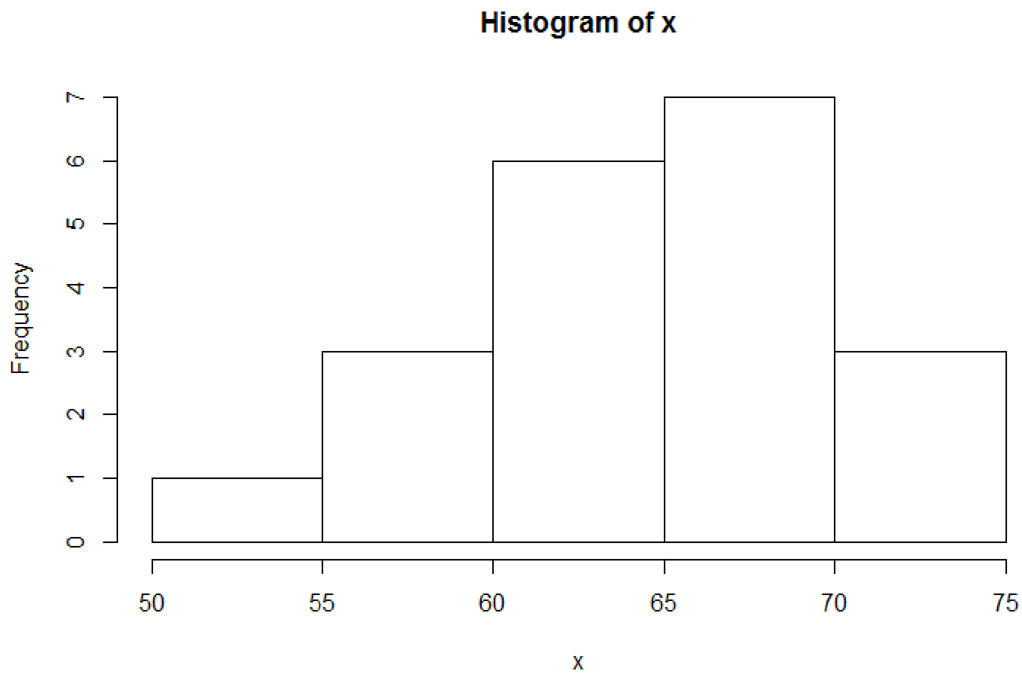
Exercice 1

jeudi 2 mars 2017 10:06

1) En R :

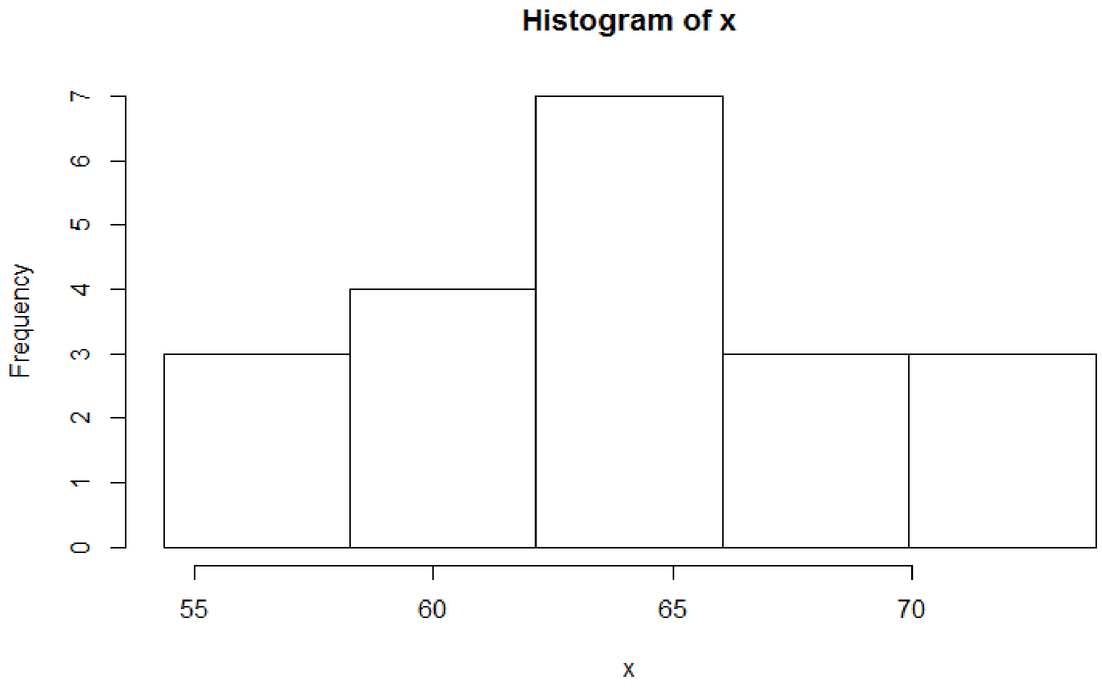
```
> x=c(54.8, 55.4, 57.7, 59.6, 60.1, 61.2, 62.0, 63.1,
63.5, 64.2, 65.2, 65.4, 65.9, 66.0, 67.6, 68. ....
[TRUNCATED]
> summary(x)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
  54.80   60.92   64.70   64.24   67.72   73.40 
```

