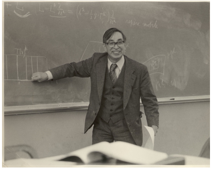
INTRODUCTION AUX PRODUITS DÉRIVÉS

PAGE DU COURS SUR CHAMILO

Hervé Guiol (IPS LJK)

Wolfgang Döblin
1915-1940



Kiyoshi Itō
1915-2008

Plan du cours d'IPD

1. Vecteurs Gaussiens.
2. Généralités sur les processus. Mouvement Brownien Standard.
3. Premières propriétés du MBS.
4. Martingales à temps continu : filtrations, temps d'arrêt.
5. Martingales (suite) : martingales du Mouvement Brownien, théorème d'arrêt et applications au Mouvement Brownien.
6. Intégrale de Wiener.
7. Intégrale d'Itō : définitions et construction. Processus d'Itō. Variation quadratique.
8. **Calcul d'Itō : formules d'Itō. Représentation des martingales Browniennes.**
9. Formule de Cameron-Martin.
10. Equation Différentielle Stochastique. Théorèmes d'Itō.
11. Modèle de Black-Scholes-Merton : stratégies, prix et portefeuille de couverture.

OUTLINE

FORMULES D'ITÔ

THÉORÈME 6.1

Soit W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S.

1. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ on a $\mathbb{P}$-presque sûrement $\forall t \geq 0$

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds$$

2. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ on a $\mathbb{P}$-presque sûrement $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t, W_t) = f(0, W_0) \quad &+ \quad \int_0^t f_t'(s, W_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, W_s)\, dW_s \\ &+ \quad \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, W_s)\, ds \end{aligned}$$

Formules d'Itô : principe de la preuve

On montre le cas homogène (1), la preuve est similaire pour le cas (2).
On va appliquer la formule de Taylor à f :
Étape1 : f à support compact.
Pour tous $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ tels que $\sup_k (t_k - t_{k-1}) \to 0$ quand $n \to \infty$

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{k=1}^{n} (f(W_{t_k}) - f(W_{t_{k-1}})) = \sum_{k=1}^{n} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) f'(W_{t_{k-1}}) \tag{1}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 f''(W_{t_{k-1}}) \tag{2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k}) \tag{3}$$

où $h(x, y)$ fonction uniformément continue à support compact et telle que $\lim_{y \to x} h(x, y) = 0$.

- Pour (1) on observe que $s \mapsto f'(W_s)$ est continue et adaptée et

$$\int_0^t \mathbb{E}[(f'(W_s))^2]\, ds = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} (f'(x))^2 e^{-x^2/(2s)}\, dx\, ds < \infty$$

donc $(f'(W_s))_{0\leq s\leq t} \in \Pi_2^2([0,t])$ et donc p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) f'(W_{t_{k-1}}) = \int_0^t f'(W_s)\, dW_s$$

- Pour (2) on commence par remarquer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f''(W_{t_{k-1}}) = \int_0^t f''(W_s)\, ds, \text{ et}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n \left((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\right) f''(W_{t_{k-1}})\right)^2\right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\left((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\right)^2 f''(W_{t_{k-1}})^2\right]$$

FORMULES D'ITÔ : PRINCIPE DE LA PREUVE

Puis
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left((W_{t_k}-W_{t_{k-1}})^2-(t_k-t_{k-1})\right)^2 f''(W_{t_{k-1}})^2\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left((W_{t_k}-W_{t_{k-1}})^2-(t_k-t_{k-1})\right)^2 |\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] f''(W_{t_{k-1}})^2\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left((W_{t_k}-W_{t_{k-1}})^2-(t_k-t_{k-1})\right)^2\right] f''(W_{t_{k-1}})^2\right]\\
=&\ 2(t_k-t_{k-1})^2\mathbb{E}\left[f''(W_{t_{k-1}})^2\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } 0 \ &\leq\ \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n\left((W_{t_k}-W_{t_{k-1}})^2-(t_k-t_{k-1})\right)f''(W_{t_{k-1}})\right)^2\right]\\
&\leq\ 2\sup_k(t_k-t_{k-1})\sup_x(f''(x))^2 t \to 0 \text{ quand } n\to\infty
\end{aligned}$$

qui entraine dans $L^2(\Omega)$ (et p.s. sur une sous suite)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n (W_{t_k}-W_{t_{k-1}})^2 f''(W_{t_{k-1}}) = \int_0^t f''(W_s)\,ds$$

- Pour (3) on observe que

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=1}^{n}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k})\right| \\ \leq \quad & \sup_k |h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k})| \sum_{k=1}^{n}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \\ \leq \quad & \sup_k |h(W_{t_{k-1}}, W_{t_k})| t \to 0 \text{ p.s. quand } n \to \infty \end{aligned}$$

- Ainsi on a montré que à $t \geq 0$ fixé on a p.s.

