Examen du 22 Mai 2012

Durée : 3h.

Les seuls documents autorisés sont les notes du cours et des travaux dirigés de méthodes numériques. Les calculatrices sont interdites.

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte pour l'évaluation des copies.

Méthode itérative de Kacmarz

On étudie dans ce problème la méthode des projections de Kacmarz pour la résolution de systèmes linéaires, et son lien avec la méthode de Gauss-Seidel.

Partie I : résultats préliminaires

---

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x^T y = 0$ (on note x^T le vecteur ligne transposé du vecteur x). Montrer l'égalité de Pythagore

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$$

($\| \ \|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).

2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$. On considère l'hyperplan affine H défini par

$$H = \{z \in \mathbb{R}^n : u^T z = \alpha\}.$$

Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$, on note y le projeté orthogonal de x sur H. Montrer que

$$y = (I - u\,u^T)\,x + \alpha\,u.$$

Faire un schéma représentant $H, \alpha\,u, x, y$ lorsque $n = 2$.

3. En déduire que la matrice de projection orthogonale sur l'hyperplan $u^\perp$ (i.e. sur l'hyperplan orthogonal à u) s'écrit $M = I - u\,u^T$.

4. Montrer que $\|M\|_2 = 1$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \notin u^\perp$ on a $\|Mx\|_2 < \|x\|_2$ (utiliser l'égalité de Pythagore).

N.B. On rappelle la définition de la norme matricielle induite $\|M\|_2 = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2}$.

Partie II : méthode de Kacmarz

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. On note $\bar{x}$ la solution du système $Ax = b$.

Pour $i = 1, \dots, n$, on note a_i^T les lignes de A ($a_i \in \mathbb{R}^n$ est donc un vecteur colonne) et β_i les composantes de b. On définit

$$u_i = \frac{1}{\|a_i\|_2} a_i, \quad \alpha_i = \frac{\beta_i}{\|a_i\|_2}.$$

5. Montrer que $\bar{x}$ est l'intersection des n hyperplans affines :

$$H_i = \{z \in \mathbb{R}^n : u_i^T z = \alpha_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Partant de $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, la méthode itérative de Kacmarz consiste à :

- projeter orthogonalement x^0 sur H_1, ce qui définit x^1;
- projeter orthogonalement x^1 sur H_2, ce qui définit x^2;
- etc
- projeter orthogonalement x^{n-1} sur H_n, ce qui définit x^n;
- et à recommencer (on projette x^n sur H_1 etc).

D'après la question **2.**, la suite $(x^r)_{r\geq 0}$ est alors déterminée par la relation de récurrence

$$x^{r+1} = \left(I - u_i u_i^T\right) x^r + \alpha_i u_i \quad \text{avec } i = r+1 \text{ modulo } n$$

(on rappelle que $i = j$ modulo n si et seulement si $i - j$ est multiple de n).

6. Donner le coût (en nombre d'opérations arithmétiques élémentaires $+, -, \star, /$) d'une itération $x^r \mapsto x^{r+1}$, en fonction du nombre de composantes non nulles de u_i.

7. Dans le cas $n = 2$, faire un schéma représentant $\bar{x}, H_1, H_2$ et la suite $(x^r)_{r\geq 0}$.

Partie III : étude de convergence

On note $\varepsilon^r = x^r - \bar{x}$ l'erreur commise à la $r$ième itération, et on introduit les matrices de taille n

$$M_i = I - u_i u_i^T, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$T = M_n\, M_{n-1} \cdots M_1.$$

8. Montrer que

$$\varepsilon^{r+1} = M_i\, \varepsilon^r \qquad \text{avec } r+1 = i \text{ modulo } n.$$

9. En déduire que $\|\varepsilon^{r+1}\|_2 \leq \|\varepsilon^r\|_2$, et que l'inégalité est stricte si et seulement si $\varepsilon^r \notin u_i^\perp$ avec $r+1 = i$ modulo n.

10. Montrer que les conditions suivantes impliquent $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{rl} x & \text{est orthogonal à } u_1, \\ M_1 x & \text{est orthogonal à } u_2, \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ M_{n-1} \cdots M_1 x & \text{est orthogonal à } u_n. \end{array}\right\}$$

11. En déduire que $\|T\|_2 < 1$.

12. Montrer que $\|\varepsilon^{kn}\|_2 \leq \|T\|_2^k\, \|\varepsilon^0\|_2$ pour tout $k \geq 1$. En déduire la convergence de la méthode de Kacmarz.

13. Lorsque la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est orthonormée, montrer que la méthode de Kacmarz converge en n itérations au plus (on pourra utiliser la question **3.**). Que vaut A^{-1} dans ce cas particulier ?

Partie IV : lien avec la méthode de Gauss-Seidel

On considère le système

$$AA^T z = b. \tag{1}$$

Un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^n$ étant fixé, on note $(z^p)_{p\geq 0}$ la suite des itérés de la méthode de Gauss-Seidel appliquée à (1) obtenue pour $z^0 = (A^T)^{-1} x^0$. On note z_i^p les composantes de z^p et on définit $\zeta^r \in \mathbb{R}^n$ de la manière suivante pour tout entier $r \geq 0$

$$\zeta^0 = z^0, \quad \zeta^{pn+q} = (\, z_1^{p+1}, z_2^{p+1}, \ldots, z_q^{p+1}, z_{q+1}^p, z_{q+2}^p, \ldots, z_n^p)^T \text{ pour tout } p \geq 0,\ 1 \leq q \leq n.$$

La suite $(\zeta^r)_{r\geq 0}$ est donc la suite des itérés de la méthode de Gauss-Seidel *actualisés composante par composante.*

14. Ecrire la relation de récurrence vérifiée par les vecteurs ζ^r.

15. On note $(x^r)_{r\geq 0}$ la suite correspondant à la méthode de Kacmarz. Montrer que $x^r = A^T \zeta^r$ pour tout $r \geq 0$.

16. En déduire une seconde preuve de la convergence de la méthode de Kacmarz.