Notes de cours

Analyse pour l'Ingénieur

ENSIMAG $1^{\text{ère}}$ **Année** 1^{er} **semestre**

E. Maître et V. Perrier

2014/2015

Avertissement

Certaines parties du poly sont issues de notes prises par des étudiants dans les années antérieures. Malgré quelques relectures, des erreurs et des imprécisions de rédaction peuvent subsister.
De plus le contenu de ce poly peut parfois être différent du cours traité en amphi (par sa forme mais aussi par son contenu).

Toute remarque, critique ou suggestion permettant d'en améliorer le contenu sont les bienvenues.

E.M. et V. P.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces Métriques

1.1 Définitions

Définition 1 *On appelle* <u>*espace métrique*</u> *la donnée d'un ensemble E et d'une fonction distance $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

(i) $\forall\, x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\forall\, x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $\forall\, x, y, z \in E,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Une partie $F \subset E$, $F \neq \emptyset$ est un <u>*sous-espace métrique*</u> *de (E,d) si F muni de la distance d est un espace métrique.*

Remarque 1 $\forall\, x, y, z \in E,\ |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$

Exemples 1

1) $\mathbb{R}^n (n \geq 1),\ d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$ *où* $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$

2) $\mathbb{R}^n (n \geq 1),\ d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

3) Soit A un ensemble, $A \neq \emptyset$.
On pose $E = \{f : A \to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ bornée}\}$ *(i.e.* $\sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty$*)*
Si $f, g \in E$, $f - g \in E$.
Posons $d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$
d est une distance sur E.

A partir de maintenant, (E,d) est un espace métrique.

Définition 2 *Soient $a \in E$ et $r > 0$.*

(i) La <u>*boule ouverte*</u> *de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble*

$$\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E \quad | \quad d(a,x) < r\}$$

(ii) La boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$\mathcal{B}'(a,r) = \{x \in E \quad | \quad d(a,x) \leq r\}$$

(iii) La sphère de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E \quad | \quad d(a,x) = r\}$$

Définition 3

(i) $A \subset E$ est ouvert si et seulement si $\forall\, x \in A$, $\exists\, r > 0$ tq $B(x,r) \subset A$.

(ii) $F \subset E$ est fermé si et seulement si le complémentaire de F dans E est ouvert.

Remarque 2 *$\mathcal{B}(a,r)$ est un ouvert et $\mathcal{B}'(a,r)$ est un fermé.*

Notions de topologie générale

Définition 4 *On appelle espace topologique la donnée d'un ensemble E et d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de E, appelées parties ouvertes de E, telles que :*

(i) $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{T}$

(ii) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert

(iii) La réunion quelconque d'ouverts est un ouvert

Définition 5 *Soit E un espace topologique.*
$F \subset E$ est fermé si le complémentaire de F dans E est un ouvert.

Définition 6 *Soit E un espace topologique, et $A \subset E$.*
$V \subset E$ est un voisinage de A dans E s'il existe U ouvert dans E tel que $A \subset U \subset V$.
Si $A = \{a\}$, $a \in E$, on parle de voisinage d'un point.

Définition 7 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de E et soit $x \in E$.*
On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x si pour tout voisinage V de x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0$, $x_n \in V$.

Remarque 3

1) Soit (E,d) un espace métrique. E est un espace topologique si on définit les ouverts comme dans la définition 3 (page 6) .

2) Soit (E,d) un espace métrique. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x dans E si et seulement si $d(x_n,x)$ tend vers 0.

Démonstration

— $U_1 \dots U_N$ ouverts, $U = \bigcap_{i=1}^{N} U_i$

Soit $x \in U$. $\forall\, i$, $x \in U_i$ donc $\forall\, i$, $\exists\, r_i > 0$ tq $\mathcal{B}(x,r_i) \subset U_i$.
Posons $r = \min_{1\leq i\leq N} r_i$. Alors $\mathcal{B}(x,r) \subset U$.

— U_j ouverts, $j \in J$, $U = \bigcup_{j \in J} U_j$

Soit $x \in U$. $\exists\, j \in J$ tq $x \in U_j$. Donc $\exists\, r > 0$ tq $\mathcal{B}(x, r) \subset U_j \subset \bigcup_{k \in J} U_k = U$.

Définition 8 *Soit E un espace topologique et $A \subset E$.*
L'adhérence de A notée $\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant A (i.e. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A).

Remarque 4

1) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \longrightarrow x$

2) A est fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

Définition 9 *Soit E un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur E.*
d_1 est équivalente à d_2 ($d_1 \sim d_2$) s'il existe $a, b > 0$ tels que

$$\forall\, x, y \in E,\ a.d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b.d_1(x, y)$$

Définition 10 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques.*
Une application $f : E \longrightarrow E'$ est continue en $x_0 \in E$ si pour tout voisinage V' de $f(x_0)$ dans E', il existe un voisinage V de x_0 dans E tel que $f(V) \subset V'$.
f est continue si elle est continue en tout point de E.

Proposition 1

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en $x_0 \in E$

(ii) pour tout V' voisinage de $f(x_0)$ dans E', $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x_0 dans E

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tq $d(x, x_0) \leq \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$

1.2 Espaces métriques complets et théorème du point fixe

(E, d) est un espace métrique

Définition 11 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinie est de Cauchy si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall\, p, q \geq n_0,\ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

Proposition 2

Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration
Soit $x_n \longrightarrow x$, soit $\varepsilon > 0$.
$\exists\, n_0$ tq $\forall\, n \geq n_0,\ d(x, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall\, p, q \geq n_0,\ d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Remarque 5 *La réciproque est fausse (cf. suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$).*

Définition 12 *Un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Exemples 2

1) $\mathbb{R}^k$ est complet.

2) $E = C[0, 1]$.
Si on pose $d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$, d est une distance sur E.
E n'est pas complet.

Proposition 3

Soit (E, d) un espace métrique.

(i) Si E est complet et si $F \subset E$ est fermé, (F, d) est complet.

(ii) Soit $F \subset E, F \neq \emptyset$. Si (F, d) est complet, F est fermé dans E.

Théorème 1 Théorème du point fixe contractant

Soit (E, d) un espace métrique complet.
Soit $T : E \longrightarrow E$ une application telle que $\forall\, x, y \in E,\ d(Tx, Ty) \leq k.d(x, y)$ où k désigne une constante dans $[0, 1[$.
Alors il existe un unique point $x \in E$ tel que $Tx = x$.
De plus, x est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = Tx_n$ avec x_0 quelconque dans E.

Démonstration

— Unicité :
Soient $x, y \in E$ tels que $Tx = x$ et $Ty = y$.
$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \Longrightarrow d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$

— Existence :
Soit $x_0 \in E$ et posons $\forall\, n \geq 1,\ x_n = Tx_{n-1}$.
Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n-1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2} \\ &\leq k\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq k^{n-1}\, d(x_1, x_0) \text{ par récurrence} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{n+m-1} + \cdots + k^n)\, d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n(1 + k + \cdots + k^{n-1})\, d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc $\exists\, x \in E$ tq $x_n \longrightarrow x$ et on a : $x_n = Tx_{n-1} \Longrightarrow x = Tx$ par passage ‡ la limite car T est continue.

Remarque 6 $d(x, x_n) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)$

Application

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant :

$$\exists\, M > 0 \text{ tq } \forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ |f(x,y) - f(x,z)| \leq M\ |y - z|$$

(f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément par rapport à la première variable).
$\forall\, x_0 \in \mathbb{R},\ \forall\, y_0 \in \mathbb{R},$ il existe $y \in C^1(\mathbb{R})$ unique telle que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Exemple 3 *Exemple de fonction vérifiant les hypothèses :*
$f(x,y) = a(x)\, y$ *avec* a *continue et bornée.*
$|f(x,y) - f(x,z)| = |a(x)|\ |y - z| \leq \|a\|_\infty\ |y - z|$

Lemme 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant x_0. On a l'équivalence suivante :

1) $y \in C^1(I)$ est solution de 1.1 (page 9) sur I

2) $y \in C^1(I)$ est solution de : $\forall\, x \in I,\ y(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

Démonstration
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que
$\exists\, M > 0$ tq $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ |f(x,y) - f(x,z)| \leq M\ |y - z|$.
Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.
Soit $R > 0$ tel que $R\, M < 1$.
On pose $E = C[x_0, x_0 + R]$, $d(y,z) = \displaystyle\sup_{x_0 \leq t \leq x_0 + R} |y(t) - z(t)|$
(E, d) est complet.

On pose $T : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & Ty \end{array}$ tel que $\forall\, x \in [x_0, x_0 + R],\ Ty(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$

Soient $y, z \in E, x \in [x_0, x_0 + R]$.

$$\begin{aligned}
|Ty(x) - Tz(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(s, y(s)) - f(s, z(s))\right)\, ds \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|\, ds \\
&\leq \int_{x_0}^{x} M\, |y(s) - z(s)|\, ds \\
&\leq M\, d(x, z) \int_{x_0}^{x_0+R} ds \\
&= R\, M\, d(y, z)
\end{aligned}$$

Or ceci est vrai pour tout x dans $[x_0, x_0 + R]$, d'où $d(Ty, Tz) \leq M\, R\, d(y, z)$
D'après le théorème du point fixe 1 (page 8) , il existe donc un unique $y \in E$ tel que $Ty = y$.
Et par le lemme 1 (page 9) , y est solution de l'équation 1.1 (page 9) sur $[x_0, x_0 + R]$.
On peut ensuite étendre la solution sur $\mathbb{R}$ en se plaçant en $x_0 + R$ etc...

Remarque 7
On a le même R partout grâce à l'uniformité.
Si on prend $f(x, y) = y^2$: $|f(x, y) - f(x, z)| \leq |y - z|\, |y + z|$
Donc ça ne marche pas : on a un M au voisinage du point auquel on se place.
Il faut prendre $R_1 > 0, [x_0, x_0 + R_1]$, $R_2 > 0, [x_0 + R_1, x_0 + R_1 + R_2] \ldots$
Donc le résultat est valable uniquement sur $[x_0, a]$ avec $a < +\infty$.

1.3 Espaces métriques compacts

Définition 13 *Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E, A \neq \emptyset$.*
On dit que A est <u>compact</u> si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de A on peut extraire une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans A.

Remarque 8 *A est compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 14 *Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E, A \neq \emptyset$.*
Le <u>diamètre</u> de A est par définition :

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y) \in [0, +\infty]$$

On dit que A est <u>borné</u> si $\delta(A)$ est fini.

Proposition 4

Si A est compact, A est fermé et borné.

Démonstration

— A est fermé :
Soit $x \in E$ tel que $x = \lim x_n$, avec $\forall\, n,\ x_n \in A$.
Il existe (n_k) strictement croissante telle que x_{n_k} converge dans A, donc $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} \in A$.

— A est borné :
Par l'absurde : si A n'est pas borné, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $d(x_n, y_n) \longrightarrow +\infty$
$\exists\,(n_k) \nearrow\!\nearrow$ tq $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in A$.
$\exists\,(k_j) \nearrow\!\nearrow$ tq $y_{n_{k_j}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y \in A$.
On a aussi $x_{n_{k_j}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x \in A$.
Alors : $\underbrace{d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})}_{\longrightarrow+\infty} \leq \underbrace{d(x_{n_{k_j}}, x)}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{d(y_{n_{k_j}}, y)}_{\longrightarrow 0} + d(x, y)$ ce qui est impossible.

Proposition 5

> 1) Si A est compact, alors A est complet.
> 2) Si A est compact et si $F \subset A, F \neq \emptyset$ et F fermé, alors F est compact.

Démonstration

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans A.
$\exists\,(n_k) \nearrow\!\nearrow$ tq $x_{n_k} \longrightarrow x \in A$. Alors $x_n \longrightarrow x$.
(Si une suite extraite d'une suite de Cauchy est convergente, alors la suite est convergente).

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F.
$\forall\, n,\ x_n \in A$. Donc $\exists\,(n_k) \nearrow\!\nearrow$ tq $x_{n_k} \longrightarrow x \in A$.
Comme F est fermé, $x \in F$.

Proposition 6

> Soient (E, d) et (E', d') des espaces métriques.
> Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application continue et soit A un compact de E.
> Alors $f(A)$ est compact.

Démonstration

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n \in A$.
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in A$ tq $f(x_n) = y_n$.
$\exists\,(n_k) \nearrow\!\nearrow$ tq $x_{n_k} \longrightarrow x \in A$.
Comme f est continue, $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x) \in f(A)$.

Proposition 7

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ un compact.
Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors il existe $x, y \in A$ tels que :

$$f(x) = \inf_{t \in A} f(t) \text{ et } f(y) = \sup_{t \in A} f(t)$$

Démonstration
A est compact, donc $f(A)$ est compact d'après la proposition 6 (page 11) .
Donc $f(A)$ est borné par la proposition 4 (page 10) , et l'inf et le sup existent.
Montrons que l'inf est atteint :
$\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall\, n,\ x_n \in A$ et $f(x_n) \longrightarrow \inf_{t\in A} f(t)$.
$\exists\, (n_k) \nearrow\!\nearrow$ tq $x_{n_k} \longrightarrow x \in A$. Donc $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$.

Proposition 8

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ un compact.
Alors pour tout x de E, il existe y (non unique) dans A tel que :

$$d(x, y) = d(x, A)$$

On dit que y est la <u>meilleure approximation</u> de x sur A pour d.

Démonstration
$y \longmapsto d(x, y)$ est continue, d'où le résultat par la proposition 7 (page 12) .

