Ensimag 2e année - Filière Ingénierie pour la finance

Exercices de théorie financière II

Exercice n° 1 : Valorisation d'une option sur action versant un dividende

Le but de cet exercice est d'évaluer le prix d'une option sur une action qui verse un dividende entre aujourd'hui et l'échéance de l'option.

On se place dans le modèle à deux dates et à deux états comme dans l'exercice précédent. Les hypothèses sont les mêmes que celles du cours, et le détenteur de l'action en $t = 1$ se voit verser un dividende égal à $b\,S_0$ en $t = 1$. Autrement dit, l'opération qui consiste à acheter le titre à la date $t = 0$ et à le vendre à la date $t = 1$ rapporte une plus (moins)-value égale à $u\,S_0 + b\,S_0 - S_0$ dans l'état "haut" et $d\,S_0 + b\,S_0 - S_0$ dans l'état "bas".

1. Quelle(s) est (sont) les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage ? On supposera par la suite cette (ces) condition(s) vérifiée(s)
2. Calculer les créances d'Arrow - Debreu de ce modèle.
3. Calculer la probabilité risque - neutre de ce modèle.
4. En déduire le prix C_0 en $t = 0$ d'une option d'achat, de prix d'exercice K, d'échéance $t = 1$, dont le support est cette action.
5. On considère une firme qui émet deux types d'actions : une action A qui verse un dividende b à son détenteur en $t = 1$ et l'autre B qui ne verse aucun dividende. Après $t = 1$, les deux lignes se confondent (ce qui signifie que les détenteurs des actions A et des actions B ont les mêmes droits et touchent les mêmes dividendes à partir de $t = 1$).
   (a) La distribution des prix de l'action A est celle décrite dans le début de cet exercice (modèle à deux dates, deux états). Quel est alors le prix de l'action B en $t = 1$, en $t = 0$?
   (b) En déduire le prix de l'option d'achat C_0 de l'action qui verse un dividende.

Exercice n° 2 : Option d'échange

On se place dans une économie à 2 dates et deux états comme dans le cours. Dans cette économie, il y a deux actifs risqués S et T dont les prix valent respectivement S_0€ et T_0€ à la date $t = 0$. A la date $t = 1$, les prix de ces deux actifs risqués valent respectivement $S_{1u} = u_S\,S_0$€ et $T_{1u} = u_T\,T_0$€ dans l'état "haut", et $S_{1d} = d_S\,S_0$€ et $T_{1d} = d_T\,T_0$€ dans l'état "bas" (*cf.* FIG.1). On suppose $u_T > d_T$, $u_S > d_S$, $u_T \neq u_S$ et $d_T \neq d_S$ et $p \in]0, 1[$.

1. Donnez la (les) condition(s) d'absence d'opportunité d'arbitrage dans cette économie.

On suppose que la (les) condition(s) d'absence d'opportunité d'arbitrage est (sont) vérifiée(s) et qu'on a $d_S > d_T$. On effectue le **changement de numéraire** suivant : au lieu d'évaluer le prix des deux actifs risqués en euros, on évalue **à chaque date** le prix des actifs en **nombre d'action(s) S**.

2. Donnez aux deux dates, le "prix" des deux actifs risqués dans ce numéraire (numéraire S).
3. Quel est l'actif "sans risque" dans le numéraire S et combien vaut le "taux sans risque" dans ce numéraire ?

