Feuille 4 : factorisation LU

Exercice 1 : Calculer la factorisation LU de la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Montrer que toute matrice à diagonale strictement dominante admet une factorisation LU.

Exercice 3 : On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_3 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

On suppose que A est inversible et admet une factorisation LU. On cherche L et U sous la forme :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \gamma_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_3 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les coefficients α_k sont non nuls et donner une relation de récurrence qui détermine les coefficients γ_k et α_k.

2. Lorsque $n \to +\infty$, donner un équivalent du nombre d'opérations arithmétiques élémentaires nécessaires au calcul de L et U ainsi qu'à la résolution d'un système $A\,x = b$ ($x, b \in \mathbb{R}^n$) utilisant cette factorisation LU.