Chapter 4

Martingales en temps continu

4.1 Filtrations et temps d'arrêt en temps continu

4.1.1 Filtrations et processus adaptés

Rappels : on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on considère l'ensemble d'indices $I = \mathbb{R}^+$ ou $I = [0, T]$ pour un $T > 0$ déterministe fixé.

Définition 4.1. *On appelle **filtration** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ croissante (au sens de l'inclusion) de sous tribus de $\mathcal{F}$.*
*L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace de probabilité filtré**.*

Définition 4.2. *Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, on dira qu'un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in I}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$**-adapté** si et seulement si $\forall t \in I$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque : par la propriété de croissance des filtrations si X est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté alors $\forall t \in I$, X_t est $\mathcal{F}_{t+s}$-mesurable $\forall s > 0$ t.q. $(s + t) \in I$.

Exemple Canonique : Pour tous processus $X = (X_t)_{t\in I}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on note

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \le s \le t, s \in I)$$

la tribu engendrée par la trajectoire de X sur $[0, t] \cap I$.
La famille $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelée **filtration naturelle** du processus X.
Le processus X est bien évidemment $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$-adapté.

Nous allons ici faire quelques hypothèses techniques afin de nous affranchir de cas pathologiques. Ces conditions sont monnaies courantes dans la littérature elles portent le nom de conditions habituelles.

Définition 4.3. *Conditions habituelles sur les filtrations.*
Dans tout ce qui suit on supposera toujours les deux conditions suivantes vérifiées.

a. *Complétude : la sous tribu $\mathcal{F}_0$ contient tous les $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.*

b. *Continuité à droite : $\forall t \in I$ on définit la sous tribu de $\mathcal{F}$*

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0, (t+\varepsilon)\in I} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

on supposera que $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$.

Remarques :

- La condition (a) permet en particulier d'avoir que si X est une version de Y et si X est $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$-adapté alors Y est aussi $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$-adapté.

- On a très clairement que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_t^+$, la condition (b) traduit qu'il n'y a pas plus "d'information" dans $\mathcal{F}_t^+$ que dans $\mathcal{F}_t$.

- Une notion de continuité à gauche peut également être définie en prenant les tribu engendrée par les réunions des tribus $\mathcal{F}_{t-\varepsilon}$. Or celles ci sont toutes contenues dans $\mathcal{F}_t$ qui est la plus petite tribu les contenants toutes. D'où la continuité à gauche.
- Contre exemple : filtration non continue à droite. Considérons le processus X définit par $X_t = tU$ où U est une v.a. vérifiant $\mathbb{P}(U=1) = \mathbb{P}(U=-1) = 1/2$. On note $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$ qui est la filtration naturelle du processus. Or on a $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\forall t > 0$ on a $\mathcal{F}_t = \sigma(U)$ la tribu engendrée par U. Clairement on a $\mathcal{F}_0^+ = \sigma(U) \neq \mathcal{F}_0$.

Définition 4.4. *Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré on appellera $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. sous $\mathbb{P}$ tout processus W vérifiant*

(a) W est un M.B.S. sous $\mathbb{P}$;

(b) W est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté;

(c) $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ les v.a. $(W_t - W_s)$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_s$.

Sous les conditions habituelles la filtration naturelle du M.B.S. notée $\mathcal{F}^W$ est continue à droite. On hérite alors de la propriété qui suit

Corollaire 4.5. *Loi $0-1$ de Blumenthal.*
La tribu $\mathcal{F}_0^{W^+}$ est triviale : i.e.

$$\forall A \in \mathcal{F}_0^{W^+} \text{ on a } \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Application : Considérons $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} W_s$. Alors l'événement $\{M_t > 0, \forall t > 0\} \in \mathcal{F}_0^{W^+}$ car $\forall t$ on a que M_t est $\mathcal{F}_t^W$-mesurable et

$$\{M_t > 0, \forall t > 0\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{M_\varepsilon > 0\} \in \mathcal{F}_0^{W^+}$$

donc par Blumenthal $\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 0$ ou 1. Or si on avait

$$\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 0$$

cela impliquerait $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $M_{\varepsilon_0} = 0$ avec probabilité 1 ce qui est impossible car

$$\mathbb{P}(M_{\varepsilon_0} > 0) \geq \mathbb{P}(W_{\varepsilon_0} > 0) = 1/2.$$

d'où

$$\mathbb{P}(M_t > 0, \forall t > 0) = 1.$$

Enfin on admettra la proposition suivante qui nous sera bien utile lorsque l'on parlera d'intégration.