Remarque 9 *Problème de l'unicité :*

1) $\mathbb{R}^2$ *avec la distance euclidienne :*
$A = \mathcal{S}(0, 1),\ x = 0$
$\forall\, y \in A,\ d(0, y) = d(0, A)$

2) $\mathbb{R}^2$ *avec la distance* $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ *:*
$A = \mathcal{S}(0, 1),\ x = (2, 0)$
$\forall\, t \in [-1; 1],\ d((2, 0), (1, t)) = d((2, 0), A)$

1.4 Produit d'espaces métriques

Soient $(E_j, d_j)_{j=1..n}$ $(n \geq 2)$ des espaces métriques.
Soient $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$.
On pose $d(x, y) = \max_{1\leq j\leq n} d_j(x_j, y_j)$.
On vérifie que d est une distance sur E.

Chapitre 2

Espaces Vectoriels Normés

Le corps des scalaires sera toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2.1 Espaces de Banach

Définition 1 *On appelle norme sur un espace vectoriel E, une application de E dans $\mathbb{R}_+$ (notée $x \longmapsto \|x\|_E$ ou $\|x\|$) telle que :*

(i) $\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,.\,\|x\|$

(ii) $\forall\, x, y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iii) $\forall\, x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Remarque 1

1) Soit E un E.V.N., E est aussi un espace métrique pour la distance $d(x,y) = \|x-y\|$. E est donc aussi un espace topologique.

2) $x \longmapsto \|x\|$ est continue (et même lipschitzienne) : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

3) $x_n \longrightarrow x, y_n \longrightarrow y, \lambda_n \longrightarrow \lambda \Longrightarrow x_n + y_n \longrightarrow x+y, \lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$

4) Si on n'a que l'implication vers la gauche dans 3 on parle de semi-norme.

Définition 2 *Un E.V.N. complet est un espace de Banach.*

Exemples 1

1) $\mathbb{R}^k$ *avec* $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *est complet.*

Il en est de même avec $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{k} |x_j|$ *et* $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq k} |x_j|$.

2) $\mathbb{C}^k$ *avec* $\|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *est également complet.*

3) $E = C[0,1]$ *avec* $\|u\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$ *est encore complet.*

Démonstration du point 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, n, m \geq N,\ \|u_n - u_m\|_\infty \leq \varepsilon$
Donc

$$\forall\, n, m \geq N,\ \forall\, t \in [0,1],\ |u_n(t) - u_m(t)| \leq \varepsilon \tag{2.1}$$

c'est-à-dire : $\forall\, t \in [0,1],\ (u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$.
Donc $\forall\, t \in [0,1]$, il existe $u(t) \in \mathbb{K}$ tel que $u_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t)$.
Dans 2.1 on fait tendre m vers $+\infty$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1],\ |u_n(t) - u(t)| \leq \varepsilon$$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \|u_n - u\|_\infty \leq \varepsilon$
Il reste à montrer que u est continue :
Soit $t_0 \in [0,1]$ et $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_0)| &\leq |u(t) - u_N(t)| + |u_N(t) - u_N(t_0)| + |u_N(t_0) - u(t_0)| \\ &\leq 2\ \|u_N - u\|_\infty + |u_N(t) - u_N(t_0)| \end{aligned}$$

$\exists\, \eta > 0$ (η depend de N) tq $|t - t_0| \leq \eta \Longrightarrow |u_N(t) - u_N(t_0)| \leq \varepsilon$
Donc si $|t - t_0| \leq \eta$ on a : $|u(t) - u(t_0)| \leq 3\,\varepsilon$

2.2 Continuité dans les E.V.N.

Théorème 1

Soient E et F deux E.V.N. et $u : E \longmapsto F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\|u(x)\| \leq C\,\|x\|$ pour tout $x \in E$

(ii) u est lipschitzienne i.e.
$\exists\, C > 0$ tq $\forall\, x, y \in E,\ \|u(x) - u(y)\| \leq C\,\|x - y\|$

(iii) u est uniformément continue

(iv) u est continue

(v) u est continue à l'origine

Démonstration

- $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5$: évident.
- $5 \Longrightarrow 1$:
  $\exists\, C > 0$ tq $\|u(x)\| \leq 1$ si $\|x\| \leq C$.
  Si $x \neq 0$: $\underbrace{\left\| u\left(\dfrac{Cx}{\|x\|}\right)\right\|}_{=\frac{C\|u(x)\|}{\|x\|}} \leq 1$
  Donc $\|u(x)\| \leq \frac{1}{C}\,\|x\|$

Exemples 2

1) E, F des E.V.N. avec E de dimension finie et $u : E \longrightarrow F$ linéaire.
Montrons que u est continue.
Soit $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E.
Pour $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$
Soit $\|.\|$ une norme sur F.

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \left\| u\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\, u(e_j)\right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\ \|u(e_j)\| \\
&\leq A\,\|x\|_1
\end{aligned}$$

avec $A = \max_{1\leq j\leq n} \|u(e_j)\|$

2) $E = C^1([0,1])$ muni de $\|.\|_\infty$, $F = C^0([0,1])$ muni de $\|.\|_\infty$

Soit $\begin{array}{rcl} u : E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & u(f) = f' \end{array}$

Si on prend $f_n(x) = x^n$: $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|(f_n)'\|_\infty = n$
Donc u n'est pas continue.

Définition 3 *Soient E et F deux E.V.N.*
On note $\underline{\mathcal{L}(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires <u>continues</u> de E dans F.[1] *$\mathcal{L}(E,F)$ est un E.V.*
Si $F = \mathbb{K}$, on note $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Proposition 1

L'application $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $u \longmapsto \|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$ est une norme.

Remarque 2 *u est bien définie, par le 1 du théorème 1 (page 14) .*

Remarque 3

1) On a aussi : $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

2) $\|u(x)\| \leq \|u\|\,\|x\|$

3) Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ avec E, F, G des E.V.N., on a :
$\|v \circ u\| \leq \|v\|\,\|u\|$

Proposition 2

Si E et F sont des E.V.N. et si F est un Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un Banach.
En particulier E' est un Banach.

---

1. c'est ce qui nous intéresse dans le cadre de l'analyse

Démonstration
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, n, m \geq N$, $\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$
Donc $\forall\, n, m \geq N$, $\forall\, x \in E$, $\|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \varepsilon \, \|x\|$
c'est-à-dire : $\forall\, x \in E$, $(u_n(x))_{x\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F.
F étant complet, pour tout $x \in E$ il existe $u(x) \in F$ tel que $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(x)$.

— Montrons que $u : E \longrightarrow F$ est linéaire :
Si $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} u(x+\lambda\, y) &= \lim_{n\to+\infty} u_n(x+\lambda\, y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (u_n(x) + \lambda\, u_n(y)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} u_n(x) + \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n(y) \\ &= u(x) + \lambda\, u(y) \end{aligned}$$

— Montrons que u est continue :
En faisant tendre m vers $+\infty$, on a :
$\forall\, n \geq N$, $\forall\, x \in E$, $\|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon \, \|x\|$

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \|u(x) - u_N(x)\| + \|u_N(x)\| \\ &\leq \varepsilon \, \|x\| + \|u_N\| \, \|x\| \\ &= (\varepsilon + \|u_N\|) \, \|x\| \end{aligned}$$

Donc u est continue, par le 1 du théorème 1 (page 14) .

Par conséquent, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On a alors : $\forall\, n \geq N$, $\|u_N - u\| \leq \varepsilon$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$.

Définition 4 *Soient E et F des E.V.N.*
Une application linéaire de E dans F est un <u>*isomorphisme*</u> *de E sur F si :*

(i) u est bijective

(ii) u et u^{-1} sont continues

Remarque 4

1) u est un isomorphisme de E sur F si et seulement si il existe $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ et $u \circ v = Id_F$

2) u est un isomorphisme de E sur F si et seulement si u est surjective et $\exists\, a, A > 0$ tq $\forall\, x \in E$, $a\,\|x\| \leq \|u(x)\| \leq A\,\|x\|$

Théorème 2 Théorème de l'inverse continu

Soient E et F des E.V.N et $u \in \mathcal{L}(()E,F)$.
Si E et F sont des Banach et u est bijective, alors u^{-1} est continue.

2.3 Equivalence et convexité de normes

Définition 5 *Soit E un E.V. et $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E.*
$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont <u>*équivalentes*</u> *si $i : (E, \|.\|_1) \longrightarrow (E, \|.\|_2)$ est un isomorphisme (i.e. si $\forall\, x \in E$, $\exists\, a, A > 0$ tq $a\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq A\,\|x\|_1$).*

Proposition 3

Si E est un E.V. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration

Soit $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E et $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$

Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur E.

$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\ \|e_j\| \leq A\,\|x\|_1$ où $A = \max_{1\leq j\leq n} \|e_j\|$

L'application

$$\begin{cases} (E, \|.\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ x \longmapsto \|x\| \end{cases}$$

est continue car :

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \leq A\,\|x-y\|_1$$

D'après la proposition 7 cette fonction atteint son infimum sur le compact que constitue la sphère unité :

$$\exists\, y, \|y\|_1 = 1 \text{ tq } \quad \inf_{\|x\|_1=1} \|x\| = \|y\|\,.$$

Posons $a = \|y\| > 0$. Comme $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1$, on a $\|x\| \geq a\,\|x\|_1$ et donc $\|.\| \sim \|.\|_1$

Proposition 4 Meilleure approximation sur un E.V. fermé

Soit E un E.V.N. et F un S.E.V. de dimension finie de E.

$$\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F \text{ tq } \ \|x-y\| = d(x,F) = \inf_{z\in F} \|x-z\|$$

Démonstration

Soit $d = d(x,F)$

Posons $A = F \cap \mathcal{B}'(x, d+1)$

Il est clair que $d \leq \inf_{z\in A} \|x-z\|$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Par la définition de d : $\exists\, z \in F$ tq $d \leq \|x-z\| \leq d+\varepsilon$

Donc $z \in A$, d'où $\inf_{z\in A} \|x-z\| \leq d+\varepsilon$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient : $\inf_{z\in A} \|x-z\| \leq d$

On en déduit que $d = \inf_{z\in A} \|x-z\|$ et comme A est compact, l'inf est atteint.

Définition 6 *Soit E un E.V.*

1) Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. A est <u>convexe</u> si et seulement si

$$\forall\, x, y \in A,\ \forall\, \lambda \in [0,1],\ \lambda\, x + (1-\lambda)\, y \in A$$

2) Une norme sur E est <u>strictement convexe</u> si

$$\left.\begin{array}{c} \|x\| = \|y\| = 1 \\ \|x+y\| = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y$$

Remarque 5 *La norme euclidienne est strictement convexe, la norme du max ne l'est pas.*

Proposition 5

Soit E un E.V.N.
Si la norme est strictement convexe, le probleme de la meilleure approximation sur un convexe A admet au plus une solution.

Démonstration
Soit $x \in E$. Si $a, b \in A$ vérifient $\|x-a\| = \|x-b\| = d(x,A) = d$, alors montrons que $a = b$:

1) Si $d = 0$: $x = a = b$
2) Si $d > 0$: Posons $s = \dfrac{x-a}{d}$ et $t = \dfrac{x-b}{d}$
   On a : $\|s\| = 1$ et $\|t\| = 1$.
   De plus : $\dfrac{a+b}{2} \in A$
   Donc $d \leq \left\| x - \dfrac{a+b}{2} \right\| = \left\| \dfrac{x-a}{2} + \dfrac{x-b}{2} \right\| \leq \dfrac{\|x-a\|}{2} + \dfrac{\|x-a\|}{2} = d$
   D'où $\left\| x - \dfrac{a+b}{2} \right\| = d$ et $\|s+t\| = \left\| \dfrac{2x-a-b}{d} \right\| = 2$
   Comme la norme est convexe, $s = t$ donc $a = b$.

2.4 Séries dans les E.V.N.

Définition 7 *Soit E un E.V.N., soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E.*
On dit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x_n$ est <u>convergente</u> vers x si la suite $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n$ converge vers x.
On dit que la série est <u>absolument convergente (normalement)</u> si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ converge.

Proposition 6

Si E est un E.V.N. complet alors toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration
Soient $p > q \geq 0$.
$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{n=q+1}^{p} x_n \right\| \leq \sum_{n=q+1}^{p} \|x_n\| \underset{p,q\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Remarque 6 *La réciproque est fausse.*

Théorème 3

Soit E un Banach et $u \in \mathcal{L}(E,E)$.
Si $\sum_{n\geq 0} \|u^n\| < +\infty$ alors $I - u$ est un isomorphisme et $(I-u)^{-1} = \sum_{n\geq 0} u^n$

Démonstration
Posons $v = \sum_{n\geq 0} u^n \in \mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$.
$v \circ (I-u) = \left(\sum_{n\geq 0} u^n \right) \circ (I-u) = \sum_{n\geq 0} u^n - \sum_{n\geq 1} u^n = I$
De même, $(I-u) \circ v = I$

Remarque 7 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$, alors $I-u$ est un isomorphisme et $(I-u)^{-1} = \sum_{n\geq 0} u^n$*

2.5 Compacité en dimension infinie

Théorème 4 Théorème de F.Riesz

Soit E un E.V.N.
Si la boule unité fermée est compacte, E est de dimension finie.

Remarque 8 *Il y a en fait équivalence.*

Démonstration
Supposons $\mathcal{B}'(0,1)$ compacte.
$\mathcal{B}'(0,1) \subset \bigcup_{x\in\mathcal{B}'(0,1)} \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{2}\right)$
D'après la remarque 8 (page 10) du chapitre 1,
$\exists\, p \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_p \in \mathcal{B}'(0,1)$ tq $\mathcal{B}'(0,1) = \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{B}\left(x_j, \frac{1}{2}\right)$
Soit F l'espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_p$. F est donc de dimention finie.
Montrons que E=F :

Sinon, il existe $x \in E \backslash F$ et on pose $\alpha = d(x, F)$, $\alpha > 0$ car F est fermé.
Soit $y \in F$ tel que $\alpha \leq \|x - y\| \leq \dfrac{3}{2}\alpha$
Posons $z = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$
$\|z\| = 1$ donc $\exists\, x_j \in \mathcal{B}'(0,1)$ tq $z \in \mathcal{B}(x_j, \frac{1}{2})$
$x = y + \|x-y\|\ z = \underbrace{y + \|x-y\|\ x_j}_{\in F} + \|x-y\|\,(z - x_j)$
Alors $\alpha \leq \|x-y\|\ \|z - x_j\|$
D'où $\|x-y\| \geq \dfrac{\alpha}{\|z-x_j\|} \geq 2\alpha$: contradiction.

