EXAMEN du 27 mai 2014. Durée: 3h. 2 pages numérotées.
Documents manuscrits ou polycopiés autorisés. Aucun livre. Calculatrices interdites.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction. Il est important de bien expliquer ce que vous faites.
Veuillez noter sur votre copie le nom de votre enseignant : BIENIA ou SZIGETI

EXERCICE 1: [4 pts]

Une société spécialisée en transport routier dispose d'un budget de *3 750 000 €* pour renouveler son équipement. On a le choix entre trois types de véhicules: ***A***, ***B*** et ***C***. Le véhicule ***A***, avec une charge utile de *10* tonnes, peut rouler avec une vitesse moyenne de *70 km/h* et coûte *80 000 €*. Le véhicule ***B***, avec une charge utile de *20* tonnes, peut rouler avec une vitesse moyenne de *60 km/h* et coûte *130 000 €*. Le véhicule ***C***, qui est une version du ***B*** avec compartiment-lit permettant à un chauffeur de dormir (pendant que l'autre conduit), a une charge utile de *18* tonnes et coûte *150 000 €*.

Le véhicule ***A***, conduit par un camionneur, peut rouler jusqu'à *6* heures par jour; si l'on lui affecte deux camionneurs il peut rouler jusqu'à *12* heures et jusqu'à *18* heures par jour si l'on organise un relais de trois camionneurs.

Les véhicules ***B*** et ***C*** nécessitent une équipe de deux camionneurs. Le véhicule ***B*** peut rouler jusqu'à *6* heures, *12* heures ou *18* heures respectivement par jour, en fonction du nombre d'équipes (une, deux ou trois) qui sont lui affectées. Ces limites dans les situations analogues pour le véhicule ***C*** vont jusqu'à *7* heures, *14* heures ou *21* heures par jour.

La société emploie actuellement *149* camionneurs et il est impossible d'envisager des embauches supplémentaires. Les garages de la société ne peuvent garantir la maintenance quotidienne de plus de *30* véhicules.

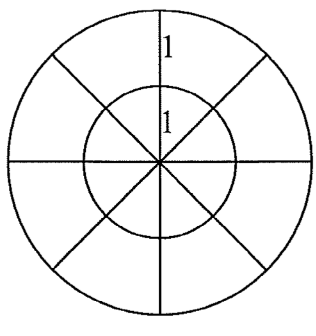
Quel est l'achat optimal qui permet de maximiser la capacité de la société exprimée en *tonnes×km par jour* ? **Modéliser** ce problème par un **programme linéaire**. La solution n'est pas demandée.

EXERCICE 2: [3 pts]

Soit G un graphe 3-régulier (tous les sommets ont même degré $= 3$). Montrer que si G possède un cycle hamiltonien alors l'ensemble d'arêtes de G est la réunion de 3 couplages parfaits.

EXERCICE 3: [3 pts]

Déterminer un arbre de poids minimum dans le graphe ci-contre avec 17 sommets où les poids des arêtes correspondent à leur longueur géométrique. Donner ce poids total minimum.



Combien y-a-t-il d'arbres couvrants de poids minimum (en supposant que les sommets sont étiquetés) ?

EXAMEN du 27 mai 2014. Durée: 3h. 2 pages numérotées.
Documents manuscrits ou polycopiés autorisés. Aucun livre. Calculatrices interdites.

EXERCICE 4: [4 pts]

Considérons le problème d'ordonnancement simple où les tâches sont tous les diviseurs de *4!* = *24*. Le début du projet est *1* et la fin *24*. La tâche *a* précède la tâche *b* $\Leftrightarrow$ *a divise b*.

La durée d'une tâche est égale à sa valeur. Quelle est la durée minimum du projet ? Quelles sont les tâches critiques ? Quelles tâches ont la plus grande marge ?

Utiliser la méthode *potentiels-tâches* (*graphe des tâches*). Pour accélérer les calculs il est conseillé d'enlever les arcs de transitivité.

EXERCICE 5: [4 pts]

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rl} \textit{minimiser:} & z = 2x_1 + x_3 \\ \textit{sous:} & x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

a) Résoudre ce programme par l'algorithme du simplexe.

b) Pour le moment le coefficient de x_1 dans de la fonction-objectif z est 2. A partir de quelle valeur de ce coefficient verra-t-on apparaître une valeur de x_1 non nulle dans la solution optimale ? Expliquez clairement pourquoi.

