TD

PSAF

PSAF- Feuille d'exercices 1

Exercice 1.

1) Soit E un ensemble et $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus de parties de E (l'ensemble d'indices I peut être fini, infini dénombrable ou même infini non dénombrable, et pour tout $i \in I$ le sous-ensemble $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{P}(E)$ est une tribu).

Montrer que

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$$

est une tribu.

2) Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{P}(E)$ (en particulier $\mathcal{C}$ n'est pas nécessairement une tribu). Se servir de 1) pour montrer qu'il existe une plus petite tribu qui contient $\mathcal{C}$ (celle qu'on a noté $\sigma(\mathcal{C})$ dans le cours, on est donc en train de justifier son existence).

Exercice 2. (mesure de Dirac)

Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\delta_{x_0} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \{0, 1\}$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 \in A \\ 0 & \text{si} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$$

1) Montrer que δ_{x_0} est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Est-ce une mesure de probabilités?

2) Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ borélienne positive on a

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Indication: on pourra s'aider du résultat suivant.

Lemme 1 *Si $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est borélienne elle est limite simple d'une suite croissante (f_n) de fonctions étagées à valeur dans $[0, \infty)$.*

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour $f : E \to [0, +\infty]$ mesurable on a $\int_E f d\mu = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ p.p. (point 2) de la Proposition 1.2.1 du cours).

Indication: Pour la condition **nécessaire** on pourra utiliser le fait que

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

TD1 : PSAF

Ex 1 :

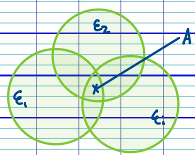
1) Soit E ensemble et $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ tribus de E

On veut mq $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ tribu :

tribu $\longrightarrow$ stable par union dénombrable et complémentaire

i. On a $E \in \mathcal{E}_i, \ \forall i \in I$ (car $\mathcal{E}_i$ tribu)

alors $E \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$



ii. Soit $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$

On a $A \in \mathcal{E}_i, \ \forall i \in I$

donc $A^c \in \mathcal{E}_i, \ \forall i \in I$ donc $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$

complémentaire

iii. $(A_n)_n$ suite d'éléments de $P(E)$ avec $A_n \in \bigcap \mathcal{E}_i, \ \forall n$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall i \in I, \ A_n \in \mathcal{E}_i$

donc $\forall i \in I, \ \bigcup_n A_n \in \mathcal{E}_i$ (car $\mathcal{E}_i$ tribu) stable par union

ainsi $\bigcup_n A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$

$\Longrightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ tribu non vide car il y a au moins $\mathcal{Y} = \mathcal{P}(E)$ qui est bien une tribu qui contient $\mathcal{C}$

2) Il suffit de considérer : $\bigcap\limits_{\substack{\mathcal{Y} \text{ tribu} \\ \text{tq } \mathcal{C} \subset \mathcal{Y}}} \mathcal{Y}$

$\mathcal{C}$ tribu d'après Q1 : $\bigcap\limits_{\substack{\mathcal{Y} \text{ tribu} \\ \text{tq } \mathcal{C} \subset \mathcal{Y}}} \mathcal{Y} = \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{Y} \text{ tribu} \\ \text{tq } \mathcal{C} \subset \mathcal{Y}}} \mathcal{E}_{\mathcal{Y}}$ avec $\mathcal{E}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}$

Elle contient $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$ pour tout élément de l'intersection
(si $B \subset A_i \ \forall i$ alors $B \subset \bigcap\limits_i A_i$)

Enfin, c'est bien la plus petite qui contient $\mathcal{C}$, puisque pour
$\mathcal{Y}_0$ tribu tq $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}_0$ on a $\bigcap\limits_{\substack{\mathcal{Y} \text{ tribu} \\ \text{tq } \mathcal{C} \subset \mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_0$

Ex 2 :

1) $f : E_1 \to E_2$ mesurable si $\forall B \in \mathcal{E}_2$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}_1$

$\hookrightarrow f(\emptyset) = 0$

$\hookrightarrow f(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n f(A_n)$ $\longrightarrow$ σ-additivité

i. $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$ car $x_0 \notin \emptyset$

ii. Soit (A_n) suite d'éléments disjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
On veut mq : $\delta_{x_0}(\bigcup\limits_n A_n) = \sum \delta_{x_0}(A_n)$

Si $x_0 \in A_{n_0}$ (appartient à un seul A_n)
alors $\delta_{x_0}(\bigcup\limits_n A_n) = 1 = \delta_{x_0}(A_{n_0}) = \sum\limits_n \delta_{x_0}(A_n)$
et $\delta_{x_0}(A_n) = 0 \ \forall n \neq n_0$

Si x_0 n'appartient à aucun des A_n
$\delta_{x_0}(\bigcup\limits_n A_n) = 0 = \sum \delta_{x_0}(A_n)$

$\longrightarrow$ dans tous les cas on a $\delta_{x_0}(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \delta_{x_0}(A_n)$

On a δ_{x_0} mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
$\delta_{x_0}(\mathbb{R}) = 1$ car $x_0 \in \mathbb{R}$
ainsi δ_{x_0} mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
et donc $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_{x_0})$ espace de probabilité.

2) On veut mq $\forall f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ borélienne positive on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

Soit $f = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ forme ≥ 0 étagée
↳ les $\alpha_i \in [0, +\infty]$ et les $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ainsi, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_{x_0} = \sum_i \alpha_i \delta_{x_0}(A_i) = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x_0) = f(x_0)$
↳ déf 1.2.1 cours

Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ borélienne
Lemme : $\exists (f_n)$ suite $\nearrow$ de forme étagée tq $f_n \nearrow f$

donc $\displaystyle\int f \, d\delta_{x_0} = \int \lim_n f_n \, d\delta_{x_0} \overset{BL}{=} \lim \int f_n \, d\delta_{x_0}$
$= \lim f_n(x_0) = f(x_0)$

Ex 3:

_ Posons $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \in \mathcal{B}$

$\Leftarrow$ $f = f\,\mathcal{U}_N + f\,\mathcal{U}_{N^c} = f\,\mathbb{1}_N$

$f = 0$ μ $\to$ $\mu(N) = 0$

donc $\int f\,d\mu = \int f\,\mathbb{1}_N\,d\mu = 0$

en effet, $f\,\mathbb{1}_N \leq +\infty\,\mathbb{1}_N$

donc $\int f\,\mathbb{1}_N\,d\mu \leq \int +\infty\,\mathbb{1}_N\,d\mu \overset{1.2.1}{=} 0$

PSAF- Feuille d'exercices 2

Exercice 1.

Dans cet exercice on considère des fonctions définies sur l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, et à valeurs réelles. On note $[x]_+ = \max(x, 0)$ la partie positive d'un nombre.

1. On considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = n^2 \Big[\frac{1}{n} - |x - \frac{1}{n}|\Big]_+.$$

   (a) Identifier la limite simple f de la suite (f_n). Calculer $\int_0^1 f_n d\lambda$ pour tout n, et $\int_0^1 f d\lambda$.

   (b) Y a-t-il convergence uniforme de (f_n) vers f ? Pourrait-on trouver une fonction positive h mesurable et intégrable qui domine la suite (f_n) (i.e. $|f_n| \leq h$ λ-p.p. pour tout n) ?

2. On considère maintenant la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = n \Big[\frac{1}{n} - |x - \frac{1}{n}|\Big]_+.$$

   (a) Identifier la limite simple f de la suite (f_n). Y a-t-il convergence uniforme ?

   (b) Montrer sans aucun calcul que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n d\lambda = 0$. Commenter.

Exercice 2 Dérivation sous le signe somme.

On se propose de montrer le Théorème 1.2.4 du cours (dont on reprend les notations).

1. Justifier que pour tout $t \in I$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ est intégrable (ce qui donne un sens à la quantité $\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mu(dx)$ pour tout $t \in I$).

2. Montrer que pour tout $t \in I$ la fonction $f(\cdot, t)$ est intégrable (ce qui donne un sens à la quantité $\int_E f(x,t)\mu(dx)$ pour tout $t \in I$).

3. Montrer alors qu'en tout point $t_0 \in I$ l'application $t \mapsto \int_E f(x,t)\mu(dx)$ est dérivable et que

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_E f(x,t)\mu(dx)\Big]_{t=t_0} = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\mu(dx).$$

Indication: En tout $t_0 \in I$ on pourra considérer une suite quelconque (t_0^n) tendant vers t_0 sans jamais toucher t_0, et la suite de fonctions (φ_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in E, \quad \varphi_n(x) = \frac{f(x, t_0^n) - f(x, t_0)}{t_0^n - t_0}.$$

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On se penche dans cet exercice sur $\sigma(X)$, la plus petite tribu sur Ω qui rend mesurable X.

