Examen final

Lundi 26 janvier 2015 - 2h

Documents manuscrits et polycopié du cours autorisés. Tout autre document interdit.

Exercice 1

Soit $F = C^0([0,1],\mathbb{R})$ *et* $E = \{\varphi \in C^2([0,1],\mathbb{R}),\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ *munis des normes :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|,\ f \in F,\ \text{et } \|\varphi\|_E = |\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_\infty,\ \varphi \in E.$$

1. *Montrer que pour tout* $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty$, *puis que* $\|\varphi'\|_\infty \leq \|\varphi\|_E$.
   Vérifier que $\varphi \to \|\varphi\|_E$ *est bien une norme sur* E.
2. *Montrer que l'application* $\mathcal{G} : E \to F$, *définie par* $\mathcal{G}(\varphi) = \varphi'' - \varphi^2$ *est différentiable sur* E *et calculer sa différentielle en* $\varphi \in E$, *appliquée à* $h \in E$.
3. *L'application* $\mathcal{G}$ *est-elle de classe* C^1 *?*

Exercice 2

On considère une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de la forme*

$$g(x,y) = \int_0^1 h(t\,x + (1-t)\,y)\ a(t)\,dt,$$

où $h \in C^0(\mathbb{R})$ *et* $a \in L^1(0,1)$.

1. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Montrer que la fonction* $t \to h(tx + (1-t)y)$ *est bornée sur* $[0,1]$.
2. *Montrer que* g *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

   Indication : *étant donné deux suites convergentes* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *vers* x *et* y, *on pourra étudier* $\lim_{n\to+\infty} g(x_n, y_n)$ *par convergence dominée.*
3. *On suppose maintenant* $h \in C^1(\mathbb{R})$. *Montrer que* g *est dérivable suivant* x *et* y, *et exprimer ses dérivées partielles à l'aide d'intégrales.*
4. *On pose* $h = f'$ *avec* $f \in C^1(\mathbb{R})$, *et* $a = 1$. *Montrer que*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

   Quelle est la régularité de g *?*

Exercice 3

1. *Montrer que la transformée de Fourier de la fonction* $h(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ *est :*

$$\hat{h}(\nu) = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}\ ,\quad \nu \in \mathbb{R}$$

   En déduire la transformée de Fourier de la fonction h_a *définie par :*

$$h_a(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$$

2. *Pour* $a > 0$ *et* $t \in \mathbb{R}$*, on définit la fonction*

$$f_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi tx}}{1+4\pi^2x^2} e^{-a|x|} dx$$

En utilisant la question précédente et le théorème de Fubini (justifié!), montrer que

$$f_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+4\pi^2(y+t)^2} e^{-|y|} dy$$

3. *Calculer la limite de* $f_a(t)$ *quand* $a \to 0$ *dans chacune des expressions précédentes.*

4. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction :*

$$g(x) = \frac{1}{1+4\pi^2x^2}$$

Exercice 4

(FACULTATIF)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$*. Montrer que*

$$\sum_{n\geq 0} \int_{\mathbb{R}} |f_n| \ dx < +\infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\geq 0} f_n \ dx = \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbb{R}} f_n \ dx$$