Marché des options

1. Définitions et caractéristiques

Une option est un actif financier qui donne à son détenteur (l'acheteur de l'option) le droit, mais pas l'obligation, soit d'acheter (option d'achat ou *call option*), soit de vendre (option de vente ou *put option*) une certaine quantité d'un actif sous-jacent (*underlying asset*) à prix fixé à l'avance (prix d'exercice ou *strike price*) jusqu'à une certaine échéance (*expiration date* ou *maturity*). Si ce droit peut être exercé à tout moment jusqu'à l'échéance, l'option est dite américaine (*American style*). Si son exercice ne peut intervenir qu'à l'échéance, l'option est dite européenne (*European style*).

Le prix de l'option est appelé prime (premium). Il est payé par l'acheteur au vendeur de l'option. Ce prix reflète la valeur intrinsèque (lorsque l'actif sous-jacent vaut 220 €, le droit de l'acheter à 200 € vaut naturellement 20 €) et la valeur temporelle qui représente l'espoir d'une appréciation du prix de l'actif sous-jacent d'ici à l'échéance (et qui générerait un supplément de rendement).

Les contrats sont négociés soit sur des marchés de gré à gré, soit sur des places financières telles que le CBOE, le CME, l'Eurex, etc. Lors que les contrats sont négociés sur des places financières, les contrats sont standardisés et soumis aux appels de marge[1].

1.1. Option d'achat

Pour illustrer le fonctionnement des options d'achat, prenons le cas d'un investisseur qui achète une option d'achat européenne sur l'action AXA. Pour un prix d'exercice de 30 € et une échéance Décembre, l'option cote 2 €. La quotité est fixée à 100 actions AXA.

La prime payée pour l'acquisition de l'option est 200 €. Comme l'option est européenne, elle ne peut être exercée qu'à l'échéance, soit fin décembre. A cette date, si le cours de l'action AXA (S_T) est inférieur au prix d'exercice de 30 €, l'option ne sera pas exercée par son détenteur et le flux final (*final payoff*) est donc nul. Le résultat est donc une perte égale à la valeur capitalisée de l'investissement initial.

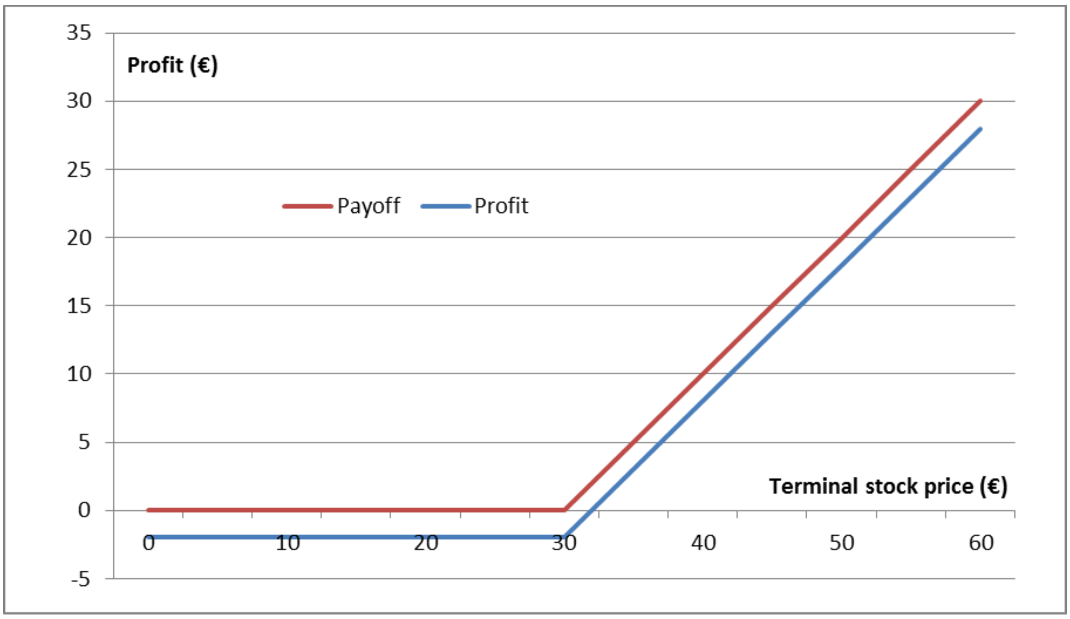
Au contraire, si le cours de l'action AXA observé fin décembre est supérieur ou égal au prix d'exercice de 30 €, l'option sera exercée par son détenteur et le flux final pour le détenteur est égal à 100 x (S_T – 30). Le résultat est donc égal au flux final diminué de la valeur capitalisée de l'investissement initial.

La Figure 1 ci-après représente le flux final et le résultat (sans capitalisation de la prime) de la position longue sur l'option d'achat en fonction du cours de l'action AXA observé à l'échéance.

En notant K le prix d'exercice, le flux final (*final payoff*) d'une option d'achat est égal à max(0 ; S_T – K) et le résultat final pour l'acheteur est égal à max(0 ; S_T – K) – VC(prime).

