Feuille de TD Intégration

Exercice 1 *Trouver une primitive des fonctions suivantes :*

1. $|x|$ *sur* $\mathbb{R}$ *;*
2. $\ln(x)$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*
3. $\cos(\ln(x))$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(deux méthodes possibles) ;*
4. $e^{\sqrt{x}}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

1. *Soit* f *une fonction de classe* C^1 *sur* $[a,b]$. *Montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{inx}\ dx = 0.$$
2. *Déterminer deux réels* α *et* β *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{n^2}.$$
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 3 *Soit* (f_n) *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par*
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}.$$

1. *La suite* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[0,1]$ *? Sur* $[a,1]$, *avec* $0 < a < 1$ *?*
2. *Soient* $0 < a < b < 1$. *Calculer*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\ dx.$$

Exercice 4 *Soit* f *une fonction de classe* C^1, *bornée et de dérivée bornée. Montrer que*
$$\int_0^1 f(t)\ dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 5

1. *(Inégalité de Tchebychev) Soit* f *une fonction positive intégrable et* a *un réel strictement positif, montrer que*
$$\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^N,\ f(x)\geq a\right\}\right) \leq \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\ dx,$$
où μ *désigne la mesure de Lebesgue.*
2. *Démontrer que si* f *est une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$, *alors* f *est finie presque partout.*
Indication : Raisonner par l'absurde et considérer les ensembles
$$A_k = \{x\in\mathbb{R}; |f(x)|\geq k\} \text{ pour } k>0.$$

Exercice 6

1. *Montrer que pour* $x > 0$, *on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$
2. *Pour* $p > 0$, *on définit les intégrales*
$$I_p = \int_0^{+\infty} x^2\ e^{-px}\ dx.$$
Calculer I_p.

3. *En utilisant les questions précédentes, calculer l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\ dx.$$

Exercice 7 *Soit f une fonction positive, intégrable sur $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

2. *En déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge pour presque toute valeur de x.*

Exercice 8 *Existe-t-il une application g Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ ne^{-n|x|} \leq g(x)\ ?$$

Exercice 9 *Soit f une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$. La quantité suivante a-t-elle une limite lorsque α ($\alpha > 0$) tend vers zéro :*

$$I_\alpha = \int_0^1 f(x) \left|\sin\frac{\pi}{x}\right|^\alpha dx.$$

Exercice 10 *Montrer la majoration suivante : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ \ln(\cos x) \leq -\frac{x^2}{2}$.*
En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\ dx.$$

Exercice 11 *Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$:*

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n[} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n,\ n \geq 1,$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction indicatrice. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$.

Exercice 12

1. *Soit $p > -1$ et $q \in \mathbb{N}$. Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^p (\ln x)^q \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} x^p (\ln x)^q e^{-x}\ dx.$$

2. *En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\ dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\ln n - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})\right]$.*

Exercice 13 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et intégrable sur $[0, 2\pi]$. Soit $A = \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|\ dx$.*

1. *On pose $\varphi_n(x) = \dfrac{f(nx)}{n^2}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\varphi_n(x)|\ dx$ en fonction de A. En déduire que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ converge presque partout sur $[0, 2\pi]$.*
2. *Montrer que la fonction $x \mapsto (\ln|\cos x|)^2$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. En déduire que la suite de fonctions $x \mapsto |\cos nx|^{1/n}$ converge presque partout vers 1.*

Exercice 14 *Calculer l'intégrale*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy.$$

En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$.

Exercice 15 *On considère la fonction définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$ par*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Montrer, par une méthode de votre choix, que cette fonction n'est pas intégrable sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Exercice 16 *On pose*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2t} - \frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\ dt.$$

Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et calculer $\int f$.

Exercice 17

1. *Vérifier que*
$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx}\ dt.$$
2. *Utiliser ce résultat pour montrer que*
$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18 *Étudier la convergence et calculer l'intégrale*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\ dt.$$

Exercice 19 *Soit $f \in L^\infty([0, 1])$, positive ou nulle presque partout sur $[0, 1]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose*

$$F(t) = \int_0^1 \left(f(x) + t^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx.$$

1. *Montrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que F est dérivable à droite en 0. Calculer la dérivée à droite en 0 de F.*

Exercice 20 *Soit*

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\ \frac{\sin x}{x}\ dx.$$

1. *Calculer $f'(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.*
2. *En déduire la valeur de $f(t)$ pour tout $t > 0$.*
3. *Peut-on en déduire la valeur en $t = 0$?*

Exercice 21

1. *Montrer que la fonction φ définie en $a \geq 0$ par*
$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(u^2 + au^{-2})}\ du$$
est définie et continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. *Calculer $\varphi(a)$ pour tout $a \geq 0$ en établissant une équation différentielle vérifiée par φ.*