Proposition 4.6. *Soit X un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté à valeurs réelles et continu à droite, limité à gauche (càd-làg) alors le processus Y définit par $\forall t \in I$*

$$Y_t = \int_0^t X_s \, ds$$

est à trajectoires continues et est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté.

4.1.2 Temps d'arrêt

Contexte : On commence par supposer que $I = \mathbb{R}^+$; étant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré on note

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$$

la tribu engendrée par la réunion des élément de la filtration. On a en général que

$$\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}.$$

Définition 4.7. *Dans ce contexte, une variable aléatoire τ à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}+ = [0, +\infty]$ vérifiant*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0$$

*est appelé $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-**temps d'arrêt**.*

Remarque : Dans le cas ou $I = [0, T]$ on a bien entendu que $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$ et on supposera seulement que pour tout $t \geq T$ on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_T$.
En temps continu et dans les conditions habituelles sur la filtration on a

Proposition 4.8. *Une v.a. τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt si et seulement si*

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0$$

Preuve. Pour tous $t \geq 0$ on a

$$\{\tau < t\} \bigcup_{n\geq 1} \left\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t$$

pour la réciproque en utilisant la continuité à droite de la filtration :

$$\{\tau \leq t\} \bigcap_{n\geq 1} \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$$

□

Exemples : A titre d'exercice vous pourrez prouver que :

1. Toute constante positive est un temps d'arrêt;
2. Le maximum (resp. le minimim) de deux $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt.
3. La somme de deux $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt.

Etant donné un temps d'arrêt τ on s'intéresse à une sous tribu particulière, appelée tribu des événements antérieurs à τ. Sa définition formelle est la suivante.

Définition 4.9. *Soit τ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-temps d'arrêt on définit*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0\}$$

*qui est appelée **tribu des événements antérieurs à** τ.*

Remarque : Il s'agit bien d'une sous-tribu de $\mathcal{F}$: on a bien $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ de plus si $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors $\forall t \geq 0$ on a

$$\overline{A} \cap \{\tau \leq t\} = \overline{A \cap \{\tau \leq t\}} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et enfin $\forall A_k \in \mathcal{F}_\tau$, $\forall t \geq 0$ on a

$$\left(\bigcup_k A_k\right) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_k (A_k \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

La proposition qui suit condense un certain nombre de propriétés de cette tribu.

Proposition 4.10. *Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré alors*

1. *Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. alors la v.a. τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable;*
2. *Si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. fini $\mathbb{P}$-p.s. et si X est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté à trajectoires continues alors la v.a. X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable;*
3. *Si τ' est un autre $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A. tel que $\tau' \leq \tau$ $\mathbb{P}$-p.s. alors*

$$\mathcal{F}_{\tau'} \subseteq \mathcal{F}_\tau$$

ce qui entraine que pour tout σ $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-T.A on a

$$\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau$$

4. *Pour tout processus X, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté, à trajectoires continues le* ***processus arrêté***

$$X^\tau = (X_{t\wedge\tau})_{t\in I}$$

est $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté. De plus X^τ est aussi $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\in I}$-adapté.

Preuve. Pour (1.) il faut m.q. $\forall u \in I$ on a $\{\tau \leq u\} \in \mathcal{F}_\tau$ et pour cela il suffit de voir que pour tous $t \geq 0$ on a

$$\{\tau \leq u\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t \wedge u\} \in \mathcal{F}_{t\wedge u} \subset \mathcal{F}_t$$

Pour (2.) il suffit de m.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{X_\tau < x\} \in \mathcal{F}_\tau$. Soit $t \geq 0$ on a

$$\{X_\tau < x\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcap_{u\in\mathbb{R}^+} \{\{X_u < x\} \cap \{u = \tau\} \cap \{\tau \leq t\}\}$$

où

$$\{u = \tau\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{|\tau - u| < \frac{1}{1+n}\right\}$$

et en utilisant la continuité de X il suffit de restreindre la réunion sur les $u \in \mathbb{Q}^+$:

$$\{X_\tau < x\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcap_{0\leq u\leq t, u\in\mathbb{Q}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\{X_u < x\} \cap \left\{\tau > u - \frac{1}{1+n}\right\} \cap \left\{\tau \leq \left(u + \frac{1}{1+n}\right) \wedge t\right\}\right\}$$

qui est une réunion dénombrable d'intersections dénombrables. Enfin on observe que $\{X_u < x\} \in \mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_t$ pour $u \leq t$ et $\left\{\tau > u - \frac{1}{1+n}\right\} \in \mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_t$ et enfin

$$\left\{\tau \leq \left(u + \frac{1}{1+n}\right) \wedge t\right\} \in \mathcal{F}_t$$