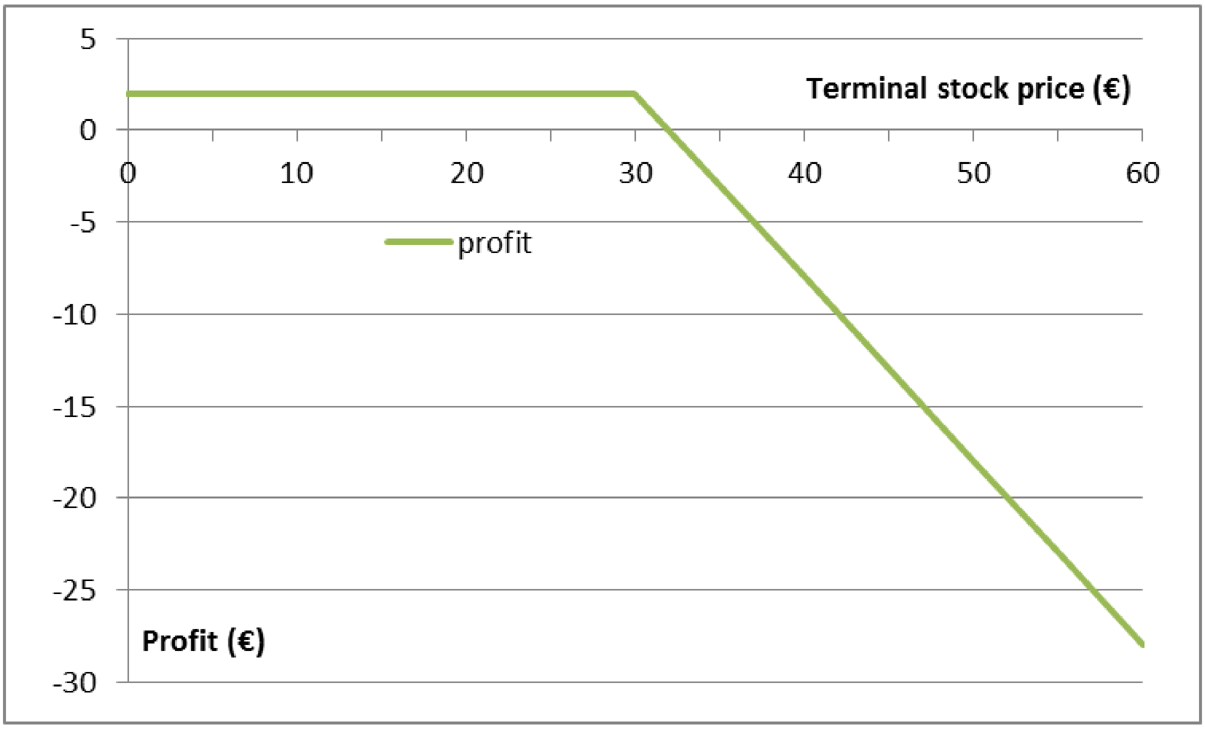
[1] Cf. note de cours sur les marchés à terme.

Figure 1 : Final Payoff et Résultat sur achat d'option d'achat



Le résultat pour le vendeur de l'option dépend de la décision de l'acheteur. Si l'acheteur de l'option d'achat exerce son droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix d'exercice, le vendeur de l'option d'achat est contraint de le lui vendre au prix d'exercice. Le résultat pour le vendeur est donc égal VC(prime) – max(0 ; S_T – K). Comme on peut l'observer sur la Figure 2, le gain maximum pour le vendeur est égal à la valeur capitalisée de la prime mais la perte est potentiellement illimitée si S_T tend vers l'infini.

Figure 2 : Résultat d'une option de vente pour le vendeur de l'option



1.2. Option de vente

Pour illustrer le fonctionnement des options de vente, prenons le cas d'un investisseur qui achète une option de vente européenne sur l'action AXA. Pour un prix d'exercice de 30 € et une échéance Décembre, l'option cote 1 €. La quotité est fixée à 100 actions AXA.

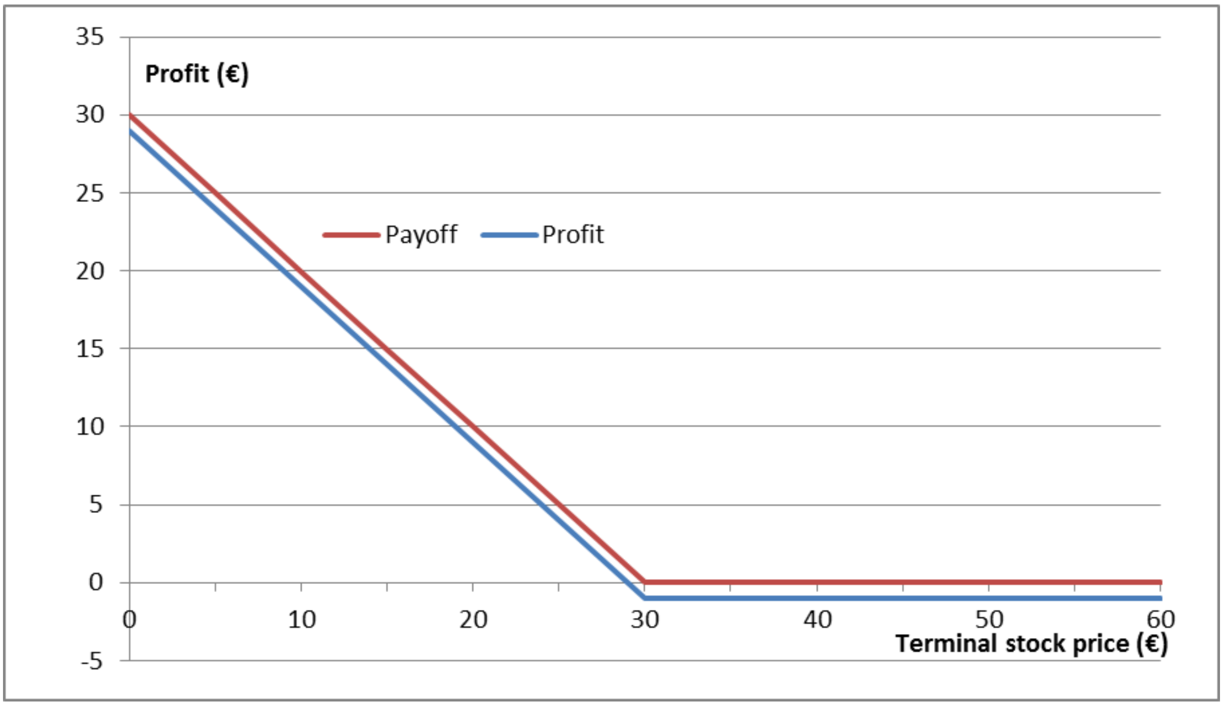
La prime payée pour l'acquisition de l'option est 100 €. Comme l'option est européenne, elle ne peut être exercée qu'à l'échéance, soit fin décembre. A cette date, si le cours de l'action AXA (S_T) est supérieur au prix d'exercice de 30 €, l'option ne sera pas exercée par son détenteur et le flux final (*final payoff*) est donc nul. Le résultat est donc une perte égale à la valeur capitalisée de l'investissement initial.

Au contraire, si le cours de l'action AXA observé fin décembre est inférieur ou égal au prix d'exercice de 30 €, l'option sera exercée par son détenteur et le flux final pour le détenteur est égal à 100 x (30 – S_T). Le résultat est donc égal au flux final diminué de la valeur capitalisée de l'investissement initial.

