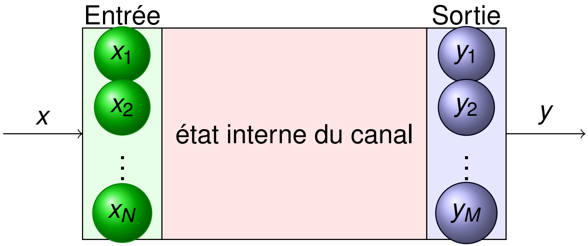
Introduction

Un canal discret est un système acceptant en entrée des suites de symboles définis sur un alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ et émettant en sortie des suites des symboles définis sur un alphabet $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_M\}$



Soit $x = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ un message en entrée et $y = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m}$ le message obtenu en sortie.
Entrées , sorties et état interne du canal sont liés par un modèle probabiliste

Modélisation probabiliste du canal

$$p(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_m} | x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}, \textit{état})$$

Pour simplifier ce cadre trop général nous ferons les hypothèses suivantes

- le canal n'a pas d'état interne.
  $p(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_m} | x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$
- le canal est causal : toute sortie est indépendante des entrées futures

$$m \leq n \Longrightarrow$$
$$p(y_{i_1}, \cdots, y_{i_m} | x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) = p(y_{i_1}, \cdots, y_{i_m} | x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})$$

- Le canal est causal sans mémoire

$$p(y_{i_1}, \cdots, y_{i_n} | x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) = \prod_{k=1}^{n} p(y_{i_k} | x_{i_k})$$

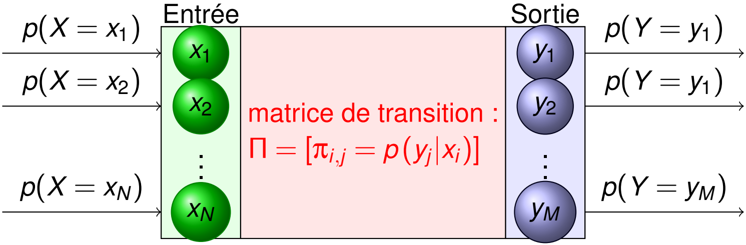
modélisation probabiliste du canal

- Le canal est causal sans mémoire stationnaire
  un canal causal sans mémoire est dit stationnaire si

  $$\boxed{p(Y_k = y_{i_k} | X_k = x_{i_k}) = p(Y = y_{i_k} | X = x_{i_k})}$$

  autrement dit $p(Y_k = y_{i_k} | X_k = x_{i_k})$ ne dépend pas du temps

Canal discret causal sans mémoire stationnaire



notons

$$P_X=\begin{pmatrix}p(x_1)\\p(x_2)\\\vdots\\p(x_N)\end{pmatrix}\quad et\quad P_Y=\begin{pmatrix}p(y_1)\\p(y_2)\\\vdots\\p(y_M)\end{pmatrix}$$

matrice de transition d'un canal discret causal sans mémoire stationnaire

Matrice de transition d'un canal discret sans mémoire

$$\Pi = [\pi_{i,j} = p(y_j|x_i)]$$

$$\begin{array}{cc} & \text{sortie } y_j \downarrow \\ \text{entrée } x_i \rightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & p(y_j|x_i) & \\ & & \end{pmatrix} = \Pi \end{array}$$

$$P_Y = \Pi^T P_X$$

Canal uniforme par rapport à entrée

Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ $p(\cdot|x_i)$ est une loi de probabilité sur $\{y_1, \cdots, y_M\}$
Ainsi chacune des lignes de la matrice Π est une loi de probabilité .
Pour un canal uniforme par rapport à l'entrée les lois $p(\cdot|x_i)$ sont identiques à une permutation près : les symboles à l'entrée sont tous affectés de le même manière par les erreurs
conséquences :

$$(\forall i \in \{1, 2, \cdots, N\})(\forall j \in \{1, 2, \cdots, N\})H(Y|x_i) = H(Y|x_j)$$

