Exercice 25 . Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace muni d'une structure probabiliste. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_\Omega X \, \mathrm{dP} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > n) \quad .$$

Application. Calculer cette grandeur lorsque X est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p, $(0 < p < 1)$.

Exercice 26 . Joe et Bill jouent à la roulette russe avec un pistolet à six coups qui contient une seule balle. On fait tourner le barilet une seule fois au début du jeu. Soit N la variable aléatoire égale à la durée du jeu. Déterminer la loi de N et son espérance. Joe joue le premier. Quelle est la probabilité pour que Joe meure le premier. Joe a-t-il réellement intéret à débuter le jeu ? On fait tourner le barillet avant chaque essai. Mêmes questions.

Exercice 27 . On choisit 10 intervalles de longueur 1/10 dans $(0, 1)$. Les intervalles peuvent se recouvrir de manière arbitraire. Soit U un point tiré au hasard dans (0,1). A combien d'intervalles en moyenne U appartient-il ?

Exercice 28 . Soient I_1 et I_2 deux intervalles de longueur 1/2 inclus dans $(0, 1)$. Soit U un point tiré au hasard dans (0,1) et N le nombre d'intervalles qui contiennent U. Déterminer la loi de N. Calculer $E[N]$.

Exercice 29 . Dans une urne, il y a 3 boules rouges, 2 boules noires et 5 boules blanches. On effectue n tirages successifs dans l'urne en replaçant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On s'intéresse au nombre de boules de chaque couleur résultant de cette expérience.

a) Quelle est la nature de la variable aléatoire d'intérêt correspondant à cette expérience ?
b) Quelle est sa loi ?
c) Intégrer cette variable sous la mesure de probabilité correspondant au modèle de cette expérience ?

Exercice 30 . (Source AB) **Mathématiques financières.** Jojo veut envoyer dix billets de 10000 francs CFA à son ami Gbetnkom qui habite un pays éloigné. Il glissera les billets entre les pages d'articles de mathématiques qu'il lui enverra. Cependant, un envoi sur cinq est perdu ou détourné par les postiers ou les douaniers. Jojo pense à trois méthodes d'envoi différentes :

1. Il met les dix billets dans un seul paquet ;
2. Il met cinq billets dans un seul paquet et cinq dans un autre ;
3. Il met chaque billet dans un paquet different, et enverra les dix paquets à des dates différentes.

On note X le nombre de billets reçu par Gbetnkom.

a) Pour chacune des méthodes précédentes, déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
b) Quelle est la meilleure stratégie d'envoi si l'on veut que $E[X]$ soit maximale, ou que Gbetnkom reoive au moins un billet avec la plus grande probabilité possible, ou que Gbetnkom reoive tous les billets avec la plus grande probabilité possible.

Exercice 31 . À La Grave (Hautes-Alpes), le nombre d'alpinistes inexpérimentés qui se perdent dans la montagne suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un alpiniste inexpérimenté peut tomber dans une crevasse avec la probabilité p ou subir des chutes de pierres avec la probabilité q. Quelle est la loi du nombre d'alpinistes tombés dans une crevasse, ou victimes de chutes de pierres, ou les deux ?

Exercice 32 . Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace muni d'une structure probabiliste. Soient A, B, C trois événements indépendants dans la tribu $\mathcal{A}$. On définit la variable aléatoire X par

$$X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C \quad .$$

Calculer $E[X]$ et $E[X^2]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 33 . Un joueur parie sur la réalisation d'événements A et B de la manière suivante. Le gain du joueur est d'une unité si A se réalise. Il ajoute r unités supplementaires à ce gain si, de surcroit, B se réalise aussi. Si A ne se réalise pas, le joueur perd s unités. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue du pari.

1) Exprimer X sous la forme d'une variable étagée en faisant apparaître les fonctions indicatrices de A, $A \cap B$ et $\bar{A}$.
2) Calculer l'espérance de X.
3) Déterminer la loi de X.

Le pari porte sur le lancer de deux pièces de monnaie non truquées et sur les événements $A =$ "La première pièce montre pile" et $B =$ "la deuxième pièce montre pile".

4) A quelle condition l'espérance E[X] est-elle positive ?
5) On suppose que $r = s = 1$. Calculer $Var(X)$.

