8 Principes du codage décodage

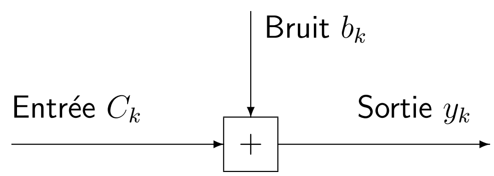
Préambule (rappel) : Soit X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f :

$$\Pr(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(t)dt = 1 - \Pr(X \leq a) \text{ et } \Pr(X \in [a,b]) = \Pr(X \in]a,b[) = \int_a^b f(t)dt.$$

La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2 a pour densité $f_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$.

Décision optimale au sens du MV, canal gaussien

On se place en sortie d'un canal gaussien dont l'entrée C_k vaut ± 1.



A chaque utilisation canal k, l'observation y_k est la somme de l'entrée C_k et d'une perturbation b_k distribuée selon une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2. Les v.a. b_k sont indépendantes : le canal est sans mémoire.

On note $\widehat{C_k}$ l'hypothèse décidée pour C_k.

1. On place une seule valeur $C = c \in \{-1, +1\}$ en entrée ; la sortie correspondante $Y|C = c$ est une variable aléatoire à valeur réelle. Quelle est la *vraissemblance*, *i.e.* la densité de probabilité, notée $f_c(y)$, de $Y|C = c$?
2. Les probabilités *a priori* (avant observation de y) des entrées ± 1 sont notées $\mathcal{P}_{\pm}$. On partitionne $\mathbb{R}$ en deux éléments Z_+ et Z_-. On décide que l'entrée était $+1$ si $y \in Z_+$ et -1 sinon.

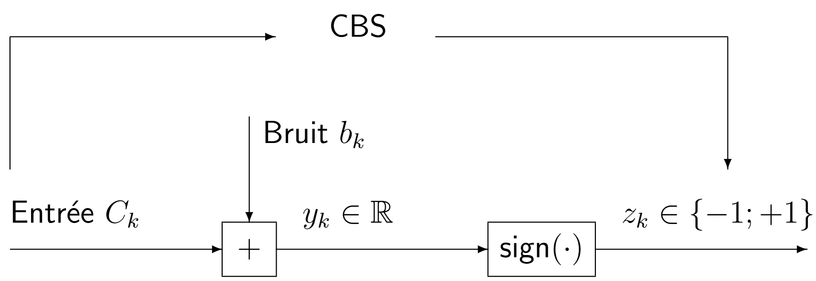
   Ecrire la probabilité d'erreur en fonction de $\mathcal{P}_+$, Z_+ et de $f_{+1}(y)$ et $f_{-1}(y)$.
3. Quelle est la partition Z_-, Z_+ qui minimise la probabilité d'erreur ? Exprimer cette partition en fonction du rapport de vraisemblance logarithmique

$$\log \frac{f_{+1}(y)}{f_{-1}(y)}$$

4. A partir de maintenant, on suppose la loi d'entrée uniforme $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- = 1/2$. Montrer que la règle de décision établie à la question précédente se réduit alors à $\widehat{C} = \operatorname{sign}(y)$, c'est-à-dire que l'on décide $+1$ lorsque la valeur observée est positive, -1 si elle est négative.

5. Montrer que cette règle de décision revient à choisir celle des 2 valeurs possibles en entrée qui se trouve à distance euclidienne minimale de l'observation y.
6. On suppose maintenant que le code émis comporte 2 mots binaires de longueur n (parmi les 2^n séquences binaires possibles). On émet un mot-code binaire $\mathbf{C}$ de longueur n choisi dans ce dictionnaire de 2 mots-codes équiprobables : $\mathbf{C^0} = \left(C_0^0, \cdots, C_{n-1}^0\right)$ et $\mathbf{C^1} = \left(C_0^1, \cdots, C_{n-1}^1\right)$. Le rapport de vraisemblance logarithmique impliqué dans la définition de la règle de décision (qui minimise la probabilité d'erreur) devient
$$\log \frac{f_{\mathbf{C}^1}(\mathbf{y})}{f_{\mathbf{C}^0}((\mathbf{y}|)} \quad = \quad \frac{1}{2\sigma^2}\left[d_E(\mathbf{y}, \mathbf{C}^0) - d_E(\mathbf{y}, \mathbf{C}^1)\right]$$
Commenter et interpréter ce résultat.

Décision optimale au sens du MV, CBS



On se place maintenant après la décision, le canal qui lie z_k à C_k est binaire. On suppose la loi d'entrée uniforme $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- = 1/2$.

1. Exprimer la probabilité de la sortie $z_k = +1$ sachant $C_k = -1$ en fonction de la variance σ^2 ; en déduire que le canal est symétrique (CBS) et donner sa probabilité de transition ($i.e.$ d'erreur) p.
2. Pour réduire la probabilité d'erreur après décodage, on ajoute de la redondance en répétant $n = 2s + 1$ fois ($s \in \mathbb{N}^*$) chaque symbole en entrée du canal.
On construit ainsi le codeur de rendement $1/n$:
$$\begin{array}{ccc} -1 & \rightarrow & \overbrace{-1 \cdots\cdots -1}^{n=2s+1 \text{ fois}} \\ +1 & \rightarrow & \underbrace{+1 \cdots\cdots +1}_{n=2s+1 \text{ fois}} \end{array}$$
   (a) Montrer que la règle de décision qui minimise la probabilité d'erreur est une décision majoritaire en sortie.
   (b) Exprimer cette probabilité d'erreur en fonction de la taille du mot de code n (le nombre de répétition) et de la fiabilité du canal p