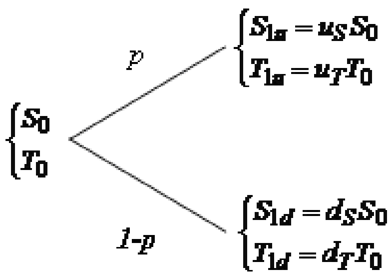

FIG. 1 – *Figure de l'exercice 2*

4. Calculez le prix des créances d'Arrow-Debreu dans le numéraire S.
5. Calculez la probabilité risque-neutre dans le numéraire S.
6. On considère l'actif financier (option d'échange) qui donne le droit (et non l'obligation) d'échanger $A \in \mathbb{N}$ action(s) S contre $B \in \mathbb{N}$ action(s) T à la date $t = 1$.
   a. Quel est le prix E_1 (en €) de cette option d'échange, à la date $t = 1$ dans les deux états de la nature ?
   b. Quelle est la valeur F_1 de cette option dans le numéraire S, à la date $t = 1$ dans les deux états de la nature ?
   c. Calculez le prix E_0 (en €) de l'option d'échange à la date $t = 0$ (utilisez les résultats précédents).
7. Quelle est la valeur du taux sans risque *implicite* dans le numéraire euros ?
8. Quelle est la valeur de la probabilité risque-neutre dans le numéraire euros ?
9. Retrouvez à l'aide des questions 7 et 8 la valeur de l'option d'échange.

Exercice n° 3 : Évaluation d'une option sur option

On se place dans le modèle de l'économie à 2 états et à deux dates. Dans cette économie existent 4 actifs :
- un taux sans risque $i = r - 1$,
- une action valant S_0 à $t = 0$, $S_1 = u\,S_0$ dans l'état "haut" et $S_1 = d\,S_0$ dans l'état "bas". Pour qu'il y ait absence d'opportunité d'arbitrage, on suppose que $d < r < u$.
- un option d'achat sur l'action (call), de prix d'exercice K et de date d'exercice $t = 1$ valant C_0 à la date $t = 0$. On suppose $d\,S_0 < K < u\,S_0$.
- une option d'achat sur l'option d'achat (call-call), de prix d'exercice L et de date d'exercice $t = 1$, valant CC_0 à la date $t = 0$.

1. Donnez la valeur CC_1 à la date $t = 1$ du "call-call" dans les deux états. En déduire la valeur limite du prix d'exercice L pour que le prix du "call-call" ne soit pas constamment nul. On supposera, par la suite, que cette condition est vérifiée.
2. Calculez CC_0 à l'aide du raisonnement "risque neutre"
3. Combien Δ_C de "call" faut-il vendre à $t = 0$ pour couvrir l'achat d'un "call-call" ? Retrouvez alors, par le raisonnement d'arbitrage, la valeur du "call-call" à la date $t = 0$.

4. Combien Δ_S d'action faut-il vendre à $t = 0$ pour couvrir l'achat d'un "call-call" ? Retrouvez alors la valeur du "call-call" à la date $t = 0$.
5. Commentaires sur le "call-call"

Exercice n° 4 : Arbre binomial et évaluation d'actifs

L'arbre binomial est l'extension à $n \geq 3$ dates du modèle à 2 états et 2 dates du cours. Sur ce marché, l'investisseur peut effectuer des transactions à chaque date $t \in \{0, \ldots, T-1\}$, $T > 0$ étant l'horizon ou l'échéance.

L'actif risqué sur ce marché vaut S_0 en $t = 0$, et à chaque date $t \geq 1$, le cours de l'actif peut monter : $S(t) = u\,S(t-1)$ avec une probabilité p ou baisser : $S(t) = d\,S(t-1)$ avec une probabilité $1 - p$ (*cf.* FIG. 2).

Il y a donc à chaque date t, $t+1$ états de la nature qu'on peut nommer "$u^j\, d^{t-j}$", $j \in \{0, \ldots, t\}$.