1. Justifier que $\sigma(X)$ existe.
2. Vérifier que $\{X^{-1}(B)\}_{B \in \mathcal{E}}$ est une tribu. En conclure que $\sigma(X)$ vaut $\{X^{-1}(B)\}_{B \in \mathcal{E}}$. Noter qu'on a au passage trouvé une autre façon de justifier que $\sigma(X)$ existe.
3. Si $X \equiv c$ est une variable aléatoire constante ($c \in E$) que vaut $\sigma(X)$?
4. On suppose que $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Si X est mesurable par rapport à $\{\Omega, \emptyset\}$ que peut-on en dire ?
5. On définit $X = a1_A + b1_B$ pour $a \neq b > 0$ et $A, B \in \mathcal{F}$. Décrire $\sigma(X)$ et donner la loi de X.

Exercice 4 Liens entre les modes de convergence.

Dans cet exercice un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est donné. Les variables aléatoires rencontrées sont définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pour simplifier.

1. Montrer si (X_n) converge en norme L^p vers X alors (X_n) converge en probabilités vers X.
2. Montrer que si (X_n) converge p.s. vers X alors (X_n) converge en probabilités vers X.

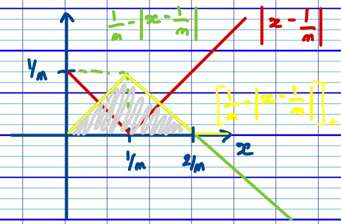
   Indication: Dans le cas $X \equiv 0$ considérer l'ensemble
   $$\bigcup_{l \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \{|X_k| > \frac{1}{l}\}.$$
3. On suppose que $(X_n)_n$ converge en probabilités vers X.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer que pour tous $\varepsilon, a > 0$, il existe $0 \leq \eta \leq 1$ tel que
   $$\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X| > a\} \cup \{|X_n - X| > \eta\}.$$
   (b) En choisissant convenablement a, en déduire que $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilités vers $f(X)$.
   (c) Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

TD2 : PSAF

Ex 1 :

1) a. On remarque que : $f_n(0) = 0$

et on voit que $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = 0$ aussi.



Soit $x \in [0,1]$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{2}{N} < x$, donc $\forall n \geq N$: $\frac{2}{n} < x$
et $f_n(x) = 0$

On a donc $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = f$.

On a donc que : $\int_0^1 f \, d\lambda = 0$

- Pour calculer $\int_0^1 f_n \, d\lambda$ on remarque que l'aire hachurée vaut $\frac{1}{n^2}$

donc $\int_0^1 f_n \, d\lambda = \int_0^1 f_n(x) \, d\lambda = n^2 \times \frac{1}{n^2} = 1$, $\forall n$.

b. - Si on avait $f_n \to f$ CV uniforme alors $\int_0^1 f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$

Or ici $1 \not\to 0$!

Il n'y a pas CV uniforme par contraposition : on n'a pas $f_n \xrightarrow{u} f$.

- De même, si on avait $|f_n| \leq h$ pp avec h mesurable positive et intégrable, comme on a déjà $f_n \to f$ pp, que $\int_0^1 f_n \, d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f \, d\lambda$ par CVD.
Par contraposition, il n'existe pas de tel h.

2) a. $f_n \longrightarrow f = 0$, comme à la Q1.

On a $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$, $\forall n$

donc $f_n \overset{u}{\not\longrightarrow} f$.

b. On veut mq $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n \, d\lambda = 0$

Utilisons le théorème de CVD : i. $f_n \to f$ pp

ii. $|f_n(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$ donc λ pour presque tout $x \in [0,1]$

et $\int_0^1 1 \, d\lambda = 1 < +\infty$ (h intégrable)

donc par CVD : $\int_0^1 f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_0^1 f \, d\lambda = 0$

\- Remarque : par calcul, on pouvait voir que : $\int_0^1 f_n \, d\lambda = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

Ex 3 :

\- X va mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ vers $(E, \mathcal{E})$
et $\sigma(X)$ est la plus petite tribu qui réalise cela.

1) Considérons $I = \{$ tribus sur Ω qui rendent X mesurable $\}$
et $\mathcal{Y}_0 = \bigcap_{\mathcal{Y} \in I} \mathcal{Y}$

Cette intersection est non vide car il y a au moins $\mathcal{F}$ qui rend X mesurable (d'après la définition de X va).
C'est également une tribu d'après exo 1, TD1.
On a $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$ $\forall \mathcal{Y} \in I$, ie pour toute tribu $\mathcal{Y}$ qui rend X mesurable.
De plus, X est bien $\mathcal{Y}_0$-mesurable car $\forall B \in \mathcal{E}$, on a $\{X \in B\} \in \mathcal{Y}$, $\forall \mathcal{Y} \in I$.

donc $\{X\in B\} \in \bigcap_{\mathcal{Y}\in I} \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0$

Donc $\sigma(X) = \mathcal{Y}_0$ convient.

2) On veut mq $\{X^{-1}(B)\}_{B\in E}$ est une tribu :

i. $\emptyset = X^{-1}(\underbrace{\emptyset}_{\in E}) \in \mathcal{T}$

ii. Soit $X^{-1}(\underbrace{B}_{\in E})$ élément de $\mathcal{T}$

On a $(X^{-1}(B))^c = X^{-1}(\underbrace{B^c}_{\in E}) \in \mathcal{T}$

iii. Soit $(X^{-1}(\overset{\in E}{B_n}))_n$ suite d'éléments de $\mathcal{T}$

On a $\bigcup_n X^{-1}(B_n) = X^{-1}(\underbrace{\bigcup_n B_n}_{\in E}) \in \mathcal{T}$

Soit $B\in E$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ par définition.

$\mathcal{T}$ la plus petite tribu ?

Soit $\mathcal{Y}$ qui rend X mesurable.

Soit $A\in \mathcal{T}$, on a $X^{-1}(B)$ pour un certain $B\in E$.

donc $\underbrace{X^{-1}(B)}_{A} \in \mathcal{Y}$ car X $\mathcal{Y}$-mesurable.

donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{Y}$.

$\Rightarrow \boxed{\sigma(X) = \{X^{-1}(B)\}_{B\in E}}$

3) Si $X \equiv$ cste, on a $\sigma(X) = ?$

En effet, soit $B\in E$, on a :

$\{X\in B\} = \begin{cases} \Omega & \text{si cste} \in B \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$ la tribu grossière

donc X est $\{\emptyset,\Omega\}$ mesurable

mais $\{\emptyset,\Omega\}$ est la plus petite tribu sur Ω !

4) Si X mesurable par rapport à $\{\emptyset, \Omega\}$

X prend au moins une valeur réelle, disons $x \in \mathbb{R}$.

C'est dire qu'il $\exists \omega \in \Omega$ tq $X(\omega) = x$

Considérons $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

On a $X^{-1}(\{x\}) = \{X = x\} \in \{\emptyset, \Omega\}$

On ne peut pas avoir $\{X = x\} = \emptyset$, car $\exists \omega$ tq $X(\omega) = x$.

donc $\{X = x\} = \Omega$ ie. $X \equiv x$.

PSAF- Feuille d'exercices 3

Exercice 1.

Dans cet exercice X et Y sont deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilités, et $\mathcal{H}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose toujours que $\mathbb{E}|X| < \infty$. On se propose de montrer trois propriétés simples de l'espérance conditionnelle.

1. Supposons que X est $\mathcal{H}$-mesurable. Montrer que
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = X \quad \text{p.s.}$$

2. Supposons que Y est $\mathcal{H}$-mesurable et bornée. Montrer que
X n'est plus supposée $\mathcal{H}$-mesurable
$$\mathbb{E}[YX|\mathcal{H}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \quad \text{p.s.}$$

   NB: la condition 2) du théorème-définition 2.2.1 du cours peut être remplacée de façon équivalente par $\forall Z$ v.a. $\mathcal{H}$-mesurable et bornée, $\mathbb{E}[Z\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]] = \mathbb{E}[ZX]$.

3. Supposons maintenant que Y est $\mathcal{H}$-mesurable mais non bornée (mais telle que $\mathbb{E}|XY| < \infty$). Montrer qu'on a le même résultat.

4. Supposons que X est indépendante de $\mathcal{H}$ (i.e. $\forall A \in \mathcal{H}$ alors $\mathbf{1}_A$ est indépendante de X). Montrer que
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X] \quad \text{p.s.}$$

Exercice 2.

Soit X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{E}|X| < \infty$, et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ est intégrable.
2. Montrer que si $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) \geq 0$ p.s. (monotonie de l'espérance conditionnelle).

Exercice 3 (ex. 2.1.1 du cours).

On en rappelle le contexte: X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, à valeurs respectivement dans E et E' dénombrables. On suppose pour simplifier le raisonnement et pour fixer les idées que E' est équipé de la tribu $\mathcal{E}' = \mathcal{P}(E')$. On a $\mathbb{E}(X|Y)$ définie par $\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$ où

$$\varphi(y) := \mathbb{E}(X|\{Y = y\}) = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=y\}}]}{\mathbb{P}(Y = y)}, \quad y \in E',$$

(on ne note pas $\mathbb{E}(X|Y = y)$ pour bien faire la différence avec la nouvelle notion d'espérance conditionnelle; mais ces quantités vont être les mêmes !). Montrer que

1. La v.a. $\mathbb{E}(X|Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable.
2. Pour tout A dans $\sigma(Y)$ on a $\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A\mathbb{E}(X|Y)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A X\big]$.