Remarque 9 *Soit E un E.V.N. et $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.*

1) *Si A est compacte alors A est fermée et bornée.*
2) *Si E est de dimension finie, A est fermée et bornée, alors A est compacte.*
3) *Si E est de dimension infinie, une partie fermée bornée n'est pas forcément compacte.*

Définition 8 *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, $H \subset F^E$ et $x_0 \in E$.*
On dit que H est <u>équicontinue en x_0</u> si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \ tq\ \forall\, f \in H,\ d(x, x_0) \leq \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$$

H est <u>équicontinue</u> si H est équicontinue en tout x_0 de E.

Exemples 3

1) *Un ensemble fini de fonctions équicontines est équicontinu.*
2) *Une suite uniformément convergente de fonctions continues est équicontinue.*
3) *E, F E.V.N., $H \in \mathcal{L}(E, F)$, H borné. Alors H est équicontinue.*

Démonstration de l'exemple 1
$Soit f_1, \dots, f_p$ continues en x_0, soit $\varepsilon > 0$.
$\forall\, j \in \{1, .., p\}$, $\exists\, \eta_j > 0$ tq $d(x, x_0) \leq \eta_j \Longrightarrow \delta(f_j(x), f_j(x_0)) \leq \varepsilon$
Posons $\eta = \min\limits_{1 \leq j \leq p} \eta_j > 0$
Si $d(x, x_0) \leq \eta$, alors $\forall\, j \in \{1, .., p\}$, $\delta(f_j(x), f_j(x_0)) \leq \varepsilon$

Théorème 5 Théorème d'Ascoli

Soit E un espace métrique compact et F un Banach.
Soit $H \subset C(E, F)$ ($C(E, F)$ muni de la convergence uniforme), $H \neq \emptyset$ et pour $x \in E$, $H(x) = \{f(x) \mid f \in H\}$.
$\overline{H}$ est compacte si et seulement si H est équicontinue et $\forall\, x \in E$, $\overline{H(x)}$ est compacte dans F.

Remarque 10

— *Si $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou un E.V. de dimension finie, la deuxième condition peut être remplacée par : $\forall\, x \in E$, $H(x)$ borné dans F.*

— *E ne peut pas être un E.V. car un E.V. n'est pas compact, mais en général E sera une partie compacte d'un E.V.*
— *Si* $H \subset C([0,1],[a,b])$*, montrer que* $\overline{H(x)}$ *est compacte est trivial car* $H(x) \subset [a,b]$ *implique que* $H(x)$ *soit borné.*

Chapitre 3

Différentiabilité dans les espaces de Banach

Dans tout le chapitre on travaille sur $\mathbb{R}$.

3.1 Différentiabilité

Définition 1 *Soit E et F deux espaces de Banach, soit U un ouvert non vide de E et $a \in U$, soit $f : U \longrightarrow F$.*
f est dite (Fréchet) différentiable en a s'il existe $L \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underbrace{\|h\|\varepsilon(h)}_{o(\|h\|)}$$

où $\varepsilon : V \longrightarrow F$ est une application définie sur un voisinage ouvert V de 0_E [1] *tel que $\forall h \in V$, $a+h \in U$, et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.*
L est unique et s'appelle la dérivée de f en a et on la note $f'(a)$ ou df_a ou $Df(a)$.

Quelques propriétés

1) L est unique.
2) f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U. Dans ce cas, on a $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$.
   On dit que f est de classe C^1 si f est différentiable sur U et f' est continue. (f est C^2 si f' est C^1, ...)
3) L'ensemble des applications différentiables en $a \in U$ (respectivement sur U) est un espace vectoriel.
4) Si f est différentiable en $a \in U$ alors f est continue en a.

1. le zéro dans E

Démonstration

— Point 1 :

Si on a L_1 et L_2 :

Soit $h \in E \setminus 0$ et $t \in]0;\varepsilon'[$ (ε' assez petit pour que $a + t\,h \in V$).

$$\begin{aligned} f(a+t\,h) &= f(a) + L_1(t\,h) + o(\|t\,h\|) \\ &= f(a) + L_2(t\,h) + o(\|t\,h\|) \end{aligned}$$

Donc $\|L_1(h) - L_2(h)\| = \left\| \dfrac{L_1(t\,h) - L_2(t\,h)}{t} \right\| = \dfrac{o(t\,\|h\|)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

— Point 4 :

$|f(a+h) - f(a)| \leq L(h) + \|h\| \; \|\varepsilon(h)\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

Définition 2 (Différentielle au sens de Gateaux) *Soit E et F deux espaces de Banach, soit U un ouvert non vide de E et $a \in U$, soit $f : U \longrightarrow F$.*
Soit $v \in E$ et $t \in \mathbb{R}^*$.
On dit que f admet une différentielle (au sens de Gateaux) en a <u>dans la direction du vecteur v</u> si $\dfrac{f(a+t\,v) - f(a)}{t}$ admet une limite quand t tend vers 0.

Remarque 1 *f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est différentiable (au sens Gateaux) dans toutes les directions en a. Attention la réciproque est fausse.*

Remarque 2 *Pour le cas où E=$\mathbb{R}$:*

— *Si $E = F = \mathbb{R}$:*

On sait que $\displaystyle\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Or $f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + o(|h|)$

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)(1)$

D'où $f'(a)(h) = f'(a)h$

Par exemple : $f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x,\ f'(x)(1) = 2x,\ f'(x)(h) = 2xh$

— *Soit :*

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \theta(u) = u(1) \end{array}$$

On a : $\quad u : t \longmapsto t\,x \quad \longleftrightarrow \quad x$

θ est un isomorphisme.

Exemples 1

1) Soit $f : U \longrightarrow F$ et $c \in F$ tel que $\forall\, x \in U,\ f(x) = c$.
Alors $\forall\, x \in U,\ f'(x) = 0$. Donc $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est nulle.
f est C^∞.
$f'' \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$.

2) $U = E$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors $\forall\, x \in E,\ f'(x) = f$ (car $f(x+h) - f(x) = f(h) = f'(x)(h)$).
Donc f' est constante, f est C^∞ et les dérivées suivantes sont nulles.

3) Soit E_1, E_2 et F des Banach, et $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue.
Soit $\|x\|_\infty = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$ pour $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.
B est continue en $0 \iff \exists\, M > 0$ tq $\|B(x,y)\| \leq M\ \|x\|\ \|y\|$

Démonstration de l'exemple 3
Comme B est continue en 0 : $\exists\, \delta > 0$ tq $\|(x,y)\| \leq \delta \Longrightarrow \|B(x,y)\| \leq 1$
Soit x et y non nuls.
On a alors : $\underbrace{\left\| B\left(\frac{\delta\, x}{\|x\|}, \frac{\delta\, y}{\|y\|}\right)\right\|}_{= \frac{\delta^2}{\|x\|\,\|y\|}\|B(x,y)\|} \;\leq\; 1$
D'où : $\|B(x,y)\| \;\leq\; \dfrac{1}{\delta^2}\; \|x\|\; \|y\|$ et on prend $M = \dfrac{1}{\delta^2}$

Proposition 1

B est différentiable et $B'(x,y)(h,k) = B(x,k) + B(h,y)$

Exemple 2

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

Démonstration
$B(x+h, y+k) = B(x,y) + \underbrace{B(x,k) + B(h,y)}_{B'(x,y)(h,k)} + \underbrace{B(h,k)}_{o(\|(h,k)\|)}$
En effet $\|B(h,k)\| \leq M\; \|h\|\; \|k\| \leq M\; \|(h,k)\|^2$ donc on a bien $B(h,k) = o(\|(h,k)\|)$.
De plus, $B'(x,y) : (h,k) \longmapsto B(x,k) + B(h,y)$ est clairement lineaire :

$$\begin{aligned} B'(x,y)\big(\underbrace{(h,k)+(u,v)}_{(h+u,k+v)}\big) &= B(x,k+v) + B(h+u,y) \\ &= B(x,k) + B(x,v) + B(h,y) + B(u,y) \\ &= B'(x,y)(h,k) + B'(x,y)(u,v) \end{aligned}$$

C'est également continu :
$\|B'(x,y)(h,k)\| \leq M\; (\|x\|\; \|k\| + \|y\|\; \|h\|) \leq M\; (\|x\| + \|y\|)\; \|(h,k)\|$
Donc

$$\begin{array}{rcl} B' : E_1\times E_2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1\times E_2, F) \\ (x,y) & \longmapsto & B'(x,y) \end{array}$$

est bien linéaire et continue, et on a $B'(x,y)(h,k) = B(x,k) + B(h,y)$

Application
Soit E, F, et G trois espaces de Banach.

$$\begin{array}{rcl} B : \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ (u,v) & \longmapsto & B(u,v) = v\circ u \end{array}$$

B est bilinéaire et continue ($\|B(u,v)\| = \|v\circ u\| \leq \|v\|\,.\,\|u\|$)
Donc B est différentiable et $B'(u,v)(h,k) = B(u,k) + B(h,v) = k\circ u + v\circ h$
B est C^∞.

3.2 Composition de fonctions

Théorème 1

Soit E, F, et G trois espaces de Banach.
Soit $U \subset E$ un ouvert, $a \in U$, $f : U \longrightarrow F$, $V \subset F$ un ouvert, $b = f(a) \in V$ et $g : V \longrightarrow G$.
Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ (définie sur un voisinage de a et continue en a) est différentiable en a. On a :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Si f et g sont de classe C^p ($p \geq 1$) alors $g \circ f$ est C^p.

Fonctions à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Proposition 2

Soit $U \subset E$ un ouvert, soit $f : U \longrightarrow F = F_1 \times \cdots \times F_k$ avec F_i espace vectoriel normé, $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|$ pour $x = (x_1, \cdots, x_k) \in F$.

$$\begin{array}{rcl} u_i : F_i & \longrightarrow & F \\ x_i & \longmapsto & (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p_i : F & \longrightarrow & F_i \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$$

f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si pour $j = 1, \ldots, k$, $f_j = p_j \circ f$ est différentiable en a. On a alors :

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{k} u_j \circ {f_j}'(a)$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$)
$p_j \in \mathcal{L}(F, F_j)$ (p_j est continue car $\|p_j(x)\| = \|x_i\| \leq \|x\|$)), donc p_j est différentiable.
D'où $p_j \circ f = f_j$ est différentiable.

— ($\Leftarrow$)

$$\sum_{j=1}^{k} u_j \circ p_j = id_F \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} u_j \circ \underbrace{p_j \circ f}_{f_j} = f$$

De plus $u_j \in \mathcal{L}(F_j, F)$.

Donc $f'(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (u_j \circ f_j)'(a) = \sum_{j=1}^{k} {u_j}'(f_j(a)) \circ {f_j}'(a) = \sum_{j=1}^{k} u_j \circ {f_j}'(a)$

Cas où E est un produit d'espaces de Banach

Proposition 3

Soit $U \subset E = E_1 \times \cdots \times E_k$ un ouvert avec E_i espace de Banach, soit $f : U \longrightarrow F$.
Soit $a = (a_1, \ldots, a_k) \in U$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda_i : E_i & \longrightarrow & E \\ x_i & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \end{array}$$

($f \circ \lambda_i$ est définie sur $\lambda_i^{-1}(U)$ qui est un ouvert de E_i)
Si f est différentiable en $a \in U$, alors pour $i = 1, \ldots, k$, $f \circ \lambda_i$ est différentiable en $a_i \in \lambda_i^{-1}(U)$.
On a :

$$f'(a)(h) = \sum_{i=1}^{k} (f \circ \lambda_i)'(a_i)\,(h_i)$$

avec $h = (h_1, \ldots, h_k)$
On note $(f \circ \lambda_i)'(a_i)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f_{x_i}(a)$.

3.3 Théorème de la moyenne

Théorème 2 Théorème de la moyenne

Soit F un espace de Banach.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow F$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$ et différentiables sur $]a, b[$.
Si $\forall\, t \in]a, b[$, $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Démonstration
Soit $\varepsilon > 0$.
On va montrer que

$$\forall\, t \in [a, b],\ \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \tag{3.1}$$

3.1 est vraie pour $t \in [a, a + \eta]$ avec $\eta > 0$ et $\eta < b - a$, car f et g sont continues.
Soit $A = \{\eta \in]0, b - a] \ \mid \ 3.1 \text{ est vraie pour } t \in [a, a + \eta]\}$
$A \neq \emptyset$.
Posons $\theta = \sup A$.
Par continuité 3.1 est vraie pour $t = \theta + a = \theta'$.
Supposons $\theta < b - a$.
$\exists\, \eta > 0$ tq pour tout $t \in [\theta', \theta' + \eta]$:
$\|f(t) - f(\theta') - f'(\theta')(t - \theta')\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(t - \theta')$ (f est différentiable en θ')
De même $|g(t) - g(\theta') - g'(\theta')(t - \theta')| \leq \frac{\varepsilon}{2}(t - \theta')$
Par inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{rcl} \|f(t) - f(\theta')\| & \leq & \|f'(\theta')\|\,(t - \theta') + \frac{\varepsilon}{2}(t - \theta') \\ & \leq & g'(\theta')(t - \theta') + \frac{\varepsilon}{2}(t - \theta') \\ & \leq & g(t) - g(\theta') + \varepsilon(t - \theta') \end{array}$$

Pour $t \in [\theta', \theta' + \eta]$:

$$\begin{aligned} \|f(t)-f(a)\| &\leq \|f(t)-f(\theta')\| + \|f(\theta')-f(a)\| \\ &\leq g(t)-g(\theta')+\varepsilon(t-\theta')+g(\theta')-g(a)+\varepsilon(\theta'-a)+\varepsilon \\ &= g(t)-g(a)+\varepsilon(t-a)+\varepsilon \end{aligned}$$

Donc 3.1 est vraie sur $[\theta', \theta'+\eta]$: contradiction.
Donc $\theta = b-a$ et l'égalité est vraie sur $[a,b]$.

