MNB : CH1

Equations différentielles avec CN aux Limites

Approximation par différences finies.

1] Introduction :

* **Equation de Debye-Hückel :**

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr} = \lambda\varphi & r \in]r_0, R[\quad , \lambda > 0 \\ \varphi'(r_0) = \alpha , \ \varphi'(R) = 0 : & \text{CN aux Limites de type Neuman} \end{cases}$$

* **Equation de la chaleur stationnaire :**

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\dfrac{du}{dx}\right) = f(x) & x \in]0, L[\\ u(0) = 0 , \ u(L) = 0 & : \text{CN aux Limites de type Dirichlet} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ces equations n'admettent pas forcément de solution explicites d'où la nécessité d'utiliser des méthodes numerique pour resoudre ces problémes.

* **Probleme aux Limites :**

• $$\begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha , \ u(1) = \beta \end{cases} \qquad (\underline{Pb})$$

avec :
- $f \ C^0([0,1])$
- $c \ C^0([0,1])$ avec $c(x) \geqslant 0$

* **Th**
- Lorsque $c \geqslant 0$, $\exists !\, u$ solution du P tq $u \in C^2([0,1])$
- En plus f, c sont C^k Alors u est C^{k+2}

2] Dérivation numérique.

a) Rappel :

i) Formule de Taylor – Lagrange :

- Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$
- Alors, $\exists\ \xi \in]a,b[$ tq :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

ii) Théorème des Accroissements finis :

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^0
- f' existe sur $]a,b[$

Alors $\exists\ \xi \in]a,b[$ $\quad f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

b) Dérivée numérique :

i) Déf :

- Soit f fonction dérivable sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$
- On considère des points x_i, $i \in [\![0, n+1]\!]$ régulièrement espacés :

$$x_i = a + ih \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{n+1}$$

- La Dérivée numérique Consiste à approcher $f'(x_i)$ en utilisant seulement des valeurs de f en certains points x_j

ii) Approximation d'ordre 1 pour la dérivée

- **Différence finie avant.**

$$\begin{cases} f'(x_i) \simeq \Delta_x^+ f_i = \dfrac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} \\ \text{Erreur commise : } \quad f'(x_i) - \Delta_x^+ f_i = -\dfrac{h}{2} f''(\xi_i),\ \xi_i \in]x_i, x_i+h[\end{cases}$$

- **Différence finie arrière :**

$$\begin{cases} f'(x_i) \simeq \Delta_x^- f_i = \dfrac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h} \\ \text{Erreur : } \quad f'(x_i) - \Delta_x^- f_i = \dfrac{h}{2} f''(\xi_i),\quad \xi_i^- \in]x_i - h, x_i[\end{cases}$$

iii) Approximation d'ordre 2 par la dérivée

- **Différence finie centrée**

$$\begin{cases} f'(x_i) \simeq \Delta_x^0 f_i = \dfrac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} \\ \text{Erreur, } f'(x_i) - \Delta_x^0 f_i = -\dfrac{h^2}{6} f^{(3)}(\varepsilon_i) \quad \varepsilon_i \in]x_i - h, x_i + h[\end{cases}$$

Rq

si f est $\mathcal{C}^3$, la formule centrée est d'ordre 2 donc plus précise que les deux premières formules

c) Symbole d'ordre de Landau : O

* **Déf**

- Soient f, g deux fonctions définies au vg de $x = a$ avec $g \geq 0$

On a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x)) \iff \exists M, \delta > 0 \text{ tq : } |f(x)| \leq M g(x) \text{ lorsque } |x-a| < \delta .$$

- f, g deux fonctions déf sur $[b, +\infty[$ avec $g \geq 0$

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(g(x)) \iff \exists M > 0, c \geq b \text{ tq : } |f(x)| \leq M g(x) \text{ lorsque } x \geq c$$

* **Formules précédentes avec O :**

i) si f est C^2 :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h} + O(h)$$

ii) si f est C^3 :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} + O(h^2)$$

2] Approximation de la dérivée seconde :

* $\begin{cases} f''(x_i) \approx \Delta_{xx} f_i = \frac{1}{h^2}\left(f(x_i+h) - 2f(x_i) + f(x_i-h)\right) \\ f''(x_i) - \Delta_{xx} f_i = O(h^2) \quad \text{erreur commise} \end{cases}$

