Notion de base d'éco :

ch ① : théorie de l'utilité :

I – théorie de l'utilité ordinaire :

biens et agents économiques : biens s'échangent entre agents, agents producteurs, agents consommateurs

les choix : les agents doivent choisir en $k \in \mathbb{N}^*$ biens n disponible

un choix = un vecteur de $\mathbb{R}^k$ $x = (x_1, \dots, x_k)$

x_i = nombre d'unité de bien i choisi je note $X \in \mathbb{R}^k$ l'ensemble des paniers possible.

3 – relation de préférence :

chaque agent est muni d'une relation de préférence $\succcurlyeq$ telle que $\forall x, y \in X$ $x \succcurlyeq y$ si l'agent préfère le panier x au y

'$\succ$' préférence stricte '$\sim$' indifférence

la relation de préférence doit vérifier d'axiome :

- → comparabilité : la relation de préférence est une relation binaire totale : $\forall x, y \in X$, ou bien $x \succcurlyeq y$ ou $y \succcurlyeq x$.
- → transitivité : soient $x, y, z \in X$, si $x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq z$ alors $x \succcurlyeq z$

II – préordre de préférence et fonction d'utilité :

Déf : Une fonction d'utilité décrivant un préordre de préférence est une fonction U définie sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

i) $x \succ y$ ssi $U(x) > U(y)$

ii) $x \sim y$ ssi $U(x) = U(y)$

⚠ les axiomes 1 et 2 ne suffisent pas pour assurer pour une relation de préférence une fonction d'utilité il faut en plus $\forall x \in X$ les deux sous ensembles : axiome 1.3

$Y = \{y \in X, y \succ x\}$ et $Z = \{z \in X, x \succ z\}$ sont 2 ouverts dans X

Théorème : (Debreu)

toute relation de préférence défini sur l'ensemble X et respectant les axiomes 1.1 à 1.3 peut être représenté par une fonction d'utilité continue $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que i) $x \succ y$ ssi $U(x) > U(y)$

ii) $x \sim y$ ssi $U(x) = U(y)$

2 – La fonction d'utilité est ordinale :

ordinale c-a-d : son seul but est de traduire l'ordre des préférences (elle n'est pas unique et elle a pas d'unité)

→ F strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $V(x) = F(U(x))$ V est aussi une fonction d'utilité

⚠ une fonction d'utilité ordinale est une fonction d'utilité unique à toute transformation strictement positive près.

III – hypothèse de monotonicité et de convexité des préférences :

l'individu est gourmand il préfère les situations dans lesquelles il obtient plus de chose c'est l'hypothèse de non-satiété

Théorème 1.1 Monotonicité :

$\forall x, y \in X$ $x + y \succcurlyeq x$

si l'ordre des préférences est monotone il en est même pour la fonction d'utilité ordinale

$\forall x, y \in X$ $U(x+y) \geq U(x)$

Théorème 1.2 : Stricte convexité :

$\forall \alpha \in]0, 1[$ et x, y et $z \in X$ avec $y \neq z$ si $y \succcurlyeq x$ et $z \succcurlyeq x$ alors $\alpha z + (1-\alpha) y \succ x$

l'individu privilégie la diversification supposons que $y \sim z$ pour un individu alors par h de stricte convexité l'individu préfère toute combinaison de y et de z

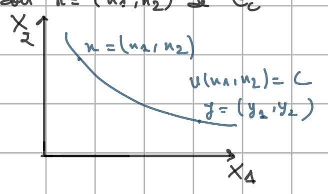
Corollaire : U est strictement quasi concave :

$\forall \alpha \in]0,1[$ si $y \succ x$ avec $y \neq x$, $U(y) > U(x)$ et $U(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq U(x)$

IV - le taux marginal de substitution :

courbe d'indifférence $\mathcal{C}_c = \{x \in X, U(x) = c\}$

Soit $x = (x_1, x_2)$ de $\mathcal{C}_c$



⇒ la quantité du bien 2 que l'individu est prêt à sacrifier pour qu'un augmentation dx_1 des quantités du bien 1 laisse son utilité inchangé (reste sur la même $\mathcal{C}_c$)

⟹ taux marginal de substitution (TMS) = la pente de la tangente à $\mathcal{C}_c$ lorsqu'elle est evalué à $x = (x_1, x_2)$

$$TMS_{2/1} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U(x_1,x_2)=C}$$

⚠ $U(x_1, x_2) = C \Rightarrow x_2 =$ fonction implicite de $x_1 = h(x_1)$

puisque la fonction d'utilité est continue donc différentiable donc on peut appliquer théorème des fonction implicite :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

d'où $\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U(x_1,x_2)=C} = \frac{-\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}$ comme la fonction d'utilité est monotone croissante alors $\frac{\partial U}{\partial x_1} > 0$ et $\frac{\partial U}{\partial x_2} > 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} < 0$ (la pente d'une courbe d'indifférence est toujours négatif)

⚠ pour F strictement croissante $\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\mathcal{U}(x_1,x_2)=C} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{F(C) = V(x_1,x_2)}$
il ne dépend pas de la fonction d'utilité choisi

V - choix de consommation et d'épargne en univers certain

économie d'échange : une économie où il n'y a pas de production simplement des échanges de biens, de consommation des titres financiers, donc ici : les titres financier s'analysent comme des obligation sans risque et un agent ne peut qu'acheter ou vendre un bien.