Proposition 4

(accroissements finis généralisés)
Soit E et F espaces de Banach, soit U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ différentiable sur U.
On suppose qu'il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\forall\, x \in U,\ \|f'(x)\| \leq k$.
Alors si $[x,y]$ est un segment inclus dans U, on a :

$$\|f(y)-f(x)\| \leq k\ \|y-x\|$$

En particulier f est lipschitzienne sur les boules incluses dans U et sur les convexes inclus dans U .

Démonstration
On pose $\tilde{f} : t \in [0,1] \longmapsto f(x+t(y-x))$ et on applique le théorème de la moyenne à $\tilde{f}$:
$\tilde{f}'(t)(1) = f'(x+t(y-x))(y-x)$
Donc $\left\|\tilde{f}'(t)\right\| = \|f'(x+t(y-x))(y-x)\| \leq \|f'(x+t(y-x))\|\,\|y-x\| \leq k\,\|y-x\| = g'(t)$
en prennant $g(t) = k\,\|y-x\|\,t$

Corollaire 1

Soit $f : U \longrightarrow F$ de classe C^1. Alors f est localement lipschitzienne.

Démonstration
Soit $x_0 \in U$, f' est continue sur un voisinage V de x_0 et est bornée sur V.

Proposition 5

Soit $E = C^1([a,b], R)$.
Si $u \in E$, $\|u\| = \max(\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty)$.
$(E, \|.\|)$ est complet.
Soit $F \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, posons pour $u \in E$

$$J(u) = \int_a^b F\Big(x, u(x), u'(x)\Big)\,dx$$

Alors J est de classe C^1 et on a :

$$\forall\, h \in E,\ J'(u)(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x),u'(x)\Big)\,h(x) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x),u'(x)\Big)\,h'(x)\right)\,dx$$

Démonstration
Soient $y, z, s, t \in \mathbb{R}$, $x \in [a,b]$ et $r \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} F(x,y+s,z+t) - F(x,y,z) &= \int_0^1 \frac{d}{dr}\Big(F(x,y+rs,z+rt)\Big)dr \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,y+rs,z+rt\Big)s + \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,y+rs,z+rt\Big)t \right\} dr \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in E$.

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &= \int_a^b \Big\{ F\Big(x,u(x)+h(x),u'(x)+h'(x)\Big) - F\Big(x,u(x),u'(x)\Big) \Big\}\, dx \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x)+rh(x),u'(x)+rh'(x)\Big)h(x) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \ \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x)+rh(x),u'(x)+rh'(x)\Big)h'(x) \right\} dr \right) dx \\ &= \underbrace{\int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x),u'(x)\Big)h(x) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x),u'(x)\Big)h'(x) \right\} dx}_{\text{L(h)}} + \underbrace{\int_a^b A(x)\, dx}_{\text{B}} \end{aligned}$$

Montrons que $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = E'$ et que $\exists\, \eta > 0$ tq $\|h\| < \eta \Longrightarrow |B| \leq \varepsilon \, \|h\|$:

$$|L(h)| \leq \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x),u'(x)\Big) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x),u'(x)\Big) \right| \right\} \|h\| \, (b-a)$$

$$\begin{aligned} A(x) = \int_0^1 &\left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x)+rh(x),u'(x)+rh'(x)\Big) - \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x),u'(x)\Big) \right\} h(x)\, dr \\ &+ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x)+rh(x),u'(x)+rh'(x)\Big) - \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x),u'(x)\Big) \right\} h'(x)\, dr \end{aligned}$$

Il existe $\eta > 0$ tq si $\|h\| \leq \eta$:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x)+rh(x),u'(x)+rh'(x)\Big) - \frac{\partial F}{\partial y}\Big(x,u(x),u'(x)\Big) \right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x)+rh(x),u'(x)+rh'(x)\Big) - \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x,u(x),u'(x)\Big) \right| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in [a,b]$ car u est fixé donc $u[a,b]$ et $u'[a,b]$ sont compacts.
Donc $|A(x)| \leq \varepsilon\big(\,|h(x)| + |h'(x)|\,\big) \leq 2\,\varepsilon \,\|h\|$
et $|B| = \left| \int_a^b A(x)\, dx \right| \leq 2\,\varepsilon\,\|h\|\,(b-a)$
$\|J'(u+v) - J'(u)\| = \sup\limits_{\|h\|=1} \big|J'(u+v)(h) - J'(u)(h)\big|$

Chapitre 4

Intégration mode d'emploi

$\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty[\cup \{+\infty\} = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \overline{\mathbb{R}_+}, \quad x + (+\infty) & = & +\infty \\ x \times (+\infty) & = & \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

4.1 Construction rapide de l'intégrale

(voir annexe 1 pour une construction plus complète)

Définition 1 *Une tribu sur $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ est une famille de parties de $\mathbb{R}^N$ stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).*
Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^N$, les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les ensembles mesurables.
Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$ est une application (non constante égale à $+\infty$) de $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ croissante et dénombrablement additive. $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.
Soit $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que cet espace est complet, ou que μ est complète ou que $\mathcal{B}$ est complète pour μ si :

$$(B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 0, A \subset B) \Rightarrow A \in \mathcal{B}$$

Si $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, on peut montrer qu' il existe une tribu $\tilde{\mathcal{B}}$ et une mesure (positive) $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{\mathcal{B}}$ telles que :

(i) $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$

(ii) $\forall B \in \mathcal{B}, \tilde{\mu}(B) = \mu(B)$

(iii) $(\mathbb{R}^N, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu})$ est complet

Rappelons que la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^N$ est la tribu engendrée par les ouverts (et donc par les fermés) de $\mathbb{R}^N$. On peut montrer que cette tribu notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ est engendrée par les pavés :

$$\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \text{ avec } -\infty < a_j < b_j < +\infty$$

On peut montrer qu'il existe une unique mesure μ sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ vérifiant :

$$\mu\left(\prod_{j=1}^{N}[a_j,b_j]\right)=\prod_{j=1}^{N}(b_j-a_j)$$

μ est la <u>mesure de Borel</u> de $\mathbb{R}^N$.
La complétée de cette mesure s'appelle la <u>mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$</u>.

Définition 2 *Une application $f:\mathbb{R}^N\to\overline{\mathbb{R}_+}$ est <u>mesurable</u> si l'image réciproque de tout intervalle de $\overline{\mathbb{R}_+}$ est un ensemble mesurable et on définit l'<u>intégrale</u> de f par :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx=\lim_{h\to 0^+}\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\mu}(f^{-1}([jh,(j+1)h[))\,jh$$

(sauf si f est égale à $+\infty$ sur un $B\in\tilde{\mathcal{B}}$ tel que $\tilde{\mu}(B)>0$: dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx=+\infty$)

Avertissement : On supposera dans la suite du chapitre que les ensembles et les fonctions seront **toujours** mesurables (ce qui est faux en général bien sur, mais les objets non mesurables sont compliqués à construire - voir annexe 2 pour un tel exemple).

4.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

4.2.1 Axiomatique

On "admet" qu'il existe une application qui à $f:\mathbb{R}^N\to\overline{\mathbb{R}_+}$ mesurable associe un élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$ noté

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \text{ ou } \int_{\mathbb{R}^N} f\,dx \text{ ou } \int f$$

vérifiant les 4 propriétés suivantes :

1) Si $f,g:\mathbb{R}^N\to\overline{\mathbb{R}_+}$ sont mesurables et $\alpha,\beta\in]0;+\infty[$ on a

$$\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g \text{ (linéarité de l'intégrale)}$$

2) Si $f,g:\mathbb{R}^N\to\overline{\mathbb{R}_+}$ sont mesurables et si $\forall\, x\in\mathbb{R}^N,\ f(x)\le g(x)$ alors

$$\int f\le\int g \text{ (croissance de l'intégrale)}$$

3) Si $A=\prod_{j=1}^{N}[a_j,b_j]$ avec $-\infty<a_j<b_j<+\infty$

$$\int \mathbb{1}_A=\prod_{j=1}^{N}(b_j-a_j)$$

4) Le théorème suivant, dit de Beppo-Levi est vérifié.

Théorème 1 Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^N$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim f_n(x)\,dx = \lim \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx \leq +\infty$$

Corollaire 1

Soit $(f_n) : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurables pour tout n, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx$$

Démonstration

Posons $\forall\, x,\ g_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x)$.

On a alors $\forall\, x,\ g_j(x) \leq g_{j+1}(x)$ et $\forall\, j,\ g_j : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable.

$\forall\, j \in \mathbb{N},\ a_j \geq 0$ donc $\sum_{j\geq 0} a_j$ converge toujours dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. $S_K = \sum_{j=0}^{K} a_j$.

4.2.2 Lien avec la théorie de la mesure

Définition 3 *Si $A \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble mesurable, sa mesure est définie par :*

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A$$

(m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$), et m vérifie les propriétés suivantes :

(i) Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$ sont mesurables et si $A \subset B$ alors $m(A) \leq m(B)$.

(ii) Si $A_n \subset \mathbb{R}^N$ est une suite d'ensembles mesurables, avec $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ alors :

$$m\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n \right) = \sum_{n\geq 0} m(A_n)$$

Démonstration

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$ et on applique 2.

(ii) $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 0} A_n} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n}$ et on applique le corollaire précédent.

Remarque 1

1) Si A_n est une suite d'ensembles mesurables, on a :

$$m\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} m(A_n)$$

2) Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$ sont mesurables, on a :

$$m(A\cup B) + m(A\cap B) = m(A) + m(B)$$

Démonstration

1) $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 0} A_n} \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n}$

2) $A\cup B = (A\backslash(A\cap B)) \cup B\backslash(A\cap B)) \cup (A\cap B)$ d'où
$m(A\cup B) = m(A) - m(A\cap B) + m(B) - m(A\cap B) + m(A\cap B)$

4.2.3 Ensembles négligeables - Propriétés vraies presque partout

Définition 4 *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. Si $m(A) = 0$ on dit que A est négligeable (pour la mesure considérée, ici celle de Lebesgue).*

Remarque 2 *D'après la remarque 1 ci-dessus, une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Dans $\mathbb{R}$ ($N = 1$), $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc négligeable car les points sont de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.*

$$m([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0, m([0,1]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) = 1$$

Définition 5 *Soit $P(x)$ une propriété faisant intervenir les points x de $\mathbb{R}^N$. On dit que P est vraie presque partout (p.p.) si $\{x \in \mathbb{R}^N \quad | \quad P(x) \text{ est fausse}\}$ est négligeable.*

Théorème 2

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une application mesurable. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p. } (f(x) = 0 \text{ p.p.})$$

Démonstration

Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^N \quad | \quad f(x) \neq 0\}$

— ($\Leftarrow$)
$\forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A(x)$
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A(x)\,dx \overset{th1}{=} \lim_{n\to\infty} n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A(x)\,dx}_{m(A)=0}$ car $n\mathbb{1}_A$ est croissante.

— ($\Rightarrow$)
$\mathbb{1}_A(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} nf(x)$
$\displaystyle m(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} nf(x)\,dx \overset{th1}{=} \lim_{n\to\infty} n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx}_{=0} = 0$

4.3 Fonctions intégrables

4.3.1 L'espace des fonctions intégrables

Définition 6 *Soit f une fonction mesurable. Si $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$, on dit que f est intégrable (pour la mesure μ) sur $\mathbb{R}^N$ si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$$

On appelle intégrale de f le nombre noté $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$ tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_+\, d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f_-\, d\mu$$

Remarque : si f est mesurable f_+ et f_- le sont. Par contre si f et g sont mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ la somme $f + g$ n'est pas forcément définie par exemple si $f(x) = +\infty$ et $g(x) = -\infty$. En revanche si f et g sont mesurables et intégrables f et g sont finies presque partout donc $f + g$ est définie presque partout. En posant $\tilde{f} = 0$ là où f est infini, $\tilde{g} = 0$ là où g est infini, $\tilde{f} + \tilde{g}$ a même intégrale que $f + g$ et est mesurable.

Proposition 1

La définition de l'intégrale ne dépend pas du choix de g et h tel que $f = g - h$ avec $g \geq 0$ et $h \geq 0$

Démonstration On a $f = f_+ - f_-$. Si on pose $f = g - h$, avec $g, h \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} gd\mu \leq +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^N} hd\mu \leq +\infty$, on a $\int_{\mathbb{R}^N} fd\mu = \int_{\mathbb{R}^N} gd\mu - \int_{\mathbb{R}^N} hd\mu$.
Soit $r = g - f_+ = h - f_-$, $r \geq 0$ et $r \leq g$: $0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} rd\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} gd\mu \leq +\infty$
On a $\int_{\mathbb{R}^N} gd\mu = \int_{\mathbb{R}^N} rd\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu$ et $\int_{\mathbb{R}^N} rd\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} hd\mu$, d'après la linéarité des fonctions positives. D'où $\int_{\mathbb{R}^N} fd\mu = \int_{\mathbb{R}^N} gd\mu - \int_{\mathbb{R}^N} hd\mu$.

Proposition 2

1) L'ensemble des applications intégrables de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, et l'application $(f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu)$ est une forme linéaire.
2) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telles que $f \leq g$. Alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$.
3) Soient $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $|f| \leq g$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.
4) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$
5) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\displaystyle\left|\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| \, d\mu$.

Remarque : L'ensemble de ces propriétés est vrai pour d'autres mesures que la mesure de Lebesgue.

