

Recherche Opérationnelle 1A

Programmation Linéaire

Dualité

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Algorithme du simplexe révisé

Rappel : Étant donnés

- un programme linéaire (P) sous forme standard,
- une base réalisable J de (P) ,
- et sa forme standard (P') par rapport à J :

$$(P) \quad \begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned}$$

$$(P') \quad \begin{aligned} \hat{A} \cdot x &= \hat{b} \\ x &\geq 0 \\ \hat{c}^T \cdot x &= z(\max) - \hat{z}_0 \end{aligned}$$

- On a

- 1 $\hat{b} = (A^J)^{-1} \cdot b,$
- 2 $\pi^T = c_J^T \cdot (A^J)^{-1},$
- 3 $\hat{c}^T = c^T - c_J^T \cdot \hat{A} = c^T - c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot A = c^T - \pi^T \cdot A,$
- 4 $\hat{A}^s = (A^J)^{-1} \cdot A^s,$
- 5 $\hat{z}_0 = c^T \cdot \bar{x} = c_J^T \cdot \bar{x}_J = c_J^T \cdot \hat{b} = c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot b = \pi^T \cdot b.$

Introduction du dual

$$\begin{array}{ll} \text{Primal} & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \\ & c^T \cdot x = z(\max) \end{array}$$

On cherche une borne supérieure pour $z(\max)$.

Exemple

$$1x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$3x_1 - 1x_2 \leq 5$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

$$6x_1 + 4x_2 = z(\max)$$

On essaie de borner $6x_1 + 4x_2$ par une combinaison linéaire des inégalités.

Première tentative

- ❶ On voit que

$$6x_1 + 4x_2 \leq 6x_1 + 5x_2 = 3(1x_1 + 2x_2) + 1(3x_1 - 1x_2) \leq 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 14$$

- ❷ On sait maintenant que $z(\max) \leq 14$.

Deuxième tentative plus intelligente

- ❶ On voit que

$$6x_1 + 4x_2 \leq (y_1 + 3y_2)x_1 + (2y_1 - y_2)x_2 = y_1(1x_1 + 2x_2) + y_2(3x_1 - 1x_2) \\ \leq y_1 \cdot 3 + y_2 \cdot 5$$

- ❷ Pour que ce soit vrai il faut que y satisfasse :

$$6 \leq y_1 + 3y_2, 4 \leq 2y_1 - y_2, y_1, y_2 \geq 0.$$

- ❸ On sait maintenant que $z(\max) \leq 3y_1 + 5y_2$.

- ❹ Pour avoir la meilleure borne supérieure on minimisera $3y_1 + 5y_2$.

Définition

Primal

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 - 1x_2 &\leq 5 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ 6x_1 + 4x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} 1y_1 + 3y_2 &\geq 6 \\ 2y_1 - 1y_2 &\geq 4 \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \\ 3y_1 + 5y_2 &= w(\min) \end{aligned}$$

En général (forme canonique)

Primal

$$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} y^T \cdot A &\geq c^T \\ y &\geq 0 \\ y^T \cdot b &= w(\min) \end{aligned}$$

Borne supérieure

- 1 On essaie de borner $c^T \cdot x$ par une combinaison linéaire des inégalités.
$$c^T \cdot x \leq (y^T \cdot A) \cdot x = y^T \cdot (A \cdot x) \leq y^T \cdot b.$$
- 2 Pour que ce soit vrai il faut que y satisfasse :
$$c^T \leq y^T \cdot A \text{ et } y \geq 0.$$
- 3 On sait maintenant que $z(\max) \leq y^T \cdot b.$
- 4 Pour avoir la meilleure borne supérieure on minimisera $y^T \cdot b.$

En général (forme canonique)

Primal

$$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} y^T \cdot A &\geq c^T \\ y &\geq 0 \\ y^T \cdot b &= w(\min) \end{aligned}$$

Théorème faible de la dualité

Pour toutes solutions réalisables \bar{x} du primal et \bar{y} du dual, on a :

$$c^T \cdot \bar{x} \leq \bar{y}^T \cdot b.$$

Théorème

Le dual du dual est le primal.

Démonstration (forme canonique)

(P)	$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned}$	\rightarrow	(D)	$\begin{aligned} y^T \cdot A &\geq c^T \\ y &\geq 0 \\ y^T \cdot b &= w(\min) \end{aligned}$
	\uparrow			\downarrow
(D')	$\begin{aligned} u^T \cdot (-A^T) &\geq (-b^T) \\ u &\geq 0 \\ u^T \cdot (-c) &= w'(\min) \end{aligned}$	\leftarrow	(P')	$\begin{aligned} (-A^T) \cdot y &\leq (-c) \\ y &\geq 0 \\ (-b^T) \cdot y &= z'(\max) \end{aligned}$