La Figure 3 ci-après représente le flux final et le résultat (sans capitalisation de la prime) de la position longue sur l'option d'achat en fonction du cours de l'action AXA observé à l'échéance.

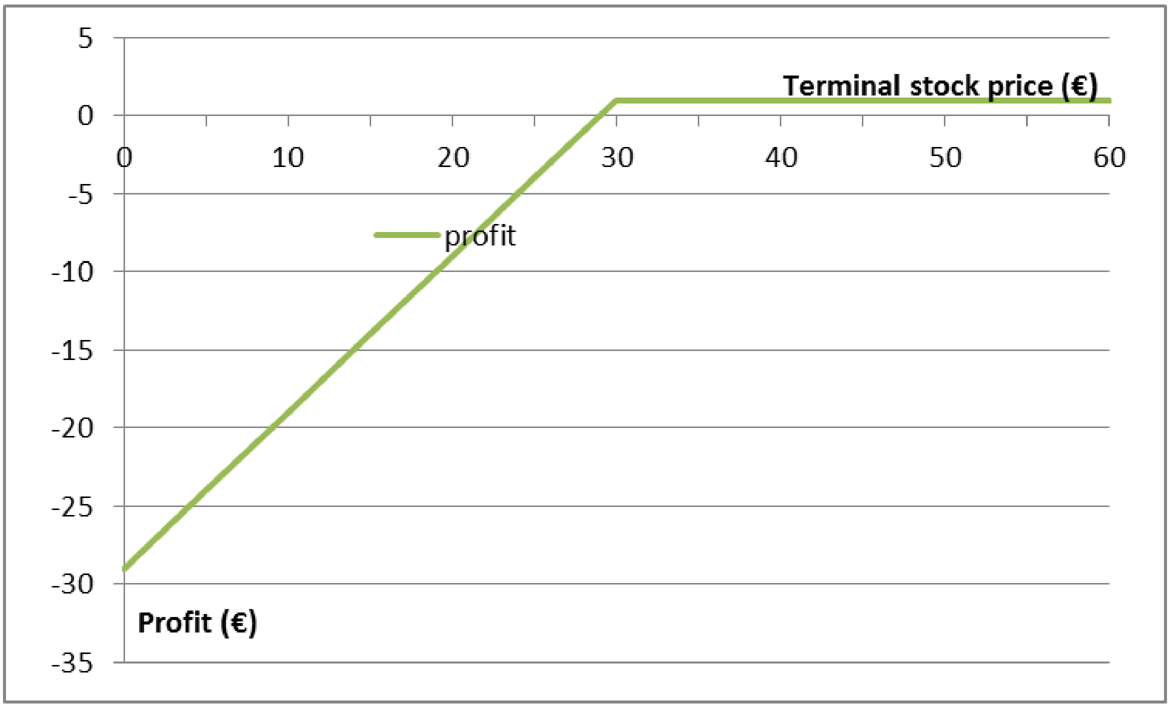
En notant K le prix d'exercice, le flux final (*final payoff*) d'une option d'achat est égal à max(0 ; K – S_T) et le résultat final pour l'acheteur est égal à max(0 ; K – S_T) – VC(prime).

Figure 3 : Final Payoff et Résultat sur achat d'option d'achat



Le résultat pour le vendeur de l'option dépend de la décision de l'acheteur. Si l'acheteur de l'option de vente exerce son droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix d'exercice, le vendeur de l'option d'achat est contraint de le lui acheter au prix d'exercice. Le résultat pour le vendeur est donc égal VC(prime) – max(0 ; K – S_T). Comme on peut l'observer sur la Figure 4, le gain maximum pour le vendeur est égal à la valeur capitalisée de la prime mais la perte est potentiellement illimitée si S_T tend vers l'infini.

Figure 4 : Résultat d'une option de vente pour le vendeur de l'option



2. Propriétés des options

Le prix de l'option représente le gain potentiel que peut réaliser l'acheteur de l'option. Comme indiqué, ce prix peut être divisé en deux éléments :

- La valeur intrinsèque (*intrinsic value*) représente l'avantage que procurerait un exercice immédiat de l'option

$$VI_{call} = Max(0; S_t - K)$$

$$VI_{put} = Max(0; K - S_t)$$

- La valeur temporelle (speculative *value*) représente l'augmentation potentielle du flux final d'ici à l'échéance finale.

Selon le positionnement du cours de l'actif sous-jacent par rapport au prix d'exercice, l'option est dite dans la monnaie (In-the-money), à la monnaie (At-the-money) ou en dehors de la monnaie (Out-of-the-money). Plus l'option est dans la monnaie, plus sa valeur intrinsèque est élevée et plus la prime est élevée.

	$S_t < K$	$S_t = K$	$S_t > K$
Call	Out-of-the-money	At-the-money	In-the-money
Put	In-the-money	At-the-money	Out-of-the-money

Par exemple, si le cours de l'action AXA s'établit à 19,39 € et que les options d'achat et de vente, de prix d'exercice 20 €, de maturité Décembre, se négocient respectivement à 0,30 € et 0,91 € :

$$VI_{Call} = (S_t - K)^+ = (19.39 - 20.00)^+ = 0.00$$

$$VT_{Call} = 0.30 \ - 0.00 = €0.30$$

$$VI_{Put} = (K - S_t)^+ = (20.00 - 19.39)^+ = 0.61$$

$$VT_{Put} = 0.91 \ - 0.61 = €0.30$$

2.1. Parité Call – Put sur actif sous-jacent ne versant pas de rémunération

Il existe une relation d'équilibre entre le prix d'une option d'achat et le prix d'une option de vente de caractéristiques identiques (sous-jacent, style, prix d'exercice et maturité). Pour montrer cette relation d'équilibre, considérons les deux portefeuilles A et B suivants :

- Portefeuille A : achat d'une option d'achat de prix d'exercice K et de maturité T, et dépôt monétaire d'un montant égal à Ke^{-rT} générant un flux égal à K à l'échéance T ;
- Portefeuille B : achat d'une option de vente de prix d'exercice K et de maturité T, et achat d'une unité d'actif sous-jacent au prix S_t.

