4 Entropie, Information mutuelle et Codage

4.1 Codage d'un couple de variables aléatoires

Soient deux v.a. indépendantes X_1 et X_2 (copies indépendantes d'une unique v.a. X d'alphabet $A_X = \{-1; 1\}$), toutes deux de loi uniforme $P_X(-1) = p_{-1} = P_X(+1) = p_{+1} = \frac{1}{2}$. A partir des symboles X_1 et X_2, nous allons former et étudier les propriétés informatives de deux types de mots :

Mots de type 1. $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$,

Mots de type 2. $\mathbf{S} = (S_+, S_-)$ avec $S_+ = X_1 + X_2$ et $S_- = X_1 - X_2$.

Etude des mots de type 1 (couples de 2 symboles). Calculer

1. les entropies $H(X_1)$ et $H(X_2)$,
2. l'entropie conditionnelle $H(X_2|X_1)$,
3. l'entropie conjointe $H(\mathbf{X}) = H(X_1, X_2)$
4. l'information mutuelle $I(X_1; X_2)$.

Etude des mots de type 2 (Somme et différence de 2 symboles) .

1. Caractérisation séparée de S_+ et de S_-.
   (a) Déterminer l'alphabet et le jeu de probabilités de la v.a.. S_+. Préciser pourquoi S_- est de même loi que S_+.
   (b) En déduire l'entropie $H(S_+)$.
   (c) Comparer l'entropie de S_+ à celle de X_1 et à celle du mot $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$.
2. Caractérisation de $\mathbf{S} = (S_+, S_-)$.
   (a) Déterminer le tableau des probabilités conditionnelles $Pr(S_-|S_+)$.
   (b) Déterminer le tableau des probabilités conjointes $Pr(S_+, S_-)$.
   (c) Calculer les entropies $H(\mathbf{S}) = H(S_+, S_-)$, $H(S_-|S_+)$ ainsi que $I(S_+; S_-)$.
   (d) Commenter chaque valeur obtenue en c) par rapport à la situation initiale (mot simple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$).
   (e) Dire pourquoi il est naturel de définir l'efficacité d'une source simple (v.a. X à N états) par $\mathcal{E} = H(X)/\log_2 N$? (et donc la redondance par $R = 1 - \mathcal{E}$).
   Comment peut-on interpréter la quantité négative ou nulle $H(X) - \log_2 N$?
   (f) Au regard de la dimension potentielle $\dim S_+ \times \dim S_-$ (où $\dim S_+$ représente le cardinal de l'alphabet S_+), calculer la redondance du mot $\mathbf{S}$, et comparer à la redondance du mot $\mathbf{X}$.
   Cette redondance peut-elle avoir une utilité ?
   Comparer à la redondance de S_+ seule (ou S_- seule) (une des composantes de $\mathbf{S}$).

3. On considère la source qui génère une suite d'éléments ternaires telle que : $S_+^1 S_-^1 S_+^2 S_-^2 \cdots S_+^n S_-^n \cdots$. Chaque paire $S_+^j S_-^j$ code par leur somme et leur différence 2 valeurs binaires X_1^j, X_2^j d'une suite de v.a. binaires i.i.d. $X_1^1, X_2^1 X_1^2, X_2^2 \cdots$.
   (a) Quelle est la longueur moyenne minimale des mots pour un codage binaire de cette source (codage symbole par symbole, chaque symbole étant de type S_+ ou de manière équivalente S_-) ?
   (b) Quelle est la longueur moyenne minimale des mots pour un codage binaire de ses extensions d'ordre 2 ? Commenter le rôle que joue le choix de l'indice du premier symbole codé (début du processus de codage au symbole S_+^1 ou S_-^1)
   (c) En supposant que le codage débute par le symbole S_+^1, est-il utile de coder les extensions d'ordre 4 ?

Exercices complémentaires à l'exercice 1, non faits en TD

Lien entre un symbole et la somme (puis entre mot « simple » et mot « composé »
.

(a) Après avoir indiqué les tableaux de probabilités nécessaires, calculer $H(X_1, S_+)$, $H(X_1|S_+)$ et $I(X_1, S_+)$.

(b) Indiquer sans faire le calcul quelles entropies il faudrait tester et leurs valeurs attendues pour montrer que la connaissance du mot somme/différence $\mathbf{S}$ est équivalente à la connaissance du mot simple $\mathbf{X}$?

Liens entre 3 v.a. ou plus. .

(a) Les v.a. X_1 et X_2 sont elles dépendantes sachant leur somme S_+ ? Donner le tableau des probabilités conditionnelles $Pr(X_1, X_2|S_+)$ et argumenter.

(b) En déduire (sans calcul) si l'information mutuelle conditionnelle $I(X_1; X_2|S_+)$ doit est supérieure, inférieure ou égale à l'information mutuelle simple $I(X_1, X_2)$.

(c) Calculer $H(X_1, X_2|S_+)$, comparer à $H(X_1|S_+)$ et commenter.

(d) Calculer $H(X_1, X_2, S_+)$, à partir de la règle de chaînage de 2 v.a..
Que vaut $H(S_+|X_1, X_2)$?
Vérifier vos résultats en développant aussi $H(X_1, X_2, S_+)$ à partir de la règle de chaînage de 3 v.a..