$$(\forall i \in \{1, 2, \cdots, N\})H(Y|X) = H(Y|x_i)$$

Canal uniforme par rapport à la sortie

Les colonnes de la matrice de transition Π sont identiques à une permutation près.
Attention quelque soit j la colonne composée des valeurs $p(y_j|x_1), \cdots, p(y_j|x_N)$ n'est pas une loi de probabilité.
conséquence : si P_X est uniforme alors P_Y est uniforme

$$\begin{aligned} (\forall j \in \{1,2,\cdots,M\}) \quad p(y_j) &= \sum_{i=1}^{N} p(y_j|x_i)p(x_i) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p(y_j|x_i) \end{aligned}$$

Or

$$(\forall j \in \{1,2,\cdots,M\})(\forall k \in \{1,2,\cdots,M\}) \sum_{i=1}^{N} p(y_j|x_i) = \sum_{i=1}^{N} p(y_k|x_i)$$

par conséquent

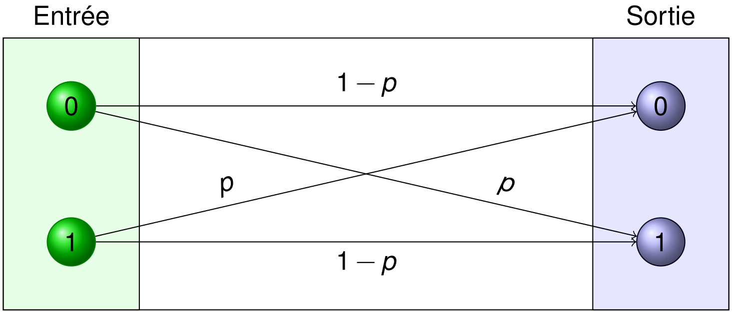
$$(\forall j \in \{1,2,\cdots,M\})(\forall k \in \{1,2,\cdots,M\}) p(y_j) = p(y_k)$$

canal particuliers

- Le canal est dit symétrique si $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$, s'il est uniforme par apport à l'entrée et à la sortie
- Canal sans perte : l'observation de la sortie permet de déterminer avec certitude l'entrée.
  $H(X|Y) = 0$
- Canal déterministe : la sortie est une fonction déterministe de l'entrée
  pour ce type de canal on a aussi $H(X|Y) = 0$
- Canal sans bruit : déterministe et sans perte
- Canal de capacité nulle : si la sortie n'apporte aucune information sur l'entrée

Le canal binaire symétrique (CBS)

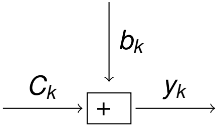
canal discret causal sans mémoire stationnaire,



$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Canal à bruit additif Gaussien

canal causal sans mémoire



Si $b_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors $y_k | C_k \sim \mathcal{N}(C_k, \sigma^2)$
Sa densité $p(y_k | C_k)$ est donnée par

$$p(y_k | C_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_k - C_k)^2}{2\sigma^2}}$$

Les performances du canal sont déterminées par σ

Capacité

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$H(X)$ entropie de de la source
$H(X;Y)$ Incertitude résiduelle sur X sachant Y
L'information mutuelle dépend de la loi de X et de la nature du canal de transmission

On appelle capacité du canal l'information maximale

$$C = max_{P_X} I(X;Y)$$

capacité d'un canal symétrique

- $H(X|X) = H(Y|X = x_i)$ est indépendante de i
- $H(Y)$ est maximum lorsque la loi d'entrée est uniforme
- $C = log_2(N) + \sum_{k=1}^{N} p(y_i|x_i) log_2 (p(y_j|x_i))$

Capacité d'un canal binaire symétrique

$$\boxed{\begin{aligned} C &= 1 + (1-p)log_2(1-p) + plog_2(p) \\ C &= 1 - H(p) \end{aligned}}$$

- Cas sans bruit $p = 0$ ou $p = 1$
- Canal de capacité nulle $p = \frac{1}{2}$