Exo 20 (Voir après Exo 30)

Exercice 32 . Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace muni d'une structure probabiliste. Soient A, B, C trois événements indépendants dans la tribu $\mathcal{A}$. On définit la variable aléatoire X par

$$X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C \quad .$$

Calculer $E[X]$ et $E[X^2]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 33 . Un joueur parie sur la réalisation d'événements A et B de la manière suivante. Le gain du joueur est d'une unité si A se réalise. Il ajoute r unités supplementaires à ce gain si, de surcroit, B se réalise aussi. Si A ne se réalise pas, le joueur perd s unités. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue du pari.

1) Exprimer X sous la forme d'une variable étagée en faisant apparaître les fonctions indicatrices de A, $A \cap B$ et $\bar{A}$.
2) Calculer l'espérance de X.
3) Déterminer la loi de X.

Le pari porte sur le lancer de deux pièces de monnaie non truquées et sur les événements A = "La première pièce montre pile" et B = "la deuxième pièce montre pile".

4) A quelle condition l'espérance $\mathrm{E}[X]$ est-elle positive ?
5) On suppose que $r = s = 1$. Calculer $Var(X)$.

Exercice 34 .

Question A - Soit U un nombre pris au hasard dans l'intervalle $(0, 1)$ et $(I_1, \ldots, I_m)$ une partition de $(0, 1)$ en m intervalles. On définit la variable aléatoire discrète K de la manière suivante

$$\forall k = 1, \ldots, m \,, \quad (K = k) \text{ si } \quad I_k \text{ contient U.}$$

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire K.
2) Nous nous intéressons à la longueur de l'intervalle qui contient U. Il s'agit d'une variable aléatoire que l'on note L. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(0, 1)$. Montrer que

$$E[L] = \sum_{k=1}^{m} (\lambda(I_k))^2 \quad .$$

Question B - Un individu cherche à localiser le point U dans l'intervalle $(0, 1)$. Il questionne un oracle qui connait la valeur de U et ne répond que par oui ou non. Le joueur adopte la stratégie suivante. Il fixe un réel α dans $(0, 1)$ et demande si $U < \alpha$. Il obtient une réponse qui lui permet de localiser U soit dans l'intervalle $(0, \alpha)$ soit dans l'intervalle $(\alpha, 1)$ (étape 1). Le joueur procède alors itérativement en divisant l'intervalle obtenu après chaque réponse en 2 sous-intervalles de longueurs respectives proportionnelles à α et $1 - \alpha$ puis en demandant si U se trouve dans le premier de ces intervalles. Soit $(I_k^n)_{k \in \{1 \ldots 2^n\}}$ la partition de $(0, 1)$ en les 2^n intervalles susceptibles d'être obtenus après la réponse à la n-ième question.

1) Montrer que, pour tout $k = 1, \ldots, 2^n$,

$$\begin{aligned} \lambda(I_{2k-1}^{(n+1)}) &= \alpha\lambda(I_k^{(n)}) \\ \lambda(I_{2k}^{(n+1)}) &= (1-\alpha)\lambda(I_k^{(n)}) \end{aligned}$$

2) Soit $\alpha \neq 1/2$. Démontrer par récurrence que la partition susceptible d'être obtenue à l'étape n contient exactement C_n^r intervalles de longueur $\alpha^r(1-\alpha)^{n-r}$, $r = 0, \ldots, n$. (Un intérêt particulier sera accordé à la rédaction).

3) Nous cherchons à évaluer la précision sur l'estimation de U en considérant l'intervalle obtenu à la n-ième étape. Nous appelons $\epsilon_n(\alpha)$ la précision moyenne obtenue lorsque U varie dans $(0,1)$.

a) En utilisant la question A, montrer que

$$\epsilon_n(\alpha) = (\alpha^2 + (1-\alpha)^2)^n$$

b) Avec la stratégie adoptée, quel choix de α vous semble-t-il optimal ?

c) Calculer la variance liée à la précision obtenue. Que vaut cette variance pour la valeur obtenue précédemment ?

Exercice 35 . Soit α un nombre réel positif et U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $(0,1)$. Déterminer la loi de la variable $V = \alpha U$.

Exercice 36 . Déterminer la loi de la variable X en sortie de l'algorithme suivant.

Répéter
    $V := 2 * RANDOM$
Jusqu'à $(V < 1.6)$
$X := V$

Quelle est la loi du nombre d'appels de $RANDOM$ dans cet algorithme ?

Exercice 37 . Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $(0,1)$. Déterminer la fonction de répartition puis la densité, lorsqu'elle existe, de la variable X définie par

a) $X = \sqrt{U}$;
b) $X = (2U-1)^2$;
c) $X = 1/(1+U)$.

