

TD n°2 - partie 2

Exercice 1

Un jeu nécessite le lancer d'un dé équilibré à 19 faces. Pour jouer à ce jeu, on dispose uniquement d'un dé à six faces que l'on peut lancer un nombre arbitraire de fois. On définit le coût du jeu comme le nombre moyen de lancers du dé à six faces permettant d'obtenir une réalisation de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, 19\}$.

Info

Théorème de la division euclidienne pour les entiers naturels:

Soit a et b deux entiers naturels tels que b est non nul. Il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) satisfaisant $a = bq + r$ et $r < b$.

Question 1

Soit x un entier compris entre 1 et 36. Montrer qu'il existe un unique couple $(q^*, r^*) \in \{1, \dots, 6\}^2$ satisfaisant

$$x = 6(q^* - 1) + r^*$$

Indication: Diviser $(x - 1)$ par 6.

Question 2

On note N_1 et N_2 les résultats obtenus suivant deux lancers indépendants du dé à 6 faces.

- Montrer que la variable $X = 6(N_1 - 1) + N_2$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, 36\}$.
- Proposer une procédure de rejet permettant de simuler le lancer d'un dé à 19 faces à partir du résultat précédent. Déterminer le coût du jeu.

```
de.6 <- function(n) sample(1:6, n, replace = T)
de.36 <- function(n) 6*(de.6(n)-1) + de.6(n)
de.19 <- function(n){
  d <- NULL
  for (i in 1:n){
    while ((x <- de.36(1)) > 19){}
    d <- c(x, d)
  }
  return(d)
}
```

```
}  
n = 100000  
# Temps de calcul  
system.time(x.19 <- de.19(n))  
# Histogramme des résultats  
plot(table(x.19))
```

Question 3

- Proposer des fonctions permettant de simuler le lancer de dés à 4, 5, 10 ou 20 faces à partir du dé à six faces. Déterminer le nombre moyen de lancers du dé à six faces dans chacune de ces procédures.
- Proposer une procédure de rejet permettant de simuler le lancer d'un dé à 19 faces à partir d'un dé à 20 faces. Quel est le coût du jeu dans la procédure proposée ?
- Peut on trouver une procédure de coût moindre ?