Chapter 2

Généralités sur les processus aléatoires en temps continu

2.1 Définitions

Définition 2.1. *Processus stochastique.*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $I = \mathbb{R}^+$ *(ou* $[0, T]$ *avec* $T > 0$*). On appelle processus aléatoire (ou stochastique) à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *toute famille* $X = (X_t)_{t \in I}$ *de vecteurs aléatoires définis sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Remarques :

1. A $t \in I$ fixé X_t est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$:
$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ X_t^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$
2. A $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ de $I \to \mathbb{R}^d$ est appelée **trajectoire** du processus X. Par suite et par abus de langage on qualifiera également ω de trajectoire du processus.
3. On dira que le processus X est (à trajectoires) **continu**(es) si ses trajectoires sont $\mathbb{P}$-p.s. continues :
$$\exists D \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \{\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ n'est pas continue } \} \subseteq D \text{ avec } \mathbb{P}(D) = 0$$

Définition 2.2. *Loi, Indépendance, Tribu engendrée.*

a. *Deux processus stochastiques* X *et* Y *ont même loi si toutes leurs marginales finidimensionnelles ont mêmes lois : i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t_1, ..., t_n \in I$ *les vecteurs* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *et* $(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n})$ *ont mêmes lois.*

b. *Deux processus* X *et* Y *sont indépendants si leurs tribus engendrées naturelles* $\mathcal{F}^X = \sigma(X)$ *et* $\mathcal{F}^Y = \sigma(Y)$ *sont indépendantes : i.e.* $\forall A \in \mathcal{F}^X$ *et* $\forall B \in \mathcal{F}^Y$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

c. *On appelle tribu engendrée par les trajectoires de* X *jusqu'au temps* $t > 0$ *la tribu engendrée par l'application* $s \mapsto X_s$ *de* $[0, T] \to \mathbb{R}^d$*. On la note* $\mathcal{F}_t$ *et on a* $\forall s < t$
$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}^X \subseteq \mathcal{F}$$

2.2 Exemple : Processus Gaussiens

Définition 2.3. *Processus Gaussien.*
Un processus $X = (X_t)_{t \in I}$ *à valeurs réelles est un* ***processus gaussien*** *si pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tous* $t_1 < ... < t_n \in I$ *le vecteur* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien : i.e. les lois finidimensionnelles de* X *sont toutes gaussiennes.*

Comme pour les lois gaussiennes un processus gaussien à des (fonctions) paramètres carctéristiques.

Définition 2.4. *Moyenne et fonction de covariances.*
Si X est un processus gaussien on appelle ***moyenne*** *l'application $m_X : I \to \mathbb{R}$ définie par $m_X(t) := \mathbb{E}(X_t)$ et* ***fonction de covariance*** *l'application $\Gamma_X : I \times I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\Gamma_X(s,t) = \mathbf{Cov}(X_s, X_t)$$

Exercices :

1. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ on pose $X_t = tZ$. Montrer que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus gaussien continu dont on donnera les caractéristiques.
2. Soient X et Y deux processus gaussiens. Est-ce que $X+Y$ est un processus gaussien?

On ne sera pas étonné par la proposition immédiate :

Proposition 2.5. *Caractérisation.*
Deux processus gaussiens ont même loi si et seulement si ils ont mêmes fonctions moyenne et de covariance.

2.3 Versions et processus indistinguables

Lorsqu'on a affaire à plusieurs processus on souhaite pouvoir être capable de les distinguer ou bien de les identifier. Une des difficulté inhérente au temps continu est que ce n'est pas une chose immédiate car beaucoup de cas pathologiques peuvent apparaître. Toutefois on verra que les propriétés de continuité sont parfois suffisantes pour arriver à nos fins.

