Examen 2 Session 1 - Année 2016/2017 - Corrigé

Exercice 1.

1. Voir le cours
2. On remarque d'abord que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{(n+\frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   Comme l'ensemble $\{(n+\frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ est de mesure nulle, car dénombrable, on en déduit que la suite des fonctions u_n converge simplement vers la fonction nulle presque partout sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+, |u_n(x)| \leq e^{-x}$ et la fonction $x \mapsto e^{-x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. D'après le théorème de convergence dominée,
   $$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^1} = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |u_n(x)|dx = \int_0^\infty 0 \ dx = 0. \tag{1}$$
   Donc la suite u_n converge dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ vers la fonction nulle.

Exercice 2.

1. Voir le cours.
2. i On pose $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et on remarque que $g \in L^1(\mathbb{R})$. D'après la définition du produit de convolution, on obtient que (1) est équivalent à l'équation d'inconnu f suivante:
   $$f * g(x) = \frac{1}{4} g(\frac{x}{2}). \tag{2}$$
   En remarquant que cela a déjà été calculé en TD, la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-a|x|}$ est :
   $$\mathcal{F}(x \mapsto e^{-a|x|})(\nu) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}. \tag{3}$$
   Utilisant la formule de dilatation et de la transformée de Fourier inverse, on a la transformé de Fourier de la fonction g:
   $$\hat{g}(\nu) = \pi e^{-2\pi|\nu|} \tag{4}$$
   Utilisant ce résultat, la formule de dilatation et la relation reliant le produit de convolution et la transformée de Fourier, on obtient que,
   $$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2} e^{-2\pi|\nu|}. \tag{5}$$
   ii En inversant la relation (5) on obtient une solution de l'équation (1) dans l'énoncé:
   $$f(x) = \frac{1}{2\pi(1+x^2)}. \tag{6}$$
   On a bien $f \in L^1(\mathbb{R})$ et solution de (1).

Exercice 3.

1. Voir le cours

2. La fonction f peut s'écrire dans la forme $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) - x^2\chi_{[-1,1]}(x)$, ici, χ désigne la fonction caractéristique. D'après la question précédente, on a ,
$$\widehat{f}(\nu) = \widehat{\chi_{[-1,1]}}(\nu) + \frac{1}{4\pi^2}\frac{d^2}{d\nu^2}\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\nu) \tag{7}$$
On calcule ensuite la transformée de Fourier de la fonction $\chi_[- 1, 1]$ à partir de la définition:
$$\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\nu) = \frac{\sin(2\pi\nu)}{\pi\nu}. \tag{8}$$
Puis, on utilise (7) pour obtenir la transformée de Fourier de f :
$$\widehat{f}(\nu) = -\frac{\cos(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} + \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi^3\nu^3}. \tag{9}$$
! Attention aux fautes d'énoncé, $f(x) = 1 - x^2$ pour $|x| \leq 1$, et c'est du π^3 au lieu de π^2 au numérateur de la deuxième fraction dans (9).

3. On définit l'intégrale,
$$I := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u\cos u - \sin u}{u^3}\right)\cos(ux)du. \tag{10}$$
En effectuant le changement de variable $u = 2\pi\nu$, on a:
$$\begin{aligned} I &= -\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{\cos(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} + \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi^3\nu^3}\right)\cos(2\pi\nu x)d\nu \\ &= -\frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{\cos(2\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} + \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi^3\nu^3}\right)(e^{2\pi i\nu x} + e^{-2\pi i\nu x}))d\nu \\ &= -\frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)\ (e^{2\pi i\nu x} + e^{-2\pi i\nu x})d\nu \\ &= -\frac{\pi}{4}(\bar{\mathcal{F}}\widehat{f}(x) + \mathcal{F}\widehat{f}(x)). \end{aligned} \tag{11}$$
Comme f est une fonction réelle paire, on en déduit que:
$$I = -\frac{\pi}{2}f(x). \tag{12}$$

Exercice 4.

1. On définit la fonction à deux variables $g(x,t) := e^{-t^2}\cos(tx)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|g(x,t)| \leq e^{-t^2}, \tag{13}$$
où la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, ce qui montre que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Or, à $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, via l'hypothèse de domination (13), la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. A $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est dérivable avec la dérivée
$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = -te^{-t^2}\sin(tx). \tag{14}$$
Ainsi,
$$|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)| \leq te^{-t^2}, \tag{15}$$
avec $t \mapsto te^{-t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
$$f'(x) = -\int_0^\infty te^{-t^2}\sin(tx)dt. \tag{16}$$

3. On effectue une intégration par parties sur (16), en posant $u(t) = \sin(tx)$ et $v'(t) = -te^{-t^2}$, on en déduit que,
$$f'(x) = -\frac{x}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)dt = -\frac{x}{2}f(x). \tag{17}$$
D'où, f vérifie l'équation différentielle suivante,
$$y' + \frac{x}{2}y = 0. \tag{18}$$
L'équation (18) possède des solutions de la forme $x \mapsto Ae^{-\frac{x^2}{4}}$ avec $A \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, on a
$$A = f(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{19}$$
Donc, la fonction f est donnée par :
$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}. \tag{20}$$

Exercice 5.