2) L'appel de `hist(x, breaks=6)` donne :



L'algorithme suivant affiche l'histogramme respectant la loi de Sturges :

```
x=c(54.8, 55.4, 57.7, 59.6, 60.1, 61.2, 62.0, 63.1,
63.5, 64.2, 65.2, 65.4, 65.9, 66.0, 67.6, 68.1, 69.5,
70.6, 71.5, 73.4)
n=length(x)
e=max(x)-min(x)
a0=min(x)-0.025*e
a5=max(x)+0.025*e
hist(x, breaks=seq(a0, a5, length.out=6))
```

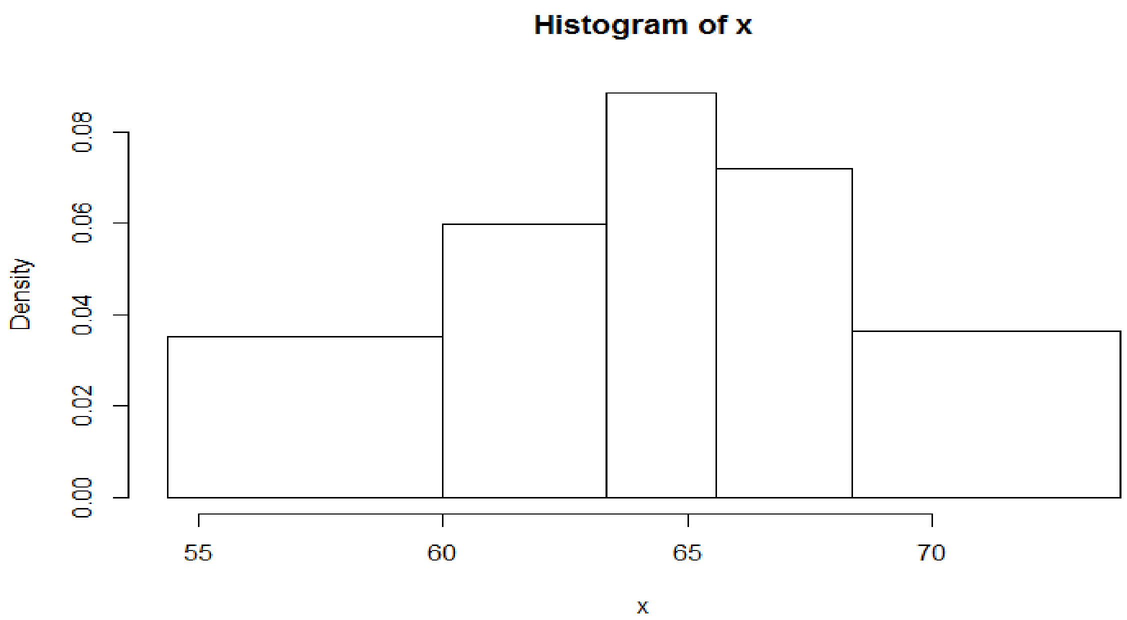


Pour l'histogramme à même effectifs, on change la séquence en argument de `breaks`. On utilise la fonction `quantile` qui donne:

```
> quantile(x, seq(0.2, 0.8, by=0.2))
  20%   40%   60%   80% 
60.00 63.34 65.60 68.38
```