Dans chacun des cas, déterminer (si c'est possible) l'espérance et la variance de X.

Exercice 38 . Déterminer la loi de la variable X en sortie de l'algorithme suivant

Répéter

$V := 1/(1 + RANDOM)$
Jusqu'à $(V < 3/4)$
$X := V$

Calculer $E[X]$ et $Var(X)$ si ces grandeurs existent.

Exercice 39 . Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$. Déterminer la fonction de répartition de la variable

$$X = \mathbf{1}_{(U<1/3)}V + \mathbf{1}_{(U\geq 2/3)}(1+V) .$$

Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 40 . Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant pour densité f.

a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties l'identité suivante :

$$\forall n \geq 1 , \quad \int_0^n xf(x)dx = \int_0^n \mathrm{P}(x \leq X \leq n)dx .$$

b) En déduire

$$E[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)dx .$$

Exercice 41 . Soient $U_1, \ldots, U_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes de fonction de répartition commune F. Déterminer la loi des variables

$$X = \max_i U_i$$

et

$$Y = \min_i U_i .$$

Application : traiter le cas où F est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, puis la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}(0,1)$. Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.

Exercice 42 . Soient $U_1, U_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{U}(0,1)$ et N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p indépendante des U_i. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$X = \max_{1\leq i\leq N} U_i .$$

Calculer l'espérance de X.

Exercice 43 . On considère la fonction F définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0\,; \\ t & \text{si } 0 \le t \le 1/2\,; \\ 1/2 & \text{si } 1/2 \le t < 1\,; \\ 1 & \text{si } t \ge 1\,. \end{cases}$$

Vérifier que F est une fonction de répartition. Quelle procédure peut-on utiliser pour générer une variable aléatoire de fonction de répartition F ?

Exercice 44 . Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On pose

$$X = -\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right).$$

1) Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
2) En déduire la densité de la variable X.
3) Calculer l'espérance de X.
4) Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ indépendante de U et telle que

$$\mathrm{P}(V=1) = 1/2\,.$$

Déterminer la fonction de répartition de la variable

$$Y = VX + (1-V)X^2\,.$$

5) Ecrire un algorithme de simulation de la variable Y.
6) On pose

$$Z = \mathbf{1}_{(U>1/2)}\,X\,.$$

Déterminer la fonction de répartition de la variable Z et tracer la courbe représentative de cette fonction.

7) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
8) Calculer l'espérance de Z.
9) Ecrire un algorithme de simulation de la variable Z.
10) On répète de manière indépendante la simulation de X jusqu'à ce que la condition $(X < \ln(3/2))$ se réalise. On appelle T la variable alors obtenue. Déterminer la fonction de répartition de la variable T et tracer la courbe représentative de cette fonction.
11) Combien de répétitions sont en moyenne nécessaires pour que la condition se réalise ?
12) Calculer l'espérance de T.

Exercice 45 . Soit N une variable aléatoire discrète telle que

$$\mathrm{P}(N=0) = \frac{1}{2}\quad,\quad \mathrm{P}(N=1) = \frac{1}{4}\quad,\quad \mathrm{P}(N=2) = \frac{1}{4}$$

Exo 26 Au début $N \leq 6$ (barilet tourné qu'au début)

On a $P(N=1) = \frac{1}{6}$, $P(N=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(N=k) = \frac{1}{6}$

Ainsi $E(N) = \sum_{i=1}^{6} i P(N=i) = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = 3,5$

On a P(Joe meurt en premier) $= P(N=1 \cup N=3 \cup N=5) = \frac{1}{2}$

↳ Dans ce cas il n'y a aucun intérêt à commencer

Maintenant si l'on fait tourner le barilet à chaque coup on a

$N \in \mathcal{G}(1/6)$

Donc $(\forall k \in \{1, \ldots, n\})$ $P(N=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$

Et $E(N) = 6$

On a P(Joe meurt en 1er) $= P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} N = 2k+1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=2k+1)$

$= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}$

$= \frac{6}{11}$

↳ Dans ce cas Joe a intérêt de jouer en second

Exo 27 Soit N le nombre d'intervalle contenant U

On a $N = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{1}_{U \in S_i}$ où S_i sont les segments aléatoires

On a $(\forall i \in \{1, ..., 10\})$ $P(U \in S_i) = P(U \in [a_i, b_i]) = b_i - a_i = \frac{1}{10}$

Donc par définition $E(N) = \sum_{i=1}^{10} P(U \in S_i) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} = 1$

Exo 28 On a $N \in \{0, 1, 2\}$ ...