Exercice 4.

Considérons un couple de variable aléatoires (X, Y) de densité pour $x, y > 0$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y} e^{-y-x/y}.$$

1. Déterminer la loi marginale de Y
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$.
3. En déduire l'espérance conditionnelle.
4. Vérifier que cette espérance conditionnelle est d'espérance X.

Exercice 5.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer la formule de Bayes : pour tout $G \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{P}(G|A) = \frac{\displaystyle\int_G \mathbb{P}(A|\mathcal{G})\ d\mathbb{P}}{\displaystyle\int_\Omega \mathbb{P}(A|\mathcal{G})\ d\mathbb{P}}.$$

Exercice 6.

Montrer le Lemme de Fatou : Soit $X_1, X_2, ...$ une suite de v.a. non négatives alors

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to+\infty} X_n|\mathcal{F}) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})\ p.s.$$

TD3 : PSAF

Ex 1 :

1) On veut mq $E[X|\mathcal{H}] = X$ ps.
Pour cela on mq : $\begin{cases} X \text{ est } \mathcal{H}\text{-mesurable (vérifié par hypothèse)} \\ \forall A \in \mathcal{H},\ E[\mathbb{1}_A X] = E[\mathbb{1}_A X] \text{ (trivial)} \end{cases}$
Donc X vérifie les points 1) et 2) de la caractérisation de $E[X|\mathcal{H}]$ dans le théorème définition 2.2.1.
Donc par unicité $E[X|\mathcal{H}] = X$ ps.

2) On a Y $\mathcal{H}$-mesurable et bornée ie $E[|Y|] < +\infty$.
On veut mq $E[YX|\mathcal{H}] = YE[X|\mathcal{H}]$ ps.
On remarque déjà que $YE[X|\mathcal{H}]$ est $\mathcal{H}$-mesurable car Y l'est par hypothèse et $E[X|\mathcal{H}]$ l'est par définition et $(x,y) \mapsto xy$ continue donc borélien. (point 1 ok)
Soit $A \in \mathcal{H}$, on a :

$$E[\underbrace{\mathbb{1}_A Y}_{\substack{\mathcal{H}\text{-mesurable} \\ \text{et bornée}}} E[X|\mathcal{H}]] = \underbrace{E[\mathbb{1}_A Y X]}_{\hookrightarrow \text{ remarque}} \quad \text{(point 2 ok)}$$

On a donc $E[XY|\mathcal{H}] = YE[X|\mathcal{H}]$ ps.

3) Sans perte de généralité, on suppose $X, Y \geq 0$
(si ce n'est pas le cas, il faut considérer $Y = Y_+ - Y_-$ et $X = X_+ - X_-$)
On pose $Y_n = Y \wedge n$ (min (Y, n))
On a $0 \leq Y_n \leq n$, $\forall n$.
Donc à n fixé, Y_n est bornée et $\mathcal{H}$-mesurable (par minimum).
On a donc

$$\begin{array}{ccc} E[Y_n X|\mathcal{H}] & \overset{2)}{=} & Y_n E[X|\mathcal{H}] \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty,\ ps} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty,\ ps} \\ E[YX|\mathcal{H}] & & YE[X|\mathcal{H}] \end{array}$$

théorème 2.2.1)1. car $Y_n \nearrow$ et $X \geq 0$

La limite ps est unique à l'égalité ps près.

On a donc $E[YX|\mathcal{H}] = Y E[X|\mathcal{H}]$ ps.

4) On a X indépendante de $\mathcal{H}$ tq $\forall A \in \mathcal{H}$, $\mathbb{1}_A$ indépendante de X.
On veut mq $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$ ps.
On remarque déjà que $E[X]$ est constante, donc $\{\emptyset, \Omega\}$-mesurable (exo 3, TD2)
donc $\mathcal{H}$-mesurable (car $\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{H}$)
sous-tribu

Par ailleurs, soit $A \in \mathcal{H}$ on a :
$E[E[X]\mathbb{1}_A] = E[X]E[\mathbb{1}_A] = E[\mathbb{1}_A X]$
linéarité espérance — $\mathbb{1}_A \perp\!\!\!\perp X$ (indep)

Par unicité, on a donc $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$

Ex 2 :

1) Posons $Y = E[X|\mathcal{H}]$
On veut mq $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ie $\begin{cases} E[Y_+] < +\infty \\ E[Y_-] < +\infty \end{cases}$ se traitent de façon analogue
Prenons $A = \{Y \geq 0\} \in \mathcal{H}$ car Y $\mathcal{H}$-mesurable
On a donc $Y_+ = \mathbb{1}_A Y$
$E[Y_+] = E[\mathbb{1}_A Y] = E[\mathbb{1}_A X]$
théorème-déf 2.2.1

Or, il est clair que $0 \leq E[\mathbb{1}_A X] < +\infty$
$\hookrightarrow |\mathbb{1}_A X| \leq |X| \in L^1$ ie $\mathbb{1}_A X$ intégrable ie $\begin{cases} E[(\mathbb{1}_A X)_+] < +\infty \\ E[(\mathbb{1}_A X)_-] < +\infty \end{cases}$
donc $E[\mathbb{1}_A X] = E[(\mathbb{1}_A X)_+] - E[(\mathbb{1}_A X)_-]$ est une quantité finie
Pour $A \in \mathcal{H}$ quelconque on n'a pas d'information sur le signe, mais pour $A = \{Y \geq 0\}$ on a $E[X\mathbb{1}_A] = E[Y_+] \geq 0$
$0 \leq E[Y_+] = E[Y\mathbb{1}_A] = E[X\mathbb{1}_A] < +\infty$

Ex 3 :

– On a $E[X|Y] = \varphi(Y)$

où $\varphi(y) = E[X|\{Y=y\}] = \dfrac{E[X \mathbb{1}_{\{Y=y\}}]}{P(Y=y)}$ avec $y \in E'$

1) Mq $E[X|Y]$ est $\sigma(Y)$-mesurable

On a déjà que Y est $\sigma(Y)$-mesurable (Y est mesurable de $(\Omega, \sigma(Y))$ vers $(E', \mathcal{E}')$)

Si φ est mesurable de $(E', \mathcal{E}')$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on aura $\varphi(Y) = E[X|Y]$ est $\sigma(Y)$-mes

par composition

$\left(\Omega \xrightarrow[Y]{} E' \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{R},\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \{E[X|Y] \in B\} = \{\varphi(Y) \in B\} = \{Y \in \varphi^{-1}(B)\} \in \sigma(Y) \right)$

C'est le cas car $\underbrace{\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{E}'}_{\text{déf } \varphi \text{ mesurable}}$

2) $\forall A \in \sigma(Y)$, mq $E[\mathbb{1}_A E[X|Y]] = E[\mathbb{1}_A X]$

$A \in \sigma(Y) \Rightarrow A = \{Y \in B\}$ pour un certain $B \in \mathcal{E}'$

$$E[\mathbb{1}_A E[X|Y]] = E[\mathbb{1}_{Y \in B} \varphi(Y)] = \sum_{y \in E'} \mathbb{1}_{y \in B} \varphi(y) P(Y=y)$$

$$= \sum_{y \in E'} \mathbb{1}_{y \in B} E[X|\{Y=y\}] P(Y=y)$$

$$= \sum_{y \in B} \frac{E[X \mathbb{1}_{Y=y}]}{\cancel{P(Y=y)}} \cancel{P(Y=y)}$$

$$= E\Big[X \sum_{y \in B} \mathbb{1}_{Y=y}\Big]$$

si $|B| < +\infty$, pas de pb par linéarité de l'espérance

$$= E[X \mathbb{1}_{Y \in B}]$$

$$= E[X \mathbb{1}_A]$$

$\left| X \sum \mathbb{1}_{Y=y} \right| \leq |X| \in L^1$

Si $|B| = +\infty$, on peut s'en sortir par CVD.

$$\sum_{y \in B} E[X \mathbb{1}_{Y=y}] = \lim_{\substack{\#B}} \sum_{y \in B} E[X \mathbb{1}_{Y=y}] = \lim E\Big[X \sum_{y \in B} \mathbb{1}_{Y=y}\Big] = E\Big[\lim X \sum \mathbb{1}_{Y=y}\Big]$$

$$= E[X \mathbb{1}_{Y \in B}]$$

PSAF- Feuille d'exercices 4

Exercice 1.

On considère que l'ensemble des indices Θ vaut $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$.

On considère une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\Theta}$ et un processus $(X_t)_{t\in\Theta}$ qui lui est adapté (on suppose X à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$).

1) Montrer que pour tout $t \in \Theta$ on a $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ (on rappelle que $(\mathcal{F}_t^X)$ est la filtration naturelle définie en cours).

