PROBA_CM8

CM 8 : Couples de variables aléatoires.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles . On suppose qu'il existe une fonction $p(x, y)$ telle $p(x, y)$ soit une fonction de densité

- $p(x, y) \geq 0$ mais pas forcément plus petite que 1
- $\int\int_{\mathbb{R}^2} p(x, y)dxdy = 1$ le volume sous le graphe vaut 1

Définition : La loi du couple (X, Y) admet la fonction $p(x, y)$ pour densité si

$$\forall B \subset \mathbb{R}^2, \quad P((X, Y) \in B) = \int\int_B p(x, y)dxdy$$

Remarques :

- valable pour tout ensemble Borélien.
- Cette notion existe aussi avec une seule variable : $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$
- On peut se limiter à $B = I_1 \times I_2$: produit d'intervalles

Définition :

On appelle « loi marginale » de la v.a. X la loi de densité définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y)dy.$

Définition :

Soit x tel que $p_X(x) > 0$. La loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$ admet pour densité de probabilité $\forall y \in \mathbb{R}, \quad p_Y(y \,|\, X = x) = \dfrac{p(x, y)}{p_X(x)}$

Remarque :

La définition conduit à une factorisation de la densité $p(x, y)$.

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y \,|\, X = x) = p_Y(y)p_X(x \,|\, Y = y)$$

Si l'on veut générer des variables aléatoires, on fabrique d'abord X de loi marginale p_X puis on utilise cette loi pour simuler la deuxième variable aléatoire selon la loi conditionnelle.

Corollaire :

X et Y sont deux variables indépendantes $\Leftrightarrow p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$

Théorème de transfert :

Soit $\phi(X, Y)$ une fonction ≥ 0 ou telle que $Z = \phi(X, Y)$ est intégrable.

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \int\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y)p(x, y)dxdy$$

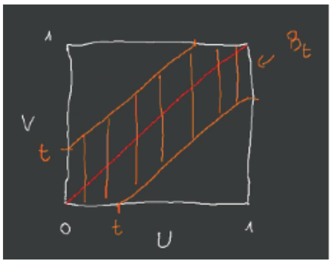
Cas particulier :

$Z = XY$ et X, Y sont indépendantes alors, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ donc $(\,cov(X, Y) = 0\,)$

Exercice n°1 :

Problème des rencontres. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $U(0,1)$.

On cherche la loi de $|U - V|$.
Soit $t \in (0,1)$, $P(|U - V| \leq t) = ? = P($ « rencontre avec une patience de t ») = $P((U, V) \in B_t)$
où $B_t = \left\{(u, v) \in (0,1)^2 : |u - v| \quad \leq t\right\}$



Quelle est la loi du couple (U, V) ? Elle admet pour densité : $p(u, v) = p_U(u)p_V(v) = 1 \times 1 = 1$
On a utilisé **l'indépendance et le fait que U et V suivent la même loi uniforme sur $(0,1)$.**
Par définition, pour $t \in (0,1)$:

$$P(|U - V| \leq t) = \iint_{B_t} p(u, v)du\,dv = \iint_{B_t} du\,dv = \text{aire de } B_t = 1 - (1 - t)^2$$

On trouve cette aire en soustrayant l'aire du carré divisé en deux triangles aux extrémités du carré.
La v.a. $X = |U - V|$ admet pour densité $\forall x \in (0,1) \quad p_X(x) = 2(1 - x)$

Application :

$$\mathbb{E}[|U - V|] = \int_0^1 2x(1 - x)dx = \frac{1}{3} \quad \text{et } \mathbb{V}(|U - V|) = \frac{1}{18}$$

Exercice n°2 :

Soit U et V deux v.a. indépendantes de loi $U(0,1)$. Quelle est la loi de $Y = UV$? On va utiliser la principe de couplage.

Solution :

$X = U$
$Y = UV$ Clairement, X et Y sont dépendantes.

D'autre part, on connait la loi de X : $\forall x \in (0,1), \quad p_X(x) = 1$.

Sachant que $X = x \in (0,1)$, on connait la loi de $Y = XV = xV$. Il s'agit de la loi $U(0, x)$.

$$\forall y \in (0,1) \quad p_Y(y | X = x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{(0,x)}(y).$$

Résultat,
Soit $(x, y) \in (0,1)^2$,

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y | X = x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_D(x, y) \quad \text{où } D = \left\{(x, y) \ / \ 0 < y < x < 1\right\}$$

On définit la loi de $Y = UV$ comme la loi marginale du couple (X, Y)

$$\forall y \in (0,1) \quad p_Y(y) = \int_0^1 p(x,y)dx = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = -\ln(y) \quad \text{« loi logarithmique »} .$$

Application,

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[UV] = \frac{1}{4} = -\int_0^1 y\ln(y)dy$$

Plus généralement, $-\int_0^1 y^\alpha \ln(y)dy = \mathbb{E}[Y^\alpha] = \mathbb{E}[U^\alpha V^\alpha] = (\frac{1}{1+\alpha})^2$.

$$cov(X,Y) = cov(U,\ UV) \ = \mathbb{E}[UUV] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[UV]$$

d'où $cov(X,Y)$=$(\mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]^2)\mathbb{E}[V] = \mathbb{V}(U)\mathbb{E}[V] = \frac{1}{24}$

Exercice n°3 : problème de triangle

Soit U et V deux v.a. indépendantes de loi $U(0,1)$. On brise le segment $[0,1]$ en trois intervalles tels que a, b et c sont les longueurs des intervalles et U et V les points de brisure. Quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle avec les trois segments obtenus ?

Un triangle est une figure qui vérifie les inégalités triangulaires.

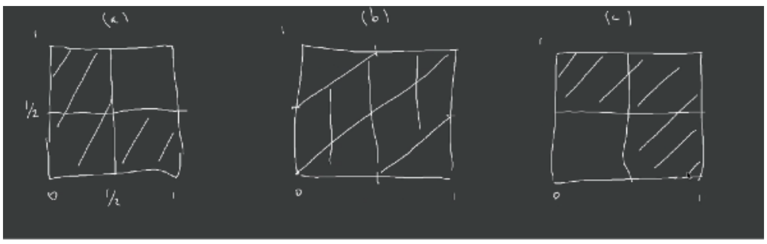
On a respectivement les 3 inégalités $a \leq b + c, \quad b \leq a + c, \quad c \leq a + b$

On trouve alors $a,\ b,\ c \leq \frac{1}{2}$. De ce fait, on trouve les conditions :

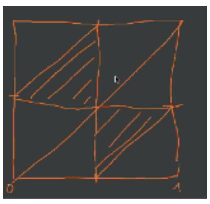
- $\min(U,V) \leq \frac{1}{2}$
- $|U - V| \leq \frac{1}{2}$
- $\max(U,V) \leq \frac{1}{2}$

D'où P(Triangle) = $P((U,V) \in B) = \frac{1}{4}$, où B est défini par les 3 conditions précédentes.

On représente graphiquement : $|U - V| \leq \frac{1}{2}$ signifie que l'on veut rester dans la bande centrale.



On fait l'intersection de ces trois ensembles puis on calcule l'aire de B.



L'aire hachurée correspond à la région B et elle est égale à $\frac{1}{4}$.