Théorie des Langages 1

Cours 5 : Minimisation d'automates

L. Rieg (*thanks* M. Echenim)

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

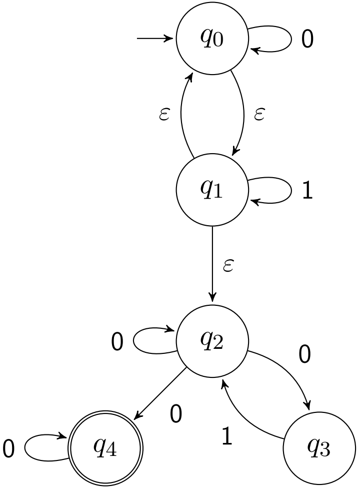
Année 2020-2021

Illustration

Construire un AFD complet pour $L = (\{0\}^* \{1\}^*)^* \{0, 01\}^* \{0\}^+$.

Illustration

Construire un AFD complet pour $L = (\{0\}^* \{1\}^*)^* \{0, 01\}^* \{0\}^+$.



Illustration

Construire un AFD complet pour $L = (\{0\}^* \{1\}^*)^* \{0, 01\}^* \{0\}^+$.

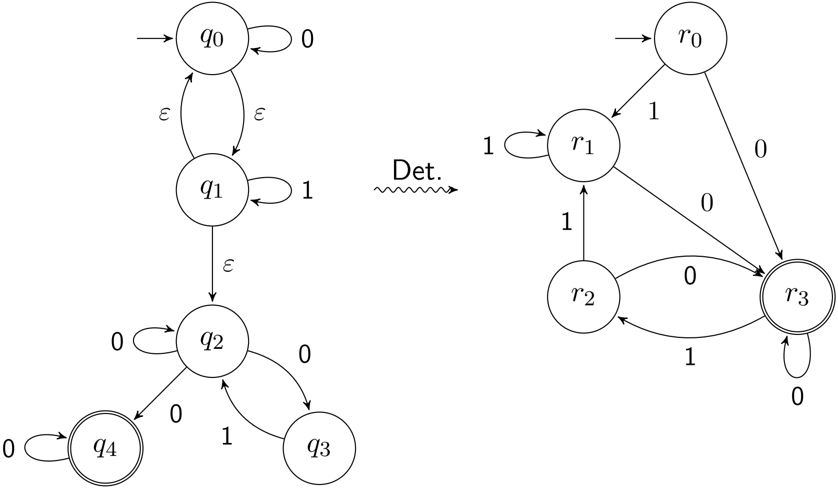


Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.

Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.

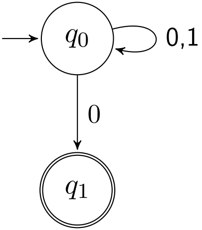


Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.

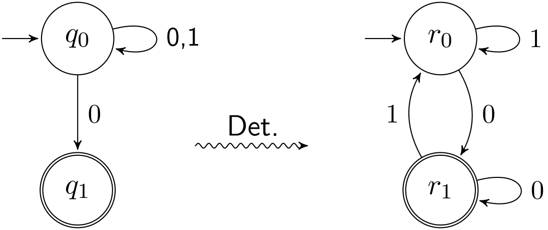
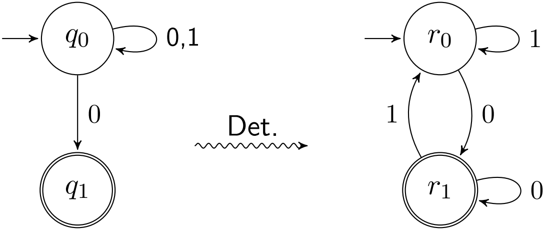


Illustration (suite)

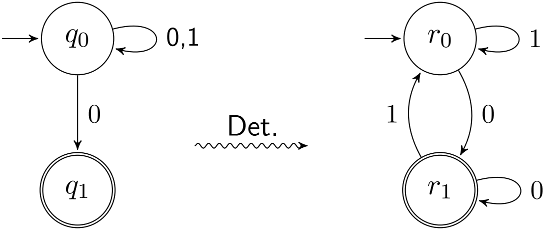
Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.



Les deux automates déterministes construits sont équivalents.

Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.



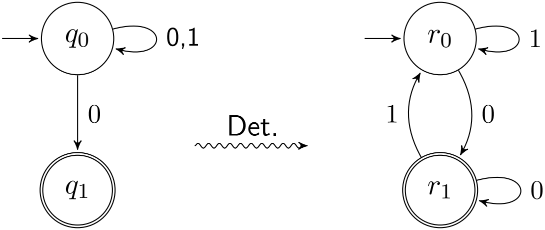
Les deux automates déterministes construits sont équivalents.

Définition (Minimalité)

Un AFD complet A est minimal si tout AFD complet équivalent à A a au moins autant d'états que A.
Cet automate minimal est unique au renommage des états près.

Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.



Les deux automates déterministes construits sont équivalents.

Définition (Minimalité)

Un AFD complet A est minimal si tout AFD complet équivalent à A a au moins autant d'états que A.
Cet automate minimal est unique au renommage des états près.

Question : comment construire de façon systématique un AFD minimal ?

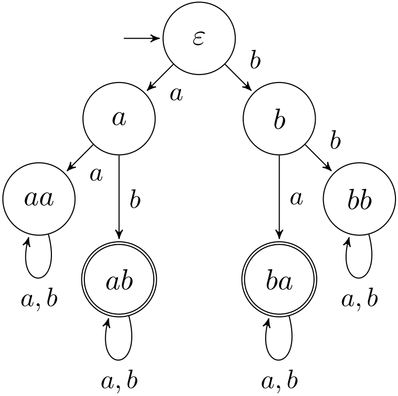
Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

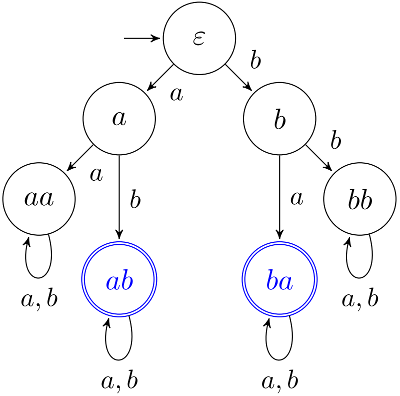
Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

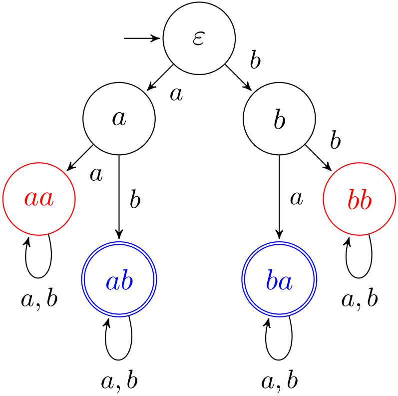
Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