Et $P(N=0) = P(N=2) = P(U \in I_1 \cap U \in I_2) = P(U \notin I_1 \cap U \notin I_2) = \frac{1}{4}$

et $P(N=2) = P((U \in I_1 \cap U \notin I_2) \cup (U \in I_2 \cap U \notin I_1))$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

On a $E(N) = \sum_{i=0}^{2} i P(N=i) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$

Exo 30 A) ① $P(X=0) = \frac{1}{5}$; $P(X=10) = \frac{4}{5}$; $P(X=k_{\notin\{0,5\}}) = 0$

On a $E(X) = \sum_{i=1}^{10} i P(X=i) = 10 \times \frac{4}{5} = 8$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{10} i^2 P(X=i) = 100 \times \frac{4}{5} = 80$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 14$

② $P(X=0) = \frac{1}{25}$; $P(X=10) = \frac{16}{25}$; $P(X=k_{\notin\{0,5,10\}}) = 0$

Et $P(X=5) = P(\text{pas}_1 \cap \overline{\text{pas}_2} \cup \text{pas}_2 \cap \overline{\text{pas}_1})$

$= \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$

D'où $E(X) = 5 \times \frac{8}{25} + 10 \times \frac{16}{25} = 8$

$E(X^2) = 25 \times \frac{8}{25} + 100 \times \frac{16}{25} = 72$

$Var(X) = 8$

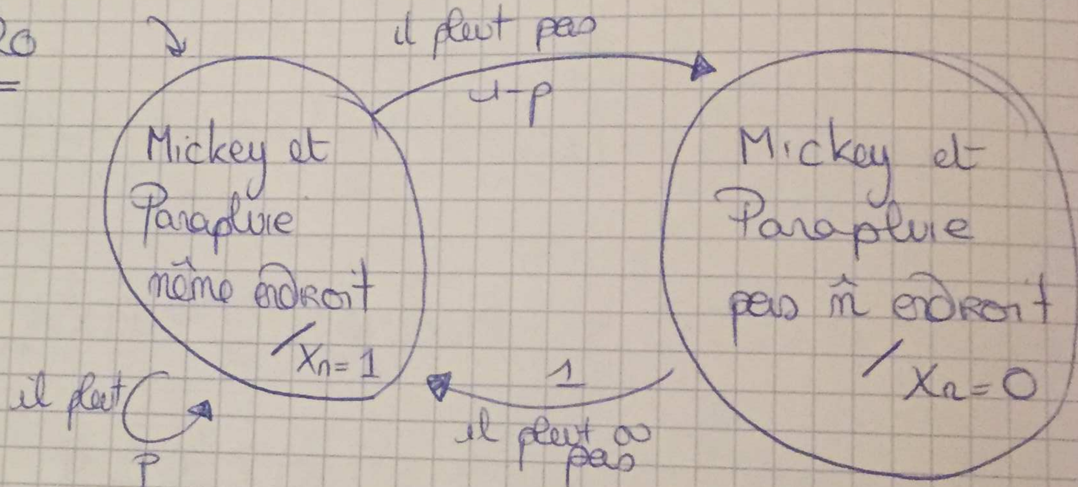
③ On a $X \in \mathcal{B}(10, 4/5)$

$$\Rightarrow P(X = k) = C_{10}^{k} \left(\frac{4}{5}\right)^{k} \left(\frac{1}{5}\right)^{10-k}$$

D'où $var(X) = np(1-p) = 10 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$

b) Voir les résultats

Exo 20



• a)

```
X := 1;
for i = 1..n loop
  U = Random [0,1];
  if X = 0 then
     X = 1;
  elsif U > p then
     X = 0;
  end if;
  Xn <- X;
```

b) On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$ $P_n = P(X_n = 0)$

On a clairement $P_0 = 0$

et $P_1 = 1 - p$

Et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $P_n = P(X_n = 0 | X_{n-1} = 0) P(X_{n-1} = 0)$
$+ P(X_n = 0 | X_{n-1} = 1) P(X_{n-1} = 1)$

D'après la loi de probabilité totale

D'où $P_n = 0 + (1-p) P(X_{n-1} = 1) = (1-p)(1 - P_{n-1})$

On suppose alors que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $P_n = \alpha + \beta (p-1)^n$

