Exercice sur la théorie du portefeuille : *portefeuille optimal et actif certain*

Philippe Bernard
Ingénierie Economique & Financière
Université Paris-Dauphine

Février 2006

On considère un univers de titres constitué de deux titres risqués dont les rendements nets, les volatilités (écart-types), et les coefficients de corrélation sont les suivants :

titres	rend. espérés (%)	volatilité (%)	growth stocks	value stocks
growth stocks	10	16	1	-0.2
value stocks	6	8	-0.2	1

L'univers comprend également un actif monétaire supposé sans risque dont le rendement est égal à 2%.

1. Déterminer l'ensemble des portefeuilles efficients de cet univers. Donner l'équation de la frontière des portefeuilles efficients.
2. On suppose désormais que l'actif monétaire est risqué mais non corrélé avec les autres titres. On note σ son écart-type. Calculer à nouveau l'ensemble des portefeuilles efficients. Quel sera l'impact de l'écart-type sur les choix optimaux de portefeuille ? Représenter graphiquement l'impact du risque de l'actif monétaire sur la frontière des portefeuilles efficients en prenant comme volatilité $\sigma = 1\%$. Calculer une des "bases de portefeuilles" (= deux portefeuilles ici) que l'on doit combiner pour obtenir un portefeuille optimal.

(1) L'ensemble des portefeuilles efficients lorsque l'actif monétaire est sans risque.

La première étape consiste à calculer la matrice de covariance. Comme les données sont :

titres	rend. espérés (%)	volatilité (%)	growth stocks	value stocks
growth stocks	10	16	1	-0.2
value stocks	6	8	-0.2	1

la matrice de covariance est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (10^{-4})$$

et donc on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 256 & -25.6 \\ -25.6 & 64 \end{bmatrix} \quad (10^{-4})$$

Les portefeuilles efficients sont donnés par la minimisation du risque sous la contrainte que le rendement espéré excédentaire dépasse un certain niveau :

$$\left\{ \begin{array}{c} \min\ \sigma_p^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & -25.6 \\ -25.6 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \textit{sous la contrainte} : \\ \overline{r}_p = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \geq \widehat{r} \end{array} \right.$$

Le lagrangien associé à ce programme peut s'écrire :

$$L = \frac{1}{2}\sigma_p^2 + \lambda \left(\widehat{r} - \mathbf{E}\left[\widetilde{r}_p \right] \right)$$

où λ est le multiplicateur associé au programme.

Les conditions marginales caractérisant les choix optimaux sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2.x_1 + \sigma_{12}.x_2 = \lambda \overline{r}_1 \\ \sigma_{12}.x_1 + \sigma_2^2.x_2 = \lambda \overline{r}_2 \end{array} \right.$$

où $\overline{r}_j$ est le rendement espéré du titre j, σ_{ij} la covariance entre le titre i et le titre j, σ_i^2 la variance du titre i. Sous forme matricielle, le système à vérifier est donc :

$$\boldsymbol{\sigma} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \overline{r}_1 \\ \overline{r}_2 \end{bmatrix}$$

Numériquement le système est donc :

$$\begin{bmatrix} 256 & -25.6 \\ -25.6 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ce système (paramétré par λ) peut être résolu soit par la méthode de Cramer, soit en calculant directement l'inverse de la matrice.

Comme l'inverse de la matrice de covariance est :

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 4.069 \times 10^{-3} & 1.627\,6 \times 10^{-3} \\ 1.627\,6 \times 10^{-3} & 1.627\,6 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 4.069 \times 10^{-3} & 1.627\,6 \times 10^{-3} \\ 1.627\,6 \times 10^{-3} & 1.627\,6 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3.906\,2 \times 10^{-2} \\ 7.812\,5 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

La contrainte de rendements excédentaire :

$$8x_1 + 4x_2 = \widehat{r}$$

nous donne la valeur de λ :

$$8\left(3.906\times10^{-2}\lambda\right)+4\left(7.812\times10^{-2}\lambda\right)=\widehat{r}\Rightarrow\lambda=1.6\widehat{r}$$

et donc :

$$x_1=1.6\left(3.906\,2\times10^{-2}\right)\widehat{r}=0.0625\widehat{r}$$
$$x_2=1.6\left(7.812\times10^{-2}\right)\widehat{r}=0.1250\widehat{r}$$

:Par conséquent :

$$x_0=1-0.0625\widehat{r}-0.1250\,0\widehat{r}=1-0.1875\widehat{r}$$

Le portefeuille risqué que doit détenir chaque agent est donc :

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{x_1}{x_1+x_2}=\frac{1}{3}\\z_2&=\frac{x_2}{x_1+x_2}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Connaissant les quantités (paramétrées) des actifs risqués, on peut alors évaluer la variance :

$$\begin{aligned}\sigma_p^2&=\widehat{r}^2\times\left[\begin{array}{cc}0.0625&0.1250\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}256&-25.6\\-25.6&64\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}0.0625\\0.1250\end{array}\right]\\&=1.6\widehat{r}^2\end{aligned}$$