Pour (3.) on suppose donc que $\tau' \leq \tau$ $\mathbb{P}$-p.s. et on prend $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$ on va m.q. $A \in \mathcal{F}_\tau$. Pour tout $t \geq 0$ on a

$$A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\} = (A \cap \{\tau' \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Enfin pour (4.) il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ l'événement $\{X_{\tau\wedge t} < x\} \in \mathcal{F}_t$ pour tous $t \geq 0$. On a (par continuité des trajectoirres)

$$\{X_{\tau\wedge t} < x\} = \bigcup_{u\in\mathbb{Q}^+} \{X_{t\wedge u} < x\} \cap \{\tau = u\} = \left\{\bigcup_{u\leq t, u\in\mathbb{Q}^+} \{X_u < x\} \cap \{\tau = u\}\right\} \cup \{\{X_t < x\} \cap \{\tau > t\}\}$$

en observant que

$$\bigcup_{u\in\mathbb{Q}^+} \{\tau = u\} = \bigcup u \in \mathbb{Q}^+ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{u - \frac{1}{n+1} < \tau \leq \left(u + \frac{1}{n+1}\right) \wedge t\right\}$$

on conclut que l'on a bien affaire à des réunions dénombrables d'intersection dénombrables d'événements de $\mathcal{F}_t$. □

4.2 Rappels sur l'espérance conditionnelle

Les résultats qui suivent sont toutes à connaitre parfaitement.

Définition 4.11. *Etant donnés X une v.a. intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ on appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ l'unique $\mathbb{P}$-p.s. v.a. $\mathcal{G}$-mesurable notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ vérifiant*

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X\right], \ \forall A \in \mathcal{G} \tag{4.1}$$

Proposition 4.12. *On suppose X v.a. intégrable, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle vérifie les propriétés qui suivent :*

a. *la propriété (4.1) est équivalente à*

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}\left[ZX\right], \ \forall Z \ v.a. \ \mathcal{G} - mesurable \ et \ t.q. \ ZX \ intégrable; \tag{4.2}$$

b. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$;

c. $\mathbb{E}(1|\mathcal{G}) = 1$, $\mathbb{P}$-*p.s.;*

d. *L'espérance conditionnelle est $\mathbb{P}$-p.s. linéaire;*

e. *Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable vérifiant que XY est intégrable alors*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}), \ \mathbb{P} - p.s.;$$

f. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X),\ \mathbb{P}-p.s.;$$

g. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ est une sous tribu alors

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}),\ \mathbb{P}-p.s.;$$

h. inégalité de Jensen : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\varphi(X)$ est intégrable alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})),\ \mathbb{P}-p.s.$$

On rappelle brièvement que l'espérance conditionnelle satisfait $\mathbb{P}$-p.s. aux théorèmes limites classiques : convergence monotone, convergence dominé, lemme de Fatou, qui doivent également être connus et que nous ne détaillerons pas ici.

4.3 Martingales à temps continu

Il s'agit principalement d'extensions de la théorie à temps discret.

4.3.1 Définitions

Définition 4.13. *Etant donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ on dira qu'un processus X à valeurs réelles sur cet espace, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-adapté et intégrable (c.à.d. $\forall t \in I$ $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$) est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-*

- *sous-martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s,\ \mathbb{P}-p.s.$$

- *sur-martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s,\ \mathbb{P}-p.s.$$

- *martingale si $\forall 0 \leq s < t \in I$*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s,\ \mathbb{P}-p.s.$$

Exemples : à titre d'exercice montrer que :

- Toute martingale est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.
- Pour toute v.a. Z intégrable le processus X définit par $X_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$, $\forall t \in I$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale.
- Soient X une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingale (resp. sous-martingale) et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante) telle que $\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t\in I}$ est intégrable alors $\varphi(X)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-sous-martingale.

4.3.2 Martingales du MBS

Ces exemples sont à connaitre car fondamentaux pour le calcul stochastique.

Proposition 4.14. *Soit W un $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-M.B.S. alors les processus qui suivent sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-martingales*

a. $W = (W_t)_{t\in I}$;

b. $(W_t^2 - t)_{t\in I}$;

c. $\left(\exp\left(\lambda W_t - \dfrac{\lambda^2 t}{2}\right)\right)_{t\in I}$.

La preuve est laissée en exercice.