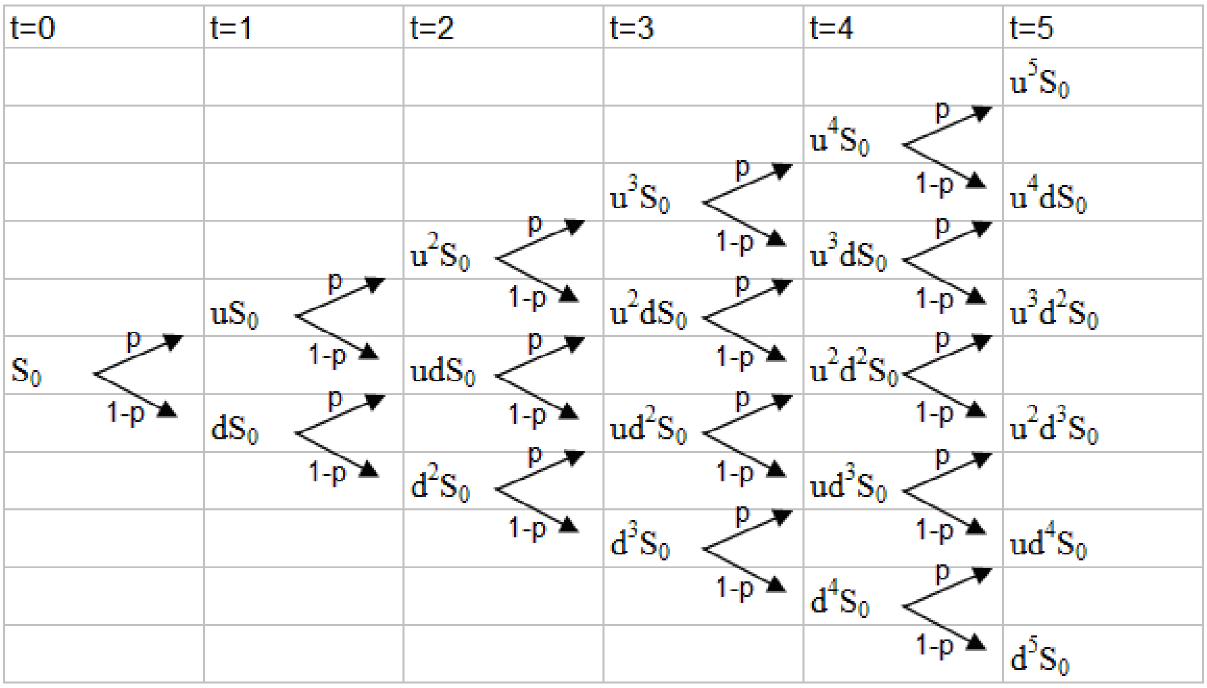

FIG. 2 – *Arbre binomial (exercice 4)*

Sur ce marché, la courbe des taux est plate et certaine : à chaque date $s \geq 0$ le taux de rendement de l'obligation zéro-coupon d'échéance $t > s$ vaut $r_f(s,t) = r^{t-s} - 1$. Un euro placé à la date $s \geq 0$ dans le zéro-coupon d'échéance $t > s$ rapporte donc à la date t, r^{t-s} €.

On suppose, de plus, $d < r < u$ et $p \in]0, 1[$.

1. Montrer que probabilité risque-neutre existe, est unique et donnez sa valeur p^*.
2. Calculez à la date $t > 0$ et dans l'état de la nature "$u^j\, d^{t-j}$" le prix $\pi_{u^j\, d^{t-j}}(u)$ d'un actif financier qui verse en $t+1$ le flux 1€ si le cours de l'action a augmenté, et 0€ s'il a baissé.

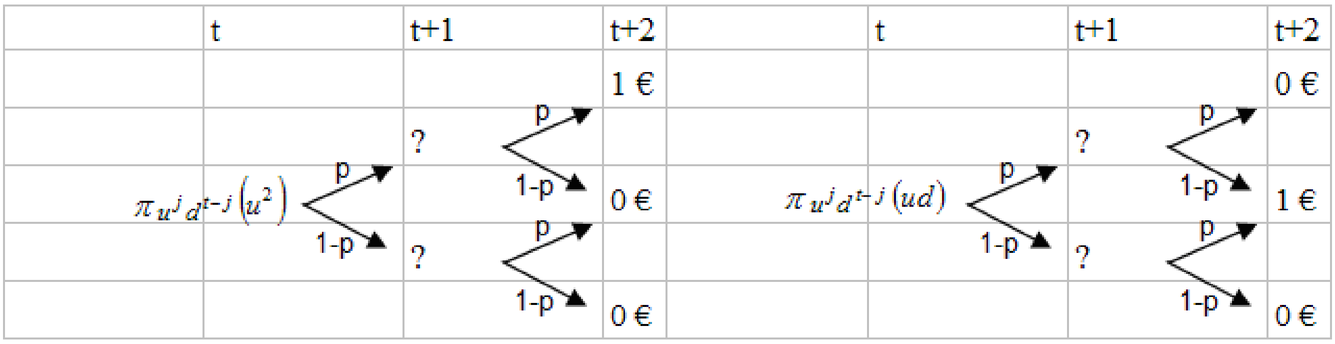

FIG. 3 – *Exercice 3 - question 3*

Calculez de même le prix $\pi_{u^j\,d^{t-j}}(d)$ d'un actif financier qui verse en $t+1$ le flux 1€ si le cours de l'action a baissé, et 0€ s'il a augmenté.

