Feuille de TD n.5 de IPD 2015-2016, Ensimag 2A IF

H. Guiol & J. Lelong

Exercice 1. Montrer la proposition 3.7 du cours : pour tout processus $H \in \Pi_0$ le processus intégrale stochastique de H par rapport à W ($(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-MBS) noté $I(H)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale continue de carré intégrable, quelle en $t = 0$. De plus le processus $(I_t(H)^2 - \int_0^t H_s^2\, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Réponse. Voir notes de cours.

Exercice 2. Intégrale du Brownien.

On cherche à calculer $\int_0^T B_s\, dB_s$. Pour tout entier $n > 0$, on considère la subdivision régulière $(kT/n)_{0\leq l\leq n}$ de $[0, T]$ et on pose

$$B_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}\ \mathbf{1}_{[kT/n,(k+1)T/n[}(t).$$

1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (B_s^n - B_s)^2\ ds\right] = 0.$$

Réponse. Il suffit de voir que pour tout $s \in [kT/n, (k+1)T/n[$

$$\mathbb{E}((B_s^n - B_s)^2) = s - kT/n$$

donc

$$\int_0^T \mathbb{E}((B_s^n - B_s)^2)\ ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT/n}^{(k+1)T/n} (s - kT/n)\ ds = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^2}{2n^2} = \frac{T^2}{2n}$$

2. En déduire que $\int_0^T B_s\ dB_s$ s'écrit comme la limite dans $L^2(\Omega)$ de

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}\ (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}).$$

Réponse. Par définition comme

$$\int_0^T B_s^n\ dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}\ (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})$$

et comme B^n et B sont dans Π_2^2 et on a par l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (B_s^n - B_s)\ dB_s\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}((B_s^n - B_s)^2)\ ds$$

donc par la question précédente on a dans L^2 que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}\ (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}) = \int_0^T B_s\ dB_s$$

3. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2\right).$$

Réponse. On utilise que les accroissements sont indépendants et que

$$\mathrm{Var}\left((B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2\right) = \frac{2\ T^2}{n}$$

la limite demandée est donc nulle.

4. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers T.

Réponse. On a

$$\mathbb{E}(((B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2 - T/n)^2) = \text{Var}\left((B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2\right)$$

d'où le résultat par 3).

5. Calculer la limite dans $L^2(\Omega)$ de $\sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})$ à l'aide des questions précédentes. *Indication :* on pourra utiliser l'identité $2ab = -(b-a)^2 + a^2 + b^2$.

Réponse. En utilisant l'indication on a

$$\begin{aligned} B_{kT/n}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}) &= -\frac{(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2}{2} + \frac{B_{kT/n}^2}{2} + \frac{B_{(k+1)T/n}^2}{2} - B_{kT/n}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(-(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2 + B_{(k+1)T/n}^2 - B_{kT/n}^2\right) \end{aligned}$$

La limite de la somme dans L_2 est donc

$$\frac{1}{2}(-T + B_T^2)$$

6. Calculer la valeur de $\int_0^T B_s \, dB_s$ et vérifier que c'est bien une martingale.

Réponse. On a $\int_0^T B_s \, dB_s = (B_T^2 - T)/2$ qui est bien une martingale car $M_t = B_t^2 - t$ est une martingale connue.

7. En vous inspirant des questions précédentes, calculer la limite dans $L^2(\Omega)$ de

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{(k+1)T/n}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}).$$

Réponse. On trouve $(B_T^2 + T)/2$.

8. En vous inspirant des questions précédentes, calculer la limite dans $L^2(\Omega)$ de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{(k+1)T/n} + B_{kT/n}}{2} \; (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}).$$

Que pouvez-vous dire de la méthode des rectangles à droite ?

Réponse. Par linéarité on trouve $B_T^2/2$.