Exercices Préparation Interview Quant

Mohamed Ahmed Mohamed Lemine

16 octobre 2025

Table des matières

I Mathématiques **5**

1 Analyse et Algébre **7**
1.1 Identité du hockey-stick . . . 7
1.2 Comparaison de π^e et e^π . . . 8
1.3 Somme de taches divisible par 11 . . . 10

2 Probabilités **11**
2.1 Problème des deux enfants . . . 11
2.2 Deux lancers de dé . . . 12
2.3 Pièce biaisée . . . 12
2.4 Parité du nombre de piles . . . 13
2.5 Élément choisi au hasard . . . 14
2.6 Premier As . . . 14
2.7 Minimum de k positions . . . 16
2.8 Labyrinthe du rat . . . 17
2.9 Trois points sur un cercle . . . 19
2.10 Variable à variance maximale dans [-1,1] . . . 19
2.11 Somme de variables uniformes . . . 20
2.12 Indépendance entre $|X|$ et $\text{sign}(X)$ pour une loi normale . . . 22
2.13 Durée moyenne d'attente à un arrêt avec deux bus . . . 24
2.14 Gambler's Ruin . . . 25
2.15 Météo à Grenoble . . . 26
2.16 Expecting HTH . . . 28

3 Calcul Stochastique **31**
3.1 Temps d'arrêt . . . 31
3.2 Loi de l'intégrale du mouvement brownien . . . 33
3.3 Espérance conditionnelle d'un mouvement brownien . . . 34
3.4 Espérance conditionnelle d'une intégrale stochastique . . . 35
3.5 MBG . . . 37
3.6 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . 38
3.7 Probabilité de sortie à gauche d'un intervalle – O.U. . . . 39
3.8 Hitting time of brownian motion . . . 40
3.9 Density of the Hitting Time of Brownian Motion . . . 42
3.10 Reflection Principle for Brownian Motion . . . 44

II Quant Finance **47**

1 Option pricing **49**
1.1 Prix du Call européen dans le modèle de Black-Scholes . . . 49
1.2 Option Chooser . . . 52

1.3 Option d'échange avec devise 53
1.4 Butterfly call 55
1.5 Put Spread 57
1.6 Parité call–put 58
1.7 contrat forward 59

III Algo **61**

IV Brain Teasers **65**

1 Brain Teasers **67**
1.1 Carré magique 3×3 67
1.2 Le problème des 5 pirates 69
1.3 Tigres et mouton 70
1.4 River crossing 71
1.5 Problème d'anniversaire 72
1.6 Jeu de cartes 73
1.7 Deux cordes 74
1.8 Jeu en 2D 74
1.9 Say 50 75
1.10 100 Ampoules 76

Première partie

Mathématiques

Chapitre 1

Analyse et Algébre

1.1 Identité du hockey-stick

Exercice :

Identité du hockey-stick

Montrer l'identité combinatoire suivante, valable pour tout entier $n \geq k \geq 0$:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Solution :

Par convention, pour tout $m < k$ on a $\binom{m}{k} = 0$. Ainsi

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}.$$

Identité de Pascal. On rappelle l'identité de Pascal, valable pour tout $j \geq k \geq 0$:

$$\binom{j+1}{k+1} = \binom{j}{k} + \binom{j}{k+1}.$$

Elle équivaut à

$$\binom{j}{k} = \binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1}. \tag{$*$}$$

Somme télescopique. En sommant $(*)$ de $j = k$ à $j = n$, on obtient

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \left(\binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1} \right) = \binom{n+1}{k+1} - \underbrace{\binom{k}{k+1}}_{0}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.}$$

1.2 Comparaison de π^e et e^π

Exercice :

Comparaison de π^e et e^π

Sans calculer les valeurs numériques, déterminer lequel des deux nombres

$$\pi^e \quad \text{et} \quad e^\pi$$

est le plus grand.

Solution :

Méthode 1 :

On considère la fonction

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Domaine de définition. La fonction $\ln x$ est définie pour $x > 0$, donc f est définie sur $]0,+\infty[$.

Limites aux bornes de l'intervalle.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad (\text{car } \ln x \to -\infty \text{ et } x \to 0^+), \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (\text{croissance de } x \text{ plus rapide que } \ln x).$$

Dérivée et signe. f est dérivable sur $(0,+\infty)$ et

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ainsi, $f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$. De plus, $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$, donc

$$\operatorname{sgn}\big(f'(x)\big) = \operatorname{sgn}(1-\ln x) = \begin{cases} + & \text{si } 0 < x < e, \\ 0 & \text{si } x = e, \\ - & \text{si } x > e. \end{cases}$$

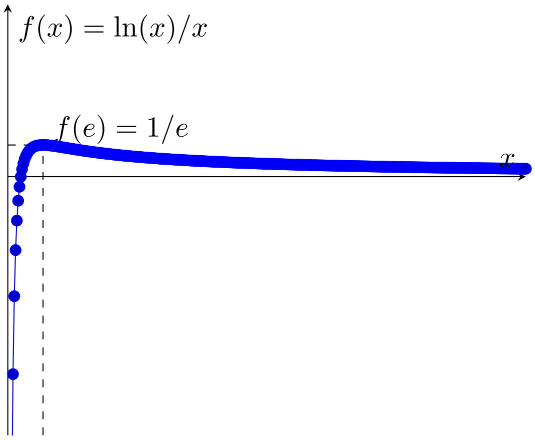
Donc f est strictement croissante sur $(0,e)$, strictement décroissante sur $(e,+\infty)$, et atteint son maximum en $x = e$ avec

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Tableau de variations.

x	0^+		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Graphe .



Application à la comparaison de π^e et e^π. Comparer π^e et e^π revient à comparer leurs logarithmes :

$$\pi^e \underset{?}{\lesseqgtr} e^\pi \iff e\ln(\pi) \underset{?}{\lesseqgtr} \pi\ln(e) \iff \frac{\ln(\pi)}{\pi} \underset{?}{\lesseqgtr} \frac{ln(e)}{e}.$$

Or $\pi > e$ et f est *décroissante* sur $(e, +\infty)$, donc

$$f(\pi) = \frac{\ln\pi}{\pi} < f(e) = \frac{1}{e}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{ln(e)}{e} \iff e\ln\pi < \pi\ln(e) \iff \boxed{\pi^e < e^\pi}.$$

Méthode 2 :

On utilise le développement de Taylor de e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$,

$$e^x > 1 + x.$$

En particulier, avec

$$x = \frac{\pi}{e} - 1 > 0 \quad (\text{car } \pi > e),$$

on obtient

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > 1 + \left(\frac{\pi}{e} - 1\right) = \frac{\pi}{e}.$$

En multipliant par e :

$$e^{\frac{\pi}{e}} > \pi.$$

Donc,

$$\boxed{\pi^e < e^\pi}.$$

1.3 Somme de taches divisible par 11

Somme de taches divisible par 11

On dispose de 101 chiens dalmatiens (chiens blancs à taches noires).
Pour chaque chien i, on note $a_i \in \mathbb{N}$ le nombre de ses taches noires. Montrer qu'il existe un *sous-ensemble non vide* de ces chiens tel que la somme des taches noires soit divisible par 11.

Solution :

On note

$$C = \{A_1, \ldots, A_{101}\},$$

où A_i est le i-ème chien dalmatien et $a_i \in \mathbb{N}$ le nombre de ses taches noires.

Cas 1. Il existe i tel que a_i soit divisible par 11.
Alors l'ensemble $\{A_i\}$ (un seul chien) convient : sa somme vaut $a_i \equiv 0 \pmod{11}$.

Cas 2. Sinon, pour tout $j \in \{1, \ldots, 101\}$, a_j n'est pas divisible par 11.
Autrement dit, le reste de la division euclidienne de chaque a_j par 11 appartient à $\{1, \ldots, 10\}$.

Rappel : Principe des tiroirs (pigeonhole)

Si l'on répartit N objets dans k boîtes, alors il existe au moins une boîte contenant au moins

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

objets.

Nous avons ici $N = 101$ nombres et $k = 10$ classes de congruence possibles (les restes $1, \ldots, 10$). Par le principe des tiroirs, il existe donc un reste $r \in \{1, \ldots, 10\}$ tel que *au moins* 11 des a_j vérifient $a_j \equiv r \pmod{11}$.

Considérons précisément 11 de ces chiens, disons d'indices $j_1, \ldots, j_{11}$, tous dans la même classe r modulo 11. Alors

$$a_{j_1} + \cdots + a_{j_{11}} \equiv r + \cdots + r = 11\,r \equiv 0 \pmod{11}.$$

Ainsi, la somme des 11 nombres de cette sous-famille est un multiple de 11, donc le sous-ensemble $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_{11}}\}$ convient.

Conclusion. Dans tous les cas, il existe un sous-ensemble non vide de C tel que la somme des nombres de taches noires des chiens qui le composent soit divisible par 11.

Chapitre 2

Probabilités

2.1 Problème des deux enfants

Exercice :

Problème des deux enfants

Une femme a deux enfants. Sachant que l'un d'eux est une fille, calculer la probabilité que l'autre soit un garçon.

Solution :

Notons

$$A : \{\text{l'autre enfant est un garçon}\}, \qquad B : \{\text{il y a au moins une fille}\}.$$

On cherche donc

$$P(A \mid B).$$

Par le théorème de Bayes,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Les couples possibles pour les deux enfants sont

$$\Omega = \{GG,\ GF,\ FG,\ FF\},$$

tous équiprobables, de probabilité $\frac{1}{4}$.

— $B = \{GF, FG, FF\}$, donc $P(B) = \frac{3}{4}$.

— $A \cap B$ correspond au fait qu'il y a au moins une fille et l'autre est un garçon, c'est-à-dire $\{GF, FG\}$, donc $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

2.2 Deux lancers de dé

Exercice :

Deux lancers de dé

On lance un dé équilibré à six faces deux fois successivement. Calculer la probabilité que la valeur obtenue au premier lancer soit strictement inférieure à celle obtenue au second lancer.

Solution :

Notons les résultats des deux lancers X_1 et X_2. L'espace des possibles est

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2,$$

de cardinal 36, tous les couples étant équiprobables.

Nous cherchons

$$P\big(X_1 < X_2\big) = \frac{\text{nombre de couples } (x_1, x_2) \text{ tels que } x_1 < x_2}{36}.$$

Pour chaque valeur de x_2, le nombre de valeurs de x_1 plus petites est $x_2 - 1$. Ainsi

$$\#\{x_1 < x_2\} = \sum_{x_2=1}^{6} (x_2 - 1) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Donc

$$P(X_1 < X_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

2.3 Pièce biaisée

Exercice :

Pièce biaisée

On dispose d'un ensemble de 100 pièces : une seule est biaisée et possède deux faces « pile », les 99 autres sont des pièces équilibrées.
On choisit une pièce au hasard et on la lance 10 fois. Elle tombe « pile » à chaque lancer. Calculer la probabilité que la pièce choisie soit la pièce biaisée.

Solution :

Soit

$$U : \{\text{la pièce choisie est la pièce biaisée}\}, F : \{\text{la pièce choisie est une pièce équilibrée}\},$$

$$H : \{\text{les 10 lancers donnent pile}\}.$$

Les probabilités a priori sont

$$P(U) = \frac{1}{100}, \qquad P(F) = \frac{99}{100}.$$

Par la formule de Bayes,

$$P(U \mid H) = \frac{P(H \mid U)\, P(U)}{P(H \mid U)\, P(U) + P(H \mid F)\, P(F)}.$$

or :

$$P(H \mid U) = 1, \qquad P(H \mid F) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

En remplaçant les valeurs,

$$P(U \mid H) = \frac{1 \times \frac{1}{100}}{1 \times \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times \frac{99}{100}} = \frac{1}{1 + 99\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}.$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$, on obtient

$$P(U \mid H) = \frac{1}{1 + \dfrac{99}{1024}} = \frac{1024}{1024 + 99} = \boxed{\frac{1024}{1123}}.$$

2.4 Parité du nombre de piles

Exercice :

Parité du nombre de piles

On lance 4 pièces équilibrées et indépendantes. Quelle est la probabilité que le nombre de piles obtenues soit *pair* ?

Solution :

Notons X le nombre de piles. Alors $X \sim \mathrm{Bin}(4, \frac{1}{2})$. On cherche $\mathbb{P}(X \in \{0, 2, 4\})$:

$$\mathbb{P}(X \in \{0,2,4\}) = \frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4}}{2^4} = \frac{1+6+1}{16} = \frac{8}{16} = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

Variante (parité générale). Pour n lancers (avec n pair),

$$\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1},$$

d'où $\mathbb{P}(\text{nombre de piles pair}) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$.

2.5 Élément choisi au hasard

Exercice :

Élément choisi au hasard

On considère l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. On choisit uniformément un élément I dans cet ensemble. On définit

$X_1 = \#\{\text{éléments strictement inférieurs à } I\}, X_2 = \#\{\text{éléments strictement supérieurs à } I\}$.

Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_1]$.

Solution :

L'élément choisi I est uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, donc

$$P(I = k) = \frac{1}{n}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Par définition,

$$X_1 = \#\{j \in \{1, \ldots, n\} : j < I\} = I - 1.$$

d'où X_1 a valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

Ainsi

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{k=0}^{n-1} k\, P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)\, P(I = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (k-1).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1) = \sum_{m=0}^{n-1} m = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{n-1}{2}}.$$

2.6 Premier As

Exercice :

Premier As

En moyenne, combien de cartes faut-il retourner dans un jeu standard de 52 cartes pour observer le premier As ?

