Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Modèles classiques

Zoltán Szigeti

Laboratoire G-SCOP
INP Grenoble, France

Programmation Linéaire

Plan

1. Modélisation,
2. Résolution : L'Algorithme du Simplexe,
3. Dualité,
4. Application : Jeux de stratégie.

C'est quoi la Programmation Linéaire ?

1. Modéliser des problèmes par des Programmes Linéaires,
2. Résoudre ces Programmes Linéaires.

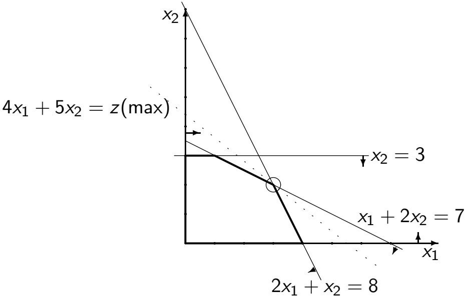
C'est quoi un Programme Linéaire ?

1. Optimiser une Fonction Linéaire sur un domaine défini par des Contraintes Linéaires.

Programme Linéaire

Exemple, Définitions

$2x_1 + 1x_2 \leq 8$		
$1x_1 + 2x_2 \leq 7$	Contraintes d'inégalités	Solution
$x_2 \leq 3$		
$x_1,\ x_2 \geq 0$	Contraintes de non-négativité	Solution réalisable
$4x_1 + 5x_2 = z(\max)$	Fonction Objectif	Solution optimale

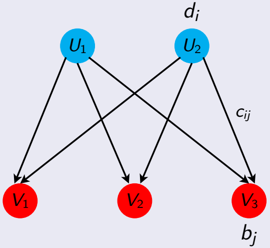


Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de production

Disponibilité
Matières premières

Contenu

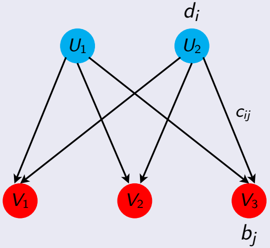
Produits
Bénéfice

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de transport

Disponibilité
Usines

Coût de transport

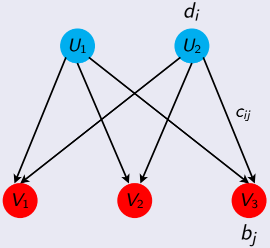
Ateliers
Besoin

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème d'alimentation

Dépense
Aliments

Contenu

Vitamines
Besoin

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et
  3. **19** cartes avec des communications prépayées.
- Après une étude de marché, il sait très bien que, dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients deux coffrets qui vont lui rapporter des profits nets :
  1. Coffret 1 : **1** téléphone, **0** kit et **2** cartes, avec un profit net de **7**€.
  2. Coffret 2 : **1** téléphone, **1** kit et **3** cartes, avec un profit net de **9**€.
- Il est assuré de pouvoir vendre tranquillement n'importe quelle quantité de ses offres dans la limite du stock disponible.
- Quelle quantité de chaque offre notre vendeur doit-il préparer pour maximiser son profit net?

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	??

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
   1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
   2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,
   3. on a besoin de $2x_1 + 3x_2$ cartes mais il y en a seulement 19.
4. Contraintes de non-négativité : $x_1, x_2 \geq 0$.
5. Fonction Objectif : maximiser le profit : $7x_1 + 9x_2 = z(\max)$.

Problème de production

Programme linéaire

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\
x_2 &\leq 4 && \text{Contraintes d'inégalités} \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 19 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0 && \text{Contraintes de non-négativité} \\
7x_1 + 9x_2 &= z(\max) && \text{Fonction Objectif}
\end{aligned}
$$

Programme linéaire sous forme générale

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b && \text{Contraintes d'inégalités} \\
x &\geq 0 && \text{Contraintes de non-négativité} \\
c^T x &= z(\max) && \text{Fonction Objectif}
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

P	C I	C II	S
T	1	1	8
K	0	1	4
C	2	3	19
P	7	9	?

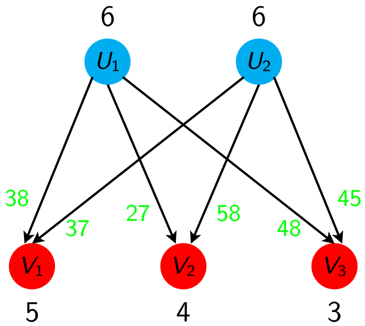
Problème de transport

- Un modèle de voiture est assemblé dans un des trois ateliers situés dans les villes V_1, V_2 et V_3. Les besoins hebdomadaires des trois ateliers d'assemblage sont au moins **5**, **4** et **3** moteurs.
- Le moteur qui équipe ce modèle est fourni par une des deux usines situées dans les villes U_1 et U_2. Chaque usine peut fournir au plus **6** moteurs.
- Le seul souci pour la direction est de minimiser le coût total de transport des moteurs entre les deux lieux de fabrication et les trois ateliers d'assemblage.
- Le tableau suivant donne les coûts unitaires (par moteur transporté) pour tous les trajets envisageables.