2) Montrer que si pour toute fonction mesurable et bornée $f : E \to \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)\,|\,X_s], \quad \forall t > s \geq 0,$$

alors on a

$$\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[f(X_t)\,|\,X_s], \quad \forall t > s \geq 0.$$

A l'issue des questions 1) et 2) on a en fait résolu l'exercice 3.1.1 du poly.

On se tourne maintenant vers l'étude du caractère Markov de X. On admet le résultat suivant:

Théorème 1 *Si X est à accroissements indépendants alors pour tous $0 \leq s < t$ on a que $X_t - X_s$ est indépendant de la sous-tribu $\mathcal{F}_s^X$.*

3) Montrer qu'un processus à accroissements stationnaire indépendants est $(\mathcal{F}_t^X)$-Markov. $\Rightarrow$ homogène

4) Que dire si les accroissements sont de surcroît stationnaires ?

Exercice 2.

1) On a indifféremment $\Theta = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{N}$. Montrer que tout processus $X = (X_t)_{t\in\Theta}$ à accroissements indépendants, à valeurs dans E au plus dénombrable, et avec X_0 indépendant des accroissements de X, est de Markov.

2) Que se passe-t-il si X est à accroissements indépendants et stationnaires ?

3) Soit (Y_n) une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S_0 = 0.$$

Que peut-on dire du processus $S = (S_n)_{n\geq 0}$?

4) Tout processus de Markov est-il à accroissements indépendants ?

Exercice 3.

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
(i) Pour tous $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$ et $x_1, ..., x_{n+1} \in E$

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n);$$

que l'on abrégera en

$$P(x_{n+1}|x_1, ..., x_n) = P(x_{n+1}|x_n).$$

(ii) Pour tous $t_1 < ... < t_p < ... < t_m$ et $x_1, ..., x_m \in E$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{p-1}} = x_{p-1}, X_{t_{p+1}} = x_{p+1}, ..., X_{t_m} = x_m | X_{t_p} = x_p)\\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{p-1}} = x_{p-1} | X_{t_p} = x_p)\mathbb{P}(X_{t_{p+1}} = x_{p+1}, ..., X_{t_m} = x_m | X_{t_p} = x_p);\end{aligned}$$

que l'on abrégera en

$$P(x_1, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, ..., x_m|x_p) = P(x_1, ..., x_{p-1}|x_p)P(x_{p+1}, ..., x_m|x_p).$$

Exercice 4.

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. On définit le processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_n = Z_n + 2Z_{n+1} + 3Z_{n+2}.$$

(a) Déterminer l'espace d'état E du processus X_n.
(b) Calculer $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2)$.
(c) Calculer $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 1, X_1 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 3)$. En déduire que X_n n'est pas une chaîne de Markov sur E.
On appelle chaîne de Markov (homogène) d'ordre k un processus stochastique $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur E au plus dénombrable vérifiant pour tout choix $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = y|X_{n+k-1} = x_{n+k-1}, ..., X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+k} = y|X_{n+k-1} = x_{n+k-1}, ..., X_n = x_n)$$

(d) La chaîne (X_n) ci dessus est elle une chaîne de Markov d'ordre k? Dans l'affirmative pour quel(s) k?
(e) Montrer que si Y_n est une chaîne de Markov d'ordre 2 sur E alors $W_n = (Y_{n+1}, Y_n)$, $n \geq 0$ est une chaîne de Markov sur $E \times E$. Généralisez.

TD4 : PSAF

Ex 1 :

1) $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$, la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ qui rend mesurable tous les X_s pour $s \leq t$.

Soit $t \geq 0$:

Mq $\forall s \leq t$, X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On aura alors $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$

Soit $s \leq t$: On a X_s $\mathcal{F}_s$-mesurable car X est $(\mathcal{F}_t)$-adapté

Or, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ car $(\mathcal{F}_t)$ filtration

donc X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

2) $\forall f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée et $\forall t \geq s \geq 0$, on a :

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) \mid X_s]$$

$$\Rightarrow E[E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] \mid \mathcal{F}_s^X] = E[E[f(X_t) \mid X_s] \mid \mathcal{F}_s^X]$$

$$\Rightarrow E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^X] = \underbrace{E[f(X_t) \mid X_s]}$$

7. propriété 2.2.1

et

$E[f(X_t) \mid X_s]$ est $\sigma(X_s)$-mesurable par déf 2.2.2

donc $\mathcal{F}_s^X$-mesurable car $\sigma(X_s) \subset \mathcal{F}_s^X$

3) Soit X à accroissements indépendants

Soit $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t > s \geq 0$

$$P(X_t \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s^X) = P(\underbrace{X_t - X_s}_{X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s^X} + \underbrace{X_s}_{\mathcal{F}_s^X\text{-mesurable}} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s^X) = E[\mathbb{1}_{X_t - X_s + X_s \in \Gamma} \mid \mathcal{F}_s^X]$$

prop 2.2.4

$$= F(X_s) \quad \text{où } F(x) = E[\mathbb{1}_{X_t - X_s + x \in \Gamma}]$$

D'autre part : $P(X_t \in \Gamma \mid X_s) = E[\mathbb{1}_{X_t \in \Gamma} \mid X_s] = E[E[\mathbb{1}_{X_t \in \Gamma} \mid \mathcal{F}_s^X] \mid X_s]$

$$= E[F(X_s) \mid X_s]$$

$$= F(X_s)$$, continue à droite avec une limite à gauche (càd-làg)

Ainsi, un processus à accroissements indépendants est $(\mathcal{F}_t^X)$-Markov.

4) Si X est à accroissements stationnaires, la loi de $X_t - X_s$ dépend de $t-s$, mais pas de s.

Donc la fonction F dans le calcul précédent ne dépend pas de $t-s$ et pas de $s \Rightarrow F = F^{\Gamma}_{t-s}$

On a donc $\mathbb{P}(X_t \in \Gamma \mid \mathcal{F}^X_s) = \mathbb{P}(X_t \in \Gamma \mid X_s) = F^{\Gamma}_{t-s}(X_s) \rightarrow$ déf 3.1.8 : homogène

Interprétation :

- Soit la marche aléatoire : $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ où (X_j) iid à val dans $\mathbb{Z}$.

  Soient $0 < t_1 < \dots < t_n$:

  $S_{t_n} - S_{t_{n-1}}, \dots, S_{t_1} - S_0 = \sum_{j=t_{n-1}+1}^{t_n} X_j, \dots, \sum_{j=1}^{t_1} X_j$ sont indep des X_i

  Soient $t > s \geq 0$: $S_t - S_s = \sum_{j=s+1}^{t} X_j = \sum_{j=1}^{t-s} X_j \rightarrow$ loi dépend de $t-s$ mais pas de s

  ie S est Markov-homogène

PSAF- Feuille d'exercices 5

Exercice 1.

A Griville s'il fait beau un jour, il pleut le lendemain avec probabilité 3/4. S'il pleut un jour, il fait beau le lendemain avec probabilité 1/8. Il en est ainsi depuis la fondation de la ville, en l'an 1200. On se propose de calculer la probabilité qu'il fasse beau demain (sans information sur le temps d'aujourd'hui).

1) Modéliser le problème à l'aide d'une chaîne de Markov X et écrire sa matrice de transition Q.

2) On note B l'état "beau". On note $P(n) = \mathbb{P}(X_n = B \mid X_0 = B)$. Montrer que

$$P(n) = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{7},$$

puis que

$$Q^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/7 & 6/7 \\ 1/7 & 6/7 \end{pmatrix}.$$

Indication: Une possibilité est de montrer que $P(n)$ est solution de

$$\begin{cases} P(0) & = & 1 \\ P(n) & = & \frac{1}{8}P(n-1) + \frac{1}{8} \end{cases}$$

et résoudre.

3) Commenter le résultat obtenu en 2). Que constate-t-on ? Quelle est donc la probabilité (approximative) qu'il fasse beau demain ?

Exercice 2. (Source: O. François)

Un rat se trouve dans un labyrinthe face à deux portes. Il choisit la première de ces deux portes avec probabilités 1/3 et la deuxième avec probabilité 2/3. Quand il choisit la première porte, il revient à son point de départ en une minute. Quand il choisit la deuxième porte, il effectue un trajet d'une minute (jusqu'à un point intermédiaire) puis rebrousse chemin avec probabilité 1/2 (le retour lui prend alors une minute) ou sort du labyrinthe en une minute. Tous les choix du rat se font indépendamment les uns des autres. Soit T le temps passé par le rat dans le labyrinthe. Montrer que

$$\mathbb{E}(T) = 5.$$

Indication: Se souvenir que pour T variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on a

$$E(T) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T > k),$$

et se servir du fait que $\mathbb{P}(T \leq k) = \mathbb{P}(X_k = S)$ où S est l'état "sortie" de la chaîne X introduite pour modéliser le problème (à justifier).