On a $P_0 = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$

$P_1 = 1 - p \Rightarrow \beta = \frac{1-p}{p-2}$

D'où finalement $(\forall n \in \mathbb{N})$ $P_n = \left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(1 - (p-1)^n\right)$

c) M_n « Mickey se mouille au n-ième trajet »
Pl « Il pleut »

On a $P(M_n) = P(X_n = 0 \cap Pl) = p \times P_n$

d) Avec $p = 1/3$ et n grand on a

$$P(M_n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2/3}{5/3}\right)\left(1 - (p-1)^n\right) \sim \frac{2}{15}$$

Exo 31

On pose X le nombre d'alpiniste qui se perdent
N le nombre d'alpiniste qui se sont pris une pierre ou tombé

On pose r la probabilité que un alpiniste se prenne une pierre ou tombe
$$r = p + q - pq$$

$(\forall k \in \mathbb{N})$ $P(N=k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=k \mid X=n)\, P(X=n)$

d'après la loi de Proba totale

et $P(N=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N=k \mid X=n)\, P(X=n)$

Or par indépendance $(N=k \mid X=n)$ suit $\mathcal{B}(n, r)$

Et alors $P(N=k \mid X=n) = C_n^k r^k (1-r)^{n-k}$

et $P(N=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} r^k (1-r)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

$$= \frac{(\lambda r)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\left((1-r)\lambda\right)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda r)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda(1-r)\right)^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda r)^k}{k!} e^{-\lambda r}$$

D'où N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda r)$

Exo 32 On pose $a = P(A)$, $b = P(B)$, $c = P(C)$

où A, B, C sont des évènements indépendants dans une tribu $\mathcal{A}$ d'un espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On pose $X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$

1) On a par linéarité, $E(X) = a + b + c$

2) On a $X^2 = \mathbb{1}_A^2 + 2\mathbb{1}_{A\cap B} + 2\mathbb{1}_{A\cap C} + \mathbb{1}_B^2 + 2\mathbb{1}_{B\cap C} + \mathbb{1}_C^2$

$= X + 2(\mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} + \mathbb{1}_{B\cap C})$

par indépendance, $E(X^2) = E(X) + 2(ab + ac + bc)$

3) $var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a + b + c - (a^2 + b^2 + c^2)$

4) par indépendance

$P(X=0) = (1-a)(1-b)(1-c)$

$P(X=1) = a(1-b)(1-c) + b(1-a)(1-c) + c(1-b)(1-a)$

$P(X=3) = abc$

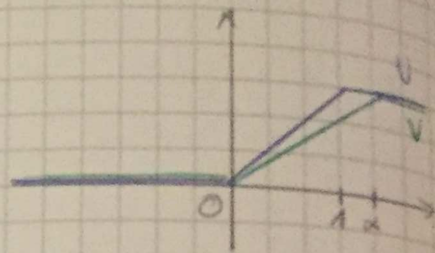
$P(X=2) = 1 - (P(X=0) + P(X=2) + P(X=3))$

Exo 35 Soit $U \in \mathcal{U}(0,1)$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$

On pose $V = \alpha U$

On a $F_V(t) = P(V \leq t) = P\left(U \leq \frac{t}{\alpha}\right)$

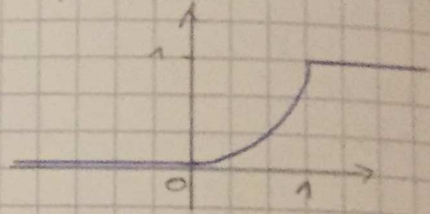
$$= \begin{cases} 1 & \text{si } t > \alpha \\ 0 & \text{si } t < 0 \\ t/\alpha & \text{si } t \in [0,\alpha] \end{cases}$$



Exo 37 Soit $U \in \mathcal{U}(0,1)$

a) $X = \sqrt{U} \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(U \leq t^2)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 1 \\ t^2 & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$



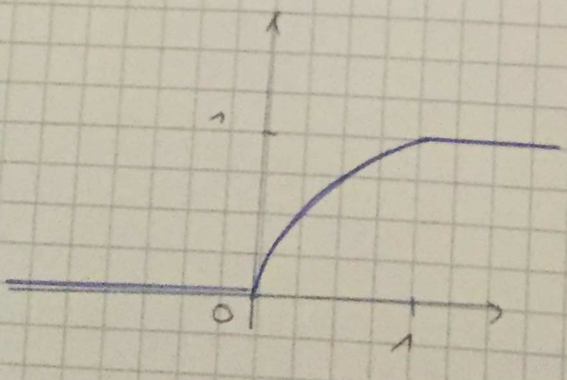
- Densité : $2x \, \mathbb{1}_{(0,1)}(x) = f_X(x)$
- Espérance $E(X) = \int_{\mathbb{R}^+} x f_X(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$ car $X \geq 0$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}^+} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{2}$$