3. Calculez à la date $t > 0$ et dans l'état de la nature "$u^j\,d^{t-j}$" le prix $\pi_{u^j\,d^{t-j}}(u^2)$ (respectivement le prix $\pi_{u^j\,d^{t-j}}(u\,d)$, respectivement le prix $\pi_{u^j\,d^{t-j}}(d^2)$) d'un actif financier qui verse en $t+2$ le flux 1€ si le cours de l'action a augmenté deux fois (respectivement a augmenté une fois et baissé une fois entre ces deux dates, respectivement a baissé deux fois). Indication : commencez par calculer la valeur de marché de ces actifs à la date $t+1$ (*cf.* FIG. 3), et expliquez comment vous finissez le calcul.
4. En s'inspirant de la question précédente, calculez le prix $\pi(u^j\,d^{t-j})$ en 0 de la créance d'Arrow-Debreu qui verse à la date $t \geq 0$, 1€ dans l'état "$u^j\,d^{t-j}$" de la nature et 0€ dans tous les autres états.
5. Déduire de 1. et/ou de 4. le prix en $t = 0$ d'une option d'achat ou d'une option de vente européenne sur l'actif risqué de prix d'exercice K et de date d'exercice T.
6. Calculez la valeur de marché de l'option d'achat ou de vente européenne à chaque date intermédiaire et dans chaque état de la nature.
7. On appelle *stratégie Buy & Hold* une gestion de portefeuille consistant à prendre position en $t = 0$ et à dénouer sa position en $T > 1$ sans agir aux dates intermédiaires ($t = 1, \ldots, T-1$). Expliquez pourquoi il n'est pas possible de détenir un portefeuille *Buy & Hold* sans risque en $t = 0$ qui contient une option européenne d'échéance $T > 1$ et de l'action et du zéro-coupon.
8. On appelle *stratégie dynamique d'horizon* $T > 1$ une gestion de portefeuille pour laquelle on peut changer de position à chaque date intermédiaire. Montrez qu'il est possible de détenir un portefeuille *dynamique d'horizon* T sans risque en $t = 0$ qui contient une option européenne d'échéance $T > 1$ et de l'action et du zéro-coupon. Vous indiquerez comment, à chaque date t, vous constituez ce portefeuille.

Fond garanti

Une banque vous demande de gérer le contrat C_1 décrit de la manière suivante :

– L'échéance du contrat est $t = 4$.
– Le contrat a pour support une action de prix $S(t)$ à la date t et $S(0) = 100$€.
– Le prix de vente d'un contrat en $t = 0$ est fixé par la banque à F_0€.
– Le capital est garanti : à la date $t = 4$ vous devez verser au souscripteur, au minimum sa mise de fonds initiale (donc F_0€ par contrat souscrit).

- Si en $t = 4, S(t = 4) \geq 150$€, alors vous devez verser à votre client (en $t = 4$) 150€ par contrat souscrit.
- Le cours de l'action évolue suivant l'arbre binomial avec $u = 1{,}25$, $d = \frac{1}{u} = 0{,}8$, $p = 0{,}7$ (*cf.* Fig. 4) et le taux de rendement du zéro-coupon vaut $r - 1 = 7\%$.