Solution :

introduisons les variables suivantes :

$$X_1 = \#\{\text{cartes avant le 1er As}\}, \quad X_2 = \#\{\text{cartes entre le 1er et le 2e As}\},$$

$$X_3 = \#\{\text{cartes entre le 2e et le 3e As}\}, X_4 = \#\{\text{cartes entre le 3e et le 4e As}\}, X_5 = \#\{\text{cartes après le 4e As}\}.$$

Ces cinq variables comptent le nombre de cartes entre deux As successifs (ou avant le premier et après le dernier). On a évidemment

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 52 - 4 = 48$$

puisque seules les cartes *non As* sont comptées dans les intervalles.

Symétrie du mélange.

Le mélange est parfaitement uniforme. Les quatre As découpent les 48 autres cartes en 5 « blocs » séparés par les As. Par symétrie, les intervalles $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ ont même espérance :

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = \mathbb{E}[X_4] = \mathbb{E}[X_5].$$

Espérance de chaque X_i. Définissons les indicatrices :

$$I_{j,i} = \mathbf{1}_{\{\text{la } j\text{-ième carte non-As est dans l'intervalle } i\}}.$$

Alors

$$X_i = \sum_{j=1}^{48} I_{j,i}.$$

Or

$$\mathbb{E}[I_{j,i}] = P(C_j \in X_i) = \frac{1}{5}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[X_i] = \sum_{j=1}^{48} \mathbb{E}[I_{j,i}] = 48 \times \frac{1}{5} = \frac{48}{5}.$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{E}[X_i] = \frac{48}{5}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Position du premier As.

La position N du premier As est

$$N = X_1 + 1$$

(car il y a X_1 cartes non As avant, puis le premier As).

Ainsi

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[X_1] + 1 = \frac{48}{5} + 1 = \frac{48+5}{5} = \boxed{\frac{53}{5}}.$$

Numériquement,

$$\mathbb{E}[N] \approx 10,6.$$

2.7 Minimum de k positions

Exercice :

Minimum de k positions

On choisit k positions distinctes de manière uniforme parmi l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Notons

$$M = \min\{X_1, \ldots, X_k\}$$

le minimum des positions choisies. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[M]$.

Solution :

On choisit k positions distinctes de manière uniforme parmi $\{1, 2, \ldots, n\}$. Notons $M = \min\{X_1, \ldots, X_k\}$ leur minimum.

1. Distribution de M.

On a

$$P(M > m) = P(\text{tous les } k \text{ éléments sont dans } \{m+1, \ldots, n\}).$$

Le nombre de façons de choisir k éléments dans $\{m+1, \ldots, n\}$ est $\binom{n-m}{k}$. Le nombre total de k-ensembles dans $\{1, \ldots, n\}$ est $\binom{n}{k}$. Donc

$$P(M > m) = \frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-k.$$

2. Formule de l'espérance.

Par la formule générale

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{m=0}^{n-1} P(M > m).$$

Donc

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}}.$$

3. Changement d'indice.

Posons $j = n - m$, alors $m = 0 \Rightarrow j = n$, et $m = n-1 \Rightarrow j = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[M] = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=1}^{n} \binom{j}{k}.$$

4. Identité combinatoire.

On utilise l'identité de **hockey-stick** :

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[M] = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}}.$$

5. Simplification.

On a

$$\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n+1}{k+1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}[M] = \frac{n+1}{k+1}}.$$

2.8 Labyrinthe du rat

Exercice :

Labyrinthe du rat

Un rat se trouve dans un labyrinthe, face à deux portes. À chaque tentative, il choisit :

— la **première porte** avec une probabilité p, et

— la **deuxième porte** avec une probabilité $1 - p$.

— S'il choisit la **première porte**, il revient immédiatement à son point de départ après **une minute**.

— S'il choisit la **deuxième porte**, il se déplace vers un point intermédiaire en **une minute**, puis :

  — il **rebrousse chemin** avec une probabilité q, ce qui lui prend encore **une minute**,

  — ou il **quitte définitivement le labyrinthe** avec une probabilité $1 - q$, après **une minute**.

Tous les choix du rat sont faits de manière indépendante les uns des autres.

On note T le **temps total passé par le rat dans le labyrinthe**.

Questions :

1. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}[T]$.
2. Déterminer la loi de probabilité de T.

Solution :

On note T le temps total passé dans le labyrinthe. Le rat choisit :

— la porte 1 avec une probabilité p

— la porte 2 avec une probabilité $1 - p$

et soit N le numéro de la porte choisie au départ du rat.

Cas 1 : Choix de la porte 1

S'il choisit la porte 1, il revient au point de départ après 1 minute, et recommence exactement la même situation. Ainsi :

$$\mathbb{E}[T \mid N = 1] = 1 + \mathbb{E}[T]$$

Cas 2 : Choix de la porte 2

S'il choisit la porte 2, il atteint un point intermédiaire. À partir de là :

- Avec probabilité $1 - q$, il sort du labyrinthe après 2 minutes (1 aller + 1 sortie)
- Avec probabilité q, il revient au point de départ en 2 minutes (1 aller + 1 retour), et recommence

Ainsi :

$$\mathbb{E}[T \mid N = 2] = (1 - q) \cdot 2 + q \cdot (2 + \mathbb{E}[T]) = 2 + q \cdot \mathbb{E}[T]$$

Formule de l'espérance totale

On applique la formule de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[T] = p \cdot \mathbb{E}[T \mid N = 1] + (1 - p) \cdot \mathbb{E}[T \mid N = 2]$$

Substituons les expressions obtenues :

$$\mathbb{E}[T] = p(1 + \mathbb{E}[T]) + (1 - p)(2 + q \cdot \mathbb{E}[T])$$

Développons :

$$\mathbb{E}[T] = p + p \cdot \mathbb{E}[T] + 2(1 - p) + q(1 - p) \cdot \mathbb{E}[T]$$

$$\mathbb{E}[T] = p + 2(1 - p) + (p + q(1 - p)) \cdot \mathbb{E}[T]$$

Factorisons :

$$\mathbb{E}[T] \cdot (1 - (p + q(1 - p))) = p + 2(1 - p)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = \frac{p + 2(1 - p)}{1 - (p + q(1 - p))} = \frac{p + 2(1 - p)}{(1 - p)(1 - q)}$$

Conclusion

L'espérance du temps passé dans le labyrinthe est donnée par la formule générale :

$$\boxed{\mathbb{E}[T] = \frac{p + 2(1 - p)}{(1 - p)(1 - q)}}$$

2.9 Trois points sur un cercle

Exercice :

Trois points sur un cercle

On choisit indépendamment et uniformément trois points P_1, P_2, P_3 sur un cercle de centre O. Quelle est la probabilité que O appartienne au triangle $P_1P_2P_3$?

Solution

Un critère équivalent est que $O \in \triangle P_1P_2P_3$ si et seulement si les trois points ne sont pas contenus dans un même demi-cercle. Ainsi,

$$\mathbb{P}\big(O \in \triangle P_1P_2P_3\big) = 1 - \mathbb{P}(\text{les trois points sont dans un même demi-cercle}).$$

Fixons P_1. Considérons le demi-cercle *ouvert* de longueur π partant de P_1 dans un sens donné. La probabilité que P_2 et P_3 tombent tous deux dans ce demi-cercle vaut

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Définissons E_i = "les trois points sont contenus dans un demi-cercle dont l'extrémité est P_i". Alors $\mathbb{P}(E_i) = 1/4$. De plus, les événements E_1, E_2, E_3 sont *disjoints* : en effet, si deux d'entre eux se réalisaient simultanément, on aurait deux demi-cercles disjoints contenant les trois points, ce qui est impossible.

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\text{les trois points sont dans un même demi-cercle}) = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(E_i) = 3 \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}\big(O \in \triangle P_1P_2P_3\big) = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}}.$$

2.10 Variable à variance maximale dans [-1,1]

Exercice :

Variable à variance maximale dans $[-1,1]$

Soit Γ l'ensemble des variables aléatoires X telles que $X \in [-1,1]$ p.s. Déterminer

$$X^* \in \arg\max_{X \in \Gamma} \operatorname{Var}(X)$$

Solution :

Pour toute variable aléatoire $X \in [-1,1]$ p.s., on a

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2.$$

Or $X^2 \leq 1$, donc $\mathbb{E}[X^2] \leq 1$. Ainsi

$$\operatorname{Var}(X) \leq 1 - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 \leq 1.$$

Pour atteindre l'égalité $\operatorname{Var}(X) = 1$, il faut que

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X] = 0.$$

La condition $\mathbb{E}[X^2] = 1$ avec $X^2 \leq 1$ impose $|X| = 1$ p.s., donc $X \in \{-1, 1\}$ p.s. Ensuite, la condition $\mathbb{E}[X] = 0$ implique

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

Ainsi, un maximiseur est la variable de **Rademacher** symétrique :

$$X^* = \begin{cases} 1, & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Var}(X^*) = 1.$$

Remarque. Plus généralement, si $X \in [a, b]$ p.s., on a l'inégalité de Popoviciu :

$$\operatorname{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4},$$

avec égalité pour $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = \frac{1}{2}$.

2.11 Somme de variables uniformes

Somme de variables uniformes

Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$.
On définit :

$$N := \min\left\{ n \geq 1 \mid \sum_{i=1}^{n} X_i > 1 \right\}$$

Autrement dit, N est le nombre de tirages nécessaires pour que la somme dépasse 1.

Question : Déterminer l'espérance $\mathbb{E}[N]$.

Solution :

On utilise la formule générale de l'espérance pour une variable aléatoire à valeurs entières positives :

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > n)$$

Or, par définition de N, on a :

$$\mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1 \right)$$

Posons :

$$P_n := \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1\right)$$

Alors :

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

Calcul de P_n

On cherche :

$$P_n = \mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \leq 1\right) = \int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{\{x_1+\cdots+x_n\leq 1\}}\, dx_1 \cdots dx_n$$

Ce domaine est le **simplexe** :

$$\Delta_n := \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \mid \sum x_i \leq 1\right\}$$

Ce simplexe a un volume connu :

$$\mathrm{Vol}(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$$

(ce résultat classique peut se montrer par récurrence ou en intégrant successivement sur $x_1, \ldots, x_n$)

Conclusion

On a donc :

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\boxed{\mathbb{E}[N] = e}$$

Illustration géométrique du simplexe pour $n = 2$

Pour $n = 2$, on considère :

$$P_2 = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq 1) = \int_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{\{x+y\leq 1\}}\, dx\, dy$$

Le domaine d'intégration est le triangle ci-dessous, de sommet $(0,0), (1,0), (0,1)$, formant un simplexe de dimension 2.

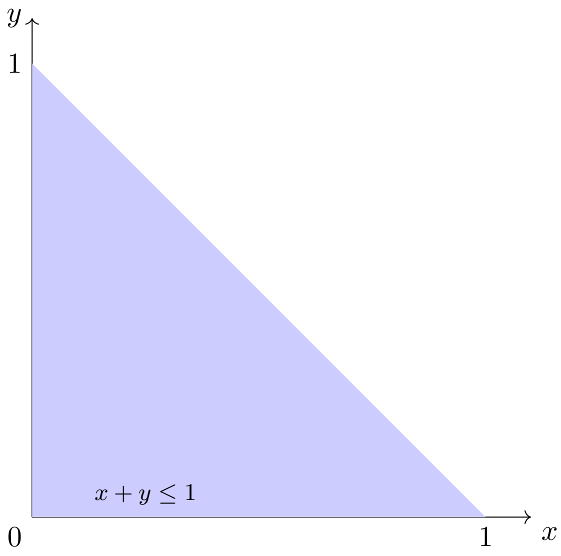


Figure 2.1 – Domaine $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq 1\}$, volume $\frac{1}{2}$

On voit que l'aire du triangle est :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

Cela confirme le fait que :

$$P_2 = \frac{1}{2!} \quad \text{et plus généralement} \quad P_n = \frac{1}{n!}$$

2.12 Indépendance entre $|X|$ et $\text{sign}(X)$ pour une loi normale

Indépendance entre $|X|$ et $\text{sign}(X)$ pour une loi normale

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On note :

$$\text{sign}(X) = \begin{cases} +1 & \text{si } X >= 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

Question : Montrer que les variables aléatoires $|X|$ et $\text{sign}(X)$ sont indépendantes.

Solution :

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On pose :

$$Y := |X|, \quad S := \text{sign}(X) = \begin{cases} +1 & \text{si } X \geq 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

Objectif :

$$\forall y > 0,\ s \in \{-1, 1\} \quad \mathbb{P}(Y \leq y,\ S = s) = \mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(S = s)$$

Étape 1 : Calcul de $\mathbb{P}(Y \leq y, S = 1)$

$$\mathbb{P}(Y \leq y, S = 1) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq y) = \Phi(y) - \Phi(0)$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(Y \leq y, S = 1) = \Phi(y) - \frac{1}{2}$$

Étape 2 : Calcul de $\mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(S = 1)$

Calcul de $\mathbb{P}(Y \leq y)$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = \Phi(y) - \Phi(-y)$$

$$\text{Or } \Phi(-y) + \Phi(y) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(Y \leq y) = 2\Phi(y) - 1$$

Calcul de $\mathbb{P}(S = 1)$

$$\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(S = 1) = (2\Phi(y) - 1) \cdot \frac{1}{2} = \Phi(y) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y \leq y, S = 1) = \mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(S = 1)$$

De même, pour $S = -1$ **:**

$$\mathbb{P}(Y \leq y, S = -1) = \mathbb{P}(-y \leq X < 0) = \Phi(0) - \Phi(-y)$$

$$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y) \Rightarrow \Phi(0) - \Phi(-y) = \frac{1}{2} - (1 - \Phi(y)) = \Phi(y) - \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(S = -1) = (2\Phi(y) - 1) \cdot \frac{1}{2} = \Phi(y) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y \leq y, S = -1) = \mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(S = -1)$$

Conclusion

$$\forall y > 0,\ \forall s \in \{-1, +1\}, \quad \mathbb{P}(Y \leq y, S = s) = \mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(S = s) \Rightarrow Y \perp S$$

$$\boxed{|X| \text{ et } \mathrm{sign}(X) \text{ sont indépendants}}$$

2.13 Durée moyenne d'attente à un arrêt avec deux bus

Exercice :

Durée moyenne d'attente à un arrêt avec deux bus

À un arrêt de bus, deux lignes desservent l'arrêt :

— Bus 1 passe toutes les 2 minutes,

— Bus 2 passe toutes les 5 minutes.