Démonstration

— Point 1
$f = g - h$, avec $g \geq 0$ $h \geq 0$ $f' = g' - h'$ avec $f' \geq 0$ and $g' \geq 0$. $f + f' = (g + g') - (h + h')$,
$\int_{\mathbb{R}^N}(f+f')d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}(g+g')d\mu - \int_{\mathbb{R}^N}(h+h')d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} gd\mu + \int_{\mathbb{R}^N} g'd\mu - \int_{\mathbb{R}^N} hd\mu - \int_{\mathbb{R}^N} h'd\mu = \int f d\mu + \int f' d\mu$

— Point 4
$f = f_+ - f_-$ et $\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu < +\infty, \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$
$|f| = f_+ + f_-$
$\int_{\mathbb{R}^N} |f| \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$

4.3.2 Intégration sur un sous-ensemble, intégrale p.p.

Définition 7 *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable et soit $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On note :*

$$f_A : x \mapsto f_A(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et on pose

$$\int_A f d\mu \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f_A d\mu$$

(f est intégrable sur $A \Leftrightarrow f_A$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$).
On note $\mathcal{L}^1(A)$ l'ensemble des applications intégrables sur A.

Proposition 3

Si f est mesurable et définie sur un ensemble de mesure nulle, alors f est intégrable et $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$.

Définition 8 *Soit f mesurable définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$, et $A \subset \mathbb{R}^N$ mesurable tel que $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash A$, $f(x)$ est défini et $\mu(A) = 0$. Posons :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}^N \backslash A \\ \text{"autre chose"} & si\ x \in A \end{cases}$$

Si $\tilde{f}$ est intégrable, alors tout autre prolongement l'est aussi et l'intégrale est la même (démonstration en exercice). On dit que f est intégrable et on pose

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f} d\mu$$

4.3.3 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

On démontre maintenant le théorème fondamental :

Théorème 3 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que :
(i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p..
(ii) il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p.
Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f|\, d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

Démonstration
Posons
$A_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |f_n(x)| > g(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f_n(x) \text{ ne tend pas vers } f(x)\}$
$N = B \cup \left(\bigcup_{n \geq 0} A_n \right)$, N est alors négligeable.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(x) &= \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \tilde{g}(x) &= \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$g_n(x) = \left| \tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x) \right|$ et $h_n(x) = \sup_{k \geq n} g_k(x)$
$\forall\, n,\ h_n \geq h_{n+1}; \forall\, n,\ h_n \geq 0$
$h_n(x) \to 0$
$0 \leq h_n \leq 2\tilde{g}$ donc $2\tilde{g} - h_n \geq 0$ et $(2\tilde{g} - h_n)$ est croissante.
Alors, le théorème de Beppo-Levi donne :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (2\tilde{g} - h_n) d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \to \infty} (2\tilde{g} - h_n) d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g} d\mu$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (2\tilde{g} - h_n) d\mu = \lim_{n \to \infty} \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g} - \int_{\mathbb{R}^N} h_n \right) d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g} d\mu - \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (h_n) d\mu$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (h_n) d\mu = 0$

4.4 Calcul pratique d'intégrales

Dans cette partie μ désigne la mesure de Lebesgue (également notée dx)

4.4.1 Lien avec l'intégrale de Riemann

Le théorème de convergence dominée permet de retrouver le résultat suivant pour l'intégrale de Lebesgue, et qui est classique pour l'intégrale de Riemann :

Proposition 4

Soit $(f_n) \in C([a,b])$ telle que (f_n) converge uniformément vers $f \in C([a,b])$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu$$

Démonstration $\exists\, C$ tq $\|f\|_\infty \leq C$. Montrons qu'il existe $M > 0 \forall\, n,\ |f_n| \leq M$. En effet, $\exists\, n_0$ tq $\forall\, n \geq n_0,\ \|f_n - f\|_\infty \leq 1 \Longrightarrow \|f_n\|_\infty \leq 1 + \|f\|_\infty \leq 1 + C$.
$\forall\, n \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$, $\exists\, C_n$ tq $\|f_n\|_\infty \leq C_n$. On pose alors $M = \max\limits_{0\leq n\leq n_0-1}(1 + C, C_n)$

Maintenant, pour une fonction continue, on a le lien suivant entre les deux intégrales :

Proposition 5

Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ et l'intégrale au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ est égale à l'intégrale de Riemann sur $[a,b]$.

Démonstration On démontre la proposition uniquement dans le cas où f est continue. Soit $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ l'intégrale de Riemann. F est une primitive de f. Considérons alors $G(x) = \int_{[a,x]} f(x)d\mu$ où μ est la mesure de Lebesgue, montrons que $G'(x) = f(x)$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{[x,x+h]} f(t) d\mu \\
&= \int_{[0,1]} f(x + th) d\mu \text{ (formule de changement de variables à la fin du chapitre)}
\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de convergence dominée à $t \to f(x+th)$, on obtient $\lim\limits_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x)$. Donc F et G sont deux primitives de f qui s'annulent en a donc elle sont égales.

Proposition 6

si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors f est mesurable et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

On parle dans ce cas d'intégrale de Riemann semi-convergente

Démonstration $f_n = f\mathbb{1}_{[-n,n]}$. Comme $f \geq 0$, (f_n) est une suite croissante positive de fonctions Lebesque intégrable sur $\mathbb{R}$. et $f_n(x) \to f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f d\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(t)dt \text{ d'après la proposition précédente} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ intégrale de Riemann semi-convergente}
\end{aligned}$$

Remarques :

1. Si $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = +\infty$ le résultat reste vrai
2. Si f n'est pas positive, la proposition est fausse (cf $\frac{\sin(x)}{x}$)

Exemples :

1. Montrer que $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.
2. Montrer que $f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.
3. $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$. $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$. $\forall\, x \geq 0,\ f_n(x) \longrightarrow 0$. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_n = 1$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} f_n = 0$: ne marche pas ! La fonction g du théorème est $g(x) = 1$ sur $\mathbb{R}^+$, qui n'est pas intégrable.

4.4.2 Primitive et intégrale de Lebesgue

Proposition 7

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable alors $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)d\mu$ est dérivable p.p sur $]a, b[$ et $F'(x) = f(x)$.

4.4.3 Intégrales complexes

Définition 9 *Soit* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, f = f_1 + if_2, f_1, f_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *Soit* $f = f_1 + if_2$ f *est mesurable* $\Leftrightarrow f_1$ *et* f_2 *sont mesurables.*
f *est intégrable* $\Leftrightarrow f_1$ *et* f_2 *sont intégrables, et alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f_1 + i \int_{\mathbb{R}^N} f_2$$

On a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|\, d\mu \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |f+g|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} |g|\, d\mu$$

4.5 L'espace $L^1(\mathbb{R}^N)$

4.5.1 Motivation pour une norme

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Posons $N_1(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f|\, d\mu$, où μ est la mesure de Lebesgue.
On a :

1. $N_1(0) = 0$
2. $\forall\, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $N_1(\lambda f) = |\lambda|\, N_1(f)$
3. $\forall\, f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N),\ N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.

Donc on a presque une norme.
Si $N_1(f) = 0$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f = 0$ p.p., donc N_1 n'est pas une norme.

4.5.2 L'espace L^1

Définition 10 *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On dit que $f \sim g$ (f équivalente à g) si et seulement si $f = g$ p.p.. C'est une relation d'équivalence.*
Posons $L^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)_{/\sim} = \{\dot{f} \quad | \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)\}$. On a alors $g \in \dot{f} \Leftrightarrow f \sim g$.

Proposition 8

$L^1(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel si on pose $\dot{f} + \dot{g} = \dot{\overline{f+g}}$ et $\lambda\dot{f} = \dot{\overline{\lambda f}}$
$\|.\|_1$ est une norme sur $L^1(\mathbb{R}^N)$ si on pose $\left\|\dot{f}\right\|_1 = N_1(f)$.

Proposition 9

$L^1(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel normé complet

Théorème 4

Soient $(f_n), f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors, il existe une suite extraite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. et il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p..

4.5.3 Les espaces L^p

Définition 11 *On peut de même définir $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $L^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)_{/\sim}$. On munit $L^p(\mathbb{R}^N)$ de la norme : $\left\|\dot{f}\right\|_p = N_p(f) = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$*

Définition 12 $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ou } \mathbb{C} \mid f \text{ mesurable et } \exists\, c \geq 0 \text{ tq } |f(x)| \leq c \text{ p.p.}\}$.
$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel normé.
Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$, on pose alors $N_\infty(f) = \inf\{c \geq 0/\, |f(x)| \leq c \text{ pp}\}$.

On a :

1. $N_\infty(0) = 0$
2. $N_\infty(\lambda f) = |\lambda|\, N_\infty(f)$
3. $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$
4. $N_\infty(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ p.p.

Définition 13 *On pose $L^\infty(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)/\sim$ et $\left\|\dot{f}\right\|_\infty = N_\infty(f)$.*

4.6 Intégrales définies par un paramètre

Théorème 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. Soit f une fonction mesurable définie sur $I \times A$ (en fait définie $\forall t \in I$ et p.p. sur A).
On suppose que $\forall t \in I, (x \mapsto f(t,x)) \in \mathcal{L}^1(A)$ et on pose :

$$F(t) = \int_A f(t,x) d\mu$$

1. Continuité : Sous les hypothèses suivantes :
   (a) x p.p. sur $A, (t \mapsto f(t,x))$ est continue sur I
   (b) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(A)$ tq $\forall\, t \in I,\ |f(t,x)| \leq g(x)$, x p.p. sur A
   Alors F est continue sur I.
2. Dérivabilité : Sous les hypothèses suivantes :
   (a) x p.p. $(t \mapsto f(t,x))$ est dérivable sur I
   (b) $\exists\, h \in \mathcal{L}^1(A)$ tq $\forall\, t \in I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq h(x)$, x p.p. sur A
   Alors F est dérivable sur I et :
$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu$$

Démonstration

1. Soit (t_n) tel que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$ dans I. $F(t_n) = \displaystyle\int_A f(t_n,x)\, d\mu$. Soit $f_n(x) = f(t_n,x)$, $f_n(x) \longrightarrow f(t,x)$ p.p. sur A et $\forall\, n,\ |f_n| \leq g$ p.p. Le théorème de convergence dominée assure que $F(t_n) \to F(t)$.
2. On considère
$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_A \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} d\mu$$

On a $\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ et $\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial t}(\theta_h, x)$ avec $\theta_h \in]t, t+h[$ donc avec les hypothèses du théorème, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et il vient :

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu$$

4.7 Intégrales multiples

4.7.1 Intervertion des intégrales

Soit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ des ouverts et $\mu(x)$,$\mu(y)$ les mesures de Lebesgue resp. sur $\mathbb{R}^{N_1}$ et $\mathbb{R}^{N_2}$. Dans le cas des fonctions positives on a :

Théorème 6 Théorème de Tonelli ou Fubini≥ 0

Soit f mesurable positive sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$ $y \to f(x,y)$ est mesurable et pour presque tout $y \in \Omega_2$ $x \to f(x,y)$ est mesurable et on a :
(i)

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

(ii) Si ces intégrales sont finies, alors $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Pour les fonctions de signe quelconque intégrables, on a le théorème de Fubini :

Théorème 7 Théorème de Fubini

Soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$f(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu(y) \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$f(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu(x) \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus, on a :

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

Application pratique Pour une fonction f de signe quelconque on procède de la façon suivante :
(i) On applique le théorème de Tonelli à $|f|$ pour savoir si $|f| \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ (ce qui est équivalent à $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$).
(ii) Si oui, on peut alors appliquer le théorème de Fubini à f pour intervertir l'ordre d'intégration et utiliser le calcul le plus facile.

4.7.2 Changement de variable

Théorème 8 Théorème de changement de variable

Soient U et Ω des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $\phi : U \to \Omega$ un C^1-difféomorphisme (ϕ est une bijection de U sur Ω, $\phi \in C^1(U)$ et $\phi^{-1} \in C^1(\Omega)$). On note pour $x \in U$:

$$J_\phi(x) = \det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq N} \qquad \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$$

Soit f une fonction mesurable définie p.p. sur Ω.

1) Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\int_\Omega f(y)\, d\mu(y) = \int_U f(\phi(x))\, |J_\phi(x)|\, d\mu(x)$$

2) Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$,

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \Leftrightarrow (x \mapsto f(\phi(x))J_\phi(x)) \in \mathcal{L}^1(U)$$

et on a la même égalité.

Chapitre 5

Transformée de Fourier

5.1 Introduction

5.1.1 Historique

L'analyse en fréquences apparaît en 1822 dans un traité de Joseph Fourier, la “Théorie analytique de la chaleur”.
L'équation de la chaleur est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && (5.1) \\ u(\vec{x}, 0) &= \varphi(\vec{x}) && (5.2) \end{aligned}$$

Ici, u est une fonction de l'espace et du temps : $u(\vec{x}, t)$. Dans le cas où l'espace est un disque, u est définie par :

$t \geq 0$, $\vec{x} \in D = \{\vec{x} \in \mathbb{R} | \, \|\vec{x}\| \leq 1\}$

u est cherchée sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(r, t) e^{in\theta}$$

L'intégrale de Fourier apparaît en 1906 dans la théorie de l'intégration de Lebesgue.

5.1.2 Intérêt

- ”Diagonalise” les opérateurs de dérivation.

$F : u \mapsto F(u)$
$F : (\frac{d^k}{dx^k} u) \mapsto (i\xi)^k F(u)$

avec F opérateur et u fonction.

L'intégrale de Fourier sert alors à la résolution d'équations différentielles et d'EDP (Equations aux Dérivées Partielles).

5.1.3 Motivation pour le traitement du signal

On décompose un signal (une fonction) en une somme infinie de signaux plus faciles à traiter :

$u(x) = \sum c_n e^{in\omega x}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$e^{i\omega x}$ est une harmonique (correspond à une fréquence "pure" $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$).