- Variance $var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{18}$

b) $X = (2U-1)^2 \Rightarrow F_X(t) = P(|2U-1| \leq \sqrt{t})$ pour $t \geq 0$

$$= P\left(\frac{-\sqrt{t}+1}{2} \leq U \leq \frac{\sqrt{t}+1}{2}\right)$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \\ \sqrt{t} & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

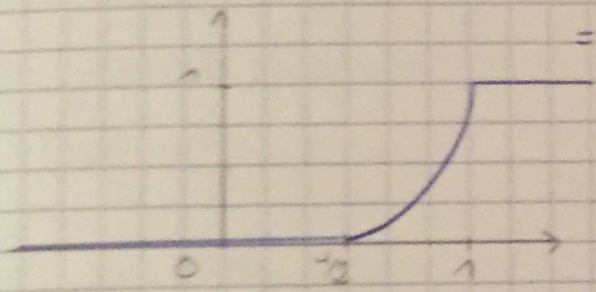
. densité $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

. Espérance $E(X) = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$E(X^2) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{3/2}\,dx = \frac{1}{5}$

. Variance $var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{9}{45} - \frac{5}{45} = \frac{4}{45}$

c) $X = \frac{1}{1+U} \Rightarrow F_X(t) = P\left(\frac{1}{1+U} \leqslant t\right) \overset{t>0}{=} P\left(U \geqslant \frac{1}{t} - 1\right)$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1/2 \\ 1 & \text{si } t > 1 \\ 2 - \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

. densité $f_X(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)$

. Espérance $E(X) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$

$E(X^2) = \int_{1/2}^1 dx = \frac{1}{2}$

D'où $var(X) = \frac{1}{2} - \ln(2)^2$

Exo 38

loop $V = 1/(1+RND)$
exit when $V < 3/4$
$X = V$

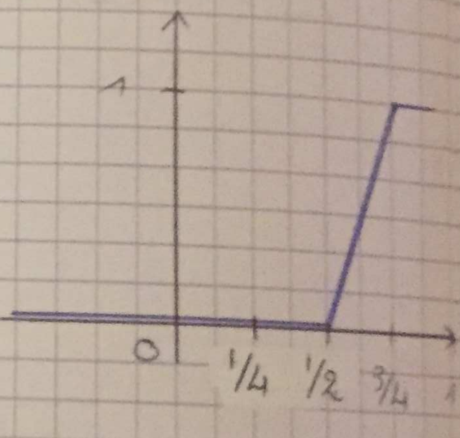
processus de rejet

On a $F_X(t) = P(X \leq t) = P(V \leq t \mid V < 3/4) = \dfrac{P(V \leq t \cap V < 3/4)}{P(V < 3/4)}$

Avec l'exo 37, on a $P(V < 3/4) = 2 - \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{2}{3}$

Et $P(V \leq t \cap V < 3/4) = \begin{cases} P(V<3/4) = \frac{2}{3} & \text{si } t \geq 3/4 \\ 0 & \text{si } t < 1/2 \\ 2 - \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1/2, 3/4] \end{cases}$

D'où $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1/2 \\ 3 - 3/2t & \text{si } t \in [1/2, 3/4] \\ 1 & \text{si } t > 3/4 \end{cases}$



- densité $f_X(x) = \dfrac{3}{2x^2} \mathbb{1}_{[1/2, 3/4]}(x)$

- D'où $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_{1/2}^{3/4} \dfrac{3}{2x}\,dx = \dfrac{3}{2} \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$\Downarrow$ ⚠ On peut user de cette définition car $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \dfrac{3}{2}\left[-\dfrac{1}{x}\right]_{1/2}^{3/4} = -2 - (-3) = 1$

- On a $E(X^2) = \int_{1/2}^{3/4} \dfrac{3}{2}\,dx = \dfrac{3}{8}$

$\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{9}{4} \ln^2\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Exo 39 Soit $U, V \in \mathcal{U}(0,1)$

$$X = \mathbb{1}_{(U<1/3)} V + \mathbb{1}_{(U \geqslant 2/3)} (1+V)$$

$\rightarrow$ Ne surtout pas, ici, considérer le couple de var (U,V) et calculer la fonction de densité conjointe