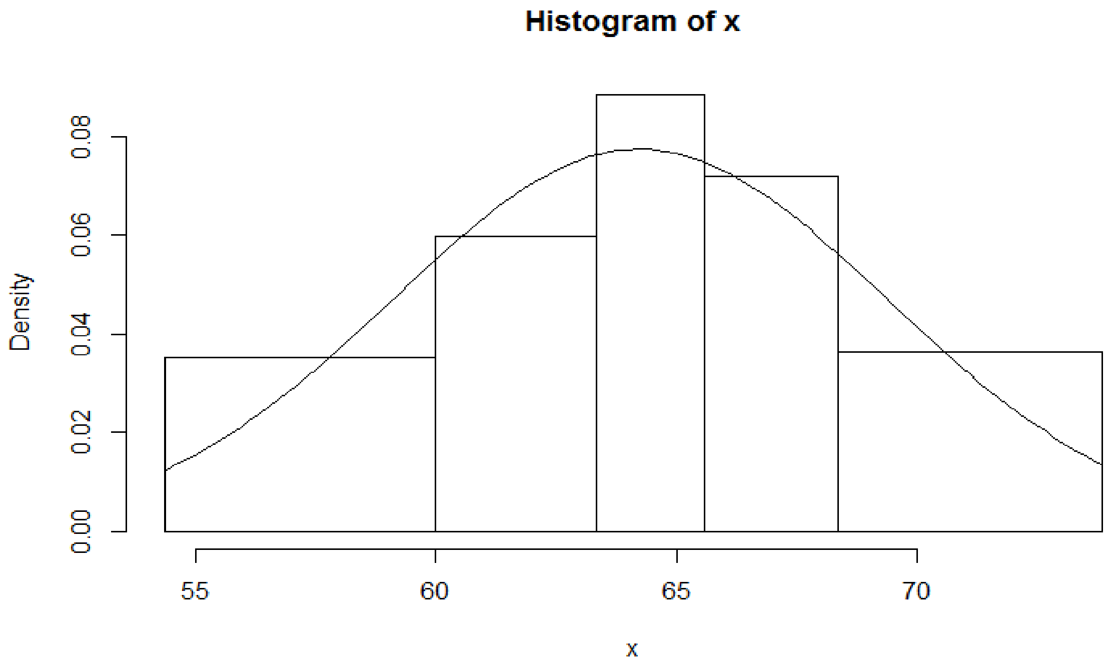
Ainsi, on obtient le graphe à mêmes effectifs en entrant :

```
> hist(x, breaks=c(a0, quantile(x, seq(0.2, 0.8, 
by=0.2)), a5))
```