La valeur finale des deux portefeuilles en fonction du cours de l'actif sous-jacent à l'échéance est :

		$S_T < K$	$S_T > K$
	Option d'achat	0	$S_T - K$
Portefeuille A	Dépôt monétaire	K	K
	Total	**K**	$\boldsymbol{S_T}$
	Option de vente	$K - S_T$	0
Portefeuille B	Actif sous-jacent	S_T	S_T
	Total	**K**	$\boldsymbol{S_T}$

A l'échéance, la valeur finale des deux portefeuilles est égale à max(K ; S_T). Les deux portefeuilles étant identiques, ils doivent donc avoir la même valeur aujourd'hui :

$$C_t + Ke^{-rT} = P_t + S_t$$

Où Ct est la valeur (prime) de l'option d'achat
Pt est la valeur (prime) de l'option de vente
K est le prix d'exercice de l'option d'achat et de l'option de vente
r est le taux d'intérêt sans risque
T est la maturité des deux options

2.2. Parité Call – Put sur actif sous-jacent versant une rémunération

☐ Si l'actif sous-jacent verse une rémunération connue (par exemple un dividende), la parité call – put devient :

$$C_t - P_t = S_t - VA(Div) - Ke^{-rT}$$

Où VA(Div) représente la valeur actuelle des dividendes versés.

<u>Exemple</u> :

Une option d'achat de maturité 6 mois et de prix d'exercice 30 € se négocie au prix de 2 €. L'action support se négocie au prix de 29 € et un dividende de 0,50 € sera payé dans 2 mois et dans 5 mois. Le taux d'intérêt sans risque est 10 % pour toutes les maturités. Quelle opération d'arbitrage peut-on réaliser si l'option de vente de mêmes caractéristiques se négocie au prix de 3 € ?

Selon la parité call – put, le put devrait avoir un prix de 2,51 € :

$$P_t = 2 + 30e^{-0.10\times\frac{6}{12}} + \left(0.50e^{-0.10\times\frac{2}{12}} + 0.50e^{-0.10\times\frac{5}{12}}\right) - 29 = 2.51$$

Si l'option de vente cote 3 € sur le marché, son prix est trop élevé par rapport à celui du call. L'opération d'arbitrage consiste donc à vendre l'option de vente, vendre (à découvert) une unité d'actif sous-jacent, acheter l'option d'achat et placer le capital disponible au taux sans risque :

- Vente de l'option de vente : + 3 €
- Vente de l'actif sous-jacent : + 29 €
- Achat de l'option d'achat : - 2 €
- Placement de 0,4917 € à 10% sur 2 mois : - 0,4917 €
- Placement de 0,4795 € à 10% sur 5 mois : -0,4795 €
- Placement de 29,0288 € à 10 % sur 6 mois : -29,0288 €

L'investissement initial est donc nul. A noter que les deux placements de 0,4917 € et 0,4795 € permettent de construire les dividendes qui devront être versés dans deux mois et cinq mois respectivement. Le résultat de cette stratégie en fonction du cours de l'actif sous-jacent observé à l'échéance est :

	$S_T < 30$	$S_T \geq 30$
Option d'achat	0	$S_T - 30$
Option de vente	$S_T - 30$	0
Actif sous-jacent	$-S_T$	$-S_T$
Placement	30.51	30.51
Résultat	**0.51**	**0.51**

Ce résultat final représente un équivalent monétaire de 0,49 € en date actuelle. Ce montant correspond à la différence entre le prix du put sur le marché (3 €) et sa valeur théorique (2,51 €).

☐ Si l'actif sous-jacent verse une rémunération sous forme d'un taux continu, la parité call – put devient :

$$C_t - P_t = S_t e^{-\delta T} - K e^{-rT}$$

Dans ce cas, les dividendes sont réinvestis en continu (en actions supplémentaires) au taux de dividende δ. Ainsi, $e^{-\delta T}$ unités d'actif sous-jacent permettront d'obtenir une unité d'actif sous-jacent à l'échéance T.

Exemple :

Une option d'achat de maturité 6 mois et de prix d'exercice 30 € se négocie au prix de 2 €. L'action support se négocie au prix de 29 € et verse un dividende continu de 4 %. Le taux d'intérêt sans risque est 10 % pour toutes les maturités. Quelle opération d'arbitrage peut-on réaliser si l'option de vente de mêmes caractéristiques se négocie au prix de 3 € ?

Selon la parité call – put, le put devrait avoir un prix de 2,11 € :

$$P_t = 2 + 30e^{-0{,}10\times\frac{6}{12}} - 29e^{-0{,}04\times\frac{6}{12}} = 2{,}11$$

Si l'option de vente cote 3 € sur le marché, son prix est trop élevé par rapport à celui du call. L'opération d'arbitrage consiste donc à vendre l'option de vente, vendre (à découvert) $e^{-0,04*0,5}$ unité d'actif sous-jacent, acheter l'option d'achat et placer $30e^{-0,10*0,5}$ au taux sans risque :

- Vente de l'option de vente : + 3,00 €
- Vente de 0,9801 unité d'actif sous-jacent : + 28,42 €
- Achat de l'option d'achat : - 2,00 €
- Placement de 28,5369 € à 10 % sur 6 mois : - 28,54 €

Le total représente le gain d'arbitrage en date initial, soit 0,8889 €, et représente la différence entre le prix observé de l'option de vente (3 €) et sa valeur théorique (2,11 €). Le résultat de cette stratégie en fonction du cours de l'actif sous-jacent observé à l'échéance est :

	$S_T < 30$	$S_T \geq 30$
Option d'achat	0	$S_T - 30$
Option de vente	$S_T - 30$	0
Actif sous-jacent	$-S_T$	$-S_T$
Placement	30,00	30,00
Résultat	**0,00**	**0,00**

3. Valeur des options et outils de gestion

Le prix d'une option dépend de plusieurs facteurs, dont :

- Le cours du support : plus celui-ci est élevé, plus les options d'achat sont profitables, donc chères. Au contraire, pour une option de vente, plus le cours du support est élevé moins celle-ci est chère.
- Le prix d'exercice : pour une option d'achat, plus le prix d'exercice est élevé et moins celle-ci est chère. Inversement pour une option de vente.
- La volatilité du sous-jacent : plus la volatilité est importante, plus grande est la chance que le cours du sous-jacent évolue favorablement, c'est-à-dire accroisse la profitabilité de l'option. Ceci est vrai pour les call et les put.
- La durée de vie de l'option : plus il reste de temps à l'échéance, plus la valeur temps est élevée. De ce fait, une option à long terme est plus chère qu'une option à court terme.