On a $F_X(t) = P(X \leqslant t) = P(V \leqslant t \mid U < 1/3) P(U < 1/3)$

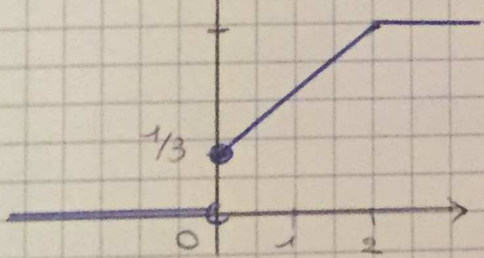
$$+ P(1+V \leqslant t \mid U \geqslant 2/3) P(U \geqslant 2/3)$$

D'après la loi des probabilités totales

$$+ P(0 \leqslant t \mid U \in [1/3; 2/3]) P(U \in [1/3, 2/3])$$

$$= \frac{1}{3}\left(P(V \leqslant t) + P(0 \leqslant t) + P(1+V \leqslant t)\right)$$

D'où $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 2 \\ \frac{1}{3}(t+1+0) = \frac{t+1}{3} & \text{si } t \in [0,1] \\ \frac{1}{3}(1+1+t-1) = \frac{t+1}{3} & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$



Ce n'est pas une loi continue, on ne peut pas user des formules avec la densité de X

$\rightarrow$ par linéarité $E(X) = \frac{1}{3}E(V) + \frac{1}{3}E(1+V) = \frac{2}{3}$

Et $X^2 = \mathbb{1}_{U<1/3} V^2 + \mathbb{1}_{U \geqslant 2/3} (1+V)^2 + \underbrace{2\, \mathbb{1}_{U \leqslant 1/3 \cap U \geqslant 2/3} V(1+V)}_{0}$

Or $E(V^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_V(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$

D'où $E(X^2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1 + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$

Et finalement $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4/9$

Exo44 Soit $U \in \mathcal{U}(0,1)$ et $X = -\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right)$

On a $(\forall t \in [0,1])$ $\frac{2t}{1+t} = \frac{t+t+1-1}{1+t} = 1 - \frac{1-t}{1+t} < 1$

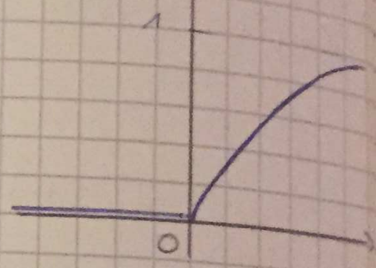
Donc X est une var positive

→ ① Ainsi pour $t \leq 0$ on a $F_X(t) = 0$

Ensuite $(\forall t \in \mathbb{R}^{+*})$ $F_X(t) = P\left(\ln\left(\frac{1+U}{2U}\right) \leq t\right)$

$F_X(t) = P\left(\frac{1+U}{2U} \leq e^t\right) = P\left(1 + \frac{1}{U} \leq 2e^t\right) = P\left(\frac{1}{U} \leq 2e^t - 1\right)$

$= P\left(U \geq \frac{1}{2e^t-1}\right) = 1 - \frac{1}{2e^t-1}$



→ ② C'est une loi continue, la densité de X est $\frac{dF_X}{dt}(t) = f_X(t) = \frac{2e^t}{(2e^t-1)^2}$

On a bien $\int_{\mathbb{R}^+} f_X(x)\,dx = F_X(+\infty) - F_X(0) = 1 - 0 = 1$

→ ③ D'où $E(X) = \int_{\mathbb{R}} (1 - F_X(t))\,dt$

Il vient $E(X) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2e^t-1}\,dt$ en posant $u = e^t$

$du = e^t dt = u\,dt$

$\mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$

finalement $E(X) = \int_1^\infty \frac{du}{u(2u-1)} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{du}{u(u-1/2)}$

Or $\frac{1}{u(u-1/2)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u-1/2}$ avec $\alpha = -2$

$\beta = 2$

$E(X) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{u-1/2} - \frac{1}{u}\right) du = \left[\ln\left|\frac{u-1/2}{u}\right|\right]_1^\infty = \ln 2$

→ ④ On a $P(V=1) = 1/2 = P(V=0)$ car $V \in \{0,1\}$

$Y = VX + (1-V)X^2$, en usant de la formule des proba totales

$$F_Y(t) = P(Y \le t \mid V=0)\,P(V=0) + P(Y \le t \mid V=1)\,P(V=1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(P(X^2 \le t) + P(X \le t)\right)$$