TD5 : PSAF

Ex 1 :

1) $E = \{B, P\}$

Soit $\begin{cases} X_n = \text{" temps qu'il fait au jour } n \text{"} \\ X_0 = x \in E, \ x \text{ inconnu} \end{cases}$

$X = (X_n)$ est une chaîne de Markov de matrice de transition :

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} B & P \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 7/8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} B \\ P \end{array} \end{array}, \text{ d'état initial } (X_0 = x) \text{ inconnu.}$$

les lignes somment à un

$P(X_{n+1} = B \mid X_n = B)$

On veut calculer :

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_n}_{n \text{ grand}} = B \mid X_0 = x)$$

2) On a $P(X_n = z \mid X_0 = y) = Q^n(z, y)$, $\forall z, y \in E$.

les lignes de Q somment à 1 donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\vec{vp}$ associé à $\lambda = 1$.

De plus $Tr(Q) = \frac{9}{8} = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{8}$

$$QX = \lambda_2 X \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 1/8\, x \\ \frac{1}{8}x + \frac{7}{8}y = 1/8\, y \end{cases} \Rightarrow x_1 = -6y_2 \quad \text{ie } X = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

donc $Q = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ie $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 6/7 \\ -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$

$$\text{ie } Q^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n & \frac{6}{7} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n \\ \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n & \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 1/7 & 6/7 \\ 1/7 & 6/7 \end{pmatrix}$$

ie pour n grand : $P(X_n = B \mid X_0 = y) \simeq \frac{1}{7}$, $\forall y \in E$

Donc, la probabilité qu'il fasse beau demain est approximativement de $\frac{1}{7}$ (réponse qu'on peut faire sans avoir à connaître l'état initial x).

La mesure $p = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right)$ décrit la distribution à l'équilibre du système.

PSAF- Feuille d'exercices 6

Exercice 1.

Soit (X_n) une sur-martingale telle que $\mathbb{E}(X_n)$ soit constante. Montrer que (X_n) est une martingale.

Exercice 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales (X_n) et (Y_n) de carrés intégrables.

a) Montrer que pour $m \leq n$ on a $\mathbb{E}(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ *p.s.*

b) Montrer que

$$\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})).$$

Exercice 3.

Soit (X_n) une suite de v.a. *i.i.d.* de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$. On considère la filtration naturelle (F_n), $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, 1 \leq i \leq n)$, $n \geq 1$, et la marche aléatoire $S_n = X_1 + ... + X_n$. On rappelle que

$$\mathbb{E}(e^{X_1 t}) = e^{t^2\sigma^2/2}.$$

1) Soit $Z_n^t = \exp(tS_n - nt^2\sigma^2/2)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(Z_n^t)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, (Z_n^t) converge *p.s.* vers une v.a. Z_∞^t finie. Que vaut cette limite?

TD6 : PSAF

Ex 1 :

- Soit (X_n) une sur-martingale tq $E(X_n) = cste \in \mathbb{R}, \forall n$.

Mq (X_n) est une martingale si : $\begin{cases} i.\ \forall n \geq 0,\ E|X_n| < +\infty \\ ii.\ (X_n) \text{ est } (F_n)\text{-adapté} \\ iii.\ \forall n \geq 0,\ E(X_{n+1} | F_n) = X_n \end{cases}$

Comme (X_n) est une sur-martingale, on a déjà que : $\forall n \geq 0,\ E(X_{n+1} | F_n) \leq X_n$

On a : $X_n - E(X_{n+1} | F_n) \geq 0,\ \forall n \geq 0$

De plus : $E(X_n - E(X_{n+1}|F_n)) = E(X_n) - E(E(X_{n+1}|F_n))$

$= E(X_n) - E(X_{n+1})$

$= 0$ car (X_n) cste en espérance

Comme $X_n - E(X_{n+1}|F_n) \geq 0$ et $E(X_n - E(X_{n+1}|F_n)) = 0$

on a que $X_n - E(X_{n+1}|F_n) = 0$ ps (prop 1.2.1)

donc $E(X_{n+1}|F_n) = X_n$ ie (X_n) est une martingale.

Ex 3 :

1) Soit $Z_n^t = e^{tS_n - \frac{nt^2\sigma^2}{2}}$

On veut mq $\forall t \in \mathbb{R}$, $(Z_n^t)_{n \geq 0}$ est une (F_n)-martingale ie :

Mq (Z_n^t) est une martingale si : $\begin{cases} i.\ \forall n \geq 0,\ E|Z_n^t| < +\infty \\ ii.\ (Z_n^t) \text{ est } (F_n)\text{-adapté} \\ iii.\ \forall n \geq 0,\ E(Z_{n+1}^t | F_n) = Z_n^t \end{cases}$

ii. (Z_n^t) est (F_n)-adapté si $\forall n \geq 0$ Z_n^t est F_n-mesurable à t fixé.

Déjà $Z_0^t = 1$ est F_0-mesurable car constante

$\forall n \geq 1$ on a : $Z_n^t = e^{t\sum X_i - \frac{nt^2\sigma^2}{2}}$ est F_n-mesurable car les X_i sont F_n-mes

par déf de (F_n) et que $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow e^{t\sum x_i - \frac{nt^2\sigma^2}{2}}$ est continue donc borélienne

(de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$) donc Z_n^t est F_n-mesurable

i. $Z_n^t = \dfrac{\prod_{i=1}^n 2E(e^{X_i t})}{e^{\frac{nt^2\sigma^2}{2}}}$

$Z_n^t \geq 0$, exp

Calculons : $E|Z_n^t| = E(Z_n^t) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i - \frac{t^2\sigma^2}{2}}\right)$

$= \prod_{i=1}^n \left(E\left(e^{tX_i - \frac{t^2\sigma^2}{2}}\right)\right)$ iid $\to X_i$ indep

$= e^{-\frac{nt^2\sigma^2}{2}} \prod_{i=1}^n e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$ iid $\to X_i$ identiquements distribuées

$= e^{-\frac{nt^2\sigma^2}{2}} \cdot e^{\frac{nt^2\sigma^2}{2}}$

$= 1 < +\infty$

donc Z_n^t est intégrable

iii. On veut mq : $\forall n \geq 0$, $E(Z_{n+1}^t | \mathcal{F}_n) = Z_n^t$

$E(Z_{n+1}^t | \mathcal{F}_n) = E\left(\prod_{i=1}^{n+1} e^{tX_i - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \Big| \mathcal{F}_n\right)$ ⚠ $X \perp\!\!\!\perp Y \not\Rightarrow E(XY|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}) \times E(Y|\mathcal{H})$

$= E\left(Z_n^t \times \left(e^{tX_{n+1} - \frac{t^2\sigma^2}{2}}\right) \Big| \mathcal{F}_n\right)$

$= Z_n^t \, E\left(e^{tX_{n+1} - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \Big| \mathcal{F}_n\right)$ Z_n^t est $\mathcal{F}_n$ - mesurable

$= Z_n^t \times e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \times E\left(e^{tX_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right)$

$= Z_n^t \times e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \times E\left(e^{tX_{n+1}}\right)$ $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$, car X_i indep et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i)$

$= Z_n^t \times e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \times e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

$= Z_n^t$

2) Si $t = 0$, $Z_n^t = 1$ donc $Z_n^t \longrightarrow 1$

Soit $t \neq 0$: loi forte des grands nombres

X_i suite iid tq $E|X_1| < +\infty$

alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{ps} E(X_1)$

Ici, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} 0$

$Z_n^t = e^{\overbrace{n\left(\underbrace{\frac{S_n}{n}}_{\to 0 \text{ ps}}\right) - \frac{t^2\sigma^2}{2} n}^{\to -\infty}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

OU

- On pourrait dire : $\exists Z_\infty^t \in L^1$ tq $Z_n^t \xrightarrow[n\to+\infty]{} Z_\infty^t$ ps (sans savoir qui est Z_∞^t) par thm 4.4.1

En effet : 1. Z^t est martingale ie sous-martingale

2. $\sup_n E((Z_n^t)_+) < +\infty$ car $(Z_n^t)_+ = Z_n^t$ (car $Z_n^t > 0$)

et $E(Z_n^t) = \text{cste}$ car (Z_n^t) martingale $(=1)$

Rq : $X_n \xrightarrow{L^1} X \leftrightarrow E|X_n - X| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(Z_n^t) est-elle U.I. ?

Ici : $Z_n^t \xrightarrow[n\to+\infty]{} Z_\infty^t = 0$

Mais $E|Z_n^t - Z_\infty^t| = E(Z_n^t) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc on n'a pas "(Z_n^t) converge p.s. et dans L^1 vers Z_∞^t"

Ie par thm 4.4.3 : (Z_n^t) n'est pas U.I..