Dans l'espace volatilité (= écart-type) - rendement espéré, l'enveloppe des portefeuilles efficients est donc donné par :

$$\sigma_p=1.265|\overline{r}_p-2|$$

puisque le rendement espéré du portefeuille est le rendement certain augmenté de la prime de risque $\widehat{r}$. Evidemment l'ensemble des portefeuilles efficients est la partie supérieure de cette enveloppe :

$$\sigma_p=1.265(\overline{r}_p-2)$$

(2) Si l'actif monétaire est risqué mais non corrélé alors :

$$\boldsymbol{\sigma}=\left[\begin{array}{ccc}16&0&0\\0&8&0\\0&0&\sigma\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}1&-0.2&0\\-0.2&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}16&0&0\\0&8&0\\0&0&\sigma\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 256.0 & -25.6 & 0.0 \\ -25.6 & 64.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Comme désormais la variance du portefeuille est définie par rapport à x_0, il n'est plus possible de réduire comme auparavant le programme écrit plus haut. Le programme définissant le choix optimal de portefeuille :

$$\begin{cases} \min \ \sigma_p^2 \\ \textit{sous les contraintes} : \\ 2x_0 + 10x_1 + 6x_2 \geq \widehat{r} \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

dont les conditions marginales peuvent être écrites :

$$\begin{cases} x_0\sigma^2 = 2\lambda - \mu \\ 256x_1 - 25.6x_2 = 10\lambda - \mu \\ -25.6x_1 + 64x_2 = 6\lambda - \mu \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 256.0 & -25.6 & 0.0 \\ -25.6 & 64.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En raison de la nullité des covariances entre l'ractif monétaire et les autres, le système peut être résolu par partie :

$$\sigma^2 x_0 = 2\lambda - \mu$$

$$\begin{bmatrix} 256.0 & -25.6 \\ -25.6 & 64.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme à la première question, on peut notamment résoudre ce dernier système par la méthode de Cramer ou en utilisant directement l'inverse de la matrice de covariance (déjà calculée plus haut).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \boldsymbol{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} - \mu \boldsymbol{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Numériquement :

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.069 \times 10^{-3} & 1.6276 \times 10^{-3} \\ 1.6276 \times 10^{-3} & 1.6276 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0456 \times 10^{-2} \\ 0.11393 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.069 \times 10^{-3} & 1.6276 \times 10^{-3} \\ 1.6276 \times 10^{-3} & 1.6276 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.6966 \times 10^{-3} \\ 1.7904 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Par conséquent en fusionnant les conditions obtenues pour x_0 d'une part, et pour x_1 et x_2 d'autre part, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 5.045\,6 \times 10^{-2} \\ 0.113\,93 \\ \frac{2}{\sigma^2} \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 5.696\,6 \times 10^{-3} \\ 1.790\,4 \times 10^{-2} \\ \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

Cette expression du portefeuille optimal est paramétré par λ et μ, lesquelles dépendent de l'objectif $\widehat{r}$.

Pour $\sigma = 1\%$, l'écriture précédente est donc :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 5.045\,6 \times 10^{-2} \\ 0.113\,93 \\ 2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 5.696\,6 \times 10^{-3} \\ 1.790\,4 \times 10^{-2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour expliciter le portefeuille optimal en fonction de $\widehat{r}$, il convient d'utiliser les contraintes du programme d'optimisation :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 10 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = \widehat{r} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = 1 \end{cases}$$

Comme :

$$\begin{bmatrix} 10 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = 5.188\,1\lambda - 2.164\,4\mu$$

et :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = 2.164\,4\lambda - 1.0236\mu$$

le système à résoudre est :

$$\begin{cases} 5.188\,1\lambda - 2.164\,4\mu = \widehat{r} \\ 2.164\,4\lambda - 1.0236\mu = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5.188\,1\lambda - 2.164\,4\mu = 12 \\ 2.164\,4\lambda - 1.0236\mu = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1.635\,4\widehat{r} - 3.458\,0 \\ \mu &= 3.458\,0\widehat{r} - 8.288\,9 \end{aligned}$$

En remplaçant λ et μ par leurs expressions, on trouve le portefeuille solution en fonction du rendement exigé :

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2817 \times 10^{-2} r - 0.12726 \\ 0.12441r - 0.24557 \\ -0.1872r + 1.3729 \end{bmatrix}$$

La variance est alors :

$$\sigma_p^2 = \overrightarrow{x}^T \boldsymbol{\sigma} \overrightarrow{x} = 1.6356r^2 - 6.9171r + 8.2903$$

L'enveloppe ainsi obtenue détermine l'ensemble de portefeuilles efficients, la partie supérieure de l'enveloppe dont le premier portefeuille est celui de variance minimale.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\sigma_p^2 &= 0 \Leftrightarrow 2(1.6356)r - 6.9171 = 0 \\ &\Rightarrow \overline{r}_{\min} = 2.1145\% \\ &\Rightarrow \sigma_{\min} = 1.6356\,(2.1145)^2 - 6.9171\,(2.1145) + 8.2903 \\ &= 0.97704 \end{aligned}$$

Le fichier Excel accompagnant ce fichier illustre graphiquement les effets d'une variation de la volatilité de l'actif monétaire.