$X>0$ $$= \frac{1}{2}\left(P(X \le \sqrt{t}) + P(X \le t)\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e^{y}-1} + \frac{1}{2e^{\sqrt{y}}-1}\right)$$

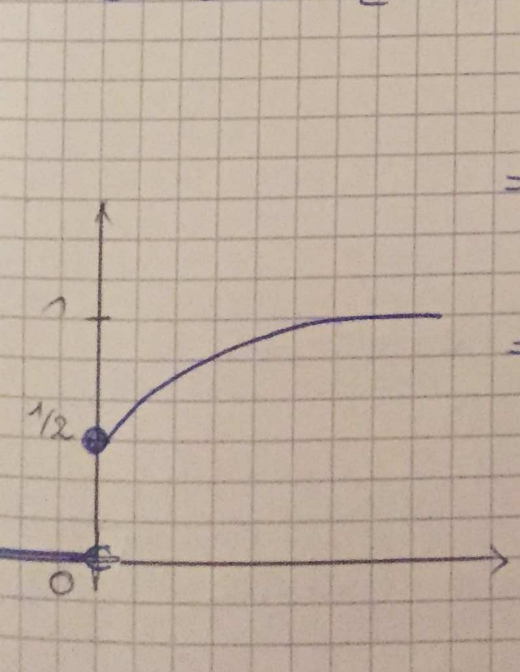
→ ⑤

```
U = RND
X = -ln(2U/(1+U))
if RND < 1/2 then
|      V = 0
else
|      V = 1
end if
Y = VX + (1-V)X^2
```

→ ⑥ On a $Z = \mathbb{1}_{(U>1/2)} X$, toujours d'après la FPT

on trouve $$F_Z(t) = P(X \le t \mid U > 1/2)\,P(U > 1/2) + P(0 \le t \mid U \le 1/2)\,P(U \le 1/2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(P(X \le t) + P(0 \le t)\right)$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ 1 - \dfrac{1}{4e^{t}-2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Ce n'est pas une loi continue

7

→ 8 On ne peut pas user de la fonction de densité, et vu que $\mathbb{1}_{U>1/2}$ et X sont dépendants

on ne peut pas écrire $E(Z) = E(\mathbb{1}_{U>1/2})E(X)$

D'où $E(Z) = \int_{\mathbb{R}} 1 - \overline{F}_Z(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{1}{2e^t - 1}\,dt = \frac{1}{2}E(X) = \frac{\ln(2)}{2}$

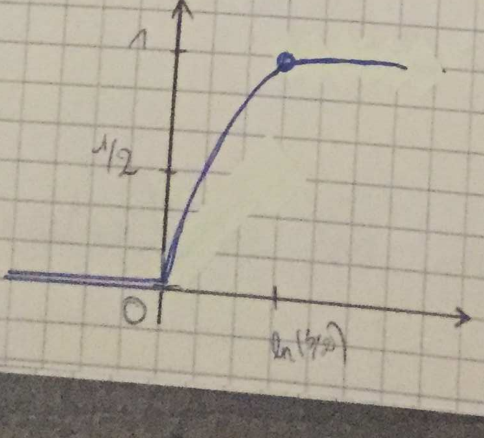
→ 9
```
U = RND
X = - ln( 2U / (1+U) )
if U > 1/2 then
|   V = 1
else
|   V = 0
end if
Z = VX
```

→ 10 On a affaire à un processus de rejet

$\overline{F}_T(t) = P(X \leq t \mid X < \ln(3/2)) = \frac{P(X \leq t \cap X < \ln(3/2))}{P(X < \ln(3/2))}$

On a $P(X < \ln(3/2)) = \frac{1}{2}$

D'où $F_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \ln(3/2) \\ 2\left(1 - \frac{1}{2e^t - 1}\right) & \text{si } t \in [0, \ln(3/2)] \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$



T n'est pas une loi continue

→ 11 Si N est le nombre de répétition jusqu'à la première occurence, alors $N \in \mathcal{G}\left(P(X<\ln(3/2)) = \frac{1}{2}\right)$

Il faut alors en moyenne $E(N) = 2$ tours pour que la condition $X < \ln(3/2)$ arrive

→ 12 On a $E(T) = \int_{\mathbb{R}} (1 - F_T(t))\,dt = \dots$

3 Chapitre 4