Rq : Par exo 1 : pour mq (Z_n^t) est martingale on pouvait :

1. Rq $E(Z_n^t) = 1$

2. Mq (Z_n^t) sous-martingale, "sans calcul".

Ainsi, en adaptant exo 1 : sur → sous

On aimerait utiliser le théorème 4.1.1.2)

car Z_n^t fonction ↗ convexe

On peut dire : $Z_n^t = \varphi_n(S_n)$

tq $E(Z_n|F_{n-1}) = E(\varphi_n(S_n)|F_{n-1}) \geq \varphi_n(E(S_n|F_{n-1})) = \varphi_n(S_{n-1}) = \underbrace{e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}}_{\leq 1} \underbrace{\varphi_{n-1}(S_{n-1})}_{Z_{n-1}}$

ça coince....

PSAF- Feuille d'exercices 7

Exercice 1. (tribu des évènements antérieur à un temps d'arrêt)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, $(\mathcal{F}_n)$ une filtration. Soit T un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt.

Montrer que $\mathcal{F}_T$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Exercice 2.

Soit (S_n) la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue cette fois de 1 (c'est à dire que pour tout n, on a $S_n = 1 + X_1 + \ldots + X_n$ où les X_i's sont i.i.d. le loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$). On pose

$$T = \inf\{n \geq 1 : \ S_n = 0\}.$$

Montrer que $T < \infty$ p.s. En revanche T est-il borné ?

Exercice 3 (ruine du joueur via les théorèmes d'arrêt, source: examen de décembre 2015).

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si il fait "pile" (resp. "face"), il gagne 1 euro (resp. perd 1 euro). Il s'arrête de jouer lorsque son gain vaut 0 ou $m \geq 1$. Sa fortune avant de commencer le jeu est $0 \leq k \leq m$. On se propose de calculer la loi du gain lorsque la partie est terminée.

1) Montrer qu'une martingale bornée est uniformément intégrable (U.I.).

(On rappelle qu'une famille (X_n) de v.a. est dite U.I. si $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|>a}] \xrightarrow{a\uparrow\infty} 0$).

2) Montrer que le gain à l'instant $n \geq 0$ du joueur est donné par

$$S_n^T$$

où $(S_n)_{n\geq 0}$ est un processus à définir, et $T = T_0 \wedge T_m$ avec $T_i = \inf\{n \geq 0 : \ S_n = i\}$ pour $i = 0, m$ (en outre on rappelle qu'on note $S_n^T = S_{n\wedge T}$ pour tout $n \geq 0$). Que vaut le gain en fin de partie ?

3) Que pouvez-vous dire de (S_n) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k, \, k \leq n)$ pour $n \geq 1$? Est-ce une chaîne de Markov ? Une martingale ?

4) Que pouvez-vous dire de T ?

Pour la suite on note Y le processus défini par $Y_n = S_n^T$ pour tout $n \geq 0$.

5) Montrer qu'il existe $Y_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $Y_n = \mathbb{E}(Y_\infty|\mathcal{F}_n)$ pour tout $n \geq 0$, en invoquant précisément le résultat du cours utilisé.

6) Expliquer brièvement pourquoi $T < \infty$ p.s. (on pourra se référer à un exercice fait en TD, sans refaire la démonstration qu'il contient...).

7*) Calculer alors $\mathbb{E}(Y_0)$ de deux façons différentes pour montrer que

$$\mathbb{P}(S_T = m) = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S_T = 0) = 1 - \frac{k}{m}.$$

Exercice 4. (démonstration partielle du Théorème 4.4.3 du cours)

Soit (X_n) une $(\mathcal{F}_n)$-martingale définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1) Montrer que si (X_n) est uniformément intégrable elle converge p.s. vers $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Y a-t-il convergence L^1 ?

2) Montrer que si (X_n) converge p.s. et dans L^1 vers $X_\infty \in L^1$ alors il existe $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et que $X = X_\infty$).

Exercice 5. (crochet des martingales discrètes)

1) Soit (X_n) une $(\mathcal{F}_n)$-martingale de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer qu'il existe un unique processus croissant, noté $(\langle X \rangle_n)$, qui est en outre $(\mathcal{F}_n)$-prévisible et vérifie $\langle X \rangle_0 = 0$, tel que $(X_n^2 - \langle X \rangle_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

Le processus $\langle X \rangle$ est appelé la "variation quadratique" ou le "crochet" de X.

2) Soit (ξ_i) suite i.i.d. le loi donnée par $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On considère

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad S_0 = 0.$$

Vérifier rapidement que (S_n) est une martingale de carré intégrable (on précisera par rapport à quelle filtration). Montrer que

$$\langle S \rangle_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

TD7: PSAF

Ex 5:

1) (X_n) sous-martingale car martingale

Mq X^2 sous-martingale.

Notons $\varphi(X) = X^2$ avec $\varphi(x) = x^2$

X^2 intégrable car $\forall n\ E(X^2) < +\infty$ car X de carré intégrable

On applique le théorème 4.1.1.-1) $\rightarrow \varphi(X_n) = X_n^2$ est une $(\mathcal{F}_n)$-sous-martingale

On applique Doob sur X_n^2:

$X_n^2 = M_n + A_n$, $\forall n \geq 0$ où (M_n) $(\mathcal{F}_n)$-martingale et (A_n) prévisible, $\nearrow$, $A_0 = 0$

Posons $\langle X \rangle_n = A_n$, $\forall n \geq 0$

On a $\langle X \rangle$ prévisible, $\nearrow$, avec $\langle X \rangle_0 = 0$

Et $X^2 - \langle X \rangle = M$ est une martingale

Donc $\langle X \rangle$ existe

L'unicité de $\langle X \rangle$ découle de l'unicité de la décomposition de Doob de X^2

(en effet : si $\exists \langle\langle X \rangle\rangle$ tq $X^2 - \langle\langle X \rangle\rangle$ martingale on a : $X^2 = \bar{M} + \langle\langle X \rangle\rangle$; par unicité $\bar{M} = M$ et $\langle\langle X \rangle\rangle = A = \langle X \rangle$)

2) (S_n) martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ définie par $\begin{cases} \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \\ \mathcal{F}_n = \sigma(Y_i, 1 \leq i \leq n), \forall n \geq 1 \end{cases}$

car les (Y_i) sont iid avec $\begin{cases} E|Y_1| = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1 < +\infty \\ E(Y_1) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

$\forall n$, $S_n \in L^2$ car $E|Y_1^2| = 1 < +\infty$ et L^2 ev.

Le processus $(n)_{n\geq 0}$ est $\nearrow$, partant de 0 et prévisible, car:

$\forall n$, n est constante donc $\{\emptyset, \Omega\}$-mesurable $\rightarrow$ 0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable

et $\forall n \geq 1$, n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable

Si on mq $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est une martingale on aura $\langle S \rangle_n = n$ $\forall n \geq 0$, par unicité.

$\forall n$, $E|S_n^2 - n| \leq n + E|S_n^2| < +\infty$

et $S_n^2 - n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable car S_n l'est (et $x \mapsto x^2 - n$ est continue)

Calculons :

$$\begin{aligned}
E\left(S_{n+1}^2-(n+1)\mid \mathcal{F}_n\right) &= E\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\xi_i+\xi_{n+1}\right)^2-(n+1)\mid \mathcal{F}_n\right)\\
&= E\left(S_n^2+2S_n\,\xi_{n+1}+\xi_{n+1}^2-(n+1)\mid \mathcal{F}_n\right) \qquad S_n^2 \text{ est } (\mathcal{F}_n)\text{-mes}\\
&= S_n^2-n+\underbrace{E(\xi_{n+1}^2\mid \mathcal{F}_n)}_{\substack{E(\xi_{n+1}^2),\ \xi_{n+1}\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n\\ =E(\xi_1^2)\\ =1}}-1+2\underbrace{E(\xi_{n+1}S_n\mid \mathcal{F}_n)}_{\substack{S_n E(\xi_{n+1}\mid \mathcal{F}_n)\\ =E(\xi_{n+1})\\ =0}}\\
&=
\end{aligned}$$

PSAF- Feuille d'exercices 8

Exercice 1.

On se propose dans cet exercice de redémontrer la Proposition 5.2.1 du cours (relation de parité Call/Put), mais sans passer par le Théorème 5.2.1.

1. Supposons que
$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$
Décrire la stratégie d'arbitrage qui en découlerait.

2. Supposons que
$$C_t - P_t < S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$
Décrire la stratégie d'arbitrage qui en découlerait, et conclure.

Exercice 2.

On se propose de démontrer diverses propriétés qualitatives du prix à l'instant t d'un Call de maturité T et de strike K, noté $C_t(T, K)$. On note $B(t, T)$ le prix en t d'un zéro-coupon valant 1 euro à la maturité T, i.e., $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$.

1. Montrer que $(S_t - K \times B(t,T))_+ \leq C_t(T, K) \leq S_t$ (relation de *hedge*).
2. Montrer que $\frac{\partial C_t(T,K)}{\partial K} \leq 0$ (relation de *Bull spread*).
3. Montrer que $\frac{\partial^2 C_t(T,K)}{\partial K^2} \geq 0$ (relation de *Butterfly spread*).
4. Montrer que $\frac{\partial C_t(T,K)}{\partial T} \geq 0$ (relation de *Calendar spread*).

