# TD Théorie des langages 1 — Feuille 4

Langages réguliers – Expressions régulières, propriétés de fermeture

**Exercice 1** Soit $E$ une expression régulière. Simplifier les expressions suivantes :

1. $E.E^* + \epsilon$
2. $\epsilon.E$
3. $\emptyset^*$
4. $\epsilon^*$
5. $\emptyset.E$
6. $\emptyset + E$

**Solution de l'Exercice 1.**

1. $E.E^* + \epsilon = E^*$
2. $\epsilon.E = E$
3. $\emptyset^* = \epsilon$
4. $\epsilon^* = \epsilon$
5. $\emptyset.E = \emptyset$
6. $\emptyset + E = E$

**Exercice 2** Caractériser (par une phrase en français) les langages représentés par les expressions régulières suivantes :

1. $0^*(10^*10^*10^*)^*$
2. $(1 + 01 + 001)^*(\epsilon + 0 + 00)$
3. $1^*(0 + \epsilon)1^*$

**Solution de l'Exercice 2.**

1. Les mots $w \in \{0,1\}^*$ contenant un nombre de 1 multiple de 3 (c.-a-d., tels que $|w|_1 = 3k$, où $k \in \mathbb{N}$).
2. Les mots $w \in \{0,1\}^*$ qui ont au plus deux 0 consécutifs (jamais trois).
3. Les mots $w \in \{0,1\}^*$ contenant au plus un 0.

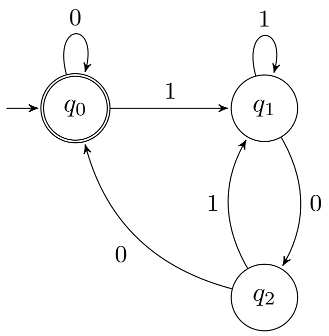
**Exercice 3** Donner une expression régulière représentant chacun des langages suivants :

1. Les mots sur $\{0,1\}$ contenant deux 0 et/ou deux 1 consécutifs.
2. Les mots sur $\{0,1\}$ où chaque 0 est suivi d'un 1.
3. Les mots sur $\{0,1\}$ contenant au moins un 0.
4. Les mots sur $\{0,1\}$ composés de 0 et de 1 alternés.
5. Les mots sur $\{0,1\}$ de longueur paire.

**Solution de l'Exercice 3.**

1. $(0 + 1)^*(00 + 11)(0 + 1)^*$.
2. $(1 + 01)^*$.
3. $(0 + 1)^*0(0 + 1)^*$, ou bien $1^*0(0 + 1)^*$.
4. $(0 + \epsilon)(10)^*(1 + \epsilon)$, ou bien $1(01)^*(0 + \epsilon) + 0(10)^*(1 + \varepsilon)$.
5. $((0 + 1)(0 + 1))^*$.

**Exercice 6** Calculer l'expression régulière correspondant à l'automate ci-dessous, en résolvant le système d'équations obtenu dans deux ordres différents, puis en utilisant la méthode par suppression d'états dans les mêmes ordres. Constater que les systèmes associés aux automates avec certains états supprimés correspondent aux différentes étapes de résolution du système initial.




**Solution de l'Exercice 6.** Système d'équations associé :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0x_0 + 1x_1 + \varepsilon \\ x_1 & = & 0x_2 + 1x_1 \\ x_2 & = & 0x_0 + 1x_1 \end{array}\right.$$

— Élimination de $x_2$ puis $x_1$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0x_0 + 1x_1 + \varepsilon \\ x_1 & = & 00x_0 + (1+01)x_1 \\ x_2 & = & 0x_0 + 1x_1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0x_0 + 1(1+01)^*00x_0 + \varepsilon \\ x_1 & = & (1+01)^*00x_0 \\ x_2 & = & 0x_0 + 1x_1 \end{array}\right.$$

D'où

$$[0 + 1(1+01)^*00]^* .$$

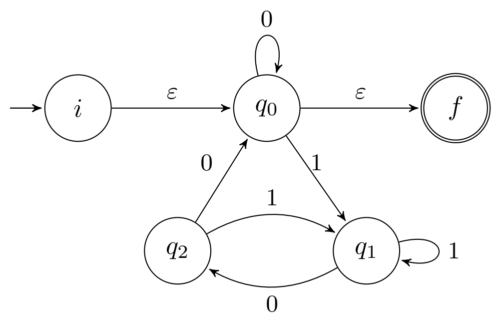
— Élimination de $x_1$ puis $x_2$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0x_0 + 1^+0x_2 + \varepsilon \\ x_1 & = & 1^*0x_2 \\ x_2 & = & 0x_0 + 1^+0x_2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0x_0 + (1^+0)^+0x_0 + \varepsilon \\ x_1 & = & 1^*0x_2 \\ x_2 & = & (1^+0)^*0x_0 \end{array}\right.$$

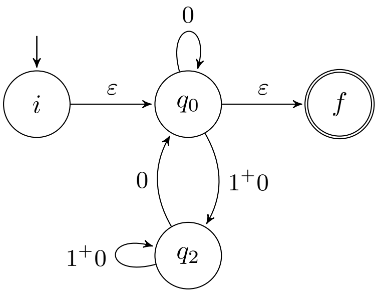
D'où

$$\left[0 + (1^+0)^+0\right]^* .$$

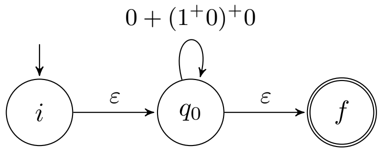
— Méthode graphique par élimination d'états, dans l'ordre $q_1$, puis $q_2$, puis $q_0$. On commence par modifier l'automate pour se ramener à un unique état initial sans transition entrante et un unique état acceptant sans transition sortante.