EXERCICE 6 : [4 pts]

Deux joueurs ***X*** et ***Y*** doivent choisir simultanément une mise de *1€* ou *5€*. Si les mises des deux joueurs sont identiques alors le joueur ***X*** gagne la mise de son adversaire, sinon c'est le joueur ***Y*** qui gagne la mise de ***X***.

a) <u>Donner</u> la matrice des gains. **[0,5 pt]**

b) <u>Ecrire</u> les deux programmes (duaux) qui correspondent à la recherche des stratégies mixtes optimales des deux joueurs. **[1 pts]**

c) <u>Utiliser</u> la méthode graphique vue en cours pour trouver la stratégie mixte optimale du joueur ***X***. **[1 pts]**

d) En utilisant cette stratégie mixte optimale du joueur X, <u>déterminer</u> la stratégie mixte optimale du joueur ***Y*** par le théorème des écarts complémentaires. **[1 pts]**

e) Quelle est la valeur du jeu? Ce jeu est-il juste (équitable)? **[0,5 pts]**

Recherche Opérationnelle

Exercice 1

1)

Vehicule	Charge	Vitesse	Prix	# camionneurs 1	2	3	4	6
A	10 t	70	80k	6	12	18	/	/
B	20 t	60	130k	/	6	/	12	18
C	18t	60	150k	/	7	/	14	21
Disponible	/	/	3750k	149 Camionneurs				

en Heure

2) Les variables sont $(x_{i,j})_{\substack{i\in\{1,2,3,4,6\} \\ j\in\{A,B,C\}}}$, elles correspondant au nombre de véhicule j avec i camionneurs. (les unes sont à 0 comme par exemple $x_{4A}=0$)

3) Contraintes de disponibilités

* On achète $\sum_{i,j} x_{ij}$ vehicules mais on peut en avoir que 30

* On paye $\sum_i x_{iA}\times 80 + \sum_i x_{iB}\times 130 + \sum_i x_{iC}\times 150$ mais on a que 3750

* On utilise $\sum_{i,j} i x_{ij}$ camionneurs mais on en a que 149

4) Contraintes de non négativités les (x_{ij}) sont ≥ 0

5) fonction Objectif

On veut maximiser l'efficacité en $\frac{\text{tonnes}\times\text{km}}{\text{JOUR}}$

Les vehicules A font $6\times x_{1A}\times 10\times 70 + 12\times x_{2A}\times 10\times 70 + 18\times x_{3A}\times 10\times 70$

—— B —— $20\times 60(6x_{2B}+12x_{4B}+18x_{6B})$

—— C —— $18\times 60(7x_{2C}+14x_{4C}+21x_{6C})$

⑥ programme linéaire

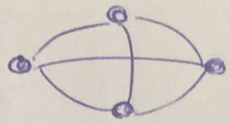
$$x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+x_{2B}+x_{4B}+x_{6B}+x_{2C}+x_{4C}+x_{6C} \leqslant 30$$

$$80x_{1A}+80x_{2A}+80x_{3A}+130(x_{2B}+x_{4B}+x_{6B})+150(x_{2C}+x_{4C}+x_{6C}) \leqslant 3750$$

$$x_{1A}+2x_{2A}+3x_{3A}+2x_{2B}+4x_{4B}+6x_{6B}+2x_{2C}+4x_{4C}+6x_{6C} \leqslant 149$$

$$(x_{i,j}) \geqslant 0$$

$$700\times(6x_{1A}+12x_{2A}+18x_{3A})+1200(6x_{2B}+12x_{4B}+18x_{6B})+1080(7x_{2C}+14x_{4C}+21x_{6C}) = z\ (\max)$$

Exercice 2 G - 3 régulier $\Longrightarrow$  Erwan

Soit $G=(V,E)$ un tel graphe.

On sait que $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E| = 3n$

Vu que $n\in\mathbb{N}$, et $2\wedge 3 = 1$, le lemme de Gauss affirme que $2|n$ soit n pair.

G possède un cycle hamiltonien $C(v_1, e_1, \dots, v_n, e_n)$

On construit les sous-ensemble $A = \{e_1, e_3, \dots, e_{n-1}\}$

$B = \{e_2, e_4, \dots, e_n\}$

- A et B forment chacun des couplages parfaits
- On pose $C = E\setminus(A\cup B)$
- Mq C est un couplage parfait :