TD8 : PSAF

Ex 1 : $\begin{cases} \text{revendre le } \oplus \text{ cher} \\ \text{acheter le } \ominus \text{ cher} \end{cases}$

1) Supposons que $C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$

C_t et P_t respectivement Call et Put de Strike K.

On a donc : $C_t > P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}$

En t : on vend 1 part de Call : ⚠ ce n'est pas une vente à découvert, on passe simplement contrat avec quelqu'un qui est d'accord pour nous l'acheter aqun nous donne C_t et en T on lui rend $(S_T - K)_+$

On empoche donc C_t €.

Avec cela, on achète 1 part de Put (position longue durée) et une part d'actif

→ Doit-on emprunter ? 1. Si $C_t > P_t + S_t$, les C_t € seront suffisants pour acheter 1 Put + 1 actif, il reste $C_t - P_t - S_t > 0$ qu'on place à la banque.

2. Si $C_t < P_t + S_t$, la vente du Call n'est pas suffisante pour acheter 1 part + 1 Call. Alors, on emprunte $\underbrace{P_t + S_t - C_t}_{>0}$ € à la banque

Ainsi en t : $\begin{cases} -1 \text{ part de Call} \\ 1 \text{ part de Put} \\ 1 \text{ part d'actifs } S \\ C_t - P_t - S_t \text{ en cash} \end{cases}$, positif si on a placé, négatif si on a emprunté

Et en T : - Si $K > S_T$: le Put s'exerce, le Call non (il est "mort")

on vend alors l'actif au prix K

- Si $S_T \geq K$: le Call s'exerce, le Put non (il est "mort")

on vend alors l'actif au prix K

Quoiqu'il arrive, on vend l'actif au prix K

Bilan : $\begin{cases} 0 \text{ part de Call} \\ 0 \text{ part de Put} \\ 0 \text{ part d'actif } S \\ \underbrace{(C_t - P_t - S_t)e^{-r(T-t)}} + K \end{cases}$

c'est ce qu'on doit rembourser (cas négatif) si on avait emprunté
ou
c'est ce qu'on récupère (cas positif)

Or, $C_t > P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}$

$\Leftrightarrow (C_t - P_t - S_t)e^{-r(T-t)} + K > 0$

→ il y a donc arbitrage !

absurde en AOA !

donc $C_t - P_t \leq S_t - Ke^{-r(T-t)}$

2) Supposons que : $C_t - P_t < S_t - Ke^{-r(T-t)}$

On a donc : $C_t < P_t + S_t - Ke^{-r(T-t)}$

En t : $\begin{cases} \text{on vend 1 part de Put} \\ \text{on vend à découvert 1 part d'actif} \end{cases}$ ⚠ il faudra la rendre en T

$\longrightarrow$ les $(P_t + S_t)$ € sont suffisants pour acheter 1 part de Call.

Ainsi en t : $\begin{cases} 1 \text{ part de Call} \\ -1 \text{ part de Put} \\ -1 \text{ part d'actif} \\ P_t + S_t - C_t \text{ cash} \end{cases}$

Et en T : 1. Si $S_T \geq K$: le Call s'exerce, le Put non

on achète l'actif au prix K.

2. Si $S_T < K$: le Put s'exerce, le Call non

on achète l'actif au prix K.

Quoiqu'il arrive, on achète l'actif au prix K.

Bilan en T : $\begin{cases} 0 \text{ part de Call} \\ 0 \text{ part de Put} \\ 0 \text{ part d'actif} \\ \underbrace{(P_t + S_t - C_t)e^{-r(T-t)} - K}_{>0 \text{ car } C_t - P_t < S_t - e^{-r(T-t)}K} \end{cases}$

Il y a arbitrage : $C_t - P_t \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$

Q1 + Q2 : $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$

PSAF- Feuille d'exercices 9

Exercice 1.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un horizon temporel. Dans le cadre du modèle CRR vu en cours on note $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ un élément de $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ et on définit

$$\mathbb{P}^*(\omega) = \prod_{n=1}^{N} p(\omega_n) \quad \forall \omega \in \Omega,$$

où $p(1+a) = (b-r)/(b-a)$ et $p(1+b) = (r-a)/(b-a)$, avec $a < r < b$.

On rappelle que les variables aléatoires $(T_n)_{n=1}^N$, à valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$, sont définies par $T_n(\omega) = \omega_n$ pour tout $1 \leq n \leq N$ et tout $\omega \in \Omega$. De plus on travaille avec la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$ pour tout $1 \leq n \leq N$.

1) Vérifier que $\mathbb{P}^*(\Omega) = 1$ (on suppose que $\mathbb{P}^* : \mathcal{F}_N \to [0,1]$ est σ-additive).

2) Montrer que sous $\mathbb{P}^*$ les $(T_n)_{n=1}^N$ sont i.i.d. de loi commune donnée par $\mathbb{P}^*(T_1 = 1+a) = p(1+a)$ et $\mathbb{P}^*(T_1 = 1+b) = p(1+b)$.

3) Montrer qu'une mesure de probabilité $\mathbb{P}^{**}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_N)$, vérifiant $\mathbb{P}^{**}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, est risque-neutre si et seulement si elle vérifie

$$\mathbb{E}^{**}(T_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 1 + r, \quad \forall 0 \leq n \leq N-1. \tag{1}$$

4) Montrer si $\mathbb{P}^{**}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_N)$ qui vérifie (1) alors

$$\mathbb{P}^{**}(\omega) = \prod_{n=1}^{N} p(\omega_n) = \mathbb{P}^*(\omega)$$

(où $\mathbb{P}^*$ désigne le mesure de probabilités étudiée dans les questions 1) et 2)).

Indication: On pourra dans un premier temps s'intéresser à la valeur de $\mathbb{E}^{**}(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}} | \mathcal{F}_n)$.

5) Le marché décrit par ce modèle est-il viable ? Complet ?

Exercice 2.

Toujours dans le cadre du modèle CRR (avec $a < r < b$), on considère une option européenne d'échéance N et de payoff $h(S_N)$, avec $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ fonction mesurable. On note $(H_n^0, H_n^1)_{1 \leq n \leq N}$ la stratégie de couverture associée (et $(V_n(H))_{0 \leq n \leq N}$ la valeur du portefeuille correspondant à cette stratégie). On note $\mathbb{P}^*$ la mesure de probabilités risque-neutre.

1) Montrer que pour tout $0 \leq n \leq N$, $V_n(H) = C(n, S_n)$ pour une fonction $C(n,x)$ que l'on précisera. Que peut-on dire de $x \mapsto C(n,x)$ si h est croissante ?

2) Quelle est la loi de $\nu = \sum_{k=n+1}^{N} \mathbf{1}_{T_k = 1+a}$ sous $\mathbb{P}^*$?

3) En déduire que

$$C(n,x) = (1+r)^{n-N} \sum_{m=0}^{N-n} C_{N-n}^{m} \Big(\frac{b-r}{b-a}\Big)^m \Big(\frac{r-a}{b-a}\Big)^{N-n-m} h(x(1+a)^m (1+b)^{N-n-m}).$$

4) Montrer que la quantité d'actif risqué à détenir sur la période $]n, n+1]$ pour couvrir l'option est donnée par

$$H^1_{n+1} = \frac{C(n+1, S_n(1+b)) - C(n+1, S_n(1+a))}{S_n(b-a)}.$$

Que peut-on dire de cette quantité si h est croissante ?

5) On suppose dans cette question que pour un certain $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \alpha x - h(x)$ est positive et croissante. Montrer qu'alors $H^1_n \leq \alpha$.

6) En déduire des bornes pour H^1_n dans le cas du Call.

TD 9 : PSAF

Ex 1 :

1) On veut mq : $\mathbb{P}^*(\Omega) = 1$.

