**Schémas de discrétisation et Méthodes de Monte Carlo**

Dans ce TP, on se place dans le modèle Heston

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^2 \end{aligned}$$

où $W^1$ et $W^2$ sont deux mouvements browniens standard réels satisfaisant $d\langle W^1, W^2\rangle_t = \rho dt$ et $\kappa$, $\theta$ et $\sigma$ sont des constantes positives. La discrétisation du modèle d'Heston pose des difficultés théoriques car le schéma d'Euler classique peut devenir négatif et dans ce cas le terme $\sqrt{v_t}$ n'est plus correctement défini. On considère alors un schéma d'Euler légèrement modifié pour discrétiser le processus de volatilité $v$. Soit $(t_k)_k$ une grille de discrétisation, on définit

$$\bar{v}_{t_{k+1}} = \bar{v}_{t_k} + \kappa(\theta - \bar{v}_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + \sigma\sqrt{(\bar{v}_{t_k})_+}(W^2_{t_{k+1}} - W^2_{t_k}).$$

De même, dans la discrétisation du sous-jacent, il convient de considérer $\sqrt{(v_t)_+}$ au lieu de $\sqrt{v_t}$ pour éviter tout problème de définition de la racine carrée.
On souhaite calculer le prix d'une option asiatique dans ce modèle, dont le payoff est donné par

$$\left(\frac{1}{T} A_T - K\right)_+ \quad \text{avec} \quad A_t = \int_0^t S_u du.$$

On discrétisera le processus $A$ en utilisant la méthode des trapèzes pour approcher l'intégrale. Sur une grille régulière de pas $T/N$, la méthode des trapèzes s'écrit

$$\frac{T}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} S^N_{t_k} - \frac{1}{2}(S^N_{t_0} + S^N_{t_N})\right)$$

où $S^N$ désigne le schéma d'Euler de $S$ sur la grille $\frac{kT}{N}$ pour $0 \le k \le N$. A titre indicatif, pour les paramètres $r = 0.03$, $S_0 = 100$, $K = 110$, $T = 2$, $\rho = -0.2$, $v_0 = 0.04$, $\kappa = 2$, $\theta = 0.04$, $\sigma = 0.01$, le prix de l'option est 3.847906.

# 1 Méthode de Monte Carlo classique

Dans cette première partie, on souhaite mettre en œuvre une méthode de Monte Carlo classique combinée à un schéma d'Euler pour approcher le prix à l'instant 0 de l'option asiatique.

**Question 1 :** Implémenter une méthode de Monte-Carlo à $M$ tirages utilisant $S^N$ pour approcher le prix de l'option asiatique $\mathrm{e}^{-rT}\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T} A_T - K\right)_+\right]$.

**Question 2 :** Calculer l'erreur quadratique moyenne (MSE dans la suite) de l'estimateur Monte Carlo, donnée par $\mathbb{E}\left[(\mathrm{MC} - \mathrm{Prix\_exact})^2\right]$. On remarquera que cette erreur se décompose comme la somme de deux termes : le bias de l'estimateur au carré et la variance de l'estimateur. L'espérance apparaissant dans la définition de la MSE n'étant pas calculable directement, on aura recours de nouveau à une méthode de Monte Carlo (quelques dizaines de tirages suffisent). Implémenter une fonction d'approximation de cette MSE.

## 2 Méthode de Monte Carlo multi-niveaux

**Question 3 :** Implémenter une méthode de Monte-Carlo multi-niveaux à $L$ niveaux pour approcher le prix de l'option asiatique.
**Question 4 :** Calculer empiriquement l'erreur quadratique de l'estimateur multi-niveaux.
**Question 5 :** Tracer sur un même graphique l'évolution de la MSE pour l'estimateur de Monte-Carlo classique et pour l'estimateur multi-niveaux en fonction du temps de calcul. On pourra réaliser ce graphique en échelle logarithmique pour les deux axes.