- Le dividende : le détachement de dividende fait baisser le niveau du cours du sous-jacent et par conséquent diminue le prix de l'option d'achat et augmente celui de l'option de vente.

Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour évaluer les options. Les plus répandus sont le modèle binomial et le modèle de Black et Scholes. Bien que très utilisé sur les marchés, le modèle de Black et Scholes n'est pas adapté aux options américaines ou aux options ayant des caractéristiques particulières (options à barrière activante ou désactivante, option sur moyenne, etc.) pour lesquelles une évaluation binomiale, bien que plus complexe, sera plus efficace.

Selon Black et Scholes, le prix d'une option est déterminé de la façon suivante :

$$C(S,K,T) = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$\mathrm{P}(S,K,T) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-\delta T} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{ln\left(\frac{S_0 e^{-\delta T}}{K e^{-rT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Où σ représente la volatilité annuelle des prix de l'actif sous-jacent et N() est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Les autres paramètres sont identiques aux relations précédentes.

De ce modèle d'évaluation, il est possible de déduire certains outils de gestion d'une position optionnelle, appelés « les grecques ».

3.1. Le Delta

Le delta mesure la sensibilité de la prime d'une option par rapport au cours du support. Le delta est défini comme la variation du prix de l'option en euro pour une variation de 1 euro de son sous-jacent.

$$\Delta_{call} = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)e^{-\delta T}$$

$$\Delta_{put} = \frac{\partial P}{\partial S} = (N(d_1) - 1)e^{-\delta T}$$

Sur la Figure 5, on remarque que le delta tend vers zéro pour les options en-dehors des cours. Au contraire, le delta d'une option dans les cours tend vers un pour un call et vers moins un pour un put. Vers la parité, le delta se modifie très rapidement pour atteindre des valeurs proches des deux extrêmes. C'est dans cette zone que l'opérateur doit suivre régulièrement l'évolution du delta.

Une position avec un delta positif est une stratégie haussière, i.e. on fait le pari d'une hausse du cours de l'actif sous-jacent. Au contraire, une position avec un delta négatif est une stratégie baissière. Enfin, lorsque le delta de la position est nul, on dit que la position est delta neutre, ce qui signifie que la stratégie n'est pas directionnelle, son résultat ne dépend pas de la hausse ou de la baisse du cours du sous-jacent.

A noter que l'influence du temps sur le delta dépend de la nature de l'option. Quand l'échéance reste relativement éloignée, l'effet du temps qui passe sur le delta est peu sensible. En revanche, au fur et à mesure que se rapproche la date d'échéance, les deltas des options en-dehors et dans la monnaie convergent rapidement vers leurs valeurs limites : 0 ou 1 (0 ou -1 pour les puts). Cet effet du temps est mis en évidence sur dans la figure 6.

Figure 5 : Evolution du delta en fonction du cours du support

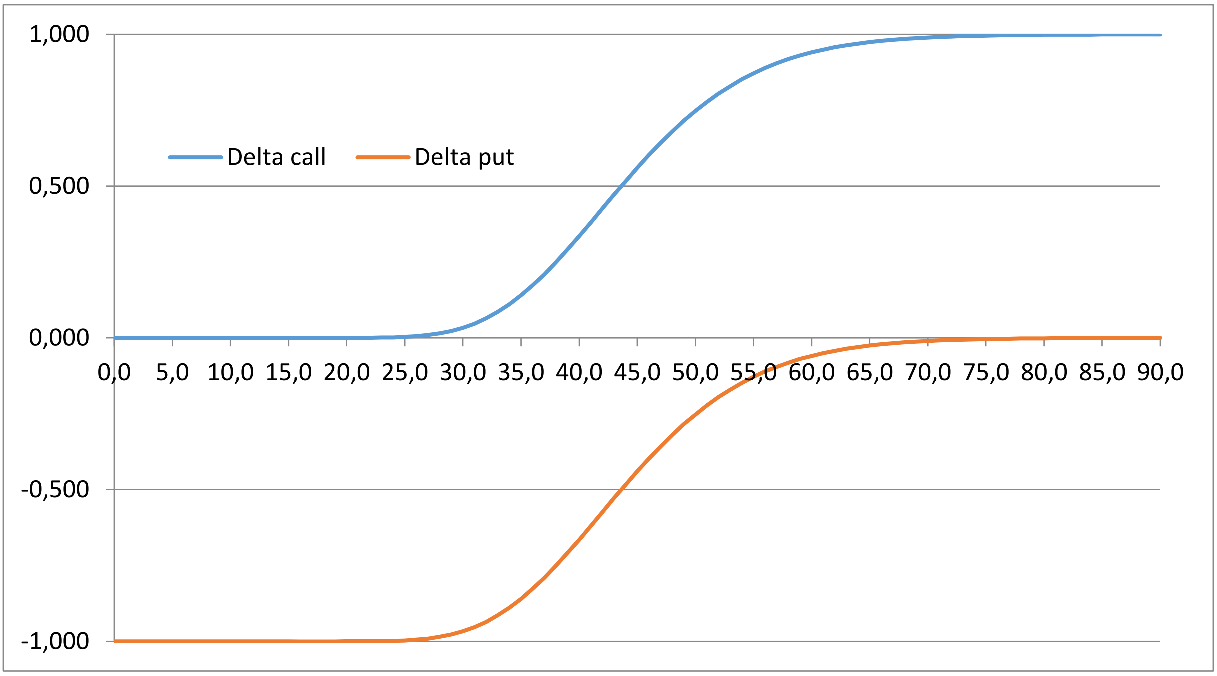
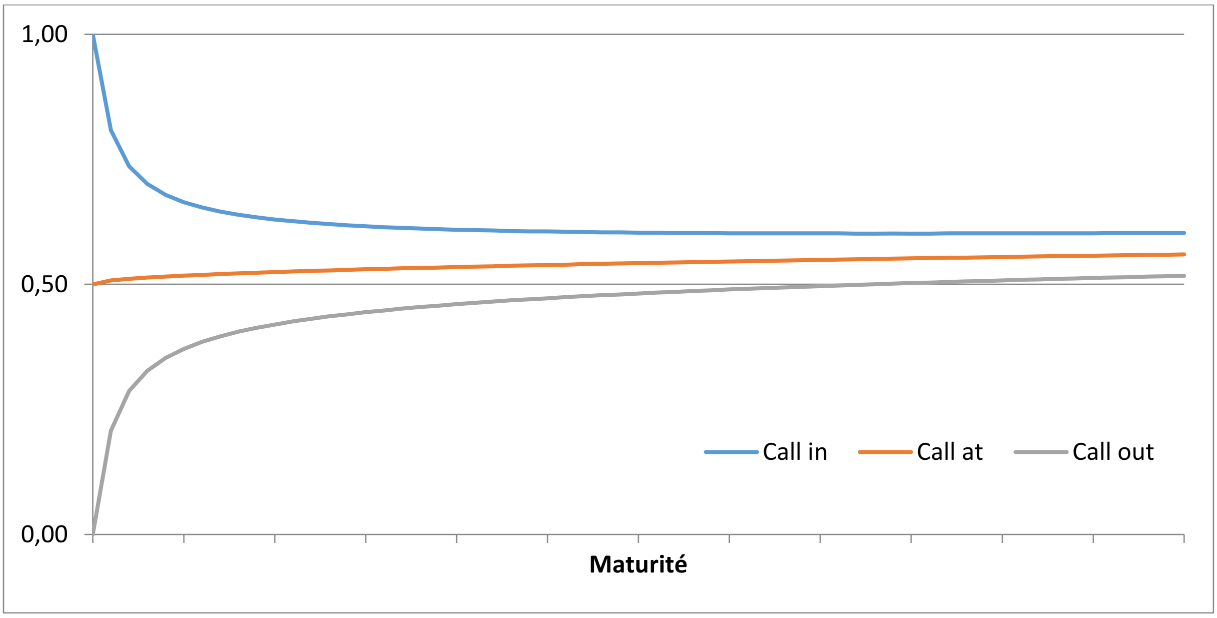


