ENSIMAG 1ère année — Méthodes Numériques

Examen du 19 Mai 2016

Durée : 3h.

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, ordinateurs et téléphones portables.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte pour l'évaluation des copies.

Exercice 1

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. Rappeler la *forme générale* des matrices P, L, U qui interviennent dans la factorisation $P\,A = L\,U$ étudiée en cours (on ne demande pas d'expliciter ces matrices en fonction de A ou de redémontrer l'existence d'une telle factorisation).

2. Démontrer que L et U sont *uniques* lorsque P est fixée.

Exercice 2

On considère une matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La matrice A est supposée pleine (on supposera pour simplifier que tous les coefficients de A sont non nuls). On veut calculer $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A^2\,x = b. \tag{1}$$

1. On considère un premier algorithme qui consiste à calculer A^2 (par l'algorithme de multiplication matricielle standard) puis à résoudre le système (1) de matrice A^2 par la méthode de Gauss. Lorsque $n \to +\infty$, donner un équivalent du nombre d'opérations arithmétiques élémentaires nécessaires pour calculer x.

2. On reformule (1) de la façon suivante :

$$A\,y = b, \quad A\,x = y. \tag{2}$$

Montrer que de cette façon le calcul de x peut s'effectuer avec un coût équivalent à $(2/3)\,n^3$ opérations arithmétiques élémentaires lorsque $n \to +\infty$. Comparer ce coût à celui du premier algorithme.

Exercice 3

1. Rappeler l'écriture de la méthode de Jacobi pour la résolution d'un système linéaire de matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Donner une condition *suffisante* sur les coefficients de A pour la convergence de la méthode.

2. On considère $A = I - h\,P$, $P \in M_n(\mathbb{R})$ étant une matrice à coefficients positifs dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1. Lorsque $|h| < 1$, montrer que A est inversible et que la méthode de Jacobi converge pour tout système linéaire de matrice A.

Exercice 4

On considère une équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \tag{3}$$

où $f \in C^2(]a, b[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $L \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in]a, b[$ et pour tout couple de réels u, v :

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leqslant L\,|u - v|.$$

On rappelle qu'avec les hypothèses faites sur f, il existe une unique fonction dérivable $y\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ solution de (3). On souhaite calculer y numériquement sur un intervalle $[0, T] \subset]a, b[$, aux instants $t_k = k\,h$ avec $k = 0, \ldots, N$ et $h = T/N$. On notera par la suite y_k une approximation de $y(t_k)$. On considère le schéma d'Euler retardé (ou backward differentiation formula) :

$$\frac{3\,y_{k+1} - 4\,y_k + y_{k-1}}{2\,h} = f(t_{k+1}, y_{k+1}), \tag{4}$$

l'équation (4) étant prise pour $k = 1, \ldots, N-1$. Il s'agit d'un schéma à deux pas car le calcul de y_{k+1} fait appel à y_k et y_{k-1}. Il s'agit également d'un schéma implicite : lorsque y_k et y_{k-1} sont connus, on détermine y_{k+1} en résolvant l'équation (4). Le schéma (4) est initialisé avec $y_0 = y(0)$ et $y_1 = y_0 + h\,f(0, y_0)$.

1. Montrer que si h est choisi assez petit, alors quels que soient $t \in [0, T]$ et $v \in \mathbb{R}$, l'application $u \mapsto \frac{2}{3}\,f(t+h, v+h\,u)$ admet un unique point fixe qu'on notera $u = \phi(t, v, h)$.

2. Montrer que si h est choisi assez petit, alors quels que soient $y_k, y_{k-1} \in \mathbb{R}$, l'équation (4) possède l'unique solution

$$y_{k+1} = \frac{4}{3}\,y_k - \frac{1}{3}\,y_{k-1} + h\,\phi\big(t_k, \frac{4}{3}\,y_k - \frac{1}{3}\,y_{k-1}, h\big). \tag{5}$$

3. Expliciter le schéma de Newton pour le calcul numérique de la solution y_{k+1} de (4) en fonction de y_k, y_{k-1} (l'étude de la convergence de la méthode de Newton suivant la condition initiale n'est pas demandée).

4. On note P le polynôme d'interpolation de y en t_{k+1}, t_k et t_{k-1}. Exprimer P dans la base de Newton formée par les polynômes : 1, $t - t_{k+1}$, $(t - t_{k+1})\,(t - t_k)$.

5. Vérifier que

$$P'(t_{k+1}) = \frac{3\,y(t_{k+1}) - 4\,y(t_k) + y(t_{k-1})}{2\,h}$$

et expliquer la forme du schéma (4).