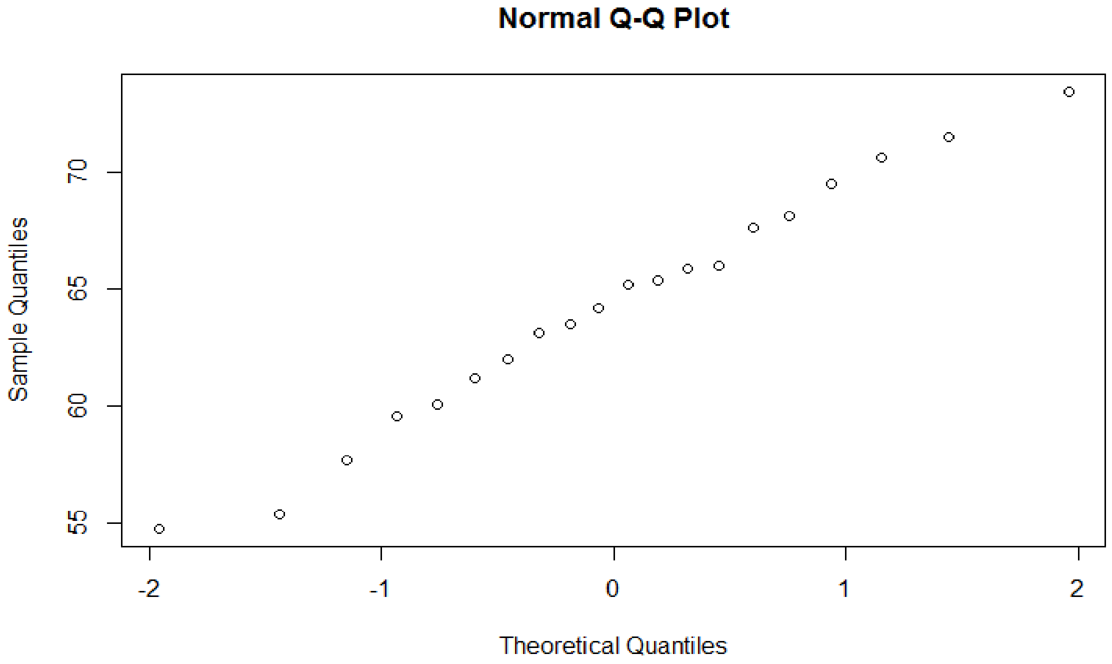


Traçons maintenant la courbe de la loi normale de paramètres $m = \text{moyenne}(x), \sigma = \text{ecart-type}(x)$:

```
abs = seq(a0, a5, length.out = 100)
ord = dnorm(abs, mean(x), sd(x))
lines(abs, ord)
```



Pour vérifier l'approximation par une loi normale, on tape :
`qqnorm(x)`



3) a)

```
> mean(x)
[1] 64.24
> var(x)
[1] 26.51832
```

b) On a : $P(X > 70) = 1 - P(X \leq 70) = 1 - F_X(70)$
La fonction de répartition de la loi normale est donnée par pnorm.

```
> 1 - pnorm(70, mean(x), sd(x))
[1] 0.1316693
```

On obtient $P(X > 70) \approx 0{,}132$
De même, on obtient $P(X > 74) \approx 0{,}029$

c) On utilise cette fois qnorm :

```
> qnorm(0.9, mean(x), sd(x))
[1] 70.83947
```

Ainsi, il faut taxer les voitures à partir de 70.839 décibels pour taxer les 10% des véhicules les plus bruyants

Exercice 2

jeudi 9 mars 2017 10:06

1) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des réalisations de $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes et tidentiquement distribuées de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ inconnue.

Estimateur de la méthode des moments :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

En effet, on a $E[X_i] = \lambda$, donc, $T_n = \overline{X_n}$

Cet estimateur est sans biais et est convergent, à vitesse :

$$\frac{\mathrm{var}_\lambda(X)}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

Maximum de vraisemblance :

$$\mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\lambda) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

$$\Rightarrow \ln \mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = \sum_{i=1}^{n}(-\lambda + x_i \ln \lambda - \ln x_i!)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\lambda} \ln \mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\lambda} \ln P_\lambda(X_i = x_i) = -n + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln \mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X_n}$$

Estimateur sans biais convergent.

Quantité d'information de Fischer :

$$\operatorname{var}_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)\right)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)\right)$$

$$=n\operatorname{var}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\mathcal{L}_X(\lambda)\right)$$

On instancie x_i avec X_i dans l'équation ci-dessus :

$$\operatorname{var}\left(\text{-}n+\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}_\lambda(X_i)=\frac{n\lambda}{\lambda^2}=\frac{n}{\lambda}=I_n(\lambda)$$

Par l'inégalité de Cramer-Rao ($\widehat{\lambda_n}$ est ESBCM), tout ESB de λ a une variance supérieure ou égale à :

$$\frac{1}{I_n(\lambda)}=\frac{\lambda}{n}=\operatorname{var}(\lambda n)$$

Exercice 3

jeudi 9 mars 2017 10:56

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$ IID de loi $\mathcal{L}(\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ inconnu.
$E_\theta[X] = \theta$ (Poser $Y = X - \theta$, montrer que f_Y est paire, en déduire $E[Y] - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y f_Y(y)}_{\text{impaire}} dy = 0 \Rightarrow$

$E[X] = \theta$)
Cf. Fiche 1, exercice 1

EMM :
$\tilde{\theta}_n = \bar{X}_n$: ESB, convergent à vitesse $\frac{\operatorname{var} X}{n} = \frac{2}{n}$

EMV :

$$\ln \mathcal{L}_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = -n \ln 2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta|$$

Cette fonction est affine par morceaux. Il y a des points anguleux en les x_i (où la pente change).