1) le modèle : 2 dates 0 : aujourd'hui, 1 : futur ; k agents $k \in \{1, \dots, K\}$ 1 seul bien $x^{(k)} = (x^{(k)}(0), x^{(k)}(1))$

il consomme $x^k(0)$ unité de bien à $t=0$ et $x^k(1)$ unité de biens en $t=1$, chaque agent est munit de sa propre fonction d'utilité $U^{(k)}$ croissant et concave.

2) préférence pour le present :

un individu a une préférence pour le present ssi $\forall x_0, x_1 \in X$ $\forall \delta_0 > 0$ on a :

$$U^{(k)}(x_0 + \delta_0, x_1) > U^{(k)}(x_0, x_1 + \delta_0)$$

il signifie que l'individu préfère voir sa consommation actuelle augmenté de $\delta > 0$ plutôt que de voir sa consommation future s'accroître de δ. (c'est bien différent de la croissance de la fonction d'utilité c-à-d l'agent préfère toute augmentation de la consommation à un instant donné)

$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_0}(x_0, x_1) > \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_1}(x_0, x_1)$ donc $\left.\frac{dx_1}{dx_0}\right|_{U^k(x_0,x_1)=C} < -1$

indifférence pour le present $= -1$ pour le future > -1

le taux de préférence pour le present est :

$$r^k(u_0,u_1) = -\left(\frac{du_1}{du_0}\Big|_{U^k(u_0,u_1)=C} + 1\right) = \frac{\frac{\partial U^k(u_0,u_1)}{\partial u_0}}{\frac{\partial U^k(u_0,u_1)}{\partial u_1}} - 1$$

le taux de préférence pour le present est défini $\frac{du_1}{du_0}\Big|_{U(u_0,u_1)=C} = -(1 + r^k(u_0,u_1))$

l'individu exige un supplement de bien en date 1 d'autant plus élevé qu'il doit renoncer pour cela a une consommation present $(r>0)$

l'individu accepte d'echange du_0 contre du_1 unité de plus si $du_1 = du_0(1+\underset{>0}{r})$

3_ espace des opportunités des agents :

1/ les dotations initiales de l'individu :

sont les ressources dont cet agent dispose a chacun des deux dates, on suppose que chaque individu k est doté de $y^k = (y_0^k, y_1^k)$ unité de consommation $y_0^k>0$, $y_1^k>0$

2/ le marché financier :

on fabri que un marché financier,

- une obligation "zero-coupon" de taux r_f : si j'achete le zero-coupon en $t=0$ je dois donner $\frac{1}{1+r_f}$ unité de bien en $t=0$ et je recevrais 1 unité de bien en $t=1$.
- si je vend le zero coupon s, je reçoi $\frac{1}{1+r_f}$ unité et je donne une 1 unité en $t=1$.

3/ la contrainte du budget :

chaque agent est muni d'une dotation initiale $y^{(k)} = (y^{(k)}(0), y^{(k)}(1))$ avantage du marché financier il peut modefier cette dotation initial,

si on note $N^{(k)}$ le nombre de zero coupon que l'agent achete en $t=0$ (donc il epargne $N^{(k)}>0$) ou qu'il vendent en $t=0$ (donc il emprunte), si on note $x^{(k)} = (x^{(k)}(0), x^{(k)}(1))$ la quantité de biens que l'agent va consommer en $t=0$ et $t=1$,

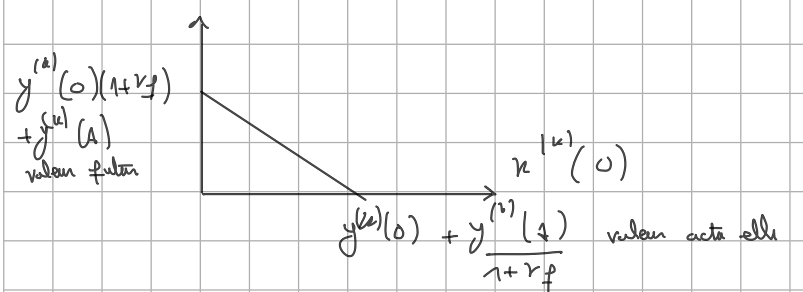
$$x^{(k)}(0) = y^{(k)}(0) - \frac{N^{(k)}}{1+r_f} \qquad (3b1)$$