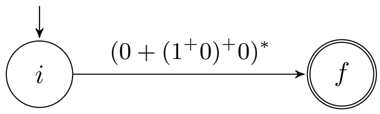

Supprimons $q_1$ :




Puis, supprimons $q_2$ :




Enfin, supprimons $q_0$ :

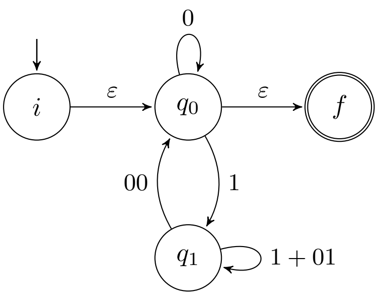



Les systèmes associés sont :

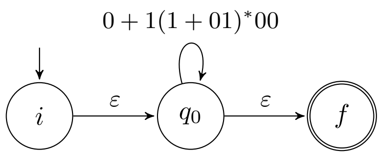
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_i & = & x_0 \\ x_0 & = & 0x_0 + 1^+0x_2 + x_f \\ x_2 & = & 0x_0 + 1^+0x_2 \\ x_f & = & \varepsilon \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_i & = & x_0 \\ x_0 & = & (0 + (1^+0)^+0x_2 + x_f \\ x_f & = & \varepsilon \end{array}\right.$$

— Méthode graphique par élimination d'états, dans l'ordre $q_2$, puis $q_1$, puis $q_0$. Comme précéemment, on part de l'automate avec les états $i$ et $f$ ajoutés.

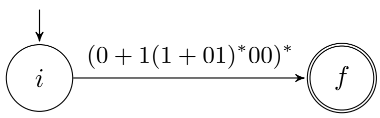
Supprimons $q_2$ :




Puis, supprimons $q_1$ :




Enfin, supprimons $q_0$ :



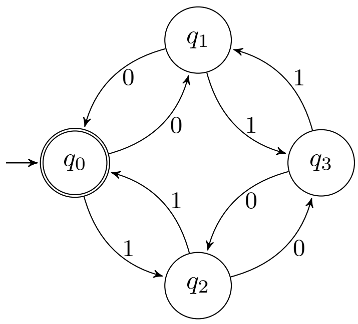
Les systèmes associés sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_i & = & x_0 \\ x_0 & = & 0x_0 + 1x_1 + x_f \\ x_1 & = & 00x_0 + (1+01)x_1 \\ x_f & = & \varepsilon \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_i & = & x_0 \\ x_0 & = & (0+1(1+01)^*00)x_0 + x_f \\ x_f & = & \varepsilon \end{array}\right.$$

On remarque que les équations de $x_0$, $x_1$ et $x_2$ dans les automates après suppression de certains états correspondent bien aux différentes étapes de résolution.

**Exercice 7** Donner une expression régulière représentant l'ensemble des mots avec un nombre pair de zéros et un nombre pair de uns, en définissant un automate reconnaissant ce langage et en résolvant les équations associées.

**Solution de l'Exercice 7.** On peut obtenir cet automate comme l'automate produit d'un automate qui reconnait les mots avec un nombre pair de 1 et celui qui reconnait les mots avec un nombre pairs de 0 (voir exercice 12).




Système d'équations associé :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0x_1 + 1x_2 + \varepsilon \\ x_1 & = & 0x_0 + 1x_3 \\ x_2 & = & 0x_3 + 1x_0 \\ x_3 & = & 0x_2 + 1x_1 \end{array}\right.$$

On se sert de la régularité de l'automate pour ne pas avoir une expression régulière trop complexe. Élimination de $x_1, x_2$ puis $x_3$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 00x_0 + 01x_3 + 1x_2 + \varepsilon \\ x_1 & = & 0x_0 + 1x_3 \\ x_2 & = & 0x_3 + 1x_0 \\ x_3 & = & 0x_2 + 10x_0 + 11x_3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & (00+11)x_0 + (01+10)x_3 + \varepsilon \\ x_1 & = & 0x_0 + 1x_3 \\ x_2 & = & 0x_3 + 1x_0 \\ x_3 & = & (00+11)x_3 + (01+10)x_0 \end{array}\right.$$

Et au final, on obtient :

$$\begin{array}{lcl} x_3 & = & (00+11)^*(01+10)x_0 \\ x_0 & = & [00+11+(01+10)(00+11)^*(01+10)]^* \end{array}$$