1) on a : $H(P_0, \dots, P_{N-1}) = -\sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2(P_j)$

or $\forall j \in [|0, N-1|]$ on a : $0 \leq P_j \leq 1$ alors on a
$\forall j \in [0, N-1]$, $-P_j \log_2(P_j) \geq 0$ et par addition on a
donc :
$H(P_0, \dots, P_{N-1}) = -\sum_{j=0}^{N} P_j \log_2(P_j) \geq 0$.
et pour : $H(P_0, \dots, P_{N-1}) = 0 = -\sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2 P_j$

$= \sum_{j=0}^{N-1} (-P_j \log_2(P_j)) = 0$

or $\forall j \in [|0, N-1|]$, $-P_j \log_2(P_j) \geq 0$
alors on a : $\forall j \in [|0, N-1|]$, $P_j \log_2(P_j) = 0$.
et on a : $\sum_{j=0}^{N-1} P_j = 1$ alors $\exists j_0 \in [|0, N-1|]$ tq

$P_{j_0} \neq 0$ et ~~donc~~ comme $P_{j_0} \log_2(P_{j_0}) = 0$

alors $\boxed{P_{j_0} = 1}$

D'où
$H(P_0, \dots, P_{N-1}) = 0$ s'il existe $j_0 \in [|0, N-1|]$
tq $P_{j_0} = 1$ et pour tout $j \in [|0, N-1|] / \{j_0\}$
$P_j = 0$.
on a :
$H(X) = 0 \iff X$ est deterministe

2) Supposons qu'on a / ~~$D(P||Q) = \sum_{j=0} P_j \log_2 \frac{P_j}{q_j} = 0$~~

on a : $D(P||Q) = \sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2(P_j) - \sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2(q_j)$

or $= -H(P_0, \dots, P_{N-1}) - \sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2(q_j)$

$-H(P_0, \dots, P_{N-1}) \geq 0$
<u>Rq</u> : on montre facilement $\log_2(u) \leq u - 1$

on a donc : $D(P||Q) = \sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2\left(\frac{P_j}{q_j}\right) = -\sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2\left(\frac{q_j}{P_j}\right)$

$\geq -\sum_{j=0}^{N-1} P_j \left(\frac{q_j}{P_j} - 1\right) = 0$

In

l'égalité ?

$D(P \| Q) = 0$

3) $Q = \{q_i\}_{i=0 \to N-1}$ tq $\forall i \in [\![0, N-1]\!]$ on a : $q_i = \frac{1}{N}$

on

$$D(P \| Q) = -H(P_0, \dots, P_{N-1}) - \sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2(q_j)$$

$$= -H(P_0, \dots, P_{N-1}) + \sum_{j=0}^{N-1} P_j \log_2(N)$$

$$= -H(P_0, \dots, P_{N-1}) + \log_2(N) \sum_{j=0}^{N-1} \geq 0$$

donc on a : $H(P_0, \dots, P_{N-1}) \leq \log_2(N)$.

4/ La loi qui maximise l'entropie de la v.a t st la loi uniforme

et dans ce cas on a :

$$H(P_0, \dots, P_{N-1}) = \log_2(N)$$

Exo2 : Octet d'information

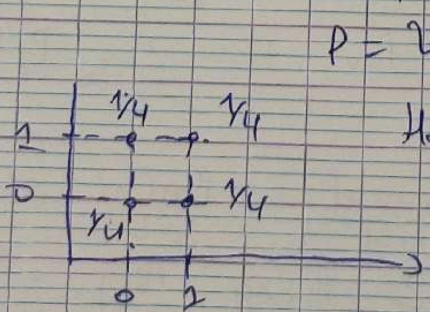
~~1/ soit Posons $X_1 \in \mathcal{B}($~~

~~$P(X_1 = 1) = P_1 = 1 - P(X_1 = 0)$~~

~~$P(X_2 = 1) = P_2 = 1 - P(X_2 = 0)$~~

Exo2 : octet d'information

1) $P = U$



$H_2(P) = \log_2(4) = 2$ bits

$\{X_1 = 0, X_2 = 1\}$ système complet d'évenements

$P(X_1=0) = P(X_1=0 \text{ et } X_2=0) + P(X_1=0 \text{ et } X_2=1)$

$= P(X_1=0 / X_2=0)\, P(X_2=0) + P(X_1=0 / X_2=1)\, P(X_2=1)$

$= \frac{1}{2}$

$P_1 \sim \mathcal{U}(\{0,1\})$

$P_2 \sim \mathcal{U}(\{0,1\})$

5) Non, si les marginales sont dépendants