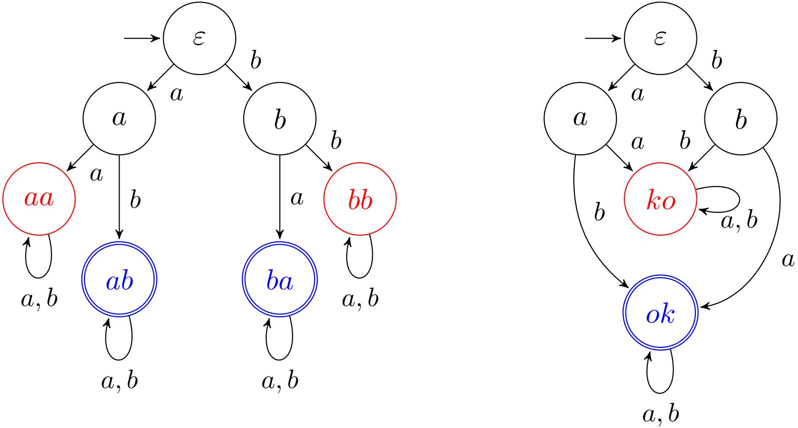
Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Généralisation

Définition (Équivalence de Nerode)

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un AFD complet.
Deux états $p, q \in Q$ sont équivalents dans A si et seulement si

$$\forall w \in V^*,\ (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

Généralisation

Définition (Équivalence de Nerode)

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ un AFD complet.
Deux états $p, q \in Q$ sont équivalents dans A si et seulement si

$$\forall w \in V^*,\ (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

On note alors $p \equiv_A q$, ou simplement $p \equiv q$.

Généralisation

Définition (Équivalence de Nerode)

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un AFD complet.
Deux états $p, q \in Q$ sont équivalents dans A si et seulement si

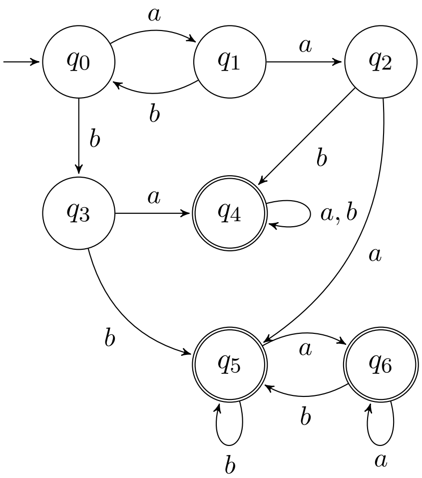
$$\forall w \in V^*,\ (\delta^*(p,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,w) \in F)$$

On note alors $p \equiv_A q$, ou simplement $p \equiv q$.

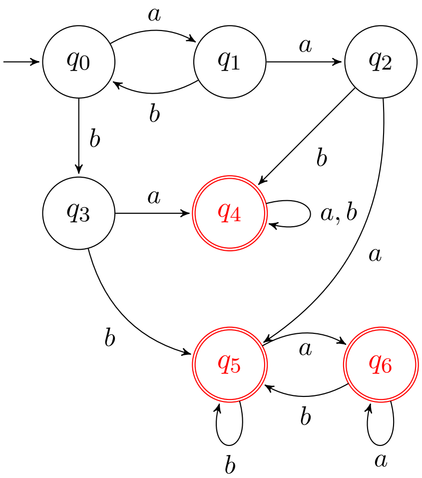
Proposition

Posons $A_p \stackrel{def}{=} \langle Q, V, \delta, \{p\}, F\rangle$ *et* $A_q \stackrel{def}{=} \langle Q, V, \delta, \{q\}, F\rangle$.
On a alors : $p \equiv_A q$ *si et seulement si* A_p *et* A_q *sont équivalents.*

Exemple

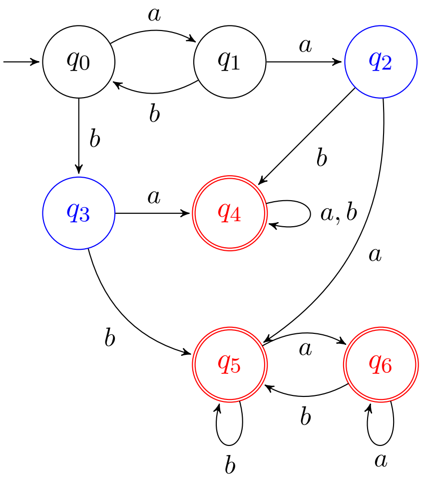


Exemple



$$q_4 \equiv_A q_5 \equiv_A q_6$$

Exemple



$$q_4 \equiv_A q_5 \equiv_A q_6$$

$$q_2 \equiv_A q_3$$

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. $\equiv_A$ *est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ *(ou* $[p]_A$*) la classe d'équivalence de* p.
2. *Si* $p \equiv_A q$, *alors* $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. $\equiv_A$ *est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ *(ou* $[p]_A$*) la classe d'équivalence de* p*.*
2. *Si* $p \equiv_A q$*, alors* $\forall w \in V^*$*,* $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$*.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ *alors* $\forall w \in V^*$*,* $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$*.*

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. $\equiv_A$ *est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ *(ou* $[p]_A$*) la classe d'équivalence de* p*.*
2. *Si* $p \equiv_A q$*, alors* $\forall w \in V^*$*,* $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$*.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ *alors* $\forall w \in V^*$*,* $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$*.*

Preuve : exercice.

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. *$\equiv_A$ est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ (ou $[p]_A$) la classe d'équivalence de p.
2. *Si $p \equiv_A q$, alors $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ alors $\forall w \in V^*$, $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

Preuve : exercice.

Définition

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un AFD complet et initialement connecté.
On définit $\mu(A) = \langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$, où :

- Q_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de Q ;

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. *$\equiv_A$ est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ (ou $[p]_A$) la classe d'équivalence de p.
2. *Si $p \equiv_A q$, alors $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ alors $\forall w \in V^*$, $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

Preuve : exercice.

Définition

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un AFD complet et initialement connecté.
On définit $\mu(A) = \langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$, où :

- Q_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de Q ;
- F_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de F ;

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. *$\equiv_A$ est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ (ou $[p]_A$) la classe d'équivalence de p.
2. *Si $p \equiv_A q$, alors $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ alors $\forall w \in V^*$, $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

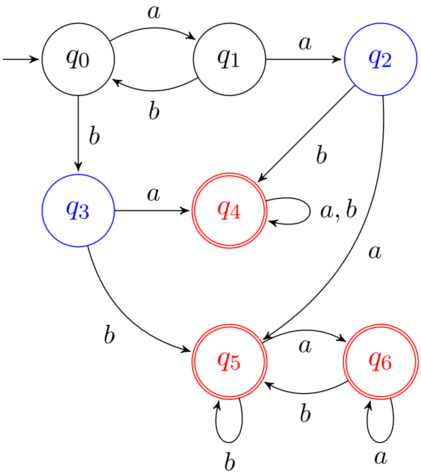
Preuve : exercice.