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds$$

Par suite on a le résultat trajectoriellement pour tout $t \in \mathbb{Q}^+$ et par continuité sur tout $\mathbb{R}^+$.

Formules d'Itô : principe de la preuve

Étape 2 : si f n'est pas à support compact.
On introduit les temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t : |W_t| \geq n\}$ et les fonctions f_n à support $[-(n+1), n+1]$ et qui coïncident avec f sur $[-n, n]$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_n(W_t) - f_n(W_0) &= \int_0^t f_n'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(W_s)\, ds \text{ p.s.} \\
\forall t \leq \tau_n,\ f(W_t) - f(W_0) &= \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure car $\tau_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Processus d'Itô

Définition 6.2

Soit W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. On appelle processus d'Itô tout processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$$

où X_0 v.a. $\mathcal{F}_0$ mesurable, $K = (K_t)_{t\geq 0}$ et $H = (H_t)_{t\geq 0}$ deux processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptés vérifiant $\forall t \geq 0$

$$\int_0^t (|K_s| + H_s^2)\, ds < \infty$$

Proposition 6.3

La décomposition d'un processus d'Itô est unique presque sûrement.

Intégration par les processus d'Itô

Définition 6.4

Soit X un processus d'Itô de décomposition

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s$$

Si $L = (L_t)_{t \geq 0}$ est un processus càd-làg $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adapté vérifiant

$$\int_0^T \left(|L_s K_s| + (L_s H_s)^2 \right) ds < \infty$$

alors on peut définir l'intégrale stochastique de L par X comme

$$\int_0^T L_s \, dX_s = \int_0^T L_s K_s \, ds + \int_0^T L_s H_s \, dW_s.$$

Martingales à variations finies

Proposition 6.6

Toute martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues et à variations finies est constante.

On suppose $M_0 = 0$ et on note $V(M)_t$ sa variation sur $[0, t]$

$$V(M)_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| < +\infty \text{ p.s.}$$

on définit les T.A. $\tau_k = \inf\{t > 0 : V(M)_t \geq k\}$ on a $\tau_k \nearrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M^2_{t\wedge\tau_k}) &= \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} \mathbb{E}(M^2_{t_i\wedge\tau_k} - M^2_{t_{i-1}\wedge\tau_k}) = \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} \mathbb{E}(M_{t_i\wedge\tau_k} - M_{t_{i-1}\wedge\tau_k})^2 \\
&\leq \mathbb{E}\left(\sup_{t_i\in\Delta_n(t)} |M_{t_i\wedge\tau_k} - M_{t_{i-1}\wedge\tau_k}| V(M)_{t\wedge\tau_k}\right) \\
&\leq k\mathbb{E}\left(\sup_{t_i\in\Delta_n(t)} |M_{t_i\wedge\tau_k} - M_{t_{i-1}\wedge\tau_k}|\right) \to 0 \text{ quand } n\to\infty
\end{aligned}$$

Ce qui entraine $M_{t\wedge\tau_k} = 0$ pour tous k.

Variation Quadratique

Définition 6.7

On définit la variation quadratique d'un processus X comme le processus $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$\langle X \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{t_i \in \Delta_n(t)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

où $\Delta_n(t) = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{t_i \in \Delta_n(t)} (t_i - t_{i-1}) = 0$.

Proposition 6.8

- Si X est à trajectoires continues alors $\langle X \rangle$ l'est aussi.
- Si $X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s$ est un processus d'Itô alors $\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$.
- Si M est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale de carré intégrable, à trajectoires continues, alors $\langle M \rangle$ est l'unique processus croissant, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-adapté, à trajectoires continues, valant 0 en $t = 0$ tel que $M^2 - \langle M \rangle$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale.

