Examen de IPD 2018-2019, Ensimag 2A IF

H. Guiol

21/05/2019 9h00-11h00

Feuille A4 manuscrite autorisée; tout autre document, ordinateur, calculette, portable ou objet communicant interdit.
Le sujet comporte une page. Toute réponse doit être suffisamment et clairement justifiée.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre : il convient cependant d'indiquer chaque fois très clairement quelle question est traitée.
Le barème est indicatif et pourra être sujet à modifications.

Exercice 1. (10 points)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{0 \leq t}$ un mouvement brownien standard. On se place dans les conditions habituelles et on notera $(\mathcal{F}_t)_{T \geq t \geq 0}$ la filtration naturelle (complétée) de B, on supposera de plus que que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
On rappelle que dans ces conditions $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale ($\{\emptyset, \Omega\}$) complétée par tous les $\mathbb{P}$-négligeables.

1. Soit Z une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable et de carré intégrable, on note $m = \mathbb{E}(Z)$.
On note $M = (M_t)_{T \geq t \geq 0}$ le processus définit par $M_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$ pour tout $T \geq t \geq 0$.
1.1. Que vaut M_0?
1.2. Montrer que M est une martingale de carré intégrable.
1.3. Justifier qu'il existe un processus H dont on précisera les propriétés tel que $M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$.
1.4. Quel est $\langle M \rangle_t$?
2. A partir d'ici on suppose que $Z = \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma B_T)$ où $r \in \mathbb{R}$.
2.1. Calculer explicitement M_t, $\mathbb{E}(M_t)$ et $\mathbb{E}(M_t^2)$.
2.2. Ecrire la décomposition d'Itô de M.
2.3. Calculer $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.
2.4. On pose $N_t = M_t^2 - \langle M \rangle_t$, quelle est la nature du processus $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$?
2.5. Calculer $\mathbb{E}(N_t)$ et retrouver $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.
2.6. Trouver la décomposition d'Itô de N_t et en déduire $\langle N \rangle_t$.

Exercice 2. (10 points)
Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-M.B.S. et $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{*,+}$ des fonctions déterministes continues sur $[0, T]$. On considère le processus S défini pour tout $t \in [0, T]$

$$S_t = s_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) \, ds + \int_0^t \sigma(s) \, dW_s \right)$$

où $s_0 > 0$ est une constante.
(a) Quelle est la loi de S_t? (On précisera en détail la loi de $\log(S_t)$).
(b) Trouver l'équation différentielle satisfaite par le processus $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$.
(c) Montrer qu'il existe $\widetilde{W}$ un $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-M.B.S sous une probabilité $\mathbb{Q}_T$ que l'on précisera tel que

$$dS_t = \sigma(t) S_t \, d\widetilde{W}_t$$

(d) En déduire que S est une martingale sous $\mathbb{Q}_T$. Donner $\langle S \rangle_t$.