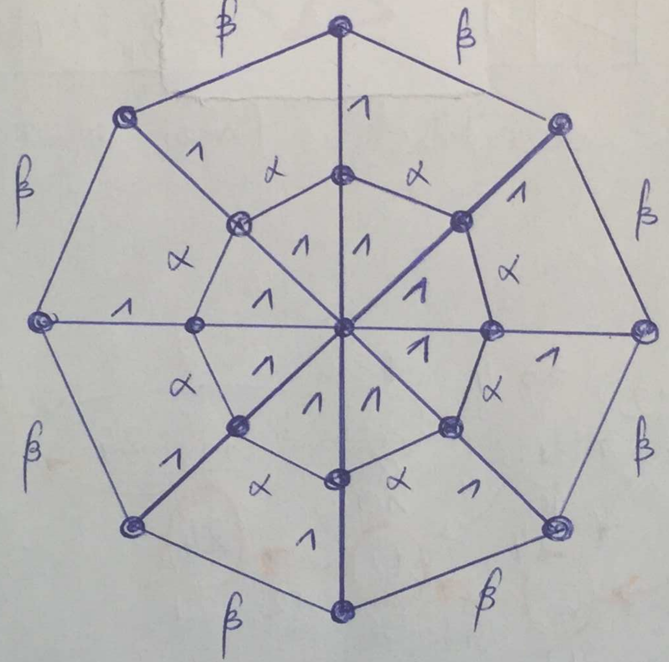
1) Soit $v\in V$, comme A et B sont des couplages parfaits, ~~donc~~ il existe deux arêtes seulement de A et B vers v.
Vu que $d(v)=3$, il reste une arete et elle est dans C

2) De plus les arêtes de C ne sont pas adja- (3)
-centes. En effet, supposons qu'il existe deux arêtes incidentes en v.
Vu que B et A sont des couplages parfaits et que $C \cap B = \emptyset = C \cap A$, $d(v) = 4 > 3$ Absurde.

$\Longrightarrow$ Ainsi C est un couplage parfait et $A \cup B \cup C = E$ (cqfd)

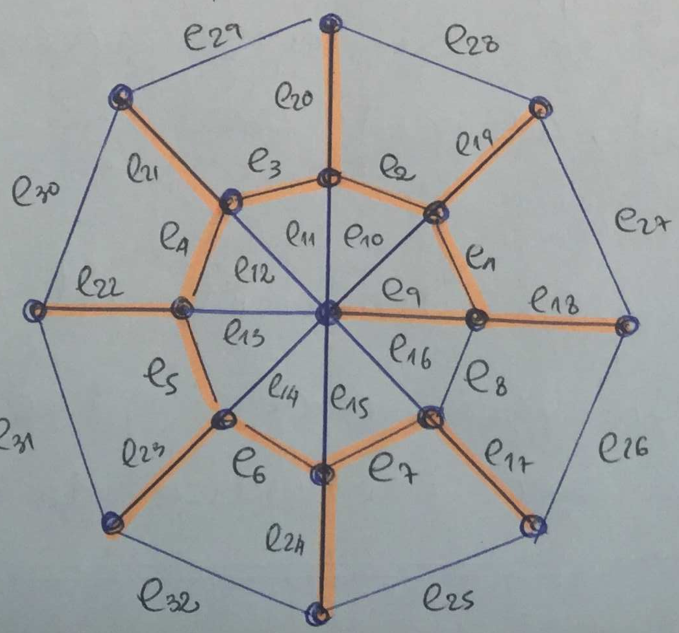
Exercice 3

On use de l'algorithme de Kruskal puisque G est connexe



Avec $\alpha = \frac{\pi}{4} < 1$

$\beta = 2\alpha > 1$



arbre de poids minimum

↳ Coût = poid total

$\shortparallel$

$1 + 7 \times \frac{\pi}{4} + 8 = 9 + \frac{7\pi}{4}$

Les autres se construisent avec un choix different de l'arête allant au centre et un choix different de l'arête du premier cercle parmi les 8 ⟹ 8 choix × fois 8 choix = 64 arbres