5.1.4 Problématique du traitement du signal

Un système reçoit en entrée un signal f et émet en sortie un signal g. f et g fonctions du temps t.

2 types de problèmes :

1. f et g connus : problème d'identification du système.
2. f connu et système connu : problème du calcul de g.

$2^{ème}$ problème : celui du filtrage. Le système est appelé filtre.

Hypothèses sur le filtre :

- il est linéaire :
  $g = L(f)$, $L(f_1 + \lambda f_2) = L(f_1) + \lambda L(f_2)$.
- il est stationnaire (invariant dans le temps).
- il est invariant par translation : $g(t - T) = L(f(t - T))$.
  (L est ici l'opérateur associé au filtre)

On montre alors que la seule possibilité pour L est d'être un opérateur de convolution, c'est-à-dire :

$\exists\, h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tq
$g(t) = (f \star h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(t - x)dx$

h : réponse impulsionnelle du filtre.

En effet, si $f = \delta$ (impulsion), alors $g = h$.

Si f est définie ainsi :
$f : t \mapsto e^{i\omega t}$ ($\omega \in \mathbb{R}$), alors

$$\begin{aligned} g(t) &= (f \star h)(t) \\ &= (h \star f)(t) \\ &= \int h(x)e^{i\omega(t-x)}dx \\ &= e^{i\omega t}\int h(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= e^{i\omega t}H(\omega) \end{aligned}$$

Conclusion

$t \mapsto e^{i\omega t}$: vecteur propre du filtre, de valeur propre $H(\omega)$.

H : fonction de transfert du filtre, transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle h.

5.2 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

5.2.1 Définition

Définition 1 (Transformée de Fourier) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on lui associe $\hat{f}$ telle que :*

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\nu) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

$\omega = 2\pi\nu$ *: pulsation (rad.s^{-1})*
ν *: fréquence (Hz)*

Remarque 1 *$\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car*

$\left|f(x)e^{-2i\pi\nu x}\right| = |f(x)|$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R})$.
(théorème de Lebesgue)

L'application : $F : f \mapsto \hat{f}$ est appelée transformée de Fourier. ($f \in L^1(\mathbb{R})$).

5.2.2 Propriété (Théorème de Riemann-Lebesgue)

Théorème 1 de Riemann-Lebesgue

1. $F : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire, continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
2. si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\nu \to \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

Démonstration .

1. — F linéaire (linéarité de $\int$).

   Par définition : $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$

   et $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$

avec f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

— Montrons la continuité de F en 0, autrement dit :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \|F(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\begin{aligned}\forall \nu,\ \left|\hat{f}(\nu)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

donc $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

2. si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ={ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ | g est C^∞, g est à support compact }

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \\ &= \left[f(x)\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu}dx \\ \left|\hat{f}(\nu)\right| &\leq \frac{1}{2\pi\,|\nu|}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(x)\right| dx \\ &\xrightarrow[\nu\to\pm\infty]{} 0\end{aligned}$$

car $\|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty$ ($f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$).

or $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

d'où : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(\nu)\right| &= \left|\hat{f}(\nu) - \hat{\varphi}(\nu) + \hat{\varphi}(\nu)\right| \\ &\leq \left|\hat{f}(\nu) - \hat{\varphi}(\nu)\right| + |\hat{\varphi}(\nu)| \\ &\leq \left\|\hat{f} - \hat{\varphi}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + |\hat{\varphi}(\nu)| \\ &\leq \|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} + |\hat{\varphi}(\nu)|\end{aligned}$$

et on a : $\lim\limits_{\nu\to+\infty} |\hat{\varphi}(\nu)| = 0$ et $\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$.

5.2.3 Exemple

Fonction “porte” :

$\Pi = \mathbb{1}_{]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[}$

$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x}dx = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$: sinus cardinal.

Remarque 2 *on peut très bien avoir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ($\hat{f}$ fonction à valeurs complexes).*

En pratique : la représentation graphique de $\hat{f}$ est la représentation en fréquence du signal f, appelé spectre (module et phase).

5.2.4 Propriétés

Théorème 2 du retard

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ \tau \in \mathbb{R}$
Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x-\tau).\ g \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $\forall \nu \in \mathbb{R},\ F(g)(\nu) = \hat{g}(\nu) = e^{-2i\pi\nu\tau}\hat{f}(\nu)$

Remarque 3 $e^{-2i\pi\nu\tau}$ *est un facteur de retard ou déphasage. On a ainsi :*

$\forall \nu \in \mathbb{R},\ |\hat{g}(\nu)| = \left|\hat{f}(\nu)\right|$
et $Arg(\hat{g}(\nu)) = Arg(\hat{f}(\nu)) - 2\pi\nu\tau$

Démonstration Un changement de variable dans l'intégrale de Fourier donne immédiatement le résultat.

Proposition 1

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ a > 0.$
Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(ax) : g \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ F(g(\nu)) = \frac{1}{a}f(\frac{\nu}{a})$$

Remarque 4 *Si f est à support compact : augmenter la taille du support de f (en dilatant f) revient à contracter la fonction $\hat{f}$ et inversement.*

Exemple 1 $\Pi = \mathbb{1}_{]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi(\frac{x}{\varepsilon})$$

Remarque 5 .

$\forall x \neq 0,\ \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = 0$

Si $x = 0,\ \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = +\infty.$

En fait, $\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = \delta$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\nu) = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\hat{\Pi}(\varepsilon\nu) = \hat{\Pi}(\varepsilon\nu) = \frac{\sin(\varepsilon\pi\nu)}{\varepsilon\pi\nu}$

Remarque 6 $\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{f}_\varepsilon(\nu) = 1.$

On montrera dans le chapitre sur la Transformée de Fourier des distributions que $F(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$.

Théorème 3 Fourier et dérivation

1. si $f \in L^1(\mathbb{R})$, f dérivable et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors
   $\nu \mapsto \nu\hat{f}(\nu) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et
   $\forall \nu \in \mathbb{R},\ F(f')(\nu) = 2i\pi\nu\hat{f}(\nu)$
2. si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $F(f)$ est dérivable et :
   $\forall \nu \in \mathbb{R},\ \frac{d}{d\nu}F(f)(\nu) = -2i\pi F(x \mapsto xf(x))(\nu)$

Remarque 7 *Relation entre la régularité d'une fonction et le comportement de son spectre à hautes fréquences :*

Supposons $f \in L^1(\mathbb{R}),\ f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Appliquons le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 1) à f' *:* $F(f') = 2i\pi\nu\hat{f}(\nu)$ *donc* $\nu \mapsto \nu\hat{f}(\nu)$ *est continue, de limite 0 en* $\pm\infty$.

$$\begin{aligned} \nu\hat{f}(\nu) &= \mathrm{o}(1) \\ \hat{f}(\nu) &= \underset{\nu \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\nu}\right) \end{aligned}$$

Généralisation : $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}) \ldots f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$.

$F(f^{(n)}) = (2i\pi)^n\nu^n\tilde{f}(\nu)$.

et

$$\hat{f}(\nu) = \underset{\nu \to \pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{|\nu|^n}\right)$$

Application Calcul de $F(f)$ avec $f : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ (cf. TD) :

$f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = -2\pi x f(x)$

f est alors solution de :

$$2\pi x y(x) + y'(x) = 0 \tag{5.3}$$

On applique F à 5.3 :

$$\begin{aligned} 2\pi F(x \mapsto xy(x)) + F(y') &= F(x \mapsto 0) \\ 2\pi(-\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{d\nu}\hat{y}(\nu)) + 2i\pi\nu\hat{y}(\nu) &= 0 \end{aligned}$$

On a également appliqué le 2) du théorème 3 et on obtient alors :

$$\frac{d}{d\nu}\hat{y}(\nu) + 2\pi\nu\hat{y}(\nu) = 0 \tag{5.4}$$

On a alors : 5.3 $\equiv$ 5.4.

Comme f et $\hat{f}$ sont solutions d'une même équation 5.3 :

$\hat{f}(\nu) = \lambda e^{-\pi\nu^2}$

Calcul de λ :

$\lambda = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$

$\forall \nu \in \mathbb{R},\ F(x \mapsto e^{-\pi x^2})(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$

On démontre également que la gaussienne est la seule fonction invariante par F.

5.3 Produit de convolution et principe du filtrage

<u>Problématique :</u>

Soit un filtrage analogique.

- f est le signal d'entrée.
- h est la réponse impulsionnelle du filtre.
- $g = (f \star h)$ est le signal filtré.

5.3.1 Rappel : Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Théorème 4 et définition

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ g \in L^1(\mathbb{R})$

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$.

Alors $(f \star g)$ est défini presque partout , intégrable et
$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Remarque 8 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est finie ($f(x) < +\infty$) presque partout.*

5.3.2 Exemple de filtrage : les moyennes glissantes

Soit f une fonction de $x \in \mathbb{R}$. En chaque point x, on remplace $f(x)$ par sa moyenne $\bar{f}(x)$ sur un intervalle de longueur τ :

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x) &= \frac{1}{\tau} \int_{x-\frac{\tau}{2}}^{x+\frac{\tau}{2}} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[x-\frac{\tau}{2};x+\frac{\tau}{2}]}(t) f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)f(t)dt
\end{aligned}$$

où $h : u \mapsto \frac{1}{\tau} \mathbb{1}_{[-\frac{\tau}{2};\frac{\tau}{2}]}$

h est appelée fenêtre carrée et $\bar{f}(x) = (h \star f)(x)$.

En pratique :
- Choix d'une fenêtre plus régulière.
- Choix de τ : problème d'échelle sur les phénomènes dans f que l'on souhaite conserver où lisser.

5.3.3 Convolution et transformée de Fourier

Théorème 5 : Convolution et transformée de Fourier

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}),\ g \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $\forall \nu \in \mathbb{R},\ F(f \star g)(\nu) = \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu)$.

Exemple 2 $F(\bar{f})(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{f}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}\hat{f}(\nu)$.

$\hat{h}$ est la fonction de transfert.

On peut alors adapter $\frac{1}{\tau}$ à la bande de fréquences "utile" du signal f.

Démonstration Réappliquons le théorème de Fubini positif :

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)g(x-y)|\, dy \right) \left| e^{-2i\pi\nu x} \right| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty$

car $\left| e^{-2i\pi\nu x} \right| = 1$.

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
F(f \star g)(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-2i\pi\nu x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-2i\pi\nu (x-y+y)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi\nu y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) e^{-2i\pi\nu (x-y)} dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi\nu y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-2i\pi\nu u} du \right) dy \\
&= \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu)
\end{aligned}$$

On a de nouveau utilisé le sempiternel changement de variable :

$$\begin{aligned}
u &= x - y \\
du &= dx
\end{aligned}$$

5.4 Transformée de Fourier inverse

Problématique :

$F \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } F : f \mapsto F(f) = \hat{f} \\ f \mapsto F(f) = \hat{f} \end{cases}$

est linéaire et continue.

F telle que : $\forall \nu \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$.

Inversion de F ?

1. Trouver un espace invariant par F (espace $S \subset L^1(\mathbb{R})$ tel que $F(S) \subset S$).
2. Expression de F^{-1} ?

Remarque 9 *L'espace naturel pour F : $L^2(\mathbb{R})$.*

But : Trouver un espace invariant $S \subset L^1(\mathbb{R})$ et montrer que F se prolonge en une application encore nommée F (abus de langage) : $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ avec F isométrie.

Problème : $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$ n'est pas définie. (ex : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$).

5.4.1 La classe de Schwarz $S(\mathbb{R})$

Définition 2 *$S(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, C^∞ à décroissance rapide. Autrement dit :*

$$f \in S(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in N,\ (1+|x|^n)f^{(p)} \in L^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

En conséquence, $\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|f^{(p)}(x)\right| \leq \frac{C}{1+|x|^n}$

Exemples 3 .

- *Gaussienne : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in S(\mathbb{R})$*
- *$D(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions C^∞ à support compact, est inclus dans $S(\mathbb{R})$.*

Remarque 10 $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

Proposition 2

$S(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et multiplication par un polynôme. C'est à dire :

$\forall f \in S(\mathbb{R}),\ \forall p, n \in \mathbb{N}$

1. $f^{(p)} \in S(\mathbb{R})$
2. $x \mapsto x^n f(x) \in S(\mathbb{R})$

Proposition 3

$S(\mathbb{R})$ est invariant par F, c'est à dire :
$\forall f \in S(\mathbb{R}),\ F(f) = \hat{f} \in S(\mathbb{R})$

Démonstration On utilise le théorème Fourier et dérivation.

Soit $f \in S(\mathbb{R})$. En particulier $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R})$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ x \mapsto x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p)} \in L^1(\mathbb{R})$.

$f \in L^1(\mathbb{R})$ implique que $\hat{f}$ est continue, et $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$.

$f' \in L^1(\mathbb{R})$ implique que $\nu \mapsto \nu\hat{f}(\nu)$ est continue et $\nu \mapsto \nu\hat{f}(\nu) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Ainsi, par récurrence : $f^{(p)} \in L^1(\mathbb{R})$ implique $\nu \mapsto \nu^p\hat{f}(\nu)$ continue et
$\nu \mapsto \nu^p\hat{f}(\nu) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

De plus, $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, d'où $\hat{f}$ dérivable et $\frac{d\hat{f}}{d\nu} \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ x \mapsto x^n f(x) L^1(\mathbb{R})$ entraîne $\hat{f}$ est n fois dérivable et $\frac{d^n}{d\nu^n}\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Donc $\hat{f}$ est C^∞, à décroissance rapide, i.e. $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

5.4.2 Transformée de Fourier inverse dans $S(\mathbb{R})$

Définition 3 *$\bar{F}$ est définie par :*

$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \bar{F}(\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu$

Remarque 11 $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}),\ \bar{F}(\varphi) = \overline{F(\bar{\varphi})}$

Remarque 12 *$\bar{F}$ possède des propriétés analogues à celles de F (linéarité, continuité, etc..).*

Théorème 6 : Propriété d'inversion de F

L'application $F : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est inversible et $F^{-1} = \bar{F}$.
Autrement dit :

$$\begin{aligned} \forall f \in S(\mathbb{R}),\ \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu \end{aligned}$$

Démonstration $\bar{F}F = Id$ ou encore $\forall f \in S(\mathbb{R}), \bar{F}(\hat{f}) = f$.