On a déjà que : $\mathbb{P}^* : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longrightarrow \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}^*\left(\biguplus_{\omega \in A} \{\omega\}\right) \overset{\sigma\text{- additivité}}{=} \underbrace{\sum_{\omega \in A} \mathbb{P}^*(\omega)}_{\text{cette valeur est définie}} \end{cases}$

On remarque que : $p(1+a) + p(1+b) = \dfrac{b - \cancel{1} + \cancel{1} - a}{b-a} = 1$

$$\mathbb{P}^*(\Omega) = \mathbb{P}^*(\omega,\ \omega \in \{1+a, 1+b\}^N)$$

$$= \mathbb{P}^*\Big(\biguplus_{\omega_i \in \{1+a, 1+b\}^N} \omega_i\Big)$$

σ-additivité

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}^*(\omega)$$

$$= \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_N) \in \{1+a, 1+b\}^N} \prod_{n=1}^{N} p(\omega_n) \qquad \Bigg| \; = \sum_{(\omega_2, \dots, \omega_N) \in \{\dots\}^{N-1}} \big(p(1+a) \overset{\text{"ou"}}{+} p(1+b)\big) \prod_{n=2}^{N} p(\omega_n)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{\omega_N \in \{1+a, 1+b\}} p(\omega_N) = 1$$

" $$= \sum \prod_{n=1}^{k} p(1+a) \prod_{n=k+1}^{N} p(1+b)$$ "

il faut choisir un k parmis les N possibles

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{k}{N} (p(1+a))^k (p(1+b))^{N-k}$$

binôme de Newton

$$= (p(1+a) + p(1+b))^N$$

$$= 1$$

2) Identifions la loi de T_1 :

$T_1 \in \{1+a, 1+b\}$

Soit $\overline{\omega}_1 \in \{1+a, 1+b\}$, on a :

$$\mathbb{P}^*(T_1 = \overline{\omega}_1) = \mathbb{P}^*(\{\omega \in \Omega,\ T_1(\omega) = \overline{\omega}_1\})$$

$$= \mathbb{P}^*(\{\omega \in \Omega,\ \omega_1 = \overline{\omega}_1\})$$

$$= \mathbb{P}^*(\{(\overline{\omega}_1, \omega_2, \dots, \omega_N),\ (\omega_2, \dots, \omega_N) \in \{1+a, 1+b\}^{N-1}\})$$

$$= \sum_{(\omega_2, \dots, \omega_N) \in \{\dots\}^{N-1}} p(\overline{\omega}_1) \prod_{n=2}^{N} p(\omega_n) \quad = 1 \text{ cf Q1.}$$

Donc $\begin{cases} \mathbb{P}^*(T_i = 1+a) = p(1+a) \\ \mathbb{P}^*(T_i = 1+b) = p(1+b) \end{cases}$, ce serait les mêmes calculs par les autres T_i.

Les T_i sont identiquements distribués de loi de T_1.

– Montrons l'indépendance :

Soient $i \neq j$, mq $T_i \perp\!\!\!\perp T_j$.

Soient $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_j \in \{1+a, 1+b\}$

On a $\mathbb{P}^*(T_i = \bar{\omega}_i, T_j = \bar{\omega}_j) = \mathbb{P}^*(\{\omega \in \{1+a, 1+b\}^N,\ \omega_i = \bar{\omega}_i \text{ et } \omega_j = \bar{\omega}_j\})$

$$= \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \dots, \omega_N) \in \{1+a, 1+b\}^{N-2}} p(\bar{\omega}_i)\, p(\bar{\omega}_j) \prod_{i \neq m \neq j} p(\omega_m)$$

$= 1$

$$= p(\bar{\omega}_i)\, p(\bar{\omega}_j)$$

$$= \mathbb{P}^*(T_i = \bar{\omega}_i)\, \mathbb{P}^*(T_j = \bar{\omega}_j)$$

avec dims de, identiquements distribués

– Ainsi, les T_i sont iid sous $\mathbb{P}^*$ de loi T_1.

3) $\mathbb{P}^{**}(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$

donc $\mathbb{P}^{**} \sim \mathbb{P}$ (cq 5.4.1 du poly)

$S_{m+1} = T_{m+1} S_m$

$\tilde{S}_m = \dfrac{S_m}{S_m^0}$ et $S_m^0 = (1+r)^m$

donc $\mathbb{P}^{**}$ est une proba risque neutre ssi $(\tilde{S}_m)$ est une $(\mathcal{F}_m)$-martingale sous $\mathbb{P}^{**}$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{S}_m = \dfrac{S_m}{S_m^0}$ est une $(\mathcal{F}_m)$-martingale

$\Leftrightarrow$ $E^{**}(\tilde{S}_{m+1} \mid \mathcal{F}_m) = \tilde{S}_m$, $\forall\, 0 \leq m \leq N-1$, car $\tilde{S}_m$ est adapté et intégrable

$\Leftrightarrow$ $E^{**}\left(\dfrac{T_{m+1} S_m}{(1+r)^{m+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_m\right) = \dfrac{S_m}{(1+r)^m}$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{S_m}\, E^{**}\left(\dfrac{T_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_m\right) = \dfrac{\cancel{S_m}}{(1+r)^m}$ car $S_m > 0$

$\Leftrightarrow$ $E^{**}(T_{m+1} \mid \mathcal{F}_m) = 1 + r$

4) Cherchons à calculer : $\begin{cases} A = E^{**}(\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+a} \mid \mathcal{F}_m) \\ B = E^{**}(\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+b} \mid \mathcal{F}_m) \end{cases}$

$$A + B = E^{**}(\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+a} + \mathbb{1}_{T_{m+1}=1+b} \mid \mathcal{F}_m) = E^{**}(1 \mid \mathcal{F}_m) = 1$$

$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ — 1 est $\mathcal{F}_m$-mes

vaut $\{1+a, 1+b\}$

$$(1) \Leftrightarrow E^{**}(T_{m+1} \mid \mathcal{F}_m) = 1+r \Leftrightarrow E^{**}((1+a)\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+a} + (1+b)\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+b} \mid \mathcal{F}_m) = 1+r$$

$$\Leftrightarrow (1+a)E^{**}(\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+a} \mid \mathcal{F}_m) + (1+b)E^{**}(\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+b} \mid \mathcal{F}_m) = 1+r$$

$$\Leftrightarrow (1+a)A + (1+b)B = 1+r$$

Om a donc : $\begin{cases} A + B = 1 \\ aA + bB = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ a(1-B) + bB = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{b-r}{b-a} = p(1+a) \\ B = \frac{r-a}{b-a} = p(1+b) \end{cases}$

Ainsi, $\forall 0 \leq m \leq N-1$: $\begin{cases} E^{**}(\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+a} \mid \mathcal{F}_m) = p(1+a) \\ E^{**}(\mathbb{1}_{T_{m+1}=1+b} \mid \mathcal{F}_m) = p(1+b) \end{cases}$

Soit $\bar{\omega} \in \{1+a, 1+b\}^N$, on veut mq $P^{**}(\bar{\omega}) = P^{*}(\bar{\omega})$

Om a :

égalisation de chaques composantes d'un vecteur

$\chi_F : E \longrightarrow \{0,1\}$

$x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in F \\ 0 \text{ si } x \notin F \end{cases}$

Quelques propriétés

En terminant, voici quelques propriétés.

Pour deux ensembles A et B :

- $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$;
- $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(x)$;
- $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.

$$\mathbb{P}^{**}(\bar{\omega}) = \mathbb{P}^{**}(\{\omega \in \Omega,\ \omega = \bar{\omega}\})$$

$$= \mathbb{P}^{**}(\{\omega \in \Omega,\ T_1(\omega) = \bar{\omega}_1, \dots, T_N(\omega) = \bar{\omega}_N\})$$

$$= \mathbb{P}^{**}\left(\bigcap_{i=1}^{N} \{T_i = \bar{\omega}_i\}\right)$$

$$= E^{**}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{N}\{T_i = \bar{\omega}_i\}}\right)$$

$$= E^{**}\left(\prod_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{T_i = \bar{\omega}_i}\right) \qquad P(A) = E(\mathbb{1}_A) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\mathbb{1}_A = i)\, i$$

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

L'espérance mathématique E de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est donnée par :

$$E(\mathbf{1}_A) = 1 \times P(A) + 0 \times P(\text{non } A) = P(A)$$

où $P(A)$ est la probabilité de l'événement A. Donc, l'espérance de la fonction indicatrice de A est égale à la probabilité de A :

$$E(\mathbf{1}_A) = P(A)$$

$= E^{**}(E^{**}(\prod_{i=1}^{N}$ …

$= E^{**}(\prod_{i=1}^{N-1} \mathbb{1}_{T_i}$ …

$= p(\bar{\omega}_N)\, E^{**}$ …

$= \dots$

$$= \prod_{i=1}^{N} p(\bar{\omega}_i) = P^{**}(\bar{\omega})$$, comme on avait choisi $\bar{\omega}$ quelconque dans Ω, CQFD.

5) le marché est viable s'il existe une mesure proba risque-neutre (1^{er} théorème fondamental).

En effet, $\mathbb{P}^*$, existante, est risque-neutre.

Pour cela, vérifions que $\mathbb{P}^*$ vérifie (1) de l'énoncé.

les T_i's sont indep sous $\mathbb{P}^*$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(T_i, i \leq n)$

$$
\begin{aligned}
E^*(T_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= E^*(T_{n+1}) \\
&= E^*(T_1) \quad \text{identiquement distribués} \\
&= (1+a)\frac{b-r}{b-a} + (1+b)\frac{r-a}{b-a} \\
&= 1+r
\end{aligned}
$$

le marché est donc viable.

Est-il complet ?

Soit $\mathbb{P}^{**}$ mesure de proba risque-neutre, éventuellement différente de $\mathbb{P}^*$.

On a $\mathbb{P}^{**}$ qui vérifie (1) (Q3)

Et par Q4, on a $\mathbb{P}^{**} = \mathbb{P}^*$

donc la mesure de probabilité risque-neutre est unique

le marché est donc viable et complet (par le 2^{nd} théorème fondamental)

$\longrightarrow$ si $a < r < b$, alors le modèle CRR est viable et complet