Définition

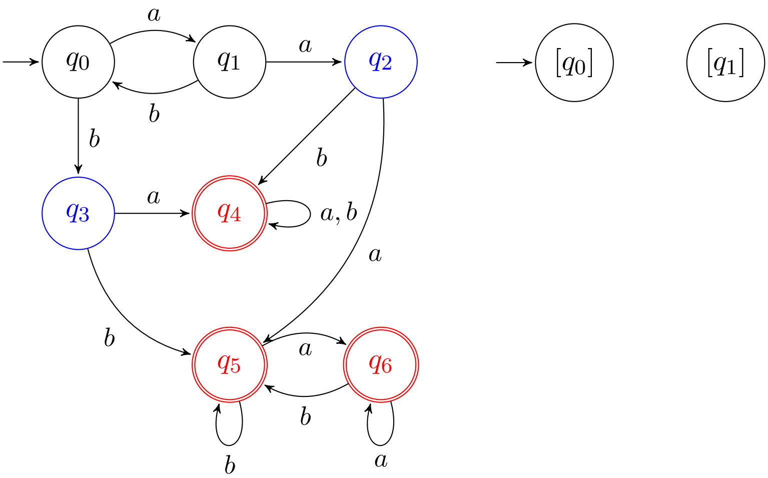
Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ un AFD complet et initialement connecté.
On définit $\mu(A) = \langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu \rangle$, où :

- Q_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de Q ;
- F_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de F ;
- $\forall [p] \in Q_\mu$, $\forall a \in V$, $\delta_\mu([p], a) = [\delta(p, a)]$.