Remarque 13 *Nous n'utiliserons pas :*

$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \right) e^{2i\pi\nu x} d\nu$

(Ne marche pas)

Etape 1 :

Montrons :

$\forall f \in S(\mathbb{R}),\ \forall \varphi \in S(\mathbb{R}),\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\nu) \overline{\varphi(\nu)} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\bar{F}(\varphi)(x)} dx$

ou encore $< F(f), \varphi >=< f, \bar{F}(\varphi) >$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\nu) \overline{\varphi(\nu)} d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \right) \overline{\varphi(\nu)} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(\nu) e^{2i\pi\nu x}} d\nu \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\bar{F}(\varphi)(x)} dx \end{aligned}$$

par application du théorème de Fubini, utilisable dans ce cas car :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R},\ \forall \nu \in \mathbb{R}, & & \\ \left| f(x)\overline{\varphi(\nu)}e^{-2i\pi\nu x} \right| & \leq & |f(x)| \left| \overline{\varphi(\nu)} \right| \end{array}$$

Ce qui prouve que la fonction : $(x,\nu) \mapsto f(x)\overline{\varphi(\nu)}e^{-2i\pi\nu x}$ est un élément de $L^2(\mathbb{R})$, condition suffisante à l'application de Fubini.

<u>Etape 2 :</u>

Montrons $\forall f \in S(\mathbb{R}),\ \bar{F}F(f)(0) = f(0)$.

Soit $h(x) = e^{-\pi x^2}$ alors $\hat{h}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$. On a donc $\bar{F}F(h) = h$.

On définit : $\forall \varepsilon > 0, h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}h(\frac{x}{\varepsilon})$.

Il s'ensuit : $F(h_\varepsilon)(\nu) = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\hat{h}(\varepsilon\nu) = \hat{h}(\varepsilon\nu) = e^{-\pi(\varepsilon\nu)^2}$ et

$$\bar{F}F(h_\varepsilon)(x) = \bar{F}(e^{-\pi(\varepsilon\nu)^2})(x) = \frac{1}{\varepsilon}e^{-\pi(\frac{x}{\varepsilon})^2} = h_\varepsilon(x)$$

Conclusion : $\bar{F}F(h_\varepsilon) = h_\varepsilon$.

Soit $f \in S(\mathbb{R})$ et soit $\varphi = F(h_\varepsilon) \in S(\mathbb{R})$. On applique l'étape 1 deux fois :

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\bar{F}Fh_\varepsilon(x)}dx & = & \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}Ff(x)\overline{h_\varepsilon(x)}dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{h_\varepsilon(x)}dx & = & \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}Ff(x)\overline{h_\varepsilon(x)}dx \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(\frac{x}{\varepsilon})dx & = & \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}Ff(x)h(\frac{x}{\varepsilon})dx \end{array}$$

On pose : $y = \frac{x}{\varepsilon}$ et on obtient :

$$\forall f \in S(\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon y)h(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}F(f)(\varepsilon y)h(y)dy$$

Comme f et $\bar{F}F(f)$ sont continues, on obtient :

$$\begin{array}{ll} \forall y \in \mathbb{R}, & \lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon y)h(y) = f(0)h(y) \\ & \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{F}F(f)(\varepsilon y)h(y) = \bar{F}F(f)(0)h(y) \end{array}$$

Compte-tenu des propriétés de f et $\bar{F}F(f)$:

$|f(\varepsilon y)h(y)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |h(y)|$ et $\left|\bar{F}F(f)(\varepsilon y)h(y)\right| \leq \left\|\bar{F}F(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |h(y)|$

or $y \mapsto \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |h(y)|, y \mapsto \left\|\bar{F}F(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |h(y)| \in L^1(\mathbb{R})$.

On peut désormais appliquer le théorème de convergence dominée pour passer à la limite quand ε tend vers 0 dans l'intégrale, d'o˘ :

$$f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)dy = \bar{F}F(f)(0)\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)dy$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)dy \neq 0$: $f(0) = \bar{F}F(f)(0)$.

Etape 3 :

Soit $f \in S(\mathbb{R})$.
Pour $z \in \mathbb{R}$, on pose $g : x \mapsto g(x) = f(x+z) \in S(\mathbb{R})$.
Par application de l'étape 2 : $g(0) = \bar{F}F(g)(0)$.

$g(0) = f(z)$, donc :

$$\begin{aligned}
\bar{F}F(g)(x) &= \bar{F}F(f)(x+z) \\
&= \bar{F}(\nu \mapsto e^{2i\pi\nu z}\hat{f}(\nu))(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu z}\hat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu x}d\nu \\
&= \bar{F}(\hat{f})(x+z) \\
&= (\bar{F}F(f))[z+x]
\end{aligned}$$

En prenant $x = 0$ dans l'égalité ci-dessus :

$\bar{F}Fg(0) = \bar{F}Ff(z)$

Donc :

$$\forall f \in S(\mathbb{R}), \bar{F}(\hat{f}) = f$$

5.4.3 Propriété : Fourier et produit de convolution

Théorème 7 Fourier et produit de convolution

Soient $f, g \in S(\mathbb{R})$, alors $fg \in S(\mathbb{R})$ et $F(fg) = F(f) \star F(g)$.

Démonstration On sait :

$\forall \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}), F(\varphi \star \psi) = F(\varphi)F(\psi)$

De même : $\bar{F}(\varphi \star \psi) = \bar{F}(\varphi)\bar{F}(\psi)$

Donc : $F\bar{F}(\varphi \star \psi) = F(\bar{F}(\varphi)\bar{F}(\psi))$

avec $F\bar{F} = Id$.

Soient $f, g \in S(\mathbb{R})$, on pose :

$\varphi = F(f) \Leftrightarrow f = \bar{F}(\varphi)$
$\psi = F(g) \Leftrightarrow g = \bar{F}(\psi)$

et on obtient : $F(f) \star F(g) = F(fg)$.

5.5 Application : résolution de l'équation de la chaleur

$u(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ température.

Equation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases} \tag{5.5}$$

Condition Initiale : $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

On cherche $u \in S(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ ie

$$\begin{cases} u \in C^\infty \\ \forall m, n, k, l \in \mathbb{N},\ , (x, t) \mapsto (1 + |x|^m + |t|^n) \dfrac{\partial^k}{\partial t^k} \dfrac{\partial^l}{\partial x^l} u(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \end{cases}$$

Proposition 4

Le problème 5.5 admet une solution unique $(t, x) \mapsto u(t, x)$ dans $S(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

Démonstration

1. On considère la transformée de Fourier spatiale de u :

   $\hat{u}(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-2i\pi\nu x} dx$, en l'appliquant à l'équation 5.5 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-2i\pi\nu x} dx$$

Supposons que :

$\left|u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}\right| \leq |u(x,t)| \leq f(x) \in L^1(\mathbb{R})$

On peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale :

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-2i\pi\nu x}dx$

D'après 5.5 :

$\forall t,\nu \in \mathbb{R},\ \frac{\partial}{\partial t}(\hat{u}(t,\nu)) = -4\pi^2\nu^2\hat{u}(t,\nu)$

donc $\hat{u}(t,\nu) = \lambda(\nu)e^{-4\pi^2\nu^2 t}$ avec λ constante par rapport au temps.

Condition initiale : $t = 0$, donc $\forall x \in R,\ u(0,x) = \varphi(x)$

$\hat{u}(0,\nu) = \hat{\varphi}(\nu)$ et $\hat{u}(t,\nu) = \hat{\varphi}(\nu)e^{-4\pi^2\nu^2 t} \in S(\mathbb{R})$

On a alors :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= F^{-1}(\hat{u})(x,t) \\
&= \bar{F}(\hat{u})(x,t) \\
&= \bar{F}(\nu \mapsto \hat{\varphi}(\nu)e^{-4\pi^2\nu^2 t})(x,t) \\
&= \bar{F}(\hat{\varphi}(\nu)) \star \bar{F}(\nu \mapsto e^{(2i)^2\pi^2\nu^2 t})(x,t) \\
&= \varphi(x) \star \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}
\end{aligned}$$

<u>Explication :</u>

$F(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\nu^2} \Leftrightarrow e^{-\pi x^2} = \bar{F}(e^{-\pi\nu^2})$

donc

$$\begin{aligned}
\bar{F}(e^{-\pi(2\sqrt{\pi t}\nu)^2}) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\pi(\frac{x}{2\sqrt{\pi t}})^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
u(t,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy
\end{aligned}$$

On a :

— $\varphi(y)$: condition initiale
— $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$: noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}$.

2. On pose :

$$u(x,t) = \varphi(x) \star \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

et on vérifie :
— $u \in S(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ (pénible)
— u solution de 5.5

5.6 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Rappels :

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$< f|g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$

$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{< f|f >}$

5.6.1 Théorème de densité (admis)

Théorème 8 de densité

L'ensemble $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
$\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \exists(\varphi_n) \in S(\mathbb{R}),\ \lim\limits_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$

5.6.2 Théorème de Hahn-Banach

Théorème 9 de Hahn-Banach

Soient X,Y 2 espaces vectoriels normés et complets. Soit $D \subset X$ avec D dense dans X et soit $f : D \to Y$ une application linéaire, continue.
Alors il existe une unique application $\tilde{f} : X \to Y$ prolongeant f et telle que $|||f||| = \left|\left|\left|\tilde{f}\right|\right|\right|$.

Remarque 14 $\|.\|_X$ *est la norme dans X et comme* $D \subset X$*, on prend :* $\|.\|_D = \|.\|_X$

Rappel :
— $|||f||| = \sup\limits_{x\in D,\, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}$
— f est linéaire, continue signifie :

$$\exists K > 0,\ \forall x \in D,\ \|f(x)\|_Y \leq K\,\|x\|_X$$

$|||f|||$ est la plus petite constante K possible.

Démonstration Soit $x \in X$, il faut définir $\tilde{f}(x)$.

Soit (x_n) une suite de D telle que $x_n \to x$ dans X.

$(\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_X = 0)$

Montrons que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned} \|f(x_n) - f(x_p)\|_Y &= \|f(x_n - x_p)\|_Y \\ &\leq |||f||| \,.\, \|x_n - x_p\|_X \end{aligned}$$

or (x_n) est une suite de Cauchy dans X. $f(x_n)$ est donc une suite de Cauchy dans Y complet : $f(x_n)$ converge donc vers une limite φx. Posons $\tilde{f}(x) = \varphi x$.

φx ne dépend pas de la suite (x_n) de D.

En effet, si $x_n \to x$ et $x'_n \to x$, alors

$$\left\|f(x_n) - f(x'_n)\right\|_Y \leq |||f||| \,.\, \left\|x_n - x'_n\right\|_X \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n)$

Soit $\tilde{f} : X \to Y$ définie par $\forall x \in X,\ \tilde{f}(x) = \varphi x$.

Alors :
- $\forall x \in D,\ \tilde{f}(x) = f(x)$ ($\tilde{f}$ prolonge f)
- $\tilde{f}$ est linéaire.
  En effet, f étant linéaire, on obtient, avec :

$$\begin{cases} x \in X, & x_n \in D, \quad x_n \to x \\ y \in X, & y_n \in D, \quad y_n \to y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x + \lambda y) &= \lim_{n\to+\infty} f(x_n + \lambda y_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(x_n) + f(\lambda y_n) \\ &= \tilde{f}(x) + \lambda \tilde{f}(y) \end{aligned}$$

- $\tilde{f}$ est continue.
- Soit $x \in X$ et (x_n) suite d'éléments de D telle que : $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

  $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ dans Y.

  et comme f est continue : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f(x_n)\|_Y \leq |||f||| \,.\, \|x_n\|_X$

Par passage à la limite : $\left\|\tilde{f}(x)\right\|_Y \leq |||f|||\,.\,\|x\|_X$

autrement dit : $\left\|\tilde{f}(x)\right\|_Y \leq K\,\|x\|_X$

donc $\tilde{f}$ est continue et $\left|\left|\left|\tilde{f}\right|\right|\right| \leq |||f|||$.

- D'autre part, $D \subset X$ donc :

$$\left|\left|\left|\tilde{f}\right|\right|\right| = \sup_{x\in X} \frac{\left\|\tilde{f}(x)\right\|_Y}{\|x\|_X} \geq \sup_{x\in D} \frac{\left\|\tilde{f}(x)\right\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\in D} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = |||f|||$$

5.6.3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 10 Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

$F : S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est continue, linéaire de $(S, \|.\|_{L^2(\mathbb{R})})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Elle se prolonge donc de manière unique en 1 application, encore notée F :
$F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ linéaire, continue et de plus, $|||F||| = 1$.

Démonstration Il suffit de démontrer : $F : S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est continue et d'appliquer ensuite le théorème de Hahn-Banach 9.

Rappel : on a démontré (étape 1 de la démo pour $\bar{F} = F^{-1}$) :

$$\forall f, \varphi \in S(\mathbb{R}),\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\nu)\overline{\varphi(\nu)}d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\bar{F}(\varphi)(x)}dx$$

$$(< F(f)|\varphi >=< f|\bar{F}(\varphi) >)$$

On choisit : $\varphi = F(f)$.

$$\bar{F}(\varphi) = F^{-1}(F(f)) = f$$

et on obtient :

$$\forall f \in S(\mathbb{R}),\ \|F(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

F est donc une isométrie : elle conserve la norme.