Un voyageur arrive à un instant complètement aléatoire (indépendant des horaires). Quelle est la durée moyenne d'attente avant le prochain bus (peu importe la ligne) ?

Solution :

Les passages des deux bus forment un processus où :

$$T_1 \sim \mathcal{U}[0,2], \qquad T_2 \sim \mathcal{U}[0,5],$$

les temps d'attente respectifs si l'on ne considérait qu'une seule ligne.

On cherche

$$\mathbb{E}\big[\min(T_1, T_2)\big].$$

Rappel :

Rappel : Espérance d'une variable aléatoire positive

Cas discret. Soit $X \geq 0$ une variable aléatoire discrète. Alors

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Cas continu. Soit $X \geq 0$ une variable aléatoire continue. Alors

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt.$$

Comme (T_1, T_2) est une v.a positive, et T_1 et T_2 sont indépendants,

$$\mathbb{E}[\min(T_1,T_2)] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\min(T_1,T_2) > t)\, dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T_1 > t,\, T_2 > t)\, dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T_1 > t)\, \mathbb{P}(T_2 > t)\, dt.$$

or si $X \sim \mathcal{U}[a,b]$, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

d'ou :

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq 2, \\ 1, & t > 2, \end{cases} \qquad \mathbb{P}(T_2 \leq t) = \begin{cases} \frac{t}{5}, & 0 \leq t \leq 5, \\ 1, & t > 5. \end{cases}$$

donc :

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases} \qquad \mathbb{P}(T_2 > t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{5}, & 0 \leq t \leq 5, \\ 0, & t > 5. \end{cases}$$

Comme $2 < 5$, l'intégrale se réduit à $[0, 2]$:

$$\mathbb{E}[\min(T_1, T_2)] = \int_0^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{t}{5}\right) dt.$$

Développons :

$$\left(1 - \frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{t}{5}\right) = 1 - \frac{7}{10}t + \frac{t^2}{10}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[\min(T_1, T_2)] = \left[t - \frac{7}{20}t^2 + \frac{1}{30}t^3\right]_0^2 = 2 - \frac{7}{20} \cdot 4 + \frac{1}{30} \cdot 8 = 2 - \frac{28}{20} + \frac{8}{30}.$$

D'ou :

$$\boxed{\mathbb{E}[\min(T_1, T_2)] = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}}$$

environ 52 secondes.

2.14 Gambler's Ruin

Exercice :

Gambler's Ruin

Un joueur a 2 euros. À chaque tour, il lance une pièce équilibrée :

- **Pile :** il gagne 1 euro,
- **Face :** il perd 1 euro.

Il s'arrête de jouer s'il atteint 0 ou 4 euros.
Question : Quelle est la probabilité qu'il atteigne 4 euros avant de tomber à 0 ?

Solution :

On modélise le capital du joueur $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une chaîne de Markov à temps discret avec les états :

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Les états 0 et 4 sont **absorbants** : si on les atteint, le jeu s'arrête.
- Les états $1, 2, 3$ sont **transitoires** avec les transitions :

$$\mathbb{P}(i \to i+1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(i \to i-1) = \frac{1}{2}$$

Soit $u_i := \mathbb{P}(\text{atteindre 4 avant 0} \mid X_0 = i)$, c'est-à-dire la probabilité de gagner en partant de i euros.

Les conditions aux bords sont :

$$u_0 = 0 \quad (\text{défaite immédiate}), \quad u_4 = 1 \quad (\text{victoire immédiate})$$

Et pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$u_i = \frac{1}{2}u_{i-1} + \frac{1}{2}u_{i+1}$$

C'est une équation de type :

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = 0$$

qui admet comme solution générale une fonction affine : $u_i = ai + b$

En imposant les conditions aux bords :

$$\begin{cases} u_0 = 0 = a \cdot 0 + b = b \Rightarrow b = 0 \\ u_4 = 1 = a \cdot 4 + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc :

$$u_i = \frac{i}{4}, \quad \boxed{u_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

2.15 Météo à Grenoble

Exercice :

Météo à Grenoble

À Grenoble, la météo évolue selon les règles suivantes :

— S'il fait beau un jour, il pleut le lendemain avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

— S'il pleut un jour, il fait beau le lendemain avec une probabilité de $\frac{1}{8}$.

Ces lois sont restées inchangées depuis l'an 1200.

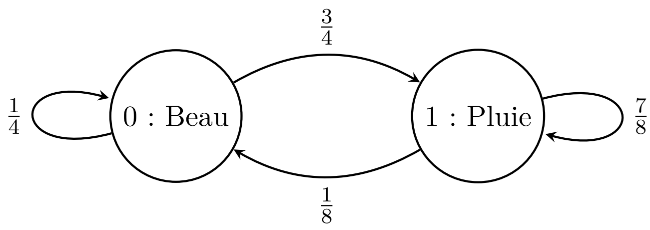
Question : Calculer la probabilité qu'il fasse beau le n-ième jour, sans aucune information sur le temps qu'il fait aujourd'hui.

Solution :

Représentation de la chaîne

On modélise la météo par une chaîne à deux états :

— État 0 : il fait beau
— État 1 : il pleut



La matrice de transition est :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Objectif

On note $p(n) = \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 0)$, la probabilité qu'il fasse beau au jour n sachant qu'il faisait beau au jour 0.

On veut calculer :

$$p(n) = (Q^n)_{0,0}$$

Diagonalisation de la matrice

On veut diagonaliser la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

valeurs propres.

Puisque Q est une matrice stochastique (la somme de chaque ligne vaut 1), on sait que $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre.

La trace de Q est :

$$\text{Tr}(Q) = \frac{1}{4} + \frac{7}{8} = \frac{9}{8}$$

Comme la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres, on a :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{9}{8} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

On a donc :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{8}$$

vecteurs propres.

On résout $(Q - \lambda I)v = 0$ pour chaque valeur propre. On trouve que les vecteurs propres associés sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

La matrice diagonale associée est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$Q^n = PD^nP^{-1}$$

En multipliant :

$$Q^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n & \frac{6}{7} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n \\ \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n & \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n \end{pmatrix}$$

Résultat final

Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 0) = p(n) = \frac{1}{7} + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

Cela signifie que la probabilité qu'il fasse beau au jour n, en partant d'un jour ensoleillé, **tend vers** $\frac{1}{7}$ lorsque $n \to \infty$.

2.16 Expecting HTH

Exercice :

Expecting HTH

En moyenne, combien de lancers d'une pièce équilibrée (pile ou face) faut-il pour observer la séquence **HTH** (Pile–Face–Pile) pour la première fois ?

Solution :

Chaîne de Markov

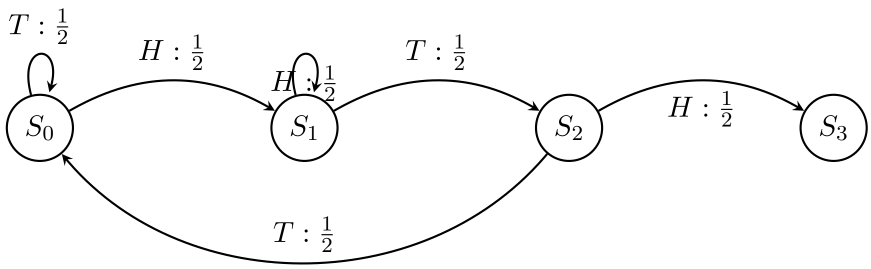
On modélise l'apparition de `HTH` à l'aide de la chaîne suivante :

— S_0 : rien encore vu

— S_1 : on a vu `H`

— S_2 : on a vu `HT`

— S_3 : on a vu `HTH` — état absorbant



Système d'équations

On cherche le temps moyen μ_i pour atteindre S_3 à partir de S_i. On a $\mu_3 = 0$. Le système est :

$$\begin{cases} \mu_0 = 1 + \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_1 \\ \mu_1 = 1 + \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 \\ \mu_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}\mu_0 = 1 + \frac{1}{2}\mu_0 \end{cases}$$

Résolution

Équation 3 : $\mu_2 = 1 + \frac{1}{2}\mu_0$

Substituer dans 2 :

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\mu_0) = 1 + \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mu_0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_0$$

$$\Rightarrow \mu_1 - \frac{1}{2}\mu_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\mu_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\mu_0 \Rightarrow \mu_1 = 3 + \frac{1}{2}\mu_0$$

Substituer dans 1 :

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}(3 + \frac{1}{2}\mu_0) = 1 + \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\mu_0 = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}\mu_0$$

$$\Rightarrow \mu_0 - \frac{3}{4}\mu_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}\mu_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow \mu_0 = 10$$

Conclusion

Le temps moyen d'apparition de la séquence `HTH` est :

$$\boxed{10}$$

Chapitre 3

Calcul Stochastique

3.1 Temps d'arrêt

Exercice :

Temps d'arrêt

Deux joueurs, A et B, s'affrontent à un jeu de pile ou face.

- Le joueur A commence avec a jetons,
- Le joueur B avec b jetons.

à chaque tour, on lance une pièce équitable :

- Si A gagne, il prend un jeton à B,
- Sinon, il en perd un au profit de B.

Le jeu continue jusqu'à ce que l'un des deux joueurs ait tous les jetons. Quelle est la probabilité que A gagne la partie ?

Solution :

Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. définies par :

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = +1) = \mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Définissons (X_n), le nombre de jetons du joueur A après n tours :

$$X_n = a + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i, \quad \text{avec } X_0 = a.$$

Soit τ le **temps d'arrêt** correspondant à la fin de la partie :

$$\tau := \inf\{n \geq 0 \mid X_n = 0 \text{ ou } X_n = a+b\}.$$

C'est le premier instant où A ou B perd tous ses jetons.

On a :

— **martingale** par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)$.
— τ est un **temps d'arrêt** (car X_n est adapté, et $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$).
— De plus, τ est **presque sûrement fini** (le processus atteint presque sûrement l'un des bords).

Par le **théorème du temps d'arrêt**, si (X_n) est une martingale et τ est un temps d'arrêt presque sûrement fini, alors :

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] = a.$$

Or X_τ ne prend que les valeurs 0 (si B gagne) ou $a + b$ (si A gagne), donc :

$$\mathbb{E}[X_\tau] = 0 \cdot \mathbb{P}(A \text{ perd}) + (a+b) \cdot \mathbb{P}(A \text{ gagne}) = (a+b) \cdot \mathbb{P}(A > B).$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(A > B) = \frac{a}{a+b}}.$$

Preuve que $\tau < \infty$ p.s. Il s'agit de montrer que :

$$\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1 \iff \mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau > n) = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\tau > n \iff 0 < X_k < a + b \quad \text{pour tout } k \leq n.$$

En particulier :

$$\tau > n \implies 0 < X_n = a + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i < a + b.$$

Ce qui revient à :

$$-a < \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i < b \iff \frac{-a}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i < \frac{b}{\sqrt{n}}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(\tau > n) = \mathbb{P}\left(\frac{-a}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i < \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{E}_n\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) - \mathcal{E}_n\left(\frac{-a}{\sqrt{n}}\right),$$

où $\mathcal{E}_n$ est la fonction de répartition de $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$.

Or lorsque $n \to \infty$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

donc :

$$\mathcal{E}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi \quad \text{où } \Phi \text{ est la f.d.r. de } \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau > n) = \int_{-a/\sqrt{n}}^{b/\sqrt{n}} f_{\mathcal{E}_n}(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^0 f(x)\, dx = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0}.$$

3.2 Loi de l'intégrale du mouvement brownien

Exercice :

Loi de l'intégrale du mouvement brownien

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, et soit :

$$X := \int_0^T W_t \, dt$$

Question : Déterminer la loi de X (loi exacte : nature, espérance, variance).

Solution :

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On pose :

$$X := \int_0^T W_t \, dt$$

On considère la fonction :

$$f(t, x) = tx$$

On applique la formule d'Itô sur $f(t, W_t)$:

$$df(t, W_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = W_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = t, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow d(tW_t) = W_t dt + t dW_t$$

Intégration entre 0 et T :

$$\int_0^T W_t \, dt = TW_T - \int_0^T t \, dW_t \quad \Rightarrow \quad X = TW_T - \int_0^T t \, dW_t$$

donc

$$\boxed{\int_0^T W_t \, dt = \int_0^T (T - t) \, dW_t}$$

Rappel : loi de l'intégrale de Wiener

Soit $f \in L^2([0, T])$ déterministe, alors :

$$\int_0^T f(t) \, dW_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T f^2(t) \, dt\right)$$

Application à $X = \int_0^T W_t\,dt$

On a :

$$X = \int_0^T W_t\,dt = \int_0^T (T-t)\,dW_t$$

$$\mathbb{E}[X] = 0$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_0^T (T-t)^2 dt = \frac{T^3}{3}$$

Conclusion

$$\boxed{\int_0^T W_t\,dt \sim \mathcal{N}\left(0,\ \frac{T^3}{3}\right)}$$

3.3 Espérance conditionnelle d'un mouvement brownien

Exercice :

Espérance conditionnelle d'un mouvement brownien

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

Question : Calculer $\mathbb{E}[W_t \mid W_s]$

Solution :

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On considère deux cas selon les positions relatives de t et s, tous deux strictement positifs.