Figure 6 : Evolution du delta des calls en fonction de la maturité



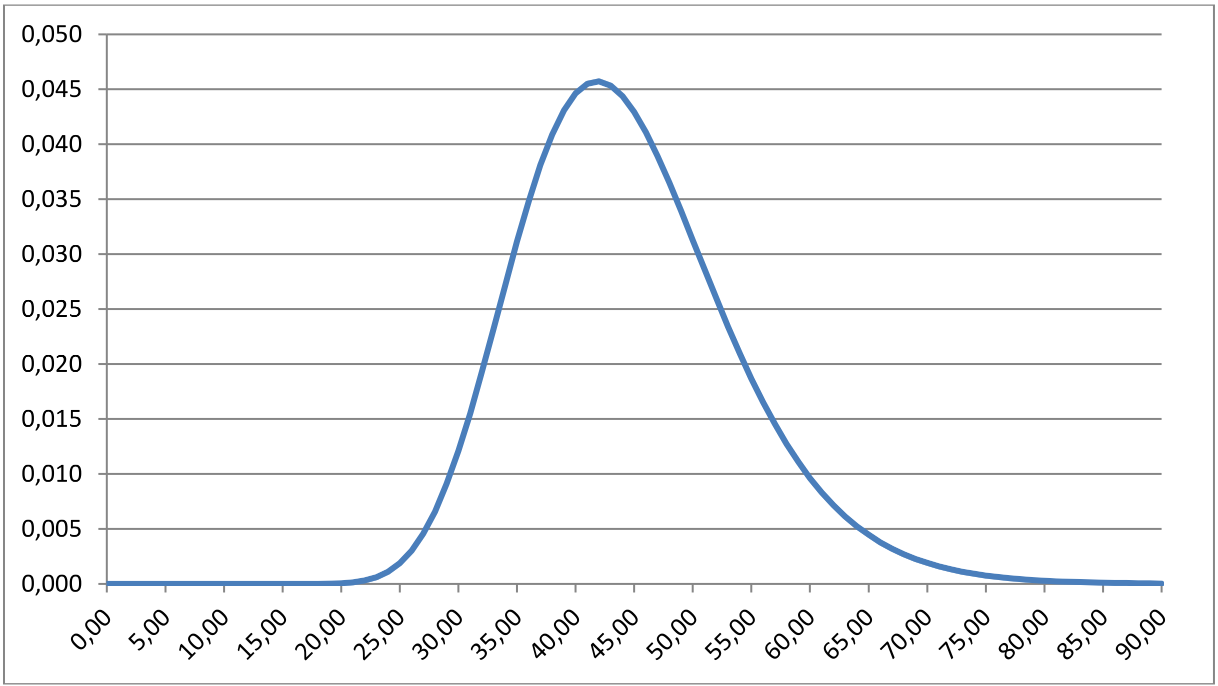
3.2. Le Gamma

Le delta n'étant pas une mesure stable puisqu'il dépend du cours du support et du temps. Le gamma mesure donc la sensibilité du delta aux variations du cours du support. Comme nous l'avons remarqué sur la Figure 5, le delta des options à parité est très sensible. Afin d'évaluer cette sensibilité, le gamma mesure la variation du delta suite à une variation du support d'un euro.

$$\Gamma_{call} = \Gamma_{put} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-\delta T}}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d1^2}{2}}$$

