MNB1 - TD2

1. $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_2(x) = \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\cos(x)| = 1$ pour $x = l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

En l'occurrence : $K\arccos(x) = l\pi$

Et si $|l| \geqslant |K|$ (ie $|\frac{l}{K}| \leqslant 1$), $x = \cos(\frac{l}{K}\pi)$

Rq : $\|T_K\|_\infty = 1$.

3. $T_{K+1}(x) = \cos((K+1)\arccos(x))$. Posons $\theta = \arccos(x)$.

$= \cos(K\theta + \theta)$

$= \cos K\theta \cos\theta - \sin K\theta \sin\theta$

$T_{K-1}(x) = \cos(K\theta - \theta)$

$= \cos K\theta \cos\theta + \sin K\theta \sin\theta$

Donc $T_{K+1}(x) + T_{K-1}(x) = 2\cos K\theta\cos\theta$

$= 2x\cos(K\arccos x) = 2x T_K(x)$

D'où $T_{K+1}(x) = 2x T_K(x) - T_{K-1}(x)$.

4. $T_0(x) = 1$ est un polynôme de degré 0, $T_1(x) = x$ en est un de degré 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que T_n et T_{n-1} sont des polynômes de degré respectif n et $n-1$.

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$: T_{n+1} est un polynôme par opérations sur des polynômes.

De plus, $\deg(T_{n+1}) = 1 + \deg(T_n) = n+1$.

Donc $\forall K \in \mathbb{N}$, T_K est un polynôme de degré K.

De m̂, on prouve que son coeff dominant est 2^{K-1} (ou 1 si $K=0$).

T_{K+1} étant de degré $K+1$, il admet $K+1$ racines.

De plus, $T_{K+1}(x_i) = \cos\left(\frac{(K+1)(2i+1)}{(2K+2)}\pi\right) = 0$ donc, les x_i étant 2 à 2 $\neq$ du fait de l'injectivité de la fct cos, ce st les $K+1$ racines de T_{K+1}.

5. $T_{n+1}(x) = 2^n \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

D'où : $f(x) - \Phi(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \dfrac{T_{n+1}(x)}{2^n}$.

6. Posons $\varphi(x) = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{b-a}{2}x = u$

$u_i = \varphi(x_i)$.

Donc $f(x) - \Phi(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod (u - u_i)$

$= \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod \dfrac{b-a}{2}(x - x_i)$

$= \dfrac{1}{2^n(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{n+1} T_{n+1}(x)$.

Donc :

$\|f - \Phi\| = \dfrac{2}{(n+1)!}\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\| \, \|T_{n+1}\|$

$\leqslant \dfrac{2}{(n+1)!}\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|$

car $\|T_{n+1}\| = 1$.