Cas 1 : $t > s$

Par propriété de martingale (adaptation naturelle), on a :

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s \Rightarrow \mathbb{E}[W_t \mid W_s] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] \mid W_s\right] = W_s$$

$$\boxed{\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = W_s \quad \text{si } t > s}$$

Cas 2 : $0 < t < s$

Rappel :

Soient $0 < u < v$, le **pont brownien** de u à v est défini par :

$$B_t^{u,v} := W_t - \frac{t-u}{v-u}(W_v - W_u), \quad t \in [u,v]$$

Alors :
- $(B_t^{u,v})_t$ est un processus continu, centrée gaussien
- $(B_t^{u,v})_t$ indépendants de $\sigma(W_s, s \leq u)$ et $\sigma(W_s, s \geq v)$

Application à notre cas $0 < t < s$:

$$W_t = \left(W_t - \frac{t}{s}W_s\right) + \frac{t}{s}W_s$$

$$\text{On note } \widehat{W}_t := W_t - \frac{t}{s}W_s \quad \Rightarrow \quad W_t = \widehat{W}_t + \frac{t}{s}W_s$$

$$\text{Or } \widehat{W}_t \perp W_s \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[\widehat{W}_t \mid W_s] = 0$$

Donc :

$$\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = \mathbb{E}\left[\widehat{W}_t + \frac{t}{s}W_s \mid W_s\right] = \frac{t}{s}W_s$$

$$\boxed{\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = \frac{t}{s}W_s \quad \text{si } 0 < t < s}$$

Conclusion

$$\boxed{\mathbb{E}[W_t \mid W_s] = \begin{cases} W_s & \text{si } t > s \\ \frac{t}{s}W_s & \text{si } t < s \end{cases}}$$

3.4 Espérance conditionnelle d'une intégrale stochastique

Exercice :

Espérance conditionnelle d'une intégrale stochastique

Soit $(B_s)_{s\geq 0}$ M.B.S et $t \in \mathbb{R}^+$
Question : calculer

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t s dB_s \mid B_t\right]$$

Solution :

On pose :

$$\Phi(b) := \mathbb{E}\left[\int_0^t s\,dB_s \,\middle|\, B_t = b\right]$$

Étape 1 : Formule d'Itô

On applique Itô à la fonction $f(s, B_s) = sB_s$:

$$d(sB_s) = B_s\,ds + s\,dB_s \quad \Rightarrow \quad s\,dB_s = d(sB_s) - B_s\,ds$$

On intègre entre 0 et t :

$$\int_0^t s\,dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\,ds$$

Étape 2 : Espérance conditionnelle

On remplace dans $\Phi(b)$:

$$\Phi(b) = \mathbb{E}\left[tB_t - \int_0^t B_s\,ds \,\middle|\, B_t = b\right] = tb - \mathbb{E}\left[\int_0^t B_s\,ds \,\middle|\, B_t = b\right]$$

Étape 3 : Fubini

Comme B_s est uniformément intégrable, on peut échanger intégrale et espérance :

$$\Phi(b) = tb - \int_0^t \mathbb{E}[B_s \mid B_t = b]\,ds$$

Étape 4 : Pont brownien

Pour $0 \leq s \leq t$, par la propriété du pont brownien :

$$\mathbb{E}[B_s \mid B_t = b] = \frac{s}{t}b$$

Donc :

$$\Phi(b) = tb - \int_0^t \frac{s}{t}b\,ds = tb - \frac{b}{t}\int_0^t s\,ds = tb - \frac{b}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = tb - \frac{t}{2}b = \frac{t}{2}b$$

Conclusion

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t s\,dB_s \,\middle|\, B_t\right] = \frac{t}{2}B_t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}\left[\int_0^t s\,dB_s \,\middle|\, B_t\right] = \frac{t}{2}B_t}$$

3.5 MBG

Exercice :

MBG

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, et soit S_t un processus satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t, \quad S_0 > 0$$

Question : Déterminer une expression explicite de S_t.

Solution :

On souhaite résoudre l'équation stochastique :

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t, \quad S_0 > 0$$

Étape 1 : Changement de variable $Y_t := \log S_t$

On applique le lemme d'Itô à la fonction $f(x) = \log x$, avec $S_t > 0$:

$$dY_t = d(\log S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(dS_t)^2$$

$$= \frac{1}{S_t}(\mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t) - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\, dt$$

$$= \mu\, dt + \sigma\, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2\, dt \quad \Rightarrow \quad dY_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dW_t$$

Étape 2 : Intégration de Y_t

$$Y_t = \log S_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$$

Étape 3 : Retour à S_t

$$S_t = \exp(Y_t) = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right)$$

Conclusion

$$\boxed{S_t = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right)}$$

3.6 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Exercice :

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On considère le processus X_t solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = -aX_t\,dt + \sigma\,dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad a > 0,\ \sigma > 0$$

Question : Déterminer la loi de X_t.

Solution :

On pose le facteur intégrant :

$$Y_t := e^{at}X_t$$

Par la formule d'Itô pour $f(t, X_t) = e^{at}X_t$, on a :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\,dX_t = ae^{at}X_t\,dt + e^{at}\,dX_t$$

En remplaçant dX_t dans cette expression :

$$dY_t = ae^{at}X_t\,dt + e^{at}(-aX_t\,dt + \sigma\,dW_t) = ae^{at}X_t\,dt - ae^{at}X_t\,dt + \sigma e^{at}\,dW_t$$

$$\Rightarrow dY_t = \sigma e^{at}dW_t$$

En intégrant des deux côtés de 0 à t :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{as}dW_s = x_0 + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$$

Donc :

$$X_t = e^{-at}Y_t = x_0e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$\boxed{X_t = x_0e^{-at} + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)}dW_s}$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X_t] = x_0e^{-at}$$

Variance :

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2e^{-2at}\int_0^t e^{2as}ds = \sigma^2\cdot\frac{1-e^{-2at}}{2a}$$

Donc :

$$\boxed{X_t \sim \mathcal{N}\left(x_0 e^{-at},\ \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right)}$$

$$\boxed{X_t \sim_{t\to+\infty} \mathcal{N}\left(0,\ \frac{\sigma^2}{2a})\right)}$$

3.7 Probabilité de sortie à gauche d'un intervalle – O.U.

Exercice :

Probabilité de sortie à gauche d'un intervalle – O.U.

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, et soit X_t défini par :

$$dX_t = -aX_t\, dt + \sigma\, dW_t, \quad X_0 = x \in (b, c), \quad \text{avec } a > 0,\ \sigma > 0,\ \ b \leq 0 \leq c$$

On définit le temps d'arrêt :

$$T := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin (b, c)\}$$

On admettra que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.
Question : Déterminer la probabilité que X_t sorte par le bas, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X_T = b)$$

Solution :

L'idée est de construire une fonction f telle que $(f(X_t))_{t\geq 0}$ soit une martingale. On pourra alors appliquer le théorème de temps arrêt pour calculer $\mathbb{E}[f(X_T)]$, et en déduire $\mathbb{P}(X_T = b)$.

Étape 1 – Recherche de f
On cherche $f \in \mathcal{C}^2$ vérifiant que $f(X_t)$ est une martingale. En appliquant la formule d'Itô à $f(X_t)$:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \tfrac{1}{2}f''(X_t)\sigma^2 dt = \Big[-aX_t f'(X_t) + \tfrac{\sigma^2}{2}f''(X_t)\Big]dt + \sigma f'(X_t)dW_t.$$

Pour annuler le terme en dt, f doit donc satisfaire l'équation différentielle

$$\frac{\sigma^2}{2}f''(x) - axf'(x) = 0. \quad f(0) = 0, f'(0) = 1$$

On pose $g(x) = f'(x)$, ce qui conduit à

$$g'(x) - \frac{2a}{\sigma^2}xg(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \lambda \exp\Big(\tfrac{a}{\sigma^2}x^2\Big).$$

En intégrant et en choisissant $f(0) = 0$ (constante arbitraire), on obtient

$$f(x) = \lambda \int_0^x \exp\Big(\tfrac{a}{\sigma^2}y^2\Big)dy.$$

comme $f'(0) = 1$ donc $\lambda = 1$

Étape 2 – Théorème d'arrêt

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(f(X_t))_{t\geq 0}$ est une martingale et que $T_n := T \wedge n$ est un temps d'arrêt borné, le théorème d'arrêt donne

$$\mathbb{E}\big[f(X_{T_n})\big] = \mathbb{E}[f(X_0)] = 0.$$

Pour pouvoir échanger la limite et l'espérance, c'est-à-dire écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[f(X_{T_n})\big] = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to+\infty} f(X_{T_n})\Big),$$

il faut appliquer le théorème de la convergence dominée.

— Lorsque $n \to +\infty$, on a $T_n = T \wedge n \to T$ presque sûrement.
— De plus, $|f(X_{T_n})| \leq \sup_{|t|\leq n} |f(X_t)|$, et comme n est fini, cette borne est intégrable.

Ainsi, par le théorème de la convergence dominée , on obtient

$$\mathbb{E}[f(X_T)] = \mathbb{E}[f(X_0)] = 0.$$

Or $X_T \in \{b, c\}$, donc

$$\mathbb{E}\big[f(X_T)\big] = f(b)\,\mathbb{P}(X_T = b) + f(c)\,\mathbb{P}(X_T = c) = f(b)\,\mathbb{P}(X_T = b) + f(c)\big[1 - \mathbb{P}(X_T = b)\big].$$

Il en résulte

$$\mathbb{P}(X_T = b) = \frac{f(c)}{f(c) - f(b)} = \frac{\displaystyle\int_0^c \exp\!\big(\tfrac{a}{\sigma^2} y^2\big)\,dy}{\displaystyle\int_b^c \exp\!\big(\tfrac{a}{\sigma^2} y^2\big)\,dy}.$$

Réponse finale :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_T = b) = \frac{\displaystyle\int_0^c e^{\frac{a}{\sigma^2} y^2}\,dy}{\displaystyle\int_b^c e^{\frac{a}{\sigma^2} y^2}\,dy}}$$

3.8 Hitting time of brownian motion

Exercice :

Hitting Time of Brownian Motion

Let $(W_t)_{t\geq 0}$ be a standard Brownian motion and define the **hitting time** of level $a \in \mathbb{R}$ by :

$$\tau_a := \inf\{\, t \geq 0 \mid W_t = a \,\}.$$

Questions :

1. Show that $\forall a \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^+$:

$$M_{\tau_a}(u) := \mathbb{E}\big[e^{-u\tau_a}\big] = e^{-|a|\sqrt{2u}}.$$

2. Show that $\tau_a < +\infty$ almost surely, and that $\mathbb{E}[\tau_a] = +\infty$.

Solution :

Step 1 – Trivial case. If $a = 0$, then by definition $\tau_0 = 0$ and $M_{\tau_0}(u) = 1 = e^{-|a|\sqrt{2u}}$. Hence, the formula holds.

Step 2 – Case $a > 0$. Consider the exponential martingale :

$$N_t := \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right), \qquad \sigma > 0.$$

Since $(N_t)_{t\geq 0}$ is a positive martingale, by the **optional stopping theorem** applied to the bounded stopping time $\tau_a \wedge t$, we have :

$$\mathbb{E}[N_{\tau_a \wedge t}] = \mathbb{E}[N_0] = 1.$$

Decomposition :

$$\mathbb{E}[N_{\tau_a \wedge t}] = \mathbb{E}\left[N_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{\tau_a < t\}}\right] + \mathbb{E}\left[N_t \mathbf{1}_{\{\tau_a \geq t\}}\right].$$

As $N_t \geq 0$, monotone convergence gives :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[N_{\tau_a \wedge t}] = \mathbb{E}\left[N_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{\tau_a < +\infty\}}\right] + \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[N_t \mathbf{1}_{\{\tau_a \geq t\}}\right].$$

On the event $\{\tau_a \geq t\}$, we have $W_t \leq a$, hence :

$$N_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \leq \exp\left(\sigma a - \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \to \infty.$$

By dominated convergence, the second term vanishes, and thus :

$$\mathbb{E}\left[N_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{\tau_a < +\infty\}}\right] = 1.$$

At time τ_a, we have $W_{\tau_a} = a$, hence :

$$N_{\tau_a} = \exp\left(\sigma a - \frac{\sigma^2 \tau_a}{2}\right).$$

Therefore :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2 \tau_a}{2}\right) \mathbf{1}_{\{\tau_a < +\infty\}}\right] = e^{-\sigma a}.$$

Let $u = \frac{\sigma^2}{2}$. Then :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[e^{-u\tau_a} \mathbf{1}_{\{\tau_a < +\infty\}}\right] = e^{-a\sqrt{2u}}.}$$

So if we take $u \to 0$ we obtain that $\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1$, hence :

$$\boxed{M_{\tau_a}(u) = \mathbb{E}[e^{-u\tau_a}] = e^{-a\sqrt{2u}}, \quad a > 0.}$$

Step 3 – Case $a < 0$. By the symmetry of Brownian motion, $(W_t)_{t\geq 0}$ and $(-W_t)_{t\geq 0}$ have the same law. Thus, τ_a and τ_{-a} are identically distributed, giving :

$$M_{\tau_a}(u) = M_{\tau_{-a}}(u) = e^{-|a|\sqrt{2u}}.$$

Step 4 – Expectation. From the Laplace transform $M_{\tau_a}(u) = e^{-|a|\sqrt{2u}}$, the derivative at $u = 0$ is infinite, implying :

$$\boxed{\mathbb{E}[\tau_a] = +\infty.}$$

Final result :

$$\boxed{M_{\tau_a}(u) = e^{-|a|\sqrt{2u}}, \qquad \mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1, \qquad \mathbb{E}[\tau_a] = +\infty.}$$

3.9 Density of the Hitting Time of Brownian Motion

Exercice :

Density of the Hitting Time of Brownian Motion

Let $(W_t)_{t\geq 0}$ be a standard Brownian motion and

$$\tau_a := \inf\{\, t \geq 0 \mid W_t = a \,\}, \qquad a > 0.$$

Questions :

1. Compute the cumulative distribution function (CDF)
$$F_{\tau_a}(t) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t).$$
2. Deduce the probability density function (PDF) of τ_a.

