Chapter 7

Théorème de Cameron-Martin

7.1 Changement de probabilités pour la loi des v.a.r.

Définition 7.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probailité. On dira qu'une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est **équivalemente** à /mathbbP si et seulement si*

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{Q}(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$$

On note alors $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Exemples : Sur $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ définies par : $\forall a < b$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(]a,b]) &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \text{ et} \\ \mathbb{Q}(]a,b]) &= \int_a^b \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}\, dx \end{aligned}$$

sont équivalentes.
Par contre elles ne sont pas équivalentes à $\widetilde{\mathbb{Q}}$ définie par

$$\widetilde{\mathbb{Q}}(]a,b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx$$

car par exemple $\widetilde{\mathbb{Q}}(]-4,-2]) = 0$ mais $\mathbb{P}(]-4,-2]) > 0$ (et $\mathbb{Q}(]-4,-2]) > 0$).

Remarque : Si l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est filtré par $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ avec $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ et si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ alors $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ $\forall t \in [0,T]$.

Définition 7.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on dira qu'une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définit un **changement de probabilité** par rapport à $\mathbb{P}$ s'il existe une v.a. L, $\mathcal{F}$ mesurable telle que*

$$\forall A \in \mathcal{F}\ :\ \mathbb{Q}(A) = \int_A L\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_A L)$$

*La v.a. L est appelée **densité** (où dérivée de Radon-Nykodym) de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$. On note alors*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L \text{ ou } d\mathbb{Q} = L\, d\mathbb{P}$$

Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ alors L est une v.a. strictement positive $\mathbb{P}$-p.s. et on a

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = L^{-1}$$

De plus pour toute v.a. $\mathbb{Q}$-intégrable Z on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z) = \int_\Omega Z\, d\mathbb{Q} = \int_\Omega LZ\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(LZ).$$

Remarques :

1. En prenant $A = \Omega$ on obtient $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L) = 1$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(L^{-1}) = 1$ si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, d'où le nom de densités de probabilité.
2. Lorsque $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ en posant $A = \{L \leq 0\}$ on a $A \in \mathcal{F}$ et
$$0 \leq \mathbb{Q}(L \leq 0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{L\leq 0} L) \leq 0$$
d'où $\mathbb{Q}(L \leq 0) = 0$ et comme $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ cela implique $\mathbb{P}(L \leq 0) = 0$ ou $\mathbb{Q}(L > 0) = 1$ ce qui explique la seconde partie de la définition ci-dessus.

7.1.1 Changement de moyenne et de moyenne et de variance d'une v.a. Gaussienne

Pour les v.a. Gaussiennes il existe des changements de probabilités qui conserve le caractère Gaussien et ne change que les paramètres.

Proposition 7.3. *Changement de moyenne.*
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sous la probabilité $\mathbb{P}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose
$$L = L_\lambda(X) = \exp\left(\lambda(X - \mu) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)$$
La v.a. L est une v.a. strictement positive et d'espérance 1 sous $\mathbb{P}$ qui définit une nouvelle probabilité équivalente $\mathbb{Q}$ sous laquelle X suit la loi $\mathcal{N}(\mu + \lambda\sigma^2, \sigma^2)$.

Preuve. Bien évidement $L > 0$ et on a
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L) = \exp\left(-\lambda\mu - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\lambda X)]$$
où $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\lambda X)] = \exp\left(\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)$ est la fonction génératrice des moments de X calculée au point λ. Donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L) = 1$. Sous $\mathbb{Q}$ la v.a. X admet pour densité
$$\exp\left(-\lambda\mu - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu-\lambda\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)$$
qui est la densité d'une v.a. $\mathcal{N}(\mu + \lambda\sigma^2, \sigma^2)$. □

Application au changement de variable

Le résultat précédent montre que si X est une v.a. Gaussienne sous $\mathbb{P}$ alors la v.a. $X + \lambda\sigma^2$ est Gaussienne de même variance et de moyenne
$$\mu_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma^2 = \mu_{\mathbb{Q}}$$
ainsi pour toute fonction mesurable f on a
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X + \lambda\sigma^2)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Lf(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\lambda(X-\mu) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)f(X)\right]$$
Ainsi en pondérant la loi de X par le poids donné par L on peut modifier sa moyenne.

Il est également possible d'avoir des changement de probabilité permettant de modifier moyenne et variance sans perdre le caractère Gaussien.