Variation Quadratique

Exemple

Si W est un M.B.S. on a pour tout $t \geq 0$, $\langle W \rangle_t = t$.

Proposition 6.9

1. Tout processus à trajectoires continues et à variation finie est à variation quadratique nulle.
2. Soit X un processus de variation quadratique $\langle X \rangle$ alors pour toute fonction continue f on a avec probabilité 1

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{t_i \in \Delta_n(t)} f(t_{i-1})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = \int_0^t f(s)\, d\langle X \rangle_s$$

Théorème 6.10

Soit X un processus d'Itô de décomposition

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$$

1. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ on a presque sûrement $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) H_s\, dW_s + \int_0^t \left(f'(X_s)K_s + \frac{1}{2} f''(X_s) H_s^2 \right) ds \end{aligned}$$

Formule d'Itô pour les processus d'Itô

Théorème 6.10

2. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ on a presque sûrement $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X \rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) H_s\, dW_s \\ &\quad + \int_0^t \left(f'_t(s, X_s) + f'_x(s, X_s) K_s + \frac{1}{2} f''_{xx}(s, X_s) H_s^2 \right) ds \end{aligned}$$

Représentation des Martingales Browniennes

Soit $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un M.B.S. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on considère $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration naturelle complétée i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$ telle que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Théorème

Pour toute $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ il existe un processus $H \in \Pi_3^2([0, T])$ tel que $\forall t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dW_s = \mathbb{E}(M_T) + \int_0^t H_s\, dW_s.$$

Si de plus M est de carré intégrable alors $H \in \Pi_2^2([0, T])$.

Exemple

Pour toute variable aléatoire Z, $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable il existe H, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-adapté, vérifiant $\int_0^T \mathbb{E}(H_s^2)\, ds < +\infty$ tel que

$$\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(Z) + \int_0^t H_s\, dW_s.$$

Covariation Quadratique

Définition 6.12

Pour deux processus X et Y on définit leur covariation quadratique comme le processus $\langle X, Y \rangle = (\langle X, Y \rangle_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{t_i \in \Delta_n(t)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})$$

où $\Delta_n(t) = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{t_i \in \Delta_n(t)} (t_i - t_{i-1}) = 0$.

Si X et Y sont à trajectoires continues alors $\langle X, Y \rangle$ l'est aussi.

Proposition 6.13

- On a $\langle X, X \rangle = \langle X \rangle$;
- Identité de polarisation : $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle)$;
- L'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique ;
- $t \mapsto \langle X, Y \rangle_t$ est à variations finies.

Covariation Quadratique

Propriétés

- Si M et N sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingales de carrés intégrables, à trajectoires continues, alors $\langle M, N\rangle$ est l'unique processus à variations finies, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté, à trajectoires continues, valant 0 en $t = 0$ tel que $MN - \langle M, N\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.
- Si X est à variation finie et Y continu alors $\langle X, Y\rangle = 0$;
- Si X et Y sont deux processus indépendants alors $\langle X, Y\rangle = 0$.
- Si $X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$ et $Y_t = Y_0 + \int_0^t L_s\, ds + \int_0^t R_s\, dW_s$ sont deux processus d'Itô alors

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s R_s\, ds$$

Formule d'Itô bi-dimensionnelle

Proposition 6.15

Soient X et Y deux processus de covariation quadratique $\langle X, Y\rangle$ alors pour toute fonction continue f on a avec probabilité 1

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\Delta_n(t)} f(t_{i-1})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) = \int_0^t f(s)\, d\langle X, Y\rangle_s$$

Théorème 6.16

Soient X et Y deux processus à trajectoires continues et à variations quadratiques finies. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ on a presque sûrement $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t, X_t, Y_t) \quad &= \quad f(0, X_0, Y_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s, Y_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, X_s, Y_s)\, dX_s \\ &+ \int_0^t f_y'(s, X_s, Y_s)\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{yy}''(s, X_s)\, d\langle Y\rangle_s + \int_0^t f_{xy}''(s, X_s)\, d\langle X, Y\rangle_s \end{aligned}$$

Formule d'intégration par partie

Corollaire 6.17

Soient X et Y deux processus à trajectoires continues et à variations quadratiques finies.

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s \, dX_s + \int_0^t X_s \, dY_s + \langle X, Y \rangle_t$$