# Examen de “Processus Stochastiques et Applications Financières”

Documents autorisés: notes de cours, exercices et DM de cette année corrigés- autres documents et calculatrices interdits -
Durée: 3h00

ENSIMAG 2A/IF, 15 décembre 2022

Barême prévisionnel: Exercice 1, 3 points, Exercice 2, 4 points, Exercice 3, 4 point, Exercice 4, 9 points.

La notation dépendra grandement de la qualité de la rédaction. Les questions étoilées sont plus longues ou plus difficiles.

**Exercice 1.**

Aléaville fut fondée le 25 décembre 1121. Il se trouve que s'il y fait beau un jour il y fait beau le lendemain avec probabilité 1/5. S'il y pleut un jour il y fait beau le lendemain avec probabilité 1/10. On n'a aucune information sur le temps qu'il y faisait le jour de la fondation, ni sur le temps qu'il y fait aujourd'hui.

Quelle est la probabilité qu'il y fasse beau ce Noël ?

**Exercice 2: relation de calendar spread.**

Dans cet exercice $C_t(T, K)$ désigne le prix à l'instant $t$ d'une option Call de maturité $T$ et de strike $K$ ($t \leq T$). On suppose que $T \mapsto C_t(T, K)$ est de classe $C^1$ et on se propose de montrer qu'en AOA on a

$$\frac{\partial C_t(T, K)}{\partial T} \geq 0$$

(relation de *calendar spread*). On rappelle en outre qu'on note $B(t, T)$ le prix à l'instant $t$ du zéro-coupon d'échéance $T$, et qu'on a $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$.

**1)** Soit $t < T$. Montrer que

$$C_t(T, K) \geq (S_t - KB(t, T))_+$$

sans passer par une relation d'arbitrage.

**Indication:** On pourra utiliser le fait que le prix d'une option Call ou Put est toujours positif ou nul, et s'aider d'une relation vue en cours.

**2*)** Soient $t < T_1 < T_2$. Supposons que $C_t(T_1, K) > C_t(T_2, K)$. Construire un arbitrage, mettant en jeu des opérations à faire en $t$ et $T_1$, et conclure.

**Indication:** Quand on est rentré dans une position longue vis à vis d'un Call en l'achetant en $t$, on peut toujours dénouer cette position en un instant $s > t$ antérieur à l'échéance, en revendant le Call à son prix en $s$.

**Exercice 3: relation de parité Call-Put.**

On se propose dans cet exercice de retrouver la relation de Parité Call-Put, mais par le calcul risque-neutre, et non par les arguments d'arbitrage vus en TD. Merci donc de respecter l'esprit de l'exercice !

On est dans le cadre du modèle CRR vu au cours avec $-1 < a < r < b$. On en reprend les notations, on particulier on note $\mathbb{P}^*$ la mesure de probabilités risque-neutre.

D'après la théorie développée dans le Chapitre 5 du cours le prix d'un Call européen de strike $K$ et de maturité $N$ à l'instant $n \leq N$ est donné par

$$C_n = \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{n-N}(S_N - K)_+ \,|\, \mathcal{F}_n\big].$$

On considère un *Put européen* de maturité $N$ et de strike $K$. Cette option donne le droit à son détenteur de vendre au prix $K$ l'actif risqué à l'échéance $N$.

**1)** On note $f(S_N)$ le pay-off du Put européen. Donnez l'expression de $f(x)$, en expliquant votre réponse d'un point de vue financier.

**2)** On note $P_n$ le prix à l'instant $n \leq N$ du Put européen. Montrer que

$$P_n = \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{n-N}(K - S_N)_+ \,|\, \mathcal{F}_n\big].$$

**3)** Montrer que

$$C_n - P_n = \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{n-N}(S_N - K) \,|\, \mathcal{F}_n\big].$$

**4*)** Montrer alors la *relation de parité Call-Put*

$$C_n - P_n = S_n - (1+r)^{n-N}K.$$

**Exercice 4: options américaines, bis repetita.**

Dans ce problème on se repenche sur les options américaines dans le modèle CRR viable et complet, déjà étudiées dans le DM. On va explorer quelques questions qui sont dans le prolongement du DM, en particulier on va chercher à comparer le prix d'une option américaine à celui d'une option européenne. Dans le cas particulier d'une option de vente de même prix d'exercice on verra que ces prix sont les mêmes (i.e. le prix du Call américain est le même que celui du Call européen).

On rappelle les contours du modèle.