En général

Primal

$$\begin{aligned}
 A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 &\leq b_1 \\
 A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 &= b_2 \\
 A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + A_{33} \cdot x_3 &\geq b_3 \\
 0 &\leq x_1, \quad \mathbb{R} \ni x_2, \quad 0 \geq x_3 \\
 c_1^T \cdot x_1 + c_2^T \cdot x_2 + c_3^T \cdot x_3 &= z(\max)
 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned}
 y_1^T \cdot A_{11} + y_2^T \cdot A_{21} + y_3^T \cdot A_{31} &\geq c_1^T \\
 y_1^T \cdot A_{12} + y_2^T \cdot A_{22} + y_3^T \cdot A_{32} &= c_2^T \\
 y_1^T \cdot A_{13} + y_2^T \cdot A_{23} + y_3^T \cdot A_{33} &\leq c_3^T \\
 y_1 &\geq 0, \quad y_2 \in \mathbb{R}, \quad y_3 \leq 0 \\
 y_1^T \cdot b_1 + y_2^T \cdot b_2 + y_3^T \cdot b_3 &= w(\min)
 \end{aligned}$$

Théorème fort de la dualité

$$\begin{array}{ll}\text{Primal} & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \\ & c^T \cdot x = z(\max)\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\text{Dual} & y^T \cdot A \geq c^T \\ & y^T \cdot b = w(\min)\end{array}$$

S'il existe une solution réalisable du primal et du dual, alors on a :

$$z(\max) = w(\min).$$

Théorème fort de la dualité

Démonstration (pour la forme standard)

- ❶ Par le Théorème faible de la dualité, pour toutes solutions réalisables \bar{x}' du primal et \bar{y}' du dual, on a
 - $c^T \cdot \bar{x}' \leq \bar{y}'^T \cdot b$,
 - donc $z(\max) \leq w(\min)$, et
 - en particulier $z(\max)$ est fini.
- ❷ simplexe révisé s'arrête puisque $\hat{c}^T \leq 0$ avec une solution optimale \bar{x} du primal,
 - $0 \geq \hat{c}^T = c^T - \pi^T \cdot A$ (par la formule du simplexe révisé)
 - π est donc une solution réalisable du dual.
- ❸ $z(\max) \leq w(\min) \leq \pi^T \cdot b = c^T \cdot \bar{x} = z(\max)$,
 - par 1, π est une solution réalisable du dual, $c^T \cdot \bar{x} = \pi^T \cdot b$ (par la formule du simplexe révisé), \bar{x} est une solution optimale du primal.
- ❹ Par 3 on a $z(\max) = w(\min)$.

Théorème des écarts complémentaires

Théorème (pour la forme canonique)

- ❶ Les solutions réalisables \bar{x} du primal et \bar{y} du dual sont optimales \iff
- ❷ $c^T \cdot \bar{x} = \bar{y}^T \cdot b$ (car $c^T \cdot \bar{x} \leq z(\max) = w(\min) \leq \bar{y}^T \cdot b$) \iff
- ❸ Les conditions des écarts complémentaires sont satisfaites :
 - (a) si $\bar{y}_i > 0$ alors $a_i \cdot \bar{x} = b_i$ \iff
si $a_i \cdot \bar{x} < b_i$ alors $\bar{y}_i = 0$ \iff
 $\bar{y}_i(a_i \cdot \bar{x} - b_i) = 0$,
 - (b) si $\bar{x}_j > 0$ alors $\bar{y}^T \cdot a^j = c_j$ \iff
si $\bar{y}^T \cdot a^j > c_j$ alors $\bar{x}_j = 0$ \iff
 $\bar{x}_j(\bar{y}^T \cdot a^j - c_j) = 0$.

Théorème des écarts complémentaires

Démonstration

$$\begin{aligned} c^T \cdot \bar{x} &= \\ \sum c_j \bar{x}_j &\leq \\ \sum (\bar{y}^T \cdot a^j) \bar{x}_j &= (\bar{y}^T \cdot A) \cdot \bar{x} = \bar{y}^T \cdot (A \cdot \bar{x}) = \sum \bar{y}_i (a_i \cdot \bar{x}) \\ &\leq \sum \bar{y}_i b_i \\ &= \bar{y}^T \cdot b. \end{aligned}$$

- \bar{x} et \bar{y} sont optimales \iff
- $c^T \cdot \bar{x} = \bar{y}^T \cdot b$ \iff
- on a égalité partout \iff
- $c_j \bar{x}_j = (\bar{y}^T \cdot a^j) \bar{x}_j$ pour tout j et $\bar{y}_i (a_i \cdot \bar{x}) = \bar{y}_i b_i$ pour tout i
- $(\bar{y}^T \cdot a^j - c_j) \bar{x}_j = 0$ pour tout j et $\bar{y}_i (a_i \cdot \bar{x} - b_i) = 0$ pour tout i .

Une solution optimale du dual

Remarque

- 1 Peut-on trouver une solution optimale du **dual** après l'exécution du simplexe sur le primal ?
- 2 On a vu dans la démonstration du théorème fort de la dualité que si J est une base optimale du primal alors $\pi^T = c_J^T \cdot (A^J)^{-1}$ est une solution optimale du dual.
- 3 Peut-on trouver π dans le dernier tableau ?
- 4 On sait que $\hat{c}^T = c^T - \pi^T \cdot A$, donc
 $\hat{c}_{J_1}^T = c_{J_1}^T - \pi^T \cdot A^{J_1} = 0 - \pi^T \cdot I = -\pi^T$.