	V_1	V_2	V_3
U_1	**38**	**27**	**48**
U_2	**37**	**58**	**45**

- Comment minimiser le coût total de transport en respectant l'offre et la demande ?

Problème de transport



Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
   1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
   2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
   1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
   2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,
   3. $x_{13} + x_{23}$ moteurs à l'atelier 3 mais il en faut 3,
5. Contraintes de non-négativité : $x_{ij} \geq 0$.
6. Fonction Objectif : minimiser le coût des transports :
   $38x_{11} + 27x_{12} + 48x_{13} + 37x_{21} + 58x_{22} + 45x_{23} = w(\min)$.

Problème de transport

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & \leq 6 \\
 & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & \leq 6 \\
x_{11} + & & & x_{21} & & & \geq 5 \\
 & x_{12} + & & & x_{22} & & \geq 4 \\
 & & x_{13} + & & & x_{23} & \geq 3 \\
 & & & & & x_{ij} & \geq 0 \\
38x_{11} + & 27x_{12} + & 48x_{13} + & 37x_{21} + & 58x_{22} + & 45x_{23} & = w(\min)
\end{array}
$$

Problème de transport

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-x_{11} - & x_{12} - & x_{13} & & & & \geq -6 \\
& & & -x_{21} - & x_{22} - & x_{23} & \geq -6 \\
x_{11} + & & & x_{21} & & & \geq 5 \\
& x_{12} + & & & x_{22} & & \geq 4 \\
& & x_{13} + & & & x_{23} & \geq 3 \\
& & & & & x_{ij} & \geq 0 \\
38x_{11} + & 27x_{12} + & 48x_{13} + & 37x_{21} + & 58x_{22} + & 45x_{23} & = w(\min)
\end{array}
$$

Problème de transport

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-x_{11} - & x_{12} - & x_{13} & & & & = -6 \\
 & & & -x_{21} - & x_{22} - & x_{23} & = -6 \\
x_{11} + & & & x_{21} & & & = 5 \\
 & x_{12} + & & & x_{22} & & = 4 \\
 & & x_{13} + & & & x_{23} & = 3 \\
 & & & & & x_{ij} & \geq 0 \\
38x_{11} + & 27x_{12} + & 48x_{13} + & 37x_{21} + & 58x_{22} + & 45x_{23} & = w(\min)
\end{array}
$$

Problème de transport

Programme linéaire sous forme générale

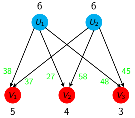
$$\begin{array}{rl} Ax = b & \text{Contraintes d'inégalités} \\ x \geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\ c^T x = w(\min) & \text{Fonction Objectif} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 38 & 27 & 48 & 37 & 58 & 45 \end{pmatrix}.$$

Remarque

A est la matrice d'incidence du graphe biparti orienté.



Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - $\mathbf{9}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{19}$ unités de vitamine C par jour.
- On trouve sur le marché six produits (numérotés de 1 à 6) riches en ces vitamines. Un kilogramme de chacun de ces produits contient respectivement
  - $\mathbf{1, 0, 2, 2, 1, 2}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{0, 1, 3, 1, 3, 2}$ unités de vitamine C et
  - coûte respectivement $\mathbf{35, 30, 58, 50, 27, 22}$€.
- Quels produits faut-il acheter, et en quelles quantités, pour se nourrir en minimisant les dépenses?

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
    1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,
    2. $x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6$ unités de vitamine C mais il en faut 19,
4. Contraintes de non-négativité : $x_i \geq 0$.
5. Fonction Objectif : minimiser la dépense :
   $35x_1 + 30x_2 + 58x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 = w(\text{min})$.

Problème d'alimentation

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
1x_1 + & & + \ 2x_3 + & 2x_4 + & 1x_5 + & 2x_6 & \geq 9 \\
 & 1x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 + & 3x_5 + & 2x_6 & \geq 19 \\
 & & & & & x_i & \geq 0 \\
\end{array}
$$

$$35x_1 + 30x_2 + 58x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 = w(\min)$$

Programme linéaire sous forme générale

$$
\begin{aligned}
Ax &\geq b \\
x &\geq 0 \\
c^T x &= w(\min)
\end{aligned}
$$

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}, c^T = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 58 & 50 & 27 & 22 \end{pmatrix}.$$

Formes Générales

Définition

Forme canonique

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T x &= z(\max) \end{aligned}$$

Forme standard

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T x &= z(\max) \end{aligned}$$

Théorème

Tout programme linéaire admet

1. une forme canonique et
2. une forme standard.

Démonstration (pour la forme canonique)

$$
\begin{array}{ccc}
a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\
x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0,\ x_i = x_i' - x_i''. \\
c^T \cdot x = w(\min) & \Longrightarrow & (-c)^T \cdot x = z(\max).
\end{array}
$$

Démonstration (pour la forme standard)

$$
a_i \cdot x \leq b_i \quad \Longrightarrow \quad a_i \cdot x + y_i = b_i,\ y_i \geq 0.
$$