Proposition 5

$F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est une isométrie et :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}),\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)\overline{\hat{g}(\nu)}d\nu$$

En particulier, conservation de l'énergie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 d\nu$$

Remarque 15 $f \in L^2(\mathbb{R}),\ \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, comme par exemple $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, on écrira souvent :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \text{“}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx\text{”} \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \end{aligned}$$

Théorème 11

F et $\bar{F}$ sont des isométries de $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. De plus, F est inversible et $\bar{F} = F^{-1}$.

Démonstration

$$\forall f \in S,\ \bar{F}Ff = f$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ avec (f_n) suite de fontions de $S(\mathbb{R})$.

$$\bar{F}Ff = f$$

$$\begin{aligned} \bar{F}Ff &= \bar{F}F(\lim_{n\to+\infty} f_n) \\ &= \bar{F}(\lim_{n\to+\infty} F(f_n)),\ (F continue) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (\bar{F}Ff_n),\ (\bar{F} continue) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n \\ &= f \end{aligned}$$

♣ Fin de chapitre ♣

Chapitre 6

Annexe 1 : construction de l'intégrale de Lebesgue

$\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty[\cup\{+\infty\} = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$.

Convention :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \overline{\mathbb{R}_+}, \quad x + (+\infty) & = & +\infty \\ x \times (+\infty) & = & \left\{ \begin{array}{cl} +\infty & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

6.1 Eléments de théorie de la mesure

6.1.1 Ensembles mesurables

Définition 1 *Une tribu sur $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) est une famille de parties de $\mathbb{R}^N$ contenant $\emptyset$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).*
Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^N$, les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les ensembles mesurables. On dit que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

Exemples :
(i) $(\emptyset, \mathbb{R}^N)$ est la tribu grossière de $\mathbb{R}^N$.
(ii) $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ ensemble des parties de $\mathbb{R}^N$ est la tribu discrète.
(iii) La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^N$ est la tribu engendrée par les ouverts (et donc par les fermés) de $\mathbb{R}^N$. On peut montrer que cette tribu notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ est engendrée par les pavés :

$$\prod_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \text{ avec } -\infty < a_j < b_j < +\infty$$

6.1.2 Mesures

Définition 2 *Soit $\mathcal{B}$ une tribu de $\mathbb{R}^N$. Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ vérifiant :*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Pour toute famille dénombrable (B_i) d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints on a :

$$\mu(\bigcup_1^\infty B_i) = \sum_1^\infty \mu(B_i)$$

(μ est dénombrablement additive)
$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

Exercice : Montrer que l'on peut remplacer dans la définition : $\mu(\emptyset) = 0$ par "la mesure n'est pas partout égale à $+\infty$".

Définition 3 *Soit $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que cet espace est complet, ou que μ est complète ou que μ est complète pour $\mathcal{B}$ si :*

$$(B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 0, A \subset B) \Rightarrow A \in \mathcal{B}$$

Si $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, on peut montrer qu' il existe une tribu $\tilde{\mathcal{B}}$ et une mesure (positive) $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{\mathcal{B}}$ telles que :

(i) $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$

(ii) $\forall B \in \mathcal{B}, \tilde{\mu}(B) = \mu(B)$

(iii) $(\mathbb{R}^N, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu})$ est complet

Exemple fondamental : On peut montrer qu'il existe une unique mesure μ sur la tribu des Boréliens $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ vérifiant :

$$\mu\left(\prod_{j=1}^N [a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^N (b_j - a_j)$$

μ est la mesure de Borel de $\mathbb{R}^N$.
La complétée de cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$.

Autres exemples de mesure :

1) mesure de comptage sur un ensemble X, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(A) = card(A)$
2) mesure de Dirac, $\mu(A) = 1$ si $a \in A$, $\mu(A) = 0$ si $a \notin A$ (A ensemble mesurable).

Propriétés des mesures positives

1) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$.
2) Si A_n est une suite d'ensembles mesurables, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$$

3) Si $A, B \subset \mathbb{R}^N$ sont mesurables, on a :

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

4) Si (A_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables alors :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

5) Si (A_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables tels que $\mu(A_1) < +\infty$, alors on a :

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Exercice : $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ où μ est la mesure de Lebesgue.

Ensembles négligeables - Propriétés vraies presque partout

Définition 4 *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. Si $\mu(A) = 0$ on dit que A est négligeable (pour la mesure considérée).*

Remarque 1 *Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, dans $\mathbb{R}$ $(N = 1)$, $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc négligeable car les points sont de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.*

$$\mu_L([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0, \mu_L([0,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) = 1$$

où μ_L désigne la mesure de Lebesgue.

6.1.3 Fonctions mesurables

On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$

Définition 5 *Une fonction $f : \mathbb{R}^N \to [0,\infty[$ est étagée si elle prend un nombre fini de valeurs distinctes $a_1, \cdots, a_k < +\infty$ et si $B_i = f^{-1}(a_i) \in \mathcal{B}$*

Ecriture d'une fonction étagée : $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mathbb{1}_{B_i}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$, B_i mesurable et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. La fonction $\mathbb{1}_{B_i}$ qui vaut 1 sur B_i et 0 en dehors est la fonction *indicatrice* de B_i.

Définition 6 *Une fonction $F : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable.*

Remarque : en particulier l'image réciproque de tout intervalle par une fonction mesurable est mesurable.
Exemple : une fonction continue est mesurable.

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable positive. Alors f est la limite simple croissante d'une suite de fonctions étagées.

Démonstration Pour i entier $\in [1, n2^n]$, on note $E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}])$ et $F_n = f^{-1}([n, \infty])$. Chacune de ces parties appartient à la tribu $\mathcal{B}$ car f est mesurable. A l'aide des fonctions caractéristiques des ces parties on définit :

$$s_n = \sum_{1 \leq i \leq n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,i}} + n \mathbb{1}_{F_n}$$

qui est une fonction étagée. Quand on passe de n à $n+1$, les intervalles de la nouvelle subdivision de $[0, \infty]$ sont contenus dans les intervalles de la n-ième. Donc la suite s_n est croissante. On vérifie facilement que $s_n(x)$ tend vers $f(x)$ pour $n \to \infty$; si $f(x) < +\infty$ et $n > f(x)$, s_n est l'approximation inférieure à $\frac{1}{2^n}$ près par un nombre dyadique.

Proposition 1

Le produit et la somme de deux fonctions mesurables à valeurs réelles sont mesurables

Démonstration Si f et g sont deux fonctions mesurables sur X à valeurs réelles, et si Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs rélles, alors la fonction h définie par :

$$h(x) = \Phi(f(x), g(x))$$

est mesurable. En effet, pour tout nombre réel α, l'ensemble

$$\Omega_\alpha = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \Phi(u, v) > \alpha\right\}$$

est un ouvert, et est donc une rénuion dénombrable de rectangles ouverts

$$\Omega_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \quad R_n =]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[.$$

Les ensembles

$$\{x, (f(x), g(x)) \in R_n\} = \{x, a_n < f(x) < b_n)\} \bigcap \{x, c_n < f(x) < d_n)\}$$

sont mesurables, et de même l'ensemble

$$\{x,\ h(x) > \alpha\} = \{x,\ (f(x), g(x)) \in \Omega_x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x,\ (f(x), g(x)) \in R_n\}$$

est mesurable. On en déduit que la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables.

Pour une suite $(a_n) \in [0, \infty]$, $\sup(a_n)$ désigne la borne supérieure dans $[0, \infty]$.
Pour une suite de fonctions $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sup\limits_n f_n$ est la fonction $x \to \sup\limits_n f_n(x)$.

Proposition 2

Soit $f_n : X \to [0, \infty]$, une suite de fonctions mesurables. Alors $\sup\limits_n f_n$ et $\inf\limits_n f_n$ sont mesurables.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\left\{x \in X,\ a < \sup_n f_n < b\right\} &= \left\{x \in X, \sup_n f_n < b\right\} \bigcap \left\{x \in X, a < \sup_n f_n\right\} \\ &\subset \bigcup_n \{x \in X, f_n(x) > a\} \bigcap \bigcup_n \{x \in X, f_n(x) < b\}\end{aligned}$$

qui est mesurable en tant que réunion dénombrable d'ensembles mesurables. On a une égalité identique pour l'inf d'où la conclusion.

Remarque : il est très compliqué de construire des ensembles non mesurables pour la mesure de Lebesgue. Dans la pratique, on considèrera que toutes les fonctions étudiées sont mesurables (sans le démontrer).

6.2 Intégration des fonctions positives

Dans la suite μ désigne une mesure sur $\mathbb{R}^N$.

6.2.1 Définition de l'intégrale

Définition 7 *1) Si $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est une fonction étagée de valeurs distinctes $a_1, a_2, \cdots, a_n$, on note $A_i = f^{-1}(a_i)$ et on pose*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

2) Si $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable, on définit l'intégrale de f par rapport à μ comme l'élément de $[0, \infty]$ donné par la formule suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \sup\{\int_{\mathbb{R}^N} s d\mu, s \text{ est étagée et } s \leq f\}$$

On dira que f est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ si cette quantité est finie.

3) Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est mesurable et si $\mathbb{1}_E$ est sa fonction indicatrice, on pose :

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f \mathbb{1}_E d\mu$$

Remarque : au 2), on peut définir de façon équivalente $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} s_n d\mu$ où (s_n) est une suite croissante de fonctions étagées convergeant simplement vers f (dans ce cas il faut montrer que l'intégrale ne dépend pas du choix de la suite (s_n)).

6.2.2 Propriétés élémentaires

1) Si $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ sont mesurables et si $\forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) \leq g(x)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \text{ (croissance de l'intégrale)}$$

2) Si s et t sont deux fonctions étagées, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (s+t)d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} sd\mu + \int_{\mathbb{R}^N} td\mu$$

3) Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$ tel que $\mu(E) = 0$. Alors :

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f \ \mathbb{1}_E \ d\mu = 0$$

Démonstration

1) Si s est étagée $\leq f$, on a $s \leq g$ et donc $\int_{\mathbb{R}^N} sd\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} gd\mu$. En prenant la borne supérieure du membre de gauche lorsque s varie parmi les fonctions étagées $\leq f$, on obtient l'égalité voulue.

2) On peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} (s+t)d\mu = \sum_i \sum_j (s_i + t_j)\mu(A_i \bigcap B_j)$$

avec $s = \sum_i s_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $t = \sum_j t_j \mathbb{1}_{B_j}$. On remarque alors que

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j (s_i + t_j)\mu(A_i \bigcap B_j) &= \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \bigcap B_j) + \sum_j b_j \sum_i \mu(A_i \bigcap B_j) \\ &= \sum_i a_i \mu(A_i) + \sum_j b_j \mu(B_j) = \int_{\mathbb{R}^N} sd\mu + \int_{\mathbb{R}^N} td\mu,\end{aligned}$$

car $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ if $i \neq j$ (idem pour A_i) et $\bigcup B_j = \mathbb{R}^N$.

3) En exercice !

6.2.3 Théorème de convergence monotone

On admet le théorème suivant dit de Beppo-Levi :

Théorème 2 Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^N$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim f_n(x)d\mu = \lim \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)d\mu \leq +\infty$$

Corollaire 1

1) Si f et g sont deux fonctions mesurables $\mathbb{R}^N \to \overline{R_+}$ et α, β deux réels ≥ 0, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$

2) Soit $(f_n) : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurables pour tout n, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu$$

Démonstration

1) On sait qu'il existe des suites croissantes de fonctions positives et étagées telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$. Alors $\alpha f_n + \beta g_n$ est une suite croissante de fonctions étagées et $\lim_n \alpha f_n + \beta g_n = \alpha f + \beta g$. Comme on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g_n d\mu$$

Le résultat s'obtient alors en appliquant le théorème de convergence monotone à chacun des membres de l'égalité.

2) Posons $\forall\, x,\ g_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x)$. On a alors $\forall\, x,\ g_j(x) \leq g_{j+1}(x)$ et $\forall\, j,\ g_j : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable. $\forall\, j \in \mathbb{N},\ a_j \geq 0$ donc $\sum_{j \geq 0} a_j$ converge toujours dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. $S_K = \sum_{j=0}^{K} a_j$.

6.2.4 Propriétés des fonctions intégrables positives

Propriétés : Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable. On a :

1)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p. } (f(x) = 0 \text{ p.p.})$$

2)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu < +\infty \Rightarrow f < +\infty \text{ p.p. } (f(x) < \infty \text{ p.p.})$$

Démonstration

1) Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^N \quad | \quad f(x) \neq 0\}$

— $(\Leftarrow)$
$\forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A(x)$
$$\int_{\mathbb{R}^N} f\ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} n\mathbb{1}_A d\mu \overset{th2}{=} \lim_{n\to\infty} n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A d\mu}_{\mu(A)=0} \text{ car } n\mathbb{1}_A \text{ est croissante.}$$

— $(\Rightarrow)$
$\mathbb{1}_A(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} nf(x)$
$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A\ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} nf d\mu \overset{th2}{=} \lim_{n\to\infty} n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, d\mu}_{=0} = 0$$

2) Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^N \quad | \quad f(x) = +\infty\}$, On a alors $\int_A f d\mu = +\infty$ si $\mu(A) \neq 0$ et 0 sinon. Donc, comme $\int_A f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$, $\mu(A) = 0$.

Bibliographie

[1] J-P. Ansel et Y. Ducel, *Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration*, Ellipses

[2] N. Boccara, *Intégration*, Mathématiques pour l'ingénieur, Ellipses.

[3] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann

[4] G. Choquet, *Cours de topologie*, Dunod

[5] G. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et Applications*, Masson.

[6] M. Mamode, *Mathématiques pour la physique*, Universités physique, Ellipses.

[7] H. Reinhard, *Eléments de Mathématiques du signal. Tome 1 : signaux déterministes*, Dunod.

[8] F. Roddier, *Distributions et transformée de Fourier à l'usage des physiciens et des ingénieurs*, Mc Graw Hill