Définition 2.6. *Version et processus indistinguables.*
Soient $X = (X_t)_{t\in I}$ et $Y = (Y_t)_{t\in I}$ deux processus stochastiques sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dira que

1. *X est une version (ou modification) de Y si et seulement si $\forall t \in I$*
$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$
2. *X et Y sont indistinguables si et seulement si*
$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in I) = 1$$
ou de manière équivalemente
$$\exists A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \{\omega \in \Omega : \exists t \in I \text{ t.q. } X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \subseteq A \text{ avec } \mathbb{P}(A) = 0.$$

Remarque : Si X et Y sont indistinguables alors X est une version de Y qui à son tour implique que X et Y ont même loi. Les réciproques sont fausses. Toutefois :

Proposition 2.7. *Si X est une version de Y et si de plus les trajectoires de X et Y sont continue alors X et Y sont indistinguables.*

Exercices :

1. Trouver des contres exemples justifiant la remarque ci dessus.
2. Montrer la proposition ci dessus.

Le résultat qui suit (que l'on admettra à ce niveau du cours) est d'une portée très grande. Il stipule qu'un contrôle en moyenne sur les trajectoires d'un processus implique l'existence d'une version continu du processus. Il se révèlera fondamental pour l'existence mathématique du mouvement Brownien.

Théorème 2.8. *de Kolmogorov-Chentsov.*
Soit $X = (X_t)_{t\in I}$ un processus stochastique vérifiant $\forall T > 0$, $\exists \alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0$ des constantes telles que $\forall\ 0 \leq s,t \leq T$

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^\alpha) \leq \delta |t-s|^{1+\beta}$$

Alors il existe $\widetilde{X}$ une version continue de X. De plus $\widetilde{X}$ est localement Hölderienne d'exposant $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[$.

Chapter 3

Mouvement Brownien

On rappelle que dans ce cours $I = \mathbb{R}^+$ ou $[0, T]$ pour un $T > 0$.

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Mouvement Brownien Standard.*
On appelle ***mouvement Brownien standard*** *réel (M.B.S.) tout processus* $W = (W_t)_{t\in I}$ *à* ***trajectoires continues*** *vérifiant*

a. $W_0 = 0$ *p.s.;*

b. accroissements stationnaires gaussien : $\forall 0 \leq s < t \in I$ *la v.a.* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*;*

c. accroissements indépendants : $\forall n \geq 1$ *et* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ *les v.a.* $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ *pour* $0 \leq i < n$ *sont indépendantes.*

Remarque : On observe que $\forall t \in I$ la v.a. $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. De plus $\forall 0 \leq s < t$ on a $\mathbf{Cov}(W_s, W_t) = s$.
Exercice : prouver les affirmations de la remarque ci dessus.
On peut également définir le

Définition 3.2. *Mouvement Brownien issu de* 0*.*
On appelle ***mouvement Brownien issu de*** 0 *réel tout processus* $B = (B_t)_{t\in I}$ *à* ***trajectoires continues*** *vérifiant*

a. $B_0 = 0$ *p.s.;*

b. accroissements stationnaires : $\forall 0 \leq s < t \in I$ *la v.a.* $B_t - B_s$ *a même loi que* B_{t-s}*;*

c. accroissements indépendants : $\forall n \geq 1$ *et* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ *les v.a.* $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ *pour* $0 \leq i < n$ *sont indépendantes.*

De la même façon que la loi normale est reliée à la loi normale standard, le mouvement Brownien issu de 0 est relié au M.B.S. ce qui fait de ce dernier un processus central. Ceci est énoncé dans le résultat qui suit.

Théorème 3.3. *(admis)*
Si B *est un mouvement Brownien issu de* 0 *alors il existe deux paramètres* $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma > 0$ *tels que le processus* W *définit par*

$$W_t = \frac{B_t - \mu t}{\sigma}, \ \forall t \in I$$

est un M.B.S.

Remarque : Ainsi si $B = (B_t)_{t\in I}$ est un mouvement Brownien issu de 0, avec $\mu := \mathbb{E}(B_1)$ et $\sigma^2 := \mathbf{Var}(B_1)$, alors on pourra toujours écrire

$$B_t = \mu t + \sigma W_t$$

avec $W = (W_t)_{t\in I}$ M.B.S. En conséquence on observe que $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.
La définition et le résultat précédent établissent qu'un MBS est un processus centré à trajectoires continue, à accroissements stationnaires et indépendants de variance t au temps t.
La proposition qui suit établit qu'il s'agit également d'un processus gaussien centré de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t$ et à trajectoires continues.