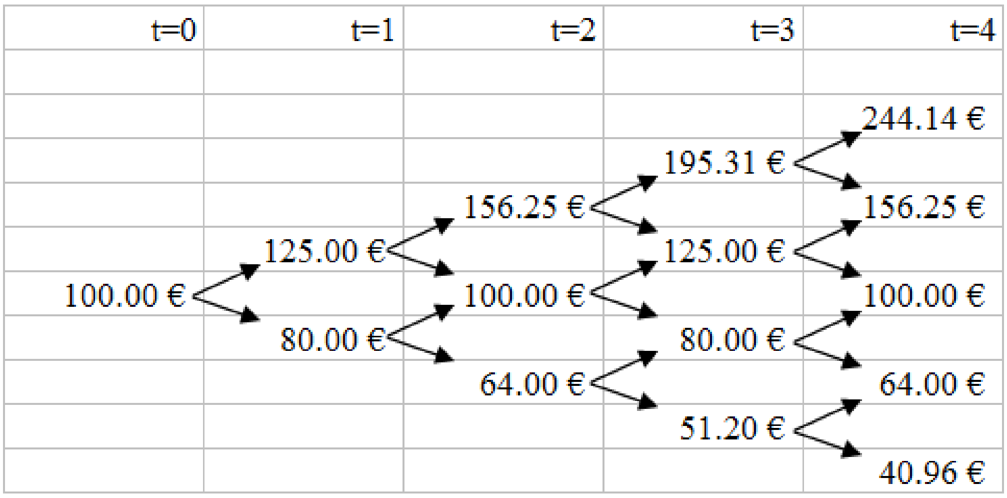

Fig. 4 – *Exercice 4- Evolution du cours de l'action*

9. Montrez que vous pouvez, dès $t = 0$ couvrir le contrat C_1 (c'est à dire garantir dès $t = 0$ que vous pourrez honorer le contrat en $t = 4$, sans avoir à emprunter et/ou vendre à découvert des titres en $t = 4$) par un portefeuille *Buy & Hold* contenant des options d'achat et/ou de vente et/ou de l'action et/ou du zéro-coupon. On précisera un tel portefeuille (P).
10. La banque souhaite commercialiser la part du contrat C_1 en $t = 0$ au prix initial (en $t = 0$) de $F_0 = 100$€. Votre rémunération est en partie liée aux plus-values que vous allez générer lors de la gestion de ce contrat. Allez-vous couvrir le contrat C_1 à l'aide du portefeuille (P) ? Pourquoi ?
11. Calculez le prix de marché, en $t = 0$ du contrat C_1. Acceptez-vous alors de gérer ce contrat ?
12. Calculez à chaque date et dans chaque état de la nature, la valeur de marché du contrat C_1.
13. Déterminer, à chaque date et dans chaque état de la nature, le portefeuille (portefeuille de couverture : en nombre d'action(s) et de zéro-coupon(s)) que vous allez détenir pour pouvoir honorer le contrat. Quelle est la valeur de marché en $t = 0$ de la plus-value que fait la banque sur ce contrat ?

Fond à formule

La même banque vous demande maintenant de gérer le contrat C_2 décrit de la manière suivante :
- L'échéance "normale" du contrat est $t = 4$.
- Le contrat a pour support la même action que le contrat C_1.
- Le prix d'un contrat en $t = 0$ est fixé par la banque à 100€.
- Si en $t = 2$, le prix de l'action a dépassé 120€, alors vous devez verser 130€ au client (par contrat souscrit) et le contrat se termine. Dans le cas contraire, le contrat C_2 donne les mêmes garanties (les mêmes flux) en $t = 4$ que le contrat C_1.

14. Calculez le prix de marché du contrat C_2 à chaque date t et dans chaque état de la nature.
15. Déterminez, à chaque date et dans chaque état de la nature, le portefeuille de couverture du contrat C_2.

Exercice n° 5 : Option d'échange en présence de versement de dividende

On se place dans une économie à 2 dates et deux états comme dans le cours. Dans cette économie, il y a deux actifs risqués S et T dont les prix valent respectivement $S(0)$€ et $T(0)$€ à la date $t = 0$. A la date $t = 1$, les prix de ces deux actifs risqués valent respectivement $S_{1u} = u_S\,S(0)$€ et $T_{1u} = u_T\,T(0)$€ dans l'état "haut", et $S_{1d} = d_S\,S(0)$€ et $T_{1d} = d_T\,T(0)$€ dans l'état "bas". On suppose $u_T > d_T$, $u_S > d_S$, $u_T \neq u_S$ et $d_T \neq d_S$ et $p \in]0, 1[$. Le détenteur de l'action S (respectivement de l'action T) en $t = 1$ se voit verser un dividende égal à $b_S\,S(0)$ (respectivement $b_T\,T(0)$) en $t = 1$. On suppose $b_S \geq 0$ et $b_T \geq 0$. Autrement dit, l'opération qui consiste à acheter le titre S (respectivement le titre T) à la date $t = 0$ et à le vendre à la date $t = 1$ rapporte une plus (moins)-value égale à $u_S\,S(0) + b_S\,S(0) - S(0)$ (respectivement $u_T\,T(0) + b_T\,T(0) - T(0)$) dans l'état "haut" et $d_S\,S(0) + b_S\,S(0) - S(0)$ (respectivement $d_T\,T(0) + b_T\,T(0) - T(0)$) dans l'état "bas".