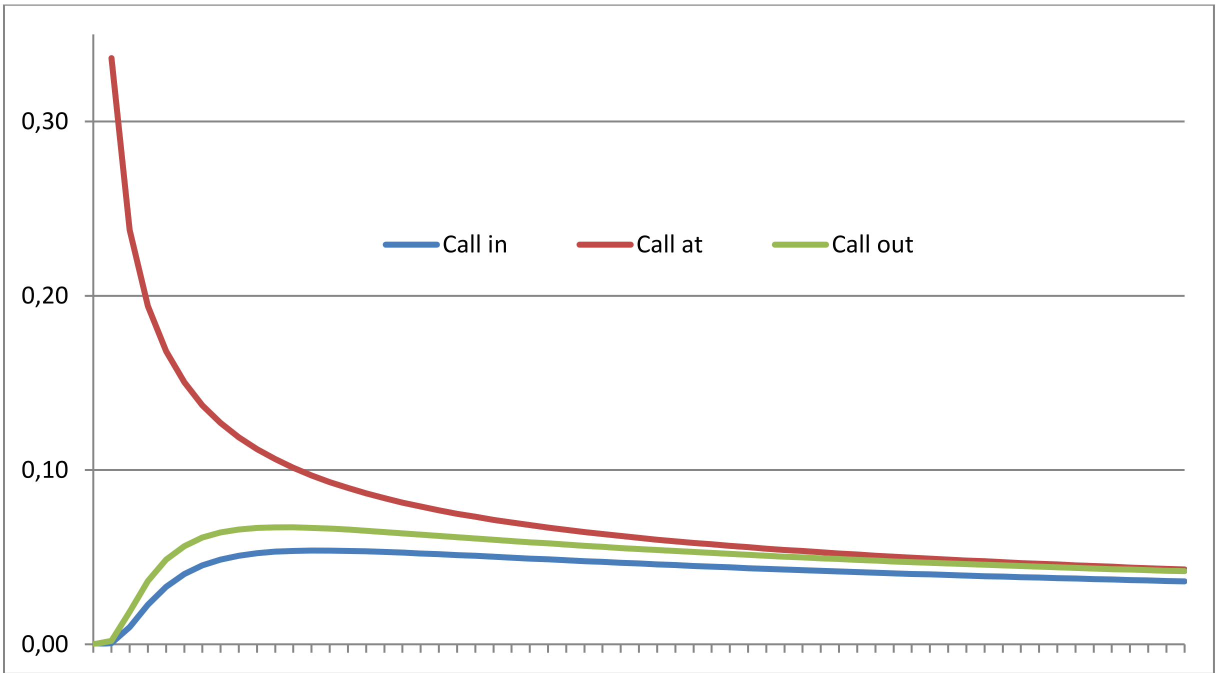
Plus le gamma est élevé, plus les ajustements de la position sont fréquents lorsque le gérant cherche à maintenir un delta stable (par exemple dans une stratégie neutre en delta). Les valeurs de gamma sont voisines de zéro pour des séries très en dedans ou très en dehors. C'est pour les options à parité que le gamma est très élevé. Ceci est visible dans la Figure 7.

Figure 7 : Evolution du gamma en fonction du cours du support et du prix d'exercice



Comme le calcul du gamma nécessite l'estimation du coefficient d_1, il est donc également fonction du temps. Le temps affecte très modestement la valeur de gamma lorsque l'échéance reste éloignée. Cependant, pour les options proches de la parité et arrivant à échéance, l'effet du temps devient très sensible comme le montre la Figure 8.

Figure 8 : Evolution du gamma en fonction du temps



Stratégie delta et gamma neutre

Considérons un investisseur qui détient un portefeuille composé de 1 000 actions d'une action donnée. Le cours de l'action est 100 € et aucun dividende n'est prévu dans les prochains mois. On relève les informations suivantes concernant les options d'achat et de vente sur ce titre (taux sans risque : 5% ; volatilité : 20% ; maturité : 91 jours) :

Type	Prix d'exercice	Prime	Delta	Gamma
Call	100	4,6078	0,5694	0,0393
Call	110	1,1864	0,2178	0,0295
Put	100	3,3690	-0,4360	0,0393
Put	110	9,8237	-0,7822	0,0295

Le gérant souhaite mettre en place une stratégie delta en gamma neutre. Parmi les stratégies possibles, on retiendra :

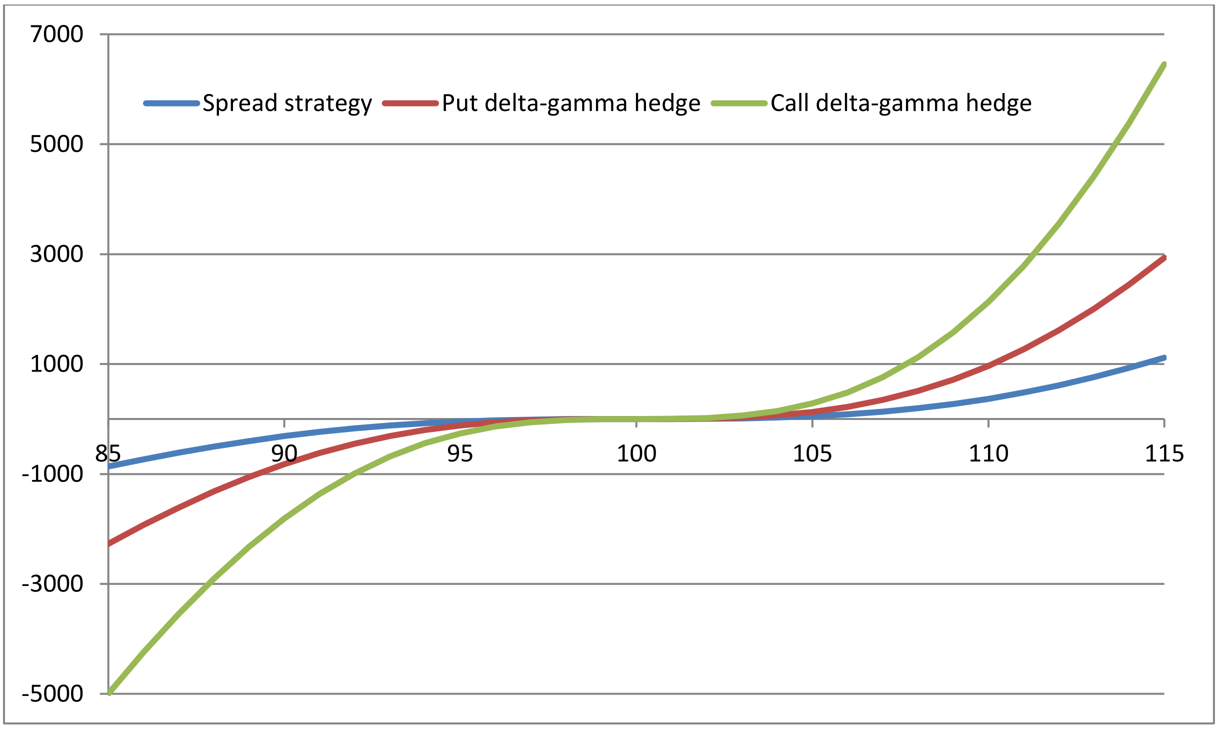
- une stratégie à base de call (call spread) : achat du call 100 et vente du call 110
- une stratégie à base de put (put spread) : achat du put 100 et vente du put 110
- une combinaison de call et de put : achat de put 110 et vente de call 100

Les positions à prendre pour que la position globale soit neutre en delta et en gamma sont les suivantes :

	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
Call 100	- 3 588,28		- 619,84
Call 110	4 789,04		
Put 100		- 1 630,48	
Put 110		2 176,09	827,26

Ainsi, pour la stratégie 3 (combinaison de call et de put), il faut acheter 827,26 put de prix d'exercice 110 et vendre 619,84 options d'achat de prix d'exercice 100. La Figure 9 montre la performance des trois stratégies en fonction de l'évolution du cours du support (tous les autres paramètres sont supposés constants).

