Feuille 5 : Transformée de Fourier

Exercice 1 (Calculs de transformées de Fourier) *1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer celle de $g(x) = U(x)f(x)$, U étant l'échelon unité, valant 1 sur $\mathbb{R}_+$ et 0 sinon. En déduire que :*

$$F[x^n e^{-x} U(x)](\nu) = \frac{n!}{(1+2i\pi\nu)^{n+1}}$$

2. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\rho_n(x) = n\Pi(nx)$ (Π étant défini à l'équation (2). Tracer les graphes de ρ_n et $\hat{\rho}_n$. Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$?*

3. *Modulation*

   Evaluer $F[\cos(2\pi\nu_0 x) f(x)]$. Exemple : $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$. Illustration graphique.

Exercice 2 *Le but de cet exercice est le calcul de la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$.*

1. *Vérifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tracer son graphe.*
2. *Montrer que f est solution de l'équation différentielle :*

$$y' + 2\pi x y = 0 \tag{1}$$

3. *Appliquer la transformée de Fourier à l'équation (1) et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\hat{f}$.*
4. *En déduire le calcul de $\hat{f}$.*

Exercice 3 (Fonction porte) *Soit Π la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq 1/2 \\ 0 & si \quad |x| > 1/2 \end{cases} \tag{2}$$

1. *Calculer $\hat{\Pi}$ et tracer le spectre de Π. Vérifier le théorème du cours $\lim_{\nu \to \infty} \hat{\Pi}(\nu) = 0$.*

Exercice 4 (Fonction triangle) *Soit Λ la fonction, affine par morceaux, valant 0 sur $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, et 1 au point $x = 0$.*

1. *Donner l'expression de $\Lambda(x)$.*
2. *Montrer que Λ est dérivable par morceaux, et montrer que l'on peut écrire $\Lambda'(x) = \Pi(x + 1/2) - \Pi(x - 1/2)$.*
3. *Calculer la transformée de Fourier de Λ'. En déduire celle de Λ.*
4. *Montrer que Λ s'exprime en fonction de Π par le produit de convolution $\Lambda = \Pi * \Pi$.*

Exercice 5 (Fourier et convolution) *Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation intégrale ($a > 0$) :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|} f(t)dt = e^{-x^2}$$

Exercice 6 (Fourier et convolution) *Soit a et b deux réels tels que $a, b > 0$ et $a \neq b$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de $e^{-a|x|}$.*
2. *En déduire les valeurs des produits de convolution $\frac{1}{a^2+x^2} * \frac{1}{b^2+x^2}$ et $e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$.*

Exercice 7 (Fourier et convolution) *Montrer, en utilisant la régularité d'une transformée de Fourier, qu'il n'existe pas de fonction χ, intégrable sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $\chi * \chi = \chi$. En déduire que la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément neutre.*

Exercice 8 (Equation de la chaleur) *Soit l'équation aux dérivées partielles :*

$$\begin{cases} \partial_t f = \partial_{xx} f \\ f(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{3}$$

où φ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. On pose : $F(\nu,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{-2i\pi\nu x} dx$.

1. *On suppose que la solution f appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Vérifier que F vérifie :*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 4\pi^2\nu^2 F = 0$$

2. *En déduire F, puis f.*

Exo1 (modifié)

1) Calculer la TF de $f : x \mapsto e^{-|x|}$

2) En déduire la TF de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

1) On a $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ clairement et $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t + |t|} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-t(1+2i\pi x)} dt + \int_{0}^{\infty} e^{+t(1-2i\pi x)} dt$$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\hat{f}(x) = \frac{2}{1+4\pi^2 x^2}$

2) Vu que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, le théorème d'inversion assure $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{2i\pi x x} dx$

Ainsi $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+4\pi^2 x^2} e^{2i\pi x x} dx \overset{u = 2\pi x}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+u^2)} e^{iux} du$

Or $\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2} e^{-2i\pi u x} du$

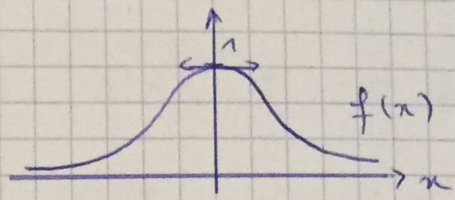
Il est donc clair que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\hat{g}(x) = \pi f(-2\pi x) = \pi e^{-2\pi|x|}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} e^{+iu} du = \pi/e$$

Exo 2 On pose $f : x \mapsto e^{-\pi x^2}$

① On a $\int_{\mathbb{R}} f = 2\int_0^{\infty} f$ et $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \to +\infty}$

Donc $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$



② On a $f'(x) = -2\pi x f(x)$

Donc f vérifie (E) $Y' + 2\pi x Y = 0$

③ On a $\mathcal{F}(Y' + 2\pi x Y) = \mathcal{F}(0) = 0$

linéarité $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}(Y') + 2\pi \mathcal{F}(xY) = 0$

Or $\mathcal{F}(Y') = 2i\pi r \mathcal{F}(Y)(r)$

$$\mathcal{F}(xY(x))(r) = \frac{-1}{2i\pi} \frac{d}{dr}\left(\mathcal{F}(Y)(r)\right)$$

D'où $2i\pi r \hat{Y}(r) + 2\pi \times \frac{-1}{2i\pi} \frac{d}{dr}(\hat{Y})(r) = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dr}\hat{Y}(r) + 2\pi r \hat{Y}(r) = 0$$

Dès lors Y et $\hat{Y}$ vérifient toutes les deux (E), une équadif linéaire homogène d'ordre 1.
Les solutions étant donc une droite linéaire

On a $Y = \lambda \hat{Y}$ et $Y(0) = 1$

D'après le thm d'inversion $\hat{Y}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$

Il reste $\lambda = 1$

Et $f : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est un point fixe de $\mathcal{F}$

Exo 7 Supposons par l'absurde $\exists \chi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
ⓐ tq $\chi * \chi = \chi$

Dès lors $\mathcal{F}(\chi * \chi) = \mathcal{F}(\chi) \times \mathcal{F}(\chi) = \mathcal{F}(\chi)^2 = \mathcal{F}(\chi)$

Dès lors $\hat{\chi} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{selon } x \\ 1 & \text{selon } x \end{cases}$

Or par $\mathcal{C}^0$ de $\hat{\chi}$ sur $\mathbb{R}$ puisque $\chi \in \mathcal{L}^1$
on sait que $\hat{\chi} = \tilde{0}$ ou $\hat{\chi} = \tilde{1}$ (le cas $\tilde{0}$ n'est pas intéressant)

Ainsi $\hat{\chi} = \tilde{1}$ et d'après Lebesgue $\lim\limits_{+\infty} \hat{\chi} = 0$ Absurde

ⓑ Il n'y a donc pas d'élément neutre dans $(\mathcal{L}^1, *)$ car sinon $e * e = e$

$\Rightarrow$ Il faut être dans un espace plus grand
↳ Celui des distributions