$\frac{1}{1+r_f} \rightarrow t=0$ $\quad 1 \leftarrow t=1$

$$x^{(k)}(1) = y^{(k)}(1) + N^{(k)} \qquad (3b2)$$

$\frac{1}{1+r_f} \leftarrow t=0$ $\quad 1 \rightarrow t=1$

donc $$x^{(k)}(0) + \frac{x^{(k)}(1)}{1+r_f} = y^{(k)}(0) + \frac{y^{(k)}(1)}{1+r_f}$$



l'agent k va chercher le couple de consommation $(x^{(k)}(0), x^{(k)}(1))$ qui maximise sa satisfaction dans son utilité $U^{(k)}(x^{(k)}(0), x^{(k)}(1))$

$$x^{(k)*} = \underset{\substack{x^{(k)} \in \mathbb{R}^2 \\ x^{(k)} \text{ vérifie la contrainte du budget}}}{\arg\max}\; U^{(k)}(x^{(k)})$$

$$x^{(k)}(1) = y^{(k)}(1) + (y^{(k)}(0) - x^{(k)}(0))(1+r_f)$$

$$\max U^{(k)}\left(x^{(k)}(0), y^{(k)}(1) + (y^{(k)}(0) - x^{(k)}(0))(1+r_f)\right)$$

solution $\rightarrow$ condition du 1er ordre

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_0}(\,) - (1+r_f)\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_1}(\,) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \max U^k(x_0, x_1) \\ \text{sachant que :} \\ y_0^k = x_0^k + \frac{N^k}{1+r_f} \\ x_1^k = y_1^k + N^k \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max U^k(x_0, x_1) \\ \text{sachant que} \\ y_0^k + \frac{y_1^k}{1+r_f} = x_0^k + \frac{x_1^k}{1+r_f} \end{array}\right.$$

donc au lieu de choisir N^k l'individu recherche directement le profil de consommation qui lui permet de maximiser son utilité

⚠ l'épargne constitue par l'agent à $t=0$ détermine complètement sa consommation à la date 1.

pour résoudre le problème on forme alors le lagrangien $\mathcal{L}$ tq : $\mathcal{L} = U^k(x_0, x_1) + \lambda\left(x_0 + \frac{x_1}{1+r_f} = y_0 + \frac{y_1}{1+r_f}\right)$

λ le multiplicateur de lagrange, le problème admet un sol optimale (x_0^*, x_1^*) satisfait les conditions de maximisation $\mathcal{L}$ du 1er ordre qui sont :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} = \frac{\partial U^k}{\partial x_0}(x_0, x_1) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial U^k(x_0, x_1)}{\partial x_1} + \frac{\lambda}{1+r_f} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\partial U^k}{\partial x_0}(x_0, x_1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_0^k + \frac{x_1^k}{1+r_f} - y_0^k - \frac{y_1^k}{1+r_f} = 0 \end{array}\right.$$

d'où :
$$\frac{\frac{\partial U^k}{\partial x_0}(x_0, x_1)}{\frac{\partial U^k}{\partial x_1}(x_0, x_1)} = -(1+r_f) = TMS$$

4. equilibre du marché

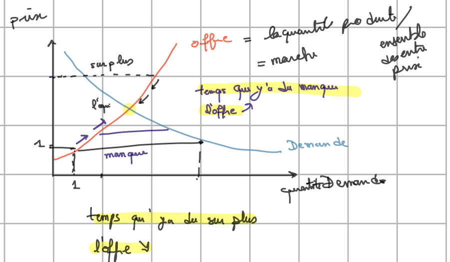
obj : on vient de voir que les agents choisissent leur place de consommation en fonction du taux d'interet du marché

qst : Comment on fixe le taux d'interet ?

on cherche r_f pour que le marché financier soit à l'equilibre $\Rightarrow$ tout ce qui est emprunté est prêté (et vice _versa)

en $t=0$:
$$\sum_{k=0}^{K} x^{(k)}(0, r_f) = \sum_{k=0}^{K} y^{(k)}(0) \quad (5,1)$$

en $t=1$:
$$\sum_{k=0}^{K} x^{(k)}(1, r_f) = \sum_{k=0}^{K} y^{(k)}(1) \quad (5,2)$$



la loi de Walras $(5,1) \Leftrightarrow (5,2)$ à cause de l'équation du budget

théorème : l'equilibre du marché du bien (tout ce qui est produit est consommé) est atteint si r_f est tq :

$$\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}(0, r_f) = \sum_{k=1}^{K} y^{(k)}(0) \quad \text{et } \forall k \in \{1 \ldots K\}$$

$$r_f = r^{(k)}\left(x^{(k)}(0, r_f), x^{(k)}(1, r_f)\right)$$

EXO : $U^{(k)}(x_0, x_1) = \ln x_0 + \ell_k \ln(x_1)$ equilibre sur le marché si :

$$\frac{\frac{1}{x_0^{(k)}}}{\ell_k \frac{1}{x_1^{(k)}}} = 1 + r_f \quad \forall k \in \{1 \ldots, K\}$$

et $x_1^{(k)} = y_1^{(k)} + (y_1^{(k)} - x_0^{(k)})(1+r_f)$

et $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ $\quad x^{(k)}(0, r_f) = \dfrac{y_0^{(k)}}{(1+\rho_k)(1+r_f)} + \dfrac{y_1^{(k)}}{1+\rho_k}$ et $\sum x_0^k = \sum y_0^k$

en sommant on trouve alors $\quad r_f = \dfrac{\sum y_1^k / 1+\rho_k}{\sum y_1^{(k)} - \sum y_0^k / 1+\rho_k} - 1$