Proposition 3.4. *M.B.S comme processus gaussien.*
Soit $W = (W_t)_{t\in I}$ un processus à valeurs réelles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Le processus W est un M.B.S.*
2. *Le processus W est gaussien, centré à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t$.*

Preuve. On commence à montrer que 1. implique 2.
Les accroissements $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ étant indépendants pour tous choix $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et respectivement de loi $\mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$ le vecteur $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^T$ est gaussien centré et de matrice de covariance diagonale $diag(t_1, t_2 - t_1, ..., t_n - t_{n-1})$. De plus comme

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

donc par la Proposition 1.13 on conclu que le vecteur $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ est gaussien centré. De plus le processus est par définition à trajectoires continue et on a pour tous $s < t \in I$, $K(s,t) = \mathbf{Cov}(W_s, W_t) = s = s \wedge t$.

A présent pour montrer que 2. implique 1.
Il suffit de montrer que $W_0 = 0$ p.s. et que W est à accroissements indépendants et stationnaires gaussiens avec la bonne variance associée.

Comme W est un processus gaussien centré on en déduit que pour tous $s < t \in I$

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}(W_t - W_s) = \mathbf{Var}(W_t) + \mathbf{Var}(W_s) - 2\mathbf{Cov}(W_t, W_s) = t + s - 2s = t - s$$

pour l'indépendance des accroissements il suffit de calculer leurs covariances : $\forall s < t \leq u < v \in I$

$$\mathbf{Cov}(W_v - W_u, W_t - W_s) = \mathbf{Cov}(W_v, W_t) - \mathbf{Cov}(W_u, W_t) - \mathbf{Cov}(W_v, W_s) + \mathbf{Cov}(W_u, W_s) = t - s - t + s = 0$$

le vecteur étant gaussien cela signifie l'indépendance de ses coordonnées.
Enfin $\mathbb{E}(W_0) = 0$ et $\mathbf{Var}(W_0) = 0$ donc $W_0 = 0$ p.s. □

3.1.1 Existence du M.B.S.

On va utiliser le théorème de Kolmogorov-Centsov pour justifier l'existence d'un processus continue vérifiant bien les propriétés du M.B.S.
On prend X un processus à accroissements indépendants et stationnaire vérifiant $X_0 = 0$ p.s. et $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ pour tous $s < t \in I$. (L'existence d'un tel processus est une conséquence du théorème de consistance de Kolmogorov qui montre l'existence d'un tel processus sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).
On rappelle que si $Z \in \mathcal{N}(0,1)$ alors Z a des moments de tout ordre en particulier on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(Z^{2n+1}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(Z^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$$

ce qui implique ici que

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^{2n}] = |t-s|^n \frac{(2n)!}{n!2^n}$$

En utilisant le théorème de Kolmogorov-Centsov avec $\alpha = 2n$, $\beta = n-1$ et $\delta = \frac{(2n)!}{n!2^n}$ on en déduit :

1. il existe $W = \widetilde{X}$ une version continue de X, et donc W est un M.B.S.
2. De plus W est localement Hölderien d'exposant $\gamma \in]0, 1/2[$.

3.2 Rappels/Compléments de théorie des probabilités

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabiilité.

Définition 3.5. *Etant donnés $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ on définit les deux événements* $\limsup A_n$ *et* $\liminf A_n$ *par*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \text{ et } \liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

Exercice : décrire en terme d'événement la signification de $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ et montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
On énonce ici deux résultats célèbres de la théorie des probabilités.

Lemme 3.6. *Lemmes de Borel-Cantelli*

1. *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements tels que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

2. *Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements **indépendants** tels que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = +\infty$$

alors $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 1$.

Exercices

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. montrer que si $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$$

alors X_n converge presque sûrement vers 0.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}xp(\log(n))$.

   [2.1] Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.

   [2.2] Montrer que $\mathbb{P}(|X_n| > 1) = 1/n$ et en déduire que X_n ne converge pas p.s.