A^{J_1}	I	b
$c_{J_1}^T$	0	

	$-\pi^T$	

Application de la dualité : Perturbation des données

$$\begin{array}{ll} A \cdot x \leq b \\ (P) \quad x \geq 0 \\ c^T \cdot x = z(\max) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A \cdot x \leq b + \varepsilon \\ (P_\varepsilon) \quad x \geq 0 \\ c^T \cdot x = z_\varepsilon(\max) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y^T \cdot A \geq c^T \\ (D) \quad y \geq 0 \\ b^T \cdot y = w(\min) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y^T \cdot A \geq c^T \\ (D_\varepsilon) \quad y \geq 0 \\ (b + \varepsilon)^T \cdot y = w_\varepsilon(\min) \end{array}$$

- Qu'est-ce qui se passe si l'on perturbe un peu le vecteur b ?
- Peut-on dire quelque chose sur le changement de la fonction objectif ?
- Le polyèdre a changé, on ne voit pas comment calculer $z_\varepsilon(\max)$.
- Utilisons la dualité ! Le polyèdre du dual n'a pas changé.
- La solution optimale \bar{y} du (D) ne change pas pour ε petit.

Application de la dualité : Perturbation des données

$$\begin{aligned} (P) \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \\ & c^T \cdot x = z(\max) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_\varepsilon) \quad & A \cdot x \leq b + \varepsilon \\ & x \geq 0 \\ & c^T \cdot x = z_\varepsilon(\max) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D) \quad & y^T \cdot A \geq c^T \\ & y \geq 0 \\ & b^T \cdot y = w(\min) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_\varepsilon) \quad & y^T \cdot A \geq c^T \\ & y \geq 0 \\ & (b + \varepsilon)^T \cdot y = w_\varepsilon(\min) \end{aligned}$$

- On peut calculer le changement de la fonction objectif en utilisant le théorème fort de la dualité où \bar{y} est une solution optimale du (D) et du (D_ε) :

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(\max) &= w_\varepsilon(\min) = (b + \varepsilon)^T \cdot \bar{y} = b^T \cdot \bar{y} + \varepsilon^T \cdot \bar{y} \\ &= w(\min) + \varepsilon^T \cdot \bar{y} \\ &= z(\max) + \varepsilon^T \cdot \bar{y}. \end{aligned}$$

Application de la dualité : Couplages

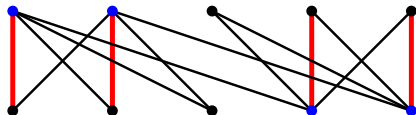
Programme Linéaire (Primal)

Le problème de trouver un couplage de cardinal maximum dans un graphe biparti $G = (U, V; E)$ peut être écrit comme un programme linéaire.

$$\sum_{e \in \delta(w)} x(e) \leq 1 \quad \forall w \in U \cup V,$$

$$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E,$$

$$\sum_{e \in E} x(e) = z(\max).$$



Application de la dualité : Couplages

Programme Linéaire (Primal) pour un graphe **biparti** $G = (U, V; E)$

$$\begin{aligned}\sum_{e \in \delta(w)} x(e) &\leq 1 \quad \forall w \in U \cup V, \\ x(e) &\geq 0 \quad \forall e \in E, \\ \sum_{e \in E} x(e) &= z(\max).\end{aligned}$$

Remarques

- 1 Le vecteur caractéristique d'un couplage de G est une solution réalisable du (P) .
- 2 Un point extrême du polyèdre du (P) est le vecteur caractéristique d'un couplage de G car le polyèdre du (P) est entier par la règle de Cramer et puisque chaque sous-matrice carrée de la matrice d'incidence d'un graphe **biparti** est de déterminant 0, 1 ou -1 .

Le dual du (P)

$$(D) \quad \begin{aligned} y(u) + y(v) &\geq 1 \quad \forall uv \in E, \\ y(w) &\geq 0 \quad \forall w \in U \cup V, \\ \sum_{w \in U \cup V} y(w) &= w(\min). \end{aligned}$$

Remarques

- 1 Le vecteur caractéristique d'un transversal de G est une solution réalisable du (D) .
- 2 Un point extrême du polyèdre du (D) est le vecteur caractéristique d'un transversal de G car le polyèdre du (D) est entier par la règle de Cramer et puisque chaque sous-matrice carrée de la matrice d'incidence d'un graphe **biparti** est de déterminant $0, 1$ ou -1 .

Théorème (König)

Dans un graphe **biparti**,

- le cardinal maximum d'un couplage =
- la valeur optimale du (P) =
- la valeur optimale du (D) =
- le cardinal minimum d'un transversal.
 - À l'époque, la programmation linéaire n'existait pas !