Solution :

Step 1 – Using the reflection principle.

For any $t > 0$:

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} W_s \geq a\right).$$

By the **reflection principle** for Brownian motion :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} W_s \geq a\right) = 2\,\mathbb{P}(W_t \geq a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right),$$

where $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$ is the standard normal CDF.

Hence, the CDF of τ_a is :

$$\boxed{F_{\tau_a}(t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right), \quad t > 0.}$$

Step 2 – Computing the density.

Differentiate $F_{\tau_a}(t)$ with respect to t :

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{d}{dt} F_{\tau_a}(t) = 2\,\phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \frac{a}{2t^{3/2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right), \quad t > 0,$$

where $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ is the standard normal PDF.

Step 3 – Final result.

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\tau_a}(t) &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right), \\ f_{\tau_a}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad t > 0. \end{aligned}}$$

The law of τ_a is called the **Lévy distribution**, a special case of the *Inverse Gaussian* family. Note that $t.f_{\tau_a}(t) \sim t.t^{-3/2} = t^{-1/2}$ as $t \to +\infty$, explaining why $\mathbb{E}[\tau_a] = +\infty$. $(-1/2 \geq -1$ so div selon Riemann)

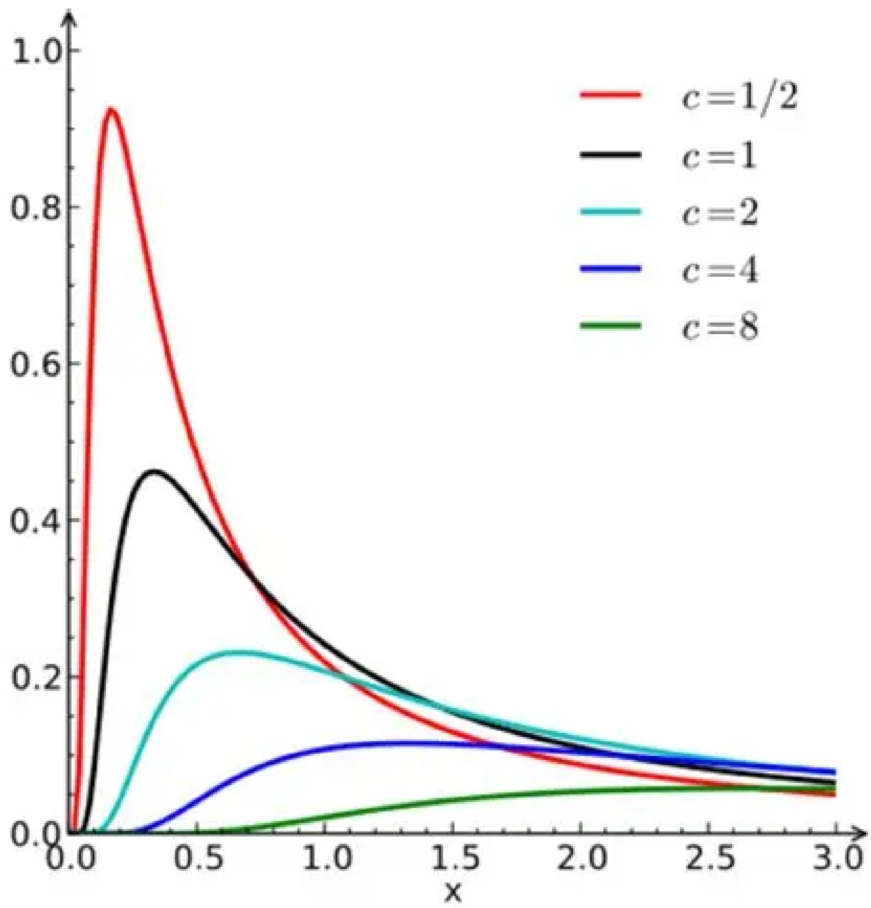


Figure 3.1 – Lévy PDF

3.10 Reflection Principle for Brownian Motion

Exercice :

Reflection Principle for Brownian Motion

Let $(W_t)_{t\geq 0}$ be a standard Brownian motion and define

$$M_t := \max_{0\leq s\leq t} W_s.$$

Questions :

1. Show that for any $a > 0$,

$$\mathbb{P}(M_t \geq a) = 2\,\mathbb{P}(W_t \geq a) = \mathbb{P}(|W_t| \geq a).$$

Solution :

Question 1 :

Ona :

$$\mathbb{P}(W_t \geq a) = \mathbb{P}(W_t \geq a \mid M_t \geq a)\mathbb{P}(M_t \geq a) + \mathbb{P}(W_t \geq a \mid M_t < a)\mathbb{P}(M_t < a)$$

or $\mathbb{P}(W_t \geq a \mid M_t < a) = \mathbb{P}(W_t \geq a \mid \max_{0\leq s\leq t} W_s < a) = 0$

donc :

$$\mathbb{P}(W_t \geq a) = \mathbb{P}(W_t \geq a \mid M_t \geq a)\mathbb{P}(M_t \geq a)$$

Reflection principle :

For each sample path $(W_s)_{0\leq s\leq t}$ such that

$$M_t \geq a \quad \text{and} \quad W_t < a,$$

define its *reflected path* with respect to level a :

$$\widetilde{W}_s := \begin{cases} W_s, & s \leq \tau_a, \\ 2a - W_s, & s > \tau_a, \end{cases} \qquad \text{where } \tau_a := \inf\{s \geq 0 : W_s = a\}.$$

This reflection keeps the law of the Brownian motion unchanged (since increments are symmetric and independent).

thus :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(W_t \geq a \mid M_t \geq a) = \mathbb{P}(W_t < a \mid M_t \geq a) \\ \\ \mathbb{P}(W_t \geq a \mid M_t \geq a) + \mathbb{P}(W_t < a \mid M_t \geq a) = 1 \end{cases}$$

so

$$\mathbb{P}(W_t \geq a \mid M_t \geq a) = \frac{1}{2}$$

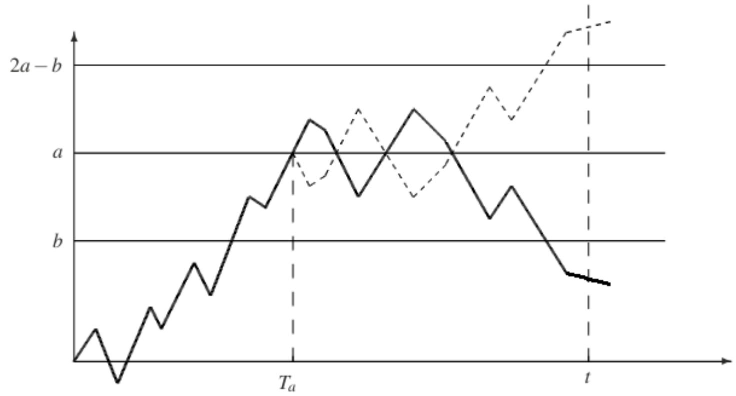


Fig. 2.2 Illustration du principe de réflexion : la probabilité, conditionnellement à $\{T_a \leq t\}$, que la courbe soit sous b à l'instant t coïncide avec la probabilité que la courbe réfléchie au niveau a après T_a (en pointillés) soit au-dessus de $2a - b$ à l'instant t

Figure 3.2 – Reflection principle : mapping paths of W_t that hit level a and end below b to reflected paths ending above $2a - b$.

hence :

$$\boxed{\mathbb{P}(M_t \geq a) = 2\,\mathbb{P}(W_t \geq a)}$$

Question 2 :

For $b < a$, :

The reflected path maps bijectively the event

$$\{M_t \geq a,\, W_t < b\} \quad \text{to} \quad \{W_t > 2a - b\}.$$

Hence,

$$\mathbb{P}(M_t \geq a,\, W_t \leq b) = \mathbb{P}(W_t \geq 2a - b).$$

Indeed, a path that hits a before time t and ends below b is mirrored into a path ending above $2a - b$.

Deuxième partie

Quant Finance

Chapitre 1

Option pricing

1.1 Prix du Call européen dans le modèle de Black-Scholes

Prix du Call européen dans le modèle de Black-Scholes

Soit un actif S_t évoluant selon la dynamique :

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

où r est le taux sans risque constant, $\sigma > 0$, et (W_t) est un mouvement brownien sous la mesure risque-neutre.

On considère une option Call européenne de maturité T et de strike K.

Question : Montrer que le prix C_0 du Call à $t = 0$ est donné par :

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Solution :

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, l'actif sous-jacent suit :

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad S_0 > 0$$

La solution de cette EDS est :

$$S_T = S_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}\right)$$

Le prix du call européen à $t = 0$ est donné par :

$$C_0 = e^{-rT} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)_+\right]$$

Décomposition de l'espérance

$$(S_T - K)_+ = S_T \cdot \mathbf{1}_{S_T > K} - K \cdot \mathbf{1}_{S_T > K}$$

$$\Rightarrow C_0 = e^{-rT}\left(\mathbb{E}[S_T \cdot \mathbf{1}_{S_T > K}] - K \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_T > K}]\right)$$

1. Calcul de $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_T > K}]$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_T > K) &= \mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{S_T}{K}\right) > 0\right) \quad (\ln \text{ est croissante}) \\
&= \mathbb{P}\left(\ln(S_T) > \ln(K)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}} > \ln(K)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}} > \ln(K) - \ln(S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \\
&= \mathbb{P}\left(W_T^{\mathbb{Q}} > \frac{1}{\sigma}\left[\ln(K/S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(W_T^{\mathbb{Q}} > -d_2 \cdot \sqrt{T}\right) \quad (\text{on pose } d_2 := \frac{\ln(S_0/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{W_T^{\mathbb{Q}}}{\sqrt{T}} > -d_2\right) \quad (\text{car } W_T^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0,T)) \\
&= \mathbb{P}(G > -d_2), \quad G \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= 1 - \Phi(-d_2) \quad \text{avec } \Phi \text{ est la F.D.R du loi } \mathcal{N}(0,1) \\
&= \Phi(d_2), \quad \Phi(-x) + \Phi(x) = 1
\end{aligned}$$

2. Calcul de $\mathbb{E}[S_T \cdot \mathbf{1}_{S_T > K}]$

Rappel : Théorème de Girsanov

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$, et $(h_t)_{t \geq 0}$ un processus progressif, tel que :

$$Z_t := \exp\left(-\int_0^t h_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 \, ds\right)$$

soit une $\mathbb{P}$-martingale.
Alors, la mesure $\mathbb{Q}$ définie par $\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$ transforme :

$$\widetilde{W}_t := W_t + \int_0^t h_s \, ds \quad \text{en un Brownien sous } \mathbb{Q}.$$

Formellement, posons :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_T \cdot \mathbf{1}_{S_T>K}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_0 \cdot \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T^{\mathbb{Q}}\right)\cdot \mathbf{1}_{S_T>K}\right] \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}}-\frac{\sigma^2}{2}T\right)\cdot \mathbf{1}_{S_T>K}\right] \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_T \cdot \mathbf{1}_{S_T>K}\right] \quad \text{avec } Z_T := \exp\left(\sigma W_T^{\mathbb{Q}}-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\cdot \mathbf{1}_{S_T>K}\right] \quad \text{(remarque : Girsanov avec } h_t=\sigma) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}(S_T>K) \quad \text{car } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}Y\right]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}\left(\ln(S_T/K)>0\right) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}\left(\ln(S_T)>\ln(K)\right) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}\left(\ln(S_0)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T^{\mathbb{Q}}>\ln(K)\right) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}\left(W_T^{\mathbb{Q}}>\frac{\ln(K/S_0)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}\left(W_T^{\mathbb{Q}}-\sigma T>\frac{\ln(K/S_0)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}-\sigma T\right) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}\left(W_T^{\mathbb{Q}}-\sigma T>\frac{\ln(K/S_0)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right) \quad \text{or } W_T^{\mathbb{Q}}-\sigma T\sim\mathcal{N}(0,T) \text{ sous } \mathbb{P} \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}\left(\frac{W_T^{\mathbb{Q}}-\sigma T}{\sqrt{T}}>-d_1\right) \quad \text{(on pose } d_1 := \frac{\ln(S_0/K)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \mathbb{P}(G>-d_1), \quad \text{où } G\sim\mathcal{N}(0,1) \\
&= S_0 \cdot e^{rT} \cdot \Phi(d_1)
\end{aligned}
$$

Conclusion

On obtient :

$$
C_0 = e^{-rT}\left(S_0.e^{rT}\cdot\Phi(d_1)-K\cdot\Phi(d_2)\right) = \boxed{S_0\Phi(d_1)-Ke^{-rT}\Phi(d_2)}
$$

avec :

$$
d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1-\sigma\sqrt{T}
$$

1.2 Option Chooser

Exercice :

Option Chooser

On considère une option *chooser* définie comme suit : à la date T_1, le détenteur choisit si l'option devient un call européen ou un put européen. L'option choisie porte sur le même actif sous-jacent S_t, avec la même maturité finale $T_2 > T_1$ et le même prix d'exercice K.

Question : Donner le prix de cette option à $t = 0$ dans le modèle de Black–Scholes.

