Feuille 3
Méthodes itératives pour systèmes linéaires

Dans cette feuille, $A \in M_n(\mathbb{R})$ désigne une matrice inversible, de coefficients diagonaux non nuls. On note L, D, U les parties triangulaire inférieure, diagonale et triangulaire supérieure de A, qui vérifient $A = L + D + U$. On note $J = I - D^{-1}A$ la matrice de la méthode de Jacobi, et $G = -(D+L)^{-1}U$ celle de la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 1

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi est convergente pour tout système linéaire de matrice A.

Indication : exprimer les coefficients de J en fonction des coefficients de A. Majorer ensuite le rayon spectral de J par

$$\|J\|_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1}{Sup} \|J\,x\|_\infty = \underset{i=1,\dots,n}{Max} \sum_{j=1}^{n} |J_{ij}|.$$

Exercice 2

Déterminer si les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent pour les systèmes linéaires de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (méthode de Richardson stationnaire)

On souhaite résoudre le système $A\,x = b$ en utilisant la méthode itérative

$$x_{k+1} = (I - \alpha\,A)\,x_k + \alpha\,b,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que cette méthode itérative converge. Dans quels cas la méthode est-elle divergente pour toute valeur de α ?

Exercice 4

On rappelle que la méthode de relaxation appliquée au système $A\,x = b$ s'écrit

$$(D + \omega L)\, x_{k+1} = [(1-\omega)D - \omega U]\, x_k + \omega b, \tag{1}$$

où $\omega \neq 0$ est le paramètre de relaxation. Montrer que si la méthode de relaxation converge alors $0 < \omega < 2$.

Indication : calculer le déterminant de $(D + \omega L)^{-1}\, [(1-\omega)D - \omega U]$.

Exercice 5

Dans le cas d'une matrice A tridiagonale (i.e. avec $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$), montrer que $\rho(G) = \rho(J)^2$. Comparer l'efficacité des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour la résolution d'un système linéaire de matrice A.

Indication : écrire les deux relations de récurrence donnant les composantes des vecteurs propres de G et J, et montrer qu'on passe de l'une à l'autre par un changement de variables.

Exercice 6

Dans cet exercice, $A \in M_n(\mathbb{R})$ désigne la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

On admet que les valeurs propres de A s'écrivent

$$\lambda_m = 4 \sin^2\left(\frac{m\pi}{2(n+1)}\right), \quad m = 1, \ldots, n.$$

On considère un système linéaire $A\,x = b$ avec $b \in \mathbb{R}^n$.

1- Calculer le rayon spectral de la matrice J de l'itération de Jacobi associée. La méthode de Jacobi est-elle convergente ? Que se produit-il lorsque n devient grand ?

2- Mêmes questions pour la méthode de Gauss-Seidel.