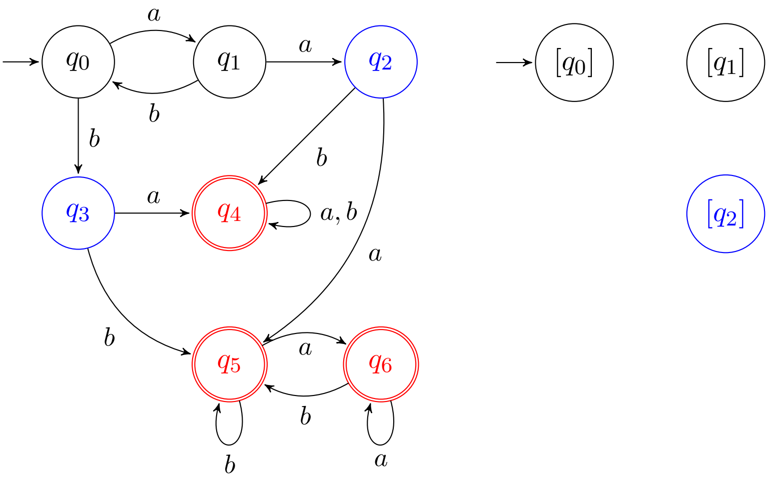
Exemple



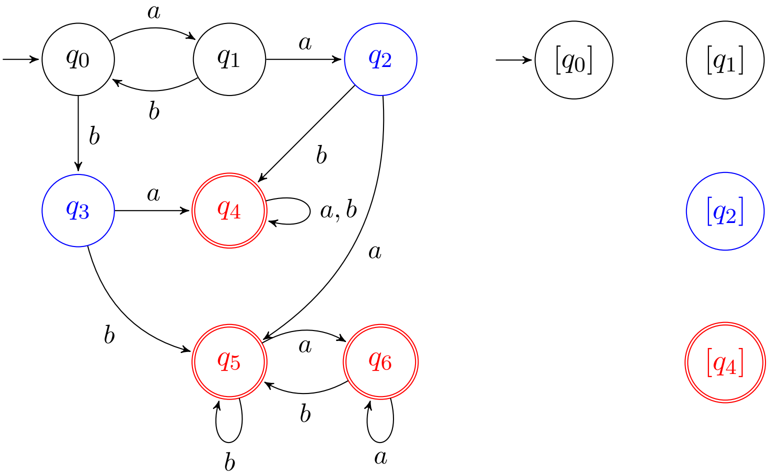
Exemple



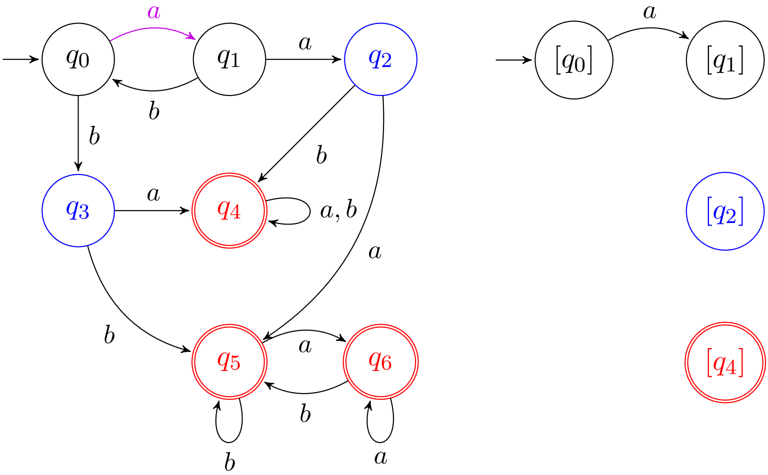
Exemple



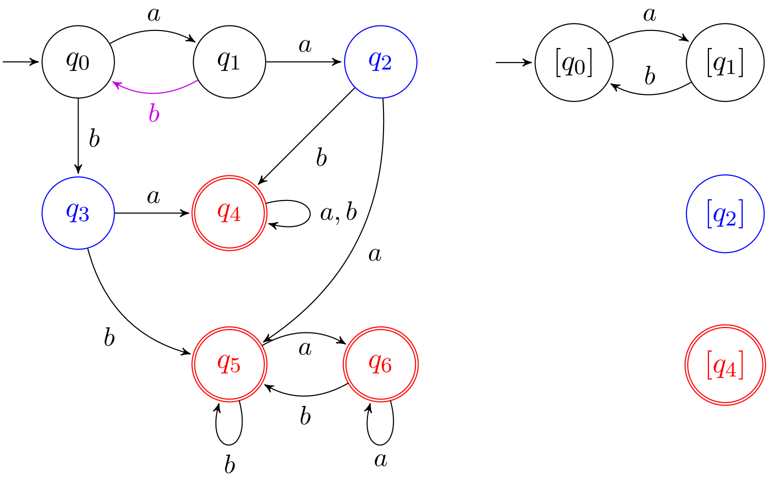
Exemple



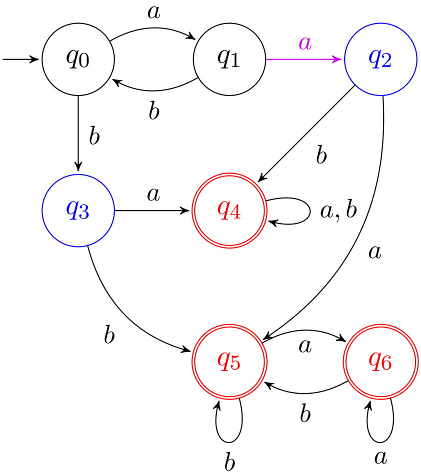
Exemple

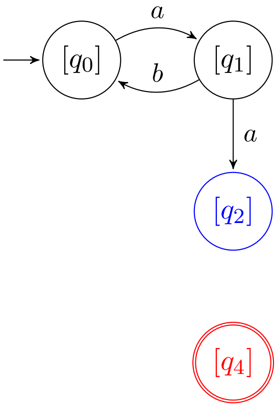


Exemple

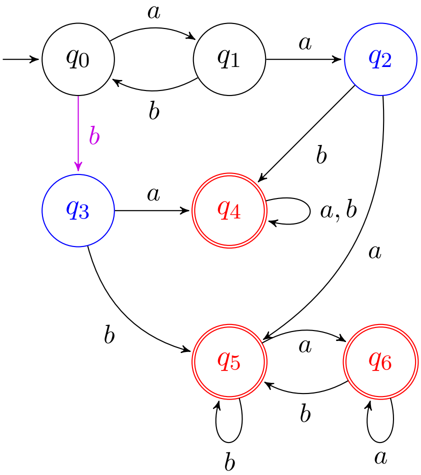


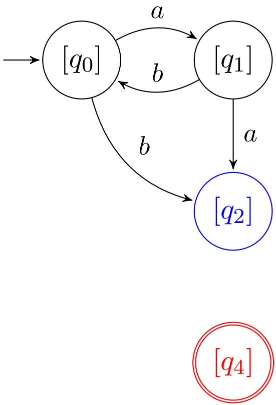
Exemple



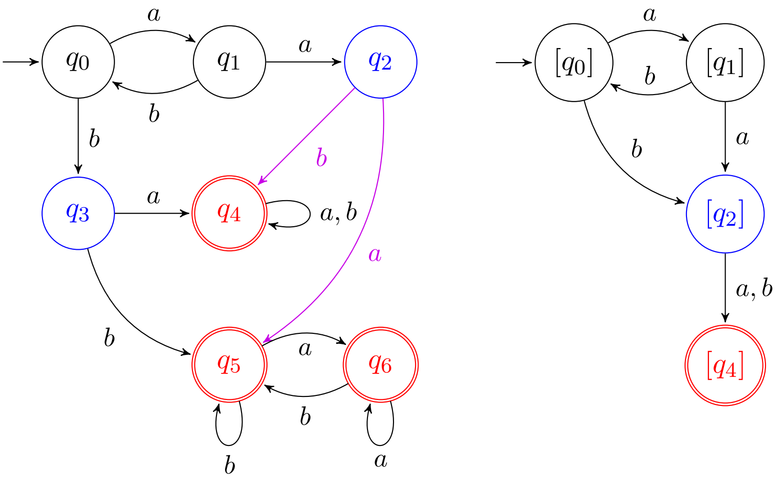


Exemple

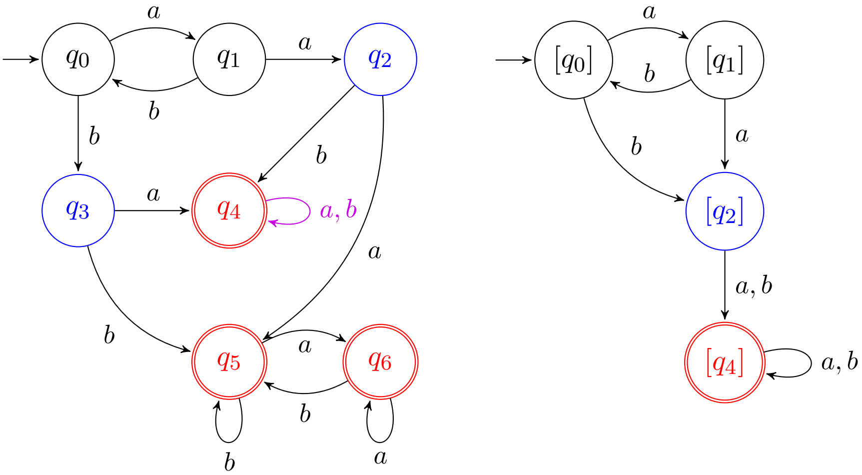




Exemple



Exemple



Construction d'un automate minimal

Soit un AFD $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A est simple.

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A est simple.
2. Comment déterminer efficacement la relation $\equiv$?

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A est simple.
2. Comment déterminer efficacement la relation $\equiv$?
   Par approximations successives

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A est simple.
2. Comment déterminer efficacement la relation $\equiv$?
   Par approximations successives

Définition

Pour $k \geq 0$, on définit la relation $\equiv_k$ sur Q par : $p \equiv_k q$ si et seulement si :

$$\forall w \in V^*,\ \text{si } |w| \leq k,\ \text{alors } (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A est simple.
2. Comment déterminer efficacement la relation $\equiv$?
   Par approximations successives

Définition

Pour $k \geq 0$, on définit la relation $\equiv_k$ sur Q par : $p \equiv_k q$ si et seulement si :

$$\forall w \in V^*,\ \text{si } |w| \leq k,\ \text{alors } (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

Autrement dit, $p \equiv_k q$ si ces deux états sont équivalents pour tous les mots de longueur au plus k.

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A est simple.
2. Comment déterminer efficacement la relation $\equiv$?
   Par approximations successives

Définition

Pour $k \geq 0$, on définit la relation $\equiv_k$ sur Q par : $p \equiv_k q$ si et seulement si :

$$\forall w \in V^*, \text{ si } |w| \leq k, \text{ alors } (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

Autrement dit, $p \equiv_k q$ si ces deux états sont équivalents pour tous les mots de longueur au plus k.

Si $p \equiv_k q$, alors les automates A_p et A_q reconnaissent exactement les mêmes mots de longueur au plus k.

Calcul de $\equiv$

Proposition

On a les propriétés suivantes :

$$\equiv_{k+1} \quad \subseteq \quad \equiv_k$$

Calcul de $\equiv$

Proposition

On a les propriétés suivantes :

$$\equiv_{k+1} \quad \subseteq \quad \equiv_k \qquad\qquad \equiv \quad = \quad \bigcap_{k \geq 0} \equiv_k$$

Calcul de $\equiv$

Proposition

On a les propriétés suivantes :

$$\equiv_{k+1} \;\subseteq\; \equiv_k \qquad\qquad \equiv \;=\; \bigcap_{k\geq 0} \equiv_k$$

Proposition (Stabilisation de la suite $\equiv_k$)

Si A est un AFD *à n états, alors*
il existe $k \leq n$ tel que les relations $\equiv_k$, $\equiv_{k+1}$ et $\equiv$ sont identiques.

Donc, si on sait calculer les relations $\equiv_k$ efficacement,
on saura en déduire la relation $\equiv$.