Solution :

À la date T_1, la valeur de l'option chooser est

$$V(T_1) = \max\Big(C_{T_1}(K, T_2),\ P_{T_1}(K, T_2)\Big),$$

où $C_{T_1}(K, T_2)$ et $P_{T_1}(K, T_2)$ désignent respectivement le prix d'un call et d'un put européens de strike K et échéance T_2, évalués à la date T_1.

D'après la parité call–put,

$$C_{T_1}(K, T_2) - P_{T_1}(K, T_2) = S_{T_1} - Ke^{-r(T_2 - T_1)}.$$

or

$$\max(x, y) = y + \max(x - y, 0)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\max(C_{T_1}, P_{T_1}) &= P_{T_1}(K, T_2) + \max(C_{T_1}(K, T_2) - P_{T_1}(K, T_2), 0) \\
&= P_{T_1}(K, T_2) + \max\Big(S_{T_1} - Ke^{-r(T_2 - T_1)}, 0\Big) \\
&= P_{T_1}(K, T_2) + \max\Big(S_{T_1} - K', 0\Big) \quad \textit{avec} \ \ K' = Ke^{-r(T_2 - T_1)}
\end{aligned}$$

or $\max\Big(S_{T_1} - Ke^{-r(T_2 - T_1)}, 0\Big)$ est le payoff d'une option call de strike $K' = Ke^{-r(T_2 - T_1)}$ et d'échéance T_1

Par conséquent, le prix de l'option chooser à $t = 0$ s'écrit

$$V(0) = P(0; K, T_2) + C_0\big(Ke^{-r(T_2 - T_1)}, T_1\big),$$

c'est-à-dire la somme :

- — d'un put européen de strike K et maturité T_2,
- — plus d'un call européen de strike $Ke^{-r(T_2 - T_1)}$ et maturité T_1.

1.3 Option d'échange avec devise

Exercice :

Option d'échange avec devise

Soient Z_t (actif en EUR), Y_t (actif en USD) et X_t (taux de change EUR/USD). soit une option de payoff à maturité T est

$$\Pi_T = (Z_T - X_T Y_T)^+.$$

Dans le monde de Black–Scholes donner le prix de l'option à t= 0 ?

Solution

Le payoff vaut $(Z_T - X_T Y_T)^+$ et le prix initial est

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{€}}\Big[e^{-r^{€}T}\left(Z_T - X_T Y_T\right)^+\Big] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{€}}\Big[e^{-r^{€}T} Z_T\,\mathbf{1}_{\{Z_T \geq X_T Y_T\}}\Big] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{€}}\Big[e^{-r^{€}T} X_T Y_T\,\mathbf{1}_{\{Z_T \geq X_T Y_T\}}\Big]. \end{aligned}$$

Rappel : Changement de numéraire

— Soit $(\mathbb{Q}^\alpha, \alpha_t)$ une mesure de probabilité et un numéraire de référence, c'est-à-dire que pour tout actif Z_t ne versant pas de dividendes, le processus $\dfrac{Z_t}{\alpha_t}$ est une $\mathbb{Q}^\alpha$-martingale.

— Soit (β_t) un *numéraire simple*, c'est-à-dire un processus strictement positif tel que $\left(\dfrac{\beta_t}{\alpha_t}\right)_t$ soit une $\mathbb{Q}^\alpha$-martingale.

Alors :

i) Il existe une mesure $\mathbb{Q}^\beta$ équivalente à $\mathbb{Q}^\alpha$ telle que

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^\beta}{d\mathbb{Q}^\alpha}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\alpha_0}{\alpha_t}\frac{\beta_t}{\beta_0}.$$

De plus, pour tout F_T v.a,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\alpha}\left[\frac{\alpha_t}{\alpha_T} F_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\beta}\left[\frac{\beta_t}{\beta_T} F_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

ii) Si $\dfrac{Z_t}{\alpha_t}$ est une $\mathbb{Q}^\alpha$-martingale, alors $\dfrac{Z_t}{\beta_t}$ est une $\mathbb{Q}^\beta$-martingale.

Changement de numéraire Z. Définissons la mesure $\mathbb{Q}^Z$ par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^Z}{d\mathbb{Q}^{€}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{e^{-r^{€}T} Z_T}{Z_0}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{€}}\Big[e^{-r^{€}T} Z_T\,\mathbf{1}_{\{Z_T \geq X_T Y_T\}}\Big] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}\Big[\frac{Z_0}{Z_T} Z_T \mathbf{1}_{\{Z_T \geq X_T Y_T\}}\Big] \\
&= Z_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}\Big[\mathbf{1}_{\{Z_T \geq X_T Y_T\}}\Big] \\
&= Z_0\,\mathbb{Q}^Z\big(Z_T \geq X_T Y_T\big) \\
&= Z_0\,\mathbb{Q}^Z\big(\frac{X_T Y_T}{Z_T} \leq 1\big)
\end{aligned}$$

loi du $\frac{X_T Y_T}{Z_T}$ sous $\mathbb{Q}^Z$:

Comme Z_t est choisi comme numéraire, donc sous la mesure $\mathbb{Q}^Z$ on a que $\big(\frac{X_t Y_t}{Z_t}\big)_t$ est une martingale.

Donc :

$$d\left(\frac{X_t Y_t}{Z_t}\right) = \frac{X_t Y_t}{Z_t}\,\big[\big(\sigma_X + \sigma_Y - \sigma_Z\big) \cdot dW_t^Z\big]\,,$$

où W_t^Z est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}^Z$ et le drift est nul (martingale).

On en déduit que le processus est une exponentielle stochastique :

$$\frac{X_t Y_t}{Z_t} = \frac{X_0 Y_0}{Z_0}\,\exp\Big\{\big(\sigma_X + \sigma_Y - \sigma_Z\big) \cdot W_t^Z - \tfrac{1}{2}\big\|\sigma_X + \sigma_Y - \sigma_Z\big\|^2 t\Big\}.$$

Soit

$$\sigma := \sigma_X + \sigma_Y - \sigma_Z \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} := \|\sigma\|$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}^Z\left(\frac{X_T Y_T}{Z_T} \leq 1\right) &= \mathbb{Q}^Z\left(\ln \frac{X_T Y_T}{Z_T} \leq 0\right) \\
&= \Phi\left(\frac{0 - \Big(\ln \frac{X_0 Y_0}{Z_0} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 T\Big)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right) \qquad \big(\text{on a } \sigma.W_T^Z = \hat{\sigma}\sqrt{T}G \ \text{ avec } G \sim \mathcal{N}(0,1)\big) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\big(\frac{Z_0}{X_0 Y_0}\big) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.

Donc :

$$\boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{€}}\Big[e^{-r^{€}T} Z_T\,\mathbf{1}_{\{Z_T \geq X_T Y_T\}}\Big] = Z_0 \Phi(d_1) \ avec \ \ d_1 = \frac{\ln\big(\frac{Z_0}{X_0 Y_0}\big) + \frac{1}{2}\,\hat{\sigma}^2 T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}}$$

Changement de numéraire XY. En prenant XY comme numéraire,

$$\frac{d\mathbb{Q}^{XY}}{d\mathbb{Q}^{€}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{e^{-r^{€}T} X_T Y_T}{X_0 Y_0},$$

on obtient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{€}}\Big[e^{-r^{€}T}X_TY_T\,\mathbf{1}_{\{Z_T\geq X_TY_T\}}\Big]=X_0Y_0\,\mathbb{Q}^{XY}\big(Z_T\geq X_TY_T\big)=X_0Y_0\,\mathcal{N}(d_2),$$

avec

$$d_2=d_1-\hat{\sigma}\sqrt{T}.$$

donc :

$$\boxed{C_0\;=\;Z_0\,\mathcal{N}(d_1)\;-\;X_0Y_0\,\mathcal{N}(d_2),\qquad d_1=\frac{\ln\!\big(\frac{Z_0}{X_0Y_0}\big)+\frac{1}{2}\,\hat{\sigma}^2T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}},\quad d_2=d_1-\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

1.4 Butterfly call

Exercice :

Butterfly call

Soient trois calls européens de même maturité T sur le même sous-jacent, aux strikes

$$K_1=15,\qquad K_2=20,\qquad K_3=25,$$

et de prix observés

$$C(K_1)=9,\quad C(K_2)=6,\quad C(K_3)=2.$$

Est-ce qu'il existe une opportunité d'arbitrage ?

Solution :

Convexité de $C(K,t)$ par rapport à K. On part de

$$C(K,t)=e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[(S_T-K)_+\,\big|\,\mathcal{F}_t\big].$$

Sous des conditions usuelles d'interversion dérivée/espérance, on dérive par rapport à K :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K}(K,t)&=e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial}{\partial K}(S_T-K)_+\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]=e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[-\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}\,\big|\,\mathcal{F}_t\big]\\&=-\,e^{-r(T-t)}\,\mathbb{Q}\big(S_T>K\,\big|\,\mathcal{F}_t\big).\end{aligned}$$

En dérivant à nouveau, on obtient :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(K,t)=e^{-r(T-t)}\,f_{S_T|\mathcal{F}_t}(K)\;\;\geq\;0,$$

où $f_{S_T|\mathcal{F}_t}$ est la densité conditionnelle de S_T donnée $\mathcal{F}_t$.
donc d'aprés l'inégalite de la convexite on a $\forall\,\lambda\in[0,1]\;\forall\,K_1,K_2$:

$$C(\lambda K_1+(1-\lambda)K_2)\;\leq\;\lambda C(K_1)+(1-\lambda)C(K_2).$$

ainis pour :

$$\begin{cases} K_1 = K - \Delta \\ K_2 = K \\ K_3 = K + \Delta \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a :

$$C(K_2) \leq \frac{1}{2}\big(C(K_1) + C(K_3)\big)$$

Vérification numérique. En remplaçant par les données de marché :

$$\frac{1}{2}\big[C(K_1) + C(K_3)\big] = \frac{1}{2}(9+2) = 5.5.$$

Or on observe

$$C(K_2) = 6 \ > \ 5.5,$$

ce qui viole l'inégalité de convexité. Il existe donc une **opportunité d'arbitrage**.

3) Stratégie d'arbitrage. La violation de convexité suggère la stratégie dite de *butterfly* :

$$\text{Portefeuille} = \text{long 1 call strike } K_1 + \text{long 1 call strike } K_3 - \text{short 2 calls strike } K_2.$$

Coût initial. Le coût à $t = 0$ est

$$\Pi_0 = C(K_1) + C(K_3) - 2\,C(K_2) = 9 + 2 - 2 \times 6 = -1.$$

Un coût négatif signifie que l'on *encaisse* 1 euro à l'initiation.

Payoff à maturité. À l'échéance T, le payoff du portefeuille vaut

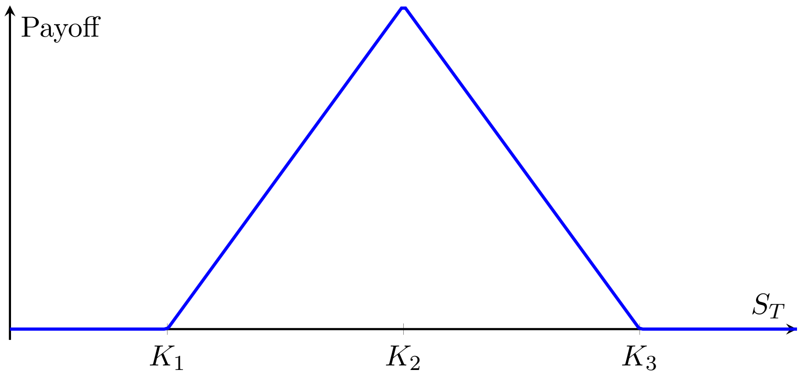
$$\begin{aligned} \Pi_T &= \big(S_T - K_1\big)_+ + \big(S_T - K_3\big)_+ - 2\big(S_T - K_2\big)_+ \\ &= \begin{cases} 0, & S_T \leq K_1, \\ S_T - K_1, & K_1 < S_T \leq K_2, \\ (K_2 - K_1) - (S_T - K_2) \ \geq 0, & K_2 < S_T \leq K_3, \\ (S_T - K_1) + (S_T - K_3) - 2(S_T - K_2) = 0, & S_T > K_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ici $K_2 - K_1 = K_3 - K_2 = \Delta = 5$, donc le payoff maximal vaut $\Delta = 5$.

Profit certain. Comme $\Pi_T \geq 0$ pour tout S_T et que l'on a reçu 1 euro initialement, le profit à la maturité est toujours positif ou nul :

$$\text{gain minimal} = 1$$

Représentation graphique.



Payoff du Call Butterfly Spread

1.5 Put Spread

Exercice :

Put Spread

On considère un sous-jacent S et deux options put européennes de même maturité T :

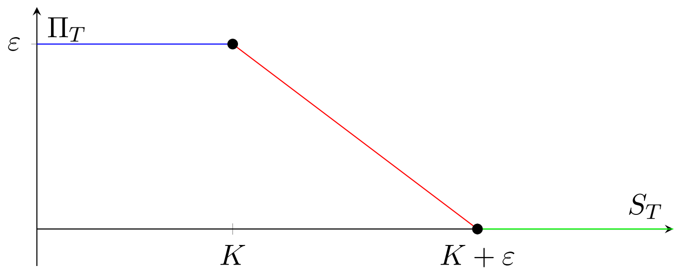
- un put de strike $K+\varepsilon$, de prix $P_1 = 10$;
- un put de strike K, de prix $P_2 = 11$.