Proposition 7.4. *Changement de moyenne et variance.*
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sous la probabilité $\mathbb{P}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta < \frac{1}{2\sigma^2}$ on pose $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-2\theta\sigma^2}$ et
$$Z = Z_{\lambda,\theta}(X) = \frac{\Sigma}{\sigma}\exp\left(\theta(X-\mu)^2 + \lambda(X-\mu) - \frac{1}{2}\lambda^2\Sigma^2\right)$$
La v.a. Z est > 0 et d'espérance 1 sous $\mathbb{P}$ et elle définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente sous laquelle X suit la loi $\mathcal{N}(\mu + \lambda\Sigma^2, \Sigma^2)$.

Exercices :

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sous la probabilité $\mathbb{P}$, trouver la probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle X est de loi normale standard réduite.
2. Prouver la proposition précédente.

7.1.2 Changement de moyenne pour les vecteurs Gaussiens

Proposition 7.5. *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n, Z)$ un vecteur Gaussien sous $\mathbb{P}$. La v.a.*

$$L = \exp\left(Z - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)\right)$$

définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente sous laquelle le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est Gaussien de matrice de covariance inchangée et de vecteur des espérances vérifiant

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i) + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X_i, Z)$$

En particulier pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ borelienne positive

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(X_1, ..., X_n)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(Z - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)\right) f(X_1, ..., X_n)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f\left(X_1 + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X_1, Z), ..., X_n + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X_n, Z)\right)\right] \end{aligned}$$

Preuve. On passe par les transformées de Laplace (fonctions génératrices des moments). Pour $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ qui est Gaussien sous $\mathbb{P}$ par hypothèse. On a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(Y)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(Z - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)\right)\exp(Y)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp(Z + Y))\exp\left(-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)\right)$$

or par hypothèse $Z + Y$ est Gaussien donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(Y)) = \exp\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z + Y) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z + Y)\right)\exp\left(-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z)\right)$$

et comme $\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z + Y) = \mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Z) + \mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Y) + 2\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(Z, Y)$ on obtient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(Y)) = \exp\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(Z, Y) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(Y)\right)$$

Ce qui montre que la transformée de Laplace du vecteur $(X_1, ..., X_n)$ sous $\mathbb{Q}$ est Gaussienne de même matrice de covariance que sous $\mathbb{P}$ et de moyenne

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_i) + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(X_i, Z)\right)$$

□

7.2 Formule de Cameron-Martin

On va appliquer la proposition précédente à la v.a.

$$Z_T = -\int_0^T h(s)\ dB_s$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable déterministe vérifiant que $\int_0^T h^2(s)\ ds < +\infty$ et $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-M.B.S. sous $\mathbb{P}$. On reconnait que Z_T est l'intégrale de Wiener de $-h$ par B et en particulier on a que

a. la v.a. Z_T est de loi Normale centrée et de variance $\int_0^T h^2(s)\ ds$;

b. pour tout choix $0 \le t_1 < ... < t_n \le T$ on a que le vecteur $(B_{t_1}, ..., B_{t_n}, Z_T)$ est Gaussien.

Pour tout $t \in [0, T]$ posons

$$L_t = \exp\left[-\int_0^t h(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\ ds\right]$$

Nous verrons en TD que le processus $(L_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Martingale sous $\mathbb{P}$.
Par la proposition précédente la v.a. L_T définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}_T$ sous laquelle le vecteur $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ est Gaussien de moyenne

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(B_{t_i}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(B_{t_i}) + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(B_{t_i}, Z_T) = 0 + \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(\int_0^{t_i} 1\ dB_s, -\int_0^T h(s)\ dB_s\right) = -\int_0^{t_i} h(s)\ ds$$

et de matrice de covariance inchangée. On en déduit alors que le processus $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ défini par

$$W_t = B_t + \int_0^t h(s)\ ds$$

est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-M.B.S. sous $\mathbb{Q}_T$.
On a ainsi montré la

Théorème 7.6. *Formule de Cameron-Martin*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* $B = (B_t)_{0\le t\le T}$ *un* $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$*-M.B.S. Soit* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable déterministe telle que* $\int_0^T h^2(s)\ ds < +\infty$*. Alors le processus* $L = (L_t)_{0\le t\le T}$ *définit par*

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t h(s)\ dB_s - \int_0^t h^2(s)\ ds\right)$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$*-martingale et il existe une probabilité* $\mathbb{Q}_T$ *equivalente à* $\mathbb{P}$ *telle que* $L_T = d\mathbb{Q}_T/d\mathbb{P}$ *sous laquelle le processus* $W = (W_t)_{0\le t\le T}$ *définit par*

$$W_t = B_t + \int_0^t h(s)\ ds$$

est un $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$*-M.B.S.*