* $\Delta_{xx} = \frac{\Delta_x^+ - \Delta_x^-}{h} = \Delta_x^+ \Delta_x^- = \Delta_x^- \Delta_x^+$

3] Schéma aux différences finies :

(Pb) : $f, c \in C^0([0,1])$, $\exists ! u \in C^4([0,1])$ solution de (Pb).

a) Maillage :

* On subdivise de façon régulière l'intervalle $[0,1]$
* On appelle $x_i = ih$ $i \in [\![0, n+1]\!]$ les pts de la subdivision
* Vocabulaire :
  * maillage : la subdivision uniforme sur $[0,1]$
  * les noeuds du maillage : les pts x_i
  * le pas du maillage : $h = \frac{1}{n+1}$

b) Construction du schéma numérique :

Soit $i \in [\![0, n+1]\!]$

i) On calcul $c(x_i) = c_i$ et $f(x_i) = f_i$

ii) On note $\tilde{u}_i = u(x_i)$: la solution approchée $\tilde{u}_0 = \alpha$, $\tilde{u}_{n+1} = \beta$ (cond lim)

iii) Ecrivons l'eq diff en x_i :

$$-u''(x_i) + c_i \tilde{u}_i = f_i \quad \text{or} \quad u''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left(\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}\right) + O(h^2)$$

Ainsi

$$\frac{-\tilde{u}_{i+1} + 2\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + c_i \tilde{u}_i - f_i = R_i \quad \text{avec } R_i = O(h^2)$$

Rq.

* $\max_{1 \le i \le n} |R_i| \le \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|$
* $R = (R_1, \dots, R_n)^T$ est appelé : résidu : $\|R\|_\infty = O(h^2)$

c) Schéma aux différences finies :

* $\forall i \in [\![0, n+1]\!]$ u_i = l'approximation de $u(x_i)$ en négligeant les termes $O(h^2)$

* On a $\forall i \in [\![0, n+1]\!]$: $-\dfrac{u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i$

et $u_0 = \alpha$, $u_{n+1} = \beta$ (CN aux limites).

$\Longrightarrow$ ce système linéaire définit : un schéma aux différences finies pour l'approximation de la solution u du pb aux limites.

Rq : $\|R\|_\infty = O(h^2) \Longrightarrow$ le schéma est consistant à l'ordre 2 avec Pb Limite

D) Formulation matricielle :

- On pose $U = (u_1, \ldots, u_n)^T$
* **obj** : On écrit le système à résoudre sous la forme :

$AU = B$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$

*

$$\begin{cases} -\dfrac{u_2 + 2u_1 - u_0}{h^2} + c_1 u_1 = f_1 \\ -\dfrac{u_3 + 2u_2 - u_1}{h^2} + c_2 u_2 = f_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ -\dfrac{u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i \\ \cdots \\ -\dfrac{u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}}{h^2} + c_n u_n = f_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+c_nh^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+c_nh^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + \alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-1} \\ h^2 f_n + \beta \end{pmatrix}$$

e) Résolution du système :

i) Rappel sur les Matrices Symétriques

* **Déf** : Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\quad x^T M x > 0$

* **Th** :

$M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(M) \quad \lambda > 0$

* **Corollaire** :

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, M symétrique définie positive Alors M est inversible

ii) Proposition :

* si $C(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,1]$ Alors la matrice A du schéma aux différences finies est Symétrique définie positive.
* si $C(x) \geq 0$ **Alors** A est inversible et le système $AU = B$ possède une solution unique $U \in \mathbb{R}^n$

Rq :

si $c > 0$, la matrice A est diagonale strictement dominante,

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Alors A inversible

iii) Méthodes générales :

- La Résolution du système $AU = B$ se fait par :
  * méthodes itératives (SOR, méthodes de descente)
  * méthodes directes (LU, cholesky)
- Caractéristique de la matrice A : important pour le choix et les performances des méthodes de résolution :

f) Convergence du schéma aux différences finies :

Proposition :

L'approximation numérique $(u_i)_{1 \le i \le n}$ de la solution exacte u vérifie :

$$\max_{1 \le i \le n} |u(x_i) - u_i| = \underset{h \to 0}{O}(h^2).$$