Calcul de $\equiv$ (suite)

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. $p \equiv_0 q$ *si et seulement si* $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
2. $\forall k \geq 0$, $p \equiv_{k+1} q$ *si et seulement si*

$$p \equiv_k q \;\; et \; \forall a \in V, \;\; \delta(p, a) \equiv_k \delta(q, a)$$

Preuve : exercice

Calcul de $\equiv$ (suite)

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. $p \equiv_0 q$ *si et seulement si* $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
2. $\forall k \geq 0$, $p \equiv_{k+1} q$ *si et seulement si*

$$p \equiv_k q \ \textit{et} \ \forall a \in V,\ \delta(p,a) \equiv_k \delta(q,a)$$

Preuve : exercice

Conséquences

1. $\equiv_0$ contient deux classes : F et $Q \setminus F$

Calcul de $\equiv$ (suite)

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. $p \equiv_0 q$ *si et seulement si* $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
2. $\forall k \geq 0$, $p \equiv_{k+1} q$ *si et seulement si*

$$p \equiv_k q \ \textit{et} \ \forall a \in V,\ \delta(p,a) \equiv_k \delta(q,a)$$

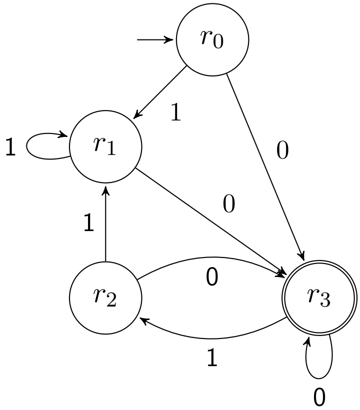
Preuve : exercice

Conséquences

1. $\equiv_0$ contient deux classes : F et $Q \setminus F$
2. Si $p \equiv_k q$ et $\exists a \in V$ tel que $\delta(p,a) \not\equiv_k \delta(q,a)$, alors $p \not\equiv_{k+1} q$

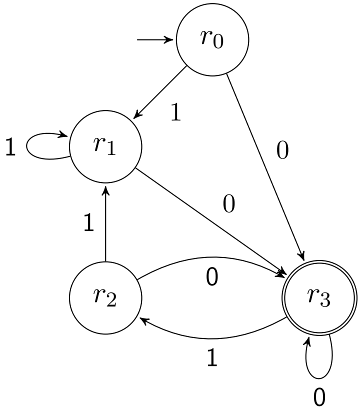
Exemple

Automate de la diapo 2



Exemple

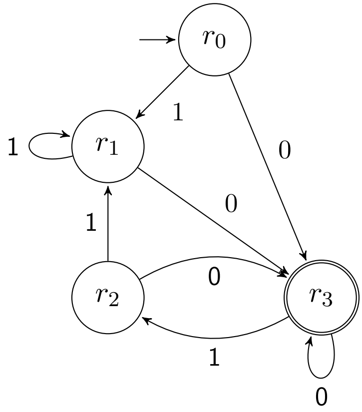
Automate de la diapo 2



$$\equiv_0 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\}\,,\ \{r_3\}$$

Exemple

Automate de la diapo 2

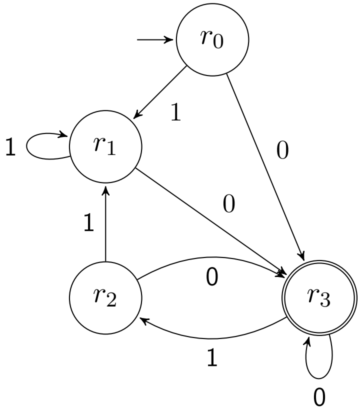


$$\equiv_0 \quad : \quad \{{\color{red}r_0}, {\color{red}r_1}, r_2\}\,,\ \{r_3\}$$

$$\equiv_1 \quad : \quad \qquad\qquad\qquad ,\ \{r_3\}$$

Exemple

Automate de la diapo 2

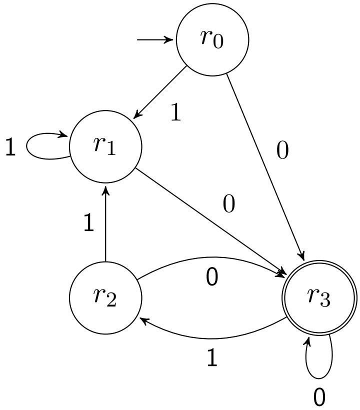


$$\equiv_0 \ : \ \{\textcolor{red}{r_0}, \textcolor{red}{r_1}, r_2\}, \ \{r_3\}$$

$$\equiv_1 \ : \ \{r_0, r_1\} \quad , \ \{r_3\}$$

Exemple

Automate de la diapo 2

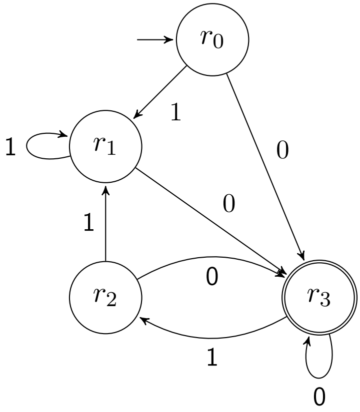


$$\equiv_0 \;:\; \{r_0, r_1, r_2\},\ \{r_3\}$$

$$\equiv_1 \;:\; \{r_0, r_1\} \quad ,\ \{r_3\}$$

Exemple

Automate de la diapo 2

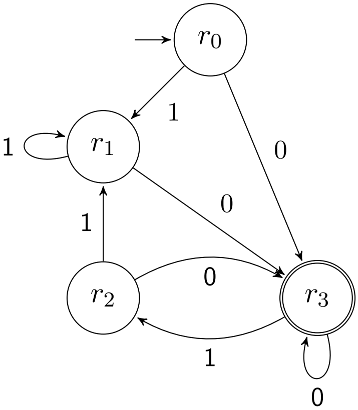


$$\equiv_0 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\}, \ \{r_3\}$$

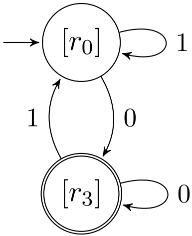
$$\equiv_1 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\}, \ \{r_3\}$$

Exemple

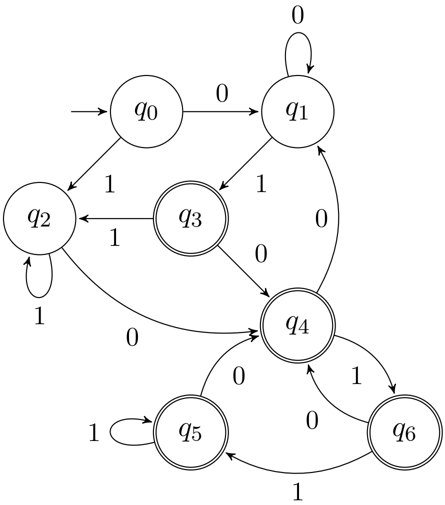
Automate de la diapo 2



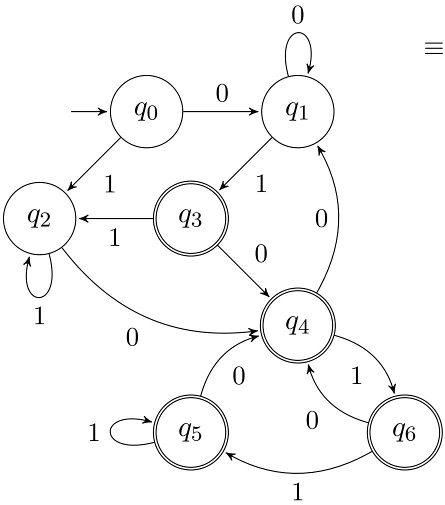
$$\equiv_0 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\}\,,\ \{r_3\}$$
$$\equiv_1 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\},\ \{r_3\}$$



