Exercice 1

jeudi 13 avril 2017 09:54

Machine A - $X \sim \mathcal{N}(4, 0.1^2)$ $(\sigma_0 = 0.1)$
Machine B - $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
Résultats empiriques : $\bar{x}_n = 4, s'_n = 0.08$
H_0:"$\sigma > \sigma_0$", H_1:"$\sigma \leq \sigma_0$"
(Permet de s'assurer qu'on achète pas une machine moins performante que l'ancienne)
D'après le poly du cours, l'intervalle critique est :

$$W = \left\{ \frac{(n-1){s'_n}^2}{\sigma_0^2} < F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha) \right\}$$

CF intervalle de confiance :

$$\sigma_0^2 \notin \left] -\infty, \frac{(n-1){S'_n}^2}{F^{-1}(\alpha)} \right[\Leftrightarrow \frac{(n-1){S'_n}^2}{\sigma_0^2} < F^{-1}(\alpha)$$

En appliquant numériquement :

$$W = \left\{ 15.36 < F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha) \right\}$$

Or, pour $\alpha = 5\%$, on obtient $F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha) = 13.85$
Donc, au seuil 5%, on décide H_0 : "$\sigma \geq \sigma_0$" (On a 95% de chance d'avoir raison en décidant H_0)
Mais 15,36 $\approx 15.66 = F^{-1}(0.9)$, donc la p-valeur est à peu près 0.1

Exercice 3

jeudi 13 avril 2017 11:05

$(X_i)_{i=1,\dots,n} \sim \exp \lambda$, λ inconnue.
H_0:"$\lambda > \lambda_0$", H_1:"$\lambda < \lambda_0$"
$(1/\hat{\lambda}_n \geq 1/\lambda_0 =$ 10 milliers d'heures)

Méthode 1 : intervalle de confiance

$W = \{\hat{\theta}_n < l_\alpha\}$ où $l_\alpha < \theta_0$ si $\alpha < 5\%$
De manière générale, $X_i \sim P_\theta, H_1$: "$\theta \leq \theta_0$"

On a vu précédemment que la fonction pivotale est :

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$$

On a vérifié que l'espérance et la variance de cette loi ne dépend pas de λ.

$$\alpha = \sup_{\lambda \geq \lambda_0} P_\lambda \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} < l_\alpha \right)$$

$$P\left(n < \sum_{i=1}^{n} X_i l_\alpha\right) = P\left(\frac{2\lambda n}{l_\alpha} < 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= 1 - P\left(2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{2\lambda_n}{l_\alpha}\right)$$

$$= 1 - F_{\lambda^2_{2n}}\left(\frac{2\lambda n}{l_\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 - F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{2\lambda_0 n}{l_\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow l_\alpha = \frac{2\lambda_0 n}{F^{-1}_{\lambda^2_{2n}}(1-\alpha)}$$

$$W = \left\{\hat{\lambda}_n < \frac{2n\lambda_0}{F^{-1}(1-\alpha)}\right\} = \left\{F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(1-\alpha) < \frac{2n\lambda_0}{\hat{\lambda}_n}\right\}$$

Intervalle de confiance : on utilise celui de la forme $]-\infty, a_2']$

$$\lambda_0 \notin \left]0, \frac{F^{-1}(1-\alpha)}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right[\Leftrightarrow H_1 \Leftrightarrow \lambda_0 > \frac{F^{-1}(1-\alpha)}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \Leftrightarrow W$$

p-valeur $\approx 0{,}006$ (avec R), donc on décide H_1 (les nouveaux transistors sont meilleurs)