Ensimag 2021/2022

1A – Recherche Opérationnelle

Feuille : 8

Exercice 8.1. — On considère le programme linéaire :

$$\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 2\\
1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &= 2\\
x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0\\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= z(\min)
\end{aligned}$$

On pose $J = \{1,\ 2\}$.

(a) Montrer que J est une base réalisable.

(b) Montrer que la solution de base est optimale.

Exercice 8.2. — Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\leq 8\\
1x_1 + 2x_2 &\leq 7\\
x_2 &\leq 3\\
x_1,\ x_2 &\geq 0\\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}$$

Utiliser la méthode graphique pour chercher une solution optimale du programme linéaire.

Exercice 8.3. — Une assurance traite deux types de dossier : **A** - des sinistres, qu'on considère comme deux fois plus importants que **B** - les garanties décennales. Chaque demande doit passer par trois sections **I**, **II** et **III** qui disposent de **80**, **80**, **120** heures par semaine respectivement. Les dossiers de type A demandent **5**, **8** et **12** heures de traitement dans les sections respectivement et les dossiers de type B : **8**, **4**, **4** heures de traitement.

(a) Mettre sous la forme d'un programme linéaire le problème de la maximisation du nombre de dossiers traités. Comment tenir compte de la différence d'importance entre les dossiers ?

(b) Résoudre par la méthode graphique.

(c) Résoudre par la méthode du simplexe.

(d) Si l'on peut employer une autre personne supplémentaire, dans quelle section son travail sera-t-il le plus avantageux ?

Exercice 8.4. — Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 5x_2 &\leq 10\\
-1x_1 + 1x_2 &\leq 1\\
x_1, x_2 &\geq 0\\
1x_1 + 2x_2 &= z(\max)
\end{aligned}$$

(a) Utiliser la méthode graphique pour chercher une solution optimale du programme linéaire.

(b) Ensuite appliquer formellement la méthode du simplexe pour le résoudre.

Exercice 8.5. — Dans un atelier on peut fabriquer quatre types de carte électroniques **I**, **II**, **III** et **IV** qui se vendent toutes à prix unique de **40€** l'unité. Les coûts de production sont différents pour chaque carte (respectivement **10€**, **18€**, **18€** et **32€** par carte) et varient linéairement en fonction du nombre de cartes fabriquées. Les composants sont disponibles en quantité illimitée mais la principale contrainte réside dans le temps. Chaque semaine l'atelier dispose de seulement **2000** heures de temps de production, **300** heures pour la vérification du fonctionnement et **160** heures peuvent être consacrées à l'empaquetage. Les cartes nécessitent respectivement : **40**, **40**, **30** et **10** minutes de production par pièce, **4**, **5**, **3** et **2** minutes pour la vérification du fonctionnement et **2**, **2**, **1** et **1** minute pour l'empaquetage.

(a) Ecrire et résoudre le programme linéaire qui modélise le problème de la maximisation du profit net, quand on décide de fabriquer seulement les cartes dont la marge bénéficiaire dépasse **25%** du prix unitaire de vente.

(b) Est-ce que la possibilité de l'introduction à la production de la carte abandonnée dans (a) change le plan optimal ? Que se passe-t-il ?

Exercice 8.6. — Trouver une solution réalisable de base du système suivant en appliquant la phase I du simplexe.

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 4 \\ 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 8.7. — Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) En étudiant la soustraction de deux lignes conclure que ce système n'a pas de solution réalisable.

(b) Appliquer à ce système la phase I du simplexe.

Exercice 8.8. — Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre les programmes linéaires suivants.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\geq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ 3x_1 - 1x_2 &= z(\max) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 &\leq 4 \\ 1x_1 - 1x_2 \qquad\ \ &\leq -3 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &\leq 5 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= z(\max) \end{aligned}$$