Exemple 2

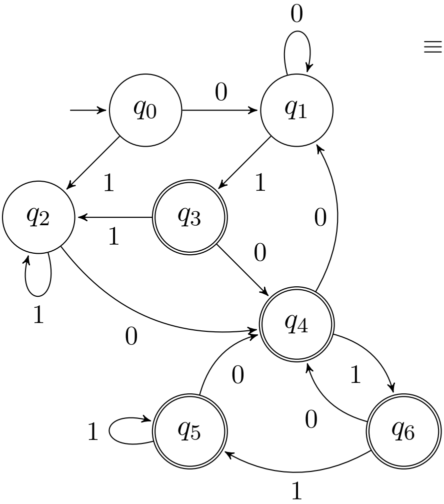


Exemple 2



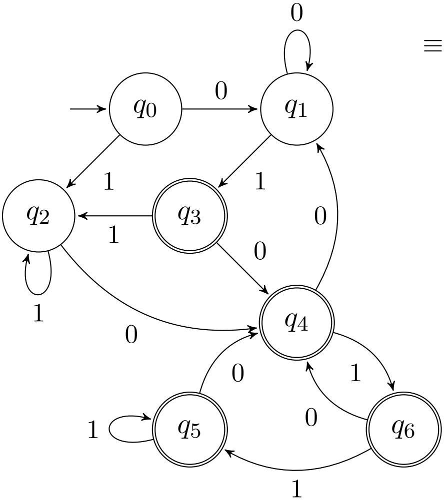
$\equiv_0 : \{q_0, \ q_1, \ q_2\} \quad \{q_3, \ q_4, \ q_5, \ q_6\}$

Exemple 2



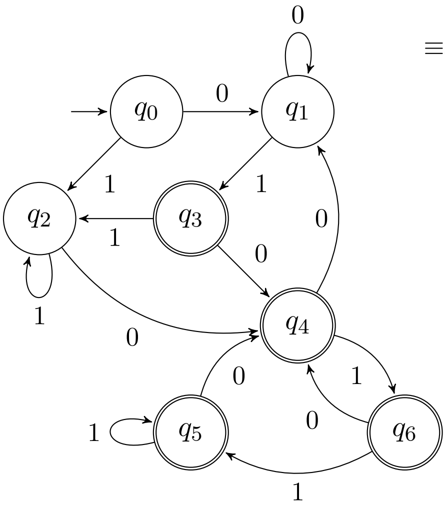
$$\begin{array}{lllll} & \color{red}{A} & & \color{blue}{B} \\ \equiv_0 : & \{q_0, \; q_1, \; q_2\} & & \{q_3, \; q_4, \; q_5, \; q_6\} \end{array}$$

Exemple 2



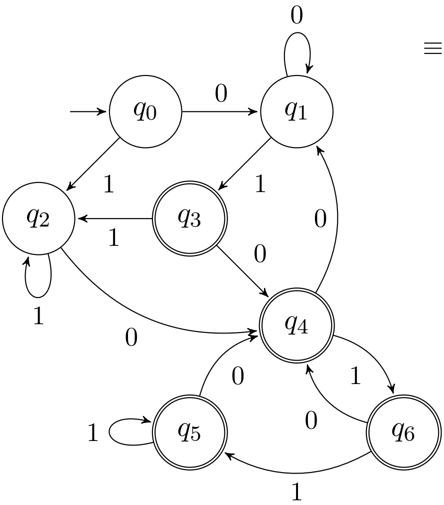
$$\begin{array}{lcc} & \color{red}{A} & \color{blue}{B} \\ \equiv_0 : & \{q_0, \; q_1, \; q_2\} & \{q_3, \; q_4, \; q_5, \; q_6\} \\ & \color{red}{A} & \end{array}$$

Exemple 2



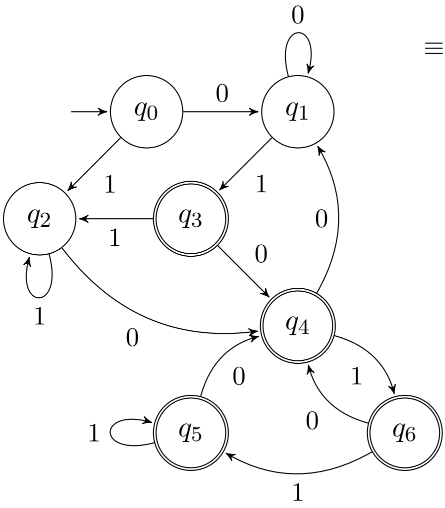
$$\equiv_0 : \overset{A}{\{\underset{AA}{q_0},\quad q_1,\quad q_2\}} \qquad \overset{B}{\{q_3,\quad q_4,\quad q_5,\quad q_6\}}$$

Exemple 2



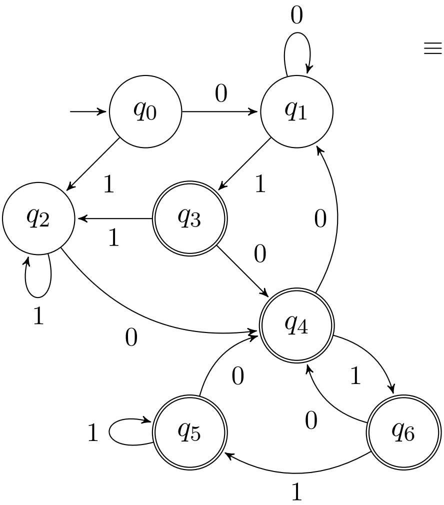
$$\begin{array}{lcc} & \color{red}{A} & \color{blue}{B} \\ \equiv_0 : & \{q_0, \quad q_1, \quad q_2\} & \{q_3, \quad q_4, \quad q_5, \quad q_6\} \\ & \color{red}{AA \quad A} & \end{array}$$

Exemple 2



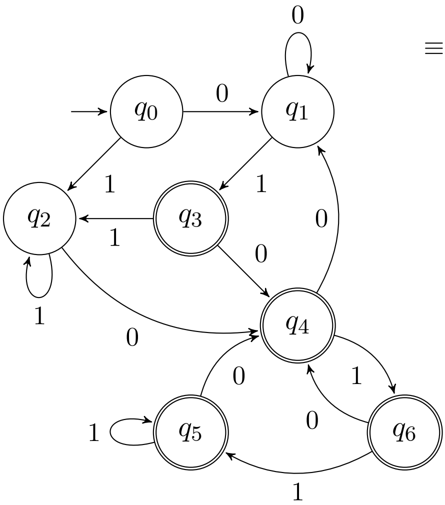
$$\begin{array}{lccccccc} & & A & & & B & & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & AA & AB & & & & & \end{array}$$

