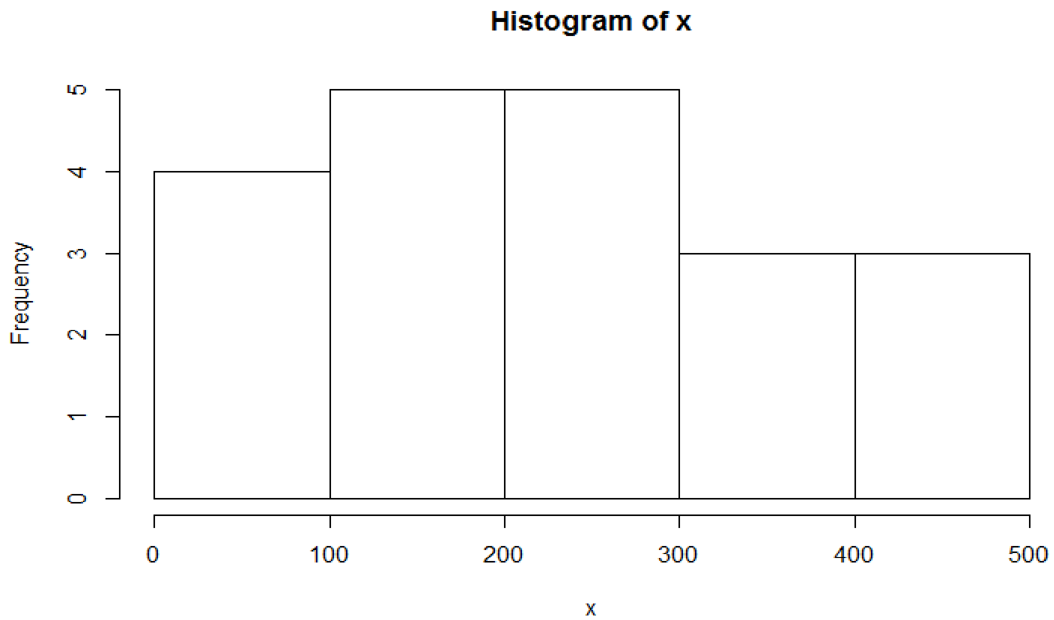
Exercice 1

jeudi 16 mars 2017 10:01

1) Voici un histogramme de ces données :

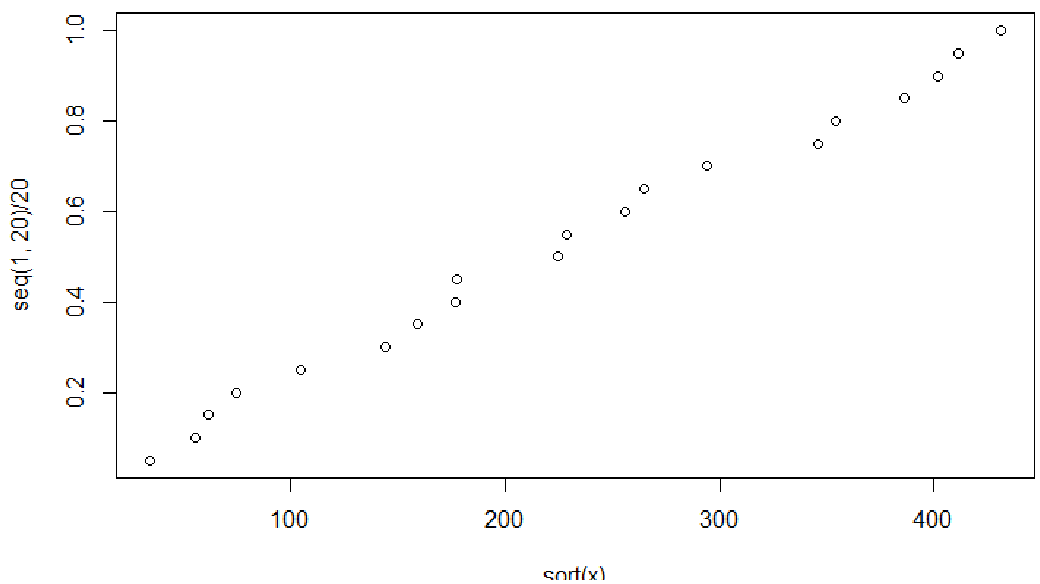


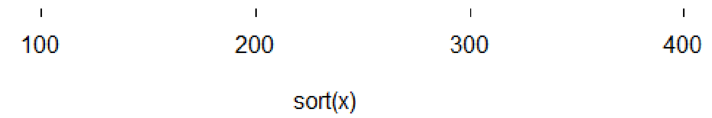
On fait alors l'hypothèse que les données suivent une loi uniforme $\mathcal{U}(0, \theta)$.

$$\mathcal{F}_\theta(x) = \frac{x}{\theta} \text{ pour } 0 \leq x \leq \theta$$

$$\mathcal{F}_\theta(x) \approx \frac{x_i^*}{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{i}{n} \text{ si } x = x_i^*$$





L'hypothèse $\mathcal{U}(0, \theta)$ est validée car les points forment grossomodo une droite.

2) On utilise la moyenne empirique $\bar{x}_n$. On a :

$$\bar{x}_n \to E[X] = \frac{\theta}{2}$$

D'où $\tilde{\theta} \approx 459$

3) $\mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)$

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmax}} \, \mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\theta)$$

$\hat{\theta}$ doit être parmi les valeurs supérieures au max des x_i afin de s'assurer que $\forall x_i, \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) = 1$. Or, à cause du facteur $\frac{1}{\theta^n}$, augmenter θ diminue la vraisemblance. On choisit donc θ le plus faible possible. Ainsi, $\hat{\theta} = \max x_i = 431$

4) $\tilde{\theta}_n$ est sans biais

$$\operatorname{var}(2\bar{X}_n) = 4 \operatorname{var}(\bar{X}_n) = \frac{4}{n^2} \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 4 \frac{\operatorname{var}(X)}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$\to$ convergent, vitesse : $\frac{1}{n}$

Biais de $\hat{\theta}_n$:

$$f_{\hat{\theta}_n}(x) = \frac{n}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$$

$$E\left[\hat{\theta}_n\right] = \int_0^\theta x \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta$$

$\rightarrow$ convergent, vitesse $\frac{1}{n}$

$$= \frac{\theta n}{n+1} \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_n \text{ est ESB de } \theta$$

$$E\left[\hat{\theta}_n^2\right] = \int_0^\theta \frac{x^2}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} d\theta = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$\operatorname{var}\left(\hat{\theta}_n\right) = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$\Rightarrow$ Pas intéressant car $\neq E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right]$

$$\operatorname{var}\left(\hat{\theta}_n'\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\operatorname{var}\left(\hat{\theta}_n'\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \neq \frac{1}{I_1(\theta)n}$$

Contredit $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I_1(\theta)}\right)$ pas valide ici

$\hat{\theta}_n'$ est meilleur que $\tilde{\theta}$

Applications numériques :

$\tilde{\theta} = 454, \hat{\theta}_n = 431, \hat{\theta}' = 453$

$$E_{\hat{\theta}_n}[X] = \frac{\hat{\theta}_n'}{2} = 226$$

$$P_{\hat{\theta}_n}(X \leq 100) = \frac{100}{\hat{\theta}_n} \approx 0.22$$

Nombre de particules par an $\approx \frac{8760\text{h}}{226\text{part/h}} \approx 38$

Exercice 2

jeudi 23 mars 2017 10:29

$$X_i \sim \exp(\lambda)\,,\, f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

$$E[X_i] = \frac{1}{\lambda}, \mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\ln\left(\mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)\right) = \sum_{i=1}^{n}[\ln\lambda - \lambda x_i]$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda} - x_i = n\left(\frac{1}{\lambda} - \bar{x}_n\right)$$

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

1) $E[\hat{\lambda}_n] = nE\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$ où $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Gamma}(n,\lambda)$

$$= n\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}f_{G(n,\lambda)}(x)dx$$

$$f_{G(n,\lambda)} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$$\Rightarrow E[\hat{\lambda}_n] = nE\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$$

$$= n\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-2}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)dx$$

$$= \frac{n\lambda}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}x^{n-2}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)dx$$

$$= \frac{n\lambda}{n-1}\int_0^{+\infty} f_{G(n-1,\lambda)}(x)dx$$
$$= \frac{n\lambda}{n-1}$$
$$\Rightarrow \hat{\lambda}'_n = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i} \text{ ESB de } \lambda \left(E\left[\hat{\lambda}'_n\right] = \lambda\right)$$

$$2)\ E\left[{\hat{\lambda}'_n}^2\right] = (n-1)^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_{G(n,\lambda)}(x)dx$$
$$= (n-1)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-3} e^{-\lambda x} dx$$
$$= \frac{(n-1)^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-3)!} x^{n-3} e^{-\lambda x} dx$$
$$= \frac{n-1}{n-2}\lambda^2$$
$$\left(E\left[\frac{1}{Y^2}\right] = \int \frac{1}{y^2} f_Y(y)dy\right)$$
$$\Rightarrow \mathrm{var}\left(\hat{\lambda}'_n\right) = \frac{n-1}{n-2}\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2\left(\frac{n-1}{n-2} - 1\right) = \frac{\lambda^2}{n-2}$$
$$\mathrm{var}\left(\hat{\lambda}'_n\right) = \frac{\lambda^2}{n-2} > \frac{1}{n/\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{n}$$
$$\mathrm{In}(\lambda) = \mathrm{var}\left(\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n X_i\right) = n\,\mathrm{var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Pas efficace ! Mais $\frac{\lambda^2}{n-2} \times \frac{n}{\lambda^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc c'est efficace asymptotiquement.