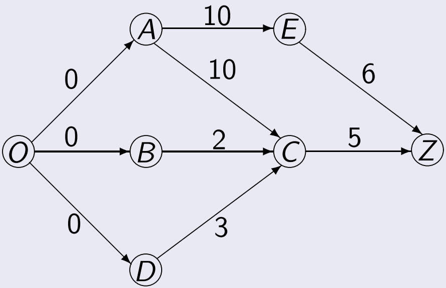
(b) Quelle est la durée minimale de réalisation de ce projet?

(c) Donner la liste de tâches critiques et celle de chemins critiques (plus long (v_0, v_{n+1})-chemin).

EXO 6.3

Solution de (a)

La formulation potentiel-tâches :



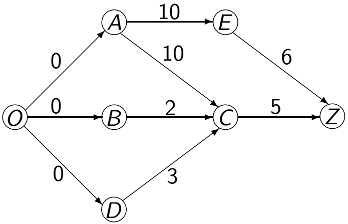
EXO 6.3

Solution de (b)

En appliquant l'algorithme de Bellman (avec max) on a

$$
\begin{array}{lllll}
\pi(O) & = & t(O) & = & 0, \\
\pi(A) & = & t(A) & = & 0, \\
\pi(B) & = & t(B) & = & 0, \\
\pi(D) & = & t(D) & = & 0,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\pi(E) & = & t(E) & = & 10, \\
\pi(C) & = & t(C) & = & 10, \\
\pi(Z) & = & t(Z) & = & 16,
\end{array}
$$

c'est-à-dire le coût maximum d'un chemin de O à Z est 16, donc la durée minimale de la réalisation de ce projet est 16.



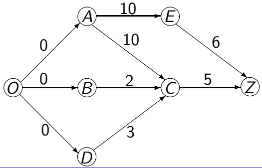
EXO 6.3

Solution de (c)

En appliquant l'algorithme de Bellman (avec max et arc sortant) on a

$$\begin{array}{rclrclclclcl}
t'(Z) & = & 0, & & & & & & & & & \\
t'(C) & = & 5, & \eta(C) & = & \pi(Z) - t'(C) & = & 16-5 & = & 11 & \neq & \pi(C) \\
t'(E) & = & 6, & \eta(E) & = & \pi(Z) - t'(E) & = & 16-6 & = & 10 & = & \pi(E) \\
t'(D) & = & 8, & \eta(D) & = & \pi(Z) - t'(D) & = & 16-8 & = & 8 & \neq & \pi(D) \\
t'(B) & = & 7, & \eta(B) & = & \pi(Z) - t'(B) & = & 16-7 & = & 9 & \neq & \pi(B) \\
t'(A) & = & 16, & \eta(A) & = & \pi(Z) - t'(A) & = & 16-16 & = & 0 & = & \pi(A)
\end{array}$$

Les tâches critiques sont ceux pour lesquelles $\pi = \eta$, donc les tâches A, E.
Il y a un seul chemin critique O, A, E, Z.



EXO 6.4

Énoncé

On considère un problème d'ordonnancement simple comportant 9 tâches $A, B, \ldots, H$ et I. Pour chacune des tâches on donne sa durée et la liste des tâches qui doivent la précéder.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Durée	8	9	10	8	6	7	5	6	7
Prédécesseurs	–	–	–	A, B, C	B, C	C	D	D, E, F	F

(a) Donner la formulation potentiels-tâches de ce problème.

(b) Quelle est la durée minimale de réalisation de ce projet?

(c) Donner la liste des tâches critiques et celle des chemins critiques.

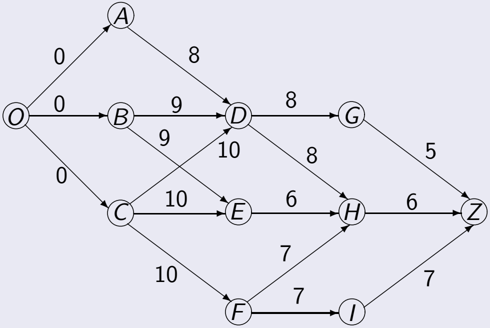
(d) Si on pouvait diminuer la durée d'une tâche, laquelle faudrait-il choisir pour diminuer la durée totale du projet ?

EXO 6.4

Solution de (a)

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Durée	8	9	10	8	6	7	5	6	7
Prédécesseurs	–	–	–	A, B, C	B, C	C	D	D, E, F	F

La formulation potentiel-tâches :



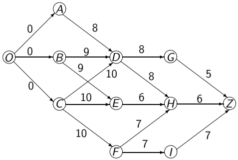
EXO 6.4

Solution de (b)

En appliquant l'algorithme de Bellman (avec max) on a

$$\begin{aligned} \pi(O) &= t(O) = 0, & \pi(F) &= t(F) = 10, \\ \pi(A) &= t(A) = 0, & \pi(G) &= t(G) = 18, \\ \pi(B) &= t(B) = 0, & \pi(H) &= t(H) = 18, \\ \pi(C) &= t(C) = 0, & \pi(I) &= t(I) = 17, \\ \pi(D) &= t(D) = 10, & \pi(Z) &= t(Z) = 24, \\ \pi(E) &= t(E) = 10, \end{aligned}$$

c'est-à-dire le coût maximum d'un chemin de O à Z est 24, donc la durée minimale de la réalisation de ce projet est 24.