Exemple 2



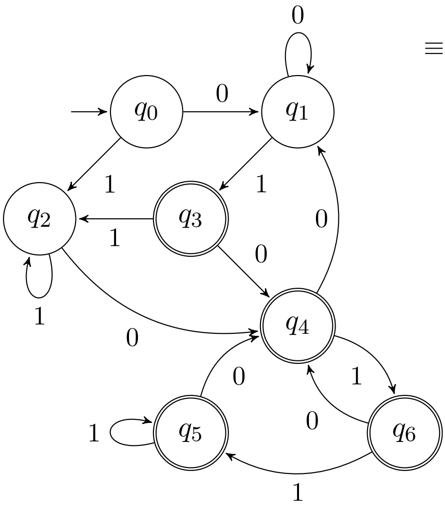
$$\begin{array}{lccccccc} & & A & & & B & & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & AA & AB & B & & & & \end{array}$$

Exemple 2



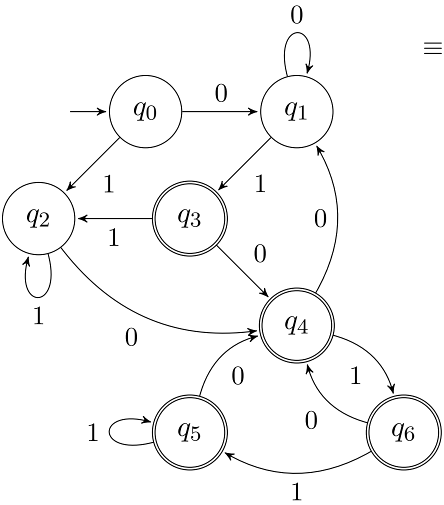
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & A & & & & B & & \\
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & AA & AB & BA & & & & &
\end{array}
$$

Exemple 2



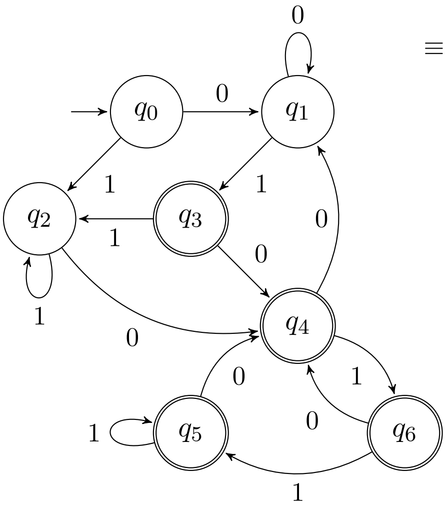
$$\begin{array}{lccccccc}
 & & A & & & & B & \\
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & AA & AB & BA & BA & & &
\end{array}$$

Exemple 2



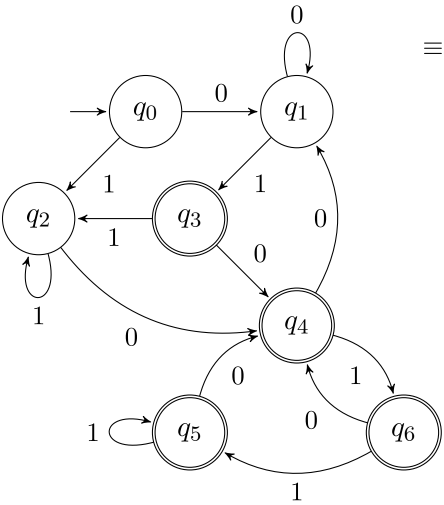
$$\begin{array}{llllllll}
 & & A & & & & B & \\
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & AA & AB & BA & BA & AB & &
\end{array}$$

Exemple 2



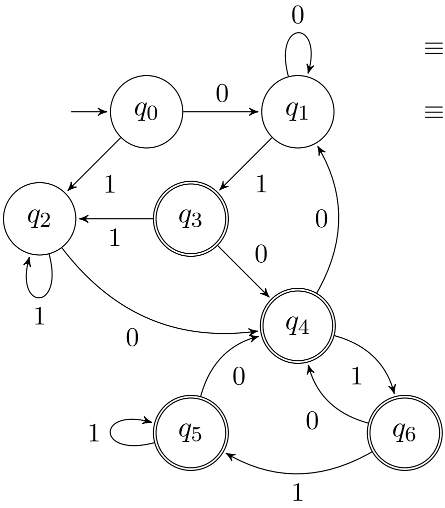
	A			B			
$\equiv_0 :$	$\{q_0,$	$q_1,$	$q_2\}$	$\{q_3,$	$q_4,$	$q_5,$	$q_6\}$
	AA	AB	BA	BA	AB	BB	

Exemple 2



$$\begin{array}{lllllllll} & & \color{red}{A} & & & & \color{blue}{B} & & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & \color{red}{AA} & \color{red}{A}\color{blue}{B} & \color{blue}{B}\color{red}{A} & & \color{blue}{B}\color{red}{A} & \color{red}{A}\color{blue}{B} & \color{blue}{BB} & \color{blue}{BB} \end{array}$$

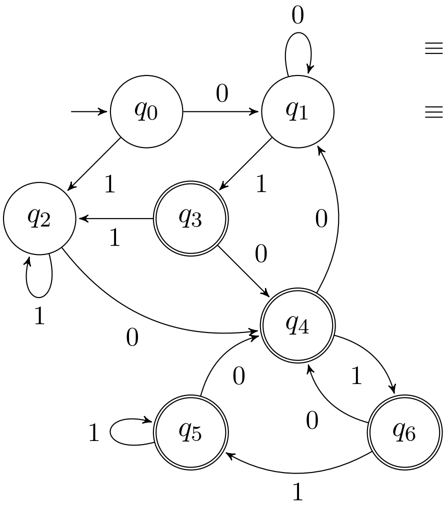
Exemple 2



$$
\begin{array}{lllllll}
 & & A & & & B & \\
\equiv_0 : \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
AA & AB & BA & BA & AB & BB & BB
\end{array}
$$

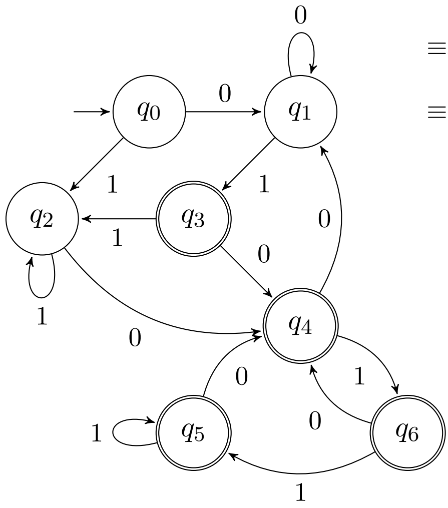
$\equiv_1 : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2\}$