Figure 9 : Performance des stratégies delta et gamma neutres



3.3. Le thêta

Le facteur thêta représente la sensibilité du prix de l'option à l'écoulement du temps : quelle sera la variation de la prime pour une journée passée ?

$$\Theta_{call} = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S\sigma e^{-\delta T}}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d1^2}{2}} - rKe^{-rT}N(d_2) + \delta S e^{-\delta T} N(d_1)$$

$$\Theta_{put} = \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{S\sigma e^{-\delta T}}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d1^2}{2}} + rKe^{-rT}N(-d_2) - \delta S e^{-\delta T} N(-d_1)$$

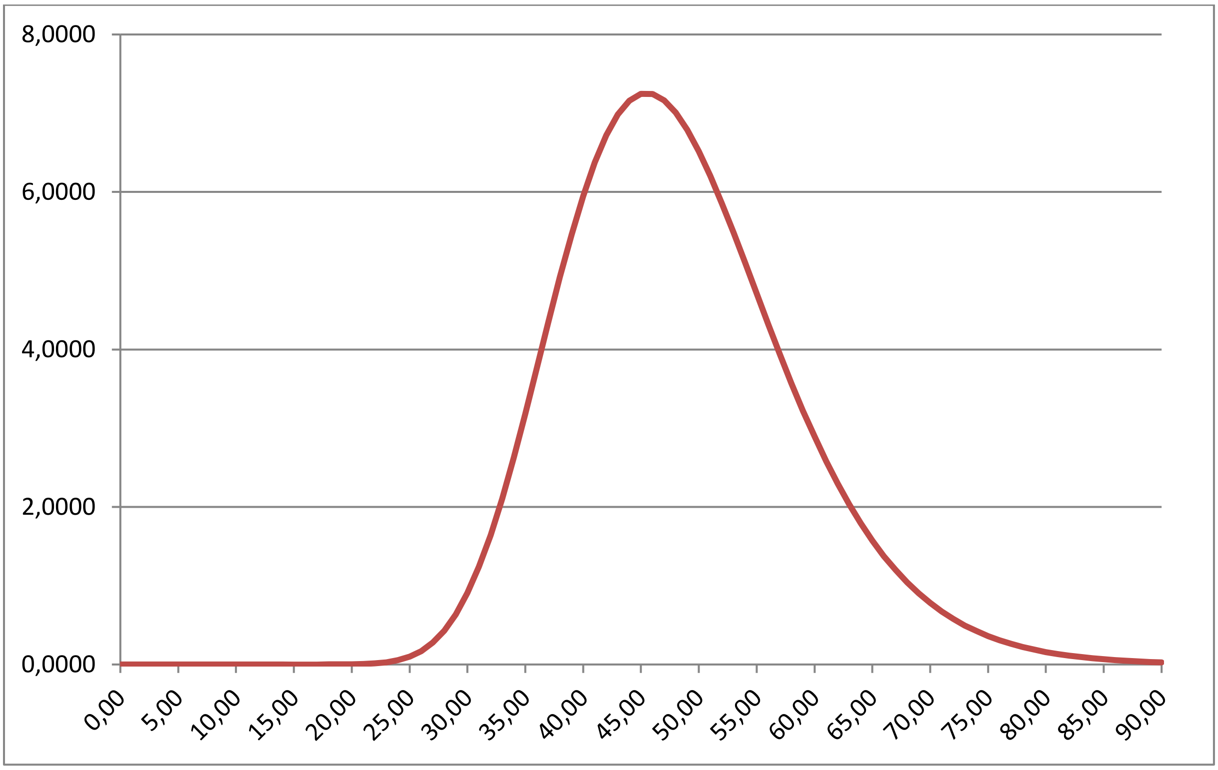
Le thêta est toujours négatif indiquant un impact négatif du temps qui passe sur une position longue et un impact positif sur une position courte. Les vendeurs d'options espèrent donc conserver la valeur temporelle qui décroit chaque jour qui passe.

3.4. Le véga

Le véga mesure la sensibilité du prix de l'option à une variation de 1 % de la volatilité de l'actif sous-jacent. Il est plus élevé pour les options à la monnaie (celles-ci étant plus sensibles au mouvement du sous-jacent). Un véga positif correspond à une stratégie gagnante quand la volatilité du support augmente. Un véga négatif correspond à une stratégie gagnante quand la volatilité du support diminue.

$$\nu_{call} = \nu_{put} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S e^{-\delta T} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} e^{-\frac{d1^2}{2}}$$

Figure 10 : Evolution du véga en fonction du cours du support et du prix d'exercice



3.5. Le rhô

Le facteur rhô définit la sensibilité de l'option par rapport aux variations du taux d'intérêt. Celle-ci étant faible, ce paramètre est souvent ignoré. En théorie, une hausse des taux d'intérêt a un impact positif sur le prix des options d'achat et négatif sur celui des options de vente. Toutefois, en pratique cet effet est compensé par la baisse du cours du support (les opérateurs s'intéressant davantage au rendement des obligations) et donc une dévalorisation du call et une valorisation du put. L'impact des taux est donc relativement faible sur la prime.

3.6. Synthèse sur les grecques

	Delta			**Gamma**			**Thêta**			**Véga**		
	IN	AT	OUT	IN	AT	OUT	IN	AT	OUT	IN	AT	OUT
+CALL	+++	++	+	++	+++	++	-	--	-	+	++	+
-CALL	---	--	-	--	---	--	+	++	+	-	--	-
+PUT	---	--	-	++	+++	++	-	--	-	+	++	+
-PUT	+++	++	+	--	---	--	+	++	+	-	--	-

+++ sensibilité très positive ; ++ sensibilité positive ; + sensibilité légèrement positive
--- sensibilité très négative ; -- sensibilité négative ; - sensibilité légèrement négative