1. Donnez la (les) condition(s) d'absence d'opportunité d'arbitrage dans cette économie.

On suppose que la (les) condition(s) d'absence d'opportunité d'arbitrage est (sont) vérifiée(s) et qu'on a $d_S + b_S > d_T + b_T$.

2. Calculez le prix des créances d'Arrow-Debreu.
3. Quelle est la composition du portefeuille sans risque? Combien vaut le taux sans risque?
4. Calculez la probabilité risque-neutre.
5. On considère l'actif financier (option d'échange) qui donne le droit (et non l'obligation) d'échanger $A \in \mathbb{N}^*$ action(s) S contre $B \in \mathbb{N}^*$ action(s) T à la date $t = 1$. Quel est le prix $E(0)$ de l'option d'échange à la date $t = 0$?
6. Application : Montrez qu'on retrouve facilement le prix de l'option d'achat qui a été calculé pour ce modèle dans le cours (on précisera les actifs à échanger et les taux b de dividende).
7. Quel portefeuille (composé d'une option d'échange et des deux actions) doit détenir l'investisseur en $t = 0$ pour qu'il soit sans risque? Peut-on, à partir de ce raisonnement retrouver le prix en $t = 0$ de l'option d'échange?

On étend le modèle à plus de deux dates. Sur ce marché, l'investisseur peut effectuer des transactions à chaque date $t \in \{0, \ldots, T^* - 1\}$, $T^* > 0$ étant l'horizon ou l'échéance.

Les deux actifs risqués sur ce marché valent toujours $S(0)$ et $T(0)$ en $t = 0$, et à chaque date $t \geq 1$, le cours des deux actifs peuvent "monter" : $S(t) = u_S\,S(t-1)$ ou $T(t) = u_T\,T(t-1)$ avec une probabilité p ou "baisser" : $S(t) = d_S\,S(t-1)$ ou $T(t) = d_T\,T(t-1)$ avec une probabilité $1-p$ Il y a donc à chaque date t, $t+1$ états de la nature qu'on peut nommer "$u^j\,d^{t-j}$", $j \in \{0, \ldots, t\}$. Entre chaque date t et $t+1$, les deux actifs risqués versent un dividende $b_S\,S(t)$ ou $b_T\,T(t)$ proportionnel au cours à la date t. L'opération qui consiste à acheter le titre S (respectivement le titre T) à la date t et à le vendre à la date $t+1$ rapporte une plus (moins)-value égale à $u_S\,S(t) + b_S\,S(t) - S(t)$ (respectivement $u_T\,T(t) + b_T\,T(t) - T(t)$) si les cours ont "montés" et et $d_S\,S(t) + b_S\,S(t) - S(t)$ (respectivement $d_T\,T(t) + b_T\,T(t) - T(t)$) s'ils ont "baissés".

On considère une option d'échange (européenne) de $A \in \mathbb{N}^*$ action(s) S contre $B \in \mathbb{N}^*$ action(s) T d'échéance T^*. En T^* (et seulement en T^*), cette option donne le droit d'échanger A titre(s) S contre B titre(s) T.

8. Montrer que la probabilité “risque-neutre” est la même que dans la question 4.
9. En déduire le prix de l'option d'échange en $t = 0$?
10. On appelle *portefeuille de couverture* de l'option d'échange, le portefeuille qui ne contient que les deux actions S et T et qui permet de répliquer exactement les flux de l'option d'échange. Expliquez comment est construit, à chaque date, ce portefeuille.