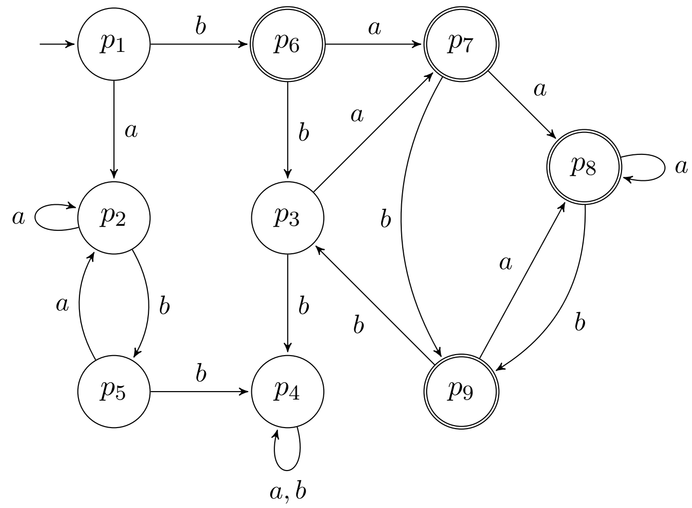
Le barème est indicatif ; la rigueur des preuves et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 - Minimisation d'automate (3 points)

▷ **Question 1** *(3 points)*
Minimiser l'automate déterministe ci-dessous, en appliquant strictement la méthode vue en cours :



Exercice 2 - Opérations sur les langages (9 points)

Soit V un vocabulaire, et $w \in V^*$. Un *préfixe strict* de w est un préfixe de w différent de w. L'ensemble des préfixes stricts de w est donc défini par :

$$PS(w) \quad = \quad \{x \in V^* \mid \exists y \in V^+ \, : \, w = xy\}$$

Soit L un langage sur V ($L \subseteq V^*$). On définit les deux langages $Min(L)$ et $Max(L)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Min(L) &= \{w \in L \mid \forall x \in PS(w) \, : \, x \notin L\} \\ Max(L) &= \{w \in L \mid \forall x \in L \, : \, w \notin PS(x)\} \end{aligned}$$

$Min(L)$ est donc l'ensemble des mots de L dont aucun préfixe strict n'est dans L et $Max(L)$ est l'ensemble des mots de L qui ne sont préfixe strict d'aucun mot de L.

▷ **Question 2** *(3 points)*
Pour chacun des langages L_i représentés par les expressions régulières suivantes, donner des expressions régulières représentant les langages $Min(L_i)$ et $Max(L_i)$.
$L_1 : a^*$ $\qquad$ $L_2 : a^*b$ $\qquad$ $L_3 : a^*ba^*$

▷ **Question 3** *(2 points)*
On veut prouver que si L est régulier, alors $Min(L)$ l'est aussi. Montrer comment construire, à partir d'un automate fini ***déterministe*** *A reconnaissant L, un automate fini A' reconnaissant $Min(L)$. Justifier la construction. Appliquer votre construction aux trois langages de la question 2. Expliquer en quoi le déterminisme de A est important.*

▷ **Question 4** *(4 points)*
On veut prouver que si L est régulier, alors $Max(L)$ l'est aussi. Montrer comment construire, à partir d'un automate fini ***déterministe*** *A reconnaissant L, un automate fini A' reconnaissant $Max(L)$. Justifier la construction. Appliquer votre construction aux trois langages de la question 2. Expliquer en quoi le déterminisme de A est important.*

Exercice 3 - Modélisation de langages (8 points)

On s'intéresse à un langage qui permet d'affecter des constantes numériques à des identificateurs. Un identificateur est une lettre en minuscule et une constante numérique une suite de chiffres. Dans un premier temps on considère des affectations atomiques : Idf = Num.
Soit la grammaire G ci-dessous avec V_T={a, ..., z, 0, ..., 9, = } le vocabulaire terminal, V_N={Idf, Num, Chiffre, Affect} le vocabulaire non-terminal et Affect l'axiome.

Idf	$\rightarrow$	a | ... | z
Num	$\rightarrow$	Chiffre | Chiffre Num
Chiffre	$\rightarrow$	0 | ... | 9
Affect	$\rightarrow$	Idf = Num

On rappelle que la notation $A \rightarrow \alpha_1 \mid ... \mid \alpha_n$ est une abréviation pour les n règles $A \rightarrow \alpha_1$, ..., $A \rightarrow \alpha_n$.

▷ **Question 5** *(1 point)*
Donner l'arbre de dérivation de l'affectation « x = 13 ».

▷ **Question 6** *(2 points)*
On considère maintenant des suites d'identificateurs (non-terminal Suite-Idf*) et des suites de constantes numériques (non-terminal* Suite-Num*) en prenant une notation à la Python : une suite d'identificateurs est constituée d'identificateurs séparés par des virgules et terminant optionnellement par une virgule. Une suite d'identificateurs contient au moins un identificateur. On prend la même définition pour les suites de constantes numériques en remplaçant identificateur par constante numérique.*
On ajoute donc le symbole « , » au vocabulaire terminal.

Exemple 1 : « x, y, z »
Exemple 2 : « x, y, z, »

L'affectation devient alors : Affect $\rightarrow$ Suite-Idf = Suite-Num

Donner des règles de grammaire pour les non-terminaux Suite-Idf *et* Suite-Num*, en ajoutant éventuellement d'autres non-terminaux.*

▷ **Question 7** *(2 points)*
On veut maintenant garantir que le nombre d'identificateurs à gauche de « = » est le même que le nombre de constantes numériques à droite de « = ». Changer la grammaire en conséquence (en gardant Affect *comme axiome).*

▷ **Question 8** *(3 points)*
Le langage engendré par la grammaire de la question 6 (axiome Affect*) est-il régulier ? Le langage engendré par la grammaire de la question 7 (axiome* Affect*) est-il régulier ? Justifier formellement.*