Un horizon temporel $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On note $r$ le rendement sans risque sur une période de temps et $S_n^0 = (1+r)^n$ le prix à l'instant $n$ de l'actif sans risque.

Le prix à l'instant $n$ de l'actif risqué est noté $S_n$. La dynamique du processus $S = (S_n)_{0\leq n\leq N}$ est construite de la façon suivante.

On a $-1 < a < b$. On suppose $a < r < b$. On définit $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sur $(\Omega, \mathcal{F})$ on a une probabilité historique $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. On a une suite i.i.d. $(T_n)_{n=1}^N$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$ (on a $T_n(\omega) = \omega_n$ pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$). On note $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et

$$\forall 1 \leq n \leq N, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(T_i,\, 1 \leq i \leq n).$$

La valeur initiale $S_0$ est déterministe et supposée connue. Puis on a

$$\forall 0 \leq n < N, \quad S_{n+1} = S_n T_{n+1}.$$

On rappelle qu'on emploie le tilde pour dénoter les valeurs actualisées des quantités en jeu. Par exemple on note $\tilde{S}_n = S_n / S_n^0$ pour tout $0 \leq n \leq N$.

Enfin on notera $\mathbb{P}^*$ la mesure de probabilités risque-neutre mise en évidence en cours et en TD dans le modèle CRR satisfaisant les conditions énoncées ci-dessus.

Un processus adapté $G = (G_n)_{0\leq n\leq N}$ à valeurs réelles est donné. Une option américaine définie par $G$ est un contrat passé à l'instant $n = 0$ entre l'acheteur et le vendeur de l'option, qui donne à l'acheteur la possibilité d'empocher la richesse $G_n$ s'il décide d'exercer l'option à l'instant $0 \leq n \leq N$. Il y a bien sûr au plus un instant d'exercice sur la durée de vie de l'option (i.e. sur l'intervalle $[\![0, N]\!]$): s'il y en a un l'option est clôturée à cet instant d'exercice, mais il se peut aussi qu'il n'y en ait pas (dans ce cas l'option se termine à l'échéance $N$, sans qu'il y ait eu exercice).

Suivant les notations du DM on note $X_n$ le prix à l'instant $0 \leq n \leq N$ d'une telle option américaine. On note de plus $x_n$ le prix à l'instant $0 \leq n \leq N$ d'une option européenne payant le pay-off $h = G_N$ à l'échéance $N$ (c'est à dire une option du type de celles étudiées dans le chapitre 5 du cours).

Dans les questions 1) à 5) on cherche à montrer la proposition 1 ci-dessous, de deux façons différentes: par arbitrage dans les questions 1) et 2), par arguments de type martingale dans les questions 3) à 5).

**Proposition 1** *On a $X_n \geq x_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$.*
*De plus, si $x_n \geq G_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$, alors on a $x_n = X_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$.*

**1*)** Montrer la première partie de la proposition 1 par un raisonnement par arbitrage.

**2*)** Pour la deuxième partie, supposer que $x_n \geq G_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$, que $X_{n'} > x_{n'}$ pour une certain $0 \leq n' \leq N$, et relever une possibilité d'arbitrage. Conclure.

**Indication:** On peut à tout moment revendre une option qui serait en notre possession.

**3)** Montrer que $\tilde{X}_n \geq \mathbb{E}^*[\tilde{X}_N \,|\, \mathcal{F}_n]$, après avoir rappelé les éléments du DM qui amènent à cette affirmation (il ne s'agit pas de refaire les démonstrations du DM).

**4)** En déduire que $\tilde{X}_n \geq \tilde{x}_n$ et conclure qu'on a la première partie de la proposition 1.

**5*)** Si $x_n \geq G_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$ que peut-on dire du processus $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)_{0 \leq n \leq N}$ ? En conclure qu'on a $X_n \leq x_n$ pour tout $0 \leq n \leq N$, et donc la deuxième partie de la proposition.

On considère pour la suite et fin du problème que $G_n = (S_n - K)_+$. Le prix du Call américain (resp. européen) est donné par $X$ (resp. par $x$). On veut montrer

$$X_n = x_n, \quad 0 \leq n \leq N. \tag{1}$$

**6)** Montrer que

$$\tilde{x}_n \geq \mathbb{E}^*\big(\tilde{S}_N - K(1+r)^{-N} | \,\mathcal{F}_n\,\big).$$

**7)** En déduire que

$$x_n \geq S_n - K(1+r)^{n-N}.$$

**8)** En déduire que

$$x_n \geq (S_n - K)_+$$

et conclure.