1. La linéarité de P vient de celle de l'intégrale. Soit $f \in E$, $x \in [0,1]$, on a l'estimation:
$$\begin{aligned} |P(f)(x)| &= \left|\int_0^x f(t)p(t)dt\right| \\ &\leq \int_0^x |f(t)|\ |p(t)|dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^x |p(t)|dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |p(t)|dt, \end{aligned} \tag{21}$$
qui implique que
$$\|P(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |p(t)|dt. \tag{22}$$
D'après le théorème de caractérisation des applications linéaires continues, P est continue de E dans E.

2. i C'est le résultat direct de (22).

   ii On choisit $f = 1_{[0,1]} \in E$, on a immédiatement $\|f\|_\infty = 1$. Par positivité de la fonction p, on peut calculer la norme $\|P(f)\|_\infty$,

$$\begin{aligned}\|P(f)\|_\infty &= \sup_{[0,1]} |P(f)(x)| = \sup_{[0,1]} \left| \int_0^x f(t)p(t)dt \right| \\ &= \sup_{[0,1]} \int_0^x f(t)p(t)dt = \int_0^1 f(t)p(t)dt \\ &= \int_0^1 p(t)dt = \int_0^1 |p(t)|dt. \end{aligned} \tag{23}$$

   On a donc $|||P||| \geq \int_0^1 |p(t)|dt$, en combinant avec la question précédente, on conclut que $|||P||| = \int_0^1 |p(t)|dt$.

   iii Par la continuité de p, et parce que le terme $1+n^2p(t)^2$ ne s'annule pas sur $[0,1]$, on a la continuité de la fonction f_n, c'est-à-dire $f_n \in E$. On peut aussi obtenir facilement que $\forall t \in [0,1]$, $|f_n(t)| = \frac{|np(t)|}{\sqrt{1+n^2p(t)^2}} \leq \frac{|np(t)|}{\sqrt{n^2p(t)^2}} = 1$, i.e.

$$\|f_n\|_\infty \leq 1. \tag{24}$$

   Soit $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} P(f_n)(x) &= \int_0^x \frac{np(t)^2}{\sqrt{1+n^2p(t)^2}}dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{n} \frac{n^2p(t)^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+n^2p(t)^2}}dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^x \sqrt{1+n^2p(t)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+n^2p(t)^2}}dt \end{aligned} \tag{25}$$

   Vu la positivité de l'intégrant dans (25), on a

$$\begin{aligned} \|P(f_n)\|_\infty &= \frac{1}{n} \int_0^1 \sqrt{1+n^2p(t)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+n^2p(t)^2}}dt \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^1 n|p(t)| - 1dt \\ &\geq \int_0^1 |p(t)|dt - \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{26}$$

   Utilisant (24), on a ainsi construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments E telle que

$$\frac{\|P(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} \geq \int_0^1 |p(t)|dt - \frac{1}{n}. \tag{27}$$

   En faisant $n \to \infty$, on a $|||P||| \geq \int_0^1 |p(t)|dt$. En combinant avec le résultat de (2-i), on a

$$|||P||| = \int_0^1 |p(t)|dt \tag{28}$$

Exercice 6.

1. Soit $f \in E$, Tf est dérivables avec la dérivée $(Tf)'(x) = f(x - x^2)$ qui est continue. Donc, $Tf \in E$, i.e. T est de E dans E.

2. $$(T \circ T)f(x) = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u - u^2)dudt. \tag{29}$$
$$((T \circ T)f)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} f(t - t^2)dt. \tag{30}$$

3. Soient $f, g \in E$, calculant $N((T \circ T)f - (T \circ T)g)$:
$$\begin{aligned}
&N((T \circ T)f - (T \circ T)g)\\
&= \|(T \circ T)f - (T \circ T)g\|_\infty + \|((T \circ T)f)' - ((T \circ T)g)'\|_\infty\\
&= \sup_{[0,1]} |\int_0^x \int_0^{t-t^2} (f - g)(u - u^2)dudt| + \sup_{[0,1]} |\int_0^{x-x^2} (f - g)(t - t^2)dt|\\
&\leq \|f - g\|_\infty(\sup_{[0,1]} \int_0^x |t - t^2|dt + \sup_{[0,1]} |x - x^2|)\\
&\leq \|f - g\|_\infty(\frac{1}{6} + \frac{1}{2})\\
&\leq \frac{2}{3}\|f - g\|_\infty\\
&\leq \frac{2}{3}N(f - g).
\end{aligned} \tag{31}$$
Comme $\frac{2}{3} < 1$, l'application $T \circ T$ est contractante.

4. Comme E est de Banach et $T \circ T$ est contractante, d'après le théorème du point fixe, l'application $T \circ T$ admet un unique point fixe dans E. On note ce point fixe par f_0, soit
$$(T \circ T)f_0 = f_0 \in E. \tag{32}$$
En appliquant T sur cette égalité, on a
$$(T \circ T)(Tf_0) = Tf_0. \tag{33}$$
Donc, Tf_0 est aussi un point fixe de $T \circ T$. Par l'unicité du point fixe, on a
$$Tf_0 = f_0. \tag{34}$$
D'où, T admet un unique point fixe dans E.

5. En intégrant l'équation différentielle et via la condition au 0, on a
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 1 + \int_0^x f(t - t^2)dt = Tf(x). \tag{35}$$
D'après les questions précédentes, cette équation admet une unique solution dans $\mathcal{C}^1([0, 1])$, qui est le point fixe de l'opérateur T.