On construit un *put spread* en achetant le put de strike $K+\varepsilon$ et en vendant le put de strike K.
Question : *y a-t-il une opportunité d'arbitrage ?*

Solution :

Payoff du put spread : Le payoff d'un put de strike K est $(K - S_T)^+$. Donc le payoff de la stratégie est

$$\Pi_T = (K+\varepsilon - S_T)^+ - (K - S_T)^+ = \begin{cases} \varepsilon, & S_T < K, \\ K+\varepsilon - S_T, & K \le S_T < K+\varepsilon, \\ 0, & S_T \ge K+\varepsilon. \end{cases}$$



Le prix d'une option put européenne est croissant par rapport au strike

Soit $P(K)$ le prix, au temps t, d'une option put de strike K et de maturité T. Sous la mesure risque-neutre, on a

$$P(K) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}\big[(K - S_T)_+ \,\big|\, \mathcal{F}_t\big].$$

On dérive $P(K)$ par rapport à K :

$$\frac{\partial P}{\partial K} = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial K}(K-S_T)_+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial K}(K-x)_+ = \mathbf{1}_{\{x<K\}},$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial K} = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{S_T<K\}} \,\big|\, \mathcal{F}_t\big].$$

En notant $\mathbb{P}^t(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid \mathcal{F}_t)$, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial K} = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{P}^t\big(S_T < K\big).$$

Comme $e^{-r(T-t)} > 0$ et que la probabilité est toujours positive,

$$\frac{\partial P}{\partial K} \geq 0.$$

Ainsi, le prix d'une option put européenne est bien **croissant** par rapport au strike K.

Donc, théoriquement $P(K+\varepsilon) > P(K)$,Or, d'après l'énoncé, $P(K+\varepsilon) = 10$ et $P(K) = 11$,donc il y a une opportunité d'arbitrage.

1.6 Parité call–put

Exercice :

Parité call–put

On considère des options européennes (call $C_t(K,T)$ et put $P_t(K,T)$) de même strike K et même maturité T, écrites sur un sous-jacent S_t ne versant pas de dividendes.

Question. Montrer la *parité call–put* :

$$C_t(K,T) - P_t(K,T) \;=\; S_t \;-\; K\,e^{-r(T-t)}.$$

Solution

Méthode 1 : Raisonnement d'arbitrage (réplication).

Considérons deux portefeuilles :

$$A := \begin{cases} \text{long 1 call } (K,T) \\ \text{long } Ke^{-r(T-t)} \text{ d'obligation zéro-coupon} \end{cases} \qquad B := \begin{cases} \text{long 1 put } (K,T) \\ \text{long 1 action } S \end{cases}$$

À l'échéance T, leurs payoffs valent

$$\Pi_T(A) = (S_T-K)_+ + K \;=\; \max(S_T,K),$$
$$\Pi_T(B) = (K-S_T)_+ + S_T \;=\; \max(S_T,K).$$

Donc $\Pi_T(A) = \Pi_T(B)$ pour tout S_T. Par absence d'arbitrage, leurs valeurs aujourd'hui doivent coïncider :

$$C_t(K,T) + Ke^{-r(T-t)} \; = \; P_t(K,T) + S_t \iff C_t(K,T) - P_t(K,T) \; = \; S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Méthode 2 : Par la mesure risque-neutre.

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} C_t(K,T) &= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[(S_T-K)_+ \,\big|\, \mathcal{F}_t\big], \\ P_t(K,T) &= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[(K-S_T)_+ \,\big|\, \mathcal{F}_t\big]. \end{aligned}$$

On utilise l'identité pointwise

$$(S_T-K)_+ - (K-S_T)_+ = S_T - K,$$

d'où

$$\begin{aligned} C_t(K,T) - P_t(K,T) &= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[S_T - K \,\big|\, \mathcal{F}_t\big] \\ &= e^{-r(T-t)}\Big(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid \mathcal{F}_t] - K\Big). \end{aligned}$$

Or, en absence de dividendes, $e^{-rt}S_t$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$, donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid \mathcal{F}_t] = S_t\, e^{r(T-t)}.$$

Par suite,

$$C_t(K,T) - P_t(K,T) = e^{-r(T-t)}\big(S_te^{r(T-t)} - K\big) = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Remarque : Si le sous-jacent verse un dividende continu au taux q, on a :

$$C_t - P_t \; = \; S_t\, e^{-q(T-t)} \; - \; K\, e^{-r(T-t)}.$$

1.7 contrat forward

Exercice :

Prix à terme (forward)

On considère un contrat de *forward* livrant 1 unité du sous-jacent S à la date T. On suppose d'abord que S ne verse pas de dividendes, puis on traite le cas d'un dividende continu au taux q. Le taux sans risque en capitalisation continue est r.

Questions.

1. Déterminer le *prix à terme* (ou *forward price*) $F_{t,T}$.
2. Donner la *valeur* au temps t d'un forward existant avec prix de livraison K.

Solution :

Considérons deux portefeuilles :

$$A := \begin{cases} \text{long 1 action } S, \\ \text{short 1 zéro-coupon de nominal } F(t,T) \text{ (échéance } T). \end{cases} \qquad B := \left\{ \text{long 1 contrat forward} \right. .$$

À la date t :

— $V_A(t) = S_t - F(t,T)\,B(t,T)$, où $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$ est le prix du zéro-coupon.

— $V_B(t) = 0$ (un forward s'échange sans coût initial).

À la date T :

— $V_A(T) = S_T - F(t,T)$.

— $V_B(T) = S_T - F(t,T)$ (on reçoit le sous-jacent et on paie le prix à terme).

Comme $V_A(T) = V_B(T)$ pour tout S_T, l'absence d'opportunité d'arbitrage impose

$$V_A(t) = V_B(t) \implies S_t - F(t,T)\,B(t,T) = 0 \implies F(t,T) = \frac{S_t}{B(t,T)} = S_t\,e^{r(T-t)}.$$

Méthode 2 : Sous la mesure risque-neutre.

Sous $\mathbb{Q}$, sans dividendes, $e^{-rt}S_t$ est une martingale, donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid \mathcal{F}_t] \;=\; S_t\,e^{r(T-t)} \quad\implies\quad F_{t,T} \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid \mathcal{F}_t] \;=\; S_t\,e^{r(T-t)}.$$

Avec un dividende continu q, la dynamique neutre au risque vérifie $\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)\,dt + \sigma\,dW_t$, d'où

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid \mathcal{F}_t] \;=\; S_t\,e^{(r-q)(T-t)} \quad\implies\quad F_{t,T} \;=\; S_t\,e^{(r-q)(T-t)}.$$

Troisième partie

Algo

voir le lien : Github repo

Quatrième partie

Brain Teasers

Chapitre 1

Brain Teasers

1.1 Carré magique 3×3

Exercice :

Carré magique 3×3

Un *carré magique* d'ordre 3 est une grille 3×3 contenant les entiers 1 à 9 chacun une seule fois, telle que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soit la même.

Question : Combien existe-t-il de carrés magiques distincts d'ordre 3 ?

Solution :

Dans un carré magique 3×3 utilisant $\{1, \ldots, 9\}$, la somme totale vaut

$$1 + 2 + \cdots + 9 = 45.$$

Comme il y a 3 lignes de même somme, la *constante magique* est

$$M = \frac{45}{3} = 15.$$

On considère un carré générique

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } \{a_1, \ldots, a_9\} = \{1, \ldots, 9\}.$$

Observation clé : la case centrale. On a :

$$\begin{cases} a_1 + a_5 + a_9 = 15 \\ a_3 + a_5 + a_7 = 15 \\ a_2 + a_5 + a_8 = 15 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 15 \end{cases}$$

donc on voit bien la case a_5 appartient à toutes les sommes de $a_1, \ldots.., a_9$

donc la seule valeur possible pour la case centrale est

$$a_5 = 5.$$

Conséquence : paires opposées. Les deux diagonales, les colonnes et les lignes passant par le centre imposent

$$a_1 + a_9 = 15 - a_5 = 10, \quad a_3 + a_7 = 10, \quad a_2 + a_8 = 10, \quad a_4 + a_6 = 10.$$

Ainsi, les 4 paires disjointes qui doivent apparaître en positions opposées (par rapport au centre) sont exactement

$$\{1, 9\}, \ \{2, 8\}, \ \{3, 7\}, \ \{4, 6\}.$$

Répartition coins / milieux d'arêtes. On montre (et c'est classique) que les nombres pairs $\{2, 4, 6, 8\}$ doivent occuper les *coins* et les nombres impairs extrêmes $\{1, 3, 7, 9\}$ les *milieux d'arêtes*. En effet, si un coin était occupé par un impair extrême (disons 1), alors sa case opposée devrait être 9 (pour sommer 10), forçant des configurations incompatibles avec les sommes 15 sur les lignes et colonnes correspondantes. Cette contrainte est cohérente avec les paires ci-dessus et mène au schéma :

$$\text{coins : } \{2, 4, 6, 8\}, \qquad \text{milieux d'arêtes : } \{1, 3, 7, 9\}, \qquad \text{centre : } 5.$$

Complétion (exemple). Plaçons, sans perte de généralité (par symétries du carré), 8 en haut à gauche. Alors la case opposée (bas droite) est 2. En complétant les lignes/colonnes/diagonales à somme 15 avec les paires ci-dessus, on obtient le carré

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix},$$

qui est bien magique (chaque ligne/colonne/diagonale somme à 15).

Nombre de carrés magiques 3×3.

On travaille avec les entiers $\{1, \ldots, 9\}$ et constante magique $M = 15$. On sait (voir solution précédente) que :

- le centre vaut nécessairement 5 ;
- les cases opposées par rapport au centre somment à 10 ;
- les *coins* contiennent exactement $\{2, 4, 6, 8\}$ et les *milieux d'arêtes* contiennent exactement $\{1, 3, 7, 9\}$.

Étape 1 — Choix du coin de 2 (4 possibilités). Plaçons le nombre 2 dans un coin quelconque. Il y a 4 coins, donc 4 choix possibles.

Étape 2 — Choix de la position de 1 (2 possibilités). une fois 2 fixé à un coin, il existe exactement *deux* façons admissibles de placer le 1.

donc :

$$\boxed{\#\{\text{carrés magiques } 3 \times 3\} \ = \ 4 \times 2 \ = \ 8}.$$

voici tous les carrés magiques de taille 3×3 construits à partir de $\{1, \ldots, 9\}$

$$\begin{pmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&3&4\\1&5&9\\6&7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{pmatrix}$$

1.2 Le problème des 5 pirates

Exercice :

Le problème des 5 pirates

Cinq pirates, numérotés de P_1 (le plus âgé) à P_5 (le plus jeune), doivent se partager un trésor de 100 pièces d'or. La procédure est la suivante :

- Le pirate le plus âgé encore en vie propose un partage.
- Tous votent (lui inclus). En cas d'égalité, la proposition est acceptée.
- Si la proposition est rejetée, le pirate qui a proposé est jeté par-dessus bord, et on recommence avec les survivants.

Les pirates sont parfaitement rationnels et obéissent à trois principes :

- Ils veulent avant tout **maximiser leur nombre de pièces**.
- S'il y a égalité, ils préfèrent **survivre**.
- S'il y a encore égalité, ils préfèrent jeter les autres pirates à la mer.

Question : Quelle répartition des 100 pièces propose P_1, et combien de pièces obtient chaque pirate ?

Solution :

On raisonne par *récurrence inversée* (backward induction).

Cas 1 : 1 pirate (P_5). Il garde tout : $(0, 0, 0, 0, 100)$.

Cas 2 : 2 pirates (P_4, P_5). P_4 propose $(100, 0)$: il vote pour, P_5 contre, égalité $\Rightarrow$ acceptée.

Cas 3 : 3 pirates (P_3, P_4, P_5). Si P_3 est tué, reste $(100, 0)$ pour (P_4, P_5). P_5 sait qu'il recevra 0. Donc P_3 peut acheter le vote de P_5 en lui donnant 1 : $(99, 0, 1)$.

Cas 4 : 4 pirates (P_2, P_3, P_4, P_5). Si P_2 est tué, on est dans le cas précédent $(99, 0, 1)$. P_4 sait qu'il aura 0. Donc P_2 s'assure du soutien de P_4 en lui donnant 1 : $(99, 0, 1, 0)$.

Cas 5 : 5 pirates (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5). Si P_1 est tué, partage précédent $(99, 0, 1, 0)$. P_2 obtient 99, P_4 obtient 1, les autres 0.

Donc P_1 doit acheter 2 votes supplémentaires pour avoir la majorité (3 sur 5). Il sait que P_3 et P_5 reçoivent 0 si P_1 est tué. Il peut donc leur donner chacun 1 pièce, et garder 98.

$$(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = (98, 0, 1, 0, 1).$$

Réponse. Le pirate le plus âgé P_1 propose :

$$\boxed{\text{98 pièces pour lui, 1 pièce pour } P_3, \text{ 1 pièce pour } P_5, \text{ et 0 pour } P_2, P_4.}$$

1.3 Tigres et mouton

Exercice :

Tigres et mouton

Sur une île magique, on place n tigres et un mouton. Les tigres peuvent manger de l'herbe, mais préfèrent le mouton. Règles :

- (A) À chaque fois, un seul tigre peut manger le mouton. S'il le mange, ce tigre se transforme immédiatement en mouton.
- (B) Tous les tigres sont parfaitement rationnels et veulent survivre.

Le mouton sera-t-il mangé ? Donner la réponse en fonction de n et conclure pour $n = 100$.

Solution

Idée : raisonnement par récurrence (rétrograde) sur n.