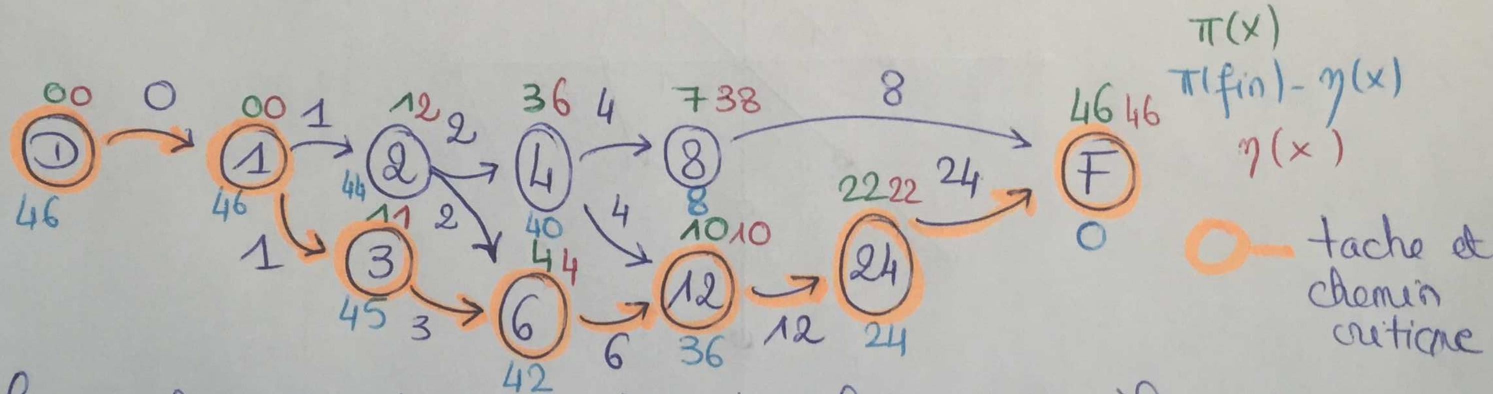
Exercice 4

Les diviseurs de 24 sont {1, 24, 2, 12, 3, 8, 4, 6}

Voici le tableau des tâches :

Tache	1	2	3	4	6	8	12	24
Durée	1	2	3	4	6	8	12	24
Predecesseur	/	1	1	1-2	1-2-3	1-2-4	1-2-3-4-6	1-2-3-4-6-12

Voici le graphe des tâches (sans les arcs transitifs)



Le graphe admet un tri topologique, il est donc sans circuit, on peut user de l'algorithme de Bellman

La durée minimale du projet est donc de 46

Les tâches à la plus grande marge sont 2-4-8 mais surtout 8 avec une marge de 31

Exercice 5

a) Le dual de ce PL est
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1 - 2y_2 \leq 0 \\ -y_1 + 4y_2 \leq 1 \\ 5y_1 + 8y_2 = z(\max) \end{cases}$$

L'algorithme du simplexe donne :

$$J=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0 \\ 1&-2&0&1&0 \\ -1&4&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad (5\ 8\ 0\ 0\ 0)(0) \quad \rightsquigarrow \quad J=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/4&0&1&0&-1/4 \\ 1/2&0&0&1&1/2 \\ -1/4&1&0&0&1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}7/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix} \quad (7\ 0\ 0\ 0\ -2)(-2)$$

$$J=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&-5/2&-3/2 \\ 1&0&0&2&1 \\ 0&1&0&1/2&1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix} \begin{matrix}\leftarrow e_3\\ \leftarrow y_1 \\ \leftarrow y_2\end{matrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} (0&0&0&-14&-9)(-9) \\ & & & \uparrow & \uparrow \quad \uparrow \\ & & & x_1 & x_2 \quad x_3 \end{array}$$

Une solution optimale du dual est $\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$ et $z(\max) = 9$

Une solution optimale du primal est $\begin{pmatrix}0\\14\\9\end{pmatrix}$ et $w(\min) = 9$

b) Le nouveau PL serait
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ (2+\varepsilon)x_1 + x_3 = w(\min) \end{cases}$$

On cherche une condition sur ε pour que $\bar{x}_1$ soit non-nulle.

On voit d'après a) qu'il faut donc que la colonne 3 soit hors base lors du simplexe.

A partir du deuxième tableau on a désormais

$$\begin{pmatrix} 5/4&0&1&0&-1/4 \\ 1/2&0&0&1&1/2 \\ -1/4&1&0&0&1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+\varepsilon-1/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix} \quad (7\ 0\ 0\ 0\ -2)(-2)$$

Pour sortir 3 de la base il faut que $0 < 2+\varepsilon - 1/4 \leq 1 \iff -7/4 < \varepsilon \leq -3/4$

Dans ce cas, on trouve

$$w(\min) = 2 + \frac{28}{5}\left(\frac{7}{4}+\varepsilon\right) \text{ pour } X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}28/5\\0\\3/5\end{pmatrix}$$