Exemple 2



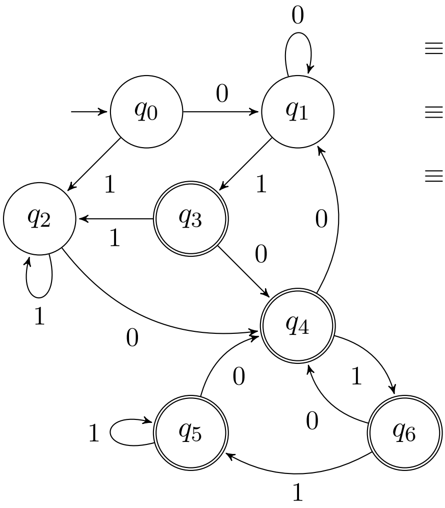
		A				B	
$\equiv_0$:	$\{q_0,$	$q_1,$	$q_2\}$	$\{q_3,$	$q_4,$	$q_5,$	$q_6\}$
	AA	AB	BA	BA	AB	BB	BB
$\equiv_1$:	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_5,$	$q_6\}$

Exemple 2



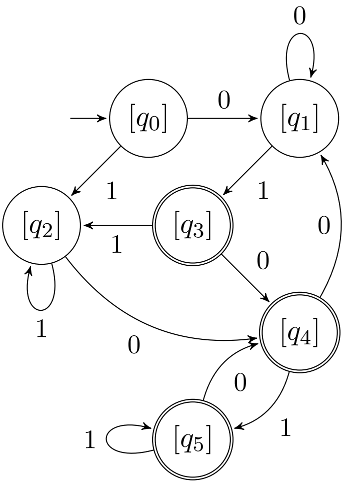
$$\begin{array}{lccccccc} & & A & & & & B & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & AA & AB & BA & BA & AB & BB & BB \\ \equiv_1 : & \{q_0\} & \{q_1\} & \{q_2\} & \{q_3\} & \{q_4\} & \{q_5, & q_6\} \\ & & & & & & 45 & 45 \end{array}$$

Exemple 2



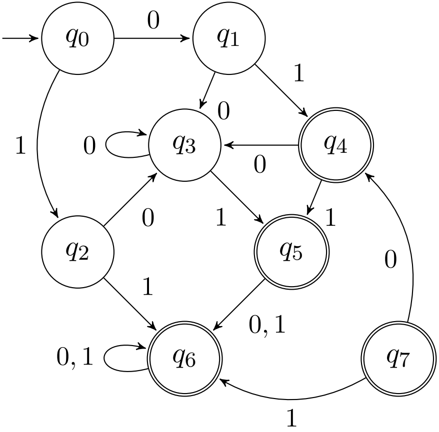
$$
\begin{array}{lccccccc}
 & & A & & & B & & \\
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & AA & AB & BA & BA & AB & BB & BB \\
\equiv_1 : & \{q_0\} & \{q_1\} & \{q_2\} & \{q_3\} & \{q_4\} & \{q_5, & q_6\} \\
 & & & & & & 45 & 45 \\
\equiv_2 : & \{q_0\} & \{q_1\} & \{q_2\} & \{q_3\} & \{q_4\} & \{q_5, & q_6\}
\end{array}
$$

Exemple (solution)



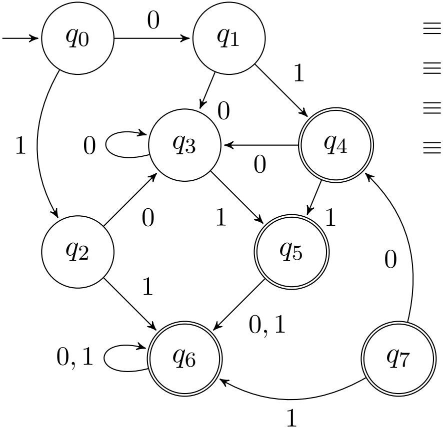
Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Exercice

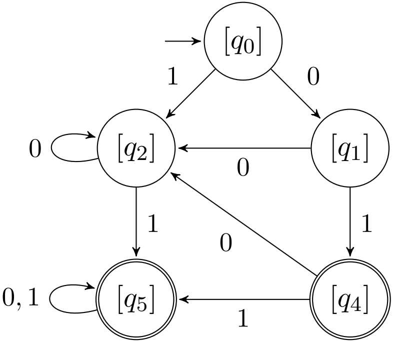
Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

$$\equiv_0 \quad : \quad \{q_0, q_1, q_2, q_3\}\,,\ \{q_4, q_5, q_6\}$$
$$\equiv_1 \quad : \quad \{q_0\}\,,\{q_1, q_2, q_3\}\,,\{q_4\}\,,\{q_5, q_6\}$$
$$\equiv_2 \quad : \quad \{q_0\}\,,\{q_1\}\,,\{q_2, q_3\}\,,\{q_4\}\,,\{q_5, q_6\}$$
$$\equiv_3 \quad : \quad \{q_0\}\,,\{q_1\}\,,\{q_2, q_3\}\,,\{q_4\}\,,\{q_5, q_6\}$$

Solution



Récapitulatif

1. Suppression des ε-transitions

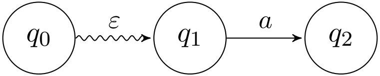
$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a} q_2$$

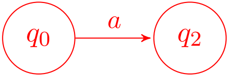
Récapitulatif

1. Suppression des ε-transitions

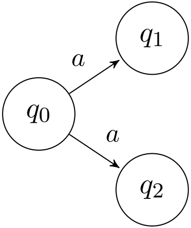
Récapitulatif

1. Suppression des ε-transitions



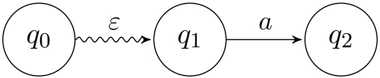


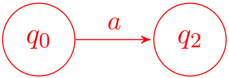
2. Déterminisation



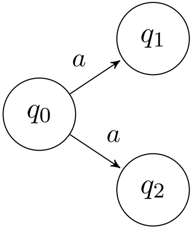
Récapitulatif

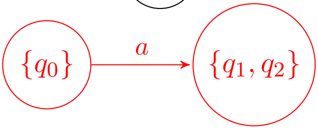
1. Suppression des ε-transitions





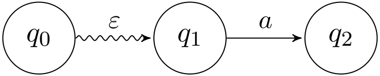
2. Déterminisation

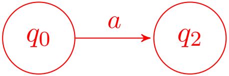




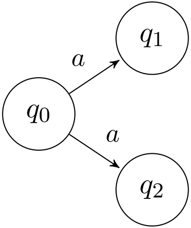
Récapitulatif

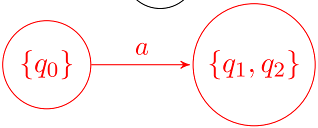
1. Suppression des ε-transitions



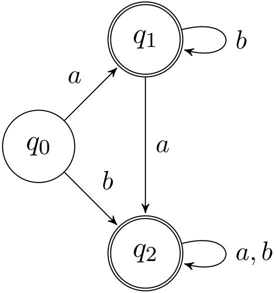


2. Déterminisation





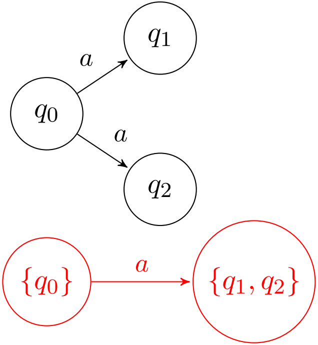
3. Minimisation



Récapitulatif

1. Suppression des ε-transitions

2. Déterminisation



3. Minimisation