Cas de base.

$$\begin{aligned} n = 1 &: \text{ le tigre mange le mouton (il ne risque rien).} \\ n = 2 &: \text{ aucun ne mange (qui mangerait deviendrait mouton et serait mangé).} \end{aligned}$$

Hérédité. Supposons vrai jusqu'à $n-1$: *le mouton est mangé ssi le nombre de tigres est impair.*

- Si n est **impair**, un tigre peut manger : il devient mouton et il reste $n-1$ tigres, **pair**. Par l'hypothèse, avec un nombre pair de tigres, aucun ne mangera le nouveau mouton. $\Rightarrow$ C'est sûr pour lui, donc **un tigre mange**.
- Si n est **pair**, si un tigre mange il reste $n-1$ tigres, **impair** : par l'hypothèse, avec un nombre impair de tigres, l'un d'eux mangera le nouveau mouton (qui est l'ex-mangeur). $\Rightarrow$ C'est dangereux, donc **personne ne mange**.

Conclusion.

$$\boxed{\text{Le mouton est mangé} \iff n \text{ est impair}}.$$

Pour $n = 100$ (pair), **le mouton n'est pas mangé**.

1.4 River crossing

Exercice :

River crossing

Quatre personnes A, B, C, D doivent traverser une rivière sur un vieux pont qui ne supporte qu'au plus deux personnes à la fois. Il fait nuit : on ne peut traverser sans la torche, et il n'y en a qu'une. Lorsqu'ils traversent à deux, ils avancent à la vitesse du plus lent. Les temps de traversée sont : $A = 10$ min, $B = 5$ min, $C = 2$ min, $D = 1$ min. *Quel est le temps minimal pour que tout le monde traverse ?*

Solution :

River crossing

Four people, A, B, C and D need to get across a river. The only way to cross the river is by an old bridge, which holds at most 2 people at a time. Being dark, they can't cross the bridge without a torch, of which they only have one. So each pair can only walk at the speed of the slower person. They need to get all of them across to the other side as quickly as possible. A is the slowest and takes 10 minutes to cross; B takes 5 minutes; C takes 2 minutes; and D takes 1 minute.

What is the minimum time to get all of them across to the other side?[1]

Solution: The key point is to realize that the 10-minute person should go with the 5-minute person and this should not happen in the first crossing, otherwise one of them have to go back. So C and D should go across first (2 min); then send D back (1min); A and B go across (10 min); send C back (2min); C and D go across again (2 min).

It takes 17 minutes in total. Alternatively, we can send C back first and then D back in the second round, which takes 17 minutes as well.

Figure 1.1 – river crossing green book

1.5 Problème d'anniversaire

Exercice :

Problème d'anniversaire

Toi et tes collègues savez que l'anniversaire de votre patron A est l'une des 10 dates suivantes :

- **4 mars**, **5 mars**, **8 mars**
- **4 juin**, **7 juin**
- **1$^{\text{er}}$ septembre**, **5 septembre**
- **1$^{\text{er}}$ décembre**, **2 décembre**, **8 décembre**

A t'a dit **uniquement le mois** de son anniversaire, et il a dit à ton collègue C **uniquement le jour** (le chiffre).
Après cela, tu dis d'abord :

> « **Je ne connais pas** l'anniversaire de A ; **C ne le connaît pas non plus**. »

Après t'avoir entendu, C répond :

> « **Je ne connaissais pas** l'anniversaire de A, **mais maintenant je le connais**. »

Tu souris et dis alors :

> « **Moi aussi, maintenant je le connais**. »

Après avoir regardé les 10 dates et entendu vos remarques, votre assistant administratif **a écrit la date d'anniversaire de A sans poser de question**.
Question : Quelle date l'assistant a-t-il écrite ?

Solution

Données filtrées par le premier énoncé. Tu sais que C ne peut pas connaître la date *rien qu'avec le jour*. Les jours *uniques* dans la liste sont

7 (uniquement le 7 juin) et **2** (uniquement le 2 décembre).

Donc si le mois était *juin* ou *décembre*, il *pourrait* arriver que C sache immédiatement (si le jour était 7 ou 2). Comme tu affirmes que C ne peut pas savoir, le mois n'est **ni juin ni décembre**. Il reste **mars** et **septembre** :

$$\{\ 4 \text{ mars},\ 5 \text{ mars},\ 8 \text{ mars},\ 1^{\text{er}} \text{ sept.},\ 5 \text{ sept.}\ \}.$$

Après ton annonce, C sait maintenant. Dans l'ensemble restant, les jours qui identifient *une date unique* sont

1 (seulement 1$^{\text{er}}$ sept.), 4 (seulement 4 mars), 8 (seulement 8 mars).

Le jour **5** reste ambigu (5 mars ou 5 sept.). Donc si C *vient* de savoir, son jour n'est pas 5 : le jour est **1**, **4** ou **8**.

Tu sais maintenant toi aussi. Si ton mois était **mars**, il resterait deux possibilités (4 mars ou 8 mars) et tu ne pourrais pas trancher. Comme tu sais désormais, ton mois ne peut pas être mars : il est **septembre**. Avec septembre et un jour dans $\{1, 4, 8\}$, la seule date possible est **1er septembre**.

Réponse.

$$\boxed{1^{\text{er}} \text{ septembre}}$$

1.6 Jeu de cartes

Exercice :

jeu de cartes

Un casino propose un jeu de cartes utilisant un paquet normal de 52 cartes. La règle est la suivante : on retourne deux cartes à la fois.

— Si les deux cartes sont **noires**, elles vont dans la pile du croupier.

— Si les deux cartes sont **rouges**, elles vont dans votre pile.

— Si l'une est noire et l'autre rouge, elles sont écartées.

On répète l'opération jusqu'à épuisement des 52 cartes. Si vous avez plus de cartes dans votre pile que le croupier, vous gagnez \$100 ; sinon (égalité comprise) vous ne gagnez rien. Le casino vous permet de négocier le prix d'entrée pour participer. Combien seriez-vous prêt à payer pour jouer à ce jeu ?

Solution :

Notons :

$$\begin{cases} n_{RR} = \text{nombre de paires (rouge, rouge)}, \\ n_{BB} = \text{nombre de paires (noir, noir)}, \\ n_{RB} = \text{nombre de paires (une rouge, une noire)}. \end{cases}$$

Les paires RR vont dans *votre* pile (2 cartes chacune), les paires BB dans la pile du croupier (2 cartes chacune), et les paires RB sont écartées.

En comptant les couleurs dans tout le paquet (52 cartes, donc 26 rouges et 26 noires), on obtient les identités

$$2n_{RR} + n_{RB} = 26 \qquad \text{(cartes rouges)}$$

$$2n_{BB} + n_{RB} = 26 \qquad \text{(cartes noires)}.$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve $2n_{RR} = 2n_{BB}$, donc

$$n_{RR} = n_{BB}.$$

Par conséquent, la taille de votre pile vaut $2n_{RR}$ et celle du croupier vaut $2n_{BB}$: elles sont toujours égales, quel que soit l'ordre des cartes.

Ainsi, vous n'aurez *jamais* strictement plus de cartes que le croupier ; le résultat est toujours une égalité (ou, selon la règle, aucun gain pour vous). La valeur espérée du jeu est donc nulle, et le juste prix à payer pour jouer est

$$\boxed{0}.$$

1.7 Deux cordes

Exercice :

deux cordes

Vous disposez de deux cordes. Chacune prend exactement **1 heure** pour se consumer entièrement si on l'allume par une seule extrémité. Cependant, la vitesse de combustion n'est pas uniforme le long d'une corde (certaines sections brûlent plus vite que d'autres), de sorte qu'on ne peut pas supposer que la moitié de la corde prend 30 minutes à brûler, etc.
En utilisant uniquement ces deux cordes et des allumettes, comment mesurer **45 minutes** ?

Solution :

Allumez simultanément **les deux extrémités de la première corde** et **une seule extrémité de la seconde corde**.

Pourquoi ? Allumer une corde par ses deux extrémités la fait brûler deux fois plus vite *quelle que soit* l'irrégularité de densité : la durée totale est divisée par deux. Ainsi, la première corde se consume en 30 minutes.

Après 30 minutes, la première corde est entièrement brûlée. À cet instant, allumez **l'autre extrémité de la seconde corde**.

Jusqu'ici, la seconde corde a brûlé pendant 30 minutes à partir d'une seule extrémité ; il lui reste donc l'équivalent de 30 minutes de combustible (quelle que soit la répartition le long de la corde). En l'allumant maintenant par l'autre extrémité, la portion restante se consume deux fois plus vite : elle met $30/2 = 15$ minutes à disparaître.

Ainsi, le temps total écoulé est

$$30 \text{ minutes} + 15 \text{ minutes} = \boxed{45 \text{ minutes.}}$$

1.8 Jeu en 2D

Exercice :

Jeu en 2D

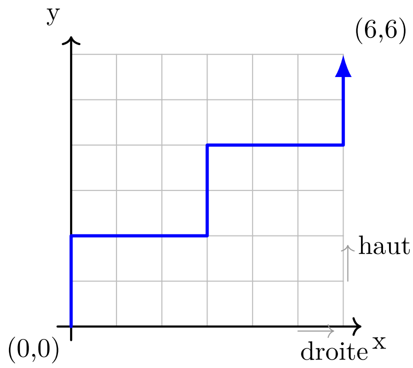
Dans un jeu en 2D, votre personnage est enfermé dans une grille 6×6. Il démarre en $(0, 0)$ (coin en bas à gauche) et ne peut se déplacer que vers le **haut** ou vers la **droite**. Combien de chemins possibles mènent au point $(6, 6)$?

Solution :

Pour atteindre $(6,6)$ depuis $(0,0)$, il faut effectuer exactement 6 déplacements vers la droite (R) et 6 vers le haut (U), soit 12 pas au total. Chaque chemin correspond à une permutation de la suite de 12 mouvements contenant 6 R et 6 U. Le nombre de chemins est donc le coefficient binomial

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\,6!} = 924.$$

$$\boxed{924}$$



Une grille 6×6. *En bleu, un chemin possible parmi* 924.

1.9 Say 50

Exercice :

Say 50

Vous et votre ami jouez à un jeu : chacun, à tour de rôle, choisit un entier entre 1 et 10 (inclus) et l'ajoute à un total cumulatif. Celui qui *énonce* pour la première fois le nombre 50 gagne la partie. Vous commencez. Quel nombre devez-vous dire en premier ?

Solution :

L'idée est de se réserver des *jalons* que l'on pourra toujours atteindre quel que soit le coup adverse. Ici, comme chaque paire de coups (adversaire + vous) peut totaliser au plus $10 + 10$ mais, surtout, vous pouvez toujours *compléter à* 11 le nombre de l'adversaire, les bons jalons sont les nombres espacés de 11.

Comme $50 \equiv 6 \pmod{11}$, on vise la suite de jalons

$$6,\ 17,\ 28,\ 39,\ 50.$$

Stratégie gagnante.

1. Dites d'abord $\boxed{6}$.
2. Puis, après chaque nombre $y \in \{1, \dots, 10\}$ annoncé par l'adversaire, répondez $11 - y$. Le total augmente alors de $y + (11 - y) = 11$ et passe successivement à $17, 28, 39$ puis 50 *à votre tour.*

Justification formelle. Par récurrence, supposons que juste après votre tour le total vaut $6+11k$ pour un certain $k \geq 0$. L'adversaire ajoute un $y \in \{1, \ldots, 10\}$, le total devient $6+11k+y$. En répondant $11-y$ (autorisé car $1 \leq 11-y \leq 10$), on obtient

$$6 + 11k + y + (11 - y) = 6 + 11(k + 1),$$

c'est-à-dire le jalon suivant. Pour $k = 0, 1, 2, 3$, on atteint finalement $6 + 11 \cdot 4 = 50$ à votre cinquième coup. L'adversaire ne peut pas l'empêcher.

Réponse : il faut dire $\boxed{6}$ en premier.

1.10 100 Ampoules

Exercice :

100 Ampoules

Dans une pièce, il y a 100 ampoules, chacune éteinte au départ, et disposant d'un interrupteur à son côté.
Le premier individu entre dans la pièce et actionne *tous* les interrupteurs, allumant ainsi toutes les ampoules. Le deuxième individu entre ensuite et actionne *un interrupteur sur deux* (c'est-à-dire ceux des ampoules numérotées $2, 4, 6, \ldots, 100$). Le troisième individu entre et actionne *un interrupteur sur trois* (ceux des ampoules $3, 6, 9, \ldots$).
Le processus continue ainsi : le n-ième individu actionne chaque n-ième interrupteur, jusqu'à ce que le 100-ième individu actionne uniquement le 100-ième interrupteur.

Question : Après le passage du 100-ième individu, combien d'ampoules restent allumées ?

Solution :

Idée générale. On numérote les lampes de 1 à 100. La personne k bascule *toutes* les lampes dont le numéro est multiple de k.

1. **Qui touche quelle lampe ?** La personne k agit sur la lampe i si et seulement si $k \mid i$. Ainsi, la lampe i est basculée autant de fois qu'elle a de diviseurs : soit $\tau(i)$.
2. **Quand une lampe finit-elle allumée ?** Chaque bascule inverse l'état. Au final, la lampe i est *allumée* si et seulement si elle a été basculée un nombre *impair* de fois, c'est-à-dire si $\tau(i)$ est impair.
3. **Parité de $\tau(i)$ et carrés parfaits.** Les diviseurs de i se couplent naturellement par paires $(d,\ i/d)$. On obtient donc en général un nombre *pair* de diviseurs. L'unique cas où un couple se « confond » est lorsque $d = i/d$, soit $d^2 = i$: autrement dit, lorsque i est un *carré parfait*. Ainsi, $\tau(i)$ est impair *si et seulement si* i est un carré parfait.
4. **Application à 100 lampes.** Les lampes allumées à la fin sont exactement celles d'indices carrés parfaits ≤ 100, à savoir $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$. Il y en a $\lfloor\sqrt{100}\rfloor = 10$.

$$\boxed{\text{Au final, 10 lampes restent allumées.}}$$