EXO 6.4

Solution de (c)

En appliquant l'algorithme de Bellman (avec max et arc sortant) on a

$$\begin{array}{rcrlcccccccc}
t'(Z) & = & 0, & & & & & & & & & \\
t'(I) & = & 7, & \eta(I) & = & \pi(Z)-t'(I) & = & 24-7 & = & 17 & = & \pi(I) \\
t'(H) & = & 6, & \eta(H) & = & \pi(Z)-t'(H) & = & 24-6 & = & 18 & = & \pi(H) \\
t'(G) & = & 5, & \eta(G) & = & \pi(Z)-t'(G) & = & 24-5 & = & 19 & \neq & \pi(G) \\
t'(F) & = & 14, & \eta(F) & = & \pi(Z)-t'(F) & = & 24-14 & = & 10 & = & \pi(F) \\
t'(E) & = & 12, & \eta(E) & = & \pi(Z)-t'(E) & = & 24-12 & = & 12 & \neq & \pi(E) \\
t'(D) & = & 14, & \eta(D) & = & \pi(Z)-t'(D) & = & 24-14 & = & 10 & = & \pi(D) \\
t'(C) & = & 24, & \eta(C) & = & \pi(Z)-t'(C) & = & 24-24 & = & 0 & = & \pi(C) \\
t'(B) & = & 23, & \eta(B) & = & \pi(Z)-t'(B) & = & 24-23 & = & 1 & \neq & \pi(B) \\
t'(A) & = & 22, & \eta(A) & = & \pi(Z)-t'(A) & = & 24-22 & = & 2 & \neq & \pi(A)
\end{array}$$

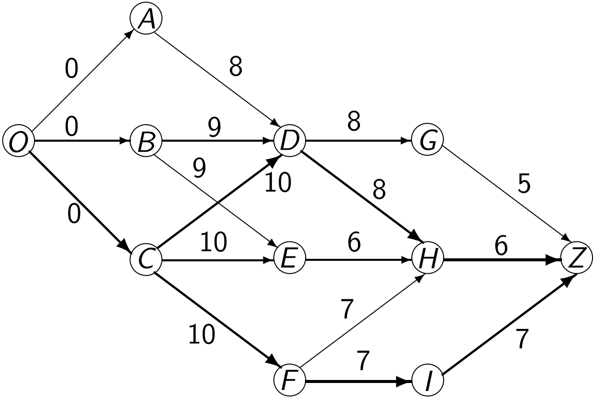
Les tâches critiques sont ceux pour lesquelles $\pi = \eta$, donc les tâches C, D, F, H et I. Il y a deux chemins critiques O, C, D, H, Z et O, C, F, I, Z.

Notons que le chemin O, C, F, H, Z n'est pas critique bien que tous ces sommets soient critiques.

EXO 6.4

Solution de (d)

Il faut choisir la tâche C car c'est elle qui se trouve sur les deux chemins critiques O, C, D, H, Z et O, C, F, I, Z.



EXO 6.5

Énoncé

On a un projet complexe avec les tâches A, B, C, D et E. Pour certaines tâches, il est possible de réduire la durée normalement prévue en lui affectant des moyens supplémentaires.

Tâche	A	B	C	D	E
Durée normale	7	4	5	9	8
Durée accélérée minimale	5	1	4	7	7
Coût unitaire de réduction	9	6	8	10	2
Prédécesseurs	-	A	B,D	-	A

Le coût unitaire de réduction est le coût pour chaque unité de durée en moins par rapport à la durée normale. Ainsi, pour la tâche B, si on veut une durée de 2 (au lieu de 4), on paye 12.

EXO 6.5

Énoncé

Tâche	A	B	C	D	E
Durée normale	7	4	5	9	8
Durée accélérée minimale	5	1	4	7	7
Coût unitaire de réduction	9	6	8	10	2
Prédécesseurs	-	A	B,D	-	A

(a) Quelle est la durée minimale d'exécution du projet avec les temps normalement prévus pour chaque tâche ?

(b) Quelle est la durée minimale d'exécution du projet avec les plus petites durées accélérées pour chaque tâche ? Quel est le coût total consacré à cette diminution ?

(c) Quel est le budget minimum nécessaire pour réduire la durée du projet d'un jour ?

(d) Est-ce que la méthode utilisée à la question précédente fonctionne pour diminuer de deux jours ?

EXO 6.5

Solution

Tâche	A	B	C	D	E
Durée normale	7	4	5	9	8
Durée accélérée minimale	5	1	4	7	7
Coût unitaire de réduction	9	6	8	10	2
Prédécesseurs	-	A	B,D	-	A

(a) On calcule la longueur d'un plus long chemin de début à fin dans le réseau potentiel-tâches et ainsi on obtient que la durée minimale d'exécution du projet est 16 jours.

(b) Idem, avec les durées accélérées. La longueur d'un plus long chemin de début à fin est alors 12 qui est la durée minimale d'exécution du projet. Le coût total consacré à cette diminution est
$2x9 + 3x6 + 1x8 + 2x10 + 1x2 = 66$ mais on peut arriver à 12 avec
$2x9 + 1x6 + 1x8 + 1x10 + 1x2 = 44$.

EXO 6.5

Solution

Tâche	A	B	C	D	E
Durée normale	7	4	5	9	8
Durée accélérée minimale	5	1	4	7	7
Coût unitaire de réduction	9	6	8	10	2
Prédécesseurs	-	A	B,D	-	A

(c) Il faut réduire d'un jour la durée d'une tâche qui se trouve sur l'unique chemin critique début, A, B, C, fin. Or la tâche B est de coût unitaire minimum parmi les tâches critiques. Le coût de la réduction est 6.

(d) Après avoir réduit la durée de B d'un jour on obtient un réseau dont la longueur d'un plus long chemin de début à fin est 15.
Pour diminuer la durée du projet d'un jour de plus, il faut réduire d'un jour la durée d'une ou deux tâches qui touchent les deux chemins critiques début, A, B, C, fin et début, A, E, fin, et dont le coût total est minimum. Il faut choisir B et E puisque $6 < 8$ et $6 + 2 < 9$.