Exercice 6

$$\begin{array}{cc} & \text{Mises } Y \\ & \begin{array}{cc} 1 & 5 \end{array} \\ X : \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

a) Matrice des gains

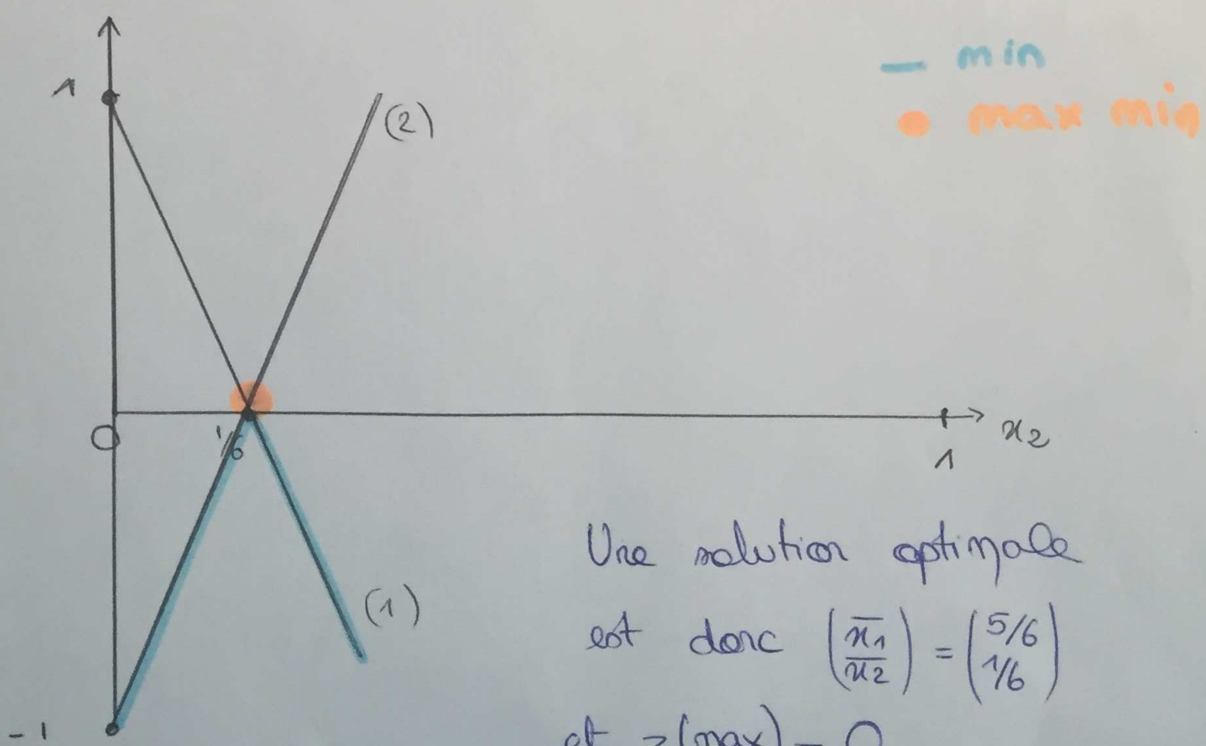
b) On a
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ z - x_1 + 5x_2 \leq 0 \\ z + x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ z = z(\max) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ w - y_1 + y_2 \geq 0 \\ w + 5y_1 - 5y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \\ w = w(\min) \end{cases}$$

c) On cherche dans ce PL

$$\max_{x_1, x_2} \left(\min\{x_1 - 5x_2 \,;\, -x_1 + 5x_2\} \text{ tq } \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right)$$

On enlève la variable x_1 par $x_1 = 1 - x_2$, $x_2 \in [0,1]$

On cherche $\max_{x_2} \left(\min\{\underbrace{1 - 6x_2}_{1} \,;\, \underbrace{-1 + 6x_2}_{2}\} \text{ tq } x_2 \in [0,1] \right)$



Une solution optimale est donc $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$

et $z(\max) = 0$

d) Supposons $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$ une stratégie mixte optimale pour Y. Dès lors $w(\min) = w = 0$

- On a $\bar{x}_1 = \frac{5}{6} > 0 \Rightarrow -\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 0$
- On a $\bar{x}_2 = \frac{1}{6} > 0 \Rightarrow 5\bar{y}_1 - 5\bar{y}_2 = 0$

} équations liées.

- $\bar{y}$ étant réalisable, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 1 \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- $\bar{y}_1 = 1/2 > 0 \Rightarrow -\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 = 0$ c'est vérifié
- $\bar{y}_2 = 1/2 > 0 \Rightarrow \bar{x}_1 - 5\bar{x}_2 = 0$ c'est vérifié.

Ainsi $\bar{x} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ et $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ sont des bases réalisables et vérifient le théorème des écarts complémentaires, ce sont donc des stratégies